mathtype

Subject:

Year. Month. Date. ( ).

قاضی زاده

Numerical Methods in Engineering
by chapra

تمرین‌ها ← ۱۴+۶ ← دو پروژه + زبان برنامه‌نویسی

حل معادلات دیفرانسیل

انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری

حل دستگاه معادلات

حل معادلات دیفرانسیل

روش اجزاء محدود

سقوط آزاد:

$\uparrow cv$, m , $\downarrow w = mg$

روش حل تحلیلی:

$$\Sigma F = ma$$

$$mg - cv = m\frac{dv}{dt}$$

$$g - \frac{c}{m}v = \frac{dv}{dt}$$

$$\int \frac{dv}{g - \frac{c}{m}v} = \int dt$$

$$\ln\left(g - \frac{c}{m}v\right) = -\frac{c}{m}t + \varphi \longrightarrow$$

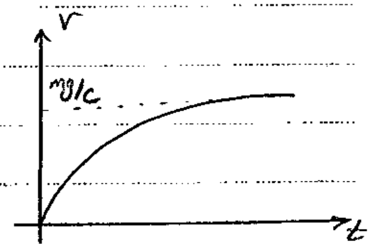
اگر سرعت اولیه صفر باشد φ قابل محاسبه است

$\begin{cases} t=0 \\ v=0 \end{cases} \rightarrow \varphi = \ln g$

$g\left(1 - \frac{c}{mg}v\right)$

$$\ln\left(1 - \frac{c}{mg}v\right) = -\frac{c}{m}t$$

$$\Rightarrow v = \left[1 - e^{-\left(\frac{c}{m}\right)t}\right] mg/c$$



Subject:
Year. Month. Date. ( )

☑ روش عددی :

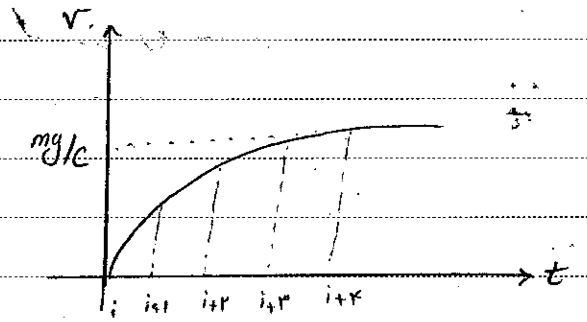
$$\frac{dv}{dt} \simeq \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{i+1} - v_i}{t_{i+1} - t_i}$$

$$(mg - cv)_i = m \left.\frac{dv}{dt}\right|_i$$

$$g - \frac{c}{m} v_i = \frac{v_{i+1} - v_i}{t_{i+1} - t_i}$$

$$\Rightarrow v_i = \frac{-\frac{v_{i+1} - v_i}{t_{i+1} - t_i} + g}{\frac{c}{m}}$$

یعنی باید از نقطه اول (i) شروع کرده و پله پله جلو برویم تا به زمان مورد نظر برسیم



t	v
۰	۰
۱	.
۲	.
۳	.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

روش خطاها: mathematic model / داده های ورودی ... Round-off error (گردکردن)

Errors

\ Truncation error خطاهای حاصل در برش یا قطع روش های عددی

از بین جای - بندها در نظر گرفتن (تبدیل عددی

دیفرانسیل - عددی

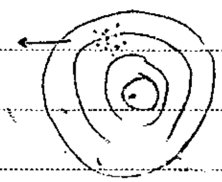
accuracy : صحت : میزانی که اندازه گرفته شده به اندازه واقعی نزدیک است

precision : دقت → 9.5 , 9.7 , 9.4 ——— 12 : نسبت به مرجع

12 → 12.9 , 11.1 , 12.5   صحت دارد ولی دقت پایین است.

↳ 12.1 , 11.9 , 11.8   دقت دارد و صحت هم دارد.

bias ←



دقت دارد و صحت دارد.

in precission – sensitivity – un acuracy –

عدم دقت   حساسیت   عدم صحت

resolution → حداقل مقداری که باید تغییر کند تا دستگاه پاسخ جدید بدهد.

دستگاه اندازه گیری تغییر کند   مقدار واقعی

خطاهای دینامیکی و استاتیکی

خطای استاتیکی خطایی است که همیشه در دستگاه اندازه گیری وجود دارد.

Error = True value – approximate value = E_t

E_t = T.V. – A.V.

خطای تقریبی E_a = Approximate Error = current value – previous value

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\text{خطای نسبی واقعی} = \frac{T.V. - A.V.}{T.V.}\ \%$$

$$\text{خطای نسبی تقریبی} = \frac{c.v. - P.v.}{c.v.}\ \%$$

ارقام با معنی در پاسخ

در اندازه گیری با متر معمولی به صورت 1234.57 mm دو رقم اعشاری با معنی است چون دقت بیشتر از mm نمی تواند باشد.

تمرین / سقوط آزاد جرم: خطای نسبی واقعی - خطای نسبی تقریبی به ازای $\Delta t = 0.1\,(s)$ برای زمان ۰ تا ۱۰ ثانیه حساب کنید.

$t = 10\,s$

$m = 60\,kg$

drag coef. $c = 12\ kg/s$

cv ضریب درگ

mg

و یکبار با ضریب درگ cv^2 حساب شود.

✓ باید خطای بدست آمده از ε_s کمتر باشد تا معنی داشته باشد.

0.01

$$\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-n})\ \%$$

ε_s = specified error

فرض تا ۳ رقم معنی دار باید حساب کرد. $\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{-1})\ \% = 0.05\%$

تا اختلاف این مقدار با مقدار واقعی باید محاسبات را ادامه داد.

