Subject: Date: / /

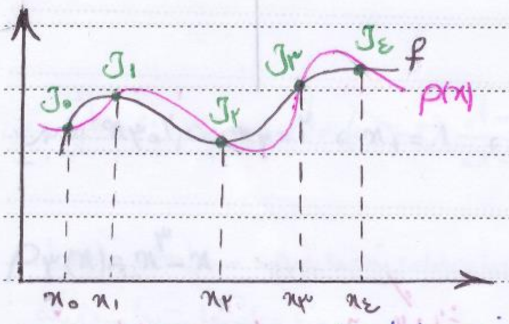
محاسبات عددی پیشرفته

۱. الگوریتم عددی خانم دکتر توتونیان، انتشارات فردوسی مشهد — آنالیز عددی دکتر بابلیان

درون یابی:

فرض کنید مقدار تابع f در نقاط متمایز $x_0, x_1, \dots, x_n$ به ترتیب برابر f_0 و f_1 و ... و f_n باشد اگر x متعلق به بازه‌ی شامل x_0 تا x_n باشد آن گاه تخمین $f(x)$ را درون یابی گویند.

و اگر x خارج از این بازه باشد تخمین $f(x)$ را برون یابی گویند.



یک تابع مانند $p(x)$ که چندجمله ای باشد را انتخاب می‌کنیم

سعی می‌کنیم چندجمله‌ای مانند $p(x)$ را از نقاط داده شده بگذرانیم

نقاط داده شده : $(x_i, f_i) \quad i = 0, 1, \dots, n$

آیا چندجمله ای با این مشخصات وجود دارد و تحت چه شرایطی منحصر به فرد است.

وجود دارد و در هم یکی است.

از $n+1$ نقطه یک و فقط یک چندجمله‌ای حداکثر درجه n مانند $p_n(x)$ وجود دارد به گونه‌ای که $f(x_i) = p_n(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, n$ باشد این چندجمله‌ای را چندجمله‌ای درون یاب f گویند.

برای درون یابی قرار می‌دهیم $f(x) \simeq p_n(x)$

روش های مختلفی برای یافتن $p_n(x)$ وجود دارد که از جمله آن‌ها روش لاگرانژ است.

روش لاگرانژ:

اگر تابع f در نقاط متمایز x_0 تا x_n معلوم و برابر با f_0 تا f_n باشد آن گاه چندجمله‌ای‌های لاگرانژ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$ به ازای نقطه x_i

به صورت زیر هم نمایش می‌دهند:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

خواص چندجمله ای‌های لاگرانژ:

چندجمله ای‌های لاگرانژ برای نقاط x_0 تا x_n (مرتبه n) است.

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

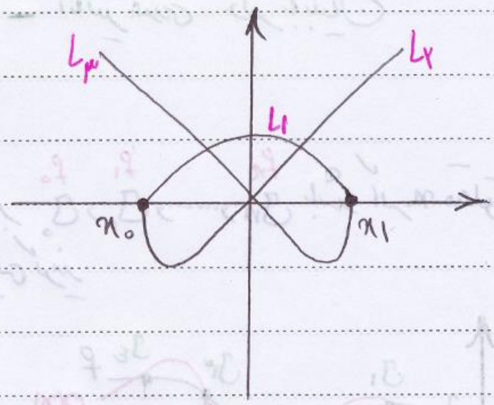
Subject: Date: / /

مثال. چندجمله‌ای های لاگرانژ برای نقاط $x_0=-1$ و $x_1=0$ و $x_2=1$ را بیابید.

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{x(x-1)}{-1(-2)}=\frac{1}{2}x(x-1)$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)}=1-x^2$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{(x+1)(x)}{(1+1)(1)}=\frac{1}{2}x(x+1)$$



$L_0(x_0)=1$ $\quad L_1(x_0)=0$ $\quad L_2(x_0)=0$

$L_0(x_1)=0$ $\quad L_1(x_1)=1$ $\quad L_2(x_1)=0$

$L_0(x_2)=0$ $\quad L_1(x_2)=0$ $\quad L_2(x_2)=1$

چندجمله‌ای درون‌یاب روش لاگرانژ:

فرض کنید مقادیر تابع $f(x)$ در نقاط x_0 و x_1 و ... و x_n به ترتیب f_0 و f_1 و ... و f_n باشد. چندجمله‌ای درون‌یاب تابع f در این نقاط به صورت زیر به دست می‌آید.

$$P_n(x)=f_0L_0(x)+f_1L_1(x)+\cdots+f_nL_n(x)$$

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}f_iL_i(x)$$

مثال. چندجمله‌ای درون‌یاب تابع جدولی زیر را بیابید.

	x_0	x_1	x_2
x_i	-1	0	1
f_i	2	1	4
	f_0	f_1	f_2

$$P_2(x)=f_0L_0(x)+f_1L_1(x)+f_2L_2(x)$$

$$P_2(x)=\cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}x(x-1)\right)+1(1-x^2)+\cancel{4}^{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}x(x+1)\right)=2x^2+x+1$$

$f(0.5)\simeq P(0.5)=2$ $\qquad f(-0.5)\simeq P(-0.5)=1$ $\qquad$ اعداد بین ۰ تا ۱ را می‌توان جایگزاری کرد.

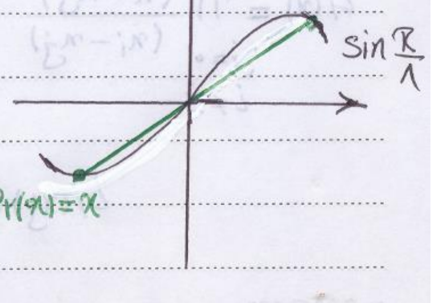
مثال. چندجمله‌ای درون‌یاب تابع $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$ را در نقاط $x_0=-1$ و $x_1=0$ و $x_2=1$ بیابید و سپس تقریبی از $\sin\frac{\pi}{8}$ را بیابید.

x_i	-1	0	1
f_i	-1	0	1

$$P_2(x)=(-1)\left(\frac{1}{2}x(x-1)\right)+0+\frac{1}{2}x(x+1)$$

$$P_2(x)=x$$

$$\sin\frac{\pi}{8}=f\left(\frac{1}{4}\right)\simeq P_2\left(\frac{1}{4}\right)=0.25$$



Subject: Date: / /

تمرین: چندجمله‌ای درون‌یاب تابع $f(x)=e^{-\frac{x}{2}}$ را در نقاط $x_0=-1$ و $x_1=1$ و $x_2=2$ را تا ۳ رقم اعشار بیابید و سپس تقریبی از $f(-0.17)$ را به دست آورید.

نکته: چندجمله‌ای درون‌یاب تابع $f(x)=x^3-x$ را در نقاط $x_0=-2$ ، $x_1=1$ ، $x_2=3$ و $x_3=2$ بیابید.

چون درجه ۳ است برای این نقاط ولی منحصر به فرد است. $P_3(x)=x^3-x$

فرض شود $f(x)=1$ باشد چندجمله‌ای درون‌یاب تابع $f(x)=1$ را در نقاط x_0 و x_1 و ... و x_n بیابید.

$$P_n(x)=1 \Rightarrow 1\times L_0(x)+1\times L_1(x)+\cdots+1\times L_n(x)=1$$

در چندجمله‌ای لاگرانژ ثابت است. $\sum_{i=0}^{n} L_i(x)=1$ همیشه همین طور است.

معایب روش لاگرانژ:

۱. حجم محاسبات فوق‌العاده زیاد است.

۲. با افزودن داده‌ی جدید به جدول کل مراحل بایستی مجدداً انجام شود. (بزرگترین عیب)

۳. درجه دقیق چندجمله‌ای پس از انجام کلیه عملیات‌های لازم برای یافتن چندجمله‌ای درون‌یاب مشخص می‌شود.

روش تفاضلات تقسیمی نیوتن:

ابتدا تفاضلات تقسیمی نیوتن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. • تفاضلات تقسیمی نیوتن مرتبه اول. (مشتق مرتبه اول)

$$f[x_0,x_1]=\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}$$

مثلاً: $f[x,y]=\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \quad x\neq y$

• تفاضلات تقسیمی نیوتن مرتبه دوم. (مشتق مرتبه دوم)

$$f[x,y,z]=\frac{f[y,z]-f[x,y]}{z-x} \qquad f[x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$$

Subject: Date: / /

به همین ترتیب تفاضلات تقسیمی مرتبه بالاتر تعریف می‌شود به عنوان نمونه:

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$$

فرض کنید مقادیر تابع f در نقاط متمایز x_0 و x_1 و ... و x_n معلوم و برابر با f_0 و f_1 و ... و f_n باشد در این صورت چندجمله‌ای درون‌یاب تابع f به صورت زیر به دست می‌آید

$$P_n(x) = f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

$P_n(x_0) = f_0$ $\quad P_n(x_1) = f_0 + f[x_0, x_1](x_1 - x_0) + 0 = f_0 + \frac{f_1 - f_0}{\cancel{x - x_0}} \cancel{(x - x_0)} = f_1$ $\quad P_n(x_i) = f_i$

برای یافتن ضرایب موجود در چندجمله‌ای درون‌یاب می‌توانیم از جدول زیر که به جدول تفاضلات تقسیمی نیوتن معروف است استفاده کنیم.

x_i	f_i	تفاضل دوتایی	تفاضل سه تایی	تفاضل چهارتایی	تفاضل پنج تایی
x_0	f_0				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	f_1		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_2	f_2		$f[x_1, x_2, x_3]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
x_3	f_3		$f[x_2, x_3, x_4]$		
		$f[x_3, x_4]$			
x_4	f_4				

روی قطر این جدول همان ضرایب است.

مثال: $f(x) = \sin \frac{\pi}{2} x \qquad x_0 = -1 ، x_1 = 0 ، x_2 = 1$

$P_2(x) = -1 + 1 \times [x + 1] + 0$

x_i	f_i	x_0, x_1	x_0, x_1, x_2	x_0, x_1, x_2, x_3
x_0 -1	-1			
		$\frac{0+1}{0+1} = 1$ $\quad x_1 - x_0$		
x_1 0	0		$\frac{1-1}{1+1} = 0$ $\quad x_2 - x_0$	
		$\frac{1-0}{1-0} = 1$ $\quad x_2 - x_1$		$\frac{-\frac{3}{2} - 0}{3} = -\frac{1}{3}$
x_2 1	1		$\frac{-2-1}{2-0} = \frac{-3}{2}$ $\quad x_3 - x_1$	
		$\frac{-1-1}{2-1} = -2$ $\quad x_3 - x_2$		
x_3 3	-1			

نقطه $x_3 = 3$ را به داده‌ها اضافه کنید چندجمله‌ای درون‌یاب جدید را بیابید.

$$P_3(x) = P_2(x) + \left(-\frac{1}{3}\right)(x+1)(x-0)(x-1) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}x$$

Subject: Date: / /

تمرین: برنامه‌ای بنویسید که با بکارگیری تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن چندجمله‌ای درون‌یاب تابع جدول زیر را بیابد و سپس $f(3.5)$ را برآورد کند.

