سرفصل معادلات دیفرانسیل

عنوان

فصل اول: معادله دیفرانسیل مرتبه اول

1: ماهیت معادلات دیفرانسیل و طبقه بندی آنها

2: معادله دیفرانسیل جدا شدنی و تبدیل به آن

3: معادله دیفرانسیل همگن و تبدیل به آن

4: دسته منحنی ها و دسته منحنی های متعامد

5: معادله دیفرانسیل کامل

6:عامل انتگرال ساز

7: معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی و تبدیل به آن

فصل دوم: معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

1: معادله دیفرانسیل مرتبه دوم حالت خاص فاقد x یا y
2: معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با ضرایب ثابت همگن
3: معادله دیفرانسیل کشی-اویلر
4: معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی غیر همگن (تغییر متغیر)
5: روش ضرایب ثابت(ضرایب نامعین)

فصل سوم: حل معادله دیفرانسیل به روش سری ها

1: سری توانی
2: نقاط معمولی ومنفرد وجواب های سری معادلات دیفرانسیل
3: نقاط منفرد منظم معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم
4:حالتی که معادله شاخص دارای ریشه های برابر است

فصل چهارم:

1:توابع بسل وخواص آن

فصل پنجم:

1: دستگاه معادلات دیفرانسیل

فصل ششم: تبدیلات لاپلاس

1: تبدیل لاپلاس
2: خواص تبدیل لاپلاس
3: معکوس تبدیل لاپلاس
4: حل معادله دیفرانسیل به روش لاپلاس
5: تبدیل لاپلاس برخی توابع

ماهیت معادله دیفرانسیل وطبقه بندی آن

مقدمه: با مفهوم معادله یعنی رابطه ای که درآن تساوی باشد، آشنا هستیم. ساده ترین معادله یک مجهولی می باشد،

که بانماد نشان $f(x) = 0$ می دهیم. مثلا $ax + b = 0$ معادله یک مجهولی درجه اول و $ax^2 + bx + c = 0$ معادله یک مجهولی درجه دوم و

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

معادله یک مجهولی درجه سوم والی آخر

معادله دو مجهولی که بانماد $f\left(x,y\right)=0$ نشان می دهیم

مثلا $ax+by+c=0$ معادله دو مجهولی درجه اول

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

معادله دو مجهولی درجه دوم والی اخر

درمورد معادله دونوع سوال قابل طرح می باشد:

الف) آیا x_0 جواب معادله $f\left(x\right)=0$ می باشد؟

آیا جفت $\left(x_0,y_0\right)$ جواب معادله $f\left(x,y\right)=0$ می باشد؟

ب) جواب معادله راپیدا کنید؟

جواب دادن به سوال الف) ساده می با شد زیرا با جایگذاری می توان مشخص کرد. ولی جواب دادن به سوال ب) مشکل می باشد. ابتدا باید معادلات را دسته بندی کرده وبرای هر نوع روش خاصی راارائه داده بعبارت دیگر برای حل معادله باید دو مرحله را مشخص کنیم:

1) **مرحله شناخت**

2) **مرحله حل(روش حل)**

حال اگر درمعادله $f(x, y) = 0$ متغیر x رابعنوان متغیر

مستقل و y را بعنوان متغیر وابسته درنظر بگیریم آن گاه

x تابعی از y می باشد و می توان درمورد مشتق تابع

صحبت کرد یعنی :

$$y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = y^{(2)}, \quad \dots \quad , y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

تعریف : معادله ای که شامل ترکیباتی از x (متغیر مستقل) و y (متغیر وابسته) و مشتقات آن باشد را معادله دیفرانسیل نامیم وبا نماد

$$f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

نشان می دهیم

درمورد معادله دیفرانسیل نیز می توان دو سوال طرح کرد:

الف) آیا تابع $f(x, y) = 0$ جواب معادله دیفرانسیل می باشد؟

ب) جواب های معادله دیفرانسیل را پیدا کنید؟

جواب دادن به سوال الف) ساده است (با جایگذاری) مثلا آیاتابع

$y = e^{2x}$ جواب معادله $y'' - 5y' + 6y = 0$ میباشد؟

جواب دادن به سوال ب) مشکل می باشد وبستگی به نوع معادله وطبقه بندی آن دارد. باتعریف مرتبه ودرجه معادله دیفرانسیل به سراغ سوال ب) می رویم.

تعریف: بیشترین تکرار مشتق در هر معادله را مرتبه آن وتوان بیشترین تکرار مشتق را درجه معادله دیفرانسیل نامیم .

مثلا :

1)معادله $(y')^3 + y^4 = x^5$

مرتبه اول ، درجه سوم می باشد.

2) معادله $\frac{d^3y}{dx^3} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = x$

مرتبه سوم ، درجه اول می باشد.

3) معادله $y^{(2)} + y^{(3)} = y^4$

مرتبه سوم ، درجه اول می باشد .

معادله دیفرانسیل جدا شدنی

مشابه معادله معمولی باتوجه به تعریف مرتبه ودرجه معادله دیفرانسیل می توان آنها راطبقه بندی کرد. بنابراین ساده ترین معادله دیفرانسیل مرتبه اول بصورت $f(x, y, y') = 0$ می باشد که اگر توان y' برابربایک باشد آنگاه معادله مرتبه اول درجه اول می باشد که مرتبه اول درجه اول

بصورت کلی

$$y' = \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = F(x, y)$$

می باشد

تعریف: معادله دیفرانسیل مرتبه اول درجه اول به صورت

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}$$

را معادله جدا شدنی نامیم (مرحله شناخت). هر معادله مرتبه اول درجه اول جداشدنی را اختصارا معادله جداشدنی (جدایی پذیر)نامیم. هر معادله جدا شدنی را می توان بصورت کلی

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

تبدیل کرد.

حل معادله دیفرانسیل جداشدنی: با انتگرالگیری از معادله جداشدنی

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

می توان جواب آنرا محاسبه کرد.

تذکر: هدف از حل معادله دیفرانسیل محاسبه جواب عمومی معادله دیفرانسیل می باشد. جوابی را جواب عمومی نامیم هرگاه تعداد پارامترها به تعداد مرتبه معادله دیفرانسیل باشد که بعدا آنرا دقیقا تعریف خواهیم کرد.

مثال : معادله $y' = \frac{x^2 + x}{y^2 - y}$ را حل می کنیم.

حل :داریم

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + x}{y^2 - y}$$

آن گاه

$$\left(x^2 + x\right)dx + \left(y - y^2\right)dy = 0$$

درنتیجه $\int \left(x^2 + x\right)dx + \int \left(y - y^2\right)dy = \int 0$ ویا

$$\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 = 0$$

جواب (عمومی)معادله است .

معادله دیفرانسیل مرتبه اول درجه اول ممکن است به ظاهر جداشدنی نباشد ولی با تقسیم برعباراتی می توان آن را تبدیل به جدا شدنی نمود.

مثال: معادله $(y+1)(x^2+1)dx+(x+1)(y^2+1)dy=0$

به ظاهر جدا شدنی نیست، ولی با تقسیم برحاصلضرب عبارات اضافی $(x+1)(y+1)$ داریم: $\frac{x^2+1}{x+1}dx+\frac{y^2+1}{y+1}dy=0$

که جدا شدنی است پس با انتگرال داریم :

$$\frac{1}{2}x^2-x+2\ln(x+1)+\frac{1}{2}y^2-y+2\ln(y+1)=c$$

جواب معادله است .

معادله دیفرانسیل همگن

ملاحظه شد معادله مرتبه اول درجه اول بصورت

$$y' = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$$

ویا به صورت

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

می باشد

مثلا معادلات

$$y' = \frac{x^2 + y}{y^2 + x} , y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

معادلات مرتبه اول درجه اول می باشند که هیچکدام جدا شدنی نیستند ولی معادله اولی دارای خاصیتی می باشد که معادله دومی نیست. درمعادله دیفرانسیل اول تمام جملات توابع

$$z = g(x, y)\ ,\ z = f(x, y)$$

از توان یکسان دو می باشد ولی معادله دومی چنین نیست. این مفهوم رابانماد ریاضی تعریف می کنیم.

تعریف : تابع دو متغیره $z = f(x, y)$

را تابع همگن از درجه n نامیم هرگاه درشرط زیر صدق کند:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

تابع $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ تابع همگن ازدرجه دو می باشد

تابع

$$f(x, y) = xe^{\frac{y}{x}} + y\sin\frac{y}{x}$$

تابع همگن از درجه یک می باشد.

تعریف: معادله دیفرانسیل

$$y' = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$$

را معادله همگن نامیم هر گاه توابع دو متغیره g, f

توابع همگن از درجه یکسان باشند. بعبارت دیگر معادله دیفرانسیل

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

را معادله همگن نامیم هر گاه توابع دو متغیره M, N توابع همگن از درجه یکسان باشند.

حل معادله دیفرانسیل همگن: فرض کنیم معادله $y' = \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$

همگن باشد. بافرض تغییر متغیر $v = \dfrac{y}{x}$ داریم $y = vx$ پس

$$y' = v'x + v$$

آن گاه با جایگذاری درمعادله نتیجه می شود که

$$v'x = \frac{f(1,v)}{g(1,v)} - v \Rightarrow \frac{dv}{dx}x = \frac{f(1,v)}{g(1,v)} - v = f(v) \Rightarrow \frac{dv}{f(v)} = \frac{dx}{x}$$

که معادله اخیر جدا شدنی است می توان آنرا به روش جدا شدنی حل کرد وبا جایگذاری

$$v = \frac{y}{x}$$

جواب معادله دیفرانسیل اولیه بدست می آید.

مثال: معادله دیفرانسیل همگن $\left(x^2 + y^2\right)dx + xydy = 0$

را حل می کنیم باجایگذاری $dy = vdx + xdv$ و $y = vx$

داریم:

$$\left(x^2 + v^2x^2\right)dx + xvx\left(vdx + xdv\right) = 0$$

$$\left(x^2 + v^2x^2 + v^2x^2\right)dx + x^3vdv = 0$$

$$x^2\left(1 + 2v^2\right)dx + x^3vdv = 0$$

$$\left(1 + 2v^2\right)dx + xvdv = 0$$

با تقسیم برحاصلضرب عبارات اضافی $x\left(1 + 2v^2\right)$

داریم:

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{v}{1 + 2v^2}dv = \int 0$$

$$\ln x + \frac{1}{2}\ln(1+2v^2) = \ln c$$

تذکر: برای ساده کردن به جای c معمولا $\ln c$ را بعنوان پارامتر ثابت اختیار می کنیم.

$$\ln x(1+2v^2)^{\frac{1}{2}} = \ln c$$

$$x\sqrt{(1+2v^2)} = c$$

$$x\sqrt{(1+\frac{2y^2}{x^2})} = c$$

جواب معادله دیفرانسیل می باشد.

دسته منحنی ها ودسته منحنی های متعامد

ملاحظه شد که جواب عمومی هر معادله دیفرانسیل مرتبه اول معمولا شامل یک ثابت اختیاری موسوم به پارامتر است. وقتی مقادیر مختلفی به این پارامتر نسبت داده می شود، یک دسته منحنی به دست می آید هر یک از این منحنی ها یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل مفروض است وهمه آنها با هم جواب عمومی آن را تشکیل می دهند. بنابراین معادله

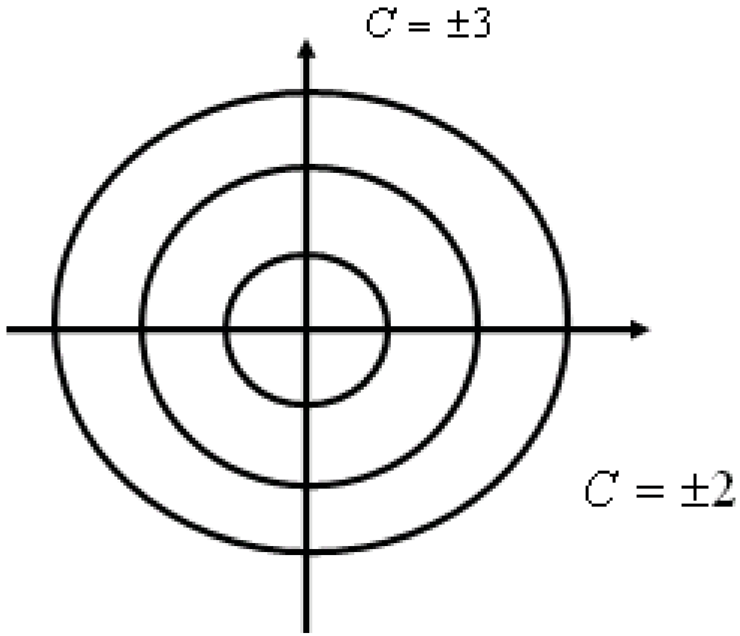
$$f(x, y, c) = 0$$

جواب عمومی آن را تشکیل می دهند. بنابراین معادله

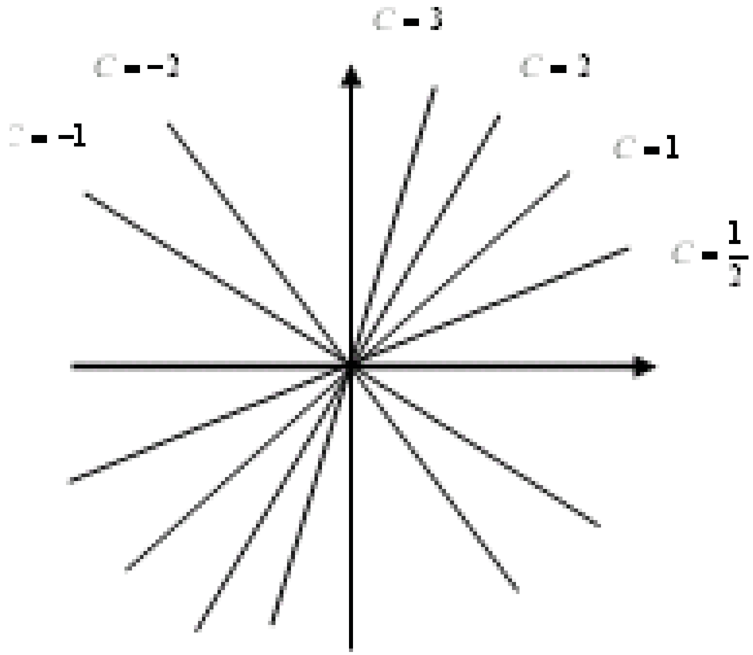
$$f(x, y, c) = 0$$

یک دسته منحنی می باشد .

حال می خواهیم دسته منحنی های متعامد بریک دسته منحنی مفروض رابااستفاده از معادله دیفرانسیل بدست آوریم که کاربردی از معادله دیفرانسیل می باشد. بعنوان مثال تعدادی دسته منحنی رادر زیر رسم می کنیم :



الف) $X^2 + Y^2 = C^2$



ب) $Y = CX$

حال با توجه به مطالب بالا وبا استفاده از روند زیر می توان دسته منحنی های متعامد بریک دسته منحنی ها را پیدا کرد :

$$f(x,y,c)=0 \rightarrow$$

معادله دسته منحنی ها

$$f(x,y,y')=0 \xrightarrow{y'=-\frac{1}{y'}} f\left(x,y,-\frac{1}{y'}\right)=0 \rightarrow g(x,y,c)=0$$

معادله دیفرانسیل دسته منحنی ها

معادله دیفرانسیل دسته منحنی های متعامد

دسته منحنی های متعامد

مثال : دسته منحنی های متعامد بردسته منحنی های دوایر به مرکز مبدا وشعاع دلخواه رابدست می آوریم:

$$x^2 + y^2 = c^2 \qquad \rightarrow 2x + 2yy' = 0 \Rightarrow x + yy' = 0$$

مشتق

$$\xrightarrow{y' \rightarrow -\frac{1}{y'}} x + y\left(-\frac{1}{y'}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{y}{y'} \Rightarrow xy' = y$$

$$x\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y = \ln x + \ln c$$

$$\Rightarrow \ln y = \ln cx \Rightarrow y = cx$$

دسته منحنی های متعامد

اغلب مناسب است که دسته منحنی های داده شده را برحسب مختصات قطبی بیان کنیم دراین حالت از این موضوع استفاده می کنیم که اگر φ زاویه بین شعاع حامل وخط مماس باشد آن گاه $\tan\varphi = \dfrac{rd\theta}{dr}$ (ریاضی عمومی). با استفاده بحث بالا برای یافتن دسته منحنی های متعامد درمعادله دیفرانسیل دسته منحنی داده شده به جای عبارت $\dfrac{rd\theta}{dr}$ منفی عکس آن یعنی $-\dfrac{dr}{rd\theta}$ را جایگذاری می کنیم.

