PART FOUR

قسمت چهارم

Curve Fitting

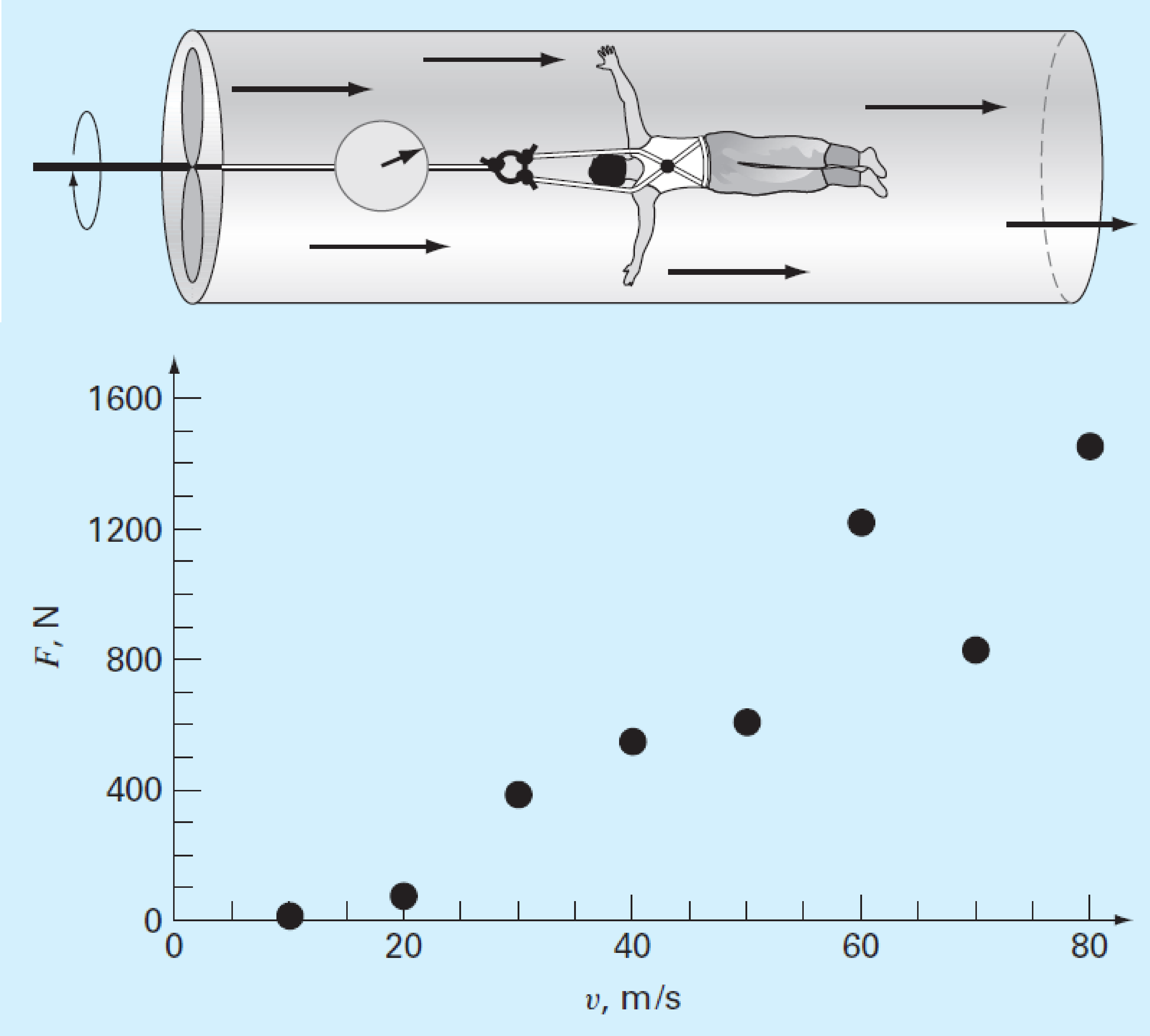
برازش داده ها

14

فصل چهاردهم

Linear Regression

برازش خطی


1600
1200
800
400
0
F, N
0
20
40
60
80
v, m/s

14.1.1 Descriptive Statistics توصیف آماری

Measure of Location.

arithmetic mean ($\bar{y}$) مقدار میانگین (تعیین کننده موقعیت داده ها)

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$$

median مقدار میانی

ابتدا داده ها به ترتیب مرتب می شوند. درصورتیکه تعداد داده ها فرد باشد عدد میانی داده ها انتخاب می شود. در صورتیکه تعداد داده ها زوج باشد میانگین دوعدد میانی محاسبه می شود.

mode داده های با تکرار بالا (غالب)

Measures of Spread. میزان پراکندگی

standard deviation (s_y) انحراف معیار

$$s_y = \sqrt{\frac{S_t}{n-1}} \qquad S_t = \sum (y_i - \bar{y})^2$$

variance: واریانس (تغییرات)

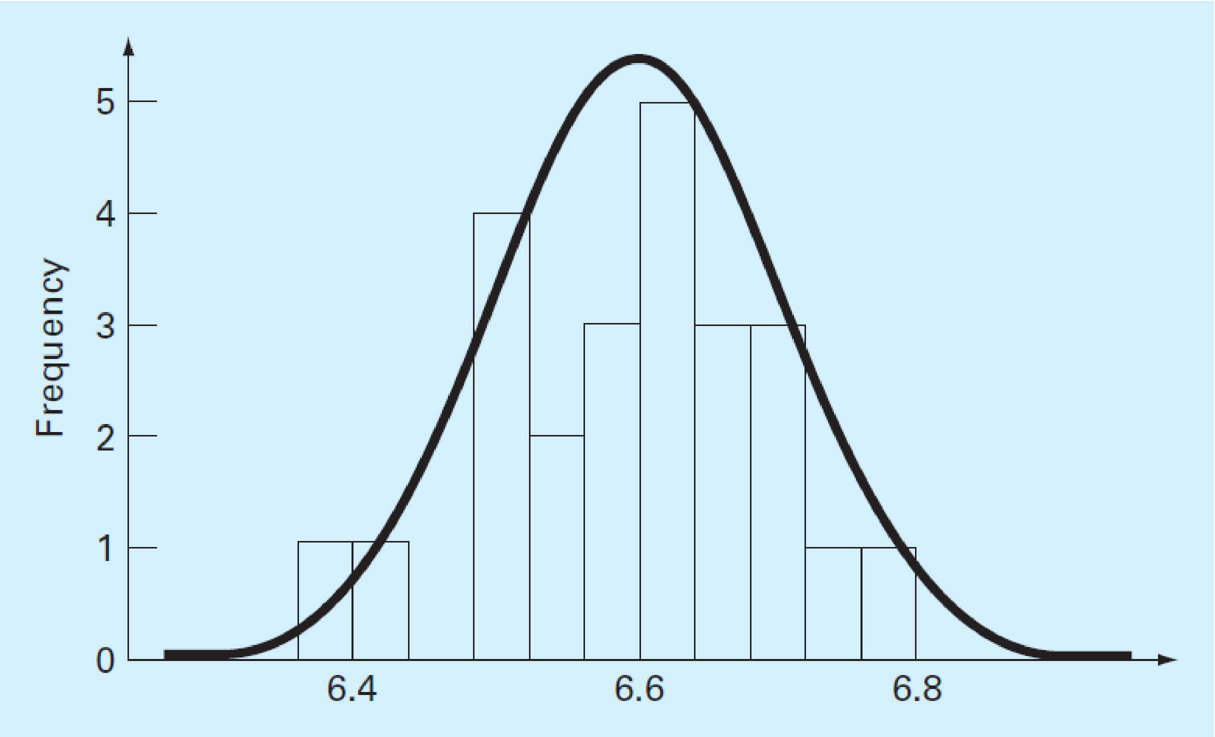
$$s_y^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n-1} \qquad s_y^2 = \frac{\sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2 / n}{n-1}$$

coefficient of variation (c.v.) ضریب تغییرات

$$\text{c.v.} = \frac{s_y}{\bar{y}} \times 100\%$$

14.1.2 The Normal Distribution توزیع نرمال

منحنی هیستوگرام میزان پراکندگی داده ها را نمایش می دهد. بدین منظور بازه پراکندگی داده ها به تعدادی زیربازه تقسیم شده و تعداد داده ها در هر زیربازه بر حسب زیربازه ها بصورت نمودار میله ای ترسیم می گردد. بطور کلی با افزایش تعداد داده ها و زیربازه ها شکل نمودار (زنگوله ای) از توزیع نرمال پیروی می کند.



مثال:

داده های مربوط به ضریب انبساط حرارتی فولاد در جدول زیر داده شده است. برای این داده ها مطلوبست:

الف) مقدار میانگین

ب) مقدار میانی

ج) انحراف معیار

د) واریانس

ه) ضریب تغییرات

و) نمودار پراکندگی

TABLE 14.2 Measurements of the coefficient of thermal expansion of structural steel.

6.495	6.595	6.615	6.635	6.485	6.555
6.665	6.505	6.435	6.625	6.715	6.655
6.755	6.625	6.715	6.575	6.655	6.605
6.565	6.515	6.555	6.395	6.775	6.685

i	y_i	$(y_i - \bar{y})^2$	y_i^2
1	6.395	0.04203	40.896
2	6.435	0.02723	41.409
3	6.485	0.01323	42.055
4	6.495	0.01103	42.185
5	6.505	0.00903	42.315
6	6.515	0.00723	42.445
7	6.555	0.00203	42.968
8	6.555	0.00203	42.968
9	6.565	0.00123	43.099
10	6.575	0.00063	43.231
11	6.595	0.00003	43.494
12	6.605	0.00002	43.626
13	6.615	0.00022	43.758
14	6.625	0.00062	43.891
15	6.625	0.00062	43.891
16	6.635	0.00122	44.023
17	6.655	0.00302	44.289
18	6.655	0.00302	44.289
19	6.665	0.00422	44.422
20	6.685	0.00722	44.689
21	6.715	0.01322	45.091
22	6.715	0.01322	45.091
23	6.755	0.02402	45.630
24	6.775	0.03062	45.901
$\sum$	158.400	0.21700	1045.657

الف) مقدار میانگین

$$\bar{y} = \frac{158.4}{24} = 6.6$$

ب) مقدار میانی

$$(6.605 + 6.615)/2 = 6.61$$

ج) انحراف معیار

$$s_y = \sqrt{\frac{0.217000}{24 - 1}} = 0.097133$$

د) واریانس

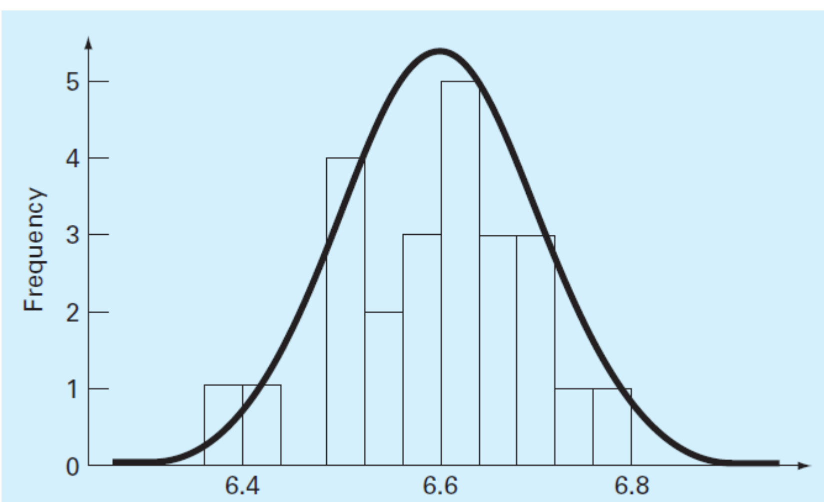
$$s_y^2 = (0.097133)^2 = 0.009435$$

$$s_y^2 = \frac{1045.657 - (158.400)^2/24}{24 - 1} = 0.009435$$

ه) ضریب تغییرات

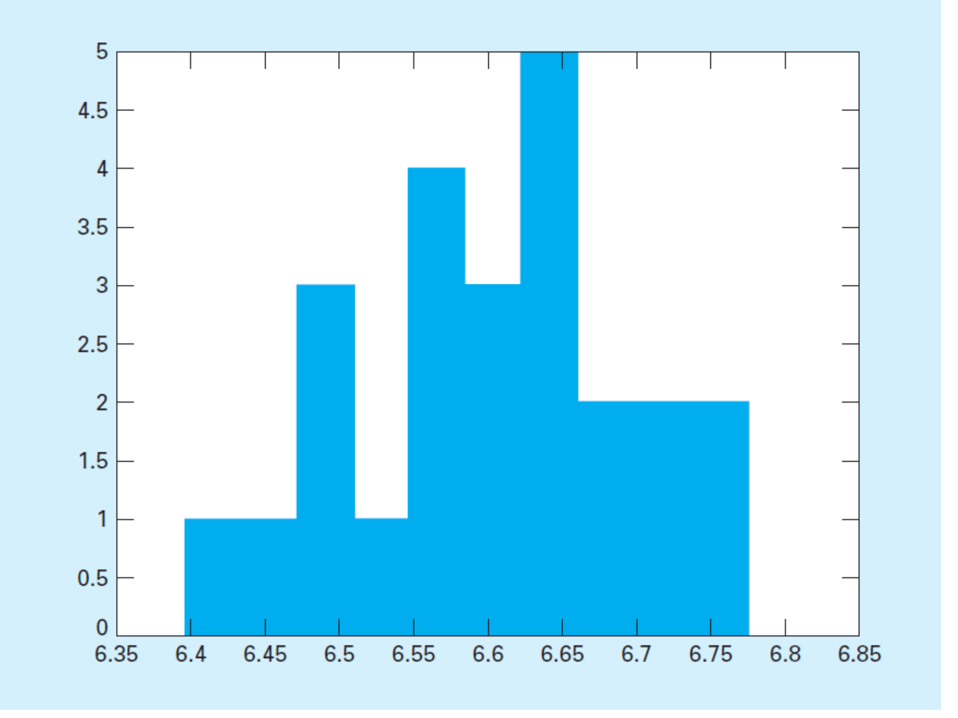
$$\text{c.v.} = \frac{0.097133}{6.6} \times 100\% = 1.47\%$$

و) نمودار پراکندگی



با استفاده از دستورات متلب

```
>> format short g
>> mean(s),median(s),mode(s)

ans =
              6.6

ans =
             6.61

ans =
            6.555

>> min(s),max(s)

ans =
            6.395

ans =
            6.775

>> range=max(s)-min(s)

range =
             0.38

>> var(s),std(s)

ans =
        0.0094348

ans =
         0.097133
```



[n, x] = hist(y, x)

```
>> [n,x] =hist(s)

n =
        1      1       3      1       4       3       5       2      2       2

x =
    6.414 6.452 6.49 6.528 6.566 6.604 6.642 6.68 6.718 6.756
```

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2$$

خطای نقاط حاصل از برازش نسبت به داده های واقعی

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2 \sum (y_i - a_0 - a_1 x_i)$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2 \sum [(y_i - a_0 - a_1 x_i) x_i]$$

$\Rightarrow$

$$0 = \sum y_i - \sum a_0 - \sum a_1 x_i$$

$$0 = \sum x_i y_i - \sum a_0 x_i - \sum a_1 x_i^2$$

$$n \quad a_0 + \left(\sum x_i\right) a_1 = \sum y_i$$

$$\left(\sum x_i\right) a_0 + \left(\sum x_i^2\right) a_1 = \sum x_i y_i$$

$\Rightarrow$

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x}$$

$$a_1 = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

مثال:

بهترین خط گذرنده از داده های زیر را تعیین کنید.