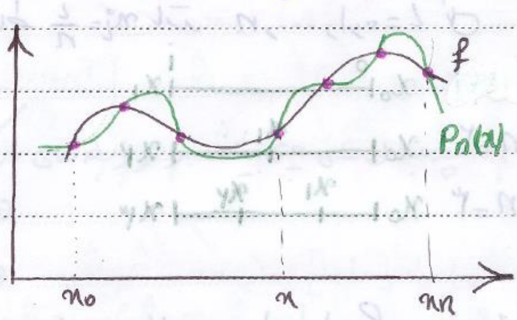
x_i	۰	۱	۲	۳	۴
f_i	۱	۱-	۳	۲-	۱

خطای چندجمله‌ای درون‌یاب:

فرض کنید $P_n(x)$ چندجمله‌ای درون‌یاب تابع f در نقاط متمایز x_0 و x_1 و ... و x_n از بازه‌ی $[a,b]$ باشد، به ازای هر x در این بازه وجود دارد ثابت c_x به گونه‌ای که:

مشروط بر آن که تابع f و مشتقاتش تا مرتبه n موجود و پیوسته و مشتق مرتبه $n+1$ نیز موجود باشد.

$$f(x) = P_n(x) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\, f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}$$



$$|f(x) - P_n(x)| = \frac{|(x-x_0)\cdots(x-x_n)|}{(n+1)!}\left|f^{(n+1)}(c_x)\right|$$

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leqslant M,\ x\in[a,b] \quad : \quad |f(x)-P_n(x)| \leqslant |(x-x_0)\cdots(x-x_n)|\frac{M}{(n+1)!}$$

مثال: حداکثر خطای چندجمله‌ای درون‌یاب را برای تابع $f(x)=\sin\frac{\pi x}{2}$ در نقاط $x_0=-1$، $x_1=0$، $x_2=1$، $x_3=2$ بیابید.

$$f(x) = \sin\frac{\pi}{2}x$$

$$P_3(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}x \qquad f' = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x \qquad f''' = -\frac{\pi^3}{8}\cos\frac{\pi}{2}x$$

$$f'' = -\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2}x \qquad f^{(4)} = \frac{\pi^4}{16}\sin\frac{\pi}{2}x$$

$$f^{(4)}(x) = ?$$

$$\left|f^{(4)}(x)\right| \leqslant \frac{\pi^4}{16} \qquad |f(x)-P_3(x)| \leqslant |(x+1)(x-0)(x-1)(x-2)| \times \frac{\pi^4}{16\times 4!}$$

Subject: Date: / /

* برای پیدا کردن Max مقدار از عبارت سمت راست مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم.

** چندجمله‌های درون یاب منحصربفرد هستند.

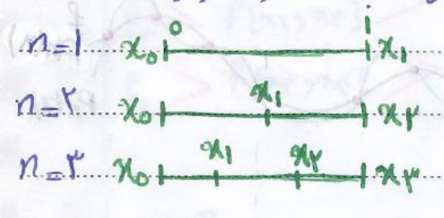
تمرین: چندجمله‌ای درون یاب تابع $f(x)=e^x$ را در نقاط $x_0=-2$ ، $x_1=-1$ ، $x_2=1$ ، $x_3=2$ بیابید. وسپس حداکثر خطای درون یاب را به ازای هر x در این بازه بیان کنید.

با برنامه نویسی f و $p_n(x)$ را رسم کنید.

x_i	d.d
-2	$\frac{e^{-2}-e^{-1}}{-1+2}$
-1	
1	
2	

$$P_3(x)=e^{-2}+\bigcirc(x+2)+\square(x+2)(x+1)+*(x+2)(x+1)(x-1)$$

فرض کنید $p_n(x)$ چندجمله‌ای درون یاب تابع $f(x)=e^x$ در نقاط $x_i=\frac{i}{n}$ باشد $i=0,1,\dots,n$ که بازه ۰ و ۱ است. نشان دهید $\lim_{n\to\infty} p_n(x)=f(x)$.



$$|p_n(x)-f(x)| \le |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|\frac{M}{(n+1)!}$$

$$f(x)=e^x \qquad f^{(n+1)}(x)=e^x \qquad |p_n(x)-f(x)| \le 1\times 1\times\cdots\times 1\times\frac{e^1}{(n+1)!}$$

$$|f^{(n+1)}(x)|=|e^x|\le e^1 \qquad 1\le\frac{e}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x)=f(x)$$

$$\frac{(b-a)^n}{(n+1)!}$$

تمرین: در مثال فوق فرض کنید $x_i=a+\frac{i(b-a)}{n}$ ، $i=0,1,\dots,n$ نشان دهید

مطابق آزمون نسبت $\lim_{n\to\infty}\frac{(b-a)^n}{n!}=0$ چون آن صفر می‌شود و می‌توان اثبات کرد.

Subject: Date: / /

یادآوری: اگر $P_n(x)$ چندجمله‌ای درون‌یاب تابع $f(x)$ در نقاط $x_0, x_1, \ldots, x_n$ در بازه $[a, b]$ باشد

$$|f(x) - P_n(x)| = \frac{|(x-x_0)\cdots(x-x_n)|}{(n+1)!}\,|f^{(n+1)}(c_x)| \qquad a < c_x < b$$

سؤال: نقاط $x_0, x_1, \ldots, x_n$ را به چه صورت در بازه‌ی a و b اختیار کنیم تا خطا کمترین مقدار ممکن را داشته باشد؟

قبل از جواب دادن به این سؤال لازم است چندجمله‌ای‌های (چبیشف) را تعریف کنیم.

چندجمله‌ای‌های چبیشف:

$$T_n(x) = \cos(n\,\underbrace{\arccos x}_{\theta}) \qquad -1 \leq x \leq 1$$

$$T_n(x) = \cos(n\theta) \qquad \theta = \arccos x \qquad -1 \leq x \leq 1$$

$T_0(x) = 1$

$T_1(x) = x$ چون $\cos\theta = x$

$T_2(x) = \cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 \qquad T_2(x) = 2x^2 - 1$

* چندجمله‌ای‌های چبیشف را از رابطه‌های بازگشتی به فرم زیر بیابیم:

$T_{n+1}(x) = \cos((n+1)\theta) = \cos n\theta . \cos\theta - \sin n\theta \sin\theta$

$T_{n-1}(x) = \cos((n-1)\theta) = \cos n\theta . \cos\theta + \sin n\theta \sin\theta$

$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2\cos n\theta \cos\theta = 2x\,T_n(x)$

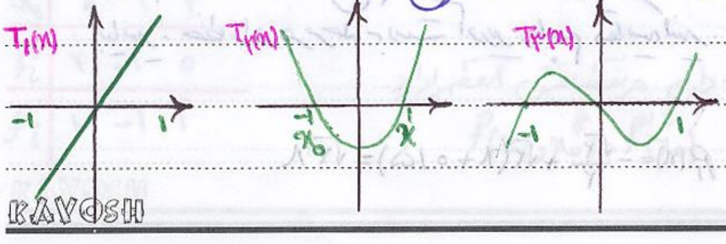
$$\boxed{T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x)}$$

$T_2(x) = 2x\,T_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$

$T_3(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 2x^3 - 3x = 4x^3 - 3x$

2^{n-1} در $T_n(x)$ ضریب پیشرو می‌باشد.

نکته: اگر n عدد زوج باشد $T_n(x)$ تابع زوج و اگر n عدد فرد باشد $T_n(x)$ تابع فرد است.



ریشه‌ها نسبت به مبدأ متقارن هستند.

تابع زوج نسبت به مبدأ yها متقارن است.

Subject: Date: / /

$T_2(x)=0 \Rightarrow 2x^2-1=0 \quad x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \quad x_0=-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ریشه های چندجمله‌ای $T_n(x)$ درجه n، n تا هستند، قرینه اند، در بازه ی ۱- تا ۱ هم واقع هستند.

$T_3(x)=0 \Rightarrow x(4x^2-3)=0 \quad x=0 \quad x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \quad x_0=-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad x_1=0 \quad x_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$

به طور کلی برای یافتن ریشه های $T_n(x)$ به صورت زیر عمل می کنیم:

$T_n(x)=0 \Rightarrow \cos(n\theta)=0$

$$n\theta=k\pi+\frac{\pi}{2} \quad \theta=\frac{k\pi+\frac{\pi}{2}}{n}=\frac{2k\pi+\pi}{2n} \quad \theta_k=\frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

$$\hat{x}_k=\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \quad k=0,1,\dots,n-1$$

$T_2(x)=0 \quad x_k=\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{4}\right) \quad k=0,1 \quad \hat{x}_0=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \hat{x}_1=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$T_3(x)=0 \quad x_k=\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{6}\right) \quad k=0,1,2 \quad \hat{x}_0=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \hat{x}_1=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \quad \hat{x}_2=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

اگر ریشه های یک چندجمله‌ای را داشته باشیم.

اگر $\hat{x}_0$ و $\hat{x}_1$ و ... و $\hat{x}_n$ ریشه‌های چندجمله‌ای $n+1$ چبیشف $T_{n+1}(x)$ باشند در این صورت می توانیم قرار دهیم:

$T_{n+1}(x)=2^n(x-\hat{x}_0)(x-\hat{x}_1)\dots(x-\hat{x}_n)$

۲ به توان یکی کمتر از $n+1$ است.

$|T_n(x)|\leq 1$

$(x-\hat{x}_0)(x-\hat{x}_1)\dots(x-\hat{x}_n)=\left|\frac{T_{n+1}(x)}{2^n}\right|$

$|(x-\hat{x}_0)(x-\hat{x}_1)\dots(x-\hat{x}_n)|\leq\frac{1}{2^n}$

چون $T_n(x)$، $\cos\theta$ است و مقدار $\cos\theta$ کمتر از یک است.

فرض کنید $P_n(x)$ چندجمله‌ای درون یاب تابع $f(x)$ در نقاط $\hat{x}_0$ و $\hat{x}_1$ و ... و $\hat{x}_n$ که همگی در $[-1,1]$ قرار دارند باشد.

$$|f(x)-P_n(x)|\leq\frac{|(x-\hat{x}_0)(x-\hat{x}_1)\cdots(x-\hat{x}_n)|}{(n+1)!}M$$

$$\leq\frac{M}{2^n(n+1)!}$$

($\hat{x}_i$ ها ریشه های $T_{n+1}(x)=0$ هستند.)

$|f^{(n+1)}(x)|\leq M$

با افزایش n خطا به سمت صفر میل می کند.

نکته: از بین تمام نقاط ممکن در بازه ۱ و ۱- خطا زمانی به حداقل مقدار می رسد که نقاط ریشه‌های چندجمله‌ای های چبیشف می باشند.