و یا جواب های با جواب واقعی 0.05% تفاوت داشت محاسبات را متوقف کنیم

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \dots$

$e^{0.5} = 1.6487$

		خطای نسبی ε_t	ε_a	
یک جمله	1	39%	—	تعریف نمی‌شود
دو جمله	1.5	9%	33%	
	1.625			
	1.6458			
		0.05% اگر شود		

$\varepsilon_{t_1} = \frac{0.6487}{1.6487} = 0.39$

$\varepsilon_a = \frac{1.5 - 1}{1.5} = 0.33$

آگر به رقم با معنی درست آمدیم ← ε_s درست می‌شود

well posed problem

ill posed problem

$mg - cv = m\frac{dv}{dt} \rightarrow g - \frac{c}{m}v_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{v_{i+1} - v_i}{t_{i+1} - t_i}$

$v_i = \frac{-\frac{v_{i+1} - v_i}{t_{i+1} - t_i} + g}{c/m} \rightarrow v_i = \frac{-\frac{v_{i+1} - v_i}{t_{i+1} - t_i} + 9{,}81}{0{,}2}$

t	v_i
0	
0,1	
0,2	
0,3	

تمرین → ۶ ← پروژه ۱ ، پروژه ۲

۱۴ ← تمرین تأثیر +   تأثیر +

Subject:

Year. Month. Date. ( )

a.eskandari@pnu.ac.ir

جلسه ۲

سری تیلور:

$$f(x)=\frac{f(a)}{0!}+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n$$

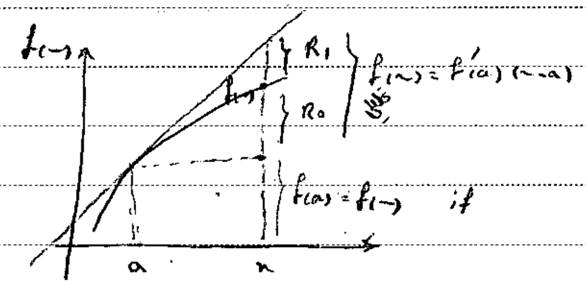
R_n (Remainder) → خطای ناشی از تخمین معادله تا مرتبه n

باقیمانده

$f(x)=f(a)$ zero-order difference → R_0 تخمین از مرتبه صفر

$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$ first order difference → R_1 باقیمانده

nth order difference → R_n باقیمانده



→ هرچه باقیمانده کمتر باشد بهتر است

خطا از مرتبه n

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(a)\cdot(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{f^{(n+2)}(a)\cdot(x-a)^{n+2}}{(n+2)!}+\dots$$

$$H(x)=\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}\cdot f^{(n+1)}(t)\cdot dt \qquad (*)$$

$f^{(n+1)}(t)=u$ ← مشتق است (خاصیت) , $\frac{(x-t)^n}{n!}dt=dv \xrightarrow{\int} v=\frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$

$\rightarrow du=f^{(n+2)}(t)\cdot dt$

$\xrightarrow{*} = -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\Big|_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt$

$\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \underbrace{\int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt}_{\text{جز}} = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \frac{(x-a)^{n+2}}{(n+2)!} f^{(n+2)}(a)$

$+\int_a^x \frac{(x-a)^{n+2}}{(n+2)!} f^{(n+3)}(t)\,dt \longrightarrow H(x) = R_n(x)$

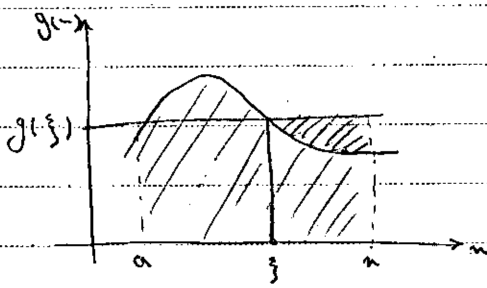
$$\rightarrow R_n(x) = \int_a^x \underbrace{\frac{(x-t)^n}{n!}}_{h(t)} \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{g(t)}\,dt \quad (1)$$ (مهم)

R_n (فرم انتگرالی)

قضیه مقدار میانی انتگرال ها:

اگر $g(t)$ پیوسته و انتگرال پذیر باشد

$** \int_a^x g(t)\,dt = g(\xi)(x-a)$



f متوسط تابع $\bar{F} = \frac{1}{L}\int_0^L f(t)\,dt$

یا همان ضریب $\frac{a_0}{2}$ در سری فوریه

$* \int_a^x g(t)h(t)\,dt = g(\xi)\int_a^x h(t)\,dt \longrightarrow$ درحالت خاص که $h(t)=1$ باشد

(*) و (**) برابر می شوند

$$\xrightarrow[*]{(1)} R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi)\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,dt = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} = R_n$$

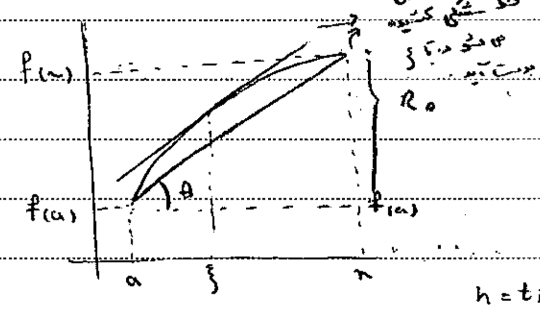
از

فرم [illegible] R_n (مهم)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$f(x) = f(a) + R_0$ تخمین مرتبه صفر $f(x)$

$R_0 = f'(\xi)\,(x-a)$



$h = t_i - t_{i-1} = t_{i+1} - t_i$
گام زمانی ثابت

$R_0 = \tan\theta\,(x-a) = f'(\xi)\,(x-a)$

$f(x) = x^3$ تخمین مرتبه ۳ با سری تیلور

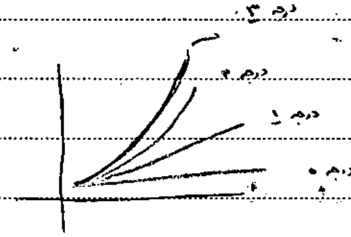
$(x-a)$ $(x-a)^2$ $(x-a)^3$

$R_3 = 0$ R_2, R_1, R_0 داریم

$f(x) = x^3$

$x^3,\ 3x^2,\ 6x,\ 6,\ 0$

$R_3 = 0$



$\left.\dfrac{dv}{dt}\right|_{t_i}$ $v(t_{i+1}) = v_{i+1}$

$v_{i+1} = v_i + v'_i\,\underbrace{(t_{i+1} - t_i)}_{(h)\ \text{گام زمانی}} + R_1$

step size

$v_{i+1} = v_i + v'_i\,h + R_1(h^2)$ ⟶ خطا از مرتبه h^2

R_1 یعنی داریم

h از ۲ به بعد داریم

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t_i} = v_i' = \frac{v_{i+1} - v_i}{h} + \underbrace{\frac{R_1(h^2)}{h}}_{O(h)}$$ → خطای مشتق ما از مرتبه h است

خطا

رو به جلو Foreward difference

$t=1$ $t=2$

$t=1$ $t=1.5$ → خطا (۱/۲) برابر می‌شود

ولی خطا در مشتق نصف می‌شود

$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$ forward diff.