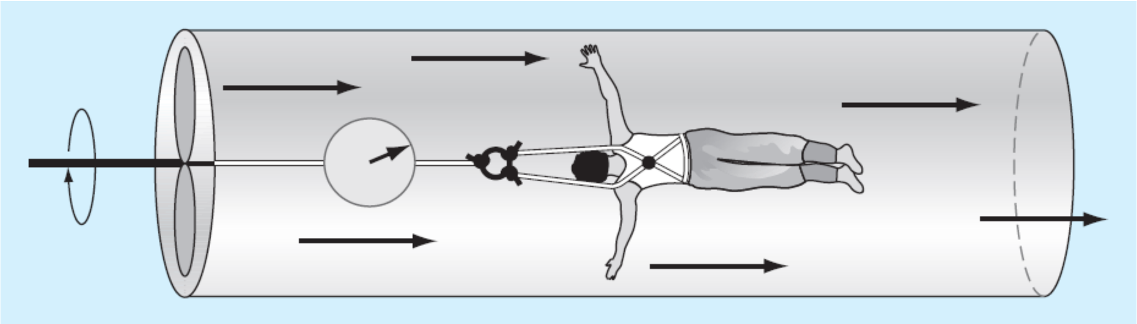
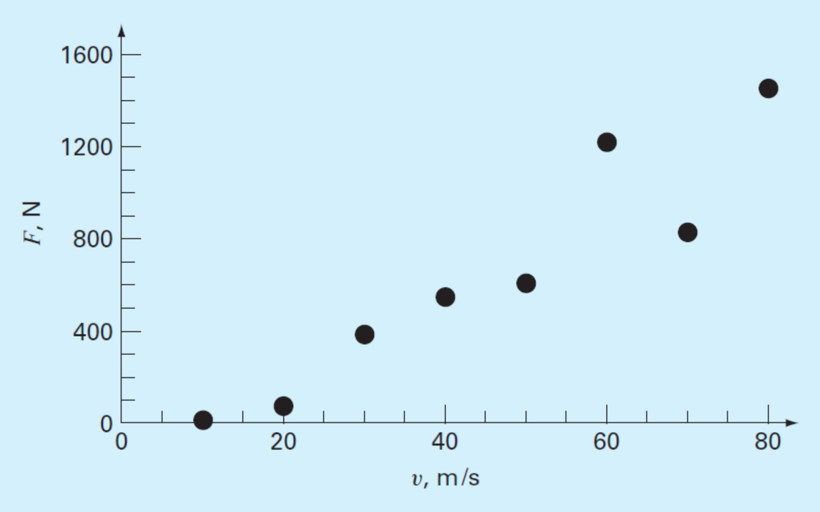


TABLE 14.1 Experimental data for force (N) and velocity (m/s) from a wind tunnel experiment.

v, m/s	10	20	30	40	50	60	70	80
F, N	25	70	380	550	610	1220	830	1450

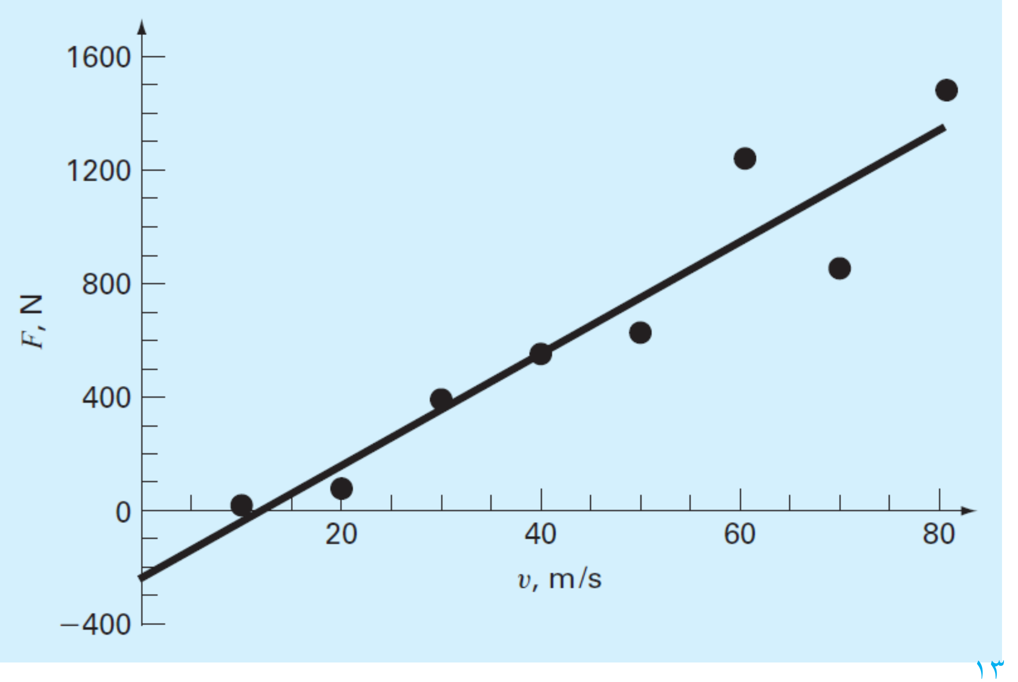


i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	10	25	100	250
2	20	70	400	1,400
3	30	380	900	11,400
4	40	550	1,600	22,000
5	50	610	2,500	30,500
6	60	1,220	3,600	73,200
7	70	830	4,900	58,100
8	80	1,450	6,400	116,000
Σ	360	5,135	20,400	312,850

$$\bar{x} = \frac{360}{8} = 45 \qquad \bar{y} = \frac{5,135}{8} = 641.875$$

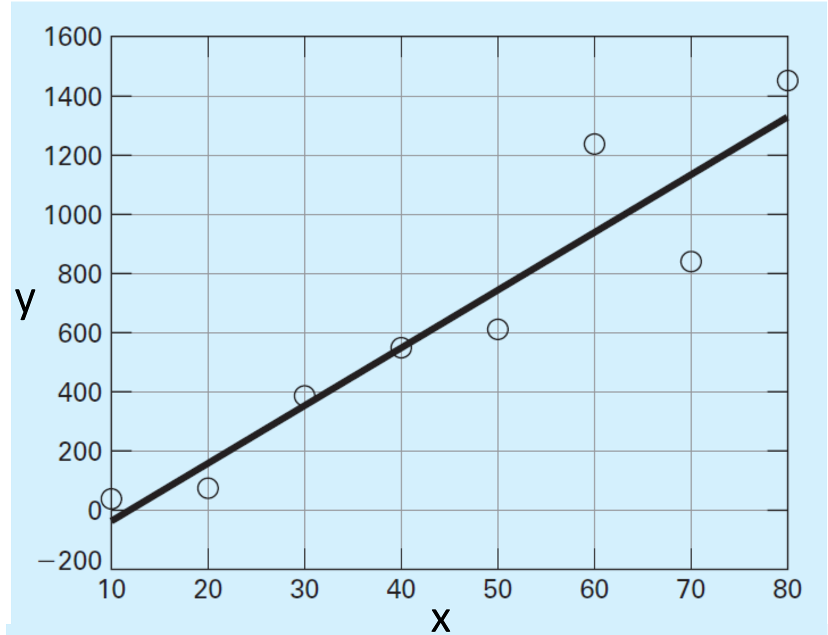
$$a_1 = \frac{8(312,850) - 360(5,135)}{8(20,400) - (360)^2} = 19.47024$$

$$a_0 = 641.875 - 19.47024(45) = -234.2857$$

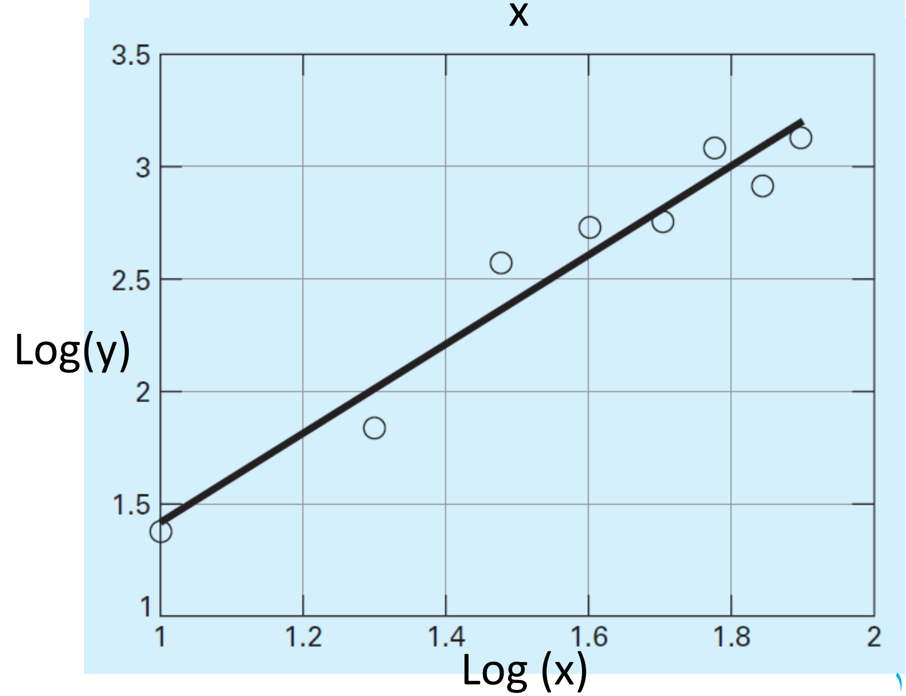


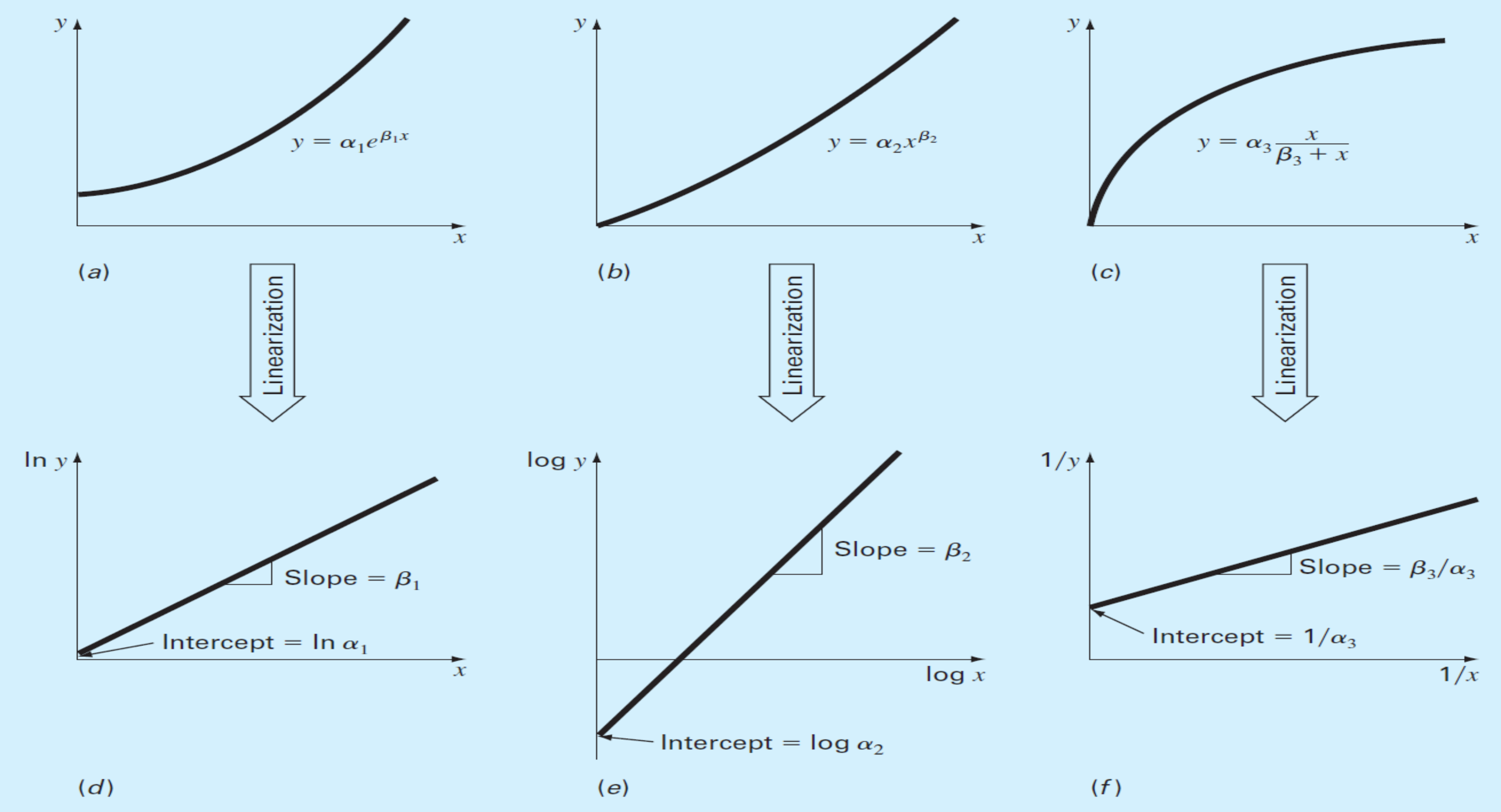
14.5.1 MATLAB M-file: `linregr` استفاده از تابع برازش خطی در متلب

```
>> x = [10 20 30 40 50 60 70 80];
>> y = [25 70 380 550 610 1220 830 1450];
>> linregr(x,y)

r2 =
    0.8805

ans =
   19.4702 -234.2857
```




```
>> linregr(log10(x),log10(y))

r2 =
    0.9481

ans =
    1.9842    -0.5620
```





$$y = \alpha_1 e^{\beta_1 x}$$

$$\ln y = \ln \alpha_1 + \beta_1 x$$

$$y = \alpha_2 x^{\beta_2}$$

$$\log y = \log \alpha_2 + \beta_2 \log x$$

$$y = \alpha_3 \frac{x}{\beta_3 + x}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{\alpha_3} + \frac{\beta_3}{\alpha_3} \frac{1}{x}$$

مثال:

معادله بهترین منحنی گذرنده از داده های زیر را تعیین کنید.