مثال: چندجمله‌ای درون یاب تابع $f(x)=\cos\frac{x\pi}{2}$ را در نقاط $x_0=-\frac{1}{2}$ و $x_1=\frac{1}{2}$ بیابید.
چندجمله‌ای درون یاب تابع $f(x)=\cos\frac{x\pi}{2}$ را در نقاط $\hat{x}_0$ و $\hat{x}_1$ بیابید که $\hat{x}_0$ و $\hat{x}_1$ ریشه‌های درجه ۲ چبیشف هستند.
بیابید. خطا را در هر مرحله به دست آورید و باهم مقایسه کنید.

x_i	f_i
-0.5	$-\frac{\sqrt{2}}{2}=$
0.5	$\frac{\sqrt{2}}{2}=$

$P_1(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}(x+0.5)=\sqrt{2}x$

Subject: Date: / /

دو نقطه می‌خواهیم T_2 را حساب می‌کنیم

$$T_2(x)=0 \Rightarrow \hat{x}_0=-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \hat{x}_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

x_i	f_i
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	

خطا درکل در چندجمله‌ای‌های چی‌بیشف کمتر است.

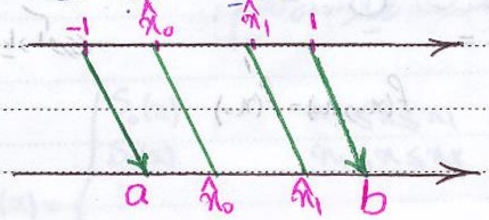
x_iها را از چندجمله‌ای‌های چی‌بیشف به دست می‌آوریم

ریشه‌های چندجمله‌ای چی‌بیشف را پیدا و برابر صفر قرار دهیم همان x_iها به دست می‌آید

که بهترین از این نقاط وجود ندارد

قسمت ب به اصلی نزدیک‌تر است.

تذکر: برای یافتن بهترین نقاط در بازه‌ی دلخواه a و b می‌توانیم نقاط انتخاب شده در ریشه‌های چی‌بیشف را در بازه‌ی دلخواه نگاشت دهیم.

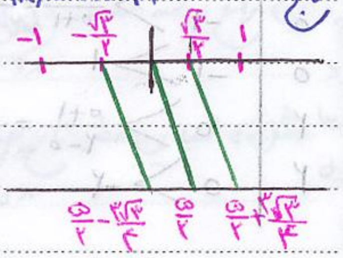


$$x=\frac{(b-a)}{2}x+\frac{(b+a)}{2}$$

$$\hat{x}_i=\frac{(b-a)}{2}\hat{x}_i+\frac{(b+a)}{2}$$

مثال: نقاط متناظر با ریشه‌های درجه ۳ چی‌بیشف در بازه‌ی ۱و۴ را بیابید و با استفاده از آن‌ها چندجمله‌ای درون‌یاب تابع $f(x)=2x^4+1$ بیابید.

$$T_3(x)=0 \Rightarrow \hat{x}_0=-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \hat{x}_1=0 \quad \hat{x}_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$[a,b]=[1,4]$$

$$\hat{x}_i=\frac{3}{2}\hat{x}_i+\frac{5}{2} \quad \hat{x}_0=-\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{5}{2} \quad \hat{x}_1=\frac{5}{2} \quad \hat{x}_2=\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{5}{2}$$

چندجمله‌ای‌های درون‌یاب هرمیت:

فرض کنید تابع f و مشتق آن یعنی f' در نقاط متمایز $x_0, x_1, \dots, x_n$ معلوم باشد چندجمله‌ای $2n+1$ است.

x_i	x_0	x_1	$\dots$	x_n
f_i	f_0	f_1	$\dots$	f_n
f'_i	f'_0	f'_1	$\dots$	f'_n

می‌خواهیم چندجمله‌ای حداکثر $2n+1$ مانند $H_{2n+1}(x)$ را به گونه‌ای بیابیم که:

$$\begin{cases} H_{2n+1}(x_i)=f_i \\ H'_{2n+1}(x_i)=f'_i \end{cases}$$

پس به طور منحصر به فرد به دست می‌آید.

مثال: چندجمله‌ای هرمیت تابع را بیابید.

x_i	0	1	2
f_i	2	-1	0
f'_i	1	-1	1

وقتی مشتق را داریم مانند این است که دو نقطه f داریم هر نقطه نقش ۲ نقطه را دارد.

$$f(x_0,x_0^*)=f'(x_0)$$

KAVOSH

Subject: Date: / /

x_i	f_i	(دوتایی)
$x_0=0$	$f_0=2$	$f(x_0,x_0)=f'(x_0)=1$
$x_0=0$	$f_0=2$	$\frac{-1-2}{1-0}=-3$
$x_1=1$	$f_1=-1$	$f(x_1,x_1)=f'(x_1)=-1$
$x_1=1$	$f_1=-1$	$\frac{0+1}{2-1}=1$
$x_2=2$	$f_2=0$	1
$x_2=2$	$f_2=0$	

مثال: چندجمله‌ای درون‌یاب تابع هرمیتی زیر را بیابید.

x_i	-1	0	2
f_i	1	-1	0
f'_i	0	1	-2

یادآوری:

$$f(x_0,x_1)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x-x_0}=$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x_0,x_1)=f'(x_0) \qquad f(x_0,x_0)=f'(x_0)$$

x_i	f_i					
x_0 -1	1	0	$\frac{-2-0}{0+1}=-2$	$\frac{3+2}{0+1}=5$	$\frac{-\frac{13}{12}-5}{2+1}=-\frac{73}{36}$	$\frac{66}{108}$
x_1 -1	1	$\frac{-1-1}{0+1}=-2$	$\frac{1+2}{0+1}=3$	$\frac{-\frac{1}{4}-3}{2+1}=-\frac{13}{12}$	$\frac{-\frac{13}{12}+\frac{1}{2}}{2+1}=-\frac{7}{36}$	
x_2 0	-1	1	$\frac{\frac{1}{2}-1}{2-0}=-\frac{1}{4}$	$\frac{-\frac{5}{4}+\frac{1}{4}}{2-0}=-\frac{1}{2}$		
x_3 0	-1	$\frac{0+1}{2-0}=\frac{1}{2}$	$\frac{-2-\frac{1}{2}}{2-0}=-\frac{5}{4}$			
x_4 2	0	-2				
x_5 2	0					

$$H_5(x)=1+0(x+1)+(-2)(x+1)(x+1)+5(x+1)(x+1)(x-0)-\frac{73}{36}(x+1)^2x+\frac{66}{108}(x+1)^2x^2(x-2)$$

$2\times2+1$

به تعداد مراحل یا درجه نگاه می‌کنیم.

در درون‌یابی هرمیت یا غیرهرمیت درجه رابطه‌ای مستقیم دارد با تعداد نقاط درجه یکی کمتر از تعداد نقاط.

چندجمله‌ای‌ها وقتی درجه‌اش بالا رود نوسانات هم بالا می‌رود.

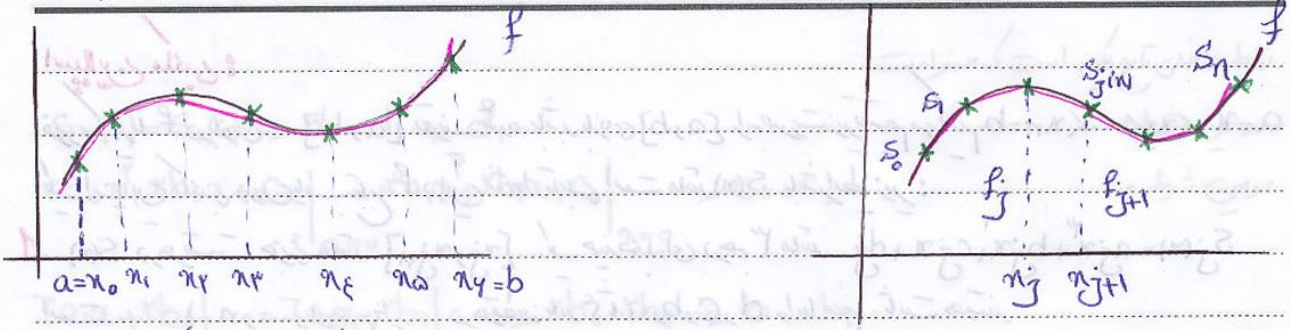
درون‌یابی اسپلاین:

اگر یک تابع مانند f داشته باشیم به چند قسمت تقسیم می‌کنیم در هر قسمت یک چندجمله‌ای درجه پایین معمولاً درجه ۳ استفاده می‌کنیم. اگر در هر قسمت خط باشیم به اسپلاین خطی معروف است.

هم پیوسته بودن نقاط و هم شرط درون‌یابی را باید دارا باشند، هموار نیستند و حالت شکستگی دارند و برای طراحی مناسب نیست.

KAVOSH

Subject: Date: / /



فرض کنید تابع f در بازه‌ی (a,b) تعریف شده باشد این بازه را مانند زیر به زیربازه‌های کوچکتر افراز می‌کنیم

$$a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$$

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\dots,[x_j,x_{j+1}]$$

تابع اسپلاین درجه یک که تابع f را در این نقاط درون‌یابی می‌کند به صورت زیر ارائه می‌دهیم:
که S ها چندجمله‌ای‌های درجه یک هستند.

$$S(x)=\begin{cases} S_0(x) & x_0\le x\le x_1 \\ S_1(x) & x_1\le x\le x_2 \\ \vdots & \\ S_{n-1}(x) & x_{n-1}\le x\le x_n \end{cases}$$

$$S_j(x)=f_j\,\frac{(x-x_{j+1})}{(x_j-x_{j+1})}+f_{j+1}\,\frac{(x-x_j)}{(x_{j+1}-x_j)} \qquad x_j\le x\le x_{j+1}$$

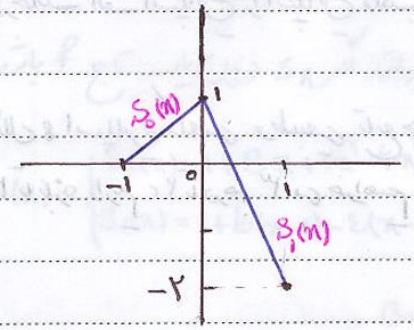
این توابع پیوسته هستند.

مثال: اسپلاین خطی تابع جدولی زیر را بیابید.

	x_0	x_1	x_2
x_i	-1	0	1
f_i	0	1	-2

$$S(x)=\begin{cases} \frac{x+1}{1}=x+1 & -1\le x<0 \\ \frac{(x-1)}{(0-1)}-2\,\frac{(x-0)}{(1-0)} & 0\le x<1 \end{cases}$$

$$S(x)=\begin{cases} x+1 & -1\le x\le 0 \\ -3x+1 & 0\le x\le 1 \end{cases}$$



ملاحظه می‌شود که اسپلاین خطی هموار نیست یعنی مشتقات موجود نیست. یکی از پرکاربردترین اسپلاین‌ها، اسپلاین مکعبی است.