مثال : دسته منحنی های متعامد بردسته منحنی های

$$x^2 + y^2 = 2cx$$

را درمختصات قطبی بدست می آوریم. معادله دسته منحنی ها

در مختصات قطبی عبارت است از : $r = 2c\cos\theta$

بنابراین : $-\dfrac{dr}{d\theta} = -2c\sin\theta$

که با حذف c داریم:

$$-\frac{dr}{d\theta} = \left(\frac{r}{\cos\theta}\right)\sin\theta$$

ویا

$$\frac{rd\theta}{dr} = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

که با جایگذاری $-\dfrac{dr}{rd\theta}$ به $\dfrac{rd\theta}{dr}$ داریم:

$$-\frac{dr}{rd\theta} = -r\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \Rightarrow \int \frac{dr}{r} = \int \frac{\cos\theta}{\sin\theta} d\theta$$

$$\ln r = \ln \sin\theta + \ln 2c \Rightarrow \ln r = \ln 2c\sin\theta \Rightarrow$$

$$r = 2c\sin\theta$$

معادله دسته منحنی های متعامد می باشد.

معادله دیفرانسیل کامل

درریاضیات عمومی با دیفرانسیل توابع دو متغیره

$$z = f(x, y)$$

آشنا شدیم وملاحظه کردیم که دیفرانسیل کامل تابع را که با نماد df نشان می دهیم عبارت است از

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

و همچنین معادله دیفرانسیل مرتبه اول درجه اول بصورت کلی $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ می باشد.

تعریف :معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$

را معادله کامل نامیم هر گاه تابع دو متغیره $z=f(x,y)$

موجود باشد بطوری که $\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$.

با توجه به تعریف بالا تعیین اینکه معادله دیفرانسیل داده شده کامل می باشد، مشکل است زیرا باید تمام توابع دو متغیره راجستجو کنیم وملاحظه کنیم که بترتیب کدام تابع دارای مشتقات جزیی نسبت به x, y برابر با توابع $M=M(x,y)$

و $N=N(x,y)$ می باشد

اگر این کار امکان پذیر باشد، مشکل است به همین دلیل شرایطی روی M, N بدست می آوریم که وجود چنین تابعی را تضمین کند. با مشتق گیری جزیی از طرفین رابطه های

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$$

به ترتیب نسبت به x, y داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

با توجه به اینکه برای توابع پیوسته داریم:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

بنابراین:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

بنابراین شرط کامل بودن معادله دیفرانسیل

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

عبارت است از :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

(مرحله شناخت).

مثال :معادلات دیفرانسیل زیر کامل می باشد.

الف)
$$(2x+y)dx+(x+3y^2)dy=0$$

زیرا

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1=\frac{\partial N}{\partial x}=1$$

ب)
$$(2xy^3+y)dx+(3x^2y^2+3y^2)dy=0$$

زیرا

$$\frac{\partial M}{\partial y}=6xy^2+1=\frac{\partial N}{\partial x}=6xy^2+1$$

حل معادله دیفرانسیل کامل:

فرض کنیم که معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ کامل باشد بنابر تعریف معادله دیفرانسیل کامل، تابعی مانند

$$z = f(x,y)$$

موجود است که:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = M(x,y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$$

پس بنابر تساوی های بالا نتیجه می شود $df = 0$

ویا $f = c$ جواب معادله دیفرانسیل می باشد .

تنها معلومات، مشتقات جزیی f می باشد که با استفاده از روند زیر می توان آنرا محاسبه کرد.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \xrightarrow{\int x} f = \int M(x, y)\,dx + \varphi(y) \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int m(x, y)\,dx + \varphi'(y)$$

آن گاه با استفاده از رابطه دوم $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$ مقدار $\varphi'(y)$ بدست می آید که با انتگرال گیری از آن مجهول f که همان $\varphi(y)$ می باشد محاسبه می شود در نتیجه f بدست می آید که $f = c$ جواب معادله دیفرانسیل است .

مثال: ملاحظه شد که معادله

$$(2x+y)dx+\left(x+3y^2\right)dy=0$$

کامل می باشد پس:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y}=2x+y \xrightarrow{\int x} f=x^2+yx+\varphi(y) \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \dfrac{\partial f}{\partial y}=x+\varphi'(y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=x+3y^2 \Rightarrow x+\varphi'(y)=x+3y^2 \Rightarrow \varphi'(y)=3y^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi(y)=y^3 \Rightarrow f=x^2+yx+y^3 \xrightarrow{df=0} x^2+yx+y^3=c$$

جواب معادله دیفرانسیل است.

عامل انتگرال ساز

معادله دیفرانسیل

$$ydx-\left(x^{2}+x\right)dy=0$$

کامل نمی باشد زیرا

$$\frac{\partial N}{\partial x}=-2x-1,\frac{\partial M}{\partial y}=1$$

ولی اگر طرفین معادله بالا را در

$$u=\frac{1}{x^{2}}$$

ضرب کنیم داریم :

$$\frac{y}{x^{2}}dx-\left(1+\frac{1}{x}\right)dy=0$$

واین معادله دیفرانسیل جدید کامل می باشد زیرا

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{1}{x^{2}},\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{1}{x^{2}}$$

و می توان به روش کامل معادله دیفرانسیل جدید را حل کرد

بنابراین ممکن است معادله دیفرانسیل کامل نباشد ولی باضرب کردن درتابع که آنرا عامل انتگرال سازگوییم تبدیل به کامل کرد. اکنون شرط وجود عامل انتگرال ساز وچگونگی محاسبه آن را بیان می کنیم. فرض کنیم که معادله

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

کامل نباشد یعنی $\dfrac{\partial M}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}$

ودارای عامل انتگرال ساز $u=u(x,y)$ باشد، آنگاه طبق تعریف عامل انتگرال ساز معادله جدید

$$uMdx+uNdy=0$$

کامل می باشد

$$u\frac{\partial M}{\partial y}+M\frac{\partial u}{\partial Y}=u\frac{\partial N}{\partial x}+N\frac{\partial u}{\partial x}$$

که محاسبه u از این معادله ممکن نیست به همین دلیل تحت شرایط خاصی عامل انتگرال ساز را بررسی می کنیم.

الف) فرض می کنیم که عامل انتگرال ساز فقط تابعی از x باشد یعنی $u=u(x)$ ، آن گاه

$$p(x)=\frac{1}{N}\left(\frac{\partial x}{\partial y}-\frac{\partial n}{\partial x}\right)dx \text{ و } u=e^{\int p(x)dx}$$

عامل انتگرال ساز می باشد.

ب) فرض می کنیم که عامل انتگرال ساز فقط تابعی از y
باشد یعنی $u = u(y)$ ، آن گاه

$$q(y) = \frac{1}{-M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \qquad u = e^{\int q(y)dy}$$

عامل انتگرال ساز می باشد

ج) فرض می کنیم که عامل انتگرال ساز فقط تابعی از xy
باشد یعنی $u = u(xy)$ ، آن گاه

$$p(z) = \frac{1}{Ny - Mx}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \qquad u = e^{\int p(z)dz}$$

د) فرض می کنیم که عامل انتگرال ساز فقط تابعی از $x+y$
باشد یعنی $u=u(x+y)$ ، آن گاه با فرض $z=x+y$
وقاعده زنجیری مشابه قسمت قبل نتیجه می شود که

$$q(z)=\frac{1}{N-M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right) \qquad u=e^{\int q(z)dz}$$

و عامل انتگرال ساز می باشد.

مثال :عامل انتگرال سازی برای معادله

$$xydx+\left(1+x^2\right)dy=0$$

را پیدا می کنیم.

حل:ابتدا مقدار مشترک $\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}=x-2x=-x$

را محاسبه می کنیم که با تقسیم بر $M-$ داریم:

$$q(z)=\frac{1}{-M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{1}{-xy}(-x)=\frac{1}{y}$$

پس $u=e^{\int\frac{1}{y}dy}=e^{\ln y}=y$ عامل انتگرال ساز

می باشد.

تذکر: گاهی معادله دیفرانسیل غیر کامل دارای عامل انتگرال سازی بصورت

$$u(x, y) = x^n y^n$$

است، که درآن n, m ثابت های مناسبی هستند

برای یافتن عامل انتگرال سازی به صورت

$$u(x, y) = x^n y^n$$

طرفین معادله را درآن ضرب می کنیم واز شرط کامل

استفاده می کنیم

تذکر: روش دسته بندی یا کوتاه، گاهی با جستجو کردن می توان معادله دیفرانسیل را به یکی از حالات زیر دسته بندی کرد:

الف) $$M(x)dx = N(y)dy$$ (جداشدنی)

ب) $$M(x)dx = d(v(x,y))$$

ج) $$d(u(x,y)) = N(y)dy$$

د) $$d(u(x,y)) = d(v(x,y))$$

که به سادگی می توان با انتگرال گیری از طرفین معادلات جواب آنها را بدست آورد .

مثال :معادله دیفرانسیل $\left(y^2 + y\right)dx - xdy = 0$ را باروش دسته بندی حل می کنیم.

حل: معادله دیفرانسیل را به صورت $y^2dx + ydx - xdy = 0$ می نویسیم که $ydx + xdy = -y^2dx$ واز فرمول 4) داریم:

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = -dx \quad , \quad \frac{ydx - xdy}{y^2} = -dx$$

که با انتگرال گیری نتیجه می شود

$$y = \frac{x}{c - x} \quad , \quad \frac{x}{y} = -x + c$$

جواب معادله دیفرانسیل می باشد.

معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی

ملاحظه شد که معادله مرتبه اول بصورت $f(x, y, y') = 0$ می باشد که اگر توان های y', y برابر با یک باشد آنرا معادله مرتبه اول خطی نامیم (معادله خط $ax + by = c$ ملاحظه شد که توان x, y برابر با یک می باشد که اگر توان یکی از x یا y به غیر یک باشد آن گاه معادله منحنی می باشد) بنابراین معادله مرتبه اول خطی به صورت

$$f_1(x)\, y' + f_2(x)\, y = f_3(x)$$

می باشد.

با تقسیم طرفین بر f_1 معادله مرتبه اول خطی بصورت کلی

$$y' + p(x)y = q(x)$$

است (مرحله شناخت) مثلا معادلات زیر مرتبه اول خطی هستند:

الف) $y' + \dfrac{1}{x}y = x^3$

ب) $y' + \dfrac{1}{x}y = e^x$

ج) $y' - 2xy = e^{x^2}$

برای حل معادله دیفرانسیل $y' + p(x)y = q(x)$

ابتدا ملاحظه می کنیم که آیا کامل است یا نه؟

$u = e^{\int p(x)dx}$ عامل انتگرال ساز معادله مرتبه اول خطی

است و

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}.q(x)dx + c\right.$$

جواب عمومی معادله مرتبه اول خطی $y' + p(x)y = q(x)$

می باشد

مثال : معادله مرتبه اول خطی $y' + \frac{1}{x} y = x^3$ را حل می کنیم.

چون $p(x) = \frac{1}{x}$ و $q(x) = x^3$ پس: $y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} [\int e^{\int \frac{1}{x} dx} . x^3 dx + c$

$$y = e^{-\ln x} [\int e^{\ln x.} . x^3 dx + c] \Rightarrow y = e^{\ln x^{-1}} [\int x . x^3 dx + c]$$

$$y = x^{-1} \left(\frac{1}{5} x^5 + c \right) \Rightarrow y = \frac{1}{5} x^4 + \frac{c}{x}$$

جواب معادله دیفرانسیل است.

حالت خاصی از معادلات مرتبه اول خطی به صورت

$$\frac{dx}{dy} + p(y)x = q(y)$$

می باشد که توان های $x, x' = \frac{dx}{dy}$ برابر با یک می باشد. با توجه به روش حل معادله مرتبه اول خطی با تعویض نقش x با y وبالعکس نتیجه می شود که

$$x = e^{-\int p(y)dy}[\int e^{\int p(y)dy}.q(y)dy + c]$$

- حالت خاصی از معادلات مرتبه اول که تبدیل به خطی می شود به صورت $y' + p(x)y = q(x)y^n$

می باشد که به ازای $n = 0$ معادله مرتبه اول خطی است وبه ازای $n = 1$ معادله جدا شدنی است وبه ازای $n \neq 0,1$ ، معادله برنولی نامیده می شود. معادله دیفرانسیل برنولی را می توان با تغییر متغیر $z = y^{1-n}$ حل کرد و دارای جواب

$$z = y^{1-n} = e^{-\int (1-n)p(x)dx}\left[\int e^{\int (1-n)p(x)dx}.(1-n)q(x)dx + c\right.$$

است.

مثال: معادله $y' + \frac{1}{x} y = x^3 y^4$ را حل می کنیم.

حل:داریم $n = 4$ و $1 - n = -3$ و $p(x) = \frac{1}{x}$ و $q(x) = x^3$

پس:

$$y^{-3} = e^{-\int (-3)\frac{1}{x}dx}[\int e^{\int (-3)\frac{1}{x}dx}.(-3)x^3 dx + c]$$

$$y^{-3} = x^3[\int x^{-3}.(-3x^3)dx + c]$$

$$y^{-3} = x^3[\int -3dx + c]$$

$$y^{-3} = x^3(-3x + c)$$

$$y^{-3} = -3x^4 + cx^3$$

جواب عمومی معادله است.

بعنوان معادله دیفرانسیل مرتبه اول می توان معادله دیفرانسیل

$$y = xy' + f(y')$$

را مطرح کرد به نام **کلرو** (Clairaut)معروف است. بسادگی ملاحظه می شود که $y = cx + f(c)$ جوابی از معادله بالامی باشد زیرا با مشتق گیری داریم $y' = c$ با جایگذاری درجواب نتیجه می شود $y = xy' + f(y')$ که معادله کلرو است. بنابراین جواب معادله کلرو با جایگذاری $c = y'$ بدست می آید.

مثال : معادله

$$y = xy' + (y')^2$$

را حل کنید.

حل: با جایگذاری $y' = c$ معادله دارای جواب

$$y = cx + c^2$$

است.

- بعنوان آخرین معادله دیفرانسیل مرتبه اول **ریکاتی** (Riccati)رابیان می کنیم که به صورت

$$y' = f(x) + g(x)y + h(x)y^2$$

با شرط $h(x) \neq 0$ می باشد برای پیدا کردن جواب عمومی معادله بالا باید جوابی خاص از آن معلوم باشد.

اگر $y = y_1(x)$ یک جواب خاص از معادله بالا باشد. جایگذاری

$y = y_1 + \dfrac{1}{u}$ و $y' = y_1' - \dfrac{u'}{u^2}$ معادله را به معادله دیفرانسیل

$$u' + [g(x) + 2h(x)y_1]u = -h(x)$$

که مرتبه اول خطی است، تبدیل می کند.

مثال: معادله $y' = x^3 + \frac{2}{x}y - \frac{1}{x}y^2$ (با $y_1 = -x^2$)
را حل می کنیم:

حل: چون $f(x) = x^3$ و $g(x) = \frac{2}{x}$ و $g(x) = \frac{2}{x}$

پس:

$$u' + [\frac{2}{x} + 2(-\frac{1}{x}).(-x^2)]u = \frac{1}{x}$$

$$u' + (\frac{2}{x} + 2x)u = \frac{1}{x}$$

بنابراین $p(x) = \frac{2}{x} + 2x$ و $q(x) = \frac{1}{x}$ پس:

$$u = e^{-(2\ln x + x^2)}[\int e^{2\ln x + x^2}\frac{1}{x}dx + c]$$

$$u = e^{-(2\ln x + x^2)}[\int e^{2\ln x + x^2}\ \frac{1}{x}dx + c]$$

$$u = e^{-2\ln x}e^{-x^2}[\int e^{2\ln x}.e^{x^2}\ \frac{1}{x}dx + c]$$

$$u = x^{-2}e^{-x^2}[\int e^{2}.e^{x^2}\ \frac{1}{x}dx + c]$$

$$u = x^{-2}e^{-x^2}[\int xe^{x^2}\ dx + c]$$

$$u = \frac{1}{2}x^{-2} + cx^{-2}e^{-x^2} = \frac{1}{2x^2} + \frac{c}{x^2e^{x^2}} = \frac{e^{x^2} + 2c}{2x^2e^{x^2}}$$

$$y = -x + \frac{2x^2e^{x^2}}{e^{x^2} + 2c}$$

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

دراین فصل معادله مرتبه دوم $f(x, y, y', y'') = 0$ را
درحالات خاص بررسی می کنیم.

معادله مرتبه دوم حالت خاص فاقد y یا x

ممکن است درمعادله ضریب x یا y برابر صفر باشد.

- معادله به صورت $f(y, y', y'') = 0$ را **مرتبه دوم فاقد** x

نامیم. مثلا $yy'' = (y')^2$ و $y'' + y = 0$
معادلات مرتبه دوم فاقد x می باشند.

