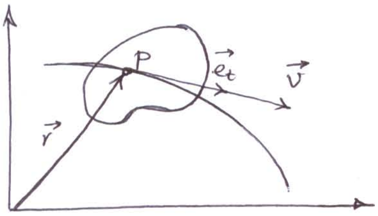
* شتاب شناسی سازوکارهای صفحه‌ای

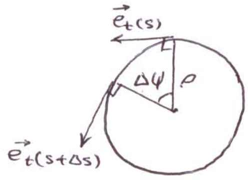
برگردیم به حرکت در صفحه!

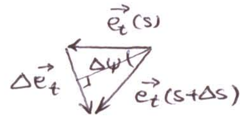


$$\vec v = \frac{d\vec r}{dt} = \overbrace{\frac{d\vec r}{ds}}^{\vec e_t}\cdot\overbrace{\frac{ds}{dt}}^{v} = v\vec e_t$$

$$\vec A = \frac{d\vec v}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec e_t + v\frac{d\vec e_t}{dt}$$

$$\frac{d\vec e}{dt} = \frac{d\vec e}{ds}\cdot\underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v}$$

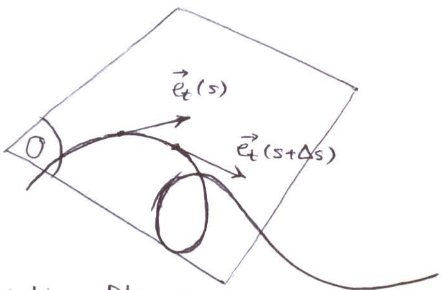




$$|\Delta\vec e_t| \simeq (1)\,\Delta\psi = \frac{\Delta s}{\rho} \longrightarrow \Delta\psi = \frac{\Delta s}{\rho} \Rightarrow \frac{|\Delta\vec e_t|}{\Delta s} \to \frac{1}{\rho} \Rightarrow \left|\frac{d\vec e_t}{ds}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\vec e_t}{\Delta s}\right| = \frac{1}{\rho}$$

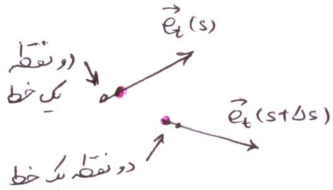
$$\Delta\psi = 2(1)\sin\frac{\Delta\psi}{2} \simeq 2\times\frac{\Delta\psi}{2} = \Delta\psi$$

$$\Rightarrow \vec A = \frac{dv}{dt}\vec e_t + \frac{v^2}{\rho}\vec e_n = \frac{d^2s}{dt^2}\vec e_t + \frac{(ds/dt)^2}{\rho}\vec e_n$$



Osculating Plane

صفحه بوسان →



این دوتا در حالت کلی حرکت جسم

صلب در فضا دو خط متنافرند!

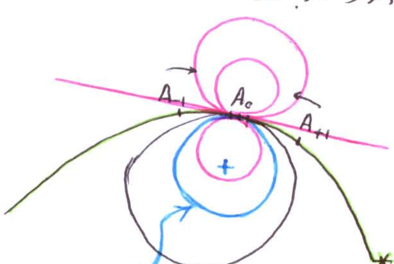
نقطه‌های صورتی بیفتند روی هم ←

وقتی که $\vec e_t(s+\Delta s) \to \vec e_t(s)$ ، چهار نقطه تبدیل به سه نقطه می‌شود و می‌شود

یک صفحه از آن‌ها عبور داد (که کمک می‌کند حرکت در فضا را بیاوریم در صفحه)

وقتی هواپیما می‌نشیند بر زمین، حداقل مرتبه‌ی اتصال ۳ و هرچه بالاتر، فرود نرم‌تر و بهتر است.

برای یک جسم سه‌بعدی، ∞^3 صفحه بوسان داریم پس.



Osculating Circle

Circle of Curvature

از بین همه‌ی دوایری که مرتبه‌ی اتصالشان با منحنی * ، ۲ است، فقط یک دایره وجود دارد که مرتبه‌ی اتصالش ۳ است. ← دایره بوسان Circle of Curvature.

✓ اگر داری روی * قدم می‌زنی و بعد بری روی دایره بوسان، شتابت هم یکی می‌شوند!

هیچ دایره‌ای به هیچ دایره‌ای با اتصال مرتبه ۳ نمی‌چسبد.

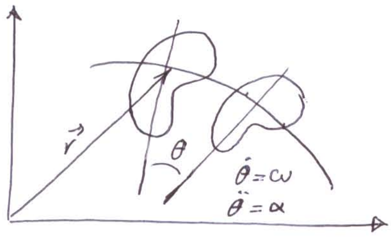
حرکت صفحه‌ای را اینگونه تبدیل کردیم به حرکت بر مسیر دایره‌ای!

$\vec v = \rho\dot\varphi\,\vec e_\varphi$

$\vec A = \rho\ddot\varphi\,\vec e_\varphi + \rho\dot\varphi^2\,\vec e_\rho$ $\qquad \dot\varphi \neq 0 \qquad \ddot\varphi \neq 0$

LearnElement.ir

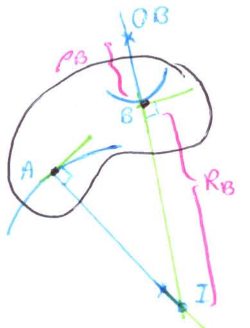
$\dot{\psi}$ و $\ddot{\psi}$ سرعت و شتاب جاروکردن شعاع انحنا هستند و فقط اگر مرکز انحنا، مرکز دائم چرخش باشد، همان ω و α خواهند بود.



برای اینکار باید از ۴ نقطه‌ی پشت سرهم جسم یک دایره بگذره تا در این لحظه و لحظه‌ی بعد، مرکز انحنا تغییر نکند. ← $\frac{d\rho}{ds}=0$ ← جاهایی از مسیر که شعاع انحنا اکسترمم است. (همه‌ی اینها در حرکت صفحه‌ای ست، در حرکت فضایی چنین چیزی وجود ندارد)

برای جسم صلب ←

IC وجود دارد و یکتاست، پس مرکز آنی دوران وجود دارد و یکتاست ولی مرکز انحنای هر نقطه جسم می‌تواند متفاوت باشد. مماس مشترک منحنی پایه و غلتان، جایی که مرکز انحنا و مرکز آنی دوران یکجا هستند.