مرتبه h

سری تیلور $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots$

فرض با نقطه قبلی حساب کنیم

$$f_{i+1} = f_i + f_i'(\underbrace{t_{i+1} - t_i}_{h}) + \dots \quad (1)$$

$$f_{i-1} = f_i + f_i'(\underbrace{t_{i-1} - t_i}_{-h}) + \dots$$

$$f_{i-1} = f_i - f_i' h + \frac{f_i''}{2!} h^2 - \frac{f_i''' h^3}{3!} + \dots \quad (2)$$

$$\left\{ f_i' = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + O(h) \right.$$ از مرتبه h order

نصف آمده backward diff. مرتبه h

$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$

هرچه مرتبه بیشتر دقت بیشتر

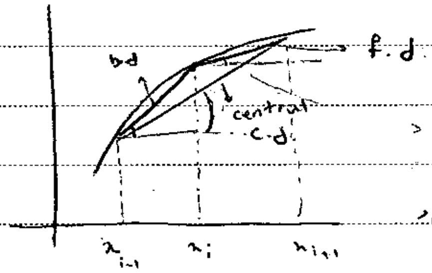
دلتای کوچک

مرتبه h^2 ← $\delta f_i = f_{i+1} - f_{i-1}$

$$(1) - (2) = \rightsquigarrow \left\{ \underbrace{f_i' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}}_{\text{central}} + O(\underbrace{h^2}_{\text{مرتبه } h^2}) \right.$$ → دقیق‌تر چون از مرتبه h^2 است و خطا کمتر است central

*

Subject:
Year. Month. Date. ( )



c.d. دقیق‌تر

چون هم قبل را در نظر می‌گیرد

و هم بعد را.

c.d. $\quad f'_i = \dfrac{\delta f_i}{2h}$

forward f.d. $\quad f'_i = \dfrac{\Delta f_i}{h}$

backward b.d. $\quad f'_i = \dfrac{\nabla f_i}{h}$

تیلور $\quad f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)\,(x-a)^n}{n!}$.

می‌خواهیم حول نقطه a و b بسط دهیم

تابع دو متغیره

$$\longrightarrow f(x,y) = f(a,b) + (x-a) f_x(a,b) + (y-b) f_y(a,b) + \frac{1}{2!}\Big[(x-a)^2 f_{xx}(a,b)$$

$$+ (y-b)^2 f_{yy}(a,b) + 2(x-a)(y-b) f_{xy}(a,b)\Big] + \cdots$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_d) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_3=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_d=0}^{\infty} \frac{(x_1-a_1)^{n_1} (x_2-a_2)^{n_2} \cdots (x_d-a_d)^{n_d}}{n_1!\, n_2! \cdots n_d!}$$

d بعدی تابع

$$\times \frac{\partial^{(n_1+n_2+\cdots+n_d)} f(a_1, a_2, \ldots, a_d)}{\partial x_1^{n_1}\, \partial x_2^{n_2} \cdots \partial x_d^{n_d}}$$

Subject:
Year: Month: Date: ( )

حول نقطه (۰،۰) بسط را حساب کنید

$f(x,y) = e^x \ln(1+y) = \cancel{\ldots}$

$f(0,0)$

جلسه سوم

تواب تیلور ۲ متغیره

$f(x,y) = f(a,b) + f_x \underbrace{(x-a)}_{\Delta x} + f_y \underbrace{(y-b)}_{\Delta y} + R_1$ R_1 باقی مانده در مرتبه یک

$\Delta f \approx f(x,y) - f(a,b) = f_x \Delta x + f_y \Delta y + f_z \Delta z$

از R_1 صرف نظر شده است

(چند متغیر) مثلاً $y = \dfrac{wL^4}{8EI}$ + نیرو بر واحد طول

$\boxed{\text{خطا}} \rightarrow \Delta y = y_w \, \Delta w + y_L \, \Delta L + y_E \, \Delta E + y_I \, \Delta I$

w = نیرو ثابت

if: $w = 150 \ N/m$ $\Delta w = 1 \ N/m$

$L = 2 \ m$ $\Delta L = 0.01 \ m$

$E = 300 \ MPa$ $\Delta E = 1 \ MPa$

$\rightarrow \Delta y$ ✓

خطا

$y = y_0 \mp \Delta y$

مقدار اولیه / دقیق

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ورودی $x \longrightarrow x + \Delta x$ خروجی تغییرات مطلق نداریم نسبت به چیزی سنجیده می‌شود $\frac{\Delta x}{x}$

$f \longrightarrow f + \Delta f$ $\qquad \frac{\Delta f}{f}$

$f(x) = f(a) + f'(x-a) + R_1$

برای تک متغیره $\frac{\Delta f}{f} = \frac{f' \cdot \Delta x}{f}$

condition Number : $C.N. = \frac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{f' \Delta x / f}{\Delta x / x} = x \frac{f'}{f}$

عددی که شرایط مسئله را بیان می‌کند

$\Rightarrow$ stability condition

$C.N. \ll 1 \longrightarrow$ well-posed خوش رفتار با تغییرات ورودی خروجی خیلی تغییر نمی‌کند

$C.N. \gg 1$ برعکس scale کرده و تغییرات خروجی خیلی زیاد است

ill condition بد رفتار

مثلا تغییرات کوچک هر کدام باعث تغییر کلی و تغییرات زیاد b ... در خروجی می‌شود.