- معادله به صورت $f(x, y', y'') = 0$ را **مرتبه دوم فاقد** y

نامیم. مثلا $xy'' = y'$ و $xy'' - y' = 3x^2$
معادلات مرتبه دوم فاقد y می باشند.

الف) **حل معادله** $f(x, y', y'') = 0$

با تغییر متغیر $y' = p$ می توان معادله را به معادله مرتبه اول تبدیل کرد که اگر معادله بدست آمده یکی از معادلات مرتبه اول باشد که قبلا بحث شده است می توان آنرا حل کرد

زیرا بافرض $y' = p$ داریم $y'' = \dfrac{dp}{dx}$ که با جایگذاری درمعادله نتیجه می شود

$$f(x, p, \frac{dp}{dx}) = 0$$

که معادله مرتبه اول می باشد.

ب) حل معادله $f(y, y', y'') = 0$

با تغییر متغیر $y' = p$ می توان معادله را به معادله مرتبه اول تبدیل کرد که اگر معادله بدست آمده یکی از معادلات مرتبه اول باشد که قبلا بحث شده است می توان آنرا حل کرد

زیرا بافرض $y' = p$ داریم $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$ که

با جایگذاری درمعادله نتیجه می شود

$$f(y, p, p\frac{dp}{dy}) = 0$$

که معادله مرتبه اول با فرض y متغیر مستقل و p متغیر وابسته می باشد.

مثال : معادله فاقد y ، $xy' = y'$ را باتغییر متغیر $y' = p$ حل می کنیم.

که با جایگذاری $y'' = \dfrac{dp}{dx}$ داریم:

$$x\frac{dp}{dx} = p \Rightarrow \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln p = \ln x + \ln c_1 \Rightarrow \ln p = \ln c_1 x \Rightarrow p = c_1 x \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = c_1 x \Rightarrow \int dy = \int c_1 x dx \Rightarrow y = \frac{1}{2}c\ \ x^2 + c_2$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل است.

مثال : معادله مرتبه دوم فاقد x ، $yy'' = (y')^2$ را باتغییر متغیر $y' = p$ حل می کنیم که با جایگذاری

$y'' = p\dfrac{dp}{dy}$ داریم: $yp\dfrac{dp}{dy} = p^2 \Rightarrow ydp = pdy$

$$\Rightarrow \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln p = \ln y + \ln c_1 \Rightarrow p = c_1 y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = c_1 y \Rightarrow$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int c_1 dx \Rightarrow \ln y = c_1 x + c \Rightarrow y = e^{c_1 x + c} = e^{c_1 x}.e^c$$

$$\Rightarrow y = c_2 e^{c_1 x}$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل است.

تذکر: درحل این نوع معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم، درواقع هر معادله مرتبه دوم را به دو معادله مرتبه اول تبدیل کرده وآنها را حل می کنیم.

معادله مرتبه دوم با ضرایب ثابت همگن

دراین بخش حالت خاصی از مرتبه دوم رابررسی می کنیم.
ملاحظه شد که معادله مرتبه دوم خطی بصورت کلی

$$f_1(x)y'' + f_2(x)y' + f_3(x)y = f_4(x)$$

می باشد که اگر $f_4(x)=0$ آنرا مرتبه دوم خطی همگن نامیم

اگر f_1 , f_2 , f_3 توابع ثابت باشند بعبارت دیگر مقادیر آنها اعداد ثابت باشند آن گاه معادله بصورت

$$a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0$$

می باشد که می توان آنرا بصورت ساده

$$y'' + ay' + by = 0$$

ملاحظه کرد که آنرا مرتبه دوم خطی همگن با ضرایب ثابت ، یا اختصارا با ضرایب ثابت نامیم . (مرحله شناخت)

حل معادله : $$y'' + ay' + by = 0$$

با تعریف نماد $D = \frac{d}{dx}$ داریم $y' = \frac{dy}{dx} = Dy$ و

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = D^2 y$$ که با جایگذاری درمعادله

$$y'' - ay' + by = 0$$

نتیجه می شود که :

$$(D^2 + aD - b)y = 0$$

معادله $D^2 + aD + b = 0$ را معادله کمکی (یا مفسر)نامیم
معادله کمکی، یک معادله درجه دو می باشد که ممکن است
سه حالت زیر رخ دهد:
الف) دارای دو ریشه متمایز باشد یعنی

$$D^2 + aD + b = (D - m_1)(D - m_2) = 0$$

ب) دارای ریشه مضاعف (تکراری)باشد یعنی

$$D^2 + aD + b = (D - m)(D - m) = 0$$

ج (دارای ریشه مختلط باشد یعنی

$$D^2 + aD + b = (D - (\alpha + i\beta)(D - (\alpha - i\beta) = 0$$

بنابراین معادله دیفرانسیل $(D^2 + aD - b)y = 0$ را با توجه به معادله کمکی به دو معادله مرتبه اول تبدیل کرده وآنرا حل می کنیم. بنابراین :

الف) $(D - m_1)(D - m_2) = 0$ که بافرض $(D - m_2)y = u$ داریم $(D - m_1)u = 0$ وبا حل معادله مرتبه اول $(D - m_1)u = 0$ نتیجه می شود.

$$u = c_1 e^{m_1 x}$$

که با جایگذاری درمعادله $(D - m_2)y = u$

وحل معادله خطی بالا داریم $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$

ب) اگر $(D-m)(D-m)y=0$ آن گاه مشابه قسمت الف)
نتیجه می شود که

$$y = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx}$$

جواب معادله دیفرانسیل می باشد.
ج) اگر معادله کمکی دارای دو ریشه مختلط باشد بنابر الف)
داریم :

$$y = c_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha - i\beta)x}$$

ویا

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$$

جواب معادله دیفرانسیل می باشد

مثال :معادلات

الف) $y'' - 5y' + 6y = 0$

ب) $y'' - 4y' + 4y = 0$

ج) $y'' - y' + y = 0$

معادلات مرتبه دوم با ضرایب ثابت می باشند.

حل: الف) معادله کمکی عبارت است از $D^2 - 5D + 6 = 0$
که $D = 2,3$ بنابراین: $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل است.

ب) معادله کمکی عبارت است از $D^2 - 4D + 4 = 0$ که
$D = 2,2$ بنابراین : $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل است.

ج) معادله کمکی عبارت است از $D^2 - D + 1 = 0$ که
$D = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$ بنابراین: $\alpha = \frac{1}{2}$ و $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ پس

$$y = e^{\frac{1}{2}x}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل است.

تذکر: معادله مرتبه دوم را به روش دیگرنیز می توان حل کرد که اگر $y_1 = y_1(x)$ و $y_2 = y_2(x)$ توابعی باشند که جوابی از معادله دیفرانسیل مرتبه دوم همگن، آن گاه

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

جوابی از معادله دیفرانسیل می باشد واگر y_2, y_1 توابعی مستقل خطی باشند آنگاه این جواب ، جواب عمومی معادله دیفرانسیل است ومی توان معادله دیفرانسیل مرتبه دوم را از این دیدگاه بررسی کرد .

معمولا شرایط وجود جواب معادله دیفرانسیل مرتبه دوم همگن دردرس نظریه معادلات دیفرانسیل بحث می شود وشرایطی را روی توابع بیان می کنند که وجود جواب معادله دیفرانسیل را تضمین کند که ما اینجا وارد این بحث نمی شویم.

تعریف: برای هر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ دترمینان

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)g'(x) - g(x)f'(x)$$

را رونسیکنی (Wronskian) توابع g, f می نامیم
وبا نماد

$$w(f,g) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$$

نشان می دهیم .

- ثابت می شود که رونسیکنی متحد با صفر است اگر وفقط اگر دوتابع وابسته خطی اند. بعبارت ساده تر دو تابع، وابسته خطی اند هر گاه یکی مضرب دیگری باشد، درغیر این صورت آنها را مستقل خطی می نامیم.

توجه: بسادگی ملا حظه میشود که توابع

$$y_2 = e^{m_2 x}, y_1 = e^{m_1 x}$$

با شرط $m_1 \neq m_2$ مستقل خطی اند مشا بها

$$y_2 = xe^{mx}, y_1 = e^{mx}$$

مستقل خطی اند و همچنین

$$y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x \quad \text{و} \quad y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$$

با شرط $\beta \neq 0$ مستقل خطی اند.

تذکر: نتایج بالا را برای معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت مرتبه بالانیزمی توان تعمیم کرد . یعنی اگر معادله کمکی معادله دیفرانسیل دارای ریشه های حقیقی متمایز ومضاعف ومختلط داشته باشد. آن گاه جواب معادله دیفرانسیل ترکیبی از جواب های بیان شده است.

مثال معادله دیفرانسیل $D(D-1)(D-2)^2 y = 0$

دارای معادله کمکی می باشد که ریشه های آن عبارت است از:

$$D = 0,1,2,2$$

بنابراین

$$y = c_1 e^{0x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{2x} + c_4 x e^{2x}$$

جواب معادله دیفرانسیل است .

معادله کشی-اویلر

معادله مرتبه دوم خطی همگن

$$x^2 y'' + axy' + by = 0$$

راکه درآن b, a اعداد ثا بت اند معادله کشی-اویلر(Cauchy-Euler)می نامیم.

مثال معادلات دیفرانسیل زیر معادله های کشی – اویلر می باشند.

الف) $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$

ب) $x^2 y'' + xy' - y = 0$

حل معادله کشی – اویلر $x^2y'' + axy' + by = 0$

این معادله را با تغییر متغیر $x = e^t$ می توان به معادله مرتبه دوم با ضریب ثابت تبدیل کرد زیرا :

$$xy' = \frac{dy}{dt} \quad \text{و} \quad x^2y'' = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

اگر مشتق های y نسبت به t را با Y'', Y' نشان دهیم، معادله تبدیل به

$$(Y'' - Y') + aY' + bY = 0$$

می شود که معادله با ضرایب ثابت است .

مثال: معادله کشی – اویلر زیر را حل می کنیم:

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$$

حل: با فرض $x = e^t$ داریم:

$$D(D-1)Y - 4DY + 6Y = 0$$

پس معادله کمکی دارای ریشه های $D = 2,3$ است بنابراین:

$$Y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$$

با جایگذاری $x = e^t$ (یا $t = \ln x$) نتیجه می شود:

$$y = c_1 x^2 + c_2 x^3$$

جواب معادله کشی – اویلر است.

تذکر :نتایج بالا را برای معادلات دیفرانسیل کشی – اویلر مرتبه بالا نیز می توان تعمیم داد.

مثلا معادله کشی – اویلر مرتبه سوم

$$x^3 y''' + ax^2 y'' + bxy' + cy = 0$$

را می توان با تغییر متغیر $x = e^t$ تبدیل به معادله :

$$(D(D-1)(D-2) + aD(D-1) + bD + c)Y = 0$$

نمود وآنرا با روش ضرایب ثابت حل کرد.

مثال : معادله دیفرانسیل کشی – اویلر زیر را حل می کنیم:

$$x^3 y''' + 4x^2 y'' - 8xy' + 8y = 0$$

حل: با فرض $x = e^t$ داریم :

$$D(D-1)(D-2)Y + 4D(D-1)y + 8DY + 8Y = 0$$

$$(D(D-1)(D-2) + 4D(D-1) - 8D + 8)Y = 0$$

$$(D-1)(D-2)(D+4) = 0 \Rightarrow D = 1,2,-4$$

بنابراین :

$$Y = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-4t}$$

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^{-4}$$

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی غیر همگن

ملاحظه شد که معادله مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت غیر همگن بصورت $y'' + ay' + by = f(x)$ می باشد که اگر $f(x) = 0$ آنرا معادله مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت همگن نامیم یعنی :

$$y'' + ay' + by = 0$$

ودارای جوابی بصورت $y = c_1 u_1 +_2 u_2$ می باشد.

حال اگر y_c جواب عمومی معادله همگن

$$y'' + ay' + by = 0$$

و y_p جوابی خاص از معادله غیر همگن

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

باشد آن گاه

$$y = y_c + y_p$$

جواب عمومی معادله غیر همگن می باشد.

تعریف : معادله دیفرانسیل $y'' + ay' + by = 0$ را
معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت وابسته معادله دیفرانسیل

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

نامیم.

هدف از این قسمت درس پیدا کردن جواب خاص معادله غیر همگن $y'' + ay' + by = f(x)$

می باشد که دو روش برای پیدا کردن y_p ارائه می دهیم.

الف)روش تغییر پارامتر :

دراین روش فرض می کنیم که جواب خاص y_p بصورت

$$y_p = v_1 u_1 + v_2 u_2$$

با شد که چون $y_c = c_1 u_1 + c_2 u_2$ جواب همگن می باشد وبا تغییر پارامترهای c_1, c_2 به توابع $v_1 = v_1(x)$ و $v_2 = v_2(x)$بدست آمده است، به همین دلیل این روش را تغییر پارامتر نامیم .

حال با توجه به معلوم بودن ظاهر جواب خاص کافی است روابطی که توابع v_2 , v_1 درآن صدق می کنند را پیدا کنیم .
بنابراین داریم:

$$y'_p = v'_1 u_1 + v_1 u'_1 + v'_2 u_2 + v_2 u'_2$$

$$y''_p = v''_1 u_1 + v'_1 u'_1 + v'_1 u'_1 + v_1 u''_1 + v''_2 u_2 + v'_2 u'_2 + v'_2 u'_2 + v_2 u''_2$$

چون باید درمعادله همگن $f(x)$ $y''_p + ay'_p + by_p =$ صدق کند،
بنابراین

$$\begin{cases} v'_1 u_1 + v'_2 u_2 = 0 \\ v'_1 u'_1 + v_2 u''_2 = f(x) \end{cases}$$

که دستگاه دو معادله دو مجهولی می باشد ومی توان از
آن مقادیر v_1', v_2' را محاسبه کرده و با انتگرال گیری

v_1, v_2 محاسبه می شود واز آن جا

$$y_p = v_1 u_1 + + v_2 u_2$$

بدست می آید.

با یک مثال توضیح می دهیم

مثال : معادله غیر همگن $y''-5y'+6y=3e^{x}$ را حل می کنیم:

حل : معادله وابسته $y''-5y'+6y=0$ دارای جواب $y_c=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$ است بنابراین $u_1=e^{2x}$ و $u_2=e^{3x}$

پس:

$$\begin{cases} v_1'e^{2x}+v_2'e^{3x}=0 \\ v_1'(2e^{2x})+v_2'(3e^{3x})=3e^{x} \end{cases}$$

با ضرب معادله اول در -2 و جمع طرفین دومعادله بالا

داریم:

$$v_2'e^{3x}=3e^{x}$$

$$v_2'=3e^{-2x} \Rightarrow v_2=\frac{-3}{2}e^{-2x}$$

با جایگذاری $v_2'=3e^{-2x}$ درمعادله اول داریم:

$$v_1'e^{2x} + (3e^{-2x})e^{3x} = 0$$

$$v_1'e^{2x} = -3e^{x} \Rightarrow v_1' = -3e^{-x} \Rightarrow v_1 = 3e^{-x}$$

درنتیجه:

$$y_p = v_1u_1 + v_2u_2 = 3e^{-x}.e^{2x} - \frac{3}{2}e^{-2x}.e^{3x}$$

$$= 3e^{x} - \frac{3}{2}e^{x} = \frac{3}{2}e^{x}$$

پس

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + \frac{3}{2}e^{x}$$

جواب عمومی معادله غیر همگن است.

مثال : معادله غیر همگن $y''-5y'+6y=1+x$ را حل می کنیم.

حل: معادله وابسته $y''-5y'+6y=0$ دارای جواب $y_c=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$ است بنابراین $u_1=e^{2x}$ و $u_2=e^{3x}$

پس :

$$\begin{cases} v_1'e^{2x}+v_2'e^{3x}=0 \\ v_1'(2e^{2x})+v_2'(3e^{3x})=1+x \end{cases}$$

با ضرب معادله اول در 2- و جمع طرفین دو معادله بالا داریم:

$$v_2'e^{3x}=1+x$$

$$v_2'=(1+x)e^{-3x} \Rightarrow v_2=-\frac{1}{3}(1+x)e^{-3x}-\frac{1}{8}e^{-3x}$$

با جایگذاری $v_2'=(1+x)e^{-3x}$ در معادله اول داریم:

$$v_1'e^{2x}+(1+x)e^{-3x}e^{3x}=0 \Rightarrow v_1{}'=-(1+x)e^{-2x}$$

$$v_1=-(-\frac{1}{2}(1+x)e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}) \Rightarrow v_1=\frac{1}{2}(1+x)e^{-2x}+\frac{1}{4}e^{-2x}$$

$$y_p=v_1u_1++v_2u_2=\frac{1}{2}(1+x)+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}(1+x)-\frac{1}{9}$$

درنتیجه :

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}=\frac{1}{6}x+\frac{11}{36}$$

پس

$$y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}+\frac{11}{36}+\frac{1}{6}x$$

جواب عمومی معادله غیر همگن است.