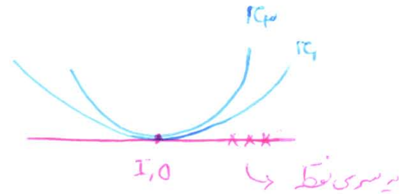


$v = R\omega = \rho\dot{\psi}$

$A^t = R\alpha = \rho\ddot{\psi}$

$A^n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{R^2\omega^2}{\rho} = \underline{R\omega^2}$

فقط در یک سری نقاط



از مسیر

$$\vec{A} = \underbrace{\frac{d^2s}{dt^2}\vec{e}_t}_{A^t} + \underbrace{\frac{(ds/dt)^2}{\rho}\vec{e}_n}_{A^n}$$

سرعت شناسی

$$\vec{A} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n$$

در دینامیک ماشین (یعنی سیستم‌های اجسام صلب مقید) ما مسیرها را می‌شناسیم، سرعت‌ها را هم حل کرده‌ایم! مشتقات دوم زمانی را ولی نداریم!

$$\rho = \frac{[1+y'^2]^{3/2}}{y''} \rightsquigarrow \text{pass curvature theory}$$

ρ را هم فرض می‌کنیم هست!

پس در این درس، شتاب مماسی را یه کم مجهول داریم ولی شتاب نرمال را کامل داریم همیشه!

$$\vec{A} = \vec{A}^t + \vec{A}^n$$

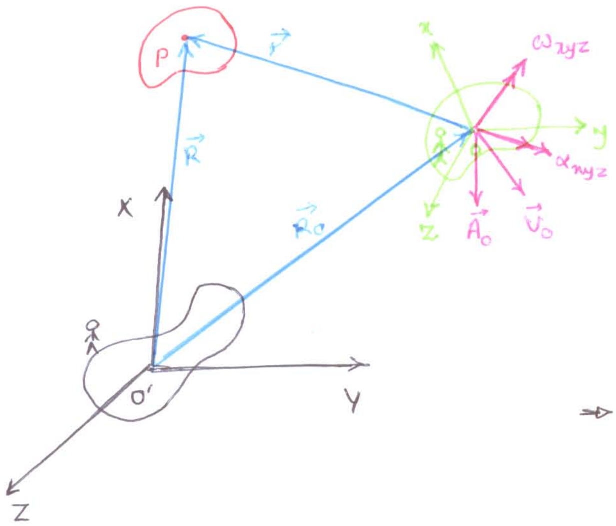
بخش مماس بر مسیر نیرو، اندازه‌ی سرعت را تغییر می‌دهد و شتاب مماسی را به وجود می‌آورد و بخشی از نیرو که عمود بر مسیر است، راستای سرعت را تغییر می‌دهد و مؤلفه‌ی نرمال شتاب را نتیجه می‌دهد.

LearnElement.ir

$$y = f(x) \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$$

$$C(t) = (x(t), y(t)) \Rightarrow \rho = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}$$

$$r = g(\theta) \Rightarrow \rho = \frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{|r^2 + 2r'^2 - rr''|} \qquad r' = dr/d\theta$$



$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{R}_o$$

$$\vec{V}_{XYZ} = \vec{V}_{xyz} + \vec{V}_o + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{A}_{XYZ} = (\vec{A}_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz}) + \vec{A}_o + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \Big[\overbrace{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{xyz}}^{\vec{V}_{xyz}} + \vec{\omega} \times \vec{r} \Big]$$

$$\Rightarrow \vec{A}_{XYZ} = \vec{A}_{xyz} + \vec{A}_o + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz}$$

A_{abs}	A_{rel}	A_{trans}	$A_{crossed}$	A_{cent}	A_{cor}
مطلق	نسبی	انتقالی	متقاطع	جانب مرکز	کوریولی

coriolis (*) acc.
یا
complementary acc.

$$(\overset{VV}{\vec{A}^n_{XYZ}} + \overset{OV}{\vec{A}^t_{XYZ}}) = (\overset{VV}{\vec{A}^n_{xyz}} + \overset{OV}{\vec{A}^t_{xyz}}) + (\overset{VV}{\vec{A}^n_o} + \underbrace{\overset{VV}{\vec{A}^t_o}}_{\text{input}}) + \overset{OV}{\vec{\alpha}} \times \overset{VV}{\vec{r}} + \overset{VV}{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})} + \overset{VV}{2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz}}$$

شتاب مطلق نرمال باعث تغییر راستای سرعت مطلق می‌شود.

شتاب مطلق مماسی باعث تغییر مقدار سرعت مطلق می‌شود.

شتاب نسبی نرمال باعث تغییر راستای سرعت نسبی می‌شود.

شتاب نسبی مماسی باعث تغییر مقدار سرعت نسبی می‌شود.

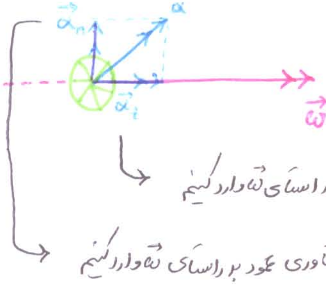
در مورد شتاب های انتقال مماسی و نرمال هم به همین ترتیب است.

آثار تغییرات $\vec{\omega}$ در ترم $\vec{\alpha} \times \vec{r}$ ظاهر می‌شود:

$$\vec{\alpha} \times \vec{r} = \underbrace{\vec{\alpha}_t \times \vec{r}}_{\text{باعث تغییر طول } \vec{\omega}} + \underbrace{\vec{\alpha}_n \times \vec{r}}_{\text{باعث تغییر راستای } \vec{\omega}}$$

← باعث تغییر طول بردار چرخشی

← تغییرات خارج از صفحه‌ی سرعت چرخشی
out of plane variations



اگر گشتاوری در راستای $\vec{\omega}$ وارد کنیم ← تغییر دادن مقدار $\vec{\omega}$

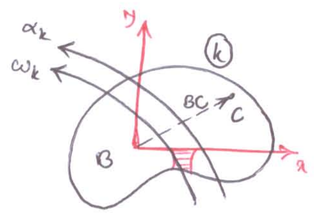
اگر گشتاوری عمود بر راستای $\vec{\omega}$ وارد کنیم ← Gyroscopic Effect $\vec{T}_{Gyro} = \vec{T} - (\vec{T} \cdot \vec{\omega}) \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$

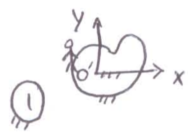
LearnElement.ir

آثار وجود خود $\vec{r}$ در ترم $\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ ظاهر می‌شود: ← تغییرات درون صفحه حرکت سرعت چرخشی! In plane variations

شتاب متقاطع دربردارنده‌ی تمامی تغییرات جبری و بخشی از تغییرات هندسی است. بخشی از تغییرات هندسی هم به واسطه‌ی شتاب جانب مرکز ایجاد می‌شود.