Error
- Round-off — در رند کردن عددی می‌آید
- Trancation error — روش کاملا دقیق ندارد و روش عددی ... مثلا ارتباط با در سری تیلور دو ترم را نمی‌نویسیم

$f(x) = f(a) + f'h + \frac{f^{(2)}}{2!} h^2 + \frac{f^{(3)}}{3!} h^3 + \dots$

h = step size گام زمانی

10^{-3}
10^{-4}

PAPCO

می‌باید کمینه کرد $\rightarrow$ Round-off ... هر چقدر h کوچکتر باشد خطای ناشی از محاسبات کمتر است و Trancation Error کمتر می‌شود

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} - \frac{f^{(3)}(\xi)}{6} h^2 \quad (1)$$

تا اینجا بخشی از بقیه جملات جبران شده است

central مشتق

$$f_{i+1} = f_i + f'_i h + \frac{f''}{2!} h^2 + \frac{f'''}{3!} h^3 + \dots \qquad \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} h^3$$

قطع

از فاصله نتیجه جملات است

$$f_{i-1} = f_i - f'_i h + \frac{f''}{2!} h^2 - \frac{f'''}{3!} h^3$$

$$f_{i+1} = \tilde{f}_{i+1} + e_{i+1}$$

بر اساس کامپیوتر e_{i+1} خطای مقدار واقعی در — $f_{i+1} = \tilde{f}_{i+1} \pm \varepsilon$

فرض خطای قطع باشد

$$f_{i-1} = \tilde{f}_{i-1} + e_{i-1} \qquad \longrightarrow \qquad f_{i-1} = \tilde{f}_{i-1} \pm \varepsilon$$

Tilda

$$(1)\quad f'_i = \frac{\tilde{f}_{i+1} - \tilde{f}_{i-1}}{2h} + \frac{2\varepsilon}{2h} - \frac{Mh^2}{6}$$

central مشتق

به خاطر خطای محاسبات ماشین وجود

Round-off error خطای — Truncation Error آمده است

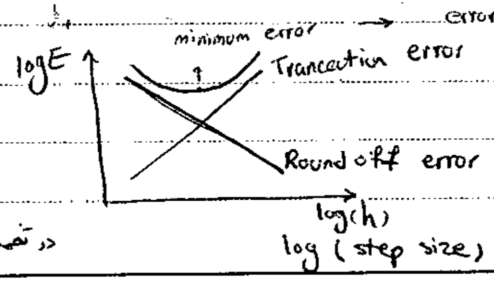
$$\text{خطای کل}\quad E = \frac{\varepsilon}{h} + \frac{Mh^2}{6}$$

به خاطر بیشترین بودن + میگذاریم

برای اینکه خطا به کمترین حد برسد باید نسبت به h مشتق گرفت و = ۰ قرار داد

error کل $\geq e_i$

$$E'_h = 0 \longrightarrow -\frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{Mh}{3} = 0$$



0.2
0.25673

h بهینه: $\left\{ h = \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{M}} \right.$

h بهینه: است

در تعیین مرتبه اول

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$f(x) = 0.2x^2 + 0.1x + 5$

Δx

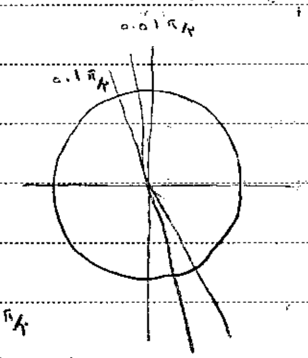
$x = 0.2$

درصد پایداری $\frac{xf'}{f}$

$\tan x$

C.N. $x = \pi/2 + 0.1(\pi/2)$

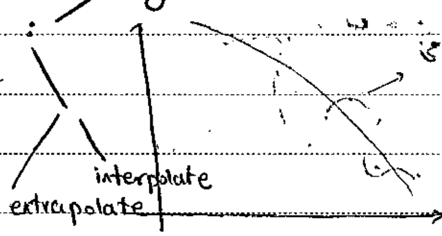
C.N. $x = \pi/2 + 0.01(\pi/2)$



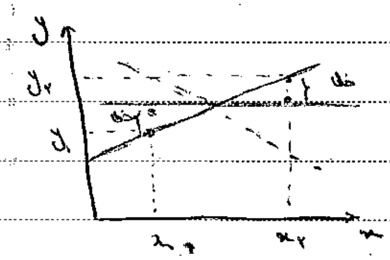
تغییر کوچک در جواب $\tan x$ خیلی تأثیر دارد

وقتی تغییر می‌کند

Curve Fitting: → Regression برازش



با توجه به داده‌های بدست آمده می‌خواهیم بدانیم به چه منحنی نزدیک است

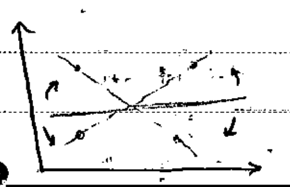


$y = ax + b$

$T.E. = \sum_{i=1}^{n} |y_i - y(x_i)| \longrightarrow$ قدرمطلق

Tree error

اجزای خطا صفر خوب نیست



پس قدرمطلق هم خوب نیست

PAPCO

مجموع خطای کل $\overbrace{T.E}^{E_s} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y(x_i))^2$ min least-squared روش جمع مربعات

مربعات ... [illegible] می‌شود

$y = a_1 x + a_2$ ... $a_2 = $

y_i داده شده

$y(x_i)$ [illegible]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_s}{\partial a_1} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial E_s}{\partial a_2} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial a_1}\left[\sum (y_i - a_1 x_i - a_2)^2\right] = 0 \Rightarrow 2\sum x_i (y_i - a_1 x_i - a_2) = 0$$

$$\Rightarrow 2\sum (y_i - a_1 x_i - a_2) = 0$$

$$\begin{cases} \sum x_i y_i - a_1 \sum x_i^2 - a_2 \sum x_i = 0 \\ \sum y_i - a_1 \sum x_i - \underbrace{n a_2} = 0 \end{cases} \rightarrow a_1, a_2 \checkmark$$

این بهترین روش است.

x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3
$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n

میانگین $\bar{y} = \dfrac{\sum y_i}{n}$

$$\begin{cases} 2 \quad 18 \rightarrow \bar{y} = 10 \\ 8 \quad 12 \rightarrow \bar{y} = 10 \end{cases}$$

[illegible] اطلاعات [illegible] از [illegible] کار می‌دهد

[illegible] انحراف معیار نیز تعریف می‌کنیم

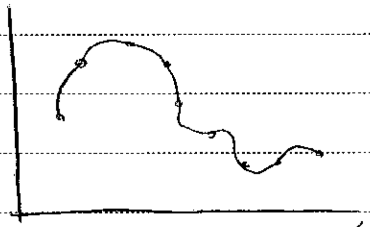
$$S_d = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n-1}}$$

standard deviation

Subject:
Year. Month. Date. ( )

interpolation — فرض می‌خواهیم از n تا داده منحنی عبور بدهیم

حالت اول / استفاده از چند جمله‌ای لاگرانژ :