تذکر: روش تغییرپارامتررا می توان برای معادلات مرتبه n خطی غیر همگن تعمیم داد، یعنی اگر:

$$y_c = c_1 u_1 + + c_2 u_2 + \ldots + c_n u_n$$

جواب عمومی معادله همگن وابسته باشد آن گاه با فرض

$$y_p = v_1 u_1 + + v_2 u_2 + \ldots + v_n u_n$$

وحل دستگاه n معادله و n مجهولی زیر می توان جواب خاص معادله غیر همگن را بدست آورد:

$$
\begin{cases}
v_1'u_1 + v_2'u_2 + \ldots + v_n'u_n = 0 \\
v_1'u_1' + v_2'u_2' + \ldots + v_n'u_n' = 0 \\
\vdots \\
v_1'u_1^{(n-2)} + v_2'u_2^{(n-2)} + \ldots + v_n'u_n^{(n-2)} = 0 \\
v_1'u_1^{(n-1)} + v_2'u_2^{(n-1)} + \ldots + v_n'u_n^{(n-1)} = f(x)
\end{cases}
$$

تذکر: معادله کشی – اویلر غیر همگن را نیز می توان با تغییر متغیر مناسب تبدیل به معادله با ضرایب غیر همگن نمود وآنرا به روش تغییرپارامتر حل کرد.

مثلا

$$x^2 y'' + xy' - y = -2x^2 e^x$$

روش ضرایب ثابت (ضرایب نامعین)

درمعادله غیر همگن $y''+ay'+by=f(x)$ ملاحظه شد که اگر $f(x)$ تابعی نمایی باشد آن گاه y_p نیز نمایی می باشد. قبلا دیدیم که اگر $f(x)=3e^x$ آن گاه

$y_p=\frac{3}{2}e^x$ است. از این مطلب استفاده کرده وروشی را به نام روش ضرایب ثابت درحالات خاص $f(x)$ بیان می کنیم.

الف) اگر $f(x) = Ae^{\alpha x}$ تابع نمایی باشد درصورتی که α ریشه معادله کمکی نباشد آنگاه y_p نیز بصورت تابع نمایی $y_p = Be^{\alpha x}$ است که با مشتق گیری وجایگذاری درمعادله مقدار B بدست می آید.

مثلا

$$y'' - 5y' + 6y = 3e^{x}$$

حال اگر $f(x) = Ae^{\alpha x}$ و α یکبار ریشه معادله کمکی باشد

آن گاه چون $c_1 e^{\alpha x}$ جواب معادله همگن است بنابراین

جواب خاص را بصورت $y_p = Bxe^{\alpha x}$ درنظر می گیریم

با يك مثال توضيح می دهيم.

$$y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$$

حال اگر $f(x) = Ae^{\alpha x}$ و α دو بار ریشه معادله کمکی باشد آن گاه $c_1 e^{\alpha x}, c_2 xe^{\alpha x}$ جواب هایی از معادله همگن می باشد پس جواب خاص را بصورت

$$y_p = Bx^2 e^{\alpha x}$$

درنظر می گیریم.

بنابر این اگر $f(x) = Ae^{\alpha x}$ و α ریشه معادله کمکی از مرتبه تکرار j باشد آن گاه:

$$y_p = x^j Be^{\alpha x}$$

جواب خاص معادله غیر همگن است.

مثال : معادله $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$ را حل می کنیم.

حل: چون $\alpha = 2$ دو بار ریشه معادله کمکی است پس $j = 2$

بنابراین $y_p = Bx^2 e^{2x}$ در نتیجه

$$y_p'' = 2\beta e^{2x} + 4\beta xe^{2x} + 4\beta xe^{2x} + 4\beta x^2 e^{2x}, y' = 2xe^{2x} + 2\beta x^2 e^{2x}$$

درنتیجه با جایگذاری درمعادله غیر همگن داریم:

$$2\beta e^{2x} + 8\beta xe^{2x} + 4\beta x^2 e^{2x} - 4(2\beta xe^{2x} + 2\beta x^2 e^{2x}) + 4\beta x^2 e^{2x} = 3e^{2x} \Rightarrow$$

$$2\beta e^{2x} = 3e^{2x} \Rightarrow \beta = \frac{3}{2}$$

پس $y_p = \frac{3}{2} x^2 e^{2x}$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \frac{3}{2} x^2 e^{2x}$$

جواب عمومی معادله است.

ب) اگر $f(x) = A_0 + A_1x + \ldots + A_nx^n$ تابع چند جمله ای باشد آن گاه جواب خاص نیز تابعی چند جمله ای می باشد. ولی اگر جواب خاص، جواب معادله همگن باشد آن گاه باید جواب خاص را در x^j ضرب کنیم. درصورتی جواب همگن به صورت چند جمله ای است که صفر ریشه معادله کمکی باشد.قبلا ملاحظه شد که $f(x) = 1 + x$ چند جمله ای درجه یك می باشد آن گاه

$$y_p = \frac{11}{36} + \frac{1}{6}x$$

نیز تابعی چند جمله ای است.

تذکر: اگر $f(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n$ و $\alpha = 0$ ریشه معادله کمکی از مرتبه تکرار j باشد آن گاه

$$y_p = x^j (B_0 + B_1 x + \ldots + B_n x^n)$$

جواب خاص معادله غیر همگن است.

مثال : معادله $y'' - y' = 1 + x^2$ را حل می کنیم.

حل : چون $\alpha = 0$ یکبار ریشه معادله کمکی است $(D = 0,1)$

پس $j = 1$ بنابراین $y_p = x(B_0 + B_1 x + B_2 x^2)$ درنتیجه

با جایگذاری درمعادله غیر همگن داریم:

$$\begin{cases} 2B_1 - 5B_0 = 1 \\ 6B_2 - 2B_1 = 0 \Rightarrow B_2 = -\dfrac{1}{3}, B_1 = -1, B_0 = \dfrac{-3}{5} \\ -3B_2 = 1 \end{cases}$$

پس $y_p = -\dfrac{3}{5}x - x^2 - \dfrac{1}{3}x^3$ جواب خاص غیر همگن است

و

$$y = c_1 + c_2 e^x - \frac{3}{5}x - x^2 - \frac{1}{3}x^3$$

جواب عمومی معادله غیر همگن است.

ج) اگر $f(x) = A_1 \sin \alpha x + A_2 \cos \alpha x$ باشد نیز جواب خاص بصورت مثلثاتی سینوس وکسینوس می باشد ودرصورتی که α ریشه مختلط محض معادله کمکی باشد یعنی اگر $D = \pm i\alpha$ آنگاه جواب معادله همگن بصورت مثلثاتی است که دراین حالت باید به x^j ضرب شود .

تذکر: اگر $f(x)=A_1\sin\alpha x+A_2\cos\alpha x$

و α ریشه مختلط محض معادله کمکی ازمرتبه تکرار j باشد آنگاه

$$y_p=x^j(B_0\sin\alpha x+B_1\cos\alpha x)$$

جواب خاص معادله غیر همگن است.

مثال : معادله $y'' - y' = 3\sin x$ را حل می کنیم.

حل: چون $\alpha = 1$ ریشه مختلط محض معادله کمکی نیست

$D = \pm 1$ پس $j = 0$ بنابراین $y_p = B_0 \sin x + B_1 \cos x$

و با جایگذاری درمعادله غیر همگن داریم:

$$-B_0 \sin x - B_1 \cos x - B_0 \sin x - B_1 \cos x = 3\sin x$$

$$-2B_0 = 3 \Rightarrow B_0 - \frac{3}{2},\ -2B_1 = 0 \Rightarrow B_1 = 0$$

پس $y_p = -\frac{3}{2}\sin x$ جواب خاص معادله غیر همگن و

$$y = c_1 x^x + c_2 e^{-x} - \frac{3}{2}\sin x$$

جواب عمومی معادله غیر همگن است.

تذکر: هر گاه درمعادله غیر همگن اگر

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)$$

به ازای هر $i = 1,2,...,n$ ، $y_i(x)$ يك جواب معادله غیر همگن

$$y'' + ay' + by = f_i(x)$$

باشد، آنگاه معادله غیر همگن، جوابی بصورت

$$y_p = y_1(x) + y_2(x) + ... + y_n(x)$$

دارد.

تذکر : روش ضرایب ثابت را می توان برای معادلات مرتبه n ، خطی غیر همگن استفاده کرد که دراین حالت x^j در y_p برابربا $j=1,2,\ldots,n$ است که j مرتبه تکرار ریشه معادله کمکی بودن ، α است.

مثلا معادله $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 4e^{3x}$

چون $\alpha = 3$ و $\alpha = 0$ ریشه معادله کمکی نیستند

پس: $(D = 1,2)$

$$y_p = B_0 e^{3x} + B_1 + B_2 x + B_3 x^2 \Rightarrow$$

$$y'_p = 3B_0 e^{3x} + B_2 + 2B_3 x$$

$$y''_p = 9B_0 e^{3x} + 2B_3$$

با جایگذاری درمعادله غیر همگن داریم:

$$y_p = 2e^{3x} + \frac{7}{2} + 3x + x^2$$

حل معادله دیفرانسیل به روش های سریها

درفصل قبل با حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت، درچند حالت خاص با ضرایب متغیر آشنا شدیم. دراین فصل با یکی از موثرترین روش حل برای معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم (وبالاتر)، یعنی، از سریهای توانی استفاده می کنیم. دردرس ریاضیات عمومی با مفهوم سری آشنا شده ایم . برای اینکه مطالب این فصل رابهتر درك کنیم، بحث را با مرور مختصری برسریهای توانی شروع می کنیم.

سری توانی

سری به صورت

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots$$

یا $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ که درآن $x_0, a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ اعداد ثابتی بوده و x متغیر است را سری توانی به مرکز x_0 نامیم.

سری توانی ممکن است که دریکی از سه حالت زیر صدق کند:

1- تنها به ازای $x = x_0$ همگرا باشد.

2- به ازای هر x دریك همسایگی x_0 مطلقا همگرا باشد، یعنی برای $|x - x_0| < R$ همگرا وبرای $|x - x_0| > R$ واگر باشد عدد R را شعاع همگرایی سری نامیم.

3- به ازای هر x مطلقا همگرا باشد.

مجموعه مقادیر x را که سری توانی همگرا است، بازه (فاصله)همگرایی سری می نامیم.

تذکر: اگر سری به ازای $x = x_0 \pm R$ همگرا باشد آنگاه بازه همگرایی $x_0 - h \le x \le x_0 + h$ برابر است با ، دردرس ریاضی عمومی با پیدا کردن بازه همگرایی سری توانی آشنا شده ایم که شعاع همگرایی عبارت است از

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{an}{a_{n+1}} \right|$$

ممکن است $R = \infty$ اگر حد بالا نامتناهی باشد.

مثال:بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ را پیدا کنید .

چون $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\right| = 0$

بنابراین ، سری تنها به ازای $x = 0$ همگرا است.

مثال :بازه همگرایی سری توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(x-1)^n}{n!}$$

را پیدا کنید.

چون

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{2^n}{n!}}{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{2}\right|=+\infty$$

پس سری روی مجموعه اعداد حقیقی، یعنی در هر جا همگرا است .

مثال :بازه همگرایی سری توانی

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}(x-2)^n$$

را پیدا کنید.

چون

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)}\right|=1$$

پس، سری روی مجموعه x هایی که $|x-2|<1$

همگرا است .

قضیه :اگر سری توانی بربازه $|x-x_0|<R$ که درآن R یك عدد ثابت مثبت است همگرا باشد، آنگاه سری توانی تابعی مانند $f(x)$ را تعریف می کند که به ازای هر x دربازه پیوسته است.

تذکر:به طور طبیعی این سوال مطرح می شود که به کدام تابع پیوسته همگرا است.

پاسخ دادن به این سوال درحالت کلی آسان نیست.

قضیه : اگر $f(x)$ به صورت زیر توسط يك سری توانی تعریف شده باشد،

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \qquad |x-x_0|<R$$

آنگاه می توان از سری بالا جمله به جمله مشتق گیری کرد

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-x_0)^{n-1}$$

و همین طور انتگرال گرفت یعنی:

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} \qquad a,b\in(x_0-R,x_0+R)$$ که

قضیه : فرض کنیم :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \qquad g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n$$

آن گاه

الف) به ازای هر عدد حقیقی c داریم:

$$cf(x)=\sum_{n=0}^{\infty}ca_n(x-x_0)^n$$

ب)

$$f(x)+g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-x_0)^n$$

ج)

$$f(x).g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$$

که درآن:

$$c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_nb_0=\sum_{k=0}^{n}a_Kb_{n-K}=\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}b_k$$

تذکر :با انتقال اندیس می توان نشان داد که :

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n (x-x_0)^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} (x-x_0)^n$$

بعبارت دیگر، با کم کردن k واحد از اندیس جمع سری واضافه کردن k واحد به همه n های داخل علامت $\sum$ سری، دو سری مساوی به دست می آید.

تذکر: 12.1.3- درکار کردن با سریهای توانی با مرکز بسط x_0 مخالف با صفر، غالبا به کار بردن تغییر متغیر $z = x - x_0$ مفید است. یعنی:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

قضیه: فرض کنیم سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

برای $|x-x_0| < R$ با $R>0$ همگرا به تابع $f(x)$ باشد،
بسادگی نشان داده می شود که

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad , \quad n = 0,1,2,...$$

ودرحالت خاص اگر $x_0 = 0$ آنگاه

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \; , \; n = 0,1,2,...$$

تعریف: سری را

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

بسط سری تیلر $f(x)$ ، حول نقطه x_0 وسری را

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n$$

بسط ماك لورن $f(x)$ حول نقطه صفر می نامیم.

تعریف: اگر سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

به ازای هر x دربازه $(x_0 - R, x_0 + R)$ به $f(x)$ همگرا باشد می گوییم f درنقطه x_0 تحلیلی است.

مثال : بسط سری ماك لورن برخی توابع عبارت است از:

الف) $$e^x = \sum_{n=\infty}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$ که $|x| < \infty$

ب) $$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$ که $|x| < \infty$

ج) $$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$ که $|x| < \infty$

د) $$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$ که $|x|<\infty$

ه) $$\sinh x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$ که $|x|<\infty$

و) $$\cosh x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$ که $|x|<\infty$

نقاط معمولی ومنفرد

تعریف: نقطه x_0 را یك نقطه معمولی (عادی) برای معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n ام

$$y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + f_1(x)y' + f_0(x)y = g(x)$$

می گویم هرگاه ضرایب $f_i(x)$ و $g(x)$ در x_0 تحلیلی باشند.
نقطه ای را که معمولی نباشد نقطه منفرد (غیر عادی)معادله می نامیم.

مثال : نقاط منفرد معادله دیفرانسیل

$$x^3(x^2-1)y''+x(x+1)y'+(x-1)y=0$$

را پیدا کنید.

حل: معادله را با تقسیم بر $x^3(x^2-1)$ بصورت ضریب مشتق بالا ترین برابر یك می کنیم یعنی:

$$y''+\frac{1}{x^2(x-1)}y'+\frac{1}{x^3(x+1)}y=0$$

بدیهی است که همه ضرایب این معادله درهمه نقاط به جز نقاط $x=0$ و $x=1$ و $x=-1$ تحلیلی می باشند. پس آنها نقاط منفرد وهمه نقاط دیگر نقاط معمولی معادله هستند.

قضیه: اگر هریك از توابع

$$g, f_{n-1}, \dots, f_1, f_0$$

درنقطه x_0 تحلیلی باشند، آن گاه یك جواب منحصر به فرد مانند $y(x)$ وجود دارد که در x_0 تحلیلی است ودر n شرط اولیه

$$y(x_0) = a_0, y'(x_0) = a_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}$$

صدق می کند. یعنی هر جواب معادله دیفرانسیل توسط سری تیلر خود درنقطه x_0 دربازه I بیان می شود .

جواب های سری معادلات دیفرانسیل (دریك نقطه معمولی)

مثال : معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y = y'$ را با پیدا کردن جواب بصورت سری مك لورن حل می کنیم.