KAVOSH

Subject: Date: / /

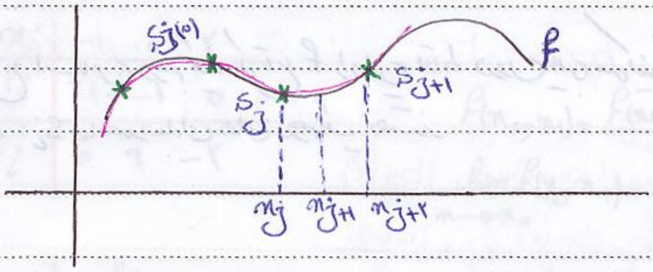
اسپلاین مکعبی:

فرض کنید تابع f در بازه‌ی [a,b] تعریف شده باشد. بازه‌ی [a,b] را به صورت زیر تقسیم می‌کنیم $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$

یک اسپلاین مکعبی درون‌یاب تابع f در این نقاط تابعی است مانند $S(x)$ با شرایط زیر:

1. $S(x)$ در هر قسمت جزئی مانند $[x_j, x_{j+1}]$ یک چندجمله‌ای درجه ۳ مانند $S_j(x)=a_jx^3+b_jx^2+c_jx+d_j$ است. $j=0,1,\dots,n-1$ در هر قطعه باید ۴ تا a و b و c و d را بیابیم. ثابت هستند.

2. باید $S(x_i)=f_i \quad i=0,1,\dots,n$



3. $S_j(x_{j+1})=S_{j+1}(x_{j+1}) \quad j=0,1,\dots,n-2$

4. $S'_j(x_{j+1})=S'_{j+1}(x_{j+1}) \quad j=0,1,\dots,n-2$

5. $S''_j(x_{j+1})=S''_{j+1}(x_{j+1}) \quad j=0,1,\dots,n-2$

تعداد مجهولات $=4n$ تعداد معادلات $(n+1)+(n-1)+(n-1)+(n-1)=4n-2$

6. یکی از حالات زیر را اضافه می‌کنیم: الف یا ب

الف) $S''(x_0)=0=S''(x_n)$

ب) شرایط مرزی $\begin{cases} S'(x_0)=f'_0 \\ S'(x_n)=f'_n \end{cases}$

در حالت الف اسپلاین را اسپلاین مکعبی طبیعی گویند و در حالت ب اسپلاین را اسپلاین مکعبی مقید گویند.

مثال: اسپلاین مکعبی و طبیعی تابع جدولی زیر را بیابید.

	x_0	x_1	x_2
x_i	-1	0	1
f_i	0	1	0

۲ تا بازه داریم، ۲ تا درجه ۳ می‌خواهیم

$$S(x)=\begin{cases} S_0(x)=a_0x^3+b_0x^2+c_0x+d_0 & -1\le x<0 \\ S_1(x)=a_1x^3+b_1x^2+c_1x+d_1 & 0\le x<1 \end{cases}$$

اولین شرط:

$S(-1)=0 \Rightarrow -a_0+b_0-c_0+d_0=0 \qquad S(0)=1 \Rightarrow d_0=1 \qquad S(1)=0 \Rightarrow a_1+b_1+c_1+d_1=0$

Subject: Date: / /

نقاط داخلی تابع یکی است که صفر است.

دومین شرط: $S_0(0)=S_1(0) \Rightarrow d_0=d_1 \Rightarrow d_1=1$

سومین شرط: $3a_0x^2+2b_0x+c_0\Big|_{x=0} = 3a_1x^2+2b_1x+c_1\Big|_{x=0} \Rightarrow c_0=c_1$

$6a_0x+2b_0\Big|_{x=0} = 6a_1x+2b_1\Big|_{x=0} \Rightarrow 2b_0=2b_1 \Rightarrow b_0=b_1$

طبیعی

$S''(-1)=0 \Rightarrow -6a_0+2b_0=0$

$S''(1)=0 \Rightarrow 6a_1+2b_1=0$ $\Big> a_1=-a_0$

۸ تا معادله و ۸ تا مجهول به دست آمد.

نمونه سؤال: اسپلاین مکعبی طبیعی S روی بازه‌ی $[0,2]$ به صورت زیر تعریف شده است: مطلوب است محاسبه b، c و d

$$S(x)=\begin{cases} S_0(x)=1+2x-x^3 & 0\leq x\leq 1 \\ S_1(x)=2+b(x-1)+c(x-1)^2+d(x-1)^3 & 1\leq x\leq 2 \end{cases}$$

مقدار تابع را نداریم شرط اول به درد ما نمی‌خورد

شرط بعدی پیوسته باشد

$S_0(1)=S_1(1) \Rightarrow 2=2$

$S_0'(1)=S_1'(1) = 2-3x^2\Big|_{x=1} = b+2c(x-1)+3d(x-1)^2\Big|_{x=1} \Rightarrow b=-1$

$S_0''(1)=S_1''(1) \Rightarrow -6x\Big|_{x=1} = 2c+6d(x-1)\Big|_{x=1} \Rightarrow -6=2c \Rightarrow c=-3$

$S_1''(2)=0 \Rightarrow -12=2c+6d \Rightarrow -12=-6+6d \Rightarrow d=-1$

~~$1+2\times 2 = 3 = 5-8=-3$~~

تمرین: فرض کنید $S(x)$ اسپلاین مکعبی مقید تعریف شده به صورت زیر باشد اگر x_0 در روی بایست تابع f باشد مطلوب است محاسبه‌ی $f'(0)$ و $f'(2)$

$$S(x)=\begin{cases} S_0(x)=1+Bx+2x^2-2x^3 & 0\leq x<1 \\ S_1(x)=1+b(x-1)-4(x-1)^2+7(x-1)^3 & 1\leq x\leq 2 \end{cases}$$

از جواب بالایی استفاده نمی‌کنیم و از پیوستگی در جواب‌مان استفاده می‌کنیم. $B=0$

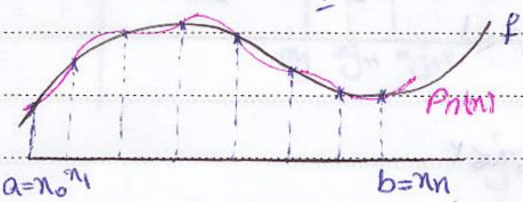
*

KAVOSH

Subject: Date: / /

روش‌های انتگرال‌گیری عددی:

محاسبه انتگرال از a تا b، $\int_a^b f(x)\,dx$ با روش‌های تحلیلی معمولاً غیرممکن و در بسیاری از موارد امکان‌پذیر نیست یا با محاسبات بسیار زیادی به دست خواهد آمد. لذا سعی می‌کنیم این انتگرال را با روش‌های عددی (تقریبی) محاسبه کنیم. برای این منظور نقاط $x_0, x_1, \dots, x_n$ را در بازه‌ی $[a, b]$ به صورت زیر در نظر می‌گیریم.



$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$$

چندجمله‌ای درون‌یاب تابع f را در این نقاط می‌یابیم و آن را $P_n(x)$ می‌نامیم.

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \quad \text{که} \quad P_n(x) = f_0 L_0(x) + \dots + f_n L_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_n)\, f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} \qquad a < c_x < b$$

به ازای هر x یک c وجود دارد. x عوض شود c هم عوض می‌شود.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b P_n(x)\,dx + \underbrace{\int_a^b R_n(x)\,dx}_{\text{خطای انتگرال‌گیری } E(I)}$$

با صرف‌نظر از $E(I)$ داریم:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b P_n(x)\,dx$$

چون P همیشه چندجمله‌ای است.

$$\int_a^b P_n(x)\,dx = f_0 \underbrace{\int_a^b L_0(x)\,dx}_{w_0} + f_1 \underbrace{\int_a^b L_1(x)\,dx}_{w_1} + \dots + f_n \underbrace{\int_a^b L_n(x)\,dx}_{w_n}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = w_0 f_0 + w_1 f_1 + \dots + w_n f_n$$

$$w_i = \int_a^b L_i(x)\,dx$$

* معمولاً حالت خاصی را که نقاط مساوی‌الفاصله باشند بررسی می‌کنیم که به روش‌های نیوتن کاتس معروف‌اند.

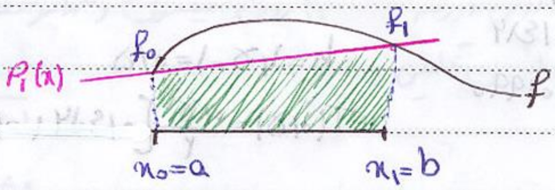
۱. نیوتن کاتس بسته: $a = x_0$ و $b = x_n$

Subject: Date: / /

$x_{i+1}-x_i=h=\frac{b-a}{n}$ فاصله نقاط

حالت خاص نیوتن کاتس بسته: $n=1$

$h=x_1-x_0=b-a$



$$\int_a^b f(x)\,dx=w_0f_0+w_1f_1$$

$$h=x_1-x_0=b-a \qquad w_0=\int_{a=x_0}^{b=x_1}L_0(x)\,dx=\int_{x_0}^{x_1}\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}\,dx=\frac{h}{2}$$

$$w_1=\int_a^b L_1(x)\,dx=\int_{x_0}^{x_1}\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}\,dx=\frac{h}{2}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx\simeq\frac{h}{2}\left[f_0+f_1\right]=T(h)}$$

نیوتن کاتس بسته وقتی $n=1$ باشد ذوزنقه است معروف به روش ذوزنقه است که با $T(h)$ هم نشان می‌دهند.

خطای روش ذوزنقه:

$$E(I)=E_T(h)=\int_{x_0}^{x_1}\frac{(x-x_0)(x-x_1)f''(c_x)}{2!}\,dx$$

طبق قضیه‌ی مقدار میانگین داریم:

اگر دو تابع حاصل ضرب داشته باشیم که یکی بدون تغییر علامت باشد تابع دوم را می‌توان بیرون از انتگرال آورد و یک c را حساب کرد.

$$=f''(c)\int_{x_0}^{x_1}\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!}\,dx \qquad E_T(h)=-\frac{h^3}{12}f''(c)=o(h^3) \qquad a<c<b$$

برای چندجمله‌ای های درجه ۱ و ۳ دقیق است

ملاحظه می‌شود که روش ذوزنقه برای چندجمله‌ای های تا درجه یک دقیق است (خطا مساوی صفر است) گویند درجه دقت روش ذوزنقه یک است.