از (n+1) دتا منحنی درجه n رد می‌کند

☑ فقط یک منحنی polynomial می‌تواند از n نقطه عبور کند

حالت اول $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

$$\begin{array}{ll} x_0 & f_0 \quad (1) \\ x_1 & f_1 \\ x_2 & f_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & f_n \end{array} \rightarrow P_n(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} f_{(0)} +$$

$$\frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} f_{(1)} + \dots$$

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\prod_{i=0, i\neq j}^{n} (x-x_i)}{\prod_{i=0, i\neq j}^{n} (x_j-x_i)} f(x_j)}$$

روش تقسیم تفاضلی divided difference

حالت دوم: $P_n(x) = a_0 + (x-x_0)a_1 + (x-x_0)(x-x_1)a_2 + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)a_3 + \dots$

$= a'_0 + a'_1 x + a'_2 x^2 + \dots$ دو منحنی این طور

✓ لاگرانژ

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تعریف $f[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$ تفاضل مرتبه اول first divided difference

$f[x_0] = f_0$ * تفاضل مرتبه صفر

$$\boxed{f[x_s, x_t] = \frac{f_s - f_t}{x_s - x_t}}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

$$\boxed{f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}}$$

$\xrightarrow{**} P_n(x_0) \overset{(1)}{=} f_0 \overset{**}{=} a_0 \overset{*}{=} f[x_0]$

$a_1 = f[x_0, x_1]$

$\xrightarrow{**} f_1 = \underset{f_0}{a_0} + (x_1 - x_0) . a_1 = \dots \longrightarrow a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = f_0^{[1]}[x_0]$

$a_2 = f[x_0, x_1, x_2] = f_0^{[2]}[x_0]$ مرتبه ۲

$\xrightarrow{**} P_n(x) = f_0^{[0]} + f_0^{[1]} \times \underset{h}{(x - x_0)} + f_0^{[2]} \times \underset{h}{(x - x_0)} . \underset{2h}{(x - x_1)} \dots$ h $2h$ $3h$ ....

$n! \, f_0^{[n]} . h^n$

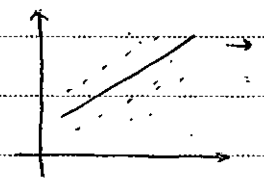
$\longrightarrow$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

جلسه چهارم در رابطه با تمرین سری دوم

$$\Delta f(x,y) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x}_{\text{سهم خطای } \Delta x} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y}_{\text{سهم خطای } \Delta y}$$

نسبت این دوتا به هم مدنظر بود. تغییرات دوتا نسبت به هم چطور تغییر کنند



$x_0 \quad y_0$

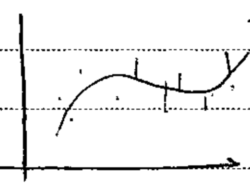
$x_1 \quad y_1$

$\vdots \quad \vdots$

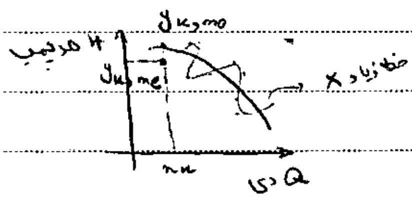
$x_n \quad y_n$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial A} = 0 \\ \dfrac{\partial E}{\partial B} = 0 \end{cases}$$

مجموع مربعات فاصله نسبت به خط برازش شده کمترین باشد.



$\rightarrow$ معادله درجه n برازش کنیم



می‌دانیم رفتار داده‌ها به معادله درجه n نزدیکتر است

لذا یک منحنی درجه n برازش می‌کنیم.

داده‌ها:

$x_0 \quad y_0$

$\vdots \quad \vdots$

$x_n \quad y_n$

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

$x_k \rightarrow y_{k,me}$

$y_{k,mo}$ (model)

$$\sum_{k=0}^{n} (y_{k,me} - y_{k,mo})^2 = min$$

$$E = \sum_{k=0}^{n} (y_{k,me} - a_0 - a_1 x_k - a_2 x_k^2 \dots)^2 = min$$

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial a_0} = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial a_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial E}{\partial a_n} = 0 \end{cases}$$

n معادله و n مجهول
تشکیل می‌شود.

با حل این دستگاه معادلات
مقادیر a_0 تا a_n قابل محاسبه می‌شود.

$$\begin{bmatrix} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

برازش کردن با توابع نمایی:

فرض می‌خواهیم براساس رفتار دیتاها با تابع نمایی برازش کنیم.

$y = Ce^{Mx}$

$\downarrow C, M?$ خطی می‌کنیم:

$\underbrace{Ln y}_{Y} = Ln C + Mx$

y	Y
y_0	Y_0
y_1	Y_1

$\Rightarrow Y = A + Mx$ خطی شد

A و M را بدست آورده براساس درس جلسه قبل و
بعد در رابطه می‌توانیم

system of linear equation: حل دستگاه معادلات خطی مرتبه اول: خطی مرتبه ۲ $y = x + 3x^2$

خطی مرتبه اول: شبیه خرپاها

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1} - u_i}{2\Delta x} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

$\longrightarrow$ n معادله n مجهول

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

$\longleftarrow$ 5×5 مش

Subject:
Year. Month. Date. ( )

فرض چنین دستگاه معادله‌ای داریم:
روش حذفی گوس
Gauss elimination

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

هدف صفر کردن ترم‌ها که نشان داده شده است

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

صفر کنیم

ماتریس الحاقی

$$\xrightarrow[R_3+(-\frac{a_{31}}{a_{11}})R_1]{R_2+(-\frac{a_{21}}{a_{11}})R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22}-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & a_{32}-\frac{a_{31}}{a_{11}}a_{12} & a'_{33} & b'_3 \end{array}\right]$$

صفر شود

هر کدام نماینده یک معادله است.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & b'_3 \end{array}\right] \Rightarrow R_3+(-\frac{a'_{32}}{a'_{22}})R_2 \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & b''_3 \end{array}\right]$$

back-substitution

$$\begin{cases} a''_{33}x_3 = b''_3 \\ \vdots \end{cases} \rightarrow$$

با بدست آمدن x_3 و جایگذاری کردن در دو معادله دیگر x_1 و x_2 بدست می‌آید.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال / پاسخ → $x_3=1$ و $x_2=-2$ و $x_1=2$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{-0.5R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & 3.5 & -1.5 & -8.5 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ \frac{-2}{3.5}R_2+R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & 3.5 & -1.5 & -8.5 \\ 0 & 0 & 1.857 & 1.857 \end{array}\right] \rightarrow x_3=1$$