الف) سینماتیک جسم صلب: اختلاف شتاب (غیر مشهود) بین دو نقطه متمایز از یک جسم صلب





$$\vec{A}_{xyz}=\vec{A}_{Ck}$$
$$\vec{A}_{xyz}=0$$
$$\vec{V}_{xyz}=0$$
$$\vec{r}=\vec{BC}$$
$$\vec{\alpha}=\vec{\alpha}_k$$
$$\vec{\omega}=\vec{\omega}_k$$

$$\vec{A}_{Ck}=\vec{A}_{Bk}+\vec{\alpha}_k\times\vec{BC}+\vec{\omega}_k\times(\vec{\omega}_k\times\vec{BC})$$

$$\underbrace{\vec{A}_{Ck}-\vec{A}_{Bk}}_{\vec{A}_{Ck/Bk}}=\underbrace{\vec{\alpha}_k\times\vec{BC}}_{\vec{A}^T_{Ck/Bk}}+\underbrace{\vec{\omega}_k\times(\vec{\omega}_k\times\vec{BC})}_{\vec{A}^N_{Ck/Bk}}$$

N و T ← حالت عام

شتاب متقاطع و جانب مرکز در حالت خاص می‌توانند مماسی و نرمال باشند.

$\vec{A}^N_{Ck/Bk}: \underbrace{\vec{\omega}_k\times(\vec{\omega}_k\times\vec{BC})}_{(\overline{BC})\omega_k^2}$, $\parallel BC$,

موضعی است یعنی بستگی پیدا می‌کند به موضع نقطه B. غیر مشهود است.

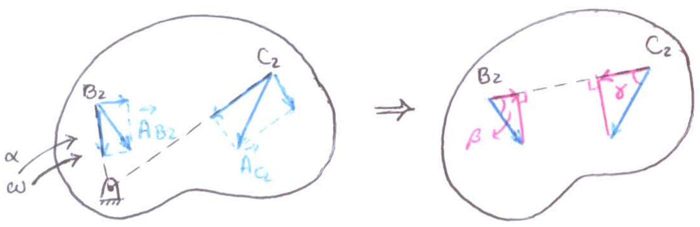
این شتاب در حرکت فضایی، جانب محور است!

$\vec{A}^T_{Ck/Bk}: \underbrace{\vec{\alpha}_k\times\vec{BC}}_{(\overline{BC})\alpha_k}$, $\perp BC$

البته اگر مقدار α_k را داشته باشیم

جهت این شتاب، حاصل از چرخش جهت $\vec{BC}$ به اندازه‌ی $\pi/2$ در جهت $\vec{\alpha}_k$ است. این شتاب هم موضعی و غیر مشهود است.

● دقیق باشید بچه‌ها!! به هر چیز کوچکی اهمیت بدهید، حتی یک پیچ دیوار!



با شتاب شناسی می‌توان مقدار ω و اگر حرکت صفحه‌ای باشد، حتی راستای ω را پیدا کنی. ولی جهتش را نمی‌توان پیدا کنی.

$$\omega_z=\pm\sqrt{\frac{|\vec{A}_{C_2}|\cos\gamma+|\vec{A}_{B_2}|\cos\beta}{(\overline{BC})}}$$

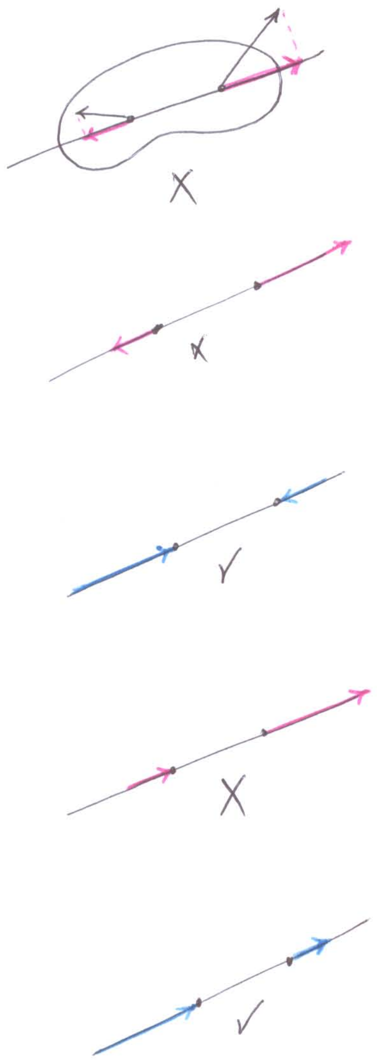
در شکل روبرو

α هم به ترتیب زیر بدست می‌آید:

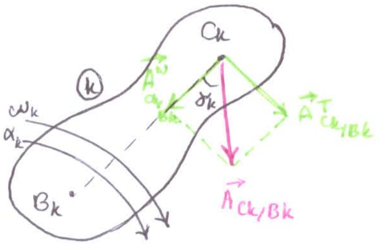
$$\alpha_z=\frac{|\vec{A}_{C_2}|\sin\gamma-|\vec{A}_{B_2}|\sin\beta}{(\overline{BC})}$$

LearnElement.ir

اگر جسم صلب داری، شتاب های نقاط باید به گونه‌ای باشد که اختلاف شتاب ها در امتداد خط واصل، از یک نقطه به سمت دیگری باشد.