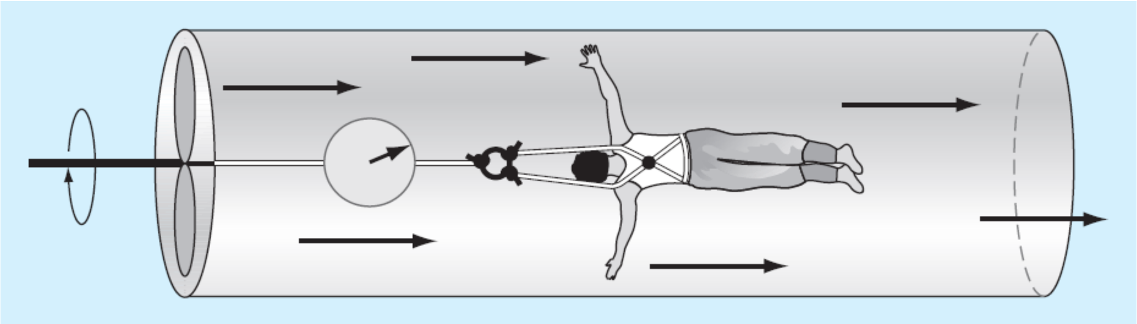
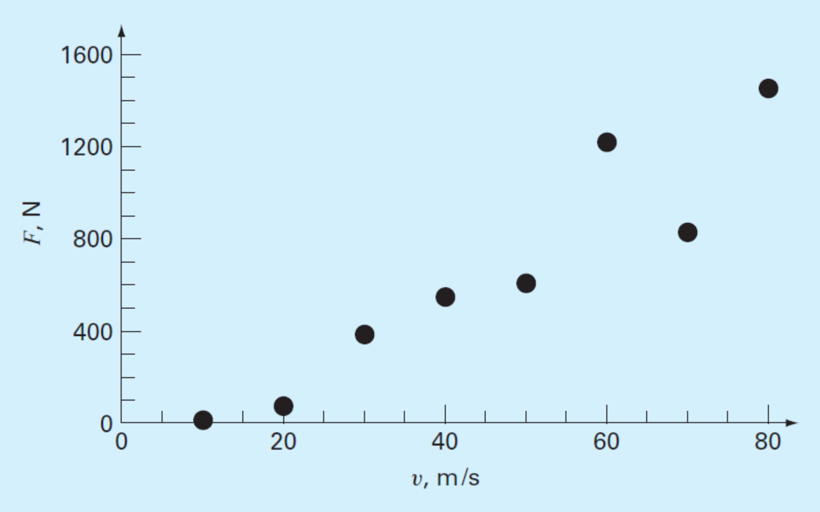


TABLE 14.1 Experimental data for force (N) and velocity (m/s) from a wind tunnel experiment.

v, m/s	10	20	30	40	50	60	70	80
F, N	25	70	380	550	610	1220	830	1450

$$y = \alpha_2 x^{\beta_2}$$



i	x_i	y_i	$\boxed{\log x_i}$	$\boxed{\log y_i}$	$(\log x_i)^2$	$\log x_i \log y_i$
1	10	25	1.000	1.398	1.000	1.398
2	20	70	1.301	1.845	1.693	2.401
3	30	380	1.477	2.580	2.182	3.811
4	40	550	1.602	2.740	2.567	4.390
5	50	610	1.699	2.785	2.886	4.732
6	60	1220	1.778	3.086	3.162	5.488
7	70	830	1.845	2.919	3.404	5.386
8	80	1450	1.903	3.161	3.622	6.016
Σ			12.606	20.515	20.516	33.622

$$\bar{x} = \frac{12.606}{8} = 1.5757 \qquad \bar{y} = \frac{20.515}{8} = 2.5644$$

$$y = \alpha_2 x^{\beta_2}$$

$$\log y = \boxed{\log \alpha_2} + \boxed{\beta_2} \log x$$

$$y = a_0 + a_1 x$$

$$a_1 = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x}$$

$$a_1 = \frac{8(33.622) - 12.606(20.515)}{8(20.516) - (12.606)^2} = 1.9842$$

$$a_0 = 2.5644 - 1.9842(1.5757) = -0.5620$$

$$\log y = -0.5620 + 1.9842 \log x$$

$$\alpha_2 = 10^{-0.5620} = 0.2741$$

$$\beta_2 = 1.9842$$

$$F = 0.2741 v^{1.9842}$$

تمرین ۱:

برای داده های زیر مطلوبست:

0.90	1.42	1.30	1.55	1.63
1.32	1.35	1.47	1.95	1.66
1.96	1.47	1.92	1.35	1.05
1.85	1.74	1.65	1.78	1.71
2.29	1.82	2.06	2.14	1.27

الف) میانگین

ب) مقدار میانی

ج) mode

د) محدوده تغییرات

ه)انحراف معیار

و)واریانس

ز) ضریب تغییرات

تمرین۲:

بهترین خط گذرنده از داده های زیر را با روش حداقل مربعات خطا تعیین کنید.

x	0	2	4	6	9	11	12	15	17	19
y	5	6	7	6	9	8	8	10	12	12

تمرین ۳:

داده های زیر مربوط به رابطه دما و فشار ۱ کیلوگرم (۱۰ متر مکعب) گاز نیترروژن است. قانون گاز ایده آل به صورت زیر می باشد:

$$pV = nRT$$

با استفاده از این قانون و داده های جدول برای نیتروژن مقدار ثابت گاز ایده آل (R) را محاسبه نمائید. در رابطه فوق n تعداد مول و T بر حسب کلوین می باشد.

T, °C	−40	0	40	80	120	160
p, N/m^2	6900	8100	9350	10,500	11,700	12,800

تمرین ۴:

داده های زیر را با استفاده از متلب در هر دو دستگاه استاندارد و نیمه لگاریتمی ترسیم نمائید. همچنین معادله منحنی نمایی مناسب داده ها را تعیین نمائید.

x	0.4	0.8	1.2	1.6	2	2.3
y	800	985	1490	1950	2850	3600

15 فصل پانزدهم

General Linear Least-Squares and Nonlinear Regression

حداقل مربعات خطا و برازش غیرخطی

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + e$$

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2\right)^2$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2 \sum \left(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2\right)$$

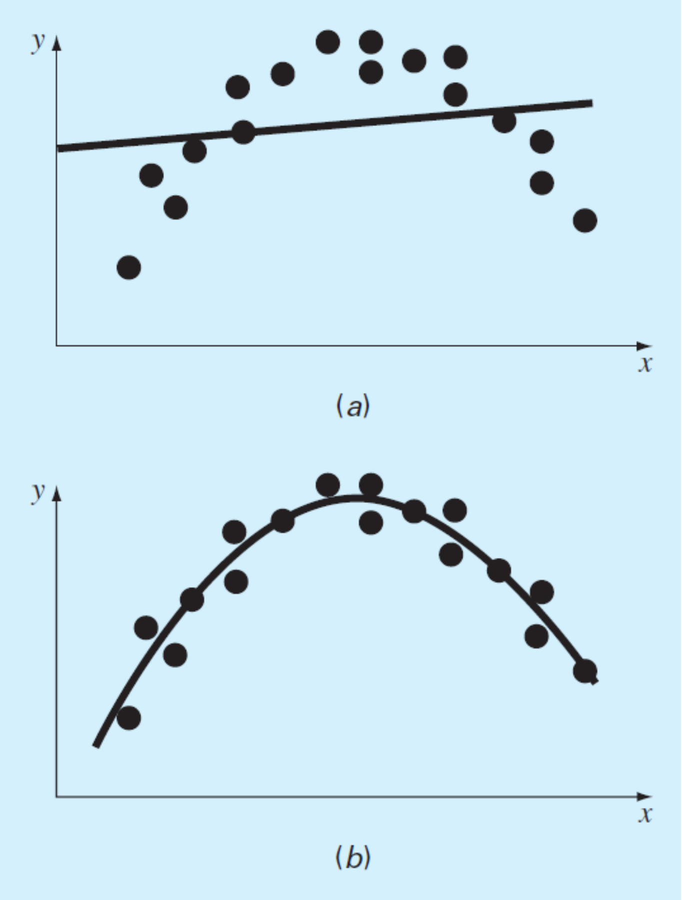
$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2 \sum x_i \left(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2\right)$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_2} = -2 \sum x_i^2 \left(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2\right)$$

$$(n) a_0 + \left(\sum x_i\right) a_1 + \left(\sum x_i^2\right) a_2 = \sum y_i$$

$$\left(\sum x_i\right) a_0 + \left(\sum x_i^2\right) a_1 + \left(\sum x_i^3\right) a_2 = \sum x_i y_i$$

$$\left(\sum x_i^2\right) a_0 + \left(\sum x_i^3\right) a_1 + \left(\sum x_i^4\right) a_2 = \sum x_i^2 y_i$$



مثال:

x_i	y_i	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2)^2$
0	2.1	544.44	0.14332
1	7.7	314.47	1.00286
2	13.6	140.03	1.08160
3	27.2	3.12	0.80487
4	40.9	239.22	0.61959
5	61.1	1272.11	0.09434
$\sum$	152.6	2513.39	3.74657

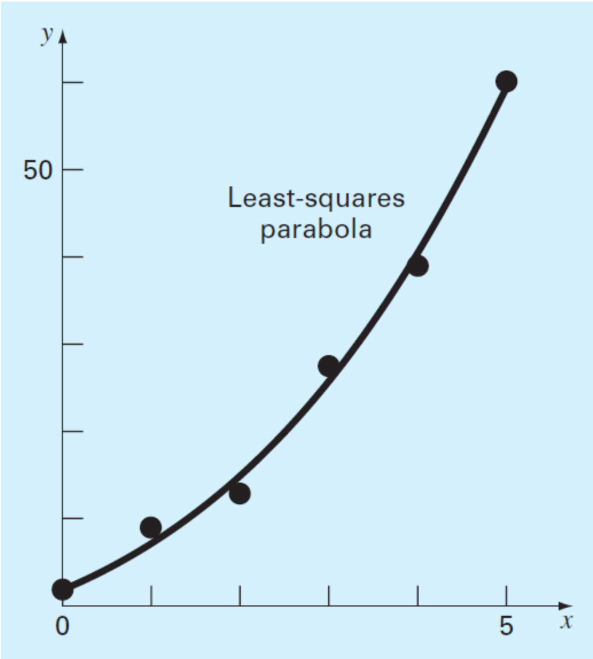
$$m = 2 \qquad \sum x_i = 15 \qquad \sum x_i^4 = 979$$
$$n = 6 \qquad \sum y_i = 152.6 \qquad \sum x_i y_i = 585.6$$
$$\bar{x} = 2.5 \qquad \sum x_i^2 = 55 \qquad \sum x_i^2 y_i = 2488.8$$
$$\bar{y} = 25.433 \qquad \sum x_i^3 = 225$$

$$(n)a_0 + \left(\sum x_i\right) a_1 + \left(\sum x_i^2\right) a_2 = \sum y_i$$
$$\left(\sum x_i\right) a_0 + \left(\sum x_i^2\right) a_1 + \left(\sum x_i^3\right) a_2 = \sum x_i y_i$$
$$\left(\sum x_i^2\right) a_0 + \left(\sum x_i^3\right) a_1 + \left(\sum x_i^4\right) a_2 = \sum x_i^2 y_i$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 152.6 \\ 585.6 \\ 2488.8 \end{Bmatrix}$$

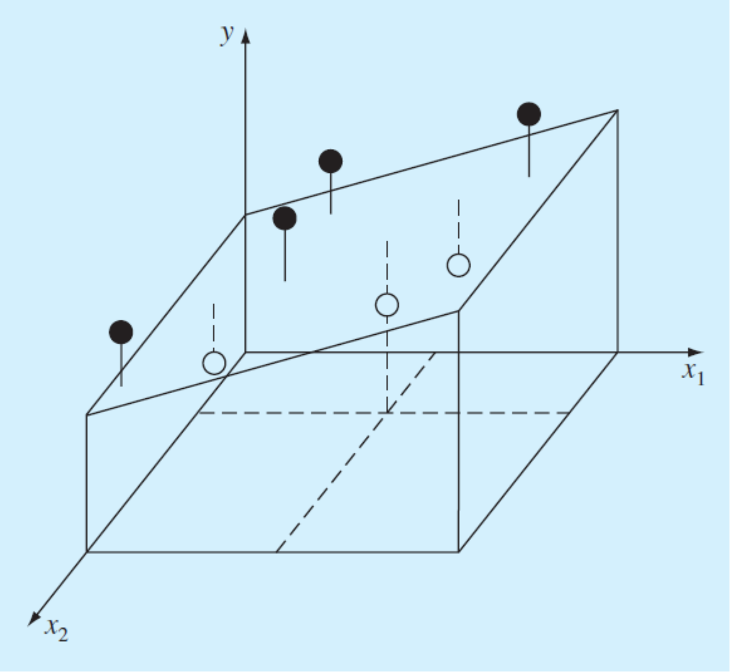
```
>> N = [6 15 55;15 55 225;55 225 979];
>> r = [152.6 585.6 2488.8];
>> a = N\r

a =
    2.4786
    2.3593
    1.8607
```

$$y = 2.4786 + 2.3593x + 1.8607x^2$$



$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + e$$

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_{1,i} - a_2 x_{2,i})^2$$



$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2 \sum (y_i - a_0 - a_1 x_{1,i} - a_2 x_{2,i})$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2 \sum x_{1,i} (y_i - a_0 - a_1 x_{1,i} - a_2 x_{2,i})$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_2} = -2 \sum x_{2,i} (y_i - a_0 - a_1 x_{1,i} - a_2 x_{2,i})$$

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_{1,i} & \sum x_{2,i} \\ \sum x_{1,i} & \sum x_{1,i}^2 & \sum x_{1,i} x_{2,i} \\ \sum x_{2,i} & \sum x_{1,i} x_{2,i} & \sum x_{2,i}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_{1,i} y_i \\ \sum x_{2,i} y_i \end{Bmatrix}$$

مثال:

x_1	x_2	y
0	0	5
2	1	10
2.5	2	9
1	3	0
4	6	3
7	2	27

برای داده های روبرو یک برازش چندخطی بدست آورید.