بالا مثلثی

$x_2=-2$

$x_1=2$

روش LU کردن ماتریس : براساس حذفی گوس

ع / هر ماتریس مثل A را می‌توان بصورت حاصلضرب L و U ماتریس هستند / دو ماتریس L و U نوشت

$$A = L \cdot U$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \text{عناصر زیر قطر اصلی ضرایب} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} & \frac{a'_{32}}{a'_{22}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{bmatrix}$$

$\qquad\qquad L \qquad\qquad\qquad\qquad U$

یکی از مشکلات صفر شدن مقادیر روی قطر اصلی است. راه حل : جای دو سطر را عوض می‌کنیم یا switch کردن

$R_2 + \frac{-a_{21}}{a_{11}} R_1$ همان عملیات که روی سطرها انجام می‌دهیم ← pivoting ضرایب ضرب‌شده

عناصر قطر اصلی در مخرج می‌روند

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

جایگشت ماتریس های $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$AI = IA = A$

$PA =$ جای سطرها را عوض می‌کند. ✓

$AP =$

جای ستون‌ها را عوض می‌کند ✓

اگر عناصر روی قطر اصلی کوچک باشد و در مرحله pivoting خیلی بزرگ می‌شود و در اثر scale کردن خطای حاصل بالا می‌رود ← جای عناصر سطر را عوض می‌کنیم که خطا را حداقل کنیم.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 5 & 2 & 6 \end{array}\right]$$

$2x_1 + 100x_2 = 4 \longrightarrow$ اگر یکی از ضرایب خیلی بزرگ بود

$\xrightarrow[\text{بزرگتر}]{\text{تقسیم بر ضریب}} 0.02x_1 + x_2 = 0.04$ از خطای round-off کم می‌کنیم.

روش گوس جردن:

در روش گوس جردن بالا و پایین قطر اصلی را صفر می‌کنیم و مستقیم مجهولات را بدست می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & \text{صفر} \\ & a_{22} & \\ \text{صفر} & & a_{33} \end{bmatrix}$$

تمامی این روش هایی که گفته شد از نوع مستقیم است.

Subject:
Year ___ Month ___ Date ___ ( )

$Ax=b$, $A=L\,U$

$LUx=b$ (1)

فرض $Ux=y \xrightarrow{(1)} Ly=b \to$ پایین مثلثی می‌شود

y ماتریس ستونی است و با بدست آمدن y طبق رابطهٔ $Ux=b$ مقدار x را بدست می‌آوریم.

$Ax=b$

عدد ۱ روی قطر اصلی را می‌گیریم

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix}}_{L}
\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U}
=
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}
$$

L پایین مثلثی

L و U منحصر به فرد نیستند

$a_{11}=L_{11}$	$a_{12}=L_{11}u_{12} \to u_{12}=\frac{a_{12}}{L_{11}}$	$a_{22}=L_{21}u_{12}+L_{22} \to L_{22}=a_{22}-L_{21}u_{12}$
$a_{21}=L_{21}$	$a_{13}=L_{11}u_{13} \to u_{13}=\frac{a_{13}}{L_{11}}$	
$\vdots$	$\vdots$	
$a_{n1}=L_{n1}$	$a \to u_{1n}=\frac{a_{1n}}{L_{11}}$	$\to l_{42}=a_{42}-L_{41}u_{12}$

آخرین عنصر ستون اول

اول معادله برای ستون اول نوشته می‌شود و بین ستون اول L ها بدست می‌آید و برای سطر اول بغیر از a_{11} نوشته می‌شود و u ها بدست می‌آید (سطر اول u بدست می‌آید) و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم

$$
\begin{cases} L_{ij}=a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1} L_{ik}u_{kj} & j<i \\ u_{ij}=\dfrac{a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}u_{kj}}{L_{ii}} & i\le j \end{cases}
$$

مثال ۱

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10 \\ 1.1\,x_1 + 2\,x_2 = 10.4 \end{cases}$$

$x_1 = 10 - 2x_2$

$1.1(10 - 2x_2) + 2x_2 = 10.4 \rightarrow 11 - 0.2x_2 = 10.4 \rightarrow \boxed{x_2 = 3}$

$x_2 = \dfrac{11 - 10.4}{0.2}$

$2 \times 1.1 - 2 \times 1 \leftarrow$ همان دترمینان ضرایب

if $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10 \\ 1.05\,x_1 + 2x_2 = 10.4 \end{cases}$

$1.05(10 - 2x_2) + 2x_2 = 10.4$

$10.5 - 0.1x_2 = 10.4$

$0.1x_2 = 0.1$

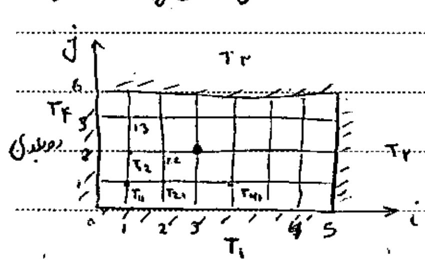
$\boxed{x_2 = 1}$

چون دترمینان ضرایب کوچک است، لذا جواب تغییر زیادی دارد.

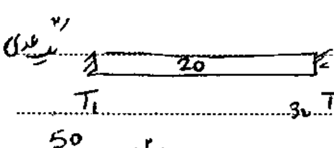
ill-condition

حل نیم

$\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (معادله ای که در آن مقدار با زمان تغییر می کند)

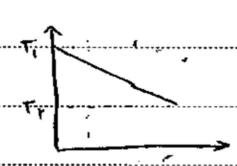


تعداد مجهول $i \times j$



50

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \rightarrow u = Ax + B$



تغییرات دما به صورت خطی است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

معادله پواسون است $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j}^{n} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j}^{n}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\Delta t}$$

مجهول

فرض می‌رسد معادله را برای یک نقطه در فضای مش‌بندی شده می‌نویسیم: $\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\Delta t} = \frac{u_{i+1,j}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i-1,j}^{n}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i,j-1}^{n}}{\Delta y^2}$

$0 \rightarrow$ steady state

دما نسبت به زمان تغییر نمی‌کند (حالت پایدار)

فرض داریم $\Delta x = \Delta y$ (برای راحتی کار) $\longrightarrow -4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} = 0$

برای هر نقطه می‌توان چنین معادله‌ای نوشت

فرض به صورت عمودی حرکت می‌کنیم ↑

$-4u_{1,1} + u_{21} + u_{12} + u_{01} + u_{10} = 0$

نقطه 1,1 $\quad -4u_{11} + u_{21} + u_{12} = b_{11}$ → معلوم 2,3,4

نقطه 1,2 $\quad -4u_{12} + u_{22} + u_{13} + u_{11} = b_{12}$

PAPCO

Subject: یه مجهول ست که ... معادله داریم ساده ضرایب
Year. Month. Date. که این اعداد اطراف قطر اصلی کم ارزش‌تر شود.

قطره Diagonally dominant

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{bmatrix}_{20\times 20} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ \vdots \\ u_{14} \\ u_{21} \\ \vdots \end{bmatrix}_{20\times 1} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{45} \end{bmatrix}$$

$\frac{20}{4\times 5}$

$\downarrow$

بعد بنای ضرایب را مشخص می‌کنیم که معادلات نوشته شده منحصر به فرد برسیم.

روش ۱ : jacobi method

فرض می‌کنیم دستگاه معادلات به صورت زیر داریم:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j\right]$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j\right] \quad *$$

محاسبات را تا جایی ادامه می‌دهیم که:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}^{0} \longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}^{1} \longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}^{2} \cdots$$

خطای مطلق $\left|x_i^{n+1} - x_i^{n}\right| < \varepsilon$

جواب صحیح		فاصله
$x_1 = 2.1$	2.05	0.05
$x_2 = 350$	349	1

خطای نسبی $\left|\frac{\Delta x_i}{x_i}\right| < \varepsilon \rightarrow$ scale هر کدام را است به خودش می‌سنجد

$$* \max\left\{\left|\frac{\Delta x_i}{x_i}\right|\right\} < \varepsilon$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$x_i^{n+1} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(n+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^{n}\right]$$ روش دوم

Gauss-sided method

بعد از x_1 جدید برای بدست آوردن x_2 استفاده می‌کند.

روش ۱

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} x_1 = 10 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = 3.5 \end{bmatrix}^{n_1} \xrightarrow{\text{مرحله ۲}} \begin{bmatrix} x_1 = 22.5 \\ x_2 = +25.5 \\ \end{bmatrix}^{n_2}$$

مقادیر اولیه صفر

x_3 را بدست آورد

این از $x_1 = 22.5$ استفاده می‌کردیم می‌شود روش ۲

$$x_i^{n+1} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{n+1} - \sum_{\substack{j=i+1 \\ j=i}}^{n} a_{ij}\, x_j^{n}\right] + x_i^n - \cancel{x_i^n}$$

$$\frac{1}{a_{ii}}\left(a_{ii}x_i^n + a_{i,i+1}x_{i+1}^n + a_{i,i+2}x_{i+2}^n + \dots\right]$$

باعث کم شدن خطا می‌شود.

مراحل را شانسی کم می‌کند از نظر زمان

$0 < \omega < 1$

$$x_i^{(n+1)} = x_i^n + \underbrace{\frac{\omega}{a_{ii}}\left[b_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{n+1} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}\, x_j^{n}\right]}_{\text{error}}$$

$x_i^{n+1} - x_i^n \to$ همان خطاست

ω = Relaxation Factor

$0 < \omega < 1$

$$|x_i^{n+1} - x_i^n| = \omega \times \boxed{}$$

n_1: ۲۹ ۱۲۵ ۳۰ ۱۱۸

$$x_i^{n+1} = x_i^n + \frac{1}{b_{ii}}\left(\square + \square\right)$$

$$x_{i,new}^{n+1} = \frac{1}{2}x_i^{n+1} + \frac{1}{2}x_i^n$$

0.8 0.2

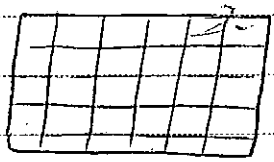
یا $x_{i,new}^{n+1} = \lambda x_i^{n+1} + (1-\lambda)x_i^n$

$0 < \lambda < 1 \leftarrow$ برای سیستمی که احتمال دارد converge نکند و خطا دائم کم کند — under Relaxation Factor

$1 < \lambda < 2 \leftarrow$ برای سرعت بخشیدن به روند converge یا همگرایی — over Relaxation Factor

Subject:
Year. Month. Date. ( )

پروژه:



$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Δt , Δx , Δy

$t = 3$

جلسه ۹

مشتق گیری عددی : Numerical diffrential Methods

روش ها → taylor series / divided diffrence روش تقسیم تفاضلی / lagrangium methods

روش سری تیلور : بسط تیلور $f(x) = f_0 + \Delta x f' + \frac{\Delta x^2 f^{(2)}}{2!} + \dots$

گام $\Delta x = h$

حول نقطه x_0 : $f(x_0 + h) = f_0 + h f_0' + \frac{h^2}{2!} f_0^{(2)} + \dots$

$$f_1 = f_0 + h f_0' + \frac{h^2}{2!} f_0^{(2)} + h^3 \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} \Rightarrow f_0' = \frac{f_1 - f_0}{h} + \underset{\text{از مرتبه } h}{O(h)}$$ خطا

forward difference *

$$f_{-1} = f_0 - h f_0' + \frac{h^2}{2!} f_0^{(2)} - \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(\xi)$$

$h \to -h$

$$\Rightarrow f_0' = \frac{f_0 - f_{-1}}{h} + O(h)$$ backward difference **

$$\Rightarrow f_1 - f_{-1} = 2h f_0' + \frac{2h^3}{3!} f_0^{(3)} + \frac{2h^5}{5!} f^{(5)}(\xi)$$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

این تقریب دقتش از قبلی بیشتر است.

$$\boxed{f_0' = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + O(h^2)}$$ central difference

اندازه کوچکترین توان از بقیه بزرگتر است

$$f_2 - f_{-2} = 4h f_0' + \frac{16h^3}{3!} f_0''' + \frac{64h^5}{5!} f^{(5)}(\xi) \quad (1)$$

$$\xrightarrow{(*)\,(**)} f_1 + f_{-1} = 2f_0 + \frac{2h^2}{2!} f_0^{(2)} + \frac{2h^4}{4!} f^{(4)}(\xi)$$

$$\boxed{f_0^{(2)} = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} + O(h^2)}$$ central

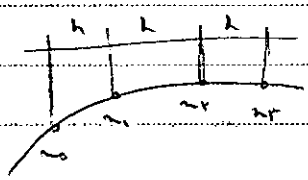
مشتق بر حسب مقدار تابع (روش عددی)