LearnElement.ir

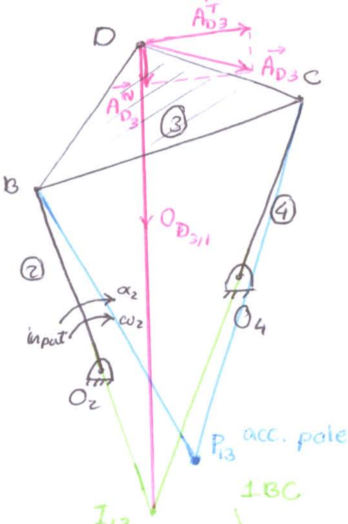


کسی که بیرون ایستاده، اختلاف شتاب دو نقطه را می‌بیند:

$$|\vec A_{C_k/B_k}| = \sqrt{(BC)^2\omega_k^4+(BC)^2\alpha_k^2} = (\overline{BC})\sqrt{\omega_k^4+\alpha_k^2}$$

$$tg\,\gamma_k = \frac{|\vec A^T_{C_k/B_k}|}{|\vec A^N_{C_k/B_k}|} = \frac{(\overline{BC})\alpha_k}{(\overline{BC})\omega_k^2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{bc}{BC} = \sqrt{\omega_k^4+\alpha_k^2} \\ \gamma_k = tg^{-1}\left(\dfrac{\alpha_k}{\omega_k^2}\right) \end{cases} , bc = |\vec A_{C_k/B_k}|$$

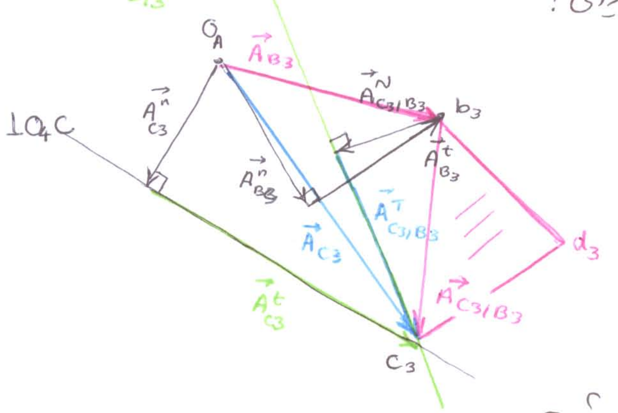


$$\left[\left(\underbrace{\overset{\checkmark\checkmark}{\vec A^n_{C_3}}}_{\substack{(O_4C)\omega_4^2 \\ \parallel O_4C,\checkmark}}\right) + \left(\underbrace{\overset{o\checkmark}{\vec A^t_{C_3}}}_{\perp O_4C}\right)\right] = \left(\underbrace{\overset{\checkmark\checkmark}{\vec A^n_{B_3}}}_{\substack{(O_2B)\omega_2^2 \\ \parallel O_2B}} + \underbrace{\overset{\checkmark\checkmark}{\vec A^t_{B_3}}}_{\substack{(O_2B)\alpha_2 \\ \perp O_2B}}\right) + \left(\underbrace{\overset{\checkmark\checkmark}{\vec A^N_{C_3/B_3}}}_{\substack{(BC)\omega_3^2 \\ \parallel BC}} + \underbrace{\overset{o\checkmark}{\vec A^T_{C_3/B_3}}}_{\perp BC}\right) \quad ⊛$$

با هم اول باید یک قطب شتاب انتخاب کنی. بعد شتاب‌ها را به ترتیب بکش.

$B_2 = B_3 \quad , C_3 = C_4$

حالا که تمام شتاب‌ها را بدست آوردی، برو سراغ شتاب‌های زاویه‌ای!



$$\alpha_3 = \frac{|\vec A^T_{C_3/B_3}|}{(\overline{BC})} \quad C.W$$

$$\alpha_4 = \frac{|\vec A^t_{C_4}|}{(\overline{O_4C})} \quad C.W$$

حالا دیگر فقط باید شتاب‌های مراکز جرم را پیدا کنی!

مثلاً شتاب نقطه‌ی D را بخواهی. یک راه نوشتن مجموع بردارها مثل ⊛ است. راه دیگر تشابه مثلث‌ها با مقیاس روبه‌رو است.

$$\frac{b_3c_3}{BC} = \frac{c_3d_3}{CD} = \frac{b_3d_3}{BD} = \sqrt{\omega_3^4+\alpha_3^2}$$

مثلث مقیاس شده از صفحه حرکت را، باید به اندازه‌ی γ_3 که بدست آوردی، در صفحه شتاب‌ها بچرخانی!

$\Delta b_3c_3d_3 \sim \Delta BCD \Rightarrow \overset{\checkmark\checkmark}{\vec A_{D_3}}$

حالا اگر نقطه‌ای از عضو 3 را بخواهیم که شتاب آن صفر است: P_{13} ← مثلث ساخته شده $O_A b_3 c_3$ از صفحه شتاب را با مقیاس مناسب به صفحه حرکت منتقل می‌کنیم.

مراکز سرعت و مراکز شتاب همزمان در یک نقطه واقع نمی‌شوند مگر اینکه هر دو هم منطبق باشند (قانون دوم نیوتن).

LearnElement.ir

بدست آوردن ρ فقط به درد بدست آوردن شتاب نرمال می‌خورد. اینجا که خودمون شتاب نرمال را پیدا کرده‌ایم، ρ دیگر کاربردی برای ما ندارد.

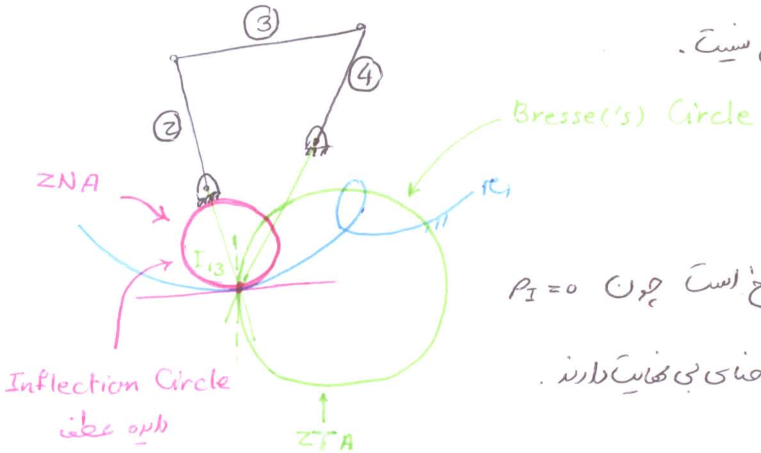
$$\rho_{D_{3/1}} = \frac{|\vec{V}_{D_3}|^2}{|\vec{A}^n_{D_3}|}$$

قطب شتاب هم مانند مرکز آنی دوران وجود دارد و یکتاست، یا یک نقطه است یا تمام صفحه است.