حل: فرض

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots.$$

که $R > 0, |x| < R$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots.$$

چون $y' = y$ پس باید :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\begin{cases} a_1 = a_0 \\ 2a_2 = a_1 \\ 3a_3 = a_2 \\ 4a_4 = a_3 \\ \vdots \\ (n+1)a_{n+1} = a_n \\ \vdots \end{cases}$$

وبا حل کردن دستگاه از بالا به پایین نتیجه می شود که:

$$a_1 = a_0, a_2 = \frac{a_0}{2!}, a_3 = \frac{a_0}{3!}, \dots, a_n = \frac{a_0}{n!}, \dots$$

ویارابطه بازگشتی

$$a_{n+1} = \frac{a_0}{n+1}$$

که به دست می آوریم،

$$a_n = \frac{a_0}{n!}$$

حال با جایگذاری ضرایب بالا در $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

داریم :

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0}{n!} x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

که a_0 پارامتر می باشد دقت کنیم که جواب بالا همان جوابی است که از روش های قبلی بدست می آید یعنی $y=a_0 e^x$ جواب معادله جداشدنی بالا است.

مثال : بسط تیلر جواب های معادله

$$y''(x-1)^2 y' - 4(x-1)y = 0$$

را درنقطه معمولی $x=1$ پیدا کنید.

حل: برای سادگی از تغییر متغیر $t = x-1$ استفاده می کنیم

دراین صورت متناظر $x=1$ با $t=0$ می باشد وداریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

بنابراین با جایگذاری ، معادله دیفرانسیل تبدیل به معادله

$$\frac{d^2y}{dt^2} + t^2\frac{dy}{dt} - 4ty = 0$$

می شود چون همه ضرایب چند جمله ای هستند

، پس بازه همگرایی سریهای جواب معادله برابر با

$-\infty < t < +\infty$ است، بازه همگرایی سریهای جواب

معادله اصلی نیز برابر با $-\infty < x < +\infty$ است . سری

توانی جواب را بصورت سری ماك لورن

$$y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

درنظر می گیریم . پس: $\dfrac{dy}{dt} = a_1 + 2a_2 t + \ldots + n a_n t^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = 2a_2 + \ldots + n(n-1) a_n t^{n-2} + \ldots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

با قرار دادن سریهای بالا درمعادله دیفرانسیل ثانویه داریم:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n+1} - 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} = 0$$

$$\begin{cases} 2a_2 = 0 \\ 3\times 2a_3 - 4a_0 = 0 \\ 4\times 3a_4 + a_1 - 4a_1 = 0 \\ 5\times 4a_5 + 2a_2 - 4a_2 = 0 \\ 6\times 5a_6 + 3a_3 - 4a_3 = 0 \\ 7\times 6a_7 + 4a_4 - 4a_4 = 0 \\ \vdots \\ n(n-1)a_n + (n-3)a_{n-3} - 4a_{n-3} = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

درنتیجه:

$$a_2 = 0 \quad , \quad a_4 = \frac{3a_1}{4\times 3} \quad , \quad a_3 = \frac{4a_0}{3\times 2}$$

$$a_5 = 0 \quad , \quad a_7 = 0 \quad , \quad a_6 = \frac{4a_0}{6\times 5\times 3\times 2}$$

$$a_8 = 0 \quad , \quad a_{10} = 0 \quad , \quad a_9 = \frac{2\times 4a_0}{9\times 8\times 6\times 5\times 3\times 2}$$

$$a_{11} = 0 \quad , \quad a_{13} = 0 \quad , \quad a_{12} = \frac{5\times 4\times 2a_0}{12\times 11\times 9\times 8\times 6\times 5\times 3\times 2}$$

چنانکه ملاحظه می شود همه ستون های سوم وستون دوم بغیر اولین جمله بقیه صفراند تنها ستون اول ناصفرمی باشدوبرحسب a_0 است بنابراین:

$$a_3 = \frac{-(3n-3-4)}{3n(3n-1)} a_{3n-3} = \frac{-(3n-7)}{3n(3n-1)} a_{3n-3}$$

$$a_{3n} = \frac{(3n-7)(3n-10)\ldots \times 8 \times 5 \times 2 \times (-1)^n \alpha 4}{3n(3n-3)\ldots(3) \times (3n-1)(3n-4)\ldots \times 2} a_0$$

$$a_{3n} = \frac{2 \times 5 \times 8 \times \ldots \times (3n-10)(3n-7) \times (-1)^n \times 4}{3^n (n(n-1)(n-2)\ldots. \times (2 \times 1) 2 \times 5 \times \ldots \times (3n-4) \times (3n-1)}$$

$$= \frac{(-1)^n \times 4}{3^n . n! \times (3n-4)(3n-1)}$$

$$y = a_0 + a_1 t + 0t^2 + \frac{4}{3\times 2} a_0 t^3 + \frac{3}{4\times 3} a_1 t^4 + 0t^5 + \frac{4}{6\times 5\times 3\times 2} a_0 t^6$$

$$+ 0t^7 + 0t^8 + \frac{2\times 4}{9\times 8\times 6\times 5\times 3\times 2} a_0 t^9 + 0t^{10} + 0t^{11} + \frac{2\times 5\times 4}{12\times 11\times 9\times 8\times 6\times 5\times 3\times 2} a_0 t^{11} + \ldots$$

$$= a_1 (t + \frac{1}{4} t^4) + a_0 (1 + \frac{2}{3} t^3 + \frac{4}{6\times 5\times 3\times 2} t^6 + \frac{2\times 4}{9\times 8\times 6\times 5\times 3\times 2} t^9 +$$

$$\frac{2\times 5\times 4}{12\times 11\times 9\times 8\times 6\times 5\times 3\times 2} t^{12} + \ldots + \frac{(-1)^n .4}{3^n .n!(3n-4)(3n-1)} t^{3n} + \ldots$$

ویا $y=a_1(t+\frac{1}{4}t^4)+a_0(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\times 4}{3^n.n!(3n-4)(3n-1)}t^{3n})$

با قرار دادن $t=x-1$ داریم :

$$y(x)=a_1((x-1)-\frac{1}{4}(x-1)^4)+a_0(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\times 4}{3^n.n!(3n-4)(3n-1)}(x-1)^{3n})$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل داده شده به ازای هر x می باشد.

تذکر: ممکن است رابطه بازگشتی بر حسب جمله عمومی امکان پذیر نباشد یا بسادگی نتوان پیدا کرد در چنین حالتی جمله عمومی را معمولا"پیدا نمی کنیم.

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم

$$(1-x\ \ )y''-2xy'+p(p+1)y=0$$

که در آن p عدد ثابتی است به معادله دیفرانسیل **لژاندر** موسوم است.ملاحظه می شود که نقطه $x_0=0$ یک نقطه معمولی معادله است بنابراین دارای جوابی بصورت:

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{n-1}$$

است که حداقل برای $|x|<1$ همگراست .

که با جایگذاری در معادله داریم:

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + p(p+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + p(p+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

با تغییر اندیس داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x_n - \sum_{n=0}^{\infty} 2xa_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} p(p+1)a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + p(p+1)a_n\right]x^n = 0$$

ورابطه بازگشتی:

$$a_{n+2} = \frac{n(n-1)+2n-p(p+1)}{(n+2)(n-1)}a_n = \frac{n^2-n+2n-p^2-p}{(n+2)(n+1)}a_n = \frac{n^2-p^2+n-p}{(n+2)(n+1)}a_n$$

$$= -\frac{(p-n)(n+p+1)}{(n+2)(n+1)}a_n \qquad , \quad n \geq 0$$

نتیجه می شود که:

که با جایگذاری در معادله داریم:

$$a_2 = -\frac{p(p+1)}{2!}a_0$$

$$a_3 = -\frac{(p-1)(p+2)}{3!}a_1$$

$$a_4 = -\frac{(p-2)(p+3)}{3\times 4}a_2 = \frac{p(p-1)(p+1)(p+3)}{4!}a_0$$

$$a_5 = -\frac{(p-3)(p+4)}{4\times 5}a_3 = \frac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{5!}a_1$$

$$a_6 = -\frac{(p-4)(p+5)}{5\times 6}a_4 = -\frac{p(p-2)(p-4)(p+1)(p+3)(p+5)}{6!}a_0$$

$$a_7 = -\frac{(p-5)(p+6)}{6\times 7}a_5 = -\frac{(p-1)(p-3)(p-5)(p+2)(p+4)(p+6)}{7!}a_1$$

با قرار دادن این ضرایب در سری داریم:

$$y=a_0+a_1x+\left(-\frac{p(p+1)}{2!}a_0\right)x^2+\left(-\frac{(p-1)(p+2)}{3!}a_1\right)x^3+\left(\frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!}a_0\right)x^4+\cdots$$

$$y=a_0\left(1-\frac{p(p+1)}{2!}x^2+\frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!}x^4-\frac{p(p-2)(p-4)(p+1)(p+3)(p+5)}{6!}x^6+\cdots\right)$$
$$+a_1\left(x-\frac{(p-1)(p+2)}{2!}x^3+\frac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{5!}x^5-\frac{(p-1)(p-3)(p-5)(p+2)(p+4)(p+6)}{7!}x^7+\cdots\right)$$

که برای $|x|<1$ همگراست واگر p عدد صحیح نباشد شعاع همگرایی هر دو سری داخل پرانتز برابر با یک است.توابع تعریف شده در جواب سری مشهور به توابع لژاندر می باشد که توابع متعالی هستند.در حالت خاص p جواب سری ها ممکن است متناهی باشد.

نقاط منفردمنظم معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم

درتعریف دیدیم که نقطه x_0 را یك نقطه منفرد معادله دیفرانسیل خطی همگن

$$y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0$$

می نامیم درصورتی که اگر معادله را بصورت

$$(x-x_0)^2 y'' + (x-x_0)p(x)y' + q(x)y = 0$$

بنویسیم آنگاه $q(x), p(x)$ در x_0 تحلیلی باشند. نقطه منفردی که منظم نباشد را غیر منظم می گوییم.

مثال :نوع نقاط منفرد معادله دیفرانسیل

$$(x-1)y''+\frac{1}{x}y'-2y=0$$

را پیدا کنید.

حل: با تقسیم دو طرف معادله در $x-1$ ، معادله بالا به صورت

$$y''+\frac{1}{x(x-1)}y'-\frac{2}{x-1}y=0$$

در می آید مشاهده می کنیم که نقاط منفرد عبارت است از :

$x=1, x=0$ با ضرب معادله بالا در x^2 داریم :

$$x^2y''+x\frac{1}{x-1}y'-\frac{2x^2}{x-1}y=0$$

پس $p(x)=\frac{1}{x-1}, q(x)=\frac{-2x^2}{x-1}$

که هر دو در$x=0$ تحلیلی اند. پس $x=0$ یك نقطه منفرد منظم است. حال اگر طرفین معادله را $(x-1)^2$در ضرب کنیم داریم :

$$(x-1)^2 y'' + \frac{x-1}{x} y' - \frac{2(x-1)}{1} y = 0$$

که ، هردو $p(x) = \frac{1}{x}$, $q(x) = -2(x-1)$ در $x=1$ تحلیلی اند

پس $x=1$ یك نقطه منفرد منظم است.

مثال : معادله لژاندر

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0$$

را به صورت زیر می نویسیم .

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{p(p+1)}{1-x^2}y = 0$$

روشن است که $x=1$ و $x=-1$ نقاط منفرد معادله اند که اگر طرفین معادله را در $(x-1)^2$ ضرب می کنیم داریم :

$$(x-1)^2 y'' + \frac{2x(x-1)}{(x+1)}y' - \frac{p(p+1)(x-1)}{x+1}y = 0$$

آنگاه:

$p(x)=\dfrac{2x(x-1)}{(x+1)}$ و $q(x)=\dfrac{-p(p+1)(x-1)}{x+1}$ هردو در $x=1$

تحلیلی اند پس $x=1$ يك نقطه منفرد منظم معادله است.

حال اگر طرفین معادله را در $(x+1)^2$ ضرب کنیم داریم :

$$(x+1)^2y''+\frac{2x(x+1)}{(x-1)}y'-\frac{p(p+1)(x+1)}{x-1}y=0$$

که $p(x)=\dfrac{2x(x+1)}{(x-1)}$ و $q(x)=\dfrac{-p(p+1)(x+1)}{x-1}$ هردو در

$x=-1$ تحلیلی اند پس $x=-1$ يك نقطه منفرد منظم معادله است.

مثال: معادله دیفرانسیل خطی

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$$

را که به معادله بسل(Bessel) از مرتبه p معروف است در نظر می گیریم در این معادله که p عدد ثابت نا صفر می باشد با نوشتن معادله بصورت

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2 - p^2}{x^2}y = 0$$

ملاحظه می شود که $x = 0$ نقطه منفرد معادله می باشد وبا توجه به توابع $p(x) = 1, q(x) = x^2 - p^2$ که درنقطه $x = 0$ تحلیلی اند پس $x = 0$ نقطه منفرد ومنظم معادله است.

تعریف: سری بصورت

$$y=(x-x_0)^s\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

که در آن S عددی حقیقی ویا مختلط است به سری

فروبنیوس (frobenius) مشهور است.

تذکر: اگر $x = x_0$ یک نقطه منفرد منظم معادله مرتبه دوم خطی باشد ثابت می شود که معادله دارای یک وگاهی دو جواب بصورت سری فروبنیوس با $a_0 \neq 0$ است.
در اینجا S عددی حقیقی است و این روش را با ارائه چند مثال توضیح می دهیم.

مثال: معادله دیفرانسیل

$$2x^2 y'' + x(2x+1)y' - y = 0$$

را در نظر می گیریم واضح است که $x_0 = 0$ نقطه منفرد منظم معادله است جواب سری فروبنیوس

$$y = x^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s}$$

را در نظر می گیریم بنابراین :

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s) a_n x^{n+s-1} \quad \Rightarrow \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1) a_n x^{n+s-2}$$

با جایگذاری در معادله دیفرانسیل نتیجه می شود:

$$2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1) a_n x^{n+s-2} + x(2x+1) \sum_{n=0}^{\infty} (n+s) a_n x^{n+s-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} = 0$$

و یا:

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s}+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n x^{n+s+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n x^{n+s}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+s}=0$$

با تغییر اندیس داریم :

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s}+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+s-1)a_{n-1} x^{n+s1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n x^{n+s}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+s}=0$$

$$2(s)(s-1)a_0 x^s+2\sum_{n=1}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_{n-1} x^{n+s}+2\sum_{n=1}^{\infty}(n+s-1)a_{n-1} x^{n+s}+sa_0 x^s$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(n+s)a_n x^{n+s}-a_0 x^s-\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{n+s}=0$$

و یا :

$$\left(2s(s-1)+s-1\right)a_0x^s+\sum\left[2(n+s)(n+s-1)+(n+s)-1\right]a_n+2(n+s-1)a_{n-1}x^{n+s}=0$$

چون فرض بر آن است که $a_0 \neq 0$ پس :

$$2s(s-1)+s-1=0$$

$$2s^2-2s+s-1=0$$

$$2s^2-s-1=0$$

این معادله را معادله شاخص و ریشه های آن را توان شاخص معادله دیفرانسیل در نقطه منفرد منظم نامیم . پس توان های

$$s=-\frac{1}{2}, s=1$$

شاخص معادله دیفرانسیل در نقطه منفرد منظم هستند

حال به ازای هر کدام از مقادیر s ضرایب a_n ها در رابطه بازگشتی :

$$\big(2(n+s)(n+s-1)+n+s-1\big)a_n = -2(n+s-1)a_{n-1}$$

و یا :

$$a_n = \frac{-2(n+s-1)}{2(n+s)(n+s-1)+n+s-1}a_{n-1} \quad , \quad n \geq 1$$

$$= \frac{-2(n+s-1)}{(n+s-1)(2n+2s+1)}a_{n-1} = \frac{-2}{2n+2s+1}a_{n-1} \quad , \quad n \geq 1$$

صدق می کند .

الف) اگر $s=1$ رابطه بالا نتیجه می دهد که :

$$a_n = \frac{-2}{2n+3}a_{n-1} \quad , \quad n \geq 1$$

$$a_1 = \frac{-2}{5}a_0$$

$$a_2 = \frac{-2}{7}a_1 = \frac{(-2)(-2)}{5\times 7}a_0$$

$$a_3 = \frac{-2}{9}a_2 = \frac{(-2)(-2)(-2)}{5\times 7\times 9}a_0$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{(-2)^n}{5\times 7\times 9\times \cdots \times (2n+3)}a_0$$

ب) اگر $s = -\frac{1}{2}$ آنگاه :

با $n \geq 1$

$$a_n = \frac{-2}{2n + 2(-\frac{1}{2}) + 1} a_{n-1} = \frac{-2}{2n} a_{n-1} = \frac{-1}{n} a_{n-1}$$

پس :

$$a_1 = \frac{-1}{1} a_0 = -a_0$$

$$a_2 = -\frac{1}{2} a_1 = \frac{(-1)(-1)}{2} a_0$$

$$a_3 = -\frac{1}{3} a_2 = \frac{(-1)(-1)(-1)}{2 \times 3} a_0$$

$$\vdots$$

$$a_n = -\frac{1}{n} a_{n-1} = \frac{(-1)^n}{n!} a_0$$

در نتیجه دو جواب سری فروبینوس عبارت است از :

$$y_1 = x\left(1+\frac{-2}{5}x+\frac{(-2)^2}{5\times 7}x^2+\frac{(-2)^3}{5\times 7\times 9}x^3+\cdots+\frac{(-2)^n}{5\times 7\times\cdots\times(2n+3)}x^n+\cdots\right)$$

$$y_2 = x^{-\frac{1}{2}}\left(1-x+\frac{(-1)^2}{2!}x^2+\frac{(-1)^3}{3!}x^3+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}x^n+\cdots\right)$$

و دو تابع y_1 ، y_2 بدلیل $x^{-\frac{1}{2}}$ در بازه $(0\,,+\infty)$
مستقل خطی و همگرا هستند پس :

$$y = c_1 x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{5\times 7\times\cdots\times(2n+3)}x^n\right)+c_2 x^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n\right)$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل است .

حالتی که معادله شاخص دارای ریشه های برابر است.

تذکر: درادامه بحث خود معادلاتی را مورد بررسی قرار می دهیم که دارای یک نقطه منفرد در $x = 0$ است.در این حالت معادله به صورت $x^2 y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0$ در می آید،که در آن $q(x), p(x)$ در $x = 0$ تحلیلی هستند.همچنانکه قبلا مشاهده کردیم،این محدودیت از کلیت بحث نمی کاهد، زیرابا تغییر متغیر $t = x - x_0$ نقطه منفردمنظم x_0 را به صفر تبدیل می کند.

- بررسی حالت کلی

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

$$x^2 y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0$$

را در نظرمی گیریم . فرض $x = 0$ نقطه منفردمنظم باشد در این صورت در $q(x), p(x)$ تحلیلی هستند،در نتیجه به ازای $|x| < R$ ، داریم:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \qquad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

و y تابعی بصورت:

$$y(x) = x^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\partial\infty} a_n x^{n+s}$$

باشد، آنگاه:

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+s) x^{n+s-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+s)(n+s-1) x^{n+s-2}$$

$$xp(x)y'(x) = x^s (\sum_{n=0}^{\infty} (n+s) a_n x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \ (\sum_{k=0}^{n} (k+s) a_k p_{n-k}) x^{n+s}$$

$$q(x)y(x) = x^s (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \ (\sum_{k=0}^{n} a_k q_{n-k}) x^{n+s}$$

با قرار دادن مقادیر بالا در معادله دیفرانسیل داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(k+s)a_k p_{n-k}\right)x^{n+s}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_k q_{n-k}\right)x^{n+s}=0$$

در نتیجه

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{(n+s)(n+s-1)a_n+\sum_{k=0}^{n}[(k+s)p_{n-k}+q_{n-k}]a_k\}x^{n+s}=0$$

که با فرض ضریب کوچکترین توان x ,$(n=0)$ داریم:

$$s(s-1)a_0+(sp_0+q_0)a_0=0$$

چون $a_0 \neq 0$ پس $f(s)=s(s-1)sp_0+q_0$

ویا $f(s)=s^2+(p_0-1)s+q_0$

معادله شاخص می باشد و ریشه های آن را **توان های شاخص** معادله دیفرانسیل در نقطه منفرد منظم نامیده می شود.

ملاحظه می شودکه سه حالت زیر می تواند در مورد معادله شاخص رخ دهد:

الف) اگر $s_1 - s_2$ عدد غیر صحیح وغیرصفر باشد.

ب) اگر $s_1 - s_2$ عدد صحیح ومثبت باشد.

ج) اگر $s_1 - s_2$ صفر باشد.

در حالت الف) معادله دیفرانسیل دارای دو جواب مستقل به صورت

$$y_2(x) = x^{s_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad \text{و} \quad y_1(x) = x^{s_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

دارد. قبلا مثالهایی در این مورد ملاحظه شد.

در حالت ب) و ج) فقط یک جواب به صورت

$$y_1(x) = x^{s_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

دارد. برای پیدا کردن جواب مستقل دیگر نشان داده می شود که جواب به صورت

$$y_2 = Ay_1(x)\log x + x^{s_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

است که می توان با مشتق گیری وجایگذاری در معادله دیفرانسیل ضرایب c_n ها و A را پیدا کردکه ممکن است مقدار A برابرصفر باشد که در این صورت $y_2(x)$ به شکل یک سری فروبینوس می با شد.

تذکر: در فیزیک و ریاضیات محض،اغلب بررسی جواب معادله دیفرانسیل

$$x^2 y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0$$

وقتی متغیر مستقل x بینهایت باشد،مورد نظر است. با به کار بردن تغییر متغیر $x = \dfrac{1}{t}$ مقادیر بزرگ x با مقادیرکوچک t متناظر خواهند بود.

با جایگذاری t به جای x جوابهایی از معادله دیفرانسیل جدید را بدست
می آوریم که اگر معادله جدید دارای یک نقطه معمولی در
$t = 0$ باشد، گوییم معادله دیفرانسیل دارای یک نقطه
معمولی دربینهایت است. به همین نحو، اگر معادله جدید
دارای یک نقطه منفرد منظم در $t = 0$ باشد، گوییم معادله
دیفرانسیل دارای یک نقطه منفرد منظم دربینهایت است.

توابع بسل

توابع بسل کاربرد های فراوانی در علوم دارد.

تابع گاما:

در بررسی توابع بسل دانستن برخی از خواص تابع گاما که بصورت

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad , \quad x > 0$$

تعریف می شود، لازم است.این انتگرال به ازای همه x های بزرگتر از صفر همگراست.

اینک دو خاصیت مهم تابع گاما را بررسی می کنیم.
بسادگی ثابت می شود که

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(x+1)x\Gamma(x)$$

مثلا

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2.1 = 2$$

$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3.2 = 3.2.1 = 3\ !$$

بسادگی ثابت می شود که

$$\Gamma(n+1)n!$$

$$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

و

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x) \quad \Rightarrow \quad \Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

که با استفاده از آن، $\Gamma(x)$ را برای مقادیر منفی و غیر صحیح x تعریف کرد. در واقع می توان $\Gamma(p)$ را به ازای $-1<p<0$ تعریف کرد.

با ادامه این روند برای

$$-k < x < 0 \quad , \quad x \neq -1,-2,\ldots,-k+1$$

داریم:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+k)}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+k-1)}$$

مثلا

$$\Gamma(-\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}}$$

$$\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\Gamma(\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$$

تعریف : تابع $\Psi(x)$ را بصورت

$$\Psi(x)=\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)}=\frac{d}{dx}Ln\,\Gamma(x+1)$$

تعریف می کنیم.

یادآوری : با معادله بسل

$$x^2y''+xy'+(x^2-\alpha^2)y=0$$

از مرتبه α که در آن α یک ثابت است ، قبلا آشنا شدیم. این معادله دیفرانسیل یکی از مهمترین معادلات دیفرانسیل در ریاضیات کاربردی می باشد. جوابهای غیر بدیهی، این معادله به توابع بسل معروف بوده وبه دلیل اهمیت زیاد توابع بسل را مطالعه می کنیم.

حل معادله دیفرانسیل بسل : چنانکه قبلا ملا حظه شد

$x = 0$ یک نقطه منفرد منظم معادله است. می دانیم که معادله حداقل دارای یک جواب بصورت

$$y(x) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n x^{n+s}$$

است. با قرار دادن آن و مشتقات

$$y'(x) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n (n+s) x^{n+s-1} \quad y''(x) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n (n+s)(n+s-1) x^{n+s-2}$$

و

در معادله نتیجه می شود:

$$f(s) = s^2 - \alpha^2 = 0$$

از این رو توانهای معادله دیفرانسیل بسل عبارتند از:

$$s_1 = \alpha \ , \ s_2 = -\alpha$$

و روابط بازگشتی عبارتند از:

$$[(s+1)^2 - \alpha^2]a_1 = 0$$

$$[(n+s)^2 - \alpha^2]a_n = -a_{n-2} \ , \ n \geq 2$$

اگر $s = s_1 = \alpha$ آنگاه:

$$y_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\frac{x}{2})^{2m+\alpha}}{m\,!\,\Gamma(m+\alpha+1)}$$

این جواب را که با

$$J_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\frac{x}{2})^{2m+\alpha}}{m\,!\,\Gamma(m+\alpha+1)}$$

نشان می دهیم، به تابع **بسل نوع اول** معروف است.

اگر $\alpha = n$، عدد صحیح باشد آنگاه:

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\frac{x}{2})^{2m+\alpha}}{m\,!\,(m+\alpha)\,!}$$

تبدیل می شود.

مشابهااگر $s = s_2 = -\alpha$، آنگاه:

$$y_2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\frac{x}{2})^{2m-\alpha}}{m\,!\,\Gamma(m-\alpha+1)}$$

این جواب را که با

$$J_{-\alpha}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\frac{x}{2})^{2m-\alpha}}{m\,!\,\Gamma(m-\alpha+1)}$$

نشان می دهیم. بنابر این در حالتی که α عدد صحیح نیست جواب عمومی معادله بسل عبارت است از:

$$y(x) = c_1 J_\alpha(x) + c_2 J_{-\alpha}(x)$$

که در آن c_1 , c_2 ثابت اند.

توابع بسل از نوع دوم :حال می کوشیم تا تعریفی برای $J_{-\alpha}$ ،
در حالتی که α یک عدد صحیح است، به قسمی ارایه دهیم
تا با جواب J_n از معادله بسل مستقل خطی با شد. چون
داریم: $J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x)$ و وقتی α عدد صحیح
نیست تابع جدید که
$$Y_\alpha(x)=\frac{J_\alpha(x)\cos\alpha\pi - J_{-\alpha}(x)}{\sin\alpha\pi}$$
ترکیبی از جوابهای مستقل خطی است ، نیز جواب معادله
بسل است.در واقع حد زیر وجود دارد وجوابی از معادله بسل
از مرتبه n است:بعلاوه $Y_n(x)=\lim_{\alpha\to n} Y_\alpha(x)\quad,\quad n=0,1,2,...$ ،
این جواب و مستقل خطی هستند.تابع J_n تابع $Y_n(x)$ **بسل**
نوع دوم معروف است.بنا بر این وقتی $\alpha=n$.جواب عمومی
معادله بسل عبارت است از: $y(x)=c_1 J_n(x)+c_2 Y_n(x)$

خواص توابع بسل: اینک، تعدادی از خواص توابع بسل نوع اول یعنی، J_n را بدون اثبات بیان می کنیم.

الف)اگر x_1 , x_2 دو صفر $J_n(x)$ باشند، آنگاه در بازه $x_1 < x < x_2$ صفری از $J_{n-1}(x)$ و $J_{n+1}(x)$ وجود دارد.

ب) تابع بسل $J_n(x)$ برهر بازهای به طول π یک صفر دارد.

ج)هر یک از توابع $n = 0,1,2,...$, $J_n(x)$ در بازه $0 < x < \infty$ بی نهایت صفر مثبت حقیقی دارد.

د)نخستین صفر $J_n(x)$ بزرگتر از n است.

ه) تابع بسل $J_n(x)$ فقط صفر های حقیقی دارد.

روابط بازگشتی:

توابع بسل از نوع اول در روابط بازگشتی گوناگونی صدق می کنند،از جمله

$$\frac{d}{dx}[x^{\alpha} J_{\alpha}(x)] = x^{\alpha} J_{\alpha-1}(x) \qquad (1$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-\alpha} J_{\alpha}(x)] = -x^{-\alpha} J_{\alpha+1}(x) \qquad (2$$

دستگاه معادلات دیفرانسیل

در این فصل با توجه به کاربردهای دستگاه معادلات دیفرانسیل در فیزیك و مکانیك و دیگر کاربردهای آن به بررسی و مطالعه این دستگاه ها می پردازیم.

تعریف: مجموعه ای بیش از یك معادله دیفرانسیل همزمان را دستگاه معادلات دیفرانسیل نامیم.
ساده ترین دستگاه معادلات دیفرانسیل دستگاه دو معادله دیفرانسیل می باشد که عبارت است از:

$$\begin{cases} f\left(t\,,\ x\,,\ \dfrac{dx}{dt}\,,\ \dfrac{d^2x}{dt^2}\,,\ \dots\,,\ \dfrac{d^nx}{dt^n}\right)=0 \\ \\ g\left(t\,,\ y\,,\ \dfrac{dy}{dt}\,,\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\,,\ \dots\,,\ \dfrac{d^my}{dt^m}\right)=0 \end{cases}$$

برای اینکه ساده ترین دستگاه معادلات دیفرانسیل را بررسی کنیم این نوع دستگاهها را با بیان شرایطی به ساده ترین صورت در نظر می گیریم. ساده ترین دستگاه معادلات دیفرانسیل، دستگاه دو معادله دیفرانسیل مرتبه اول می باشد که عبارت است از:

$$\begin{cases} f(t\ ,\ x\ ,\ \dfrac{dx}{dt})=0 \\ \\ g(t\ ,\ y\ ,\ \dfrac{dy}{dt})=0 \end{cases}$$

که ممکن است مضربی از اولی در دومی ظاهر شود و بالعکس، بنابراین صورت دیگری از دستگاه دو معادله دیفرانسیل مرتبه اول بصورت زیر است:

$$\begin{cases} f\left(t\ ,\ x\ ,\ y\ ,\ \dfrac{dx}{dt}\ ,\ \dfrac{dy}{dt}\right)=0 \\ \\ g\left(t\ ,\ x\ ,\ y\ ,\ \dfrac{dx}{dt}\ ,\ \dfrac{dy}{dt}\right)=0 \end{cases}$$

حال اگر توانهای

$$\frac{dy}{dt}\ ,\ \frac{dx}{dt}\ ,\ y\ ,\ x$$

برابر با يك باشد آنرا دستگاه دو معادله مرتبه اول خطی نامیم یعنی:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(t)x + f_2(t)y + f_3(t) \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = f_4(t)x + f_5(t)y + f_6(t) \end{cases}$$

که اگر $f_3(t) = f_6(t) = 0$ آنرا دستگاه دو معادله مرتبه اول خطی همگن نامیم و در صورتی که

$$f_5(t)\ ,\ f_4(t)\ ,\ f_2(t)\ ,\ f_1(t)$$

، اعداد ثابت باشند آنرا دستگاه دو معادله مرتبه اول خطی همگن با ضرایب ثابت نامیم. اکنون با تعدادی از دستگاه معادلات دیفرانسیل آشنا شدیم. روشهایی را برای حل برخی از آنها بیان می کنیم. لازم به تذکر می باشد که جواب دستگاه دو معادله دیفرانسیل بصورت $x = x(t)\ ,\ \ldots\ ,\ y = y(t)$ می باشد. قضیه ای وجود دارد که شرط وجود جواب و منحصر بفرد بودن را بررسی می کند که از ذکر آن صرفنظر می کنیم و فرض می کنیم که وجود دارد و منحصر بفرد است.

برای حل برخی از دستگاه دو معادلات دیفرانسیل روشهایی را بیان می کنیم.

روش اول: یکی از معادلات دستگاه مستقلاً قابل حل می باشد. با یك مثال توضیح می دهیم.

مثال :دستگاه زیر را حل می کنیم:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2xt - x \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = 2yt + x \end{cases}$$

چنانکه ملاحظه می شود معادله اول معادله جداشدنی است

پس

$$\frac{dx}{dt} = x(2t-1) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{x} = \int (2t-1)dt$$

$$\Rightarrow \ln x = t^2 - t + c \Rightarrow x = e^{t^2-t+c} = e^{t^2-t} \cdot e^c$$

که با انتخاب e^c برابر با c_1 داریم:

$$x = c_1 e^{t^2-t}$$

که با جایگذاری در معادله دوم دستگاه نتیجه می شود:

$$\frac{dy}{dt} = 2yt + c_1 e^{t^2-t} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} - 2ty = c_1 e^{t^2-t}$$

و این معادله نیز معادله مرتبه اول خطی است پس:

$$y = e^{-\int -2t dt}\left[\int e^{\int -2t dt} \cdot c_1 e^{t^2-t} dt + c_2\right]$$

$$y = e^{t^2}\left[c_1 \int e^{-t^2} \cdot e^{t^2-t} dt + c_2\right]$$

$$y = e^{t^2}\left[c_1 \int e^{-t} dt + c_2\right] \quad \Rightarrow \quad y = e^{t^2}\left[-c_1 e^{-t} + c_2\right]$$

پس

$$\begin{cases} x = c_1 e^{t^2-t} \\ \\ y = -c_1 e^{t^2-t} + c_2 e^{t^2} \end{cases}$$

جواب دستگاه می باشد.