مثال: مطلوب است محاسبه‌ی $\int_0^{0/1}\frac{dx}{1+x^2}$ الف) روش ذوزنقه ب) روش تحلیلی

x	f
0	1
0/1	0/99

$h=0/1-0=0/1$ $\qquad h=0+0/1=0/1$

$$T(0/1)=\frac{0/1}{2}\left[1+0/99\right]=0/0995$$

$$\int_0^{0/1}\frac{dx}{1+x^2}=\text{Arctan}\,x\Big|_0^{0/1}=\text{Arctan}\,0/1-\text{Arctan}\,0=0/0997$$

KAVOSH

Subject: Date: / /

نکته: با توجه به فرمول خطا اگر $|f''(x)|\leqslant M$ آنگاه $|E_T(h)|\leqslant \frac{h^3}{12}M$ می‌شود کران بالا خطا

مثال: مطلوب است محاسبه‌ی $\int_1^{1.5}\cos 2x\,dx$ با روش ذوزنقه، حداکثر خطا را بیابید.

x	f
۱	۰/۴۱۶
۱/۵	۰/۹۹۰

$$h=1.5-1=0.5$$

$$T(0.5)=\frac{0.5}{2}[0.416+0.990]=0.352$$

$$f=\cos 2x \quad f'=-2\sin 2x \quad f''=-4\cos 2x$$

$$|f''(x)|\leqslant 4$$

$$E_T(h)\leqslant\frac{4h^3}{12}=\frac{h^3}{3}=\frac{(0.5)^3}{3}=0.042$$

خطا از ۰/۰۴۲ کمتر است

روش تحلیلی: $\int_1^{1.5}\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_1^{1.5}=\frac{1}{2}\sin 3-\frac{1}{2}\sin 2=\frac{1}{2}(\sin 3-\sin 2)=\frac{1}{2}(0.1411-0.9093)$

حالت خاص نیوتن کاتس: $n=2$

متساوی الفاصله هستند

$$x_0=a \quad x_1=\frac{a+b}{2} \quad x_2=b$$

a, x_0 ——— x_1 ——— b, x_2

ارزش نقطه وسط ۴ برابر نقاط کناری است

$$\int_a^b f(x)dx\simeq w_0f_0+w_1f_1+w_2f_2$$

$$w_0=\int_a^b L_0(x)\,dx=\int_{a=x_0}^{b=x_2}\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{h}{3}$$

$$w_1=\int_a^b L_1(x)dx=\frac{4h}{3} \qquad w_2=w_0=\frac{h}{3} \qquad h=\frac{b-a}{2}$$

روش سیمپسون:

$$\int_a^b f(x)\,dx\simeq\frac{h}{3}\left[f_0+4f_1+f_2\right]=S(h)$$

خطای روش سیمپسون:

$$E_S(h)=\int_a^b\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f'''(c_x)}{3!}dx$$

$$E_S(h)=-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(c)=O(h^5) \qquad a<c<b$$

سرعت تقارب از مرتبه‌ی ضریبی از h^5 است

ملاحظه می‌شود که روش سیمپسون برای چندجمله‌ای‌ها تا درجه ۳ دقیق است که گوییم درجه دقت فرمول ۳ است

هرچه درجه دقت بالاتر رود خطا پایین‌تر می‌آید. رابطه بین h و f برقرار است

KAVOSH

Subject: Date: / /

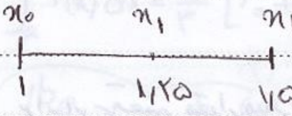
نکته: اگر $|f^{(4)}(x)| \leq M$ باشد آنگاه $|E_S(h)| \leq \frac{h^5}{90} M$

مثال: مطلوب است محاسبه‌ی انتگرال روبه‌رو:

$$\int_{1}^{1.5} (1+\sin x)\,dx$$

الف) روش ذوزنقه ب) روش سیمپسون و حداکثر خطای روش سیمپسون

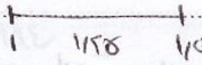
ج) انتگرال تحلیلی را بیابید.



x_i	f_i
1	1.841
1.25	1.948
1.5	1.997

(الف) 

$$T(0.5) = \frac{0.5}{2}\left[1.841 + 1.997\right] = 0.959$$

(ب) 

$$S(0.25) = \frac{0.25}{3}\left[1.841 + 4\times 1.948 + 1.997\right] = 0.969$$

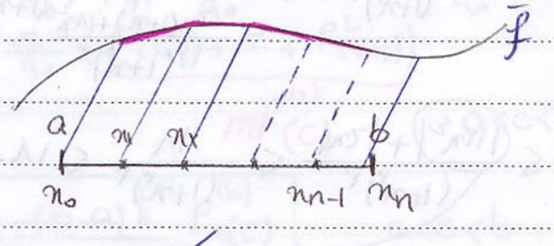
$f = 1+\sin x \quad f' = \cos x \quad f'' = -\sin x \quad f''' = -\cos x \quad f^{(4)} = \sin x \Rightarrow |f^{(4)}(x)| \leq 1 = M$

حداکثر $\sin x = 1$ ، $\sin x$

$$|E_S(h)| \leq \frac{h^5}{90}\times 1 = \frac{(0.25)^5}{90} = 0.00001$$

ج) $\int_{1}^{1.5} (1+\sin x)\,dx = x - \cos x \Big|_{1}^{1.5} = (1.5 - \cos 1.5) - (1 - \cos 1) = 0.5 - \cos 1.5 + \cos 1 = 0.97$

نکته: در روش‌های محاسبات ذوزنقه و سیمپسون به طور کلی نشان می‌دهد اگر طول بازه‌ی a و b نسبتاً بزرگ باشد $(h > 1)$ در این صورت برای استفاده از این روش‌ها در محاسبه‌ی انتگرال به صورت زیر عمل می‌کنیم



$$h = \frac{b-a}{n}$$

الف) ذوزنقه مرکب: بازه‌ی a, b را به n قسمت مساوی به صورت زیر افراز می‌کنیم

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$$

با اعمال روش ذوزنقه در محاسبه‌ی هر کدام از انتگرال‌ها خواهیم داشت

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}\left[f_0 + f_1\right] + \frac{h}{2}\left[f_1 + f_2\right] + \dots + \frac{h}{2}\left[f_{n-1} + f_n\right]$$

KAVOSH

Subject: Date: / /

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}\left[f_0+f_n+2\sum_{i=1}^{n} f_i\right]=T(h)}$$ فرمول کلی ذوزنقه

خطای روش ذوزنقه مرکب

$$E_T(h) = -\frac{h^3}{12}f''(c_1) - \frac{h^3}{12}f''(c_2) - \dots - \frac{h^3}{12}f''(c_n) =$$

$$= -\frac{h^3}{12}\left(\overbrace{f''(c_1)+\dots+f''(c_n)}^{n f''(c)}\right) \quad a<c<b$$ براساس قضیه مقدار میانی

$$E_T(h) = -\frac{(a-b)h^2}{12}f''(c) \quad a<c<b$$

نکته: اگر $|f''(x)|\le M$ آنگاه $|E_T(h)|\le \frac{(b-a)h^2}{12}M$

مثال: مطلوب است محاسبه ی $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$ الف) $h=0.5$ ب) $h=0.25$ ج) ذوزنقه معمولی $h=1$

الف)

x_i	f_i
0	1
0.5	0.888
1	0.5

$$T(0.5)=\frac{0.5}{2}\left[1+0.5+2(0.888)\right]=0.819$$

$$T(0.25)=\frac{0.25}{2}\left[1+0.5+2(0.9846+0.888+0.7032)\right]=0.8313$$

x_i	f_i
0	1
0.25	0.9846
0.5	0.888
0.75	0.7032
1	0.5

$$T(1)=\frac{1}{2}\left[1+0.5\right]=0.75$$

حداکثر خطا در حالت ب :

$$f(x)=\frac{1}{1+x^3} \qquad f'(x)=-\frac{3x^2}{(1+x^3)^2} \qquad f''(x)=\frac{-6x(1+x^3)^2-2(1+x^3)(3x^2)(-3x^2)}{(1+x^3)^4}=$$

$$=\frac{-6x(1+x^3)+18x^4}{(1+x^3)^3}=\frac{12x^4-6x}{(1+x^3)^3}$$

$$|f''(x)|=\left|\frac{12x^4-6x}{(1+x^3)^3}\right|\le\frac{|12x^4|+|6x|}{(1+x^3)^3}\le\frac{18}{(1+x^3)^3}\le 18=M$$

بیشترین مقدار ممکن زمانی است که یک می گذاریم جای x ، صعودی است

هیچ وقت از ۱۸ پایین تر نیست حداکثر مقدارش ۱۸ است

خطا: $$|E_T(h)|\le\frac{(b-a)h^2\times M}{12}=\frac{18h^2}{12}=\frac{18\times(0.25)^2}{12}=0.093$$

ب) سیمسون مرکب: در این روش بازه ی a و b را به n ($n=2m$ زوج است) قسمت مساوی به صورت زیر افراز می کنیم

$$\underset{x_0}{a}\;\underbrace{\;x_1\;\;x_2}_{1}\;\underbrace{\;x_3\;\;x_4}_{2}\;\dots\;\underbrace{x_{n-2}\;\;x_{n-1}\;\;x_n}_{m}\;b \qquad h=\frac{b-a}{n}$$

Subject: Date: / /

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx$$

با بکارگیری روش سیمپسون در محاسبه هر کدام از انتگرال ها خواهیم داشت:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + f_2\right] + \frac{h}{3}\left[f_2 + 4f_3 + f_4\right] + \cdots + \frac{h}{3}\left[f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\right]$$

$$f_{n-2} \to f_{2m-2}, \quad f_{n-1} \to f_{2m-1}, \quad f_n \to f_{2m}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\left[f_0 + f_n + 4\sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{n} f_{2i}\right] = S(h)$$

مثال: مطلوب است محاسبه ی $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$ با سیمپسون $h=0/25$

x_i	f_i
$x_0 = 0$	1
$x_1 = 0/25$	0/9846
$x_2 = 0/5$	0/888
$x_3 = 0/75$	0/7032
$x_4 = 1$	0/5

$$S(0/25) = \frac{0/25}{3}\left[1 + 0/5 + 4(0/9846 + 0/7032) + 2 \times 0/888\right] = 0/8354$$

تمرین: مطلوب است محاسبه ی $\int_1^2 \sin^2 x\,dx$

الف) سیمپسون $h = 0/25$ ب) ذوزنقه $h = 0/25$ ج) حداکثر خطای سیمپسون را بیابید.

خطای سیمپسون مرکب:

$$E_S(h) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(c_1) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(c_2) - \cdots - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(c_m)$$

$$= -\frac{h^5}{90}\underbrace{\left(f^{(4)}(c_1) + \cdots + f^{(4)}(c_m)\right)}_{m f^{(4)}(c)} \qquad a<c<b$$

از طرفی: $h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2m}$ $\quad a<c<b$

$$\boxed{E_S(h) = \frac{-(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(c)}$$

نکته: اگر $|f^{(4)}(x)| < M$ آن گاه $|E_S(h)| \leq \frac{(b-a)h^4}{180} M$

مثال: $\int_0^1 \sin 2x\,dx$ را به گونه ای بیابید که خطای کمتر از 10^{-4} باشد. $\varepsilon = 10^{-4}$

$f = \sin 2x \quad f' = 2\cos 2x \quad f'' = -4\sin 2x \quad f^{(4)} = 16\sin 2x$

$f''' = -8\cos 2x \quad |f^{(4)}(x)| \leq 16 = M$

KAVOSH

Subject: Date: / /

$$|E_S(h)| \leq \frac{(1-0)h^4}{180} \times 16 = \frac{16}{180} h^4$$

$$\frac{16}{180} h^4 \leq \varepsilon = 10^{-4} \quad h^4 \leq \frac{180 \times 10^{-4}}{16} = 0/0011 \quad h \leq 0/57$$

$$h = \frac{b-a}{2m} \leq 0/57 \Rightarrow \frac{1}{2m} \leq 0/57 \Rightarrow 2m \geq \frac{1}{0/57} \Rightarrow m \geq \frac{1}{2 \times 0/57} \Rightarrow$$
$$m \geq 0/877 \Rightarrow m_{min} = 1$$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \simeq T(0/5) = \left[1 + 2\left(\frac{\sin 0/5}{0/5}\right) + \frac{\sin 1}{1}\right]$$ برخی موارد مقادیر تابع را بدست آوردیم.

روش نیوتن کاتس - باز:

برای محاسبه‌ی $\int_a^b f(x)\,dx$ بازه‌ی a و b را به صورت زیر با فاصله‌های مساوی افراز می‌کنیم.

$a = x_{-1}$, x_0, x_1, x_n, $b = x_{n+1}$

$$x_0 = a+h \quad x_1 = x_0 + h \quad \dots \quad x_n = b-h \quad h = \frac{b-a}{n+2}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq w_0 f_0 + w_1 f_1 + \dots + w_n f_n \qquad w_i = \int_a^b L_i(x)\,dx$$

$n=0$: a, x_0, b

$$x_0 = a + h = b - h \qquad h = \frac{b-a}{2}$$

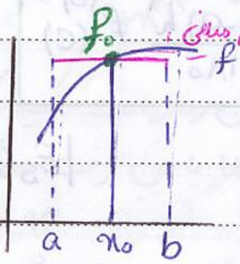
$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq w_0 f_0 \qquad w_0 = \int_a^b L_0(x)\,dx = \int_a^b dx = b-a$$

$$\int_a^b f(x) \simeq (b-a) f_0 = 2h f_0 = M(h)$$ میانی

فرمول نقطه‌ی میانی.

خطای روش نقطه میانی:

$$E_M(h) = \int_a^b \frac{(x-x_0)}{1!} f''(c)\,dx \qquad \boxed{E_M(h) = \frac{h^3}{24} f''(c)}$$



به دنبال تابعی هستیم که در این جا به شود.

مثال: مطلوب است محاسبه‌ی انتگرال $\int_0^{0/5} (1+\sin x)\,dx$ الف) روش ذوزنقه ب) خطای میانی

KAVOSH

Subject: Date: / /

الف)

$$\int_0^{0.5}(1+\sin x)\,dx$$

x_i	f_i
0	1
0.5	1.479

$$T(0.5)=\frac{0.5}{2}[1+1.479]=0.619$$

ب)

x_i	f_i
0.25	1.2474

$$M(0.25)=2\times 0.25[1.2474]=0.6237$$

$$\int_0^{0.5}(1+\sin x)\,dx=x-\cos\Big|_0^{0.5}=(0.5-\cos 0.5)-(0-1)=1.5-\cos 0.5=0.6224$$

تمرین: فرمول روش نیوتن کاتس با دو نقطه ای را بیابید.

a, x_0, x_1, b

مجهول w_0 و w_1

$$\int_a^b f(x)\,dx\simeq w_0f_0+w_1f_1 \qquad w_0=\int L_0(x)\,dx \qquad w_1=\int L_1(x)\,dx$$

انتگرال گیری گاوس:

یادآوری: روش ذوزنقه

$$\int_a^b f(x)\,dx\simeq\frac{h}{2}[f_0+f_1] \qquad \text{خطا: } E_T(h)=-\frac{h^3}{12}f''(c)$$

روش سیمسون:

$$\int_a^b f(x)\,dx\simeq\frac{h}{3}[f_0+4f_1+f_2] \qquad \text{خطا: } E_S(h)=-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(c) \qquad a<c<b$$

ملاحظه می شود که درجه دقت ذوزنقه یک و درجه دقت سیمسون ۳ است.

در روش گاوس نقاط x_0 و x_1 را در بهترین حالت انتخاب کنیم

$$\int_a^b f(x)\,dx\simeq w_0f(x_0)+\dots+w_nf_n \qquad (1)$$

فرمول کلی

در روش گاوس می خواهیم نقاط x_n و ..... و x_0, x_1 را در بازه ی a و b به گونه ای اختیار کنیم که فرمول انتگرال گیری (1) دارای درجه دقت حداکثری شود.

در روش گاوس هم نقاط و هم وزن ها مجهول اند

مسئله را در حالت خاص در نظر می گیریم

$$\boxed{\int_{-1}^{1}g(t)\,dt\simeq w_0g(t_0)+\dots+w_ng(t_n)} \qquad (2)$$

می خواهیم در این بازه نقاط t_0 تا t_n و w_0 تا w_n را به گونه ای بیابیم که فرمول انتگرال گیری دارای درجه دقت حداکثری باشد

برای یافتن t ها لازم است ابتدا چند جمله ای های لژاندر را تعریف کنیم

فرم کلی این چند جمله ای ها به صورت زیر است؛ که در آن α یک ثابت حقیقی است و مقدارش هم معلوم است.

$$P_n(t)=\alpha\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n \qquad -1\leq t\leq 1$$

KAVOSH

Subject: Date: / /

$P_0(t)=\alpha(1)=\alpha \qquad P_1(t)=\alpha\frac{d}{dt}(t^2-1)=2\alpha t$

$P_2(t)=\alpha\frac{d^2}{dt^2}(t^2-1)^2=\alpha\left[\frac{d}{dt}(2t^2-1)(2t)\right]=\boxed{4\alpha\left[3t^2-1\right]}=P_2(t)$

$P_3(t)=\alpha\frac{d^3}{dt^3}(t^2-1)^3=\alpha\frac{d^2}{dt^2}\left(3(t^2-1)(2t)\right)=6\alpha\frac{d^2}{dt^2}\left[t^5-2t^3+t\right]=6\alpha\frac{d}{dt}(5t^4-6t^2+1)$
$=6\alpha(20t^3-12t)=24(5t^3-3t)$

$P_2(t)=0\Rightarrow t=\pm\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad P_3(t)=0\Rightarrow t=0 \quad t=\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$

هر چندجمله‌ای درجه n لژاندر دقیقاً n ریشه متمایز و متقارن در بازه‌ی $[-1,1]$ دارد.

ثابت می‌شود $t_0, t_1, \dots, t_n$ که در رابطه ۲ بخواهند صدق کنند همان ریشه‌های چندجمله‌ای درجه $n+1$ لژاندر هستند. اما ریشه‌های چندجمله‌ای $n+1$ لژاندر هستند.

حالت خاص: $n=1$

$\int_{-1}^{1}g(t)dt\simeq w_0g(t_0)+w_1g(t_1) \qquad P_2(t)=0\Rightarrow t_0=-\frac{\sqrt{3}}{3} \quad t_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\int_{-1}^{1}g(t)dt\simeq w_0g\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+w_1g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \qquad g(t)=1\Rightarrow\int_{-1}^{1}dt=w_0+w_1=2$

$g(t)=t\Rightarrow\int_{-1}^{1}tdt=w_0\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+w_1\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=0 \qquad \begin{cases}w_0+w_1=2\\-w_0+w_1=0\end{cases}\Rightarrow w_0=w_1=1$

$$\boxed{\int_{-1}^{1}g(t)dt\simeq g\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}$$ فرمول دونقطه‌ای گاوس

انتگرال سه نقطه‌ای گاوس:

$\int_{-1}^{1}g(t)dt\simeq w_0g(t_0)+w_1g(t_1)+w_2g(t_2) \qquad P_3(t)=0\Rightarrow t_0=-\sqrt{\frac{3}{5}} \quad t_1=0 \quad t_2=\sqrt{\frac{3}{5}}$

$\int_{-1}^{1}g(t)dt\simeq w_0g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+w_1g(0)+w_2g\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \qquad w_0=w_2=\frac{5}{9} \quad w_1=\frac{8}{9}$

$$\boxed{\int_{-1}^{1}g(t)dt\simeq\frac{5}{9}g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+\frac{8}{9}g(0)+\frac{5}{9}g\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)}$$ فرمول سه نقطه‌ای گاوس

مثال:

$\int_{-1}^{1}\underbrace{\sin(t^2)}_{g}dt$

$\sin\left(\frac{3}{9}\right)+\sin\left(\frac{3}{9}\right)=2\sin\left(\frac{1}{3}\right)=0.6543$

KAVOSH

Subject: Date: / /

تمرین: به عنوان با فرمول سه نقطه ای گاوس مثال بالا را حل کنید.

تذکر: برای محاسبه‌ی $\int_a^b f(x)\,dx$ که a و b دلخواه هستند با استفاده از روش گاوس به صورت زیر عمل می‌کنیم

تغییر متغیر زیر را اعمال می‌کنیم

$$x=\frac{(b-a)}{2}t+\frac{b+a}{2}$$

t	x
-1	a
1	b

مثال: $\int_0^1 (2x-1)^2\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}u^2\,du$

$u=2x-1$

$du=2dx$

$$dx=\frac{b-a}{2}\,dt$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1}\underbrace{f\left(\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}\right)}_{g(t)}dt$$

برای محاسبه ۲ نقطه ای یا ۳ نقطه ای استفاده می‌کنیم از $g(t)$

مثال: با بکارگیری فرمول سه نقطه ای گاوس انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$x=\frac{1-0}{2}t+\frac{1+0}{2}=\frac{t+1}{2}$$

$$dx=\ dt$$

x	t
0	-1
1	1

$$I=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{dt}{1+\left(\frac{t+1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\left[\frac{5}{9}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{\frac{3}{5}}+1}{2}\right)^2}\right)+\frac{8}{9}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{4}}\right)+\frac{5}{9}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{\frac{3}{5}}+1}{2}\right)^2}\right)\right]=0/7873$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

انتگرال فوق را با روش سیمسون حل کنید.

$$S(0/5)=\frac{0/5}{3}\left[1+\frac{4}{1+0/25}+\frac{1}{1+1}\right]=0/78333$$

روش تحلیلی: $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{Arctan} x\Big|_0^1=\operatorname{Arctan}1=0/7853$

حل عددی معادله دیفرانسیل:

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید

مرتبه اول با مقدار اولیه
$$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$
روش های تحلیلی برای حل این معادلات بسیار پیچیده است

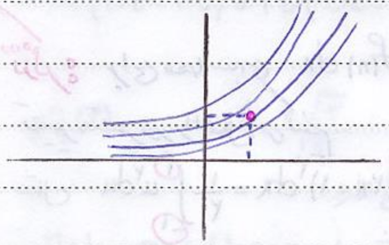
KAVOSH

Subject: Date: / /

اگر f تابع پیوسته باشد این تابع دارای جواب منحصر به فرد می باشد.

$y' = y \Rightarrow y = ce^{x}$ ⟶ بی نهایت جواب دارد

با اعمال شرط $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\quad ce^{0} = 1 \quad c = 1 \quad y = e^{x}$



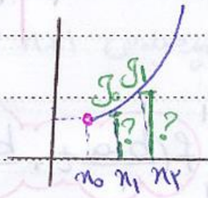
در روشهای تحلیلی تابع جواب به صورت یک فرمول بسته ارائه می شود. اما در روش های عددی مقدار تابع جواب در نقاط $x_0, x_1, \ldots$ تقریب زده می شود.

روش اویلر:

معادله ی زیر را در نظر بگیرید

$$y' = f(x, y) \qquad x_0 = a \leq x \leq b$$
$$y(x_0) = y_0$$

$$x_1 = x_0 + h$$
$$x_2 = x_1 + h$$
$$\vdots$$
$$x_{n+1} = x_n + h$$



تابع در x_1 چه قدر است؟

بسط تیلور:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$

$$y(x_1) = y(x_0) + h\, y'(x_0) + \frac{h^2}{2!} y''(x_0) + \cdots$$

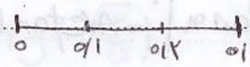
اگر h به اندازه ی کافی کوچک باشد نزدیک به صفر می توانیم از جملات شامل h^2 به بعد صرف نظر کنیم

$$y(x_1) \simeq y_0 + hf(x_0, y_0)$$

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) \qquad y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, \ldots$$

مثال: جواب معادله دیفرانسیل زیر را در ۰/۳ بیابید.

$$\begin{cases} y' = x + y & 0 < x < 1 \\ y(0) = 1 & h = 0/1 \end{cases}$$



$y_0 = 1$

$y_1 = 1 + 0/1(0 + 1) = 1/1$

$y_2 = 1/1 + 0/1(0/1 + 1/1) = 1/22$

$y_3 = 1/22 + 0/1(0/2 + 1/22) = 1/362$

x_i	y_i
۰	۱
۰/۱	۱/۱
۰/۲	۱/۲۲

KAVOSH

Subject: Date: / /

تمرین: مطلوب است y در نقطه ی 1.5 ، $h=0.25$. $y' = \sin x + \cos y$

$y(1)=0.2$ $h=0.25$ $y(1.5)=?$

اویلر پیراسته: (بهبود یافته)

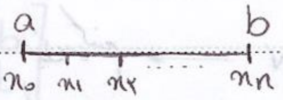
معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} y'(x)=f(x,y(x)) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases} \qquad a=x_0<x<b$$

یادآوری:

$$y_1=y_0+hf(x_0,y_0)$$

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$$



شرح روش اویلر پیراسته:

$$\begin{cases} y'(x)=f(x,y(x)) \\ y(x)=y_0 \end{cases} \xrightarrow[\text{انتگرال می گیریم}]{\text{از دو طرف معادله}} \int_{x_0}^{x_1} y'(x)\,dx=\int_{x_0}^{x_1} f(x,y(x))\,dx$$

$$y(x)\Big|_{x_0}^{x_1} = \int_{x_0}^{x_1} f(x,y(x_1))\,dx \qquad y(x_1)-y(x_0)=\int_{x_0}^{x_1} f(x,y(x))\,dx$$

انتگرال سمت راست را با استفاده از روش ذوزنقه تقریب می زنیم

$$y(x_1)=y(x_0)+\frac{h}{2}\left[f(x_0,y(x_0))+f(x_1,y(x_1))\right]$$

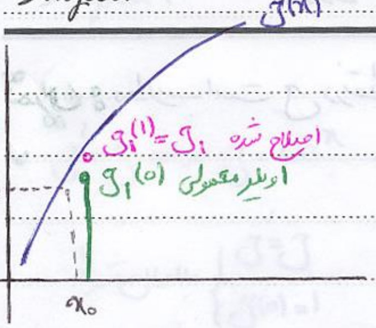
مقدار $y(x_1)$ در عبارت سمت راست را از روش اویلر معمولی محاسبه می کنیم و آن را $y_1^{(0)}$ می نامیم

$$y_1^{(0)}=y_0+hf(x_0,y_0)$$

$$y_1^{(1)}=y_0+\frac{h}{2}\left[f(x_0,y_0)+f(x_1,y_1^{(0)})\right]$$

اصلاح شده است ... جدید

KAVOSH



وقتی اختلاف‌شان کم شد یعنی رسیدیم. $y(x_1) \simeq y_1^{(1)} = y_1$

به همین ترتیب ابتدا با اویلر معمولی $y_2^{(0)}$ را می‌یابیم و سپس با اویلر اصلاح شده (پیراسته) آن را بهتر می‌کنیم و به جواب اصلی‌تر نزدیک‌تر می‌کنیم و این عملیات را برای گام‌های بعدی ادامه می‌دهیم.

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید. با به کارگیری روش اویلر اصلاح شده تقریبی از جواب معادله در ۱.۵ بیابید.

$$\begin{cases} y' = x^2 + 3y \\ y(1) = -1 \\ x = 1.5 \quad h = 0.25 \end{cases}$$

اول باید اویلر معمولی را برویم:

1   1.25   1.5

x_i	y_i
$x_0 = 1$	$y_0 = -1$
$x_1 = 1.25$	$y_1 = -1.617$ → قبول می‌کنیم
$x_2 = 1.5$	$y_2 =$

$$y_1^{(0)} = -1 + 0.25\,(1 + 3(-1)) = -1.5$$

$$y_1^{(1)} = -1 + \frac{0.25}{2}\left[\overbrace{(1 + 3(-1))}^{-2} + \overbrace{(1.25^2 + 3(-1.5))}^{-2.937}\right] = -1.617$$

اویلر معمولی

$$y_2^{(0)} = -1.617 + 0.25\left[\overbrace{(1.25^2 + 3(-1.617))}^{-3.851}\right] = -2.189$$

اصلاح شده

$$y_2^{(1)} = -1.617 + \frac{0.25}{2}\left[\underbrace{(1.25^2 + 3(-1.617))}_{f(x_0, y_0)} + \underbrace{(1.5^2 + 3(-2.189))}_{f(x_1, y_1)}\right] =$$

فرمول رانگ ـ کوتا:

مرتبه دوم R.K.2 یا R-K-2

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$$

$$K_1 = hf(x_n, y_n) \qquad K_2 = hf(x_{n+1}, y_n + K_1)$$

مثال: با به کارگیری روش رانگ ـ کوتاه مرتبه دو تقریبی از روش معادله دیفرانسیل زیر بیابید.

$$\begin{cases} y' = \sin(x) + \cos(y) \\ y(0) = 1 \qquad h = 0.2 \quad x = 0.2 \end{cases}$$

یک گام می‌شود.

Subject: Date: / /

$K_1 = 0/2(\sin(0) + \cos(1)) = 0/108$

$K_2 = 0/2(\sin(0/2) + \cos(1 + 0/108)) = 0/1485$

$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$

$= 1 + \frac{1}{2}(0/108 + 0/1485) = 1/296$

حل دستگاه خطی: $Ax = b$

A ماتریس $n\times n$ معلوم ، b بردار $n\times 1$ معلوم

دستگاه زیر را درنظر بگیرید

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

اگر A بالا مثلثی یا پایین مثلثی باشد حل دستگاه بصورت پیش رو یا پس رو به سادگی انجام می‌شود.

- اگر A پایین مثلثی باشد:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots \\ a_{n1} & & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

سطر اول $R_1: a_{11}x_1 = b_1 \Rightarrow x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} \qquad a_{11} \neq 0$

سطر دوم $R_2: a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{a_{11}}(b_2 - a_{21}x_1)$

سطر iام $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ii}x_i = b_i$

فرمول پیشرو

$$\boxed{x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} \qquad x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j\right) \qquad i = 2, 3, \ldots, n}$$

- اگر A بالا مثلثی باشد

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} \cdots & a_{3n} \\ \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

KAVOSH

Subject: Date: / /

$$R_n: a_{nn}x_n = b_n \Rightarrow x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$R_{n-1}: a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \Rightarrow x_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1,n-1}}\left(b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n\right)$$

$$R_i: a_{ii} + a_{i,i+1}x_{i+1} + \dots + a_{i,n}x_n = b_i$$

$$\boxed{x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right) \quad i = n-1, n-2, \dots, 1}$$

فرمول پسرو

اعمال سطری مقدماتی:

اعمال زیر به اعمال سطری مقدماتی معروف اند:

۱. تعویض دو سطر هیچ تأثیری در حل معادله ندارد. $R_i \longleftrightarrow R_j$

۲. ضرب یک سطر در یک عدد ثابت K. $KR_i \longrightarrow R_i$

۳. سطر iام + K برابر سطر jام $R_i + KR_j \longrightarrow R_i$

نکته: اگر اعمال سطری مقدماتی را روی ماتریس A و همزمان روی بردار سمت راست انجام دهیم دستگاه $Ax=b$ تبدیل به دستگاه $Bx=C$ خواهد شد که این دو دستگاه معادل اند. بنابراین با اعمال سطری مقدماتی می‌توانیم ماتریس A را به یک ماتریس بالا مثلثی یا پایین مثلثی تبدیل کنیم که با دستگاه اصلی معادل است. این دستگاه بالا مثلثی یا پایین مثلثی را حل می‌کنیم روش حذفی گوس گویند.

مثال: دستگاه زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 7 \end{array}\right]$$

ماتریس افزوده

عنصر لولا که فرض می‌شود غیر صفر است

فرض می‌کنیم که a_{11} مخالف صفر است.

$R_2 - \frac{4}{2}R_1$ و $R_3 - \frac{3}{2}R_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0.5 & 5.5 & 5.5 \end{array}\right]$$

$3 - \frac{3}{2}(2) = 0$

$2 - \frac{3}{2}(1) = 0.5$

$4 - \frac{3}{2}(-1) = 5.5$

$7 - \frac{3}{2}(1) = 5.5$

KAVOSH

Subject: Date: / /

$R_3 + \frac{0.5}{1} R_2$

$R_3 + 0.5 R_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 7.5 & 7.5 \end{array}\right]$$

$0.5 - 0.5(1) = 0$

$5.5 + 0.5(4) = 7.5$

$5.5 + 0.5(4) = 7.5$

$+7.5 x_3 = 7.5 \Rightarrow \boxed{x_3 = 1}$

$-x_2 + 4x_3 = 4 \Rightarrow x_2 = 0$

$2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \Rightarrow 2x_1 = 1 - 0 + 1 \Rightarrow \boxed{x_1 = 1}$

تعریف: ماتریس مربعی A را قطر غالب سطری گویند هرگاه قدر مطلق عنصر روی قطر بزرگتر از جمع قدر مطلق بقیه ی ماتریس هاست

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

این ماتریس ها معکوس پذیرند. مثل ماتریس روبه رو

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

روش های تکراری برای حل دستگاه:

دستگاه $Ax = b$ را با عملیات جبری مجاز به صورت $x = Gx + h$ تبدیل می‌کنیم که در آن G یک ماتریس $n \times n$ و h یک بردار است.

$Ax = b$

$x = Gx + h$

مثال:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 4x + 5y - 2z = 2 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{4}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{G} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} \\ 3 \end{bmatrix}}_{h}$$

$x^{(1)} = -\frac{3}{2} y^{(0)} - \frac{1}{2} z^{(0)} + \frac{1}{2}$

$y^{(1)} = -\frac{4}{5} x^{(0)} + \frac{2}{5} z^{(0)} + \frac{2}{5}$

$z^{(1)} = -x^{(0)} + y^{(0)} + 3$

* اگر A قطر غالب سطری باشد آنگاه روش تکراری فوق همگرا است

مقدار اولیه دلخواه برای x در نظر می‌گیریم و آن را $x^{(0)}$ می‌نامیم:

$x^{(1)} = Gx^{(0)} + h$

$x^{(2)} = Gx^{(1)} + h$

$\vdots$

$x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + h$

KAVOSH

$\rightarrow x^{(k)} = x$

Subject: Date: / /

تحت شرایط مناسب این دنباله به سمت x که جواب معادله است همگراست.

مثال: دستگاه زیر را با روش تکراری حل کنید.

$$\begin{cases} 4x - y + 2z = 1 & \longrightarrow x \\ x + 3y + z = 4 & \longrightarrow y \\ x - y + 4z = 3 & \longrightarrow z \end{cases}$$

قطر غالب است

$$x = \frac{1}{4}y - \frac{2}{4}z + \frac{1}{4} = \frac{y - 2z + 1}{4}$$

$$y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}z + \frac{4}{3} = \frac{-x - z + 4}{3}$$

$$z = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{3}{4} = \frac{-x + y + 3}{4}$$

K	$x^{(K)}$	$y^{(K)}$	$z^{(K)}$
۰	۰	۰	۰
۱	۰/۱۲۵	۱/۳۳۳	۰/۷۵
۲	۰/۱۲۰۸	۱	۱/۰۲
۳	-۰/۰۱	۰/۸۲۴	۰/۹۴۸
⋮	⋮	⋮	⋮

روش فوق را روش ژاکوبی گویند.

روش گاوس - سایدل

این روش همان روش ژاکوبی است با این تفاوت که در هر مرحله از جدیدترین مقادیر داده‌ها استفاده می‌شود.

روش گاوس - سایدل معمولاً سریعتر از روش ژاکوبی است.

در مثال فوق:

$$\begin{cases} x^{(1)} = \frac{1}{4}y^{(0)} - \frac{2}{4}z^{(0)} + \frac{1}{4} \\ y^{(1)} = -\frac{1}{3}x^{(1)} - \frac{1}{3}z^{(0)} + \frac{4}{3} \\ z^{(1)} = -\frac{1}{4}x^{(1)} + \frac{1}{4}y^{(1)} + \frac{3}{4} \end{cases}$$

حل دستگاه با روش LR:

فرض کنید A یک ماتریس معکوس پذیر است. می‌خواهیم ماتریس A را به صورت حاصلضرب یک ماتریس پایین مثلثی L و یک ماتریس بالا مثلثی R بنویسیم.

$A = LR$

یک معادله‌ای که ماتریس ضرایب بالا مثلثی است

$Ax = b$

با حل دستگاه ۲ که ماتریس ضرایب پایین مثلثی دارد Z به دست می‌آید

$L\underbrace{Rx}_{Z} = b$ ①

قرار می‌دهیم $Rx = Z$

$LZ = b$ ②

یک دستگاه داریم که بالا مثلثی است با حل دستگاه بالا مثلثی x به دست می‌آید

Subject: Date: / /

روش تجزیه LR ... روش دولیتل

$$A=\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & & & 1 \end{bmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & & r_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & 0 & r_{nn} \end{bmatrix}}_{R}$$

عناصر روی قطر را معلوم و برابر یک می‌گذاریم. بقیه‌ی عناصر هم مجهول اند.

سطر اول R

$$\left.\begin{aligned} a_{11}&=r_{11} \\ a_{12}&=r_{12} \\ &\vdots \\ a_{1n}&=r_{1n} \end{aligned}\right\} r_{1j}=a_{1j} \qquad j=1,2,\dots,n$$

ستون اول L ... ، ... سطر دوم R

$$\left.\begin{aligned} a_{21}&=l_{21}r_{11} \Longrightarrow l_{21}=\frac{a_{21}}{r_{11}} \\ a_{31}&=l_{31}r_{11} \Longrightarrow l_{31}=\frac{a_{31}}{r_{11}} \\ &\vdots \\ a_{n1}&=l_{n1}r_{11} \Longrightarrow l_{n1}=\frac{a_{n1}}{r_{11}} \end{aligned}\right\}$$

سطر دوم A

$$\left.\begin{aligned} a_{22}&=l_{21}r_{12}+r_{22} \\ a_{23}&=l_{21}r_{13}+r_{23} \\ a_{24}&=l_{21}r_{14}+r_{24} \\ &\vdots \\ a_{2n}&=l_{21}r_{1n}+r_{2n} \end{aligned}\right\} r_{2j}=a_{2j}-l_{21}r_{1j} \qquad j=2,3,\dots,n$$

ستون دوم A را در نظر می‌گیریم. با توجه به سطر دوم A سطر دوم R به دست می‌آید.

ستون دوم L

ستون دوم A

$$\left.\begin{aligned} a_{32}&=l_{31}r_{12}+l_{32}r_{22} \\ a_{42}&=l_{41}r_{12}+l_{42}r_{22} \\ &\vdots \\ a_{n2}&=l_{n1}r_{12}+l_{n2}r_{22} \end{aligned}\right\} l_{i2}=\frac{a_{i2}-l_{i1}r_{12}}{r_{22}} \qquad i=3,4,\dots,n$$

با توجه به ستون دوم A ستون دوم L به دست می‌آید.

سطر سوم R

سطر سوم A

$$\left.\begin{aligned} a_{33}&=l_{31}r_{13}+l_{32}r_{23}+r_{33} \\ a_{34}&=l_{31}r_{14}+l_{32}r_{24}+r_{34} \\ &\vdots \\ a_{3n}&=l_{31}r_{1n}+l_{32}r_{2n}+r_{3n} \end{aligned}\right\} r_{3j}=a_{3j}-(l_{31}r_{1j}+l_{32}r_{2j})=a_{3j}-\sum_{k=1}^{2}l_{3k}r_{kj} \qquad j=3,4,\dots,n$$

ستون سوم L

ستون سوم A

$$\left.\begin{aligned} a_{43}&=l_{41}r_{13}+l_{42}r_{23}+l_{43}r_{33} \\ a_{53}&=l_{51}r_{13}+l_{52}r_{23}+l_{53}r_{33} \\ &\vdots \\ a_{n3}&=l_{n1}r_{13}+l_{n2}r_{23}+l_{n3}r_{33} \end{aligned}\right\} l_{i3}=\frac{a_{i3}-(l_{i1}r_{13}+l_{i2}r_{23})}{r_{33}}=\frac{a_{i3}-\sum_{k=1}^{2}l_{ik}r_{k3}}{r_{33}}$$

KAVOSH

Subject: Date: / /

بطور کلی از فرمول زیر برای بدست آوردن ها و ها جواب می‌کنیم

R ام i سطر: $r_{ij}=a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}r_{kj}$ $j=i,i+1,\dots,n$

R ام j ستون: $L_{ij}=\dfrac{a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1} L_{ik}r_{kj}}{r_{jj}}$ $i,j\neq 1$ بجز سطر اول

مثال: دستگاه زیر را در نظر بگیرید با استفاده از تجزیه LA جواب معادله را بیابید.

$$\begin{cases} 4x-y+z=5 \\ x+3y-z=0 \\ 2x-y+4z=6 \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21}\to 0/25 & 1 & 0 \\ L_{31}\to 0/5 & L_{32}\to -0/46 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_{11}\to 4 & r_{12}\to -1 & r_{13}\to 1 \\ 0 & r_{22}\to 3/25 & r_{23}\to -1/25 \\ 0 & 0 & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{matrix} 4=r_{11} \\ -1=r_{12} \\ 1=r_{13} \end{matrix}}$$

$1=L_{21}r_{11}\Rightarrow L_{21}=\frac{1}{4}$ $L_{21}=\frac{a_{21}}{r_{11}}$

$2=L_{31}r_{11}\Rightarrow L_{31}=\frac{2}{4}$ $L_{31}=\frac{a_{31}}{r_{11}}$

سطر از سمت راست و ستون از سمت چپ:

$3=0/25\times -1+r_{22}\Rightarrow r_{22}=3/25$ $r_{22}=a_{22}-L_{21}r_{12}$

$-1=0/25\times 1+r_{23}\Rightarrow r_{23}=-1/25$ $r_{23}=a_{23}-L_{21}r_{13}$

$-1-0/25\times 1$

سطر سوم ستون دوم:

$-1=0/5\times(-1)+L_{32}\times 3/25\Rightarrow L_{32}=\frac{-0/5}{3/25}=-0/46$

$4=0/5\times 1+(-0/46)\times(-1/25)+r_{33}\Rightarrow r_{33}=3/38$

$Ax=b$ $LAx=b$ $Rx=Z$ $LZ=b$

معادله را حل کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0/25 & 1 & 0 \\ 0/5 & -0/46 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$Z_1=5$

$0/25Z_1+Z_2=0\Rightarrow Z_2=-1/25$

$0/5Z_1-0/46Z_2+Z_3=6\Rightarrow Z_3=3$

KAVOSH

Subject: Date: / /

$$Rx=z \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 3.25 & -1.25 \\ 0 & 0 & 3.38 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1.25 \\ 3 \end{bmatrix}$$

اگر بخواهیم دستگاه‌های متفاوتی حل کنیم که سمت راست آن فقط تغییر کند بهتر است از روش LA استفاده کنیم یکبار آن را تجزیه می‌کنیم و در بقیه‌ی محاسبات از آن استفاده می‌کنیم. $Ax=b$

ماتریس مثبت معین:

ماتریس مربعی A را مثبت معین گویند هرگاه متقارن باشند و $\underbrace{x^tAx>0}$ باشد (مثبت شود) $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$x\neq 0$ همیشه یک عدد حقیقی و همیشه یک عدد است

مثال: نشان دهید A یک ماتریس مثبت معین است $A=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$x=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad x^tAx=[x,y]\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$=[4x+y,\ x+3y]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=4x^2+xy+xy+3y^2$$
$$=3x^2+2y^2+(x^2+2xy+y^2)=3x^2+2y^2+(x+y)^2>0$$

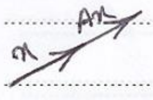
هر ماتریس مثبت معین معکوس پذیر است.

اگر A مثبت معین باشد دستگاه $Ax=b$ با روش‌های تکراری ژاکوبی و گوس ـ سایدل قابل حل است.

عناصر اصلی قطر اصلی مثبت معین همیشه مثبت اند.

ماتریس‌های کوچکتر که قطرشان منطبق بر قطر اصلی باشد اگر A مثبت معین باشد همه‌ی زیرماتریس‌های اصلی هم مثبت معین اند.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$



$Ax=\lambda x$ مقدار ویژه ماتریس‌های مثبت معین، مثبت اند. یعنی Ax هم راستای x است.

فرض کنید A یک ماتریس مثبت معین باشد و λ مقدار ویژه آن که $x\neq 0$ است

$$Ax=\lambda x$$

$$x^tAx=\lambda x^tx \qquad \underbrace{x^tAx}_{\text{مثبت}}=\lambda\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)}_{\text{مثبت}} \longrightarrow \lambda=\frac{x^tAx}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}>0$$ همواره مثبت

KAVOSH