نقاطی هم وجود دارند که شتاب نرمال شان صفر است و فقط شتاب مماسی دارد. در I_{13} یک مماس به منحنی پایه κ_{13} رسم کن، مکان هندسی نقاط بالا، یک دایره است که بر این خط مماس است. این دایره همیشه از I می‌گذرد.

مکان هندسی نقاطی هم که شتاب مماسی صفر دارند، یک دایره است عمود بر دایره قبلی. محل تقاطع این دو دایره یکی در I است و دیگری قطب شتاب. ولی دایره دومی در قطب شتاب سوراخ شده است (؟)

دایره Bresse که بر همین سبزه منطبقه ولی سوراخ نیست.



دایره عطف که بر دایره صورتی منطبق است در I سوراخ است چون $\rho_I = 0$ است. این دایره مکان هندسی نقاطی است که شعاع انحنای بی‌نهایت دارند.

۸۸,۹,۲۵

سینماتیک تماس مستقیم:

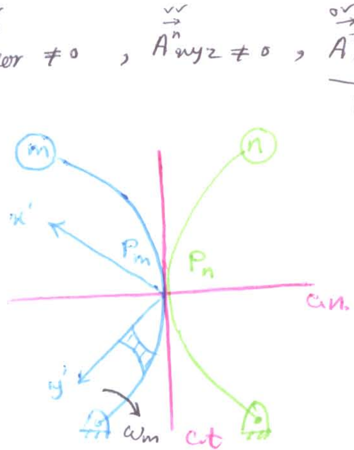
- الف) غلتش خالص: $\vec{V}_{P_n} = \vec{V}_{P_m}$
- ب) غلتش همراه با لغزش: $\vec{V}_{P_n} = \vec{V}_{P_m} + \underbrace{\vec{V}_{P_{n/m}}}_{\parallel c.t.}$

در تماس مستقیم ← $\vec{r} = 0$

$$\vec{A}_{XYZ} = \underbrace{\vec{A}_{xyz}}_{\vec{A}^n_{xyz} + \vec{A}^t_{xyz}} + \vec{A}_o + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \cancel{\vec{r}}) + \vec{\alpha} \times \cancel{\vec{r}} + \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz}}_{\vec{A}_{cor}}$$

در غلتش خالص ← $\vec{A}_{cor} = 0 \ , \ \vec{A}^n_{xyz} = 0 \ , \ \vec{A}^t_{xyz} \neq 0$

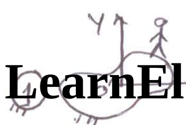
در غلتش همراه با لغزش ← $\vec{A}_{cor} \neq 0 \ , \ \vec{A}^n_{xyz} \neq 0 \ , \ \underbrace{\vec{A}^t_{xyz} \neq 0}_{\parallel c.t.}$



اول به بررسی غلتش همراه با لغزش می‌پردازیم:

$\vec{A}_{XYZ} = \vec{A}_{P_n} \quad \vec{A}_O = \vec{A}_{P_m} \quad \vec{A}_{xyz} = \vec{A}_{P_{n/m}}$

$2\vec{\omega}_m \times \vec{V}_{P_{n/m}} = \vec{A}^C_{P_{n/m}}$



LearnElement.ir

علامتگذاری های مختلف شتاب کریولیس در کتاب های مختلف که هیچ کدام جامع نیست .
همیشه یادمان باشد شتاب کریولیس غیر فواضعی است .

$\vec{A}_{P_{n/m}}$ غیر فواضعی $\vec{V}_{P_{n/m}}$ ✓

$\vec{A}_{P_n/P_m}$ غیر مشهود $\vec{V}_{C_k/B_k}$

پس به اینجا می رسیم :

$$\overset{\checkmark\times}{\vec{A}_{P_n}} = \overset{\checkmark\checkmark}{\vec{A}_{P_m}} + \left[\left(\overset{\checkmark\checkmark}{\vec{A}^{n}_{P_{n/m}}} + \overset{\checkmark\times}{\vec{A}^{t}_{P_{n/m}}} \right) + \overset{\checkmark\checkmark}{\vec{A}^{c}_{P_{n/m}}} \right]$$

و اختلاف شتاب برابر است با :

$$\vec{A}_{P_n} - \vec{A}_{P_m} = \left[\underbrace{\left(\vec{A}^{n}_{P_{n/m}} + \vec{A}^{t}_{P_{n/m}} \right)}_{\text{مشهود}} + \underbrace{\vec{A}^{c}_{P_{n/m}}}_{\text{غیر مشهود}} \right]$$

$$\vec{A}^{n}_{P_{n/m}} = \frac{(V_{P_{n/m}})^2}{\rho_{P_{n/m}}} \quad \parallel c.n.$$

قلمت رو بچسبون روی جسم n و کاغذ را بگذار روی جسم m ، مسیری که قلمت روی کاغذ می کشد می شود مسیر P_n روی m .

از قبل می دانستیم سرعت ~~نسبی~~ راستایش در امتداد مماس مشترک است پس شتاب مماسی هم در همین امتداد است. پس شتاب نرمال در راستای عمود بر این امتداد یعنی در راستای عمود مشترک است . شتاب کریولی هم که ضرب خارجی ω و سرعت است پس این شتاب در امتداد عمود مشترک است .

شتاب نرمال و شتاب کریولی همیشه همراستا هستند .

$$\vec{A}^{t}_{P_{n/m}} = \frac{d^2 s_{P_{n/m}}}{dt^2} \quad \parallel c.t.$$

با توجه به اینکه مماس بر مسیر را داریم ، پس دو نقطه از مسیر را داریم ولی برای یافتن $\rho_{P_{n/m}}$ باید ۳ نقطه از مسیر را داشته باشیم . برای یافتن ρ چند روش وجود دارد :

$$\vec{A}^{c}_{P_{n/m}} = 2\omega_m V_{P_{n/m}} \quad \parallel c.n.$$

$$\rho_{P_{n/m}} \longrightarrow \begin{cases} \text{Euler - Savary Eq.} & \text{جبری} \\ \text{Hartmann Construction} & \text{ترسیمی} \\ \text{Bobilien} \quad \text{"} & \text{"} \\ \text{Sandor} \quad \text{"} & \text{"} \\ \text{Banton} \quad \text{"} & \text{"} \end{cases}$$

ولی ما برای حل کردن مسئلمون سراغ این ها نمی رویم .

بیایید اختلاف شتاب را به یک صورت دیگر بنویسیم : (براساس راستا دسته بندی کنیم)

$$\vec{A}_{P_n} - \vec{A}_{P_m} = \left[\left(\vec{A}^{n}_{P_{n/m}} + \vec{A}^{c}_{P_{n/m}} \right) + \vec{A}^{t}_{P_{n/m}} \right]$$

$$\vec{A}_{P_m} - \vec{A}_{P_n} = \left[\left(\vec{A}^{n}_{P_{m/n}} + \vec{A}^{c}_{A_{m/n}} \right) + \vec{A}^{t}_{P_{m/n}} \right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{A}^{t}_{P_{n/m}} = - \vec{A}^{t}_{P_{m/n}} \\ \left(\underset{\frac{V^2_{P_{n/m}}}{\rho_{P_{n/m}}}}{\vec{A}^{n}_{P_{n/m}}} + \underset{2\omega_m V_{P_{n/m}}}{\vec{A}^{c}_{P_{n/m}}} \right) = - \left(\underset{\frac{V^2_{P_{m/n}}}{\rho_{P_{m/n}}}}{\vec{A}^{n}_{P_{m/n}}} + \underset{2\omega_n V_{P_{m/n}}}{\vec{A}^{c}_{P_{m/n}}} \right) \end{cases}$$

LearnElement.ir

۲۹/۲

می دانیم $V_{P_{n/m}} = -V_{P_{m/n}}$ پس فقط درصورتیکه سرعت زاویه‌ای ها باهم برابر (اندازه و علامت) باشند، شتاب کریولی ها باهم برابر می‌شوند.

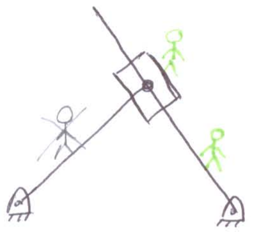
$\omega_m = \omega_n \Rightarrow \vec{A}^C_{P_{n/m}} = -\vec{A}^C_{P_{m/n}}$

درشکل قبل امکان این اتفاق هست ولی در شکل زیر نیست. حتی اگر اندازه ω ها برابر شوند، جهت آنها برابر نخواهد بود.

برای برابر بودن شتاب نرمال ها هم لازم است $\rho_{P_{n/m}} = -\rho_{P_{m/n}}$. برای جهت ρ هم قرار داد وجود دارد. اگر مسیرهای P_m نسبت به n و P_n نسبت به m را بکشیم مثلاً برای چرخ دنده، این دو مسیر هیچ وقت همدیگر را همزمان قطع نمی‌کنند تا شرط بالا برقرار شود. ?

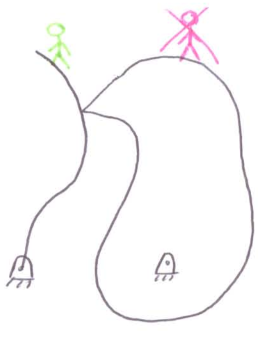
- انواع مسائل طرح شده در این مبحث:

« نوع اول



در نوع اول، ورودی یا خروجی هرکجا که باشند، می‌توانند روی هرکدام خواستند بروند. از خروجی به ورودی یا از ورودی به خروجی شعاع انحنا را همیشه می‌شناسیم. پس شتاب نرمال را داریم.

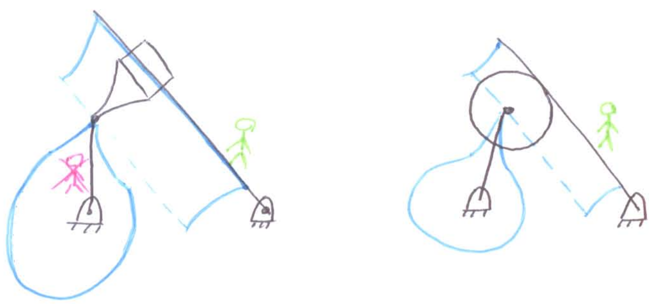
« نوع دوم



در نوع دوم جایی باید بایستید که شعاع انحنا را داشته باشید.

در همه‌ی اینها اگر جای آدمک سبز بایستیم مسیر حرکت یک نقطه از بند دیگر را می‌شناسیم و اگر جای آدمک صورتی بایستیم، نمی‌شناسیم. دو مثال دیگر هم از این نوع هستند.

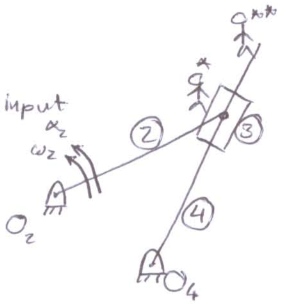
برای حل نوع سوم باید از روش های دیگری استفاده کنیم.



« نوع سوم

LearnElement.ir

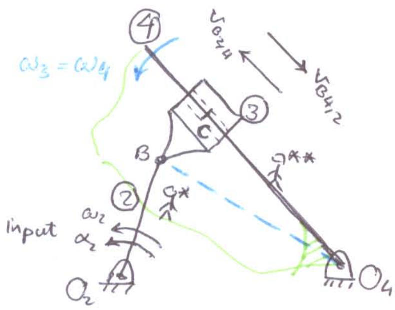
۹۸,۹,۳۰



$$* \; (\underbrace{\overset{\checkmark\checkmark}{\vec{A}^n_{B_4}}}_{\substack{(O_4B)\omega_4^2 \\ \parallel O_4B,\ \swarrow}} + \underbrace{\overset{\circ\checkmark}{\vec{A}^t_{B_4}}}_{\perp O_4B}) = (\underbrace{\overset{\checkmark\checkmark}{\vec{A}^n_{B_3}}}_{\substack{(O_2B)\omega_2^2 \\ \parallel O_2B,\ \leftarrow}} + \underbrace{\overset{\checkmark\checkmark}{\vec{A}^t_{B_3}}}_{\substack{(O_2B)\alpha_2 \\ \perp O_2B,\ \nwarrow}}) + [(\underbrace{\cancel{\overset{\checkmark\checkmark}{\vec{A}^n_{B_{4/3}}}}}_{\substack{\frac{\vec{v}^2_{B_{4/3}}}{\rho_{B_{4/3}}} \\ \rho_{B_{4/3}}\to\infty}} + \underbrace{\overset{\circ\checkmark}{\vec{A}^t_{B_{4/3}}}}_{\parallel O_4B}) + \underbrace{\overset{\checkmark\checkmark}{\vec{A}^c_{B_{4/3}}}}_{\substack{2\omega_3 v_{B_{4/3}} \\ \perp O_4B,\ \rightarrow}}]$$