روش بالا را می توان برای دستگاه سه معادله نیز بکار برد.

مثلا دستگاه سه معادله زیر را می توان حل کرد.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2t \\ \\ \dfrac{dz}{dt} = x + 4y + t \end{cases}$$

روش دوم: حل دستگاه دو معادله مرتبه اول خطی با ضرایب ثابت:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y + f(t) \\[2em]
\dfrac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y + g(t)
\end{cases}
$$

با مشتق گیری از معادلات دستگاه و استفاده از معادله دوم دستگاه آنرا به معادله مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت تبدیل می کنیم که با حل آن قبلاً آشنا شده ایم .

با یك مثال توضیح می دهیم.

مثال : دستگاه زیر را حل می کنیم:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = 3y + x \end{cases}$$

با مشتق گیری از معادله اول داریم: $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 3\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt}$

و با جایگذاری $\dfrac{dy}{dt}$ از معادله دومی نتیجه می شود:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} + 3y + x$$

با جایگذاری y از معادله اول داریم:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} + 3\left(\frac{dx}{dt} - 3x\right) + x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 8x = 0$$

$$x'' - 6x' + 8x = 0$$

که دارای معادله کمکی $D^2 - 6D + 8 = 0$ است که $D = 4$ و $D = 2$ ریشه های متمایز هستند. پس: $x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t}$

حال با جایگذاری در معادله اول داریم:

$$y = \frac{dx}{dt} - 3x = 2c_1 e^{2t} + 4c_2 e^{4t} - 3c_1 e^{2t} - 3c_2 e^{4t}$$

$$y = -c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t}$$

بنابراین

$$\begin{cases} x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t} \\ \\ y = -c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t} \end{cases}$$

جواب دستگاه است.

روش سوم: این روش مشهور به روش **عملگر یا اپراتور** می باشد.

در این روش فرض می کنیم که $\frac{d}{dt} = D$ ، آنگاه با جایگذاری عملگر دستگاه را به روش حذفی گوس حل می کنیم. با یك مثال این روش را توضیح می دهیم .

مثال : دستگاه زیر را به روش D حل می کنیم:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - x + \dfrac{dy}{dt} + 4y = 1 \\ \\ \dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} = t - 1 \end{cases}$$

با استفاده از نماد $\frac{d}{dt} = D$ داریم:

$$\begin{cases} 2Dx - x + Dy + 4y = 1 \\ \\ Dx - Dy = t - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases}(2D-1)x+(D+4)y=1\\ \\ Dx-Dy=t-1\end{cases}$$

با ضرب معادله اول در D ومعادله دوم در $D+4$
و جمع طرفین دستگاه داریم:

$$D(2D-1)x+(D+4)Dx=D(1)+(D+4)(t-1)$$

$$(2D^2-D+D^2+4D)x=0+D(t)+4t-D(1)-4$$

$$(3D^2+3D)x=4t-3$$

این معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت
غیرهمگن می باشد پس:

$$3D^2 + 3D = 0 \quad \Rightarrow \quad 3D(D+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 0 \ , \ D = 1$$

بنابراین $x_c = c_1 + c_2 e^{-t}$ و برای پیدا کردن x_p جواب خاص غیرهمگن آنرا به روش ضرایب ثابت حل می کنیم.

چون صفر ریشه معادله کمکی است پس:

$$x_p = t(A_\circ t + A_1)$$

$$x_p = A_\circ t^2 + A_1 t \quad \Rightarrow \quad x'_p = 2A_\circ t + A_1 \quad \Rightarrow \quad x''_p = 2A_\circ$$

با جایگذاری در معادله نتیجه می شود:

$$3x_p'' + 3x_p' = 4t - 3$$

$$6A_\circ + 6A_\circ t + 3A_1 = 4t - 3 \quad \Rightarrow \quad A_\circ = \frac{2}{3} \quad , \quad A_1 = -\frac{7}{3}$$

پس $x_p = \frac{2}{3}t^2 - \frac{7}{3}t$ ، بنابراین $x = c_1 + c_2 e^{-t} + \frac{2}{3}t^2 - \frac{7}{3}t$

بنابراین با جایگذاری معادله داریم:

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = t - 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} - t + 1$$

$$\frac{dy}{dt} = -c_2e^{-t} + \frac{4}{3}t - \frac{7}{3} - t + 1$$

$$\frac{dy}{dt} = -c_2e^{-t} + \frac{1}{3}t - \frac{4}{3}$$

$$\int dy = \int (-c_2e^{-t} + \frac{1}{3}t - \frac{4}{3})dt$$

$$y = c_2e^{-t} + \frac{1}{6}t^2 - \frac{4}{3}t + c_3$$

پس $\begin{cases} x = c_1 + c_2e^{-t} + \frac{2}{3}t^2 - \frac{7}{3}t \\ y = c_2e^{-t} + \frac{1}{6}t^2 - \frac{4}{3}t + c_3 \end{cases}$ جواب دستگاه می باشد.

تذکر : روشهای اول و سوم چنانکه ملاحظه می شود از حل دستگاه معمول

$$\begin{cases} 2x + 3 = 7 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

نتیجه گیری شده است. مثلاً دستگاه معمول را می توان بسادگی حل کرد که یکی از معادلات دستگاه مستقلاً قابل حل می باشد و روش سوم نیز همان روش حذفی گاوس می باشد که درحل دستگاه

$$\begin{cases} 2x + 3 = 7 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

استفاده می شود.

تذکر: روشهای بالا را برای حل دستگاه دو معادلات خطی استفاده کردیم می توان آنرا برای حل دستگاه سه معادلات خطی نیز استفاده کرد و همچنین می توان آن را تعمیم داد و برای دستگاههایی با معادلات دیفرانسیل خطی بیشتر نیز استفاده کرد.

تذکر: همانطوری که در دستگاه معمول ممکن است دستگاه دارای جواب منحصر بفرد و یا بی نهایت جواب و یا جواب نداشته باشند در دستگاه معادلات دیفرانسیل نیز چنین می باشد. مثلاً دستگاه

$$\begin{cases} Dx_1 - Dx_2 = t \\ 4Dx_1 - 4Dx_2 = 4t \end{cases}$$

دارای بی نهایت جواب می باشد.

مثلاً $\begin{cases} x_1 = \dfrac{t^2}{2} + c \\ x_2 = 5c \end{cases}$ و $\begin{cases} x_1 = \dfrac{t^2}{2} + c_1 \\ x_2 = \dfrac{t}{2} - \dfrac{t^2}{2} + c_2 \end{cases}$ جوابهایی

از دستگاه است.

در هر کدام از جوابها $x_1 = x_1(t)$ را به دلخواه انتخاب کرده و دستگاه را بر حسب $x_2 = x_2(t)$ حل می کنیم. ولی دستگاه

$$\begin{cases} Dx_1 - Dx_2 = t \\ Dx_1 - Dx_2 = t^2 \end{cases}$$

دارای جواب نیست.

تذکر: ملاحظه شد که دستگاه معادلا ت دیفرانسیل در روش سوم بصورت کلی:

$$\begin{cases} f_1(D)x + f_2(D)y = g(t) \\ \\ f_3(D)x + f_4(D)y = h(t) \end{cases}$$

می باشد که دترمینال ضرایب یعنی:

$$W(D) = \begin{vmatrix} f_1(D) & f_2(D) \\ \\ f_3(D) & f_4(D) \end{vmatrix}$$

را دترمینان دستگاه معادلات دیفرانسیل نامیم.

قضیه زیر را بدون اثبات می پذیریم.

قضیه : تعداد پارامتر در جواب عمومی $x = x(t)$ و $y = y(t)$ دستگاه بالا برابر با توان $W(D)$ است مشروط بر اینکه $W(D) \neq 0$ باشد.

بنابراین در جوابهایی از دستگاههایی که تعداد پارامتر بیشتر از توان $W(D)$ است ، می توان پارامترهای اضافی را با جایگذاری در دستگاه معادلات حذف کرد.

در این فصل ملاحظه خواهیم کرد چگونه با به کار بردن تبدیل لاپلاس در مورد یك معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه ، می توان آن را به مسئله ساده تری تبدیل کرده بطوری که با وارون تبدیل لاپلاس جواب مسئله ابتدائی بدست می آید و همچنین ملاحظه خواهد شد که روش های تغییر پارامتر و ضرایب ثابت را در مورد حل معادلات دیفرانسیل غیر همگن که تابع طرف دوم ناپیوسته باشد نمی توان بکار برد که در این حالت می توان از تبدیل لاپلاس استفاده کرد.

تبدیل لاپلاس

تبدیل مفهوم تعمیم یافته تابع می باشد ، یعنی رابطه ای که به هر تابع ، تابع دیگری را نسبت دهد، یك تبدیل نامیم. از جمله تبدیلات مشهور تبدیل مشتق و انتگرال و مضرب در عبارتی می باشد که معمولاً با نماد زیر بترتیب نشان می دهیم.

1) $$D(f(x)) = F'(x)$$

2) $$\int f(x)dx = F(x) + c$$

3) ضرب در $e^{\alpha x}$ $$M(f(x)) = e^{\alpha x} f(x)$$

تعریف: فرض کنیم تابع f بربازه $[0,\infty)$ تعریف شده باشد

، انتگرال ناسره

$$\int_0^\infty e^{-sx} f(x)dt$$

را که S عدد حقیقی است به ازای مقادیر S از $A \subseteq R$

همگرا باشد آنرا تبدیل لاپلاس تابع f نامیم و با نماد $F(s)$

نشان می دهیم یعنی :

$$\forall s \in A \qquad F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

برای بیان رابطه بین تابع F و تبدیل لاپلاس تابع f

می نویسیم: $$F(s) = L(f)(s)$$

شرایط وجود تبدیل لاپلاس را بعداً مطالعه خواهیم کرد.
اینك تبدیل لاپلاس چند تابع خاص را پیدا می کنیم .
تبدیل لاپلاس تابع $f(x)=1$ را پیدا می کنیم. یعنی:

$$L(1)=F(s)=\int_{\circ}^{\infty} e^{-sx}dx=\lim_{b\to\infty}\int_{\circ}^{b} e^{-sx}dx=\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-sx}\right]_{\circ}^{b}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-sb}+\frac{1}{s}e^{\circ}\right)$$

به ازای $s>0$ انتگرال همگراست پس:

$$L(1)=\frac{1}{s}$$

تبدیل لاپلاس تابع $f(x)=x$ را پیدا می کنیم :

$$L(x)=F(s)=\int_{\circ}^{\infty} e^{-sx}\cdot x dx=\lim_{b\to\infty}\int_{\circ}^{b} xe^{-sx}dx=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{s}xe^{-sx}\Big|_{\circ}^{b}+\int_{\circ}^{\infty}\frac{1}{s}e^{-sx}dx\right]=\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{s}xe^{-sx}-\frac{1}{s^2}e^{-sx}\right]_{\circ}^{b}$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{s}be^{-sb}-\frac{1}{s^2}e^{-sb}+\frac{1}{s}xe+\frac{1}{s^2}e^{\circ}\right]$$

به ازای $s>0$ انتگرال همگراست پس

$$L(x)=\frac{1}{s^2}$$

تبدیل لاپلاس تابع $f(x) = x^n$ را پیدا می کنیم

$$L(x^n) = \int_0^\infty e^{-sx} \cdot x^n dx = -\frac{x^n e^{-sx}}{s} + \frac{n}{s}\int_0^\infty e^{-sx} \cdot x^{n-1} dx$$

$$= \frac{n}{s} L(x^n - 1) = \frac{n}{s}\left(\frac{n-1}{s}\right) L(x^{n-2}) = \cdots = \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \cdots \frac{1}{s} L(1)$$

به ازای $s > 0$ انتگرال همگراست پس :

$$L(x^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

درتمرینات نشان داده می شود:

اگر $s > \alpha$ ، آنگاه

$$L(e^{\alpha x}) = \frac{1}{s-\alpha}$$

خواص تبدیل لاپلاس

با توجه به اینکه تبدیل لاپلاس توسط انتگرال تعریف شده

است لااقل دارای خواص خطی انتگرال را می باشد.

قضیه: نشان دهید که :

$$L(\alpha f(x)+g(x))=\alpha L(f(x)+L(g(x))$$

اثبات : چون α عدد ثابت می باشد پس

$$L(\alpha f(x)+g(x))=\int_{0}^{\infty} e^{-sx}(\alpha f(x)+g(x))dx=$$

$$=\alpha\int_{0}^{\infty} e^{-sx} f(x)dx+\int_{0}^{\infty} e^{-sx} g(x)dx=\alpha L(f(x))+L(g(x))$$

گرچه این خاصیت اثبات کوتاهی دارد ولی خواص خیلی قوی می باشد و می توان بسیاری از تبدیل لاپلاس توابع را پیدا کرد.

مثال:

$$L(f(x)) = L(5x^2 + 12) = 5L(x^2) + 12L(1)$$

$$= 5 \times \frac{2!}{s^3} + 12 \times \frac{1}{s} = \frac{10}{s^3} + \frac{12}{s}$$

$$L(g(x)) = L(3e^{2x} + 3x) = 3L(e^{2x}) + 3L(x)$$

$$= 3 \times \frac{1}{s-2} + 3 \times \frac{1}{s^2} = \frac{3}{s-2} + \frac{3}{s^2}$$

حال تبدیل لاپلاس تابع $f(x) = e^{i\alpha x}$ عبارت است از

$$L(e^{i\alpha x}) = \frac{1}{s - i\alpha} = \frac{1}{s - i\alpha} \times \frac{s + i\alpha}{s + i\alpha} = \frac{s + i\alpha}{s^2 + \alpha^2} = \frac{s}{s^2 + \alpha^2} + i \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$$

و از طرفی

$$L(e^{i\alpha x}) = L(\cos \alpha x + i \sin \alpha x) = L(\cos \alpha x) + iL(\sin \alpha x)$$

بنابر تساوی دو طرف اول تساویها داریم:

$$L(\sin \alpha x) = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2} \qquad L(\cos \alpha x) = \frac{s}{s^2 + \alpha^2}$$

مثال:

$$L(f(x)) = L(\sinh x) = L(\frac{e^{\propto x} - e^{-\propto x}}{2})$$

$$= \frac{1}{2}\left[L(e^{\alpha x}) - L(e^{-\alpha x})\right] = \frac{1}{2}(\frac{1}{s-\alpha} - \frac{1}{s+\alpha}) = \frac{1}{2}(\frac{s+\alpha-s+\alpha}{s^2-\alpha^2}) = \frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$$

$$L(g(x)) = L(\cosh \alpha x) = L(\frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2}) = (L(e^{\alpha}) + L(e^{-\alpha x}))$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{s-\alpha} + \frac{1}{s+\alpha}) = \frac{1}{2}(\frac{s+\alpha+s-\alpha}{s^2-\alpha^2}) = \frac{s}{s^2-\alpha^2}$$

با شرط $|s| > \alpha$

به عنوان دومین خاصیت از تبدیل لاپلاس خاصیت **انتقال** می باشد.

قضیه 5: فرض کنید $F(s)=L(f(x))$ آنگاه

$$L(e^{\alpha x} f(x)) = F(s-\alpha)$$

اثبات:

$$L(e^{\alpha x} f(x)) = \int_{0}^{\infty} e^{-sx} \cdot e^{\alpha x} f(x)dx =$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(s-\alpha)x} f(x)dx = F(s-\alpha)$$

چون

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-sx} f(x)dx$$

مثلا:

الف) $$L(e^{7x}\sin 5x)=\frac{5}{(s-7)^2+25}$$

ب) $$L(e^{3x}\cos 4x)=\frac{s-3}{(s-3)^2+16}$$

ج) $$L(e^{-2x}x^5)=\frac{5!}{(s+2)^6}$$

به عنوان سومین خاصیت از تبدیل لاپلاس خاصیت **مضرب** می باشد .

قضیه :فرض کنید $F(s)=L(f(x))$ آنگاه

$$L(xf(x))=-\frac{d}{ds}F(s)$$

اثبات:

$$-\frac{d}{ds}F(s)=-\frac{d}{ds}\int_{0}^{\infty}e^{-sx}f(x)dx=-\int_{0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial s}e^{-sx}f(x)dx$$

$$=-\int_{0}^{\infty}(-x)e^{-sx}f(x)dx=\int_{0}^{\infty}e^{-sx}(xf(x)dx)=L(xf(x))$$

نتیجه :

$$L(x^2 f(x)) = (-1)^2 \frac{d^2}{ds} F(s)$$

اثبات:

$$L(x^2 f(x)) = L(x \cdot xf(x)) = (-1)\frac{d}{ds} L(xf(x)) =$$

$$= (-1)\frac{d}{ds}\frac{d}{ds} L(f(x)) = (-1)^n \frac{d^2}{ds^2} F(s)$$

به استقراء نتیجه می شود که

$$L(x^n f(x)) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L(f(x))$$

مثال:

الف)

$$L(x\sin x) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = -\frac{-2s}{(s^2+1)^2} = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

ب)

$$L(x\cos x) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) = -\frac{s^2+1-2s^2}{(s^2+1)^2} = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$$

ج)

$$L(x^2\sin x) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right) = -\frac{2(s^2+1)^2-8s^2(s^2+1)}{(s^2+1)^4} = \frac{-6s^4-4s^2+2}{(s^2+1)^4}$$

از آنجائیکه معادله دیفرانسیل ازترکیباتی
از x یعنی $f(x)$ ومشتق یعنی y'
و مشتقات مراتب بالا تشکیل شده است
بنابراین در این قسمت تبدیل لاپلاس
مشتق را بررسی می کنیم .

قضیه :نشان دهید $L(y') = sL(y) - y(0)$

اثبات: چون
$$L(y') = \int_{0}^{\infty} e^{-sx} \cdot y'dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} e^{-sx} \cdot y'dx$$

با استفاده از روشی جز به جز داریم:

$$e^{-sx} = u \quad \text{و} \quad y'dx = dv$$
$$-se^{-sx}dx = du \quad \text{و} \quad y = v$$

پس
$$L(y') = \lim_{b\to+\infty} \left(ye^{-sx} \Big|_{0}^{b} + \int_{0}^{b} Se^{-sx} ydx \right)$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(y(b)e^{-sb} - y(0)e^{0} + s\int_{0}^{b} e^{-sx} ydx \right)$$

اگر $s > 0$ آنگاه : $L(y') = -y(0) + sL(y) = sL(y) - y(0)$

نتیجه :نشان دهید. $L(y'') = s^2 L(y) - sy(0) - y'(0)$

اثبات:

$$L(y'') = L((y'))' = sL(y') - y'(0) = s(sL(y) - y(0)) - y'(0) =$$

$$= s^2 L(y) - sy(0) - y'(0)$$

به استقراء نتیجه می شود که:

$$L(y^{(n)}) = s^n L(y) - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} y'(0) - \cdots - sy^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0)$$

معکوس تبدیل لاپلاس

فرض کنیم تبدیل لاپلاس تابع $f(x)$ وجود داشته باشد. در این صورت واضح است که تابع منحصر بفردی مانند $F(s)$ وجود دارد که $F(s) = L(f(x))$

اینك عکس این حالت را در نظر می گیریم. فرض کنید تابعی مانند $F(s)$ داده شده باشد. آیا تابع منحصر بفردی مانند $f(x)$ وجود دارد به گونه ای که داشته باشیم :

$$F(s) = L(f(x))$$

اگر پاسخ سؤال مثبت باشد می نویسیم:

$$f(x) = L^{-1}(F(s))$$

$f(x)$ را وارون یا معکوس تبدیل لاپلاس تابع $F(s)$ نامیم.

اینك برخی خواص معكوس تبدیل لاپلاس را بررسی می كنیم.

قضیه: نشان دهید:

$$L^{-1}(\alpha F(s)+G(s))=\alpha L^{-1}(F(s)+L^{-1}(G(s))$$

اثبات: قضیه قبلی ملاحظه شود.

مثال:

الف)
$$L^{-1}(\frac{5}{s}) = 5L^{-1}(\frac{1}{s}) = 5\times 1 = 5$$

ب)
$$L^{-1}(\frac{4}{s^3}+\frac{6}{s^2+4}) = 2L^{-1}(\frac{2!}{s^3}) + 3L^{-1}(\frac{2}{s^2+4}) = 2x^2 3\sin 2x$$

ج)
$$L^{-1}(\frac{2}{s+3}) = 2L^{-1}(\frac{1}{s-(-3)}) = 2e^{-3x}$$

د)

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+s}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{s(s+1)}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{s}+\frac{-1}{s+1}\right)$$

$$=L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)-L^{-1}\left(\frac{1}{s-(-1)}\right)=1-e^{-x}$$

هـ)

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^4+s^2}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{-1}{s^2+1}\right)$$

$$=L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)-L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)=x-\sin x$$

خواص معکوس تبدیل لاپلاس

قضیه: نشان دهید:

$$L^{-1}(F(s-\alpha)) = e^{\alpha x} f(x)$$

اثبات قضیه قبلی ملاحظه شود.

مثال:

الف)

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4s+5}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)^2+1^2}\right)=e^{2x}\cdot\sin x$$

ب)

$$L^{-1}\left(\frac{6}{(s+2)+9}\right)=2L^{-1}\left(\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right)=2e^{-2x}\cdot\sin 3x$$

بقیه مثال:

ج)

$$L^{-1}\left(\frac{12}{(s+3)^4}\right)=2L^{-1}\left(\frac{3!}{(s+3)^4}\right)=2e^{-3x}\cdot x^3$$

د)

$$L^{-1}\left(\frac{s+3}{s^2+2s+5}\right)=L^{-1}\left(\frac{s+1+2}{(s-1)^2+2^2}\right)=L^{-1}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}\right)+L^{-1}\left(\frac{2}{(s+1)^2+2^2}\right)$$

$$=e^{-x}\cos 2x+e^{-x}\sin 2x$$

حل معادله دیفرانسیل بروش لاپلاس

اینك آماده هستیم نشان دهیم که چگونه می توان جواب یك مسئله با مقدار اولیه دشوار را به کمك تبدیلات لاپلاس ، به مسئله دیگری با شرایط ساده تر تبدیل کرده و سپس با استفاده از وارون تبدیل لاپلاس جواب معادله دیفرانسیل را بدست آورد. با یك مثال ساده در مورد معادله دیفرانسیل مرتبه اول توضیح می دهیم.

مثال : معادله $y' + y = e^x$ را با شرط $y(0) = 1$ حل می کنیم :

حل: ابتدا تبدیل لاپلاس را روی معادله اثر می دهیم :

$$L(y' + y) = L(e^x) \quad \Rightarrow \quad L(y') + L(y) = L(e^x)$$

$$SL(y) - y(0) + L(y) = L(e^x)$$

$$SL(y) - 1 + L(y) = \frac{1}{s-1}$$

$$(s+1)L(y) = \frac{1}{s-1} + 1 = \frac{1+s-1}{s-1} = \frac{s}{s-1}$$

$$L(y) = \frac{s}{(s-1)(s+1)}$$

حال وارون تبدیل لاپلاس را محاسبه می کنیم:

$$y = L^{-1}\left(\frac{s}{(s-1)(s+1)}\right) = L^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{s-1} + \frac{\frac{1}{2}}{s+1}\right)$$

$$y = \frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) + \frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)$$

$$y = \frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{2}e^{-x}$$

مثال : معادله $y' + 2y = e^{-x}$ را با شرط $y(0) = 2$ حل می کنیم.

حل : ابتدا تبدیل لاپلاس را روی معادله اثر می دهیم:

$$L(y' + 2y) = L(e^{-x}) \quad \Rightarrow \quad L(y') + 2L(y) = L(e^{-x})$$

$$\Rightarrow SL(y) - y(0) + 2L(y) = L(e^{-x})$$

$$\Rightarrow (s+2)L(y) = \frac{1}{s+1} + 2 = \frac{2s+3}{s+1} \Rightarrow L(y) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}$$

حال وارون تبدیل لاپلاس را محاسبه می کنیم:

$$y = L^{-1}\left(\frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}\right)$$

$$y = L^{-1}\left(\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}\right)$$

$$y = L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) + L^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) \Rightarrow y = e^{-x} + e^{-2x}$$

مثال : مطلوب است جواب معادله $y'' + 4y = 4x$

با شرایط $y(0) = 1$ و $y'(0) = 0$

حل:

$$L(y'' + 4y) = L(4x) \quad \Rightarrow \quad L(y'') + 4L(y) = 4L(x)$$

$$s^2 L(y) - sy(0) - y'(0) + 4L(y) = 4L(x)$$

$$(s^2 + 4)L(y) = \frac{4}{s^2} + s + 5 = \frac{4 + s^3 + 5s^2}{s+1}$$

$$L(y) = \frac{s^3 + 5s^2 + 4}{s^2(s^2 + 4)} \qquad y = L^{-1}\left(\frac{s^3 + 5s^2 + 4}{s^2(s^2 + 4)}\right)$$

$$y = L^{-1}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{s+4}{s^2 + 4}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{4}{s^2 + 4}\right)$$

$$y = L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) + L^{-1}\left(\frac{s}{s^2 + 4}\right) + 2L^{-1}\left(\frac{2}{s^2 + 4}\right)$$

تبدیل لاپلاس برخی توابع

قبل از آنکه به تبدیل لاپلاس برخی توابع دیگر بپردازیم خوب است شرایطی را که تابع باید دارا باشد تا تبدیل لاپلاس داشته باشد، د دقیقتر مورد توجه قرار دهیم.

برای تضمین وجود تبدیل لاپلاس، کافی است فرض کنیم که $f(x)$ پیوسته و یا لااقل قطعه به قطعه پیوسته است. مقصود از عبارت اخیر آن است که تابع $f(x)$ در هر فاصله متناهی $0 \le x \le b$ پیوسته است، مگر احتمالاً در تعدادی متناهی نقطه که دارای نا پیوستگی جهشی است،

یعنی تابع در آن نقاط حد های چپ و راست متفاوتی دارد.

این شرط لازم نیست مثلاً تابع $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ در $x = 0$ دارای یک نا پیوستگی از نوع بینهایت است وبنابر این قطعه به قطعه پیوسته نیست، با این وجود انتگرالش از 0 تا b

وجود دارد و از آنجا که برای های بزرگ کراندار نیز هست، $s>0$ تبدیل لاپلاس آن وجود دارد. در واقع، برای، داریم:

$$L(x^{-\frac{1}{2}}) = \int_0^\infty e^{-sx} x^{-\frac{1}{2}} dx$$

و تغییر متغیر $sx = t$ نتیجه می دهد

$$L(x^{-\frac{1}{2}}) = s^{\frac{-1}{2}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{-1}{2}} dt$$

یک تغییر متغیر $t = s^2$ بدست می دهد

$$L(x^{-\frac{1}{2}}) = 2s^{\frac{-1}{2}} \int_0^{\infty} e^{-s^2} ds$$

در درس حساب دیفرانسیل و انتگرال نشان داده می شود که

انتگرال اخیر برابر با $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ است، لذا داریم:

$$L(x^{\frac{-1}{2}}) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

تعریف: تابع

$$u_c(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<c\\ 1 & x\ge c\end{cases}$$

که $c\ge 0$ می باشد را تابع پله ای واحد نامیم و تبدیل لاپلاس آن را پیدا می کنیم:

$$L(u_c(x))=\int_0^{\infty}e^{-sx}.u_c(x)dx=\int_0^{c}e^{-sx}.0dx+\int_c^{\infty}e^{-sx}.1dx=\lim_{b\to+\infty}\int_c^{b}e^{-sx}dx$$

$$=\lim_{b\to\infty}(-\frac{1}{s}e^{-sx})_c^b=\lim_{b\to\infty}(-\frac{1}{s}e^{-sb}+\frac{1}{s}e^{-cs})=\frac{e^{-cs}}{s}$$

با شرط $s>0$

مثال: تابع زیر را برحسب توابع پله ای واحد می نویسیم؟

$$f(x)=\begin{cases} f_0(x) & 0\le x<x_0 \\ f_1(x) & x_0\le x<x_1 \\ f_2(x) & x_1\le x<x_2 \\ f_3(x) & x_2\le x<x_3 \\ f_4(x) & x\ge x_3 \end{cases}$$

حل:

$$f(x)=f_0(x)+[f_1(x)-f_0(x)]u_{x_0}(x)+[f_2(x)-f_1(x)]u_{x_1}(x)+$$
$$[f_3(x)-f_2(x)]u_{x_2}(x)+[f_4(x)-f_3(x)]u_{x_3}(x)$$

مثال: تابع

$$f(x)=\begin{cases} x & 0\le x<4 \\ 5 & 4\le x<5 \\ x^2 & x\ge 5 \end{cases}$$

را بصورت تابع پله ای واحد می نویسیم؟

$$f(x)=x+(5-x)u_4(x)+(x^2-5)u_5(x)$$

تذکر: از تابع پله ای واحد می توان برای انتقال تابع داده شده f ، که دامنه تعریف آن $x \geq 0$ به اندازه c واحد در جهت راست استفاده کرد. برای مثال تابع تعریف شده توسط

$$y = u_c(x) f(x-c) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < c \\ f(x-c) & x \geq c \end{cases}$$

نمایش انتقالی از تابع به اندازه c واحد در جهت مثبت x می باشد .

قضیه: نشان دهید: $s>0$ $\quad L(u_c(x)f(x-c))=e^{-cx}F(s)$

اثبات:

$$L(u_c(x)f(x-c))=\int_0^{\infty}e^{-sx}u_c(x)f(x-c)dx=\int_c^{\infty}e^{-sx}f(x-c)dx$$

با تغییر متغیر $u=x-c$ داریم:

$$L(u_c(x)f(x-c))=\int_0^{\infty}e^{-s(u+c)}f(u)du=$$

$$e^{-cs}\int_0^{\infty}e^{-su}f(u)du=e^{-cs}F(s) \qquad s>0$$

مثال:تبدیل لاپلاس تابع

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \le x < 2\pi \\ \sin x + \cos x & x \ge 2\pi \end{cases}$$

را پیدا می کنیم.

حل: با استفاده از مثال قبل تابع f را می توان بر حسب تابع پله ای $u_{2\pi}(x)$ به صورت

$$f(x) = \sin x + u_{2\pi}(x)\cos x$$

نوشت.

چون $\cos t = \cos(x - 2\pi)$ پس

$$f(x) = \sin x + u_{2\pi}(x)\cos(x - 2\pi)$$

بنابر خواص و فرمول های تبدیل لاپلاس

$$F(s) = \frac{1}{s^2+1} + e^{-2\pi s}\frac{s}{s^2+1} = \frac{1+se^{-2\pi s}}{s^2+1} \qquad s > 0$$

قضیه: اگر $F(s) = L(f(x))$ و $G(s) = L(g(x))$
هر دو به ازای $s \geq 0$ موجود باشد آنگاه

$$H(x) = F(s)G(s) = L(h(x))$$

که در آن $h(x) = \int_0^x f(x-u)g(u)du$

تابع h به **کنولوسیون** f و g معروف است وآن را با

$$h = f * g$$

نشان می دهیم .

نشان می دهیم که $f * g(x) = g * f(x)$

زیرا

$$f * g(x) = \int_0^x f(x-u)g(u)du$$

با بکار بردن تغییر متغیر $x - u = v$ انتگرال بالا

را می توان به صورت زیر نوشت:

$$f * g(x) = \int_x^0 f(v)g(x-v)(-dv)$$

$$= \int_0^x g(x-v)f(v)dv$$

$$= g * f(x)$$

مثال:با بکار بردن کنولوسیون تبدیل معکوس تابع

$$H(s) = \frac{a}{s^2(s^2 + a^2)}$$

را پیدا می کنیم؟

حل:با فرض $F(s) = \frac{1}{s^2}$ و $G(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$ تبدیل لاپلاس

$L(x) = \frac{1}{s^2}$ و $L(\sin ax) = \frac{a}{s^2 + a^2}$داریم:

$$h(x) = f * g(x) = \int_0^x (x-u)\sin au\,du$$

با بکار بردن روش جزبه جز داریم:

$$h(x) = \frac{ax - \sin ax}{a^2}$$

تذکر:مثال بالا را می توان با بکار بردن کسرهای جزیی بصورت زیر محاسبه کرد :

$$H(s) = \frac{1}{a^2}\left(\frac{a}{s^2} - \frac{a}{s^2+a^2}\right)$$

بنابر این

$$h(x) = \frac{1}{a^2}(ax - \sin ax)$$

قضیه: نشان دهید که اگر c یک عدد مثبت باشد آنگاه

$$L(f(cx)) = \frac{1}{c}F(\frac{s}{c})$$

اثبات:

$$L(f(cx)) = \int_0^\infty e^{-sx} f(cx)dx$$

با به کار بردن تغییر متغیر $cx = u$ انتگرال بالا به صورت

$$L(f(cx)) = \int_0^\infty e^{\frac{-s}{c}u} f(u)\frac{1}{c}du =$$

$$\frac{1}{c}\int_0^\infty e^{\frac{-s}{c}u} f(u)du = \frac{1}{c}F(\frac{s}{c}) \qquad \frac{s}{c} > a \ \ , s > ca$$