y	x_1	x_2	x_1^2	x_2^2	x_1x_2	x_1y	x_2y
5	0	0	0	0	0	0	0
10	2	1	4	1	2	20	10
9	2.5	2	6.25	4	5	22.5	18
0	1	3	1	9	3	0	0
3	4	6	16	36	24	12	18
27	7	2	49	4	14	189	54
54	16.5	14	76.25	54	48	243.5	100

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_{1,i} & \sum x_{2,i} \\ \sum x_{1,i} & \sum x_{1,i}^2 & \sum x_{1,i}x_{2,i} \\ \sum x_{2,i} & \sum x_{1,i}x_{2,i} & \sum x_{2,i}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_{1,i}y_i \\ \sum x_{2,i}y_i \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 16.5 & 14 \\ 16.5 & 76.25 & 48 \\ 14 & 48 & 54 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 54 \\ 243.5 \\ 100 \end{Bmatrix}$$

$$a_0 = 5 \qquad a_1 = 4 \qquad a_2 = -3 \qquad \Rightarrow \qquad y = 5 + 4x_1 - 3x_2$$

تمرین۱:

برای داده های جدول زیر یک منحنی مرتبه ۳ برازش نمائید.

x	3	4	5	7	8	9	11	12
y	1.6	3.6	4.4	3.4	2.2	2.8	3.8	4.6

تمرین ۲:

برای داده های زیر یک معادله چندخطی برازش نمائید.

x_1	0	1	1	2	2	3	3	4	4
x_2	0	1	2	1	2	1	2	1	2
y	15.1	17.9	12.7	25.6	20.5	35.1	29.7	45.4	40.2

17 فصل هفدهم

Polynomial Interpolation

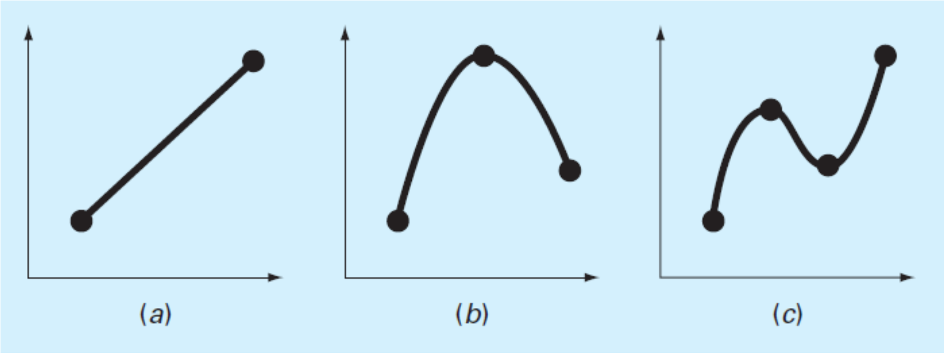
درون یابی چندجمله ای

سوال: تفاوت برازش منحنی با درون یابی چیست؟

در برازش منحنی معادله یک منحنی بدست می آید که دارای کمترین فاصله از داده های موجود باشد.

در حالیکه در میان یابی هدف تخمین مقدار تابع در نقطه ای دلخواه با استفاده از داده های نقاط مجاور می باشد. بر خلاف برازش منحنی، معادله حاصل در میان یابی از کلیه نقاط موجود عبور می نماید.

یک از روشهای پرکاربرد درون یابی، درون یابی چندجمله ای است. در این روش از هر n نقطه مجزا یک چندجمله ای یکتا با مرتبه (n-۱) گذرانده می شود. $f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots + a_nx^{n-1}$



17.1.1 Determining Polynomial Coefficients تعیین ضرایب چندجمله ای

$$(x_1, y_1)$$
$$(x_2, y_2)$$
$$(x_3, y_3)$$

$$f(x) = p_1 x^2 + p_2 x + p_3 \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{\textit{Vandermonde matrices} \\ \text{very ill-conditioned}}} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{Bmatrix}$$

از آنجا که ماتریس ضرایب بسیار مریض می باشد و با افزایش اندازه ماتریس این وضعیت بدتر می شود، از روشهای دیگری مانند درون یابی نیوتن و چندجمله ای های لاگرانژ استفاده می شود.

17.2 NEWTON INTERPOLATING POLYNOMIAL چندجمله ای درونیابی نیوتن

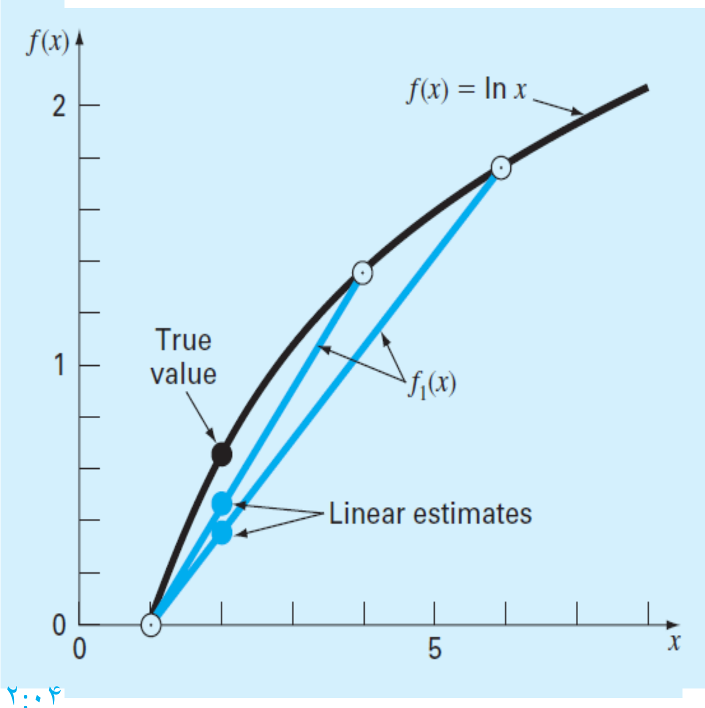
17.2.1 Linear Interpolation

داده های موجود: (x_1, y_1) (x_2, y_2)

هدف: محاسبه y بر حسب x

با استفاده از تشابه مثلث، برای چندجمله ای مرتبه ۱ می توان نوشت:

$$\frac{f_1(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Rightarrow \underbrace{f_1(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)}_{\textit{Newton linear-interpolation formula}}$$

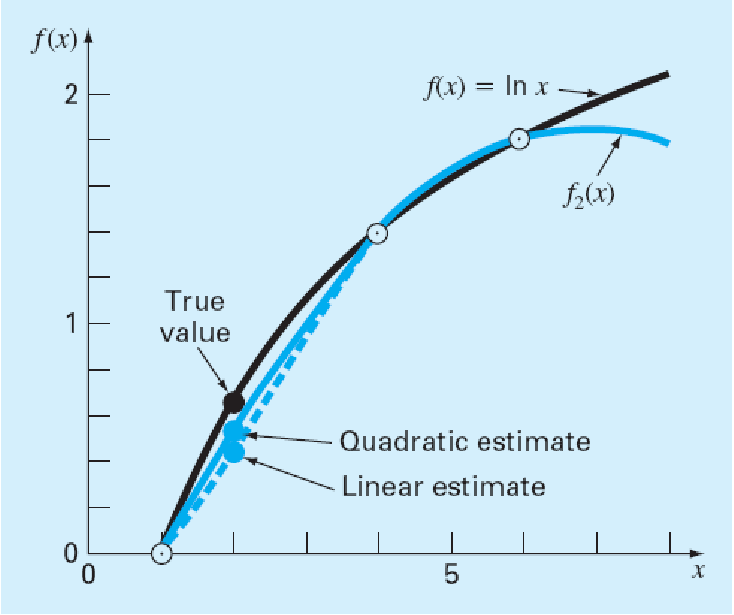


بدیهی است هرچه فاصله میان نقاط کمتر باشد تخمین دقیق تری حاصل می شود.

17.2.2 Quadratic Interpolation درون یابی مرتبه دو

استفاده از درون یابی مرتبه ۲ در مواردی که انحنا تابع زیاد باشد باعث بهبود دقت نتایج نسبت به درون یابی مرتبه اول می گردد.

$$f_2(x) = b_1 + b_2(x - x_1) + b_3(x - x_1)(x - x_2)$$



$$b_1 = f(x_1)$$

$$b_2 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$b_3 = \frac{\dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} - \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_1}$$

17.2.3 General Form of Newton's Interpolating Polynomials فرم کلی چندجمله ای نیوتن

$$f_{n-1}(x) = b_1 + b_2(x - x_1) + \cdots + b_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{n-1})$$

$$b_1 = f(x_1)$$

$$b_2 = f[x_2, x_1]$$

$$b_3 = f[x_3, x_2, x_1]$$

$$\vdots$$

$$b_n = f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1]$$

x_i	$f(x_i)$	First	Second	Third
x_1	$f(x_1)$	$f[x_2, x_1]$	$f[x_3, x_2, x_1]$	$f[x_4, x_3, x_2, x_1]$
x_2	$f(x_2)$	$f[x_3, x_2]$	$f[x_4, x_3, x_2]$	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_4, x_3]$		
x_4	$f(x_4)$			

$$f_{n-1}(x) = f(x_1) + (x - x_1)f[x_2, x_1] + (x - x_1)(x - x_2)f[x_3, x_2, x_1] + \cdots + (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{n-1})f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1]$$

مثال: با استفاده از فرم کلی چندجمله ای نیوتن و داده های زیر، مقدار ln ۲ را با یک چندجمله ای مرتبه سه تخمین بزنید.

$x_1 = 1;\quad x_2 = 4;\quad x_3 = 6;\quad x_4 = 5;$

$f(x) = 0;\quad f(x_2) = 1.386294;\quad f(x_3) = 1.791759;\quad f(x_4) = 1.609438$

$$f_3(x) = b_1 + b_2(x - x_1) + b_3(x - x_1)(x - x_2) + b_4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$f[x_2, x_1] = \frac{1.386294 - 0}{4 - 1} = 0.4620981$$

$$f[x_3, x_2] = \frac{1.791759 - 1.386294}{6 - 4} = 0.2027326$$

$$f[x_4, x_3] = \frac{1.609438 - 1.791759}{5 - 6} = 0.1823216$$

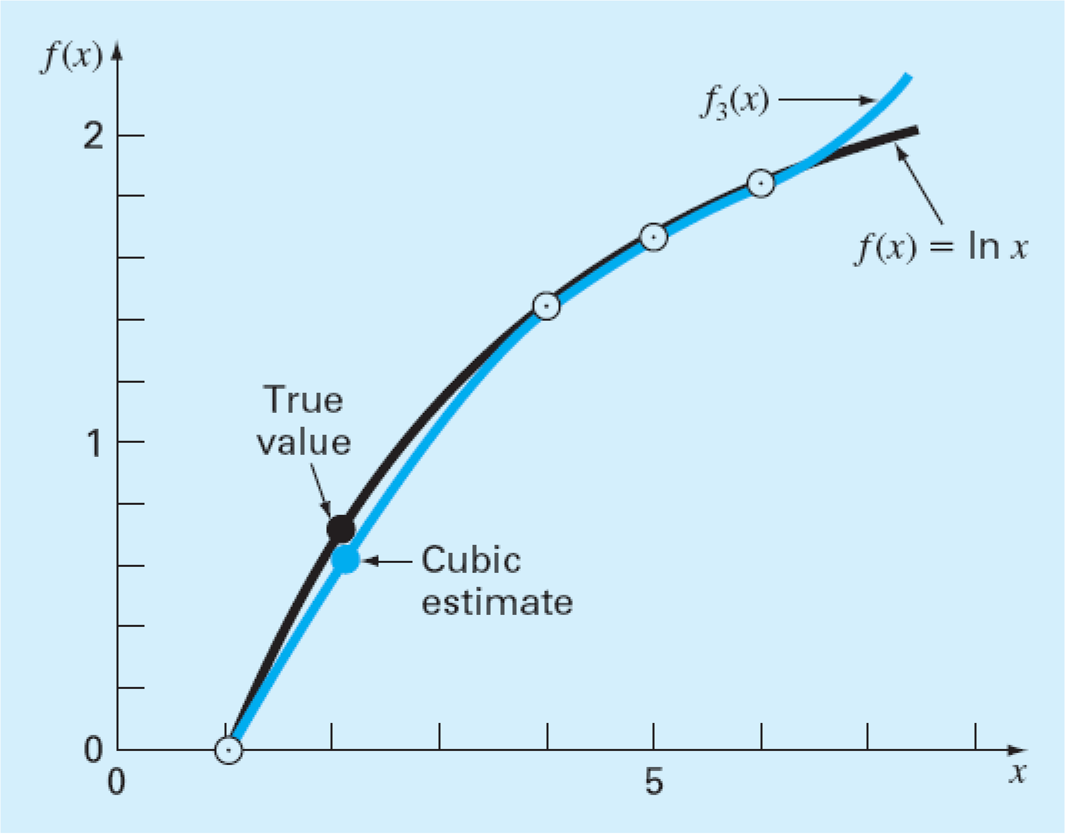
$$f[x_3, x_2, x_1] = \frac{0.2027326 - 0.4620981}{6 - 1} = -0.05187311$$

$$f[x_4, x_3, x_2] = \frac{0.1823216 - 0.2027326}{5 - 4} = -0.02041100$$

$$f[x_4, x_3, x_2, x_1] = \frac{-0.02041100 - (-0.05187311)}{5 - 1} = 0.007865529$$

x_i	$f(x_i)$	First	Second	Third
1	0	0.4620981	−0.05187311	0.007865529
4	1.386294	0.2027326	−0.02041100	
6	1.791759	0.1823216		
5	1.609438			

$$f_3(x) = 0 + 0.4620981(x-1) - 0.05187311(x-1)(x-4) + 0.007865529(x-1)(x-4)(x-6)$$



در این روش برای تقریب از مجموع وزنی مقادیر تابع در نقاط داده شده استفاده می شود. به طور مثال چند جمله ای مرتبه اول با استفاده از مقادیر تابع در دو نقطه عبارتست از:

$$f(x) = L_1 f(x_1) + L_2 f(x_2)$$

بنابراین

$$L_1 = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \quad \begin{cases} @x = x_1 \Rightarrow L_1 = 1 \Rightarrow f(x) = f(x_1) \\ @x = x_2 \Rightarrow L_1 = 0 \Rightarrow f(x) = f(x_2) \end{cases}$$

$$L_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad \begin{cases} @x = x_1 \Rightarrow L_2 = 0 \Rightarrow f(x) = f(x_1) \\ @x = x_2 \Rightarrow L_2 = 1 \Rightarrow f(x) = f(x_2) \end{cases}$$

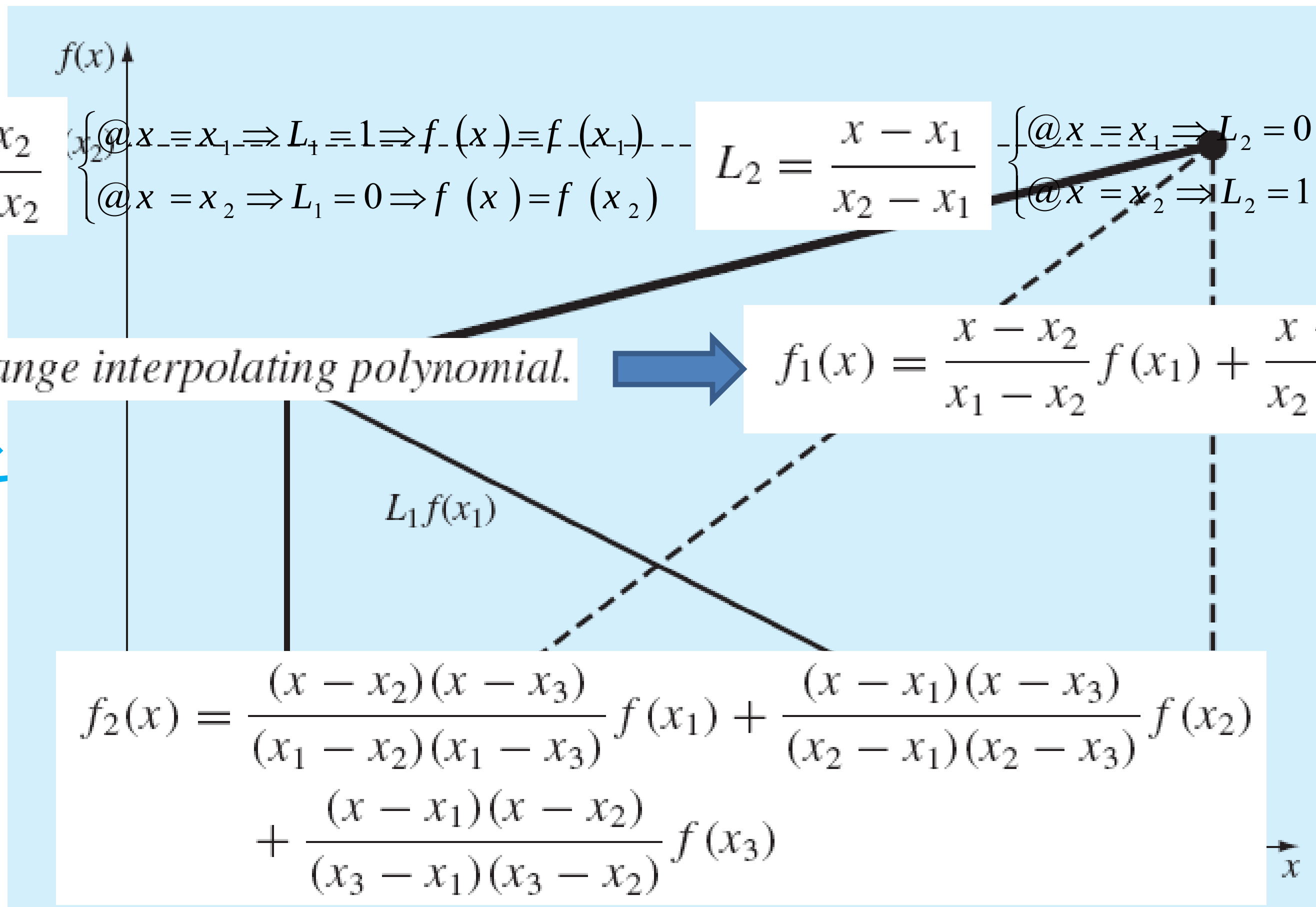
لذا چن

linear Lagrange interpolating polynomial.

$$f_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

با بسط ت زیر

بدست



$$f_2(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} f(x_1) + \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} f(x_2) + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} f(x_3)$$

چندجمله ای مرتبه n-۱ لاگرانژ

با توجه به روابط چندجمله ای های مرتبه ۱ و ۲ لاگرانژ می توان چندجمله ای مرتبه n-۱ را بصورت زیر تعمیم داد:

$$f_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} L_i(x) f(x_i)$$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

مثال:

داده های زیر مربوط به دانسیته روغن موتور در دماهای مختلف می باشد. با استفاده از چندجمله ای های مرتبه اول و دوم لاگرانژ دانسیته روغن را در دمای T=۱۵°C بدست آورید.

$$x_1 = 0 \qquad f(x_1) = 3.85$$

$$x_2 = 20 \qquad f(x_2) = 0.800$$

$$x_3 = 40 \qquad f(x_3) = 0.212$$

تقریب مرتبه اول:

$$f_1(x) = \frac{15-20}{0-20}3.85 + \frac{15-0}{20-0}0.800 = 1.5625$$

تقریب مرتبه دوم:

$$f_2(x) = \frac{(15-20)(15-40)}{(0-20)(0-40)}3.85 + \frac{(15-0)(15-40)}{(20-0)(20-40)}0.800 + \frac{(15-0)(15-20)}{(40-0)(40-20)}0.212 = 1.3316875$$

17.4 INVERSE INTERPOLATION میان یابی معکوس

در برخی موارد مقدار f(x) داده شده و مقدار x مورد نظر می باشد. در این مسائل می توان جای داده ها (x و f(x)) را جابجا نموده و از روشهای بیان شده استفاده نمود. بطور مثال فرض کنید داده های زیر مربوط به تابع $f(x) = 1/x$: موجود است.

x	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	1	0.5	0.3333	0.25	0.2	0.1667	0.1429

حال می خواهیم x را بیابیم بطوریکه $f(x) = 0.3$

لذا جای متغیرهای مستقل و وابسته عوض می شود:

$f(x)$	0.1429	0.1667	0.2	0.25	0.3333	0.5	1
x	7	6	5	4	3	2	1

ملاحظه می شود که برخلاف x ها مقادیر تابع به طور یکنواخت توزیع نشده اند که اغلب باعث ایجاد رفتار نوسانی در چندجمله ای میان یابی می شود. یک راه حل این مسئله این است که چندجمله ای بر حسب داده های اولیه تشکیل شود و چون فواصل x ها یکنواخت است چندجمله ای حاصل ill conditioned نخواهد بود. سپس مسئله به یک مسئله ریشه یابی تبدیل می شود.

مثال:

با توجه به داده های زیر مقدار x مربوط به f(x)=۰.۳ را بیابید.

x	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	1	0.5	0.3333	0.25	0.2	0.1667	0.1429

حل: ابتدا چندجمله ای گذرنده از نقاط زیر را می یابیم:

$$(2, 0.5), (3, 0.3333), \text{ and } (4, 0.25) \Rightarrow f_2(x) = 0.041667x^2 - 0.375x + 1.08333$$

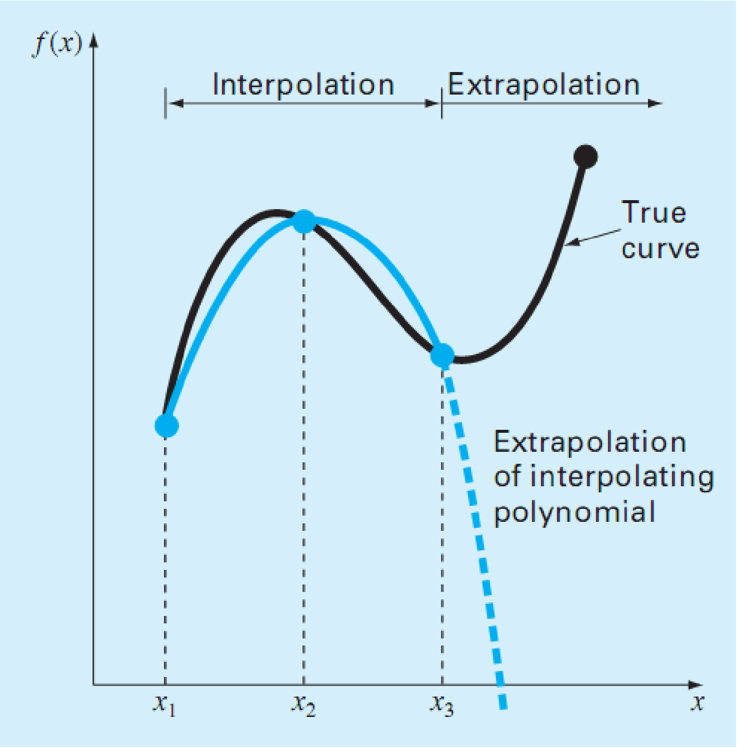
$$f(x) = 0.3 \Rightarrow 0.3 = 0.041667x^2 - 0.375x + 1.08333$$

$$x = \frac{0.375 \pm \sqrt{(-0.375)^2 - 4(0.041667)0.78333}}{2(0.041667)} = \begin{matrix} 5.704158 \\ 3.295842 \end{matrix}$$

ملاحظه می شود که ریشه دوم به مقدار دقیق x یعنی x=۱/۰.۳=۳.۳۳۳ بسیار نزدیک است. برای افزایش دقت میان یابی می توان از چندجمله ای های مرتبه بالاتر استفاده نمود.

17.5.1 Extrapolation

برون یابی فرایند تخمین تابع خارج از محدوده داده های موجود می باشد. همانگونه که ملاحظه می شود احتمال واگرایی تابع تخمین زده شده از تابع اصلی وجود دارد و لذا در استفاده از برون یابی می بایست دقت بیشتری صورت گیرد.

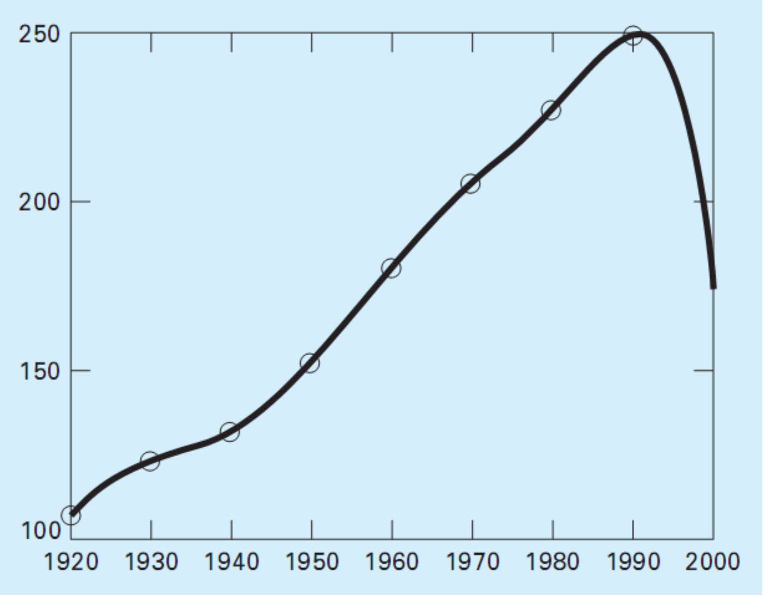


مثال:

جمعیت ایالات متحده آمریکا در دهه های متوالی در جدول زیر داده شده است:

Date	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
Population	106.46	123.08	132.12	152.27	180.67	205.05	227.23	249.46	281.42

درصورتیکه از یک تابع درجه هفت برای تخمین این اعداد تا سال ۱۹۹۰ استفاده شود شکل زیر بدست می آید.

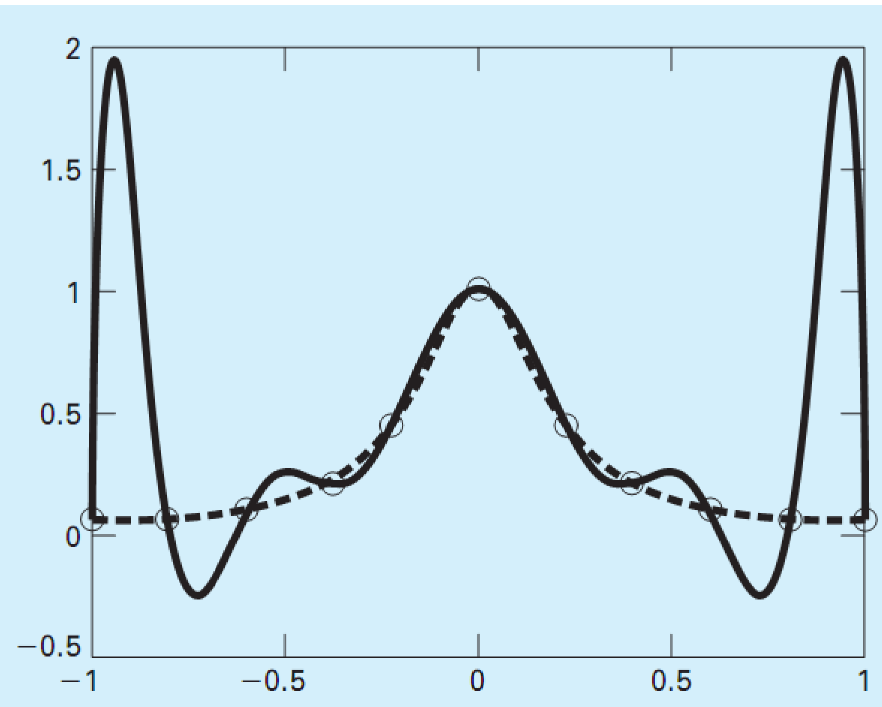


ملاحظه می شود که این تابع بخوبی از نقاط مربوط به سالهای ۱۹۲۰ تا ۱۹۹۰ عبور کرده اما تخمین این تابع برای جمعیت سال ۲۰۰۰ بسیار خطا دارد.

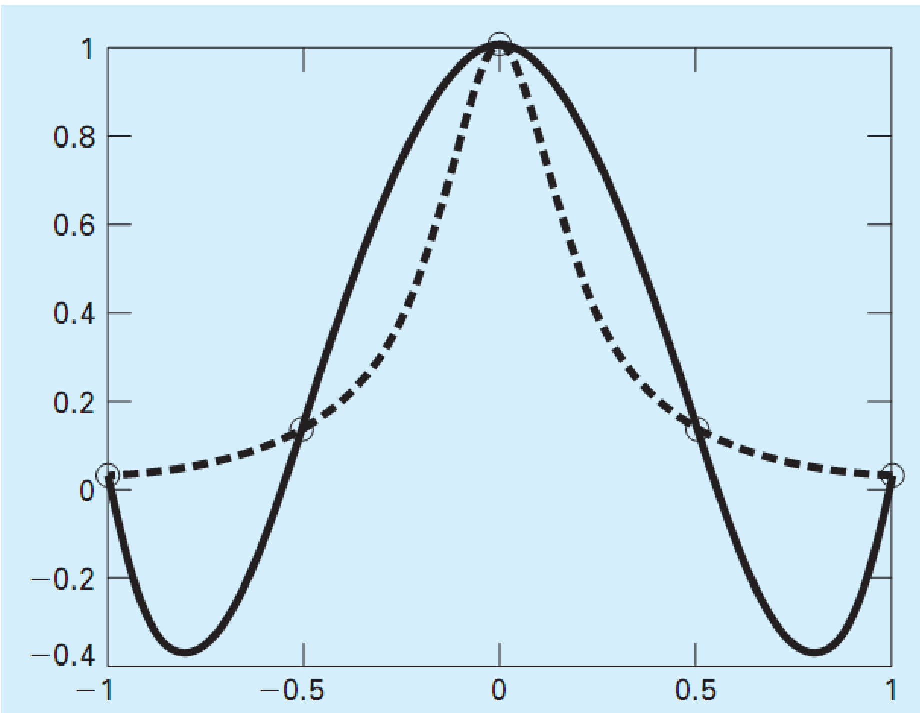
17.5.2 Oscillations

نوسانات:

همانگونه که در مثال تخمین $\ln 2$ مشاهده گردید استفاده از چندجمله ای های مرتبه بالاتر به افزایش دقت تخمین منجر می شود. این مطلب برای همه مسائل صحیح نمی باشد و چندجمله ای های مرتبه بالاتر حساسیت بیشتری به خطای گرد کردن دارند. این مطلب در مثال زیر بخوبی نشان داده شده است: $f(x) = \dfrac{1}{1+25x^2}$



تخمین تابع با چندجمله ای مرتبه ۱۰



تخمین تابع با چندجمله ای مرتبه ۴

لذا استفاده از چندجمله ای های مرتبه پائین می تواند بطور موثری برای مسائل مهندسی بکار رود.

تمرین۱:

با توجه به داده های زیر مقدار f(۸) را با استفاده از چندجمله ای های نیوتن با مراتب مختلف بدست آورید.

x	0	1	2	5.5	11	13	16	18
y	0.5	3.134	5.3	9.9	10.2	9.35	7.2	6.2

تمرین۲:

داده های جدول زیر مفروض است. با استفاده از یک چندجمله ای مرتبه ۳ و روش نصف کردن x مربوط به f(x)=۱.۷ را بدست آورید.

x	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	3.6	1.8	1.2	0.9	0.72	1.5	0.51429

تمرین۳:

داده های جدول زیر مربوط به دانسیته نیتروژن در دماهای گوناگون است. با استفاده از چندجمله ای های مرتبه ۱ تا ۵ مقدار دانسیته نیتروژن را در دمای T=۳۳۰°K بدست آورید.

کدام یک از مقادیر حاصل را بهترین تخمین می دانید؟

حال با بهترین تخمین حاصل و استفاده از میان یابی معکوس دمای مربوط به دانسیته بدست آمده را محاسبه نموده و با T=۳۳۰°K مقایسه نمائید.

T, **K**	200	250	300	350	400	450
Density, kg/m³	1.708	1.367	1.139	0.967	0.854	0.759

تمرین ۴:

دمای نقاط مختلف یک ورق گرم شده در جدول زیر داده شده است. برای این ورق مطلوبست دمای نقاط:

الف) $x = 4, y = 3.2$

ب) $x = 4.3, y = 2.7$

TABLE P17.20 Temperatures (°C) at various points on a square heated plate.

	$x = 0$	$x = 2$	$x = 4$	$x = 6$	$x = 8$
$y = 0$	100.00	90.00	80.00	70.00	60.00
$y = 2$	85.00	64.49	53.50	48.15	50.00
$y = 4$	70.00	48.90	38.43	35.03	40.00
$y = 6$	55.00	38.78	30.39	27.07	30.00
$y = 8$	40.00	35.00	30.00	25.00	20.00

18 فصل هجدهم

Splines and Piecewise Interpolation

اسپلاین و میان یابی تکه به تکه

مقدمه ای بر اسپلاین

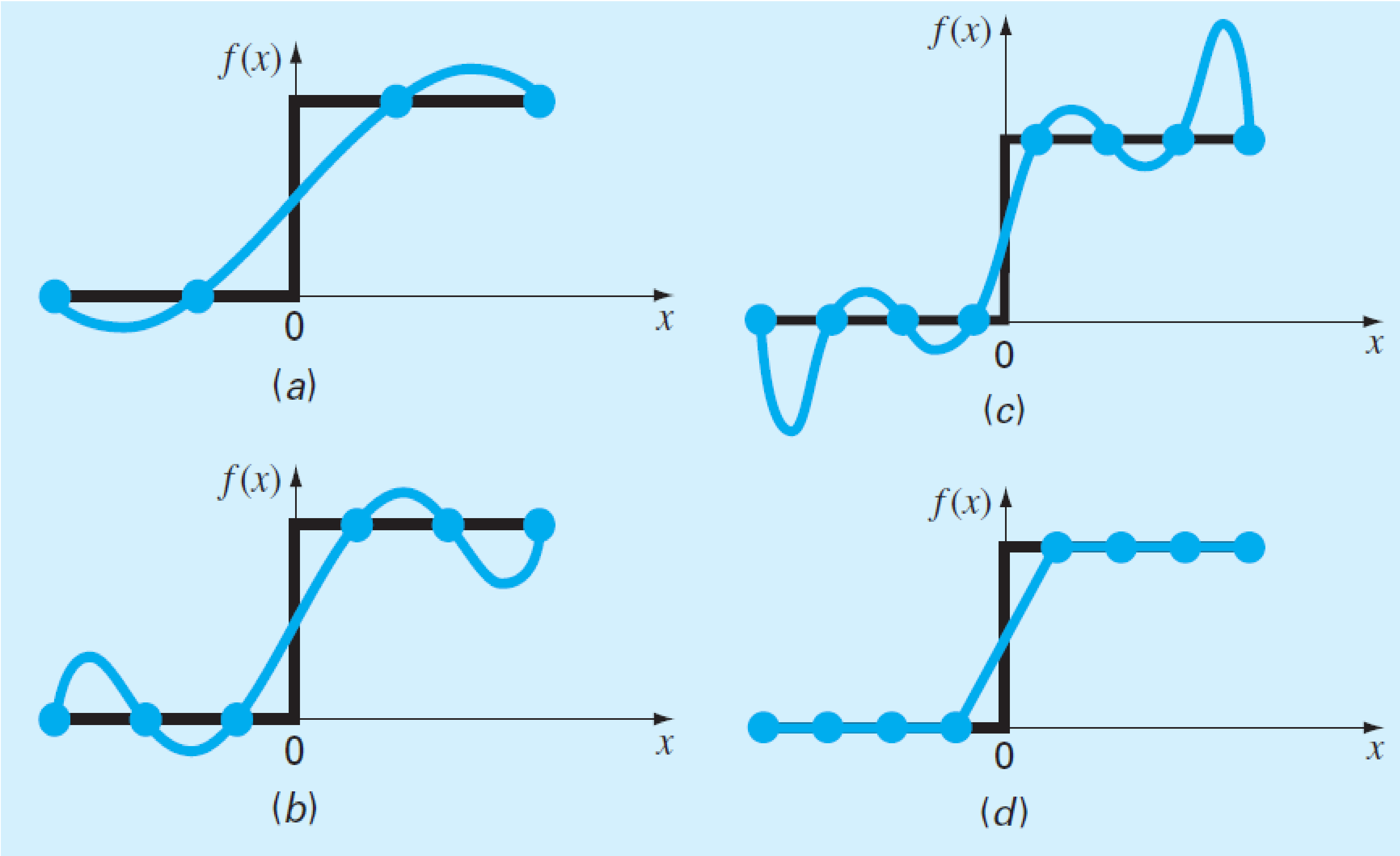
در فصل قبل نحوه میان یابی با استفاده از چندجمله ای های مرتبه (n-۱) با استفاده از n نقطه تشریح گردید. همانگونه که اشاره شد استفاده از چندجمله ای های مراتب بالا از دو جهت مشکل ساز است:

الف) حساسیت بیشتر چندجمله ای های مراتب بالاتر به خطای گرد کردن

ب) ایجاد نوسانات بیشتر در مراتب بالا

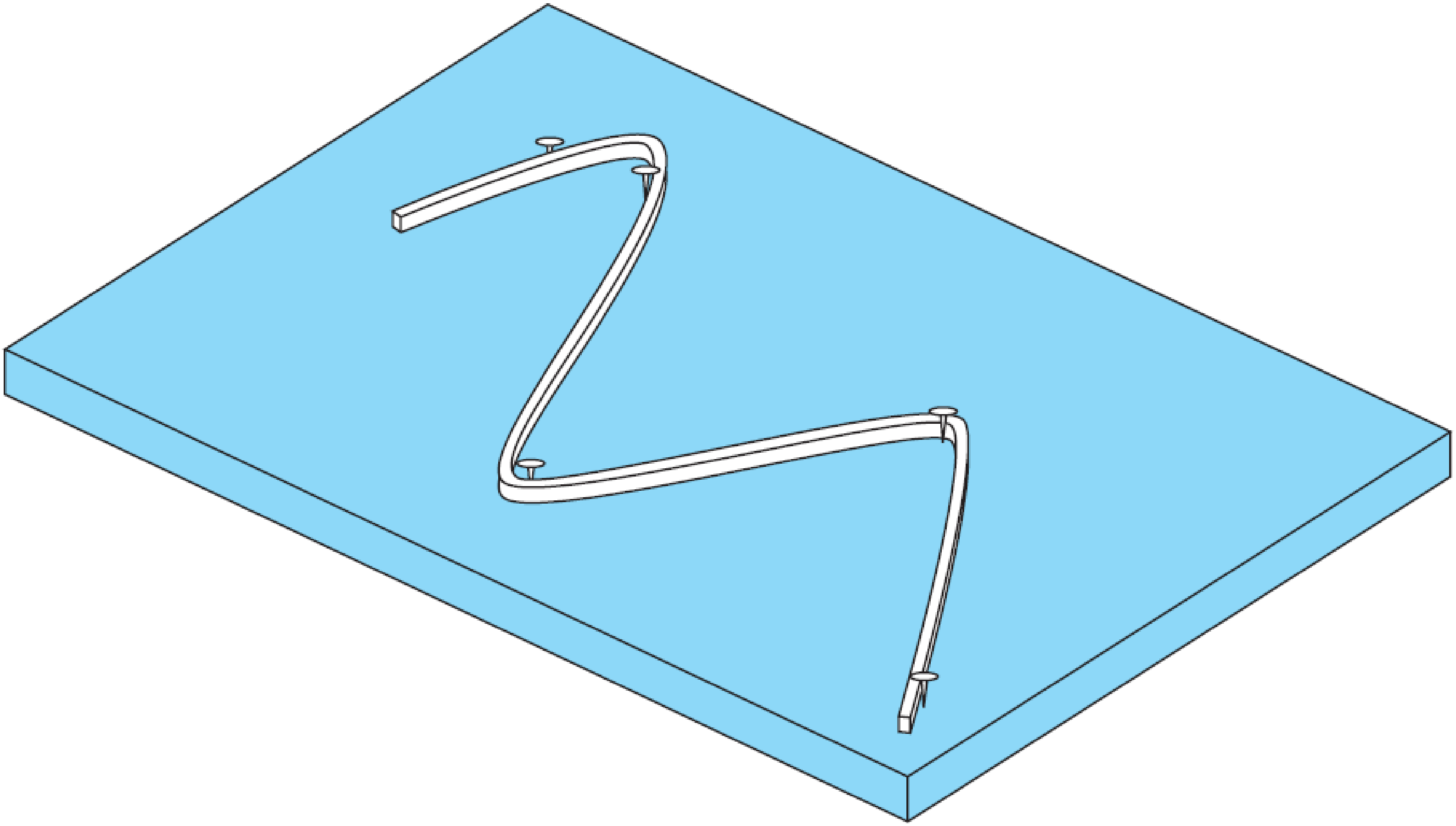
لذا از روش دیگری استفاده می شود که در آن بجای استفاده از یک چند جمله ای مرتبه بالا برای کل بازه، بازه را به تعدادی زیر بازه تقسیم نموده و در هریک، از چندجمله ای های مرتبه پائین تر استفاده می شود که به آنها اسپلاین گویند.

مقایسه چندجمله ای های مراتب بالا با اسپلاین



در نمودارهای a تا c از چندجمله ای های مرتبه ۳ تا مرتبه ۷ استفاده شده است و نوسان در این نمودارها بخوبی دیده می شود. در حالیکه در نمودار d از اسپلاین درجه ۱ (خطی) استفاده شده است.

واژه اسپلاین از وسیله ای با همین نام برای ترسیم منحنی های نرم گرفته شده است.



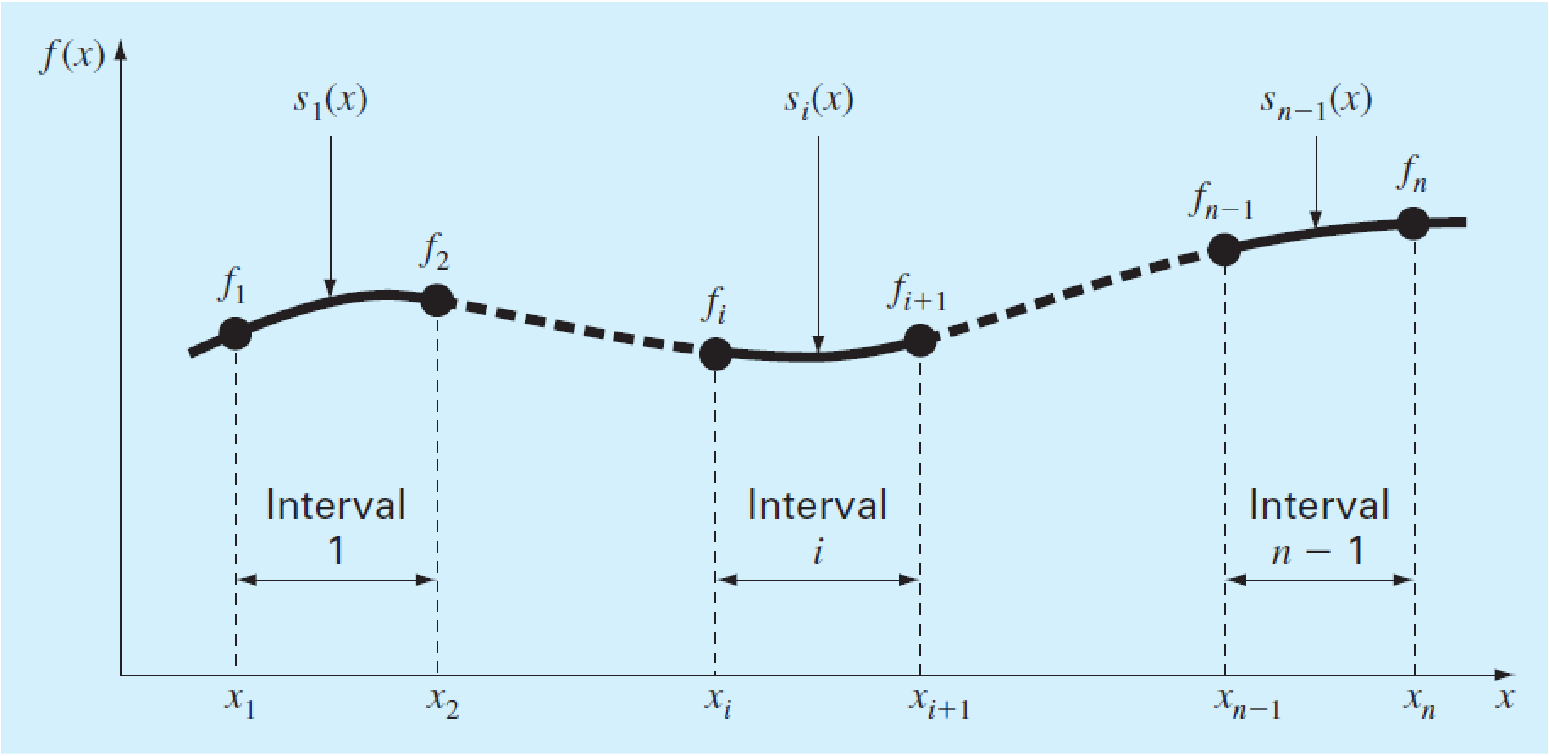
فواصل n نقطه را می توان به n-۱ بازه تقسیم نمود که هریک دارای اسپلاین مربوط به خود می باشند. در حالت خطی، اسپلاین هر ناحیه به یک خط با معادله زیر بدل می شود:

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i)$$

$$a_i = f_i$$ محل تقاطع

$$b_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$$ شیب خط

$$s_i(x) = f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i)$$



مثال:

معادله اسپلاین های خطی گذرنده از نقاط داده شده را بدست آورید. سپس مقدار تابع در x=۵ را با استفاده از اسپلاینهای بدست آمده تخمین بزنید.

TABLE 18.1 Data to be fit with spline functions.

i	x_i	f_i
1	3.0	2.5
2	4.5	1.0
3	7.0	2.5
4	9.0	0.5

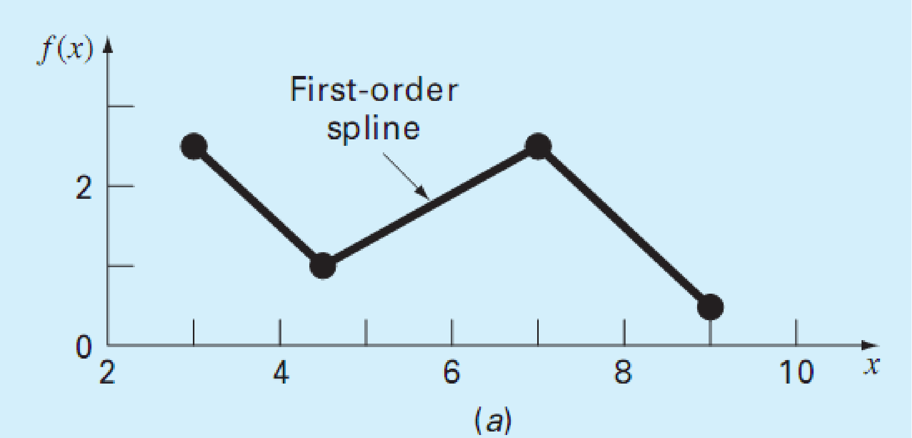
$f_1 = 2.5$ $\quad h_1 = 4.5 - 3.0 = 1.5$

$f_2 = 1.0$ $\quad h_2 = 7.0 - 4.5 = 2.5$

$f_3 = 2.5$ $\quad h_3 = 9.0 - 7.0 = 2.0$

$f_4 = 0.5$

$$s_i(x) = f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i)$$



(a)

$$s_2(x) = 1.0 + \frac{2.5 - 1.0}{7.0 - 4.5}(5 - 4.5) = 1.3$$

عیب بزرگ اسپلاین های خطی عدم ایجاد منحنی نرم (Smooth) است. لذا از اسپلاین های مراتب بالاتر استفاده می شود. اسپلاین مرتبه ۲ به صورت زیر می باشد:

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2$$

با n نقطه n-۱ بازه می توان در نظر گرفت و ملاحظه می شود اسپلاین مرتبه ۲ در هر بازه سه مجهول دارد. لذا در کل ۳(n-۱) مجهول ایجاد می شود. برای محاسبه این مجهولات از شرایط زیر استفاده می کنیم:

۱- تابع می بایست از کلیه نقاط عبور نماید (شرط پیوستگی):

$$f_i = a_i + b_i(x_i - x_i) + c_i(x_i - x_i)^2 \Rightarrow \underbrace{a_i = f_i}_{\text{مقدار ثابت هر اسپلاین با مقدار تابع در نقطه شروع برابر است.}} \qquad i = 1, \ldots, n-1$$

با شرایط بالا (n-۱)مجهول حذف می شود لذا ۲(n-۱) مجهول باقی می ماند.

۲- مقدار اسپلاین های متوالی در یک نقطه می بایست برابر باشد. با توجه به اینکه (n-۱) بازه وجود دارد (n-۱) معادله حاصل می شود و n-۱ مجهول باقی می ماند:

$$f_i + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i(x_{i+1} - x_i)^2 = f_{i+1} + b_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}) + c_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1})^2$$

با تعریف فواصل بصورت $h_i = x_{i+1} - x_i$ داریم:

$$f_i + b_i h_i + c_i h_i^2 = f_{i+1} \qquad i = 1, \ldots, n-1$$

۳- به منظور پیوستگی اسپلاین های مجاور، مشتق اول در نقاط میانی می بایست برابر باشد.

$$s_i'(x) = b_i + 2c_i(x - x_i) \qquad b_i + 2c_i h_i = b_{i+1}$$

برای هر نقطه میانی می توان چنین معادله ای نوشت و برای n-۲ نقطه میانی از تعداد مجهولات n-۲ مجهول کاسته می شود و تنها یک مجهول باقی می ماند:

$$n - 1 - (n - 2) = 1$$

۴- شرط چهارم به صورت زیر فرض می شود:

مشتق دوم در نقطه شروع صفر است.

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 \xrightarrow{\text{مشتق دوم برابر صفر}} c_1 = 0$$

با اعمال این شرط دو نقطه شروع با یک خط به هم وصل می گردند.

مثال:

معادله اسپلاین های مرتبه ۲ گذرنده از نقاط داده شده را بدست آورید.

TABLE 18.1 Data to be fit with spline functions.

i	x_i	f_i
1	3.0	2.5
2	4.5	1.0
3	7.0	2.5
4	9.0	0.5

$$f_1 = 2.5 \qquad h_1 = 4.5 - 3.0 = 1.5$$
$$f_2 = 1.0 \qquad h_2 = 7.0 - 4.5 = 2.5$$
$$f_3 = 2.5 \qquad h_3 = 9.0 - 7.0 = 2.0$$
$$f_4 = 0.5$$

پیوستگی اسپلاین ها

$$f_1 + b_1 h_1 = f_2$$
$$f_2 + b_2 h_2 + c_2 h_2^2 = f_3$$
$$f_3 + b_3 h_3 + c_3 h_3^2 = f_4$$

پیوستگی مشتق

$$b_1 = b_2$$
$$b_2 + 2c_2 h_2 = b_3$$

$$\begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 6.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ c_2 \\ b_3 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.5 \\ 1.5 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$b_1 = -1$$

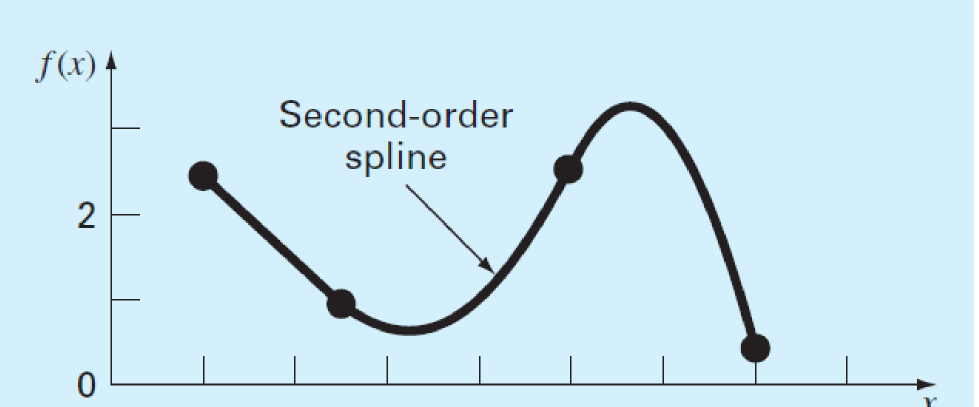
$$b_2 = -1 \qquad c_2 = 0.64$$

$$b_3 = 2.2 \qquad c_3 = -1.6$$

$$s_1(x) = 2.5 - (x - 3)$$

$$s_2(x) = 1.0 - (x - 4.5) + 0.64(x - 4.5)^2$$

$$s_3(x) = 2.5 + 2.2(x - 7.0) - 1.6(x - 7.0)^2$$



(b)

$$s_2(5) = 1.0 - (5 - 4.5) + 0.64(5 - 4.5)^2 = 0.66$$

رابطه اسپلاین مرتبه ۳ بصورت زیر است:

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

اسپلاین مرتبه ۳ دارای ۴ ثابت مجهول می باشد پس برای n-۱ بازه در کل ۴(n-۱) مجهول می بایست تعیین شود.

۱- اسپلاین هر بازه می بایست از نقاط شروع بازه عبور کند:

$$f_i = a_i + b_i(x_i - x_i) + c_i(x_i - x_i)^2 + d_i(x_i - x_i)^3 \qquad a_i = f_i \qquad i = 1, \ldots, n-1$$

۲- مقدار اسپلاین های متوالی در یک نقطه می بایست برابر باشد. با توجه به اینکه (n-۱) بازه وجود دارد (n-۱) معادله حاصل می شود و (n-۱) ۲ مجهول باقی می ماند:

$$f_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = f_{i+1}$$

۳- به منظور پیوستگی اسپلاین های مجاور، مشتق اول در نقاط میانی می بایست برابر باشد. برای هر نقطه میانی می توان چنین معادله ای نوشت و برای n-۲ نقطه میانی از تعداد مجهولات n-۲ مجهول کاسته می شود و تنها n مجهول باقی می ماند.

$$s_i'(x) = b_i + 2c_i(x - x_i) + 3d_i(x - x_i)^2 \qquad b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1}$$

۴- مشتق دوم اسپلاین های بازه های مجاور می بایست برابر باشد. لذا با اعمال این شرایط برای n-۲ نقطه میانی تنها ۲ مجهول باقی می ماند.

$$s_i''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_i) \qquad c_i + 3d_ih_i = c_{i+1} \qquad i = 2, 3, \ldots, n-2,$$

۵- مشابه اسپلاین مرتبه ۲ می توان مشتق دوم را برای نقاط ابتدا و انتها صفر فرض نمود (به این حالت اسپلاین طبیعی گویند).

$$s_1''(x_1) = 0 = 2c_1 + 6d_1(x_1 - x_1) \qquad c_1 = 0$$

$$s_{n-1}''(x_n) = 0 = 2c_{n-1} + 6d_{n-1}h_{n-1} \qquad c_{n-1} + 3d_{n-1}h_{n-1} = c_n = 0$$

با تعریف $f[x_i, x_j] = \dfrac{f_i - f_j}{x_i - x_j}$ و استفاده از معادلات قبل می توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} & \\ & & & & 1 & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3(f[x_3, x_2] - f[x_2, x_1]) \\ \vdots \\ 3(f[x_n, x_{n-1}] - f[x_{n-1}, x_{n-2}]) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

لذا با حل یک دستگاه معادله n مجهولی می توان مقادیر c_i را بدست آورد.

با داشتن مقادیر c_i بقیه مجهولات از روابط زیر بدست می آیند.

$$a_i = f_i$$

$$b_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1})$$

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}$$

مثال:

معادله اسپلاین های مرتبه ۳ گذرنده از نقاط داده شده را بدست آورید.

TABLE 18.1 Data to be fit with spline functions.

i	x_i	f_i
1	3.0	2.5
2	4.5	1.0
3	7.0	2.5
4	9.0	0.5

$f_1 = 2.5$ $\quad h_1 = 4.5 - 3.0 = 1.5$

$f_2 = 1.0$ $\quad h_2 = 7.0 - 4.5 = 2.5$

$f_3 = 2.5$ $\quad h_3 = 9.0 - 7.0 = 2.0$

$f_4 = 0.5$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \\ & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3(f[x_3,x_2] - f[x_2,x_1]) \\ 3(f[x_4,x_3] - f[x_3,x_2]) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1.5 & 8 & 2.5 & \\ & 2.5 & 9 & 2 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 4.8 \\ -4.8 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

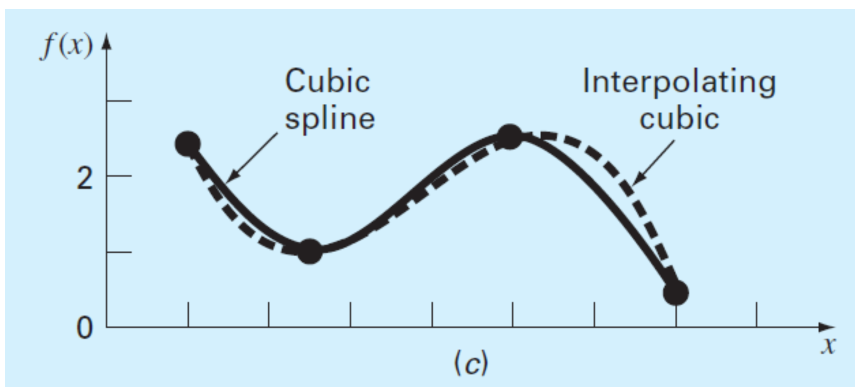
$$c_1 = 0 \qquad c_2 = 0.839543726$$
$$c_3 = -0.766539924 \qquad c_4 = 0$$

$$b_1 = -1.419771863 \qquad d_1 = 0.186565272$$
$$b_2 = -0.160456274 \qquad d_2 = -0.214144487$$
$$b_3 = 0.022053232 \qquad d_3 = 0.127756654$$

$$s_1(x) = 2.5 - 1.419771863(x-3) + 0.186565272(x-3)^3$$

$$s_2(x) = 1.0 - 0.160456274(x-4.5) + 0.839543726(x-4.5)^2 - 0.214144487(x-4.5)^3$$

$$s_3(x) = 2.5 + 0.022053232(x-7.0) - 0.766539924(x-7.0)^2 + 0.127756654(x-7.0)^3$$



$$s_2(5) = 1.0 - 0.160456274(5-4.5) + 0.839543726(5-4.5)^2 - 0.214144487(5-4.5)^3 = 1.102889734.$$

```
yy = spline(x, y, xx)
```

x,y: داده های مورد استفاده برای میان یابی

xx: مقادیر مورد نظر برای میان یابی

yy: نتیجه میان یابی

نکته: در صورتیکه اندازه بردارy با بردار x برابر باشد متلب روش not a knot را استفاده می کند. در این روش مشتق سوم اسپلاین های مجاور نیز برای نقاط میانی برابر فرض می شود.

در صورتیکه تعداد درایه های بردار y دو واحد بیشتر از بردار x باشد از روش clamped استفاده می شود. در این حالت درایه های اول و آخر بردار y معرف شیب نقاط ابتدا و انتهایی می باشند.

18.5.2 MATLAB Function: `interp1` تابع میان یابی interp ۱ در متلب

فرم دستور:

```
yi = interp1(x, y, xi, 'method')
```

x,y: داده های مورد استفاده برای میان یابی

xx: مقادیر مورد نظر برای میان یابی

yy: نتیجه میان یابی

Method: روش میان یابی که شامل موارد زیر است:

- Nearest: میان یابی به نزدیکترین همسایه
- Linear: میان یابی خطی
- Spline: میان یابی با اسپلاین
- Pchip و Cubic: میان یابی هرمیتی مرتبه ۳

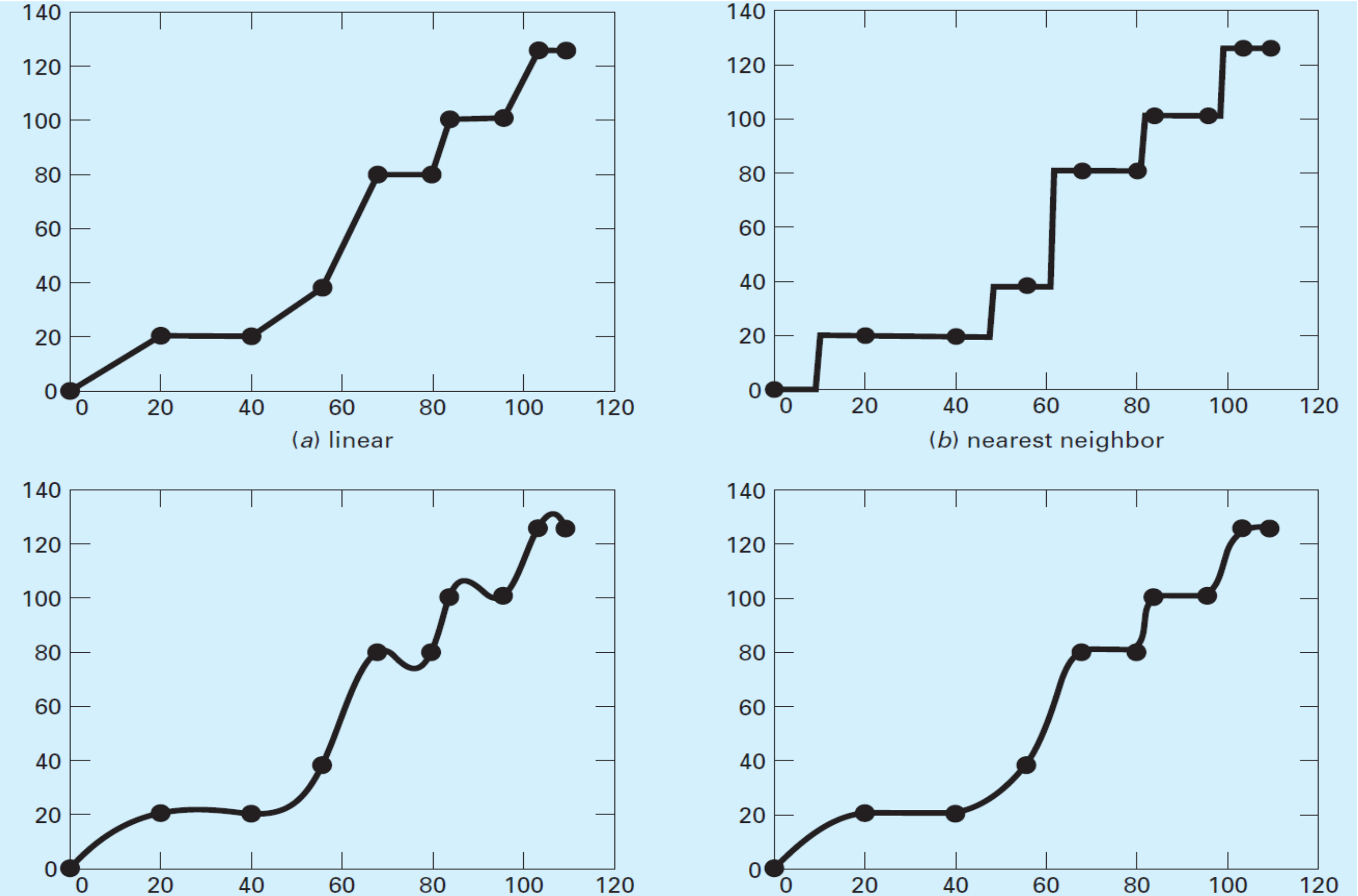
نکته: در صورتیکه method میان یابی ذکر نگردد میان یابی خطی صورت می گیرد.

در روش میان یابی هرمیتی شرط برقراری مشتق دوم توابع مجاور ارضا نمی شود و بیشتر تکیه بر این اصل است که داده های میان یابی شده افزایش و کاهش زیادی نسبت به داده های اصلی نداشته باشند. لذا نتیجه اسپلاین با میان یابی هرمیتی متفاوت می باشد.

مثال:

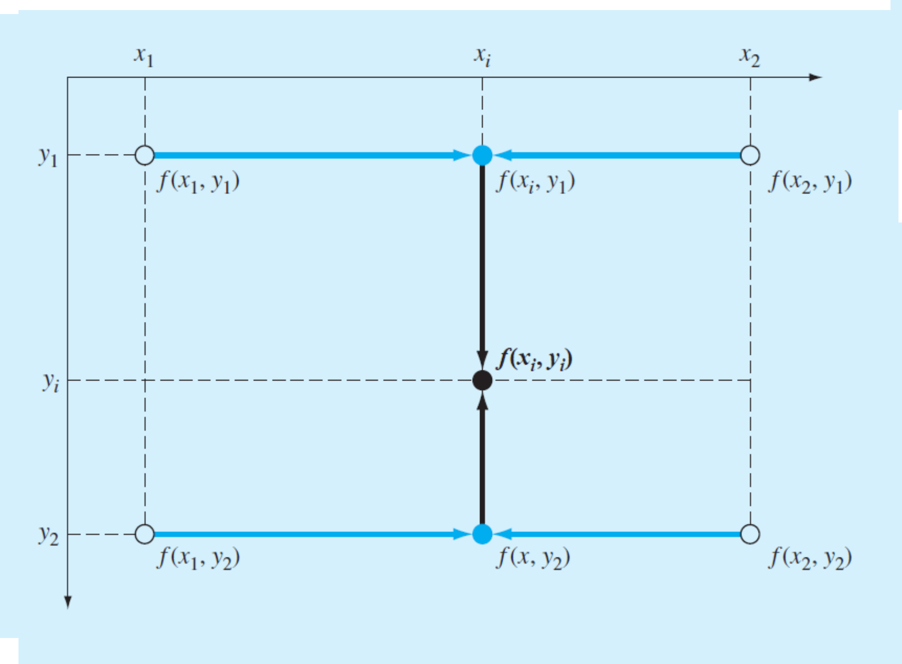
نتیجه حالات مختلف میان یابی با دستور interp۱ بصورت زیر می باشد:

t	0	20	40	56	68	80	84	96	104	110
v	0	20	20	38	80	80	100	100	125	125



(a) linear (b) nearest neighbor (c) spline (d) pchip

18.6.1 Bilinear Interpolation میان یابی دوخطی (دو بعدی):



$$f(x_i, y_1) = \frac{x_i - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1, y_1) + \frac{x_i - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2, y_1)$$

$$f(x_i, y_i) = \frac{y_i - y_2}{y_1 - y_2} f(x_i, y_1) + \frac{y_i - y_1}{y_2 - y_1} f(x_i, y_2)$$

$$f(x_i, y_2) = \frac{x_i - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1, y_2) + \frac{x_i - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2, y_2)$$

$$f(x_i, y_i) = \frac{x_i - x_2}{x_1 - x_2} \frac{y_i - y_2}{y_1 - y_2} f(x_1, y_1) + \frac{x_i - x_1}{x_2 - x_1} \frac{y_i - y_2}{y_1 - y_2} f(x_2, y_1) + \frac{x_i - x_2}{x_1 - x_2} \frac{y_i - y_1}{y_2 - y_1} f(x_1, y_2) + \frac{x_i - x_1}{x_2 - x_1} \frac{y_i - y_1}{y_2 - y_1} f(x_2, y_2)$$

مثال:

دمای اندازه گیری شده در ۴ نقطه مختلف یک ورق بصورت زیر می باشد:

$$T(2,1)=60 \qquad T(9,1)=57.5$$

$$T(2,6)=55 \qquad T(9,6)=70$$

با استفاده از میان یابی دو خطی دمای نقطه زیر را بیابید:

$$x_i = 5.25 \text{ and } y_i = 4.8$$

$$f(x_i, y_i) = \frac{x_i - x_2}{x_1 - x_2}\,\frac{y_i - y_2}{y_1 - y_2} f(x_1, y_1) + \frac{x_i - x_1}{x_2 - x_1}\,\frac{y_i - y_2}{y_1 - y_2} f(x_2, y_1)$$

$$+ \frac{x_i - x_2}{x_1 - x_2}\,\frac{y_i - y_1}{y_2 - y_1} f(x_1, y_2) + \frac{x_i - x_1}{x_2 - x_1}\,\frac{y_i - y_1}{y_2 - y_1} f(x_2, y_2)$$

$$f(5.25, 4.8) = \frac{5.25-9}{2-9}\,\frac{4.8-6}{1-6}60 + \frac{5.25-2}{9-2}\,\frac{4.8-6}{1-6}57.5$$

$$+ \frac{5.25-9}{2-9}\,\frac{4.8-1}{6-1}55 + \frac{5.25-2}{9-2}\,\frac{4.8-1}{6-1}70 = 61.2143$$

18.6.2 Multidimensional Interpolation in MATLAB میان یابی چند بعدی در متلب

فرم دستور: `zi = interp2(x, y, z, xi, y1, 'method')`

ماتریس های x و y: مختصات نقاط معلوم

ماتریس z: مقدار تابع در نقاط معلوم

ماتریس های xiوyi :مختصات نقطه مورد نظر

ماتریسzi: نتیجه میان یابی شده

Method: روش میان یابی (linear, nearest, spline, cubic.)

نکته: درصورتیکه روش میان یابی داده نشود متلب میان یابی خطی انجام می دهد.

مثال:

در صورتیکه در مثال قبل از دستور متلب استفاده شود:

```
>> x=[2 9];
>> y=[1 6];
>> z=[60 57.5;55 70];
>> interp2(x,y,z,5.25,4.8)

ans =
    61.2143
```

که با مقدار قبلی برابر است.

تمرین ۱:

تابع رانگ (Runge's Function)به صورت زیر است. مقدار تابع را در پنج نقطه با فواصل مساوی در بازه [۱,۱-] بدست آورده و سپس میان یابی های زیر را انجام دهید.

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$

الف) چندجمله ای مرتبه ۴

ب) اسپلاین خطی

ج) اسپلاین مرتبه ۳

د) نتایج خود را ترسیم نموده و با مقدار دقیق بدست آمده از تابع در یک نمودار مقایسه کنید.

تمرین۲:

داده های زیر با استفاده از تابعی معروف به تابع کوهان (humps) بدست آمده است. برای این داده ها مطلوبست اسپلاین مرتبه ۳ با شرایط:

الف) اسپلاین با شرایط انتهایی not a knot

ب) اسپلاین هرمیتی با متلب

ج)در هر دو حالت داده های حاصل را رسم و با تابع دقیق کوهان مقایسه نمائید.

$$f(x) = \frac{1}{(x-0.3)^2 + 0.01} + \frac{1}{(x-0.9)^2 + 0.04} - 6$$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
***f*(*x*)**	5.176	15.471	45.887	96.500	47.448	19.000
x	0.6	0.7	0.8	0.9	1	
***f*(*x*)**	11.692	12.382	17.846	21.703	16.000	

تمرین ۳:

تابع زیر توزیع دمای یک ورقه مستطیلی را در بازه داده شده می دهد. برای این تابع مطلوبست:

$$T = 2 + x - y + 2x^2 + 2xy + y^2 \qquad -2 \le x \le 0 \qquad 0 \le y \le 3$$

الف) برنامه ای که با استفاده از دستور surf متلب این تابع را ترسیم نماید. برای تقسیم بندی دامنه از تابع linespace با ۱۰۰ نقطه داخلی استفاده نمائید.

ب) از دستور interp۲ و حالت پیش فرض برای میان یابی (linear) دما در نقطه زیر را محاسبه نمائید. درصد خطای نسبی مقدار بدست آمده را محاسبه کنید

at $x = -1.63$ and $y = 1.627$

ج) قسمت ب را با میان یابی اسپلاین(spline) تکرار نمائید.

نکته برای قسمت های ب و ج از دستور linespace با ۹ نقطه میانی استفاده کنید.

حل:

```
x=linspace(-۲,۰)
y=linspace(۰,۳)
[X,Y]=meshgrid(x,y)
T=۲+X-Y+۲*X.^۲+۲*X.*Y+Y.^۲
surf(x,y,T)

T۱=interp۲(x,y,T,-۱.۶۳,۱.۶۲۷)
T۱ =
   ۱.۴۰۰۳
[x,y]=[ -۱.۶۳۰۰,۱.۶۲۷]
T=۲+x-y+۲*x.^۲+۲*x.*y+y.^۲
T =
   ۱.۳۹۹۹
Error=abs((T-T۱)/T)*۱۰۰
Error =
   ۰.۰۲۷۹

T۲=interp۲(X,Y,T,-۱.۶۳,۱.۶۲۷,'spline')
T۲ =
   ۱.۳۹۹۹
Error=abs((T-T۲)/T)*۱۰۰
Error =
 ۴.۷۵۸۴e-۰۱۴
```