$$** \; (\overset{\checkmark\checkmark}{\vec{A}^n_{B_3}} + \overset{\checkmark\checkmark}{\vec{A}^t_{B_3}}) = (\overset{\checkmark\checkmark}{\vec{A}^n_{B_4}} + \overset{\circ\checkmark}{\vec{A}^t_{B_4}}) + [(\underbrace{\cancel{\overset{\checkmark\checkmark}{\vec{A}^n_{B_{3/4}}}}}_{\substack{\frac{\vec{v}^2_{B_{3/4}}}{\rho_{B_{3/4}}} \\ \rho_{B_{3/4}}\to\infty}} + \underbrace{\overset{\circ\checkmark}{\vec{A}^t_{B_{3/4}}}}_{\parallel O_4C}) + \underbrace{\overset{\checkmark\checkmark}{\vec{A}^c_{B_{3/4}}}}_{\substack{2\omega_4 v_{B_{3/4}} \\ \perp O_4B,\ \nwarrow}}]$$

این مسئله از نوع اول بود و فرقی نمی‌کرد روی کدام بند بایستیم، ولی ما روی ورودی نمی‌ایستیم. دو حالت ** و * برای مایکی است.



در نوع دوم دیگر نمی‌توانیم روی بند ② بایستیم.

$$* \; (\underbrace{\overset{\checkmark\checkmark}{\vec{A}^n_{4}}}_{\substack{(O_4B)\omega_4^2 \\ \parallel O_4B,\ \searrow}} + \underbrace{\overset{\circ\checkmark}{\vec{A}^t_{B_4}}}_{\perp O_4B}) = (\underbrace{\overset{\checkmark\checkmark}{\vec{A}^n_{B_2}}}_{\substack{(O_2B)\omega_2^2 \\ \parallel O_2B,\ \swarrow}} + \underbrace{\overset{\checkmark\checkmark}{\vec{A}^t_{B_2}}}_{\substack{(O_2B)\alpha_2 \\ \perp O_2B,\ \nwarrow}}) + [(\underbrace{\overset{\checkmark\checkmark}{\vec{A}^n_{B_{4/2}}}}_{\frac{v^2_{B_{4/2}}}{\rho_{B_{4/2}}}} + \underbrace{\overset{\circ\checkmark}{\vec{A}^t_{B_{4/2}}}}_{\parallel 4}) + (\underbrace{\overset{\checkmark\checkmark}{\vec{A}^c_{B_{4/2}}}}_{\substack{2\omega_2 v_{B_{4/2}} \\ \perp 4,\ \nearrow}})]$$

کاغذ را چسبانده‌ایم روی 4، سوزن پرگار روی O_4 و نوک پرگار در B. درنتیجه برای ما سخت است که مسیر حرکت B را تشخیص بدهیم. بهتر است جایمان را عوض کنیم، برویم در موقعیت **.

$$** \; (\overset{\checkmark\checkmark}{\vec{A}^n_{B_2}} + \overset{\checkmark\checkmark}{\vec{A}^t_{B_2}}) = (\overset{\checkmark\checkmark}{\vec{A}^n_{B_4}} + \overset{\circ\checkmark}{\vec{A}^t_{B_4}}) + [(\underbrace{\cancel{\overset{\checkmark\checkmark}{\vec{A}^n_{B_{2/4}}}}}_{\substack{\frac{v^2_{B_{2/4}}}{\rho_{B_{2/4}}} \\ \rho_{B_{2/4}}\to\infty}} + \underbrace{\overset{\circ\checkmark}{\vec{A}^t_{B_{2/4}}}}_{\parallel 4}) + \underbrace{\overset{\checkmark\checkmark}{\vec{A}^c_{B_{2/4}}}}_{\substack{2\omega_4 v_{B_{2/4}} \\ \perp 4,\ \swarrow}}]$$

اگر روی ④ بایستیم، مسیر B_2 یک خط راست است و بنابراین $\rho_{B_{2/4}}\to\infty$.

روی بندی بایستید، که بتوانید مسیر نقطه را به راحتی تشخیص بدهید. مثلاً اینجا به راحتی از ** به جواب می‌رسیم.

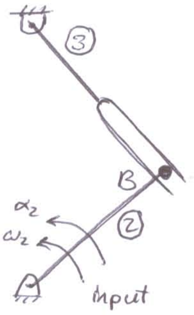
حالا ببینیم چرا نسبت به ③ نمی‌توانیم بنویسیم؟

$$(\overset{\checkmark\checkmark}{\vec{A}^n_{C_4}} + \overset{\circ\checkmark}{\vec{A}^t_{C_4}}) = (\overset{\checkmark\checkmark}{\vec{A}^n_{B_2}} + \overset{\checkmark\checkmark}{\vec{A}^t_{B_2}}) + (\underbrace{\overset{\checkmark\checkmark}{\vec{A}^N_{C_3/B_3}}}_{\omega_3=\checkmark} + \underbrace{\overset{\circ\checkmark}{\vec{A}^T_{C_3/B_3}}}_{\alpha_3=?}) + [(\cancel{\overset{\checkmark\checkmark}{\vec{A}_{C_{4/3}}}} + \overset{\circ\checkmark}{\vec{A}^t_{C_{4/3}}}) + \overset{\checkmark\checkmark}{\vec{A}^c_{C_{4/3}}}]$$

دلیلش این است که α_3 را نداریم و یک مجهول اضافه خواهیم داشت.

LearnElement.ir

مثال دیگر: در مکانیزم زانو، اگر ناظر روی ③ باشید، از دست شتاب نرمال راحت می‌شویم. $\rho_{B_{2,1}} \rightarrow \infty$



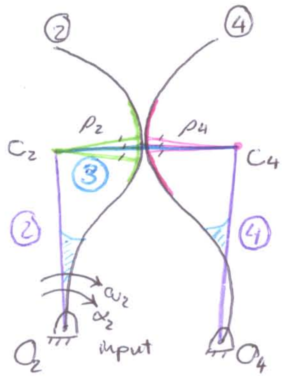
برای آنکه شتاب کوریولی صفر شود: ۱) یا ω صفر شود (اول و آخر حرکت) ← درگیری

۲) یا V نسبی صفر شود (وسط درگیری)

۳) ω و V هم راستا شوند (حرکت‌های فضایی)

[مثلاً روی میان تار پیچ]

شتاب نرمال معلوم می‌کند که کجا باشیم!



حالا برویم سراغ نوع سوم!

$C_2 \longrightarrow$ مرکز انحنای پروفیل مینزند در نقطه تماس (۳ تا شعاع برابر)

نقطه‌ی وسط

در حالت کلی هم مرکز انحنا و هم شعاع انحنا پیوسته در حالت تغییر است.

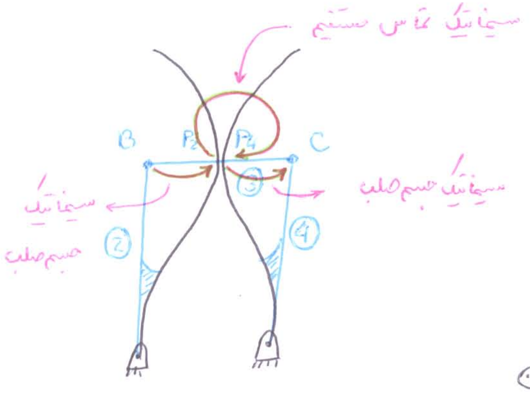
C_2 و C_4 هر دو در امتداد محور مشترک هستند، چون شعاع انحنا بر مماس مشترک عمود است.

گفتیم ۳ تا شعاع‌ها برابر هستند. پس برای ۳ لحظه‌ی متوالی $\rho_2+\rho_4$ مقداری ثابت دارد $\Leftarrow$ C_2 مرکز انحنای مسیر C_4 خواهد بود و بالعکس. $O_{C_{2/4}} = C_4$ و $O_{C_{4/2}} = C_2$ ← به این نقاط C_2 و C_4 می‌گویند نقاط مزدوج!

(Conjugate Centers of Curvature)

پس می‌توانیم یک بند ③ اضافه کنیم (به طور لحظه‌ای) چون نه کشیده می‌شود و نه فشرده می‌شود. در لحظه‌ای هم C_4 و C_2 را به هم وصل می‌کنیم. اگر دایره بودند، می‌شد به طور دائم اضافه کنیم. درجه آزادی در این لحظه ۱ است.

پس می‌رسیم به یک مکانیزم معادل! (راه حل مسئله) در واقع یک مکانیزم چهارمیله‌ای ساختیم. اسم‌ها را هم الان تغییر بدهیم:



$$\vec{V}_{C_4} = \vec{V}_{B_2} + \underbrace{\Big[\underbrace{\overset{0V}{\vec{V}_{P_4/B_2}}}_{\perp PB} + \underbrace{\overset{0V}{\vec{V}_{P_{4/2}}}}_{\parallel c.t.} + \underbrace{\overset{0V}{\vec{V}_{C_4/P_4}}}_{\perp PC}\Big]}_{A}$$

$$A \longrightarrow \frac{|\vec{A}|}{(\overline{BC})} = \omega_3$$

ω_3 مجازی است و مفهوم فیزیکی ندارد ولی مفهوم ریاضی دارد ← سرعت جارو کردن دایره بوسان توسط شعاع آن است.

$$\vec{V}_{C_4} = \vec{V}_{B_2} + \underbrace{\vec{V}_{C_3/B_3}}_{\perp BC \quad (BC)\omega_3}$$

LearnElement.ir

از "مراکز انحنا" بودن C_4 و C_2 استفاده‌ای نکردیم.

پس این روابط را برای هر دو نقطه‌ای از عمود مشترک بنویسیم درست است. البته باید مزدوج باشند. طبق زیر:

$$\vec{A}_{C_4} = \vec{A}_{B_2} + \underbrace{\left(\vec{A}^{N}_{P_2/B_2} + \vec{A}^{n}_{P_4/2} + \vec{A}^{c}_{P_4/2} + \vec{A}^{N}_{C_4/P_4}\right)}_{B} + \underbrace{\left(\underbrace{\vec{A}^{T}_{P_2/B_2}}_{\perp PB} + \underbrace{\vec{A}^{t}_{P_4/2}}_{\parallel c.t.} + \underbrace{\vec{A}^{T}_{C_4/P_4}}_{\perp PC}\right)}_{C}$$

$$\alpha_3 = \frac{|\vec{C}|}{(\overline{BC})} \quad , \quad \sqrt{\frac{|\vec{B}|}{(\overline{BC})}} = \omega'_3 \qquad \omega_3 \neq \omega'_3$$

پس فقط می‌توانیم برای نقاط مزدوج بنویسیم. مثل همین مراکز اولیه ی انحنا!

۸۸/۱۵/۲

اگر عمود مشترک این دوتا افقی شه، کلی نتیجه می‌گیریم و درنتیجه شعاع انحناها و شتاب نرمال‌هاشان هم یکی می‌شوند.

(منظورم از این دوتا، مکانیزم آخر جلسه ی پیشه!)

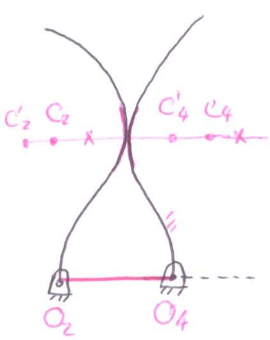
* سازوکار معادل Equivalent Mech.

۱. درجه ی آزادی دو سازوکار برابر باشد.

۲. به ازای سرعت‌های ورودