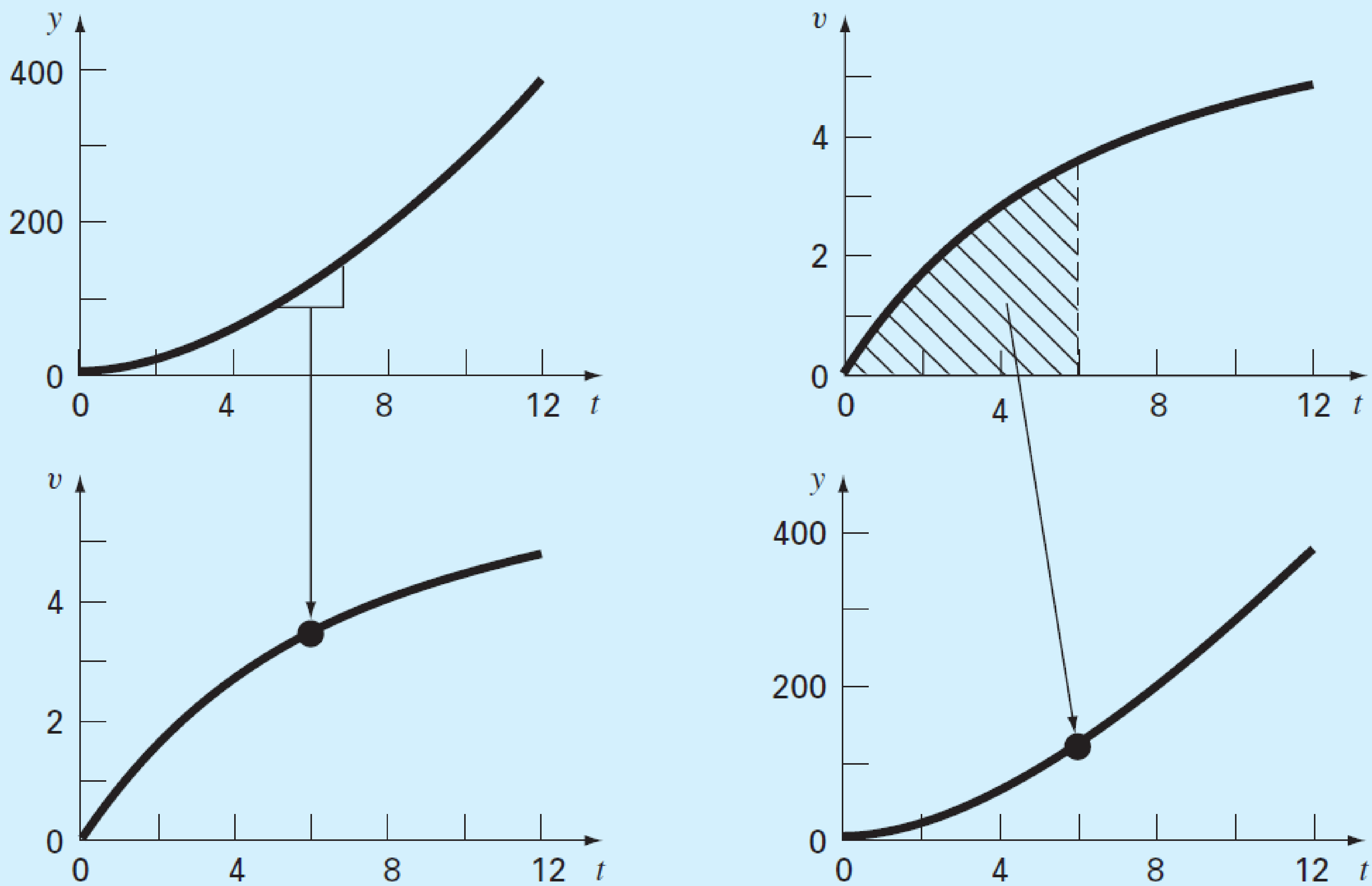
PART FIVE

قسمت پنجم

Integration and Differentiation

انتگرال گیری
و مشتق گیری

تفاوت میان انتگرال گیری و مشتق گیری



(a) (b)

19 فصل نوزدهم

Numerical Integration Formulas

روابط انتگرال گیری عددی

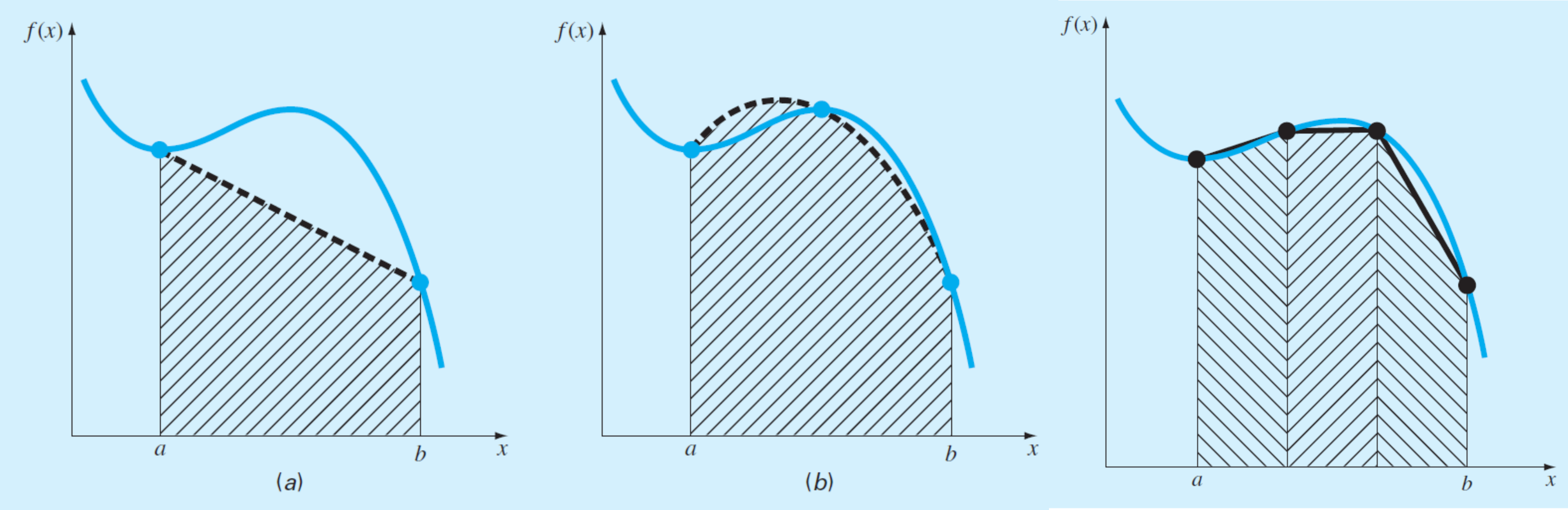
19.2 NEWTON-COTES FORMULAS رابطه نیوتن-کوت

در این روش تابع انتگرال گیری با یک چند جمله ای که انتگرال گیری آن ساده است جایگزین می شود.

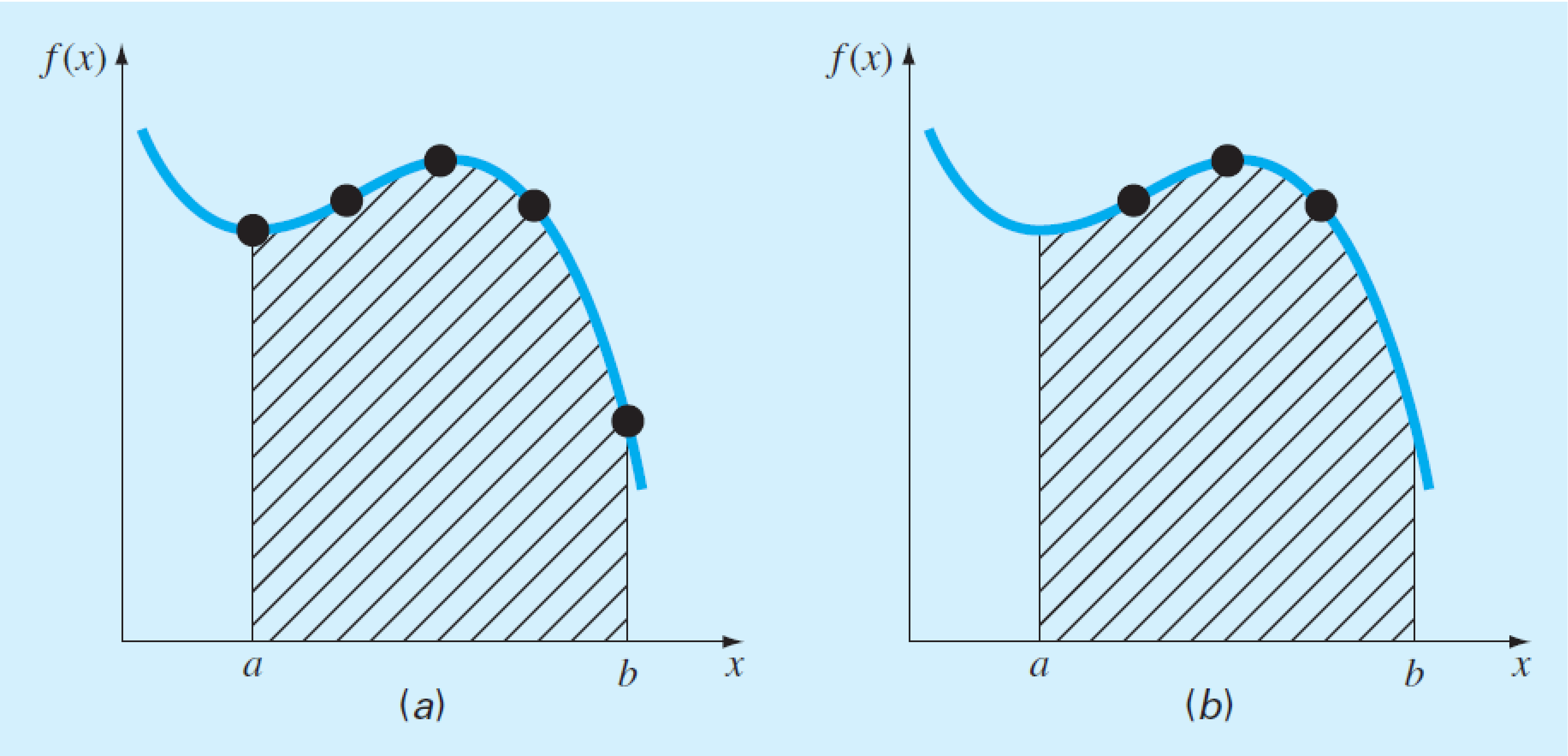
$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b f_n(x)\,dx$$

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$

همچنین می توان انتگرال را با یک سری از چندجمله ای های تکه ای (خطی یا غیرخطی) تقریب زد.



انتگرال گیری به روش نیوتن-کوت دارای دو فرم زیر می باشد:



فرم بسته

فرم باز

در ابتدا فرم بسته و در فصل آتی فرم باز بررسی می شود.

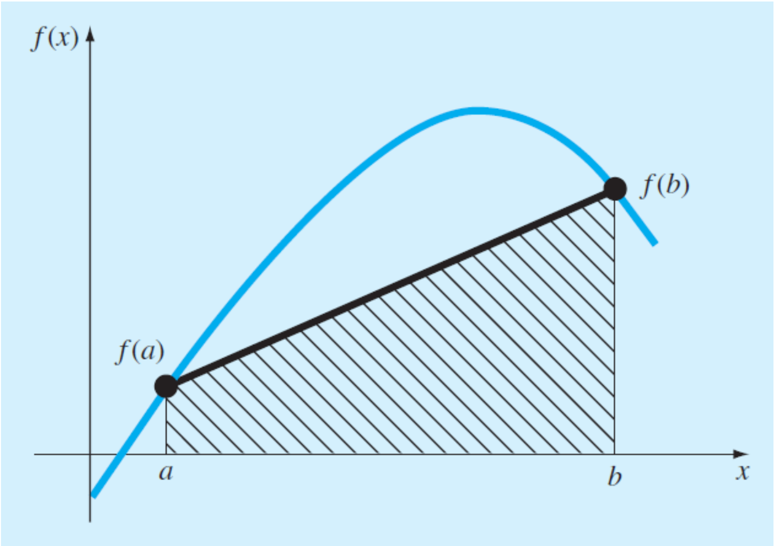
اولین روش انتگرال گیری نیوتن-کوت که جزء روشهای بسته محسوب می شود روش ذوزنقه است.

$$I = \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right] dx$$

$$I = (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

trapezoidal rule

$$I = \text{width} \times \text{average height}$$

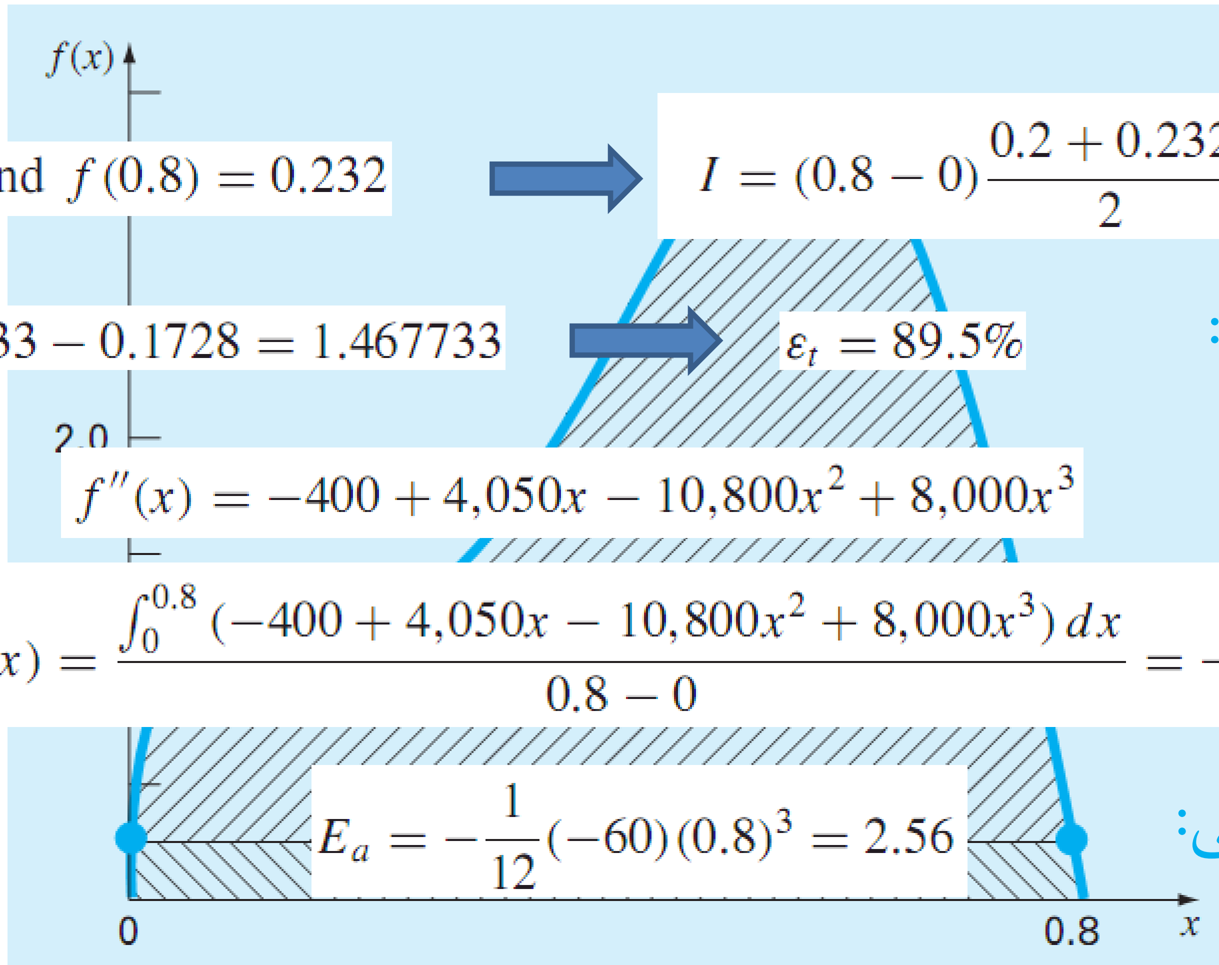


مثال

انتگرال تابع زیر را در بازه داده شده با روش ذوزنقه محاسبه نمائید.

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5 \qquad \text{from } a = 0 \text{ to } b = 0.8$$

حل:



$$f(0) = 0.2 \text{ and } f(0.8) = 0.232$$

$$I = (0.8 - 0)\frac{0.2 + 0.232}{2} = 0.1728$$

خطای واقعی:

$$E_t = 1.640533 - 0.1728 = 1.467733$$

$$\varepsilon_t = 89.5\%$$

$$f''(x) = -400 + 4{,}050x - 10{,}800x^2 + 8{,}000x^3$$

$$\bar{f}''(x) = \frac{\int_0^{0.8} (-400 + 4{,}050x - 10{,}800x^2 + 8{,}000x^3)\,dx}{0.8 - 0} = -60$$

خطای تقریبی:

$$E_a = -\frac{1}{12}(-60)(0.8)^3 = 2.56$$

19.3.2 The Composite Trapezoidal Rule قانون ذوزنقه مرکب

در این روش بازه انتگرال گیری به تعداد n قسمت مساوی تقسیم می گردد و در هر بازه از روش ذوزنقه استفاده می شود:

$$h = \frac{b-a}{n} \qquad I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$$

$$I = h\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + h\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \cdots + h\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}$$

$$I = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

$$I = \underbrace{(b-a)}_{\text{Width}}\ \underbrace{\frac{f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{n}}_{\text{Average height}}$$

$$E_a = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}\bar{f}''$$

مثال

انتگرال تابع زیر را در بازه داده شده با روش ذوزنقه **مرکب** محاسبه نمائید.

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5 \qquad \text{from } a = 0 \text{ to } b = 0.8$$

حل: For $n = 2\ (h = 0.4)$: $\Rightarrow$ $f(0) = 0.2 \qquad f(0.4) = 2.456 \qquad f(0.8) = 0.232$

$$I = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right] \Rightarrow I = 0.8\frac{0.2 + 2(2.456) + 0.232}{4} = 1.0688$$

خطای واقعی: $E_t = 1.640533 - 1.0688 = 0.57173 \Rightarrow \varepsilon_t = 34.9\%$

$$f''(x) = -400 + 4{,}050x - 10{,}800x^2 + 8{,}000x^3$$

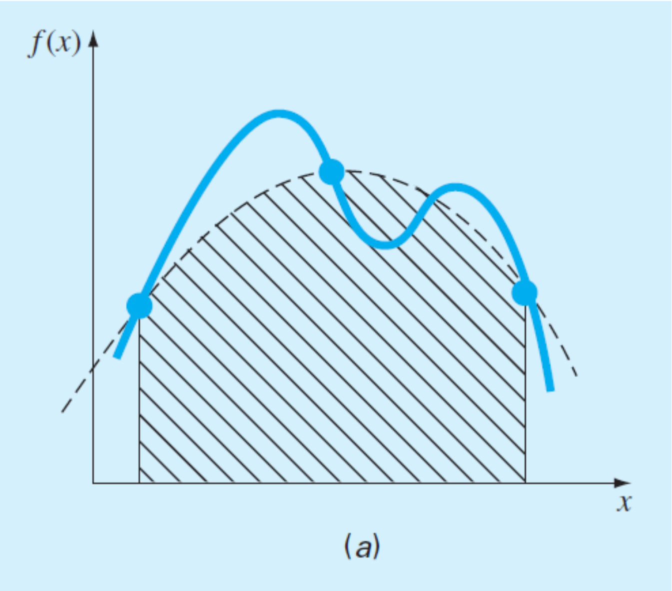
$$\bar{f}''(x) = \frac{\int_0^{0.8}(-400 + 4{,}050x - 10{,}800x^2 + 8{,}000x^3)\,dx}{0.8 - 0} = -60$$

خطای تقریبی: $E_a = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}\bar{f}'' \Rightarrow E_a = -\frac{0.8^3}{12(2)^2}(-60) = 0.64$

19.4.1 Simpson's 1/3 Rule

در این روش تابع انتگرال گیری با یک چندجمله ای مرتبه ۲ لاگرانژ تقریب زده شده و انتگرال بصورت زیر در می آید:

$$I = \int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2) \right] dx$$



(a)

$$I = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

$$h = (b-a)/2$$

$$I = (b-a)\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}$$

مثال

انتگرال تابع زیر را در بازه داده شده با روش ۱/۳سیمپسون محاسبه نمائید.

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5 \qquad \text{from } a = 0 \text{ to } b = 0.8$$

حل:

$$n = 2(h = 0.4): \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0.2 \qquad f(0.4) = 2.456 \qquad f(0.8) = 0.232$$

$$I = (b-a)\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6} \quad \Rightarrow$$

$$I = 0.8\frac{0.2 + 4(2.456) + 0.232}{6} = 1.367467$$

خطای واقعی:

$$E_t = 1.640533 - 1.367467 = 0.2730667 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_t = 16.6\%$$

خطای تقریبی:
$$E_a = -\frac{0.8^5}{2880}(-2400) = 0.2730667$$

19.4.2 The Composite Simpson's 1/3 Rule قانون ۱/۳ مرکب سیمپسون

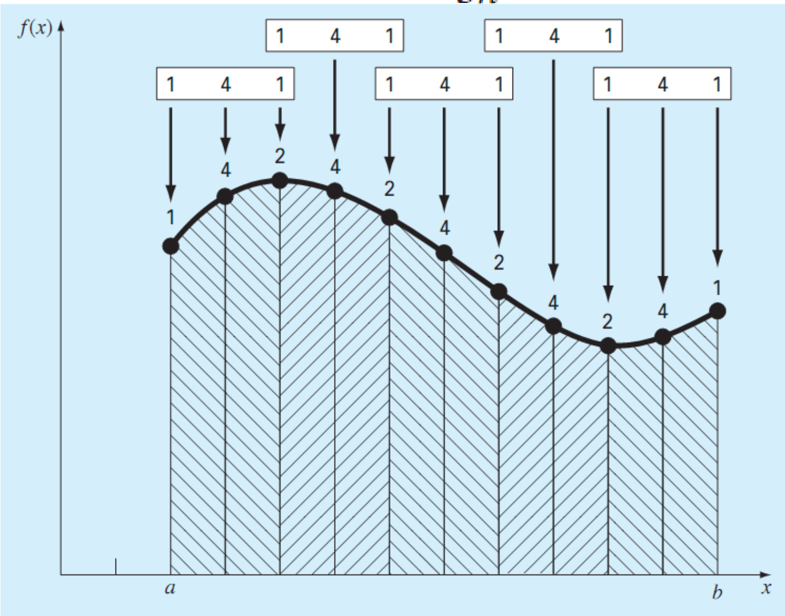
در این روش بازه انتگرال گیری به تعداد زوج قسمت تقسیم می شود.

$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx$$

$$I = 2h\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6} + 2h\frac{f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)}{6}$$

$$+ \cdots + 2h\frac{f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)}{6}$$

$$I = (b-a)\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}$$



مثال

انتگرال تابع زیر را در بازه داده شده با روش ۱/۳سیمپسون مرکب محاسبه نمائید.

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5 \qquad \text{from } a = 0 \text{ to } b = 0.8$$

حل:

$$n = 4(h = 0.2): \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0.2 & f(0.2) = 1.288 \\ f(0.4) = 2.456 & f(0.6) = 3.464 \\ f(0.8) = 0.232 \end{cases}$$

$$I = (b-a)\frac{f(x_0) + 4\sum\limits_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum\limits_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n} \Rightarrow$$

$$I = 0.8\frac{0.2 + 4(1.288 + 3.464) + 2(2.456) + 0.232}{12} = 1.623467$$

خطای واقعی:

$$E_t = 1.640533 - 1.623467 = 0.017067 \Rightarrow \varepsilon_t = 1.04\%$$

خطای تقریبی:

$$E_a = -\frac{(0.8)^5}{180(4)^4}(-2400) = 0.017067$$

19.4.3 Simpson's 3/8 Rule

قانون ۳/۸ سیمپسون

در این روش بجای تابع انتگرال گیری از یک چندجمله ای لاگرانژ مرتبه ۳ استفاده می شود که پس از انتگرال گیری رابطه زیر حاصل می شود:

$$I = \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

$$h = (b-a)/3$$

$$I = (b-a)\frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8}$$

خطای روش:

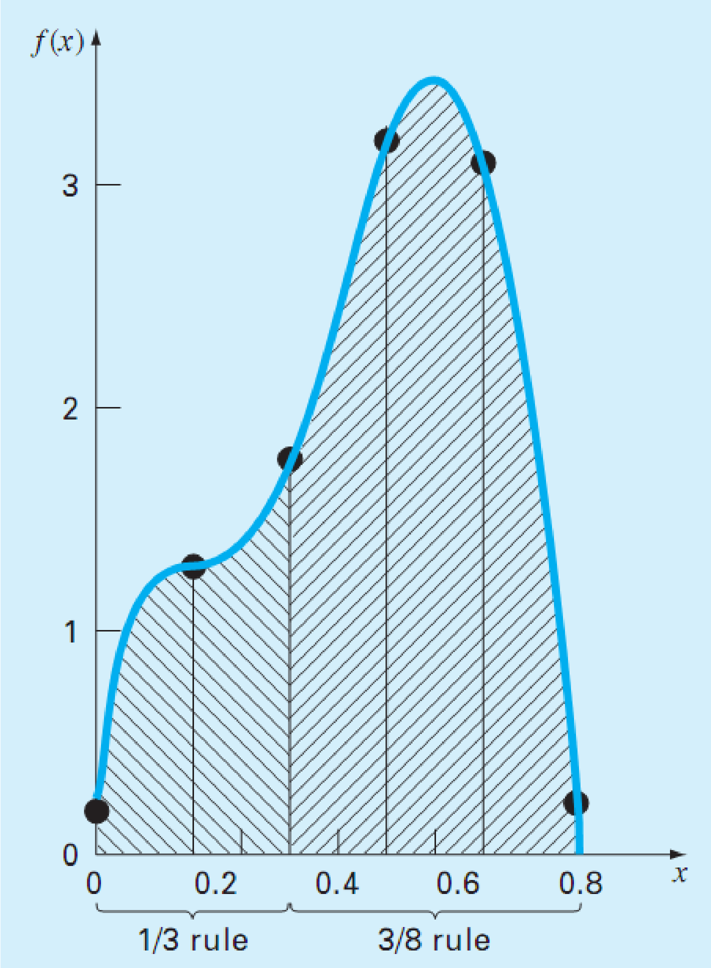
$$E_t = -\frac{3}{80}h^5 f^{(4)}(\xi)$$

$$h = (b-a)/3$$

$$E_t = -\frac{(b-a)^5}{6480} f^{(4)}(\xi)$$

نکته: دقت قانون ۳/۸ سیمپسون از قانون ۱/۳ بیشتر می باشد. اما قانون ۱/۳ بدلیل نیاز به نقاط کمتر بسیار استفاده می شود.

قانون ۳/۸ در مواردی استفاده می شود که تعداد بازه های تقسیم شده فرد باشد.



مثال

انتگرال تابع زیر را در بازه داده شده با روش ۳/۸سیمپسون محاسبه نمائید.
همچنین با تقسیم بازه انتگرال گیری به ۵ زیر بازه، از ترکیب ۱/۳ و ۳/۸ سیمپسون استفاده نمائید.

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5 \qquad \text{from } a = 0 \text{ to } b = 0.8$$

حل: ابتدا از روش ۳/۸ سیمپسون انتگرال محاسبه می شود:

تقسیم ناحیه به سه بازه

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(0) = 0.2 & f(0.2667) = 1.432724 \\ f(0.5333) = 3.487177 & f(0.8) = 0.232 \end{array} \right.$$

$$I = (b-a)\frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8}$$

$$I = 0.8\frac{0.2 + 3(1.432724 + 3.487177) + 0.232}{8} = 1.51970$$

حال با تقسیم بازه انتگرال گیری به ۵ زیر بازه:

$$(h = 0.16) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} f(0) = 0.2 & f(0.16) = 1.296919 \\ f(0.32) = 1.743393 & f(0.48) = 3.186015 \\ f(0.64) = 3.181929 & f(0.80) = 0.232 \end{array} \right.$$

استفاده از روش ۱/۳ سیمپسون برای دو زیر بازه اول:

$$I = 0.32 \frac{0.2 + 4(1.296919) + 1.743393}{6} = 0.3803237$$

استفاده از روش ۳/۸ سیمپسون برای سه زیربازه آخر:

$$I = 0.48 \frac{1.743393 + 3(3.186015 + 3.181929) + 0.232}{8} = 1.264754$$

مقدار کل انتگرال:

$$\Rightarrow \quad I = 0.3803237 + 1.264754 = 1.645077$$

19.5 HIGHER-ORDER NEWTON-COTES FORMULAS قوانین مرتبه بالاتر نیوتن-کوت

- همانگونه که پیشتر نیز اشاره شد، روشهای انتگرال گیری ذوزنقه، ۱/۳ و ۳/۸ سیمپسون همگی جز دسته ای از روشهای انتگرال گیری بسته به نام نیوتن-کوت می باشند.
- روابط انتگرال گیری مرتبه بالاتر نیوتن-کوت به همراه خطای قطع هر یک در جدول زیر گردآوری شده است.
- استفاده از تعداد زوج تقسیمات و تعداد فرد نقاط به روشهای دارای تعداد فرد تقسیمات و تعداد زوج نقطه برتری دارد زیرا دو بدو دارای مرتبه خطای یکسان می باشند.

Segments (n)	Points	Name	Formula	Truncation Error
1	2	Trapezoidal rule	$(b-a)\dfrac{f(x_0)+f(x_1)}{2}$	$-(1/12)h^3 f''(\xi)$
2	3	Simpson's 1/3 rule	$(b-a)\dfrac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6}$	$-(1/90)h^5 f^{(4)}(\xi)$
3	4	Simpson's 3/8 rule	$(b-a)\dfrac{f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)}{8}$	$-(3/80)h^5 f^{(4)}(\xi)$
4	5	Boole's rule	$(b-a)\dfrac{7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)}{90}$	$-(8/945)h^7 f^{(6)}(\xi)$
5	6		$(b-a)\dfrac{19f(x_0)+75f(x_1)+50f(x_2)+50f(x_3)+75f(x_4)+19f(x_5)}{288}$	$-(275/12{,}096)h^7 f^{(6)}(\xi)$

19.6 INTEGRATION WITH UNEQUAL SEGMENTS انتگرال گیری با فواصل نامساوی

- در صورتیکه داده ها دارای فواصل نامساوی باشند دیگر نمی توان از روابط قبلی استفاده نمود.
- در این حالت می توان از قانون انتگرال گیری ذوزنقه مرکب به صورت زیر برای فواصل نامساوی استفاده نمود:

$$I = h_1 \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + h_2 \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \cdots + h_n \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}$$

مثال

انتگرال تابع داده شده را با استفاده از نقاط داده شده در جدول که دارای فواصل نامساوی هستند محاسبه نمائید.

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5 \qquad \text{from } a = 0 \text{ to } b = 0.8$$

TABLE 19.3 Data for $f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$, with unequally spaced values of x.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.00	0.200000	0.44	2.842985
0.12	1.309729	0.54	3.507297
0.22	1.305241	0.64	3.181929
0.32	1.743393	0.70	2.363000
0.36	2.074903	0.80	0.232000
0.40	2.456000		

$$I = 0.12\frac{0.2 + 1.309729}{2} + 0.10\frac{1.309729 + 1.305241}{2}$$

$$+ \cdots + 0.10\frac{2.363 + 0.232}{2} = 1.594801$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_t = 2.8\%$$

19.7 OPEN METHODS روشهای انتگرال گیری باز

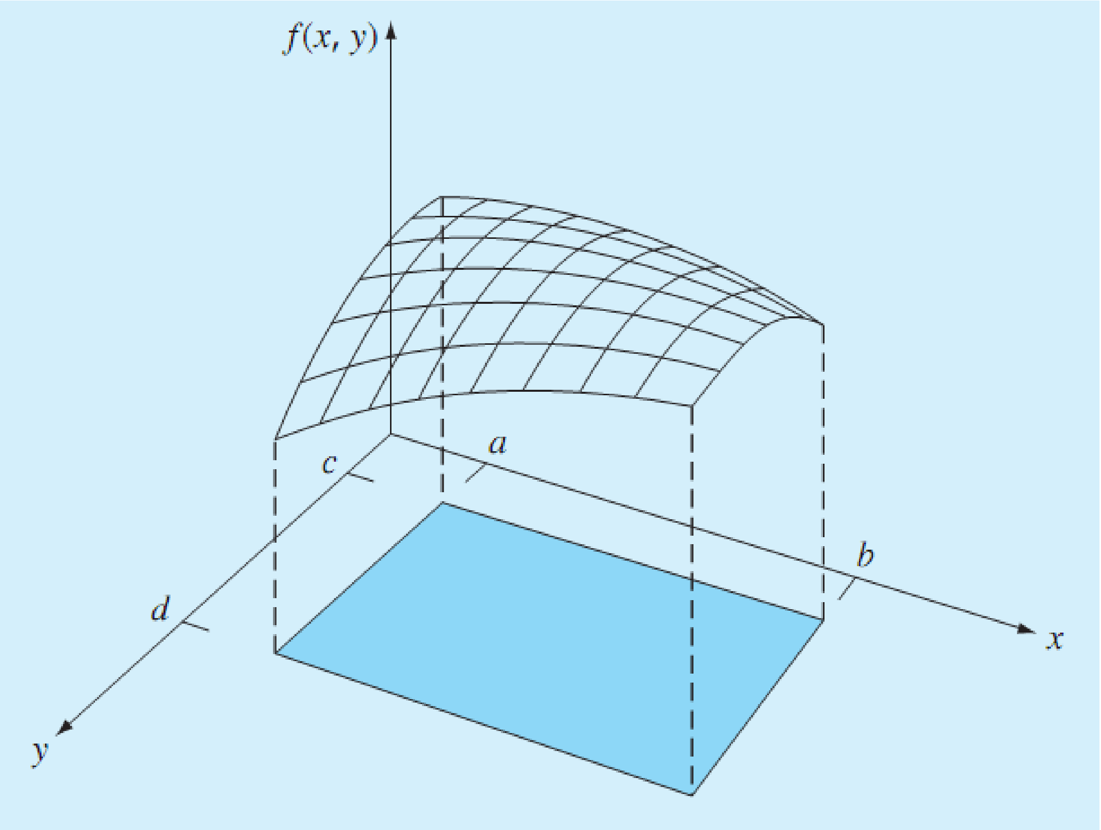
- در این روشها محدوده انتگرال گیری فراتر از داده های موجود است. روشهای انتگرال گیری باز معمولا برای محاسبه انتگرال های معین بکار نمی روند بلکه کاربرد آنها بیشتر در حل معادلات دیفرانسیل می باشد.
- روابط مربوط به قوانین باز نیوتن-کوت در جدول زیر خلاصه شده است. مشابه روشهای بسته استفاده از تعداد زوج تقسیمات و تعداد فرد نقاط به روشهای دارای تعداد فرد تقسیمات و تعداد زوج نقطه برتری دارد زیرا دو به دو دارای مرتبه خطای یکسان می باشند.

$$h = (b-a)/n$$

Segments (n)	Points	Name	Formula	Truncation Error
2	1	Midpoint method	$(b-a)\,f(x_1)$	$(1/3)h^3 f''(\xi)$
3	2		$(b-a)\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$	$(3/4)h^3 f''(\xi)$
4	3		$(b-a)\dfrac{2f(x_1)-f(x_2)+2f(x_3)}{3}$	$(14/45)h^5 f^{(4)}(\xi)$
5	4		$(b-a)\dfrac{11f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+11f(x_4)}{24}$	$(95/144)h^5 f^{(4)}(\xi)$
6	5		$(b-a)\dfrac{11f(x_1)-14f(x_2)+26f(x_3)-14f(x_4)+11f(x_5)}{20}$	$(41/140)h^7 f^{(6)}(\xi)$

برای محاسبه انتگرال های چندگانه از این اصل جبر استفاده می شود که می توان انتگرال های راستاهای مختلف را جداگانه محاسبه نمود. لذا برای هر راستا از روابطی که پیشتر بیان گردید استفاده می شود.

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx$$



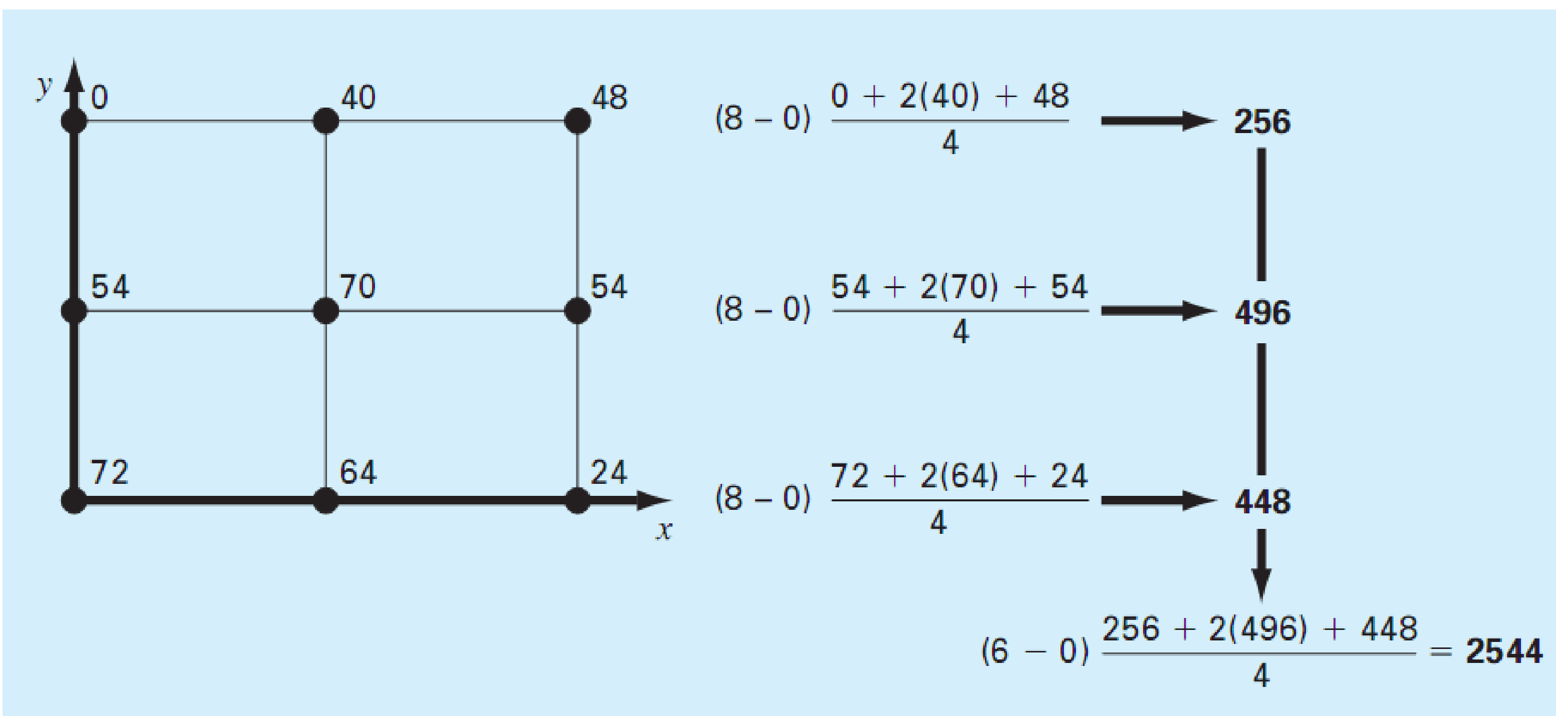
مثال:

دمای یک ورق توسط تابع زیر داده شده است:

$$T(x, y) = 2xy + 2x - x^2 - 2y^2 + 72$$

در صورتیکه طول ورق ۸ متر و عرض آن۶ متر باشد دمای متوسط را محاسبه نمائید.

$$\bar{f} = \frac{\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right)}{(d - c)(b - a)}$$



دستور انتگرال گیری دوگانه:

```
q = dblquad(fun, xmin, xmax, ymin, ymax, tol)
```

- Tol در دستور فوق میزان خطای انتگرال گیری است و درصورتیکه تعیین نشود مقدار $۱*۱۰^{-۶}$ در نظر گرفته می شود.
- دستور triplequad برای محاسبه انتگرال های سه گانه استفاده می شود که فرم دستور آن مشابه دستور فوق می باشد.

تمرین۱:

برای انتگرال زیر مطلوبست:

$$\int_0^4 (1 - e^{-x})\, dx$$

الف) حل تحلیلی

ب) قانون ذوزنقه ساده

ج) قانون ذوزنقه مرکب با n=۲ و n=۴

د) قانون ۱/۳ سیمپسون

ه) قانون مرکب ۱/۳ سیمپسون با n=۴

و) قانون ۳/۸ سیمپسون

ز) ترکیب قانون ۱/۳ و ۳/۸ سیمپسون با n=۵

ح) برای قسمتهای ب تا ز درصد خطای نسبی را با استفاده از قسمت الف محاسبه نمائید.

الف) حل تحلیلی:

$$\int_0^4 (1 - e^{-x})\, dx$$

$$I = x + e^{-x} \Big]_0^4 = \left(4 + e^{-4}\right) - \left(0 + e^{0}\right) = 3 + e^{-4} = 3.0183$$

ب) قاعده ذوزنقه:

$$I = (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

$$I = (4-0)\frac{\left(1-e^{-4}\right)+\left(1-e^{0}\right)}{2} = 2\left(1-e^{-4}\right) = 1.9634$$

$$\varepsilon_t = 100\left|\frac{3.0183-1.9634}{3.0183}\right| = 34.95\%$$

$$\int_0^4 (1 - e^{-x})\, dx \qquad I = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

ج) قاعده ذوزنقه مرکب با n=۲:

$$h = \frac{(4-0)}{2} = 2$$

$$I = \frac{2}{2}\left[\left(1-e^{0}\right) + 2\left(1-e^{-2}\right) + \left(1-e^{-4}\right)\right] = 2.7110$$

$$\varepsilon_t = 100\left|\frac{3.0183 - 2.7110}{3.0183}\right| = 10.18\%$$

ج) قاعده ذوزنقه مرکب با n=۴:

$$\mathrm{h} = \frac{(4-0)}{4} = 1$$

$$I = \frac{1}{2}\left[\left(1-e^{0}\right) + 2\left[\left(1-e^{-1}\right) + \left(1-e^{-2}\right) + \left(1-e^{-3}\right)\right] + \left(1-e^{-4}\right)\right] = 2.9378$$

$$\varepsilon_t = 100\left|\frac{3.0183 - 2.9378}{3.0183}\right| = 2.67\%$$

د) قانون ۱/۳ سیمپسون:

$$\int_0^4 (1-e^{-x})\,dx \qquad I=(b-a)\frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6}$$

$$h=\frac{(4-0)}{2}=2$$

$$I=\frac{2}{3}\left[\left(1-e^{0}\right)+4\left(1-e^{-2}\right)+\left(1-e^{-4}\right)\right]= 2.9602$$

$$\varepsilon_t=100\left|\frac{3.0183-2.9602}{3.0183}\right|=1.92\%$$

ه) قانون ۱/۳ سیمپسون مرکب با n=۴:

$$h=\frac{(4-0)}{4}=1 \qquad I=(b-a)\frac{f(x_0)+4\sum_{i=1,3,5}^{n-1}f(x_i)+2\sum_{j=2,4,6}^{n-2}f(x_j)+f(x_n)}{3n}$$

$$I=\frac{4}{3\times 4}\left[\left(1-e^{0}\right)+4\left[\left(1-e^{-1}\right)+\left(1-e^{-3}\right)\right]+2\left(1-e^{-2}\right)+\left(1-e^{-4}\right)\right]= 3.0134$$

$$\varepsilon_t=100\left|\frac{3.0183-3.0134}{3.0183}\right|=0.16\%$$

و) قانون ۳/۸ سیمپسون:

$$\int_0^4 (1-e^{-x})\,dx \qquad I=(b-a)\frac{f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)}{8}$$

$$h=\frac{(4-0)}{3}=1.3333$$

$$I=\frac{(4-0)}{8}\left[\left(1-e^{0}\right)+3\left[\left(1-e^{-1.3333}\right)+\left(1-e^{-2.6667}\right)\right]+\left(1-e^{-4}\right)\right]= \ 2.9912$$

$$\varepsilon_t=100\left|\frac{3.0183-2.9912}{3.0183}\right|=0.90\%$$

ه) ترکیب قانون ۱/۳ و ۳/۸ سیمپسون با n=۵:

$$\int_0^4 (1-e^{-x})\,dx$$

$$I=(b-a)\frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6}$$

$$I=(b-a)\frac{f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)}{8}$$

$$h=\frac{(4-0)}{5}=0.8$$

$$I_1=\frac{(1.6-0)}{6}\left[\left(1-e^{0}\right)+4\left[\left(1-e^{-0.8}\right)\right]+\left(1-e^{-1.6}\right)\right]=\ 0.6002$$

$$I_2=\frac{(4-1.6)}{8}\left[\left(1-e^{-1.6}\right)+3\left[\left(1-e^{-2.4}\right)+\left(1-e^{-3.2}\right)\right]+\left(1-e^{-4}\right)\right]=\ 2.2156$$

$$I=I_1+I_2=\ 2.8158$$

$$\varepsilon_t=100\left|\frac{3.0183-2.8158}{3.0183}\right|=6.71\%$$

تمرین۲:

انتگرال دوگانه زیر را به روشهای زیر محاسبه نمائید:

الف) روش تحلیلی

ب) روش ذوزنقه مرکب با n=۲

ج) روش ۱/۳ سیمپسون

د) برای قسمت های ب و ج درصد خطای نسبی را محاسبه نمائید.

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{4}(x^2 - 3y^2 + xy^3)\,dx\,dy$$

الف) روش تحلیلی:

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{4}(x^2-3y^2+xy^3)\,dx\,dy$$

$$I=\int_{-2}^{2}\left(\frac{x^3}{3}-3xy^2+\frac{x^2y^2}{2}\right]_{x=0}^{x=4}\Bigg)dy$$

$$I=\frac{4^3y}{3}-4y^3+\frac{4^2y^3}{6}\Bigg]_{-2}^{2}=$$

$$I=\left(\frac{4^3\times 2}{3}-4\times 2^3+\frac{4^2\times 2^3}{6}\right)-\left(\frac{4^3\times -2}{3}-4\times -2^3+\frac{4^2\times -2^3}{6}\right)=64$$

ب) روش ذوزنقه مرکب با n=۲:

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{4}(x^2-3y^2+xy^3)\,dx\,dy \qquad I=\frac{h}{2}\left[f(x_0)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(x_n)\right]$$

$$h_x=\frac{4-0}{2}=2 \qquad , \qquad h_y=\frac{2-(-2)}{2}=2$$

$$I=\int_{-2}^{2}\left[\frac{h_x}{2}\left(f(x_0)+2f(x_1)+f(x_2)\right)\right]dy=$$

$$I=\int_{-2}^{2}\left[\frac{2}{2}\left(f(0)+2f(2)+f(4)\right)\right]dy=$$

$$I=\int_{-2}^{2}\left[\left(-3y^2\right)+2\left(4-3y^2+2y^3\right)+\left(16-3y^2+4y^3\right)\right]dy=$$

$$I=\int_{-2}^{2}\left(24-12y^2+8y^3\right)dy=$$

$$I=\frac{h_y}{2}\left(f(y_0)+2f(y_1)+f(y_2)\right)$$

$$I=\left(24-12(-2)^2+8(-2)^3\right)+2\left(24-12(0)^2+8(0)^3\right)+\left(24-12(2)^2+8(2)^3\right)=$$

$$I=0$$

ج) روش ۱/۳ سیمپسون:

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{4}(x^2-3y^2+xy^3)\,dx\,dy \qquad I=(b-a)\frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6}$$

$$h_x=\frac{4-0}{2}=2 \qquad , \qquad h_y=\frac{2-(-2)}{2}=2$$

$$I=\int_{-2}^{2}\left[\frac{(4-0)}{6}\left(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right)\right]dy=$$

$$I=\int_{-2}^{2}\left[\frac{2}{3}\left(f(0)+4f(2)+f(4)\right)\right]dy=$$

$$I=\int_{-2}^{2}\frac{2}{3}\left[\left(-3y^2\right)+4\left(4-3y^2+2y^3\right)+\left(16-3y^2+4y^3\right)\right]dy=$$

$$I=\int_{-2}^{2}\frac{2}{3}\left(32-18y^2+12y^3\right)dy=$$

$$I=\frac{(2-(-2))}{6}\left(f(y_0)+4f(y_1)+f(y_2)\right)$$

$$I=\frac{2}{3}\left[\left(\frac{64}{3}-12(-2)^2+8(-2)^3\right)+4\left(\frac{64}{3}-12(0)^2+8(0)^3\right)+\left(\frac{64}{3}-12(2)^2+8(2)^3\right)\right]=$$

$$I=21.333$$

تمرین۳:

انتگرال سه گانه زیر را با روشهای ذکر شده محاسبه نمائید.

الف) روش تحلیلی

ب) روش ۱/۳ سیمپسون

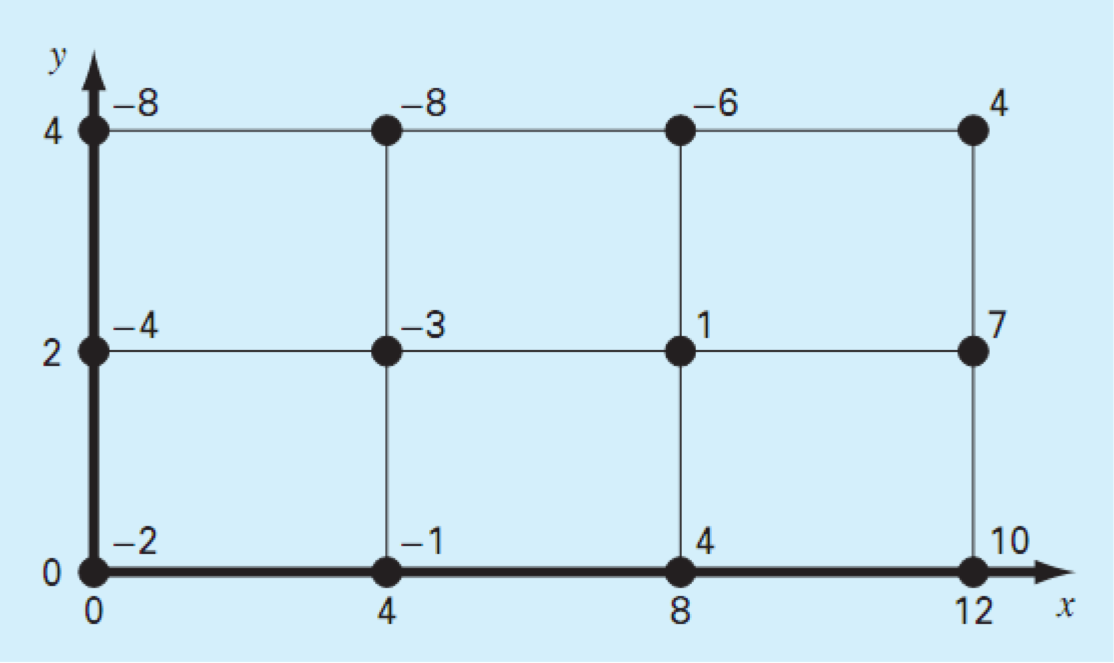
ج) خطای قسمت ب را بدست آورید.

$$\int_{-4}^{4}\int_{0}^{6}\int_{-1}^{3}(x^3-2yz)\,dx\,dy\,dz$$

تمرین۴:

با توجه به داده های شکل مقدار متوسط این داده ها را بدست آورید.

$$I = \int_{x_0}^{x_n} \left[\int_{y_0}^{y_m} f(x, y)\, dy \right] dx$$



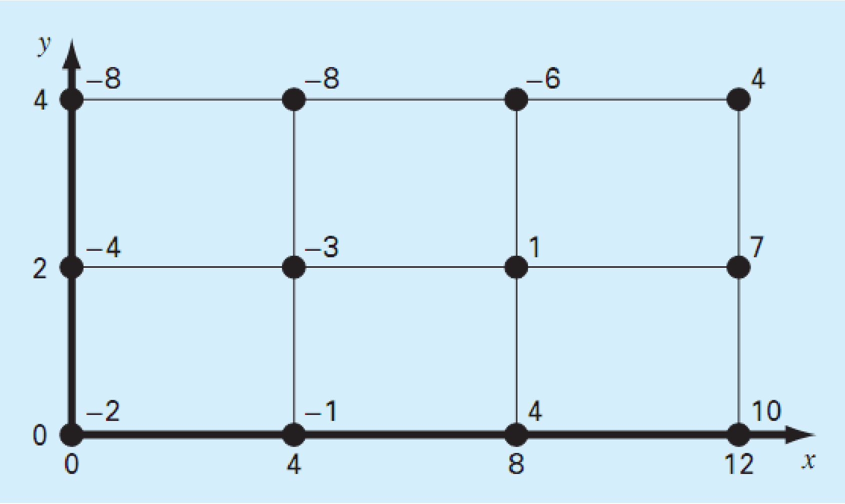
حل:

$$I = \int_{x_0}^{x_n} \left[\int_{y_0}^{y_m} f(x, y)\, dy \right] dx$$

با توجه به تعداد نقاط در جهت x از قانون ۳/۸ سیمپسون و در جهت y قانون ۱/۳ سیمپسون استفاده می شود.

$$I = (b-a)\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}$$

$$I = (b-a)\frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8}$$



$$I = \frac{(12-0)}{8}\left(-8+3(-8-6)+4\right) = -69$$

$$I = \frac{(12-0)}{8}\left(-4+3(-3+1)+7\right) = -4.5$$

$$I = \frac{(12-0)}{8}\left(-2+3(-1+4)+10\right) = 25.5$$

$$I = \frac{(4-0)}{6}\left(25.5+4(-4.5)-69\right) = -41 \Rightarrow \bar{T} = \frac{-41}{12\times 4} = -0.854$$

اگرچه روش انتگرال ۱/۳ سیمپسون برای بسیاری از مسائل مفید است روشهای بهینه تری نیز برای محاسبه انتگرال وجود دارد. به عنوان مثال می توان روشهای بسط ریچاردسون و Gaussian Quadrature را نام برد.

20.2.1 Richardson Extrapolation

در روش بسط ریچاردسون با ترکیب دو تخمین برای مقدار انتگرال، تخمین جدیدی با دقت بالاتر ایجاد می شود.

20.2.2 The Romberg Integration Algorithm

به الگوریتم محاسبه بهینه بسط ریچاردسون انتگرال رامبرگ گویند که برای محاسبه تخمین مقدار انتگرال با دقتی از پیش تعیین شده کاربرد دارد.

$$I_{j,k} = \frac{4^{k-1} I_{j+1,k-1} - I_{j,k-1}}{4^{k-1} - 1}$$

مقدار دقیق انتگرال را می توان بر حسب مقدار تقریبی و خطا بصورت زیر در نظر گرفت:

$$I = I(h) + E(h)$$

I = مقدار دقیق انتگرال

$I(h)$ = مقدار تقریبی انتگرال با $h = (b-a)/n$

$E(h)$ = خطای انتگرال عددی با $h = (b-a)/n$

از طرفی خطا را می توان بصورت زیر نوشت که از مرتبه $O(h^2)$ است:

$$E \cong -\frac{b-a}{12} h^2 \bar{f}'' \Rightarrow \frac{E(h_1)}{E(h_2)} \cong \frac{h_1^2}{h_2^2} \Rightarrow E(h_1) \cong E(h_2)\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2$$

مقدار دقیق انتگرال با دو طول بازه متفاوت می بایست برابر باشد:

$$I(h_1) + E(h_1) = I(h_2) + E(h_2) \Rightarrow I(h_1) + E(h_2)\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 = I(h_2) + E(h_2)$$

$$E(h_2) = \frac{I(h_1) - I(h_2)}{1 - (h_1/h_2)^2}$$

بنابراین می توان نوشت:

$$I = I(h_2) + E(h_2)$$

$$E(h_2) = \frac{I(h_1) - I(h_2)}{1 - (h_1/h_2)^2}$$

$$I = I(h_2) + \frac{1}{(h_1/h_2)^2 - 1}[I(h_2) - I(h_1)]$$

خطای رابطه فوق از مرتبه $O(h^4)$ است. بنابراین با ترکیب دو انتگرال از مرتبه $O(h^2)$ تقریبی از انتگرال با خطای مرتبه $O(h^4)$ بدست آمد.

در حالت خاص که طول بازه نصف گردد $(h_2 = h_1/2)$

$$I = \frac{4}{3}I(h_2) - \frac{1}{3}I(h_1) \qquad O(h^4)$$

با داشتن دو تقریب با دقت کمتر I_l و با دقت بیشتر I_m می توان نوشت

$$I = \frac{16}{15}I_m - \frac{1}{15}I_l \qquad O(h^6)$$

$$I = \frac{64}{63}I_m - \frac{1}{63}I_l \qquad O(h^8)$$

مثال

انتگرال تابع زیر را در بازه داده شده با استفاده از روش رامبرگ محاسبه نمائید.

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5 \qquad \text{from } a = 0 \text{ to } b = 0.8$$

با استفاده از روش انتگرال ذوزنقه با تعداد تقسیمات مختلف نتایج زیر حاصل می شود:

Segments	h	Integral	ε_t
1	0.8	0.1728	89.5%
2	0.4	1.0688	34.9%
4	0.2	1.4848	9.5%

$$I = \frac{4}{3}(1.0688) - \frac{1}{3}(0.1728) = 1.367467 \qquad (\varepsilon_t = 16.6\%)$$

$$I = \frac{4}{3}(1.4848) - \frac{1}{3}(1.0688) = 1.623467 \qquad (\varepsilon_t = 1.0\%)$$

مثال

با استفاده از تقریب های بعدی می توان جدول زیر را تشکیل داد:

Segments	h	Integral	ε_t
1	0.8	0.1728	89.5%
2	0.4	1.0688	34.9%
4	0.2	1.4848	9.5%

$$I = \frac{4}{3}(1.0688) - \frac{1}{3}(0.1728) = 1.367467$$

$$I = \frac{16}{15}(1.623467) - \frac{1}{15}(1.367467) = 1.640533$$

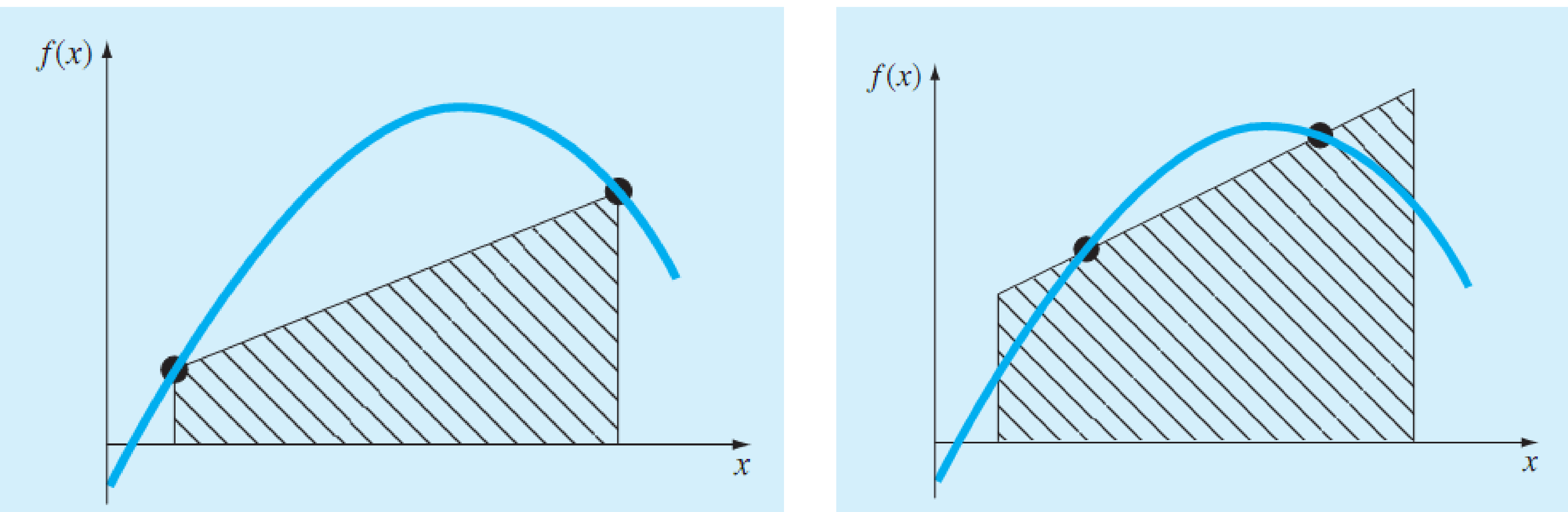
$$I = \frac{4}{3}(1.4848) - \frac{1}{3}(1.0688) = 1.623467$$

	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$
	0.172800	1.367467		
(a)	1.068800			
	0.172800	1.367467	1.640533	
	1.068800	1.623467		
(b)	1.484800			
	0.172800	1.367467	1.640533	1.640533
	1.068800	1.623467	1.640533	
	1.484800	1.639467		
(c)	1.600800			

در روشهای نیوتن-کوت عموما موقعیت نقاط انتگرال گیری ثابت و از پیش تعیین شده است.

در حالیکه در روشهای Gaussian Quadrature هر دو نقطه در بازه انتگرال گیری می تواند استفاده شده و با عبور خطی از آنها مقدار انتگرال تخمین زده می شود.

در شکل های زیر تفاوت میان دو روش نشان داده شده است.



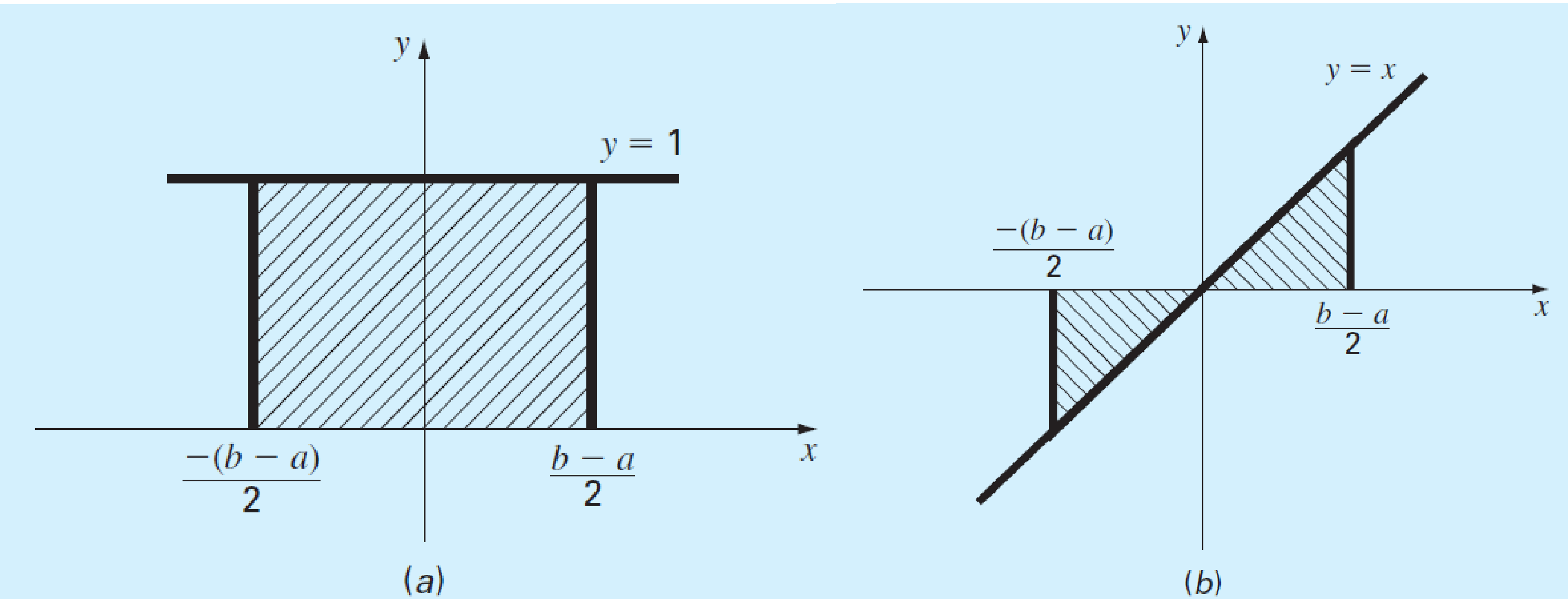
(a) (b)

20.3.1 Method of Undetermined Coefficients روش ضرایب نامعین

در این روش انتگرال به فرم زیر در نظر گرفته می شود:

$$I \cong c_0 f(a) + c_1 f(b)$$

حال با توجه به اینکه روش ذوزنقه برای توابع خطی می بایست جواب دقیق ارائه دهد داریم:



$$c_0 + c_1 = \int_{-(b-a)/2}^{(b-a)/2} 1\, dx$$

$$-c_0 \frac{b-a}{2} + c_1 \frac{b-a}{2} = \int_{-(b-a)/2}^{(b-a)/2} x\, dx$$

لذا می توان مجهولات را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\left.\begin{aligned} c_0 + c_1 &= b - a \\ -c_0\frac{b-a}{2} + c_1\frac{b-a}{2} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad c_0 = c_1 = \frac{b-a}{2}$$

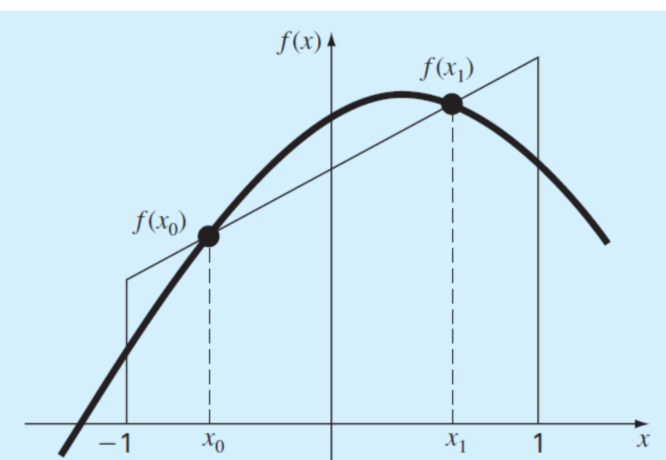
و انتگرال به فرم زیر در می آید که همان رابطه ذوزنقه است:

$$I = \frac{b-a}{2}f(a) + \frac{b-a}{2}f(b)$$

در این روش نیز انتگرال را به فرم زیر در نظر می گیریم:

$$I \cong c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1)$$

اما برخلاف روش ذوزنقه که در آن نقاط a وb ثابت و در انتهای بازه بودند، نقاط x۰ وx۱ مجهولند. بنابراین در مجموع چهار مجهول وجود دارد. برای محاسبه این مجهولات فرض می کنیم که مقدار فوق برای توابع درجه ۲ و ۳ نیز دقیق باشد. لذا می توان نوشت:



$$c_0 + c_1 = \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2$$

$$c_0 x_0 + c_1 x_1 = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0$$

$$c_0 x_0^2 + c_1 x_1^2 = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3}$$

$$c_0 x_0^3 + c_1 x_1^3 = \int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0$$

$$c_0 = c_1 = 1$$

$$x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -0.5773503\ldots$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.5773503\ldots$$

تغییر حدود انتگرال از a و b به ۱ و ۱-

همانگونه که ملاحظه شد در این روش روابط بر حسب حدود ۱ و ۱- بدست آمد. لذا برای حالت کلی می توان از یک تغییر متغیر ساده به فرم زیر استفاده نمود.

$$x = a_1 + a_2 x_d \quad \begin{cases} x = a,\, x_d = -1, \\ x = b,\ \ x_d = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = a_1 + a_2(-1) \\ b = a_1 + a_2(1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{b+a}{2} \\ a_2 = \dfrac{b-a}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{(b+a)+(b-a)x_d}{2} \\ dx = \dfrac{b-a}{2}\, dx_d \end{cases}$$

مثال:

انتگرال تابع زیر را در بازه داده شده با روش گاوس-لژاندر دونقطه ای محاسبه نمائید.

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5 \qquad x = 0 \text{ to } 0.8$$

حل: ابتدا از تغییر متغیر زیر استفاده می کنیم:

$$x = 0.4 + 0.4x_d \qquad\qquad dx = 0.4dx_d$$

بنابراین انتگرال به صورت زیر در می آید:

$$\int_0^{0.8} (0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} [0.2 + 25(0.4 + 0.4x_d) - 200(0.4 + 0.4x_d)^2 + 675(0.4 + 0.4x_d)^3$$
$$- 900(0.4 + 0.4x_d)^4 + 400(0.4 + 0.4x_d)^5]0.4dx_d$$

$$\left.\begin{aligned} f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) &\Rightarrow 0.516741 \\ f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) &\Rightarrow 1.305837 \end{aligned}\right\} I = f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1.822578$$

خطای این روش برابر -11.1% است که تنها با دوبار محاسبه تابع بدست آمده است.

مراتب بالاتر انتگرال به روش گاوس-لژاندر

TABLE 20.1 Weighting factors and function arguments used in Gauss-Legendre formulas.

Points	Weighting Factors	Function Arguments	Truncation Error
1	$c_0 = 2$	$x_0 = 0.0$	$\cong f^{(2)}(\xi)$
2	$c_0 = 1$	$x_0 = -1/\sqrt{3}$	$\cong f^{(4)}(\xi)$
	$c_1 = 1$	$x_1 = 1/\sqrt{3}$	
3	$c_0 = 5/9$	$x_0 = -\sqrt{3/5}$	$\cong f^{(6)}(\xi)$
	$c_1 = 8/9$	$x_1 = 0.0$	
	$c_2 = 5/9$	$x_2 = \sqrt{3/5}$	
4	$c_0 = (18 - \sqrt{30})/36$	$x_0 = -\sqrt{525 + 70\sqrt{30}}/35$	$\cong f^{(8)}(\xi)$
	$c_1 = (18 + \sqrt{30})/36$	$x_1 = -\sqrt{525 - 70\sqrt{30}}/35$	
	$c_2 = (18 + \sqrt{30})/36$	$x_2 = \sqrt{525 - 70\sqrt{30}}/35$	
	$c_3 = (18 - \sqrt{30})/36$	$x_3 = \sqrt{525 + 70\sqrt{30}}/35$	
5	$c_0 = (322 - 13\sqrt{70})/900$	$x_0 = -\sqrt{245 + 14\sqrt{70}}/21$	$\cong f^{(10)}(\xi)$
	$c_1 = (322 + 13\sqrt{70})/900$	$x_1 = -\sqrt{245 - 14\sqrt{70}}/21$	
	$c_2 = 128/225$	$x_2 = 0.0$	
	$c_3 = (322 + 13\sqrt{70})/900$	$x_3 = \sqrt{245 - 14\sqrt{70}}/21$	
	$c_4 = (322 - 13\sqrt{70})/900$	$x_4 = \sqrt{245 + 14\sqrt{70}}/21$	
6	$c_0 = 0.171324492379170$	$x_0 = -0.932469514203152$	$\cong f^{(12)}(\xi)$
	$c_1 = 0.360761573048139$	$x_1 = -0.661209386466265$	
	$c_2 = 0.467913934572691$	$x_2 = -0.238619186083197$	
	$c_3 = 0.467913934572691$	$x_3 = 0.238619186083197$	
	$c_4 = 0.360761573048131$	$x_4 = 0.661209386466265$	
	$c_5 = 0.171324492379170$	$x_5 = 0.932469514203152$	

مثال:

انتگرال تابع زیر را در بازه داده شده با روش گاوس-لژاندر سه نقطه ای محاسبه نمائید.

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5 \qquad x = 0 \text{ to } 0.8$$

حل: ابتدا از تغییر متغیر زیر استفاده می کنیم:

$$x = 0.4 + 0.4x_d \qquad dx = 0.4dx_d$$

بنابراین با استفاده از داده های جدول، انتگرال به صورت زیر در می آید:

$$I = 0.5555556\, f(-0.7745967) + 0.8888889\, f(0) + 0.5555556\, f(0.7745967)$$

$$I = 0.2813013 + 0.8732444 + 0.4859876 = 1.640533$$

که برابر با مقدار دقیق می باشد.

20.4.2 MATLAB Functions: quad and quadl توابع quad و quadl در متلب

فرم دستور: `q = quad(fun, a, b, tol, trace, p1, p2, . . .)`

Tol: مقدار دلخواه خطای انتگرال گیری

Trace: در صورتیکه غیر صفر قرار داده شدو اطلاعات بیشتری نمایش می دهد.

P۱ و p۲ : پارامترهایی که به تابع پاس داده می شوند.

مثال:

انتگرال تابع زیر در بازه ۰ تا ۱:

$$f(x) = \frac{1}{(x-q)^2 + 0.01} + \frac{1}{(x-r)^2 + 0.04} - s \qquad \underbrace{q = 0.3,\ r = 0.9, \text{ and } s = 6}_{\text{humps تابع}}$$

استفاده از دستور با مقادیر پیش فرض:

```
>> format long
>> quad(@humps,0,1)

ans =
  29.85832612842764
```

تعریف تابع:

```
function y = myhumps(x,q,r,s)
y = 1./((x-q).^2 + 0.01) + 1./((x-r).^2+0.04) - s;
```

استفاده از دستور با مقادیر دلخواه:

```
>> quad(@myhumps,0,1,1e-4,[],0.3,0.9,6)

ans =
  29.85812133214492
```

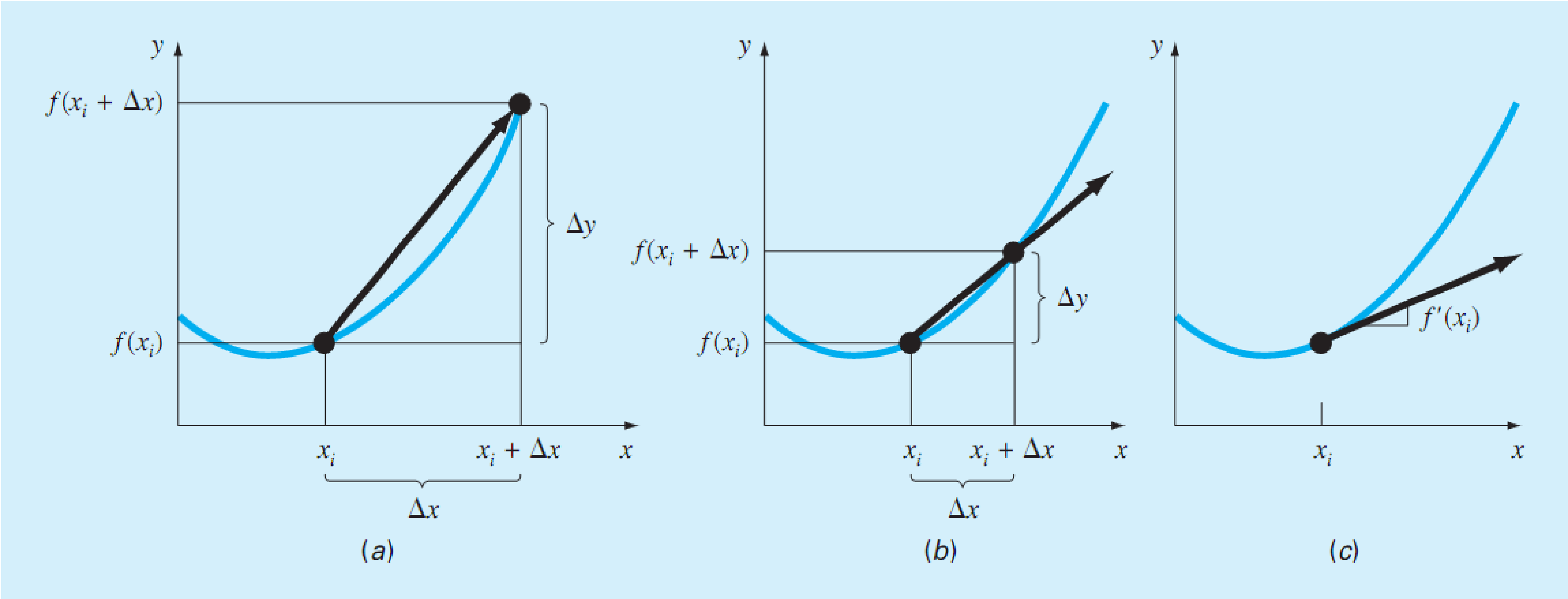
در این حالت بدلیل خطای کمتر، تعداد محاسبه تابع کاهش یافته که منجر به کاهش زمان اجرا می شود.

21 فصل بیست و یکم

Numerical Differentiation

مشتق گیری عددی

تعریف مشتق:



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x}$$

مشتقات جزیی:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

روابط مشتق با دقت بالا:

برای افزایش دقت مشتق گیری دو روش وجود دارد:

۱- کاهش بازه تغییرات ۲- استفاده از روابط مرتبه بالاتر مشتق گیری که از بسط تیلور بدست می آید. برای مثال بسط تیلور جلوسوی تابع بصورت زیر است:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \cdots \Rightarrow f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f''(x_i)}{2!}h + O(h^2)$$

با صرفنظر از مشتق دوم و مراتب بالاتر:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h)$$

حال اگر مشتق دوم جلوسو را بنویسیم:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h)$$

و با جایگذاری آن در رابطه مشتق اول داریم:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2h^2}h + O(h^2)$$

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h} + O(h^2)$$

روابط مشتق جلوسو

First Derivative	Error
$f'(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$	$O(h)$
$f'(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h}$	$O(h^2)$
Second Derivative	
$f''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$	$O(h)$
$f''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+3}) + 4f(x_{i+2}) - 5f(x_{i+1}) + 2f(x_i)}{h^2}$	$O(h^2)$
Third Derivative	
$f'''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h^3}$	$O(h)$
$f'''(x_i) = \dfrac{-3f(x_{i+4}) + 14f(x_{i+3}) - 24f(x_{i+2}) + 18f(x_{i+1}) - 5f(x_i)}{2h^3}$	$O(h^2)$
Fourth Derivative	
$f''''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+4}) - 4f(x_{i+3}) + 6f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^4}$	$O(h)$
$f''''(x_i) = \dfrac{-2f(x_{i+5}) + 11f(x_{i+4}) - 24f(x_{i+3}) + 26f(x_{i+2}) - 14f(x_{i+1}) + 3f(x_i)}{h^4}$	$O(h^2)$

روابط مشتق مرکزی

First Derivative	Error
$f'(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$	$O(h^2)$
$f'(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{12h}$	$O(h^4)$
Second Derivative	
$f''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2}$	$O(h^2)$
$f''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{12h^2}$	$O(h^4)$
Third Derivative	
$f'''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{2h^3}$	$O(h^2)$
$f'''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+3}) + 8f(x_{i+2}) - 13f(x_{i+1}) + 13f(x_{i-1}) - 8f(x_{i-2}) + f(x_{i-3})}{8h^3}$	$O(h^4)$
Fourth Derivative	
$f''''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + 6f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^4}$	$O(h^2)$
$f''''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+3}) + 12f(x_{i+2}) - 39f(x_{i+1}) + 56f(x_i) - 39f(x_{i-1}) + 12f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{6h^4}$	$O(h^4)$

روابط مشتق عقبگرد

First Derivative	Error
$f'(x_i) = \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$	$O(h)$
$f'(x_i) = \dfrac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2h}$	$O(h^2)$
Second Derivative	
$f''(x_i) = \dfrac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2}$	$O(h)$
$f''(x_i) = \dfrac{2f(x_i) - 5f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^2}$	$O(h^2)$
Third Derivative	
$f'''(x_i) = \dfrac{f(x_i) - 3f(x_{i-1}) + 3f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^3}$	$O(h)$
$f'''(x_i) = \dfrac{5f(x_i) - 18f(x_{i-1}) + 24f(x_{i-2}) - 14f(x_{i-3}) + 3f(x_{i-4})}{2h^3}$	$O(h^2)$
Fourth Derivative	
$f''''(x_i) = \dfrac{f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + 6f(x_{i-2}) - 4f(x_{i-3}) + f(x_{i-4})}{h^4}$	$O(h)$
$f''''(x_i) = \dfrac{3f(x_i) - 14f(x_{i-1}) + 26f(x_{i-2}) - 24f(x_{i-3}) + 11f(x_{i-4}) - 2f(x_{i-5})}{h^4}$	$O(h^2)$

یک راه دیگر برای افزایش دقت روابط مشتق استفاده از بسط ریچاردسون می باشد که از دو مشتق با دقت کمتر برای محاسبه مشتق سوم با دقت بالاتر استفاده می کند.

$$h_2 = h_1/2, \quad I = I(h_2) + \frac{1}{(h_1/h_2)^2 - 1}[I(h_2) - I(h_1)] \qquad O(h^4).$$

مثال: با روش بسط ریچاردسون مشتق تابع زیر را در نقطه داده شده بدست آورید.

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2 \qquad x = 0.5$$

$$h_1 = 0.5 \text{ and } h_2 = 0.25 \qquad \begin{cases} D(0.5) = \dfrac{0.2 - 1.2}{1} = -1.0 & \varepsilon_t = -9.6\% \\[2ex] D(0.25) = \dfrac{0.6363281 - 1.103516}{0.5} = -0.934375 & \varepsilon_t = -2.4\% \end{cases}$$

$$D = \frac{4}{3}(-0.934375) - \frac{1}{3}(-1) = -0.9125$$

مقدار دقیق

$$f'(0.5) = -0.9125$$

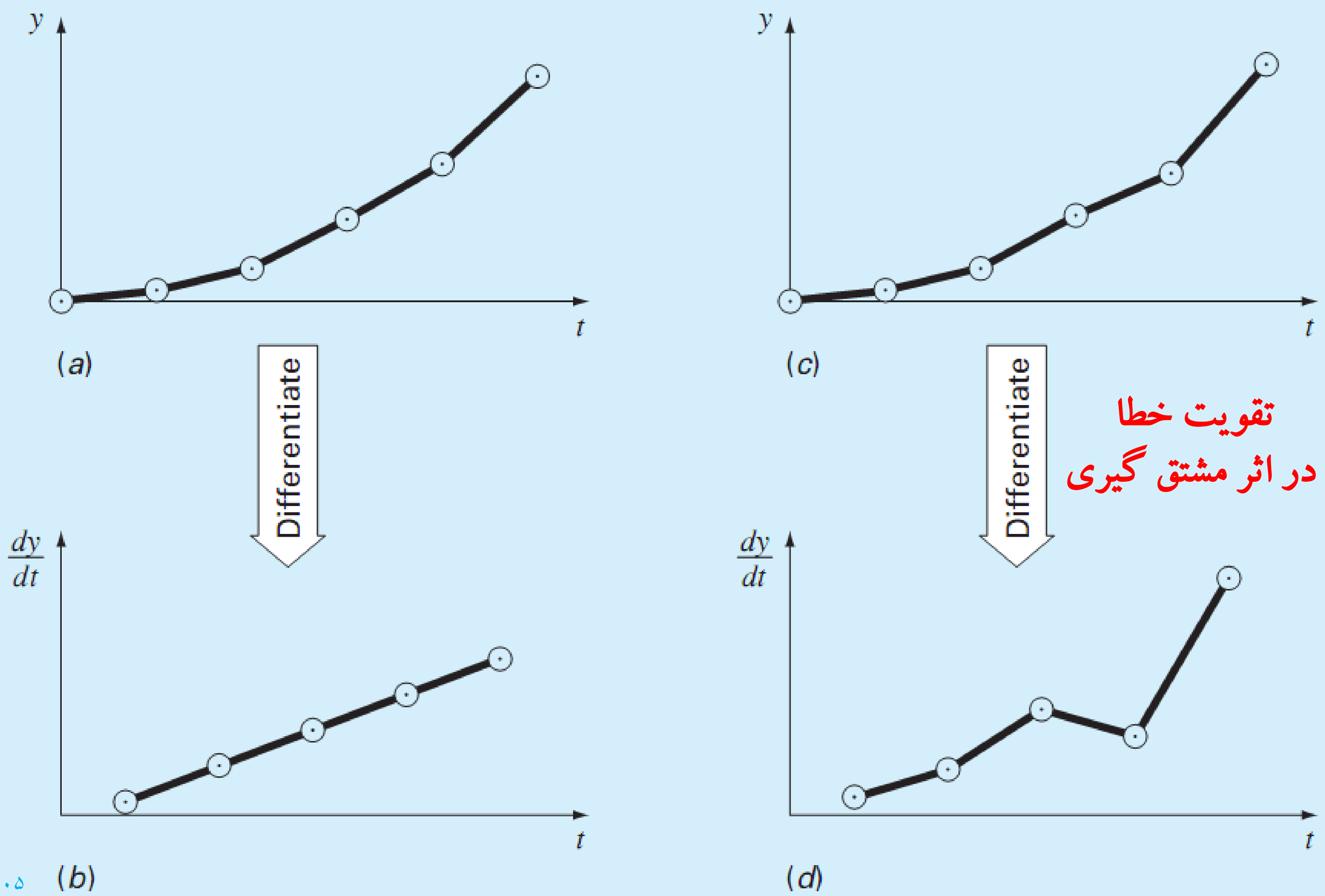
یک روش برای مشتق گیری از داده ها با فواصل نامساوی استفاده از چندجمله ای لاگرانژ است. سپس از چندجمله ای بصورت تحلیلی مشتق گیری می شود.

بطور مثال با استفاده از چندجمله ای مرتبه دوم لاگرانژ و مشتق گیری از آن داریم:

$$f'(x) = f(x_0)\frac{2x - x_1 - x_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f(x_1)\frac{2x - x_0 - x_2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f(x_2)\frac{2x - x_0 - x_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

21.5 DERIVATIVES AND INTEGRALS FOR DATA WITH ERRORS

مشتق و انتگرال برای داده های دارای خطا



21.6 PARTIAL DERIVATIVES مشتقات جزیی:

مشتقات جزئی مرتبه اول را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x-\Delta x, y)}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y-\Delta y)}{2\Delta y}$$

حال مشتق دوم مختلط را می توان از روابط فوق بدست آورد:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x+\Delta x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x-\Delta x, y)}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\dfrac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y-\Delta y)}{2\Delta y} - \dfrac{f(x-\Delta x, y+\Delta y) - f(x-\Delta x, y-\Delta y)}{2\Delta y}}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y-\Delta y) - f(x-\Delta x, y+\Delta y) + f(x-\Delta x, y-\Delta y)}{4\Delta x \Delta y}$$

21.7.1 MATLAB Function: `diff`

این تابع برای برداری حاوی n نقطه، برداری حاوی n-۱ نقطه محاسبه می کند که فواصل نقاط مجاور می باشد. با تقسیم بردار حاصل بر بازه مورد نظر مشتق اول بدست می آید.

مثال:

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

$$f'(x) = 25 - 400x^2 + 2025x^2 - 3600x^3 + 2000x^4 \qquad \text{from } x = 0 \text{ to } 0.8$$

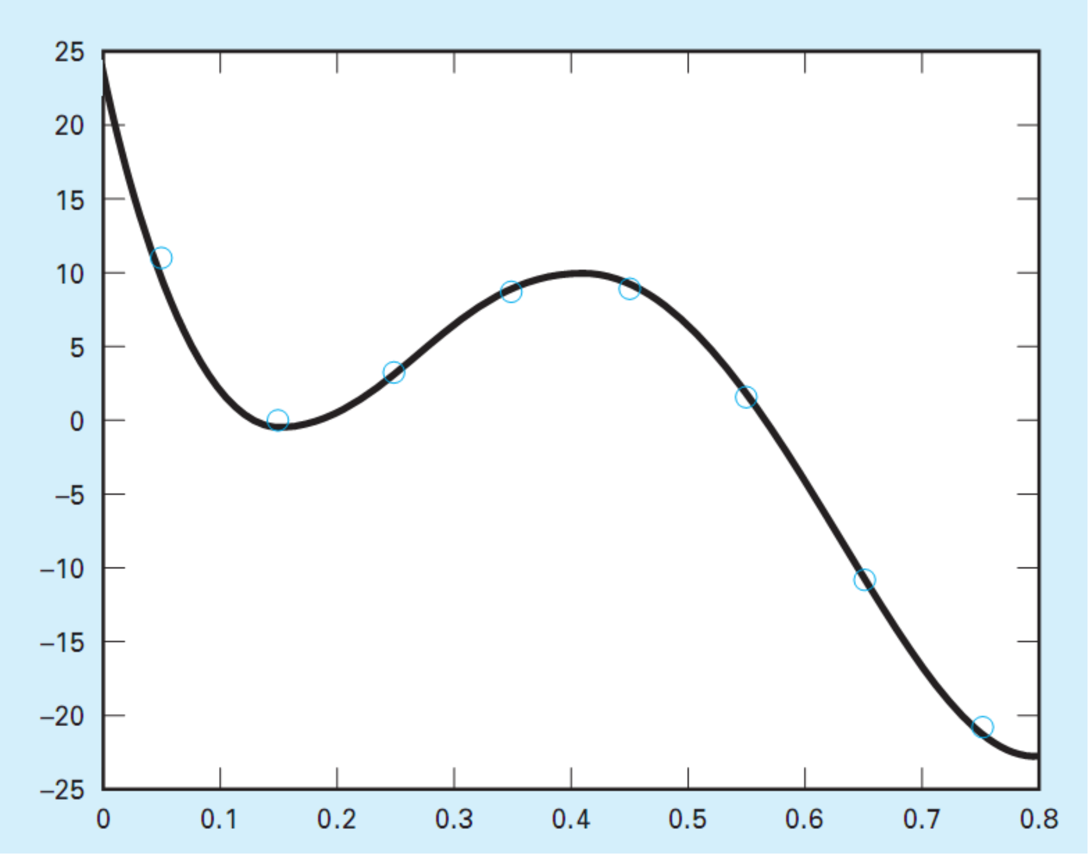
```
>> f=@(x) 0.2+25*x-200*x.^2+675*x.^3-900*x.^4+400*x.^5;
```

```
>> x=0:0.1:0.8;
>> y=f(x);
```

```
>> d=diff(y)./diff(x)

d =
  Columns 1 through 5
   10.8900    -0.0100     3.1900     8.4900     8.6900
  Columns 6 through 8
    1.3900   -11.0100   -21.3100
```

مقایسه مقادیر عددی و مقادیر تحلیلی برای مشتق



تابع گرادیان در متلب

از تابع گرادیان متلب برای محاسبه مشتقات جزیی می توان استفاده نمود.

```
[fx,fy] = gradient(f, h)
```

f: ماتریس حاوی مقادیر تابع در نقاط مختلف

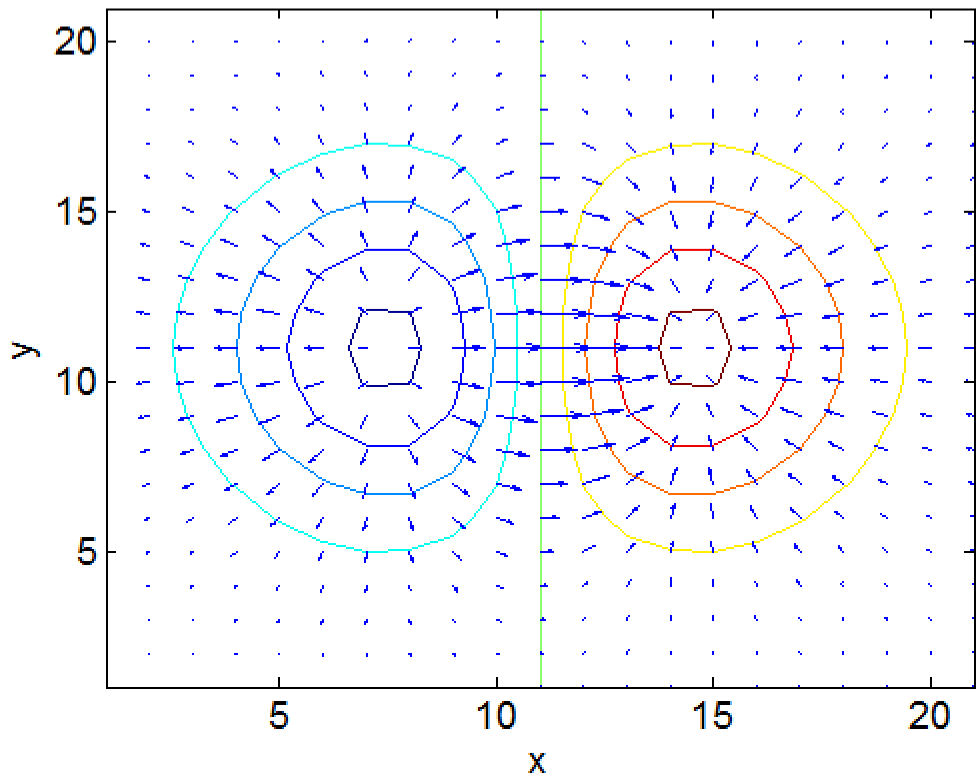
h: مقدار فاصله داده ها یا بازه (در صورت داده نشدن، مقدار فواصل برابر ۱ درنظر گرفته می شود).

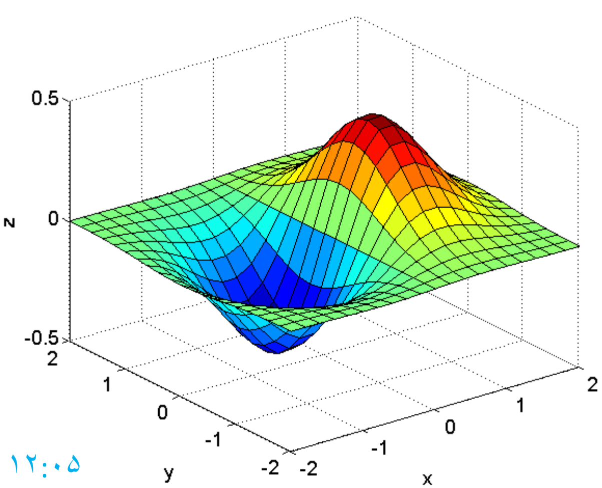
fx: مشتق جزیی نسبت به x

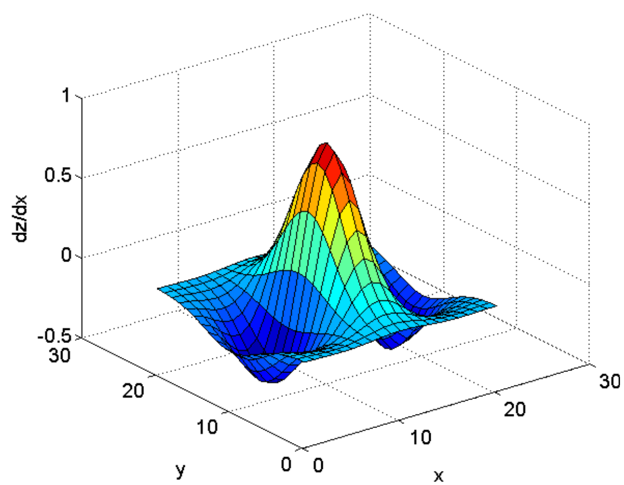
fy: مشتق جزیی نسبت به y

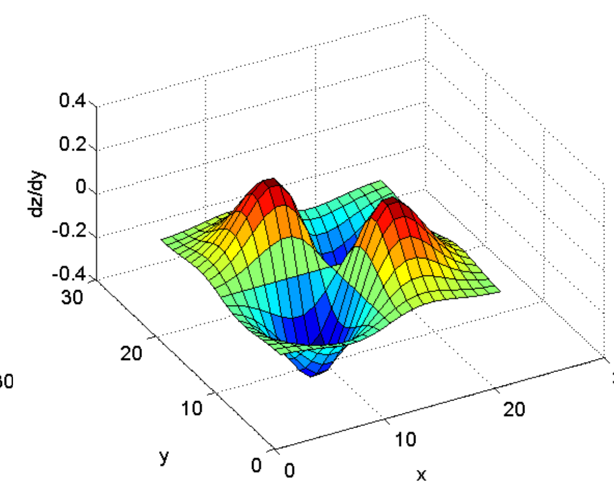
مثال:

```
>> [x,y] = meshgrid(-۲:.۲:۲, -۲:.۲:۲);
      z = x .* exp(-x.^۲ - y.^۲);
      [px,py] = gradient(z,.۲,.۲);
      contour(z), hold on, quiver(px,py)
>> surf(x,y,z)
>> surf(px)
>> surf(py)
```









تمرین ۱:

برای تابع داده شده در نقطه مورد نظر مطلوبست:

الف) مشتقات مرتبه اول جلوسو و عقبگرد با دقت $O(h)$ and $O(h^2)$

ب) مشتقات مرتبه اول مرکزی با دقت $O(h^2)$ and $O(h^4)$

ج) محاسبه خطا نسبت به مقدار واقعی در هر حالت.

$$y = \cos x \text{ at } x = \pi/4$$

$$h = \pi/12$$

الف) مشتق جلوسو و عقبگرد با مراتب $O(h)$ and $O(h^2)$

$y = \cos x$ at $x = \pi/4$ $\qquad\qquad h = \pi/12$

First Derivative

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$$

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h}$$

مشتق عقبگرد

مشتق عقبگرد

First Derivative

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$$

$$f'(x_i) = \frac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2h}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cos\left(\pi/4 + \pi/12\right) - \cos\left(\pi/4\right)}{\pi/12} = -0.791 \qquad \Rightarrow \varepsilon_t = 11.86\%$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\cos\left(\pi/4 + \pi/6\right) + 4\cos\left(\pi/4 + \pi/12\right) - 3\cos\left(\pi/4\right)}{\pi/6} = -0.726 \quad \Rightarrow \varepsilon_t = 2.67\%$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cos\left(\pi/4\right) - \cos\left(\pi/4 - \pi/12\right)}{\pi/12} = -0.607 \qquad \Rightarrow \varepsilon_t = 14.16\%$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\cos\left(\pi/4\right) - 4\cos\left(\pi/4 - \pi/12\right) + \cos\left(\pi/4 - \pi/6\right)}{\pi/6} = -0.7197 \quad \Rightarrow \varepsilon_t = 1.78\%$$

$O(h^2)$ and $O(h^4)$ ب) مشتق مرکزی با مراتب

$y = \cos x$ at $x = \pi/4$ $\qquad h = \pi/12$

First Derivative

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$$

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{12h}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cos\left(\pi/4 + \pi/12\right) - \cos\left(\pi/4 - \pi/12\right)}{\pi/6} = -0.699 \qquad \Rightarrow \varepsilon_t = 1.15\%$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\cos\left(\pi/4 + \pi/6\right) + 8\cos\left(\pi/4 + \pi/12\right) - 8\cos\left(\pi/4 - \pi/12\right) + \cos\left(\pi/4 - \pi/6\right)}{\pi} = -0.707 \quad \Rightarrow \varepsilon_t = 0.015\%$$

تمرین۲:

برای تابع داده شده با استفاده از بسط ریچاردسون مشتق اول را محاسبه نمائید. از مشتق مرکزی با دقت $O(h^2)$برای تقریب های اولیه استفاده نمائید.

$$y = \cos x \text{ at } x = \pi/4$$

$$h_1 = \pi/3$$

$$h_2 = \pi/6$$

حل:

$$y = \cos x \text{ at } x = \pi/4$$

$$h_1 = \pi/3 \qquad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cos\left(\pi/4 + \pi/3\right) - \cos\left(\pi/4 - \pi/3\right)}{2\pi/3} = -0.585 \qquad \Rightarrow \varepsilon_t = 17.27\%$$

$$h_2 = \pi/6 \qquad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cos\left(\pi/4 + \pi/6\right) - \cos\left(\pi/4 - \pi/6\right)}{2\pi/6} = -0.675 \qquad \Rightarrow \varepsilon_t = 4.5\%$$

$$I = I(h_2) + \frac{1}{(h_1/h_2)^2 - 1}\left[I(h_2) - I(h_1)\right]$$

$$f' = f'(h_2) + \frac{1}{3}\left[f'(h_2) - f'(h_1)\right] =$$

$$f' = \frac{4}{3}f'(h_2) - \frac{1}{3}f'(h_1) = -0.705 \qquad \Rightarrow \varepsilon_t = 0.298\%$$

تمرین۳:

داده های جدول زیر مربوط به فاصله راکت در زمانهای مختلف می باشد. از مشتق عددی برای محاسبه سرعت و شتاب راکت در زمانهای مختلف استفاده نمائید.

***t*, s**	0	25	50	75	100	125
***y*, km**	0	32	58	78	92	100

حل:با استفاده از متلب:

t, **s**	0	25	50	75	100	125
y, **km**	0	32	58	78	92	100

```
>> t=[۰:۲۵:۱۲۵]
t =
   ۰   ۲۵   ۵۰   ۷۵   ۱۰۰   ۱۲۵
>> y=[۰ ۳۲ ۵۸ ۷۸ ۹۲ ۱۰۰]
y =
   ۰   ۳۲   ۵۸   ۷۸   ۹۲   ۱۰۰


>> v=diff(y)./diff(t)
v =
  ۱.۲۸۰۰   ۱.۰۴۰۰   ۰.۸۰۰۰   ۰.۵۶۰۰   ۰.۳۲۰۰


>> a=diff(v)./diff(t(۱:۵))
a =
  -۰.۰۰۹۶  -۰.۰۰۹۶  -۰.۰۰۹۶  -۰.۰۰۹۶
```

تمرین۴:

هواپیمایی توسط رادار رهگیری می شود و داده های زیر در مختصات قطبی بدست آمده است.

***t*, s**	200	202	204	206	208	210
θ, (rad)	0.75	0.72	0.70	0.68	0.67	0.66
***r*, m**	5120	5370	5560	5800	6030	6240

از مشتق مرتبه اول مرکزی برای محاسبه سرعت و شتاب هواپیما در لحظه t=۲۰۶ (s) استفاده نمائید. سرعت و شتاب در مختصات قطبی به شکل زیر می باشد:

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \text{and} \quad \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$$

حل:

t, s	200	202	204	206	208	210
θ, (rad)	0.75	0.72	0.70	0.68	0.67	0.66
r, m	5120	5370	5560	5800	6030	6240

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \text{and} \quad \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{6030-5560}{208-204} = 117.5 \\ \dot{\theta} &= \frac{0.67-0.7}{208-204} = -0.0075 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{v} = 117.5\vec{e}_r + \left(5800\times -.0075\right)\vec{e}_\theta$$

$$\vec{v} = 117.5\vec{e}_r - 43.5\vec{e}_\theta$$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{6030-2\times5800+5560}{\left(208-204\right)^2} = -0.625 \\ \ddot{\theta} &= \frac{0.67-2\times0.68+0.7}{\left(208-204\right)^2} = 0.625\times10^{-3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\vec{a} = \left(-.625 - 5800\times\left(-0.0075\right)^2\right)\vec{e}_r + \left(5800\times\left(0.625\times10^{-3}\right) + 2\times117.5\times\left(-0.0075\right)\right)\vec{e}_\theta =$$

$$\vec{a} = 0.951\vec{e}_r + 1.8625\vec{e}_\theta$$

تمرین۵:

برای تابع دومتغیره داده شده مطلوبست محاسبه موارد زیر در نقطه : $x = y = 1$

$$\partial f/\partial x,\ \partial f/\partial y, \text{ and } \partial f/(\partial x \partial y)$$

الف) بصورت تحلیلی

ب) بصورت عددی با استفاده از $\Delta x = \Delta y = 0.0001$

$$f(x, y) = 3xy + 3x - x^3 - 3y^3$$

الف) روش تحلیلی:

$$f(x, y) = 3xy + 3x - x^3 - 3y^3$$

$\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, and $\partial f/(\partial x \partial y)$ $\qquad x = y = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y + 3 - 3x^2 \Big]_{\substack{x=1 \\ y=1}} = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x - 9y^2 \Big]_{\substack{x=1 \\ y=1}} = -6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} = 3$$

ب) روش عددی :

$$f(x, y) = 3xy + 3x - x^3 - 3y^3$$

$\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, and $\partial f/(\partial x \partial y)$ $\qquad \Delta x = \Delta y = 0.0001 \qquad x = y = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x - \Delta x, y)}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y - \Delta y)}{2\Delta y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y - \Delta y) - f(x - \Delta x, y + \Delta y) + f(x - \Delta x, y - \Delta y)}{4\Delta x \Delta y}$$

$$\left.\begin{aligned}
f\,(1.0001,1) &= 2.000299969999000 \\
f\,(0.9999,1) &= 1.999699970001000 \\
f\,(1,0.9999) &= 2.000599910003000 \\
f\,(1,1.0001) &= 1.999399909997001 \\
f\,(1.0001,1.0001) &= 1.999699909996001 \\
f\,(1.0001,0.9999) &= 2.000899850002000 \\
f\,(0.9999,1.0001) &= 1.999099849998001 \\
f\,(0.9999,0.9999) &= 2.000299910004000
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

ب) روش عددی :

$$f(x,y) = 3xy + 3x - x^3 - 3y^3$$

$\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, and $\partial f/(\partial x \partial y)$ $\qquad \Delta x = \Delta y = 0.0001 \qquad x = y = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x-\Delta x, y)}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y-\Delta y)}{2\Delta y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y-\Delta y) - f(x-\Delta x, y+\Delta y) + f(x-\Delta x, y-\Delta y)}{4\Delta x \Delta y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(1.0001,1) - f(0.9999,1)}{0.0002} = 2.99999999000100 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f(1,1.0001) - f(1,0.9999)}{0.0002} = -6.00000029995345$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{f(1.0001,1.0001) - f(1.0001,0.9999) - f(0.9999,1.0001) + f(0.9999,0.9999)}{4 \times 10^{-8}} = 2.99999981767587$$

تمرین ۶:

برای یک تیر می توان روابط زیر را نوشت:

$$\frac{dy}{dx} = \theta(x) \qquad \frac{d\theta}{dx} = \frac{M(x)}{EI} \qquad \frac{dM}{dx} = V(x) \qquad \frac{dV}{dx} = -w(x)$$

برای حالتیکه تیر تحت بار گسترده مثلثی قرار دارد شیب تیر بصورت زیر می باشد:

$$\theta(x) = \frac{w_0}{120EIL}(-5x^4 + 6L^2x^2 - L^4)$$

الف) با استفاده از انتگرال عددی مقدار خیز در طول تیر را محاسبه کنید.

ب) با استفاده از مشتق عددی مقدار گشتاور خمشی و نیروی برشی نقاط مختلف را بدست آورید.

$$w_0 = 2.5 \text{ kN/cm}$$

$$E = 200 \text{ GPa}, I = 0.0003 \text{ m}^4.$$

$$y(0) = y(L) = 0.$$

$$\Delta x = 0.125 \text{ m}$$