از مرتبه ۲ و مشتق مرتبه ۲ را بدست می دهد

$$\xrightarrow{(1)} f_2 - f_{-2} - 2(f_1 - f_{-1}) = \frac{12h^3}{3!} f_0^{(3)} + \frac{60h^5}{5!} f^{(5)}(\xi)$$

$$\rightarrow \boxed{f_0^{(3)} = \frac{f_2 - 2f_1 + 2f_{-1} - f_{-2}}{2h^3} + O(h^2)}$$ $f^{(3)}$ برای h^2 از مرتبه central

روش لاگرانژ



از این چهار نقطه تابع درجه ۳ می گذرد.

f_0'

$f_0'' = ?$

درونیابی

$$P_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} f_1 + \cdots$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$P'(x) = \frac{\overset{(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_1)(x-x_3)}{(x-x_2)(x-x_3)+}}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} f_0 +$$

$$P''(x) = \frac{(x-x_3)+(x-x_2)+(x-x_1)+(x-x_3)+(x-x_1)+(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} f_0 +$$

$$= \frac{2[(x-x_1)+(x-x_2)+(x-x_3)]}{\text{مخرج}} f_0 +$$

در نقطه

$$f''(x_0) \approx P''(x_0) = \frac{2[-h-2h-3h]}{-h(-2h)(-3h)} f_0 + \boxed{} f_1 + \boxed{} f_2 + \boxed{} f_3$$

$$f''_0 = \frac{2f_0}{h^2} + \frac{\boxed{}}{h^2} f_1 + \frac{\boxed{}}{h^2} f_1 + \frac{\boxed{}}{h^2} f_2$$ forward difference

backward forward central

x_{-3} x_{-2} x_{-1} x_0 x_1 x_2 x_3 → باهرکدام از این روش ها در لاگرانژ مکان دارد سوال مطرح شود

$$\checkmark\ \Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$ اپراتور Δ (دلتا)

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$$

$$\checkmark\ Ef_i = f_{i+1}$$ E : step اپراتور

یک پله جلو می‌رود

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$(\Delta+1)f_i = \Delta f_i + f_i = f_{i+1} - f_i + f_i = f_{i+1} = E f_i$

$\boxed{E = \Delta + 1}$ رابطه بین این دو اپراتور

$\rightarrow \boxed{E^s f_i = f_{i+s}}$ (که s عدد است)

$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$ اپراتور دل یا نابلا

$\nabla f_i = (1 - E^{-1}) f_i \rightarrow \therefore \nabla = 1 - E^{-1}$

$\Rightarrow E = (1-\nabla)^{-1}$

$\frac{d}{dx} = D$ اپراتور مشتق

$\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta(f_{i+1} - f_i) = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i = f_{i+2} - f_{i+1} - f_{i+1} + f_i$

$\Delta^2 f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i$ forward diff.

$\Delta\nabla(f_i) = \Delta(f_i - f_{i-1}) = f_{i+1} - f_i - f_i + f_{i-1} = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}$

$\Delta\nabla \longrightarrow$ central

در حالتی که فاصله‌ها یکی است $\boxed{\frac{x - x_i}{h} = s}$ تا حالا صحیح است ولی عدد است

$D(E^s f_i)$

مشتق، s تا مجهول از f — فرض f_0 را داریم حال f_2 را می‌خواهیم

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$D(E^s f_i)$

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{ds}\cdot\frac{ds}{dx} = \frac{1}{h}\frac{d}{ds}$$

$f(x) = a^x$

$\ln f = x \ln a$

مشتق $\rightarrow f'/f = \ln a \rightarrow f' = a^x \ln a$

$$\Rightarrow D(E^s f_i) = \frac{1}{h}\frac{d}{ds}(E^s f_i)$$

$$= \frac{1}{h}(\ln(E)\, E^s) f_i = (\frac{1}{h}\ln E) f_{i+s}$$

$$f'_{i+s} = \frac{1}{h}[\ln(\Delta+1)] f_{i+s}$$

اپراتور مشتق D^f

if $s=0$ $\rightarrow f'_i = \frac{1}{h}[\ln(\Delta+1)] f_i = \frac{1}{h}[\Delta - \frac{\Delta^2}{2!} + \frac{\Delta^3}{3!} - \frac{\Delta^4}{4!} + \dots] f_i$

تیلور بر حسب Δ

Forward diff.

$D \cdot D$

$$f''_i = \frac{1}{h^2}[\Delta^2 + \Delta^3 + \dots] f_i$$

$\frac{1}{E} f_i$ — مشتق در نقطه

backward diff. $f'_i = \frac{1}{h}\ln(\frac{1}{1-\nabla}) f_i$

D^b

$$= -\frac{1}{h}\ln(1-\nabla) f_i = \frac{1}{h}(\nabla + \frac{\nabla^2}{2!} + \frac{\nabla^3}{3!} + \dots) f_i$$

دستکاری $\delta^2 = D^f \cdot D^b \longrightarrow$ از مرتبه ۲ central

مشتق دوم درست می‌آید

$\delta f_i = f_{i+1} - f_{i-1}$

P4PCO

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1]\underbrace{(x-x_0)}_{s\times h} + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\dots$$

$$s = \frac{x-x_0}{h}$$ با فرض اینکه فاصله‌ها مساوی باشند

$$P_n(x) = f_0 + \underbrace{\frac{\overset{\Delta f_0}{f_1-f_0}}{\underset{h}{x_1-x_0}}\overset{s\times h}{(x-x_0)}}_{s\cdot\Delta f_0} + \underbrace{\frac{\overset{(f_2-2f_1+f_0)\times\frac{1}{h}}{f[x_2,x_1]-f[x_1,x_0]}}{x_2-x_0=2h}\, s\times h \cdot (s-1)h}_{\frac{\Delta^2 f_0}{2}\, s(s-1)}$$

داریم $x-x_0 = sh \xrightarrow{\pm x_1} (x-x_1)+(x_1-x_0) = sh$

$$(x-x_1) = sh-h = (s-1)h$$

$$P(x) = f_0 + s\,\Delta f_0 + s(s-1)\frac{\Delta^2 f_0}{2} + \dots + \frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-n+1)\Delta^n f_0}{n!}+\dots$$

اگر cut کنیم error داریم.

$$Error = \prod_{j=0}^{n}(s-j)\,\frac{f_0^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{1}{h}\frac{d}{ds}$$ ⟶ پس از بعد s مشتق می‌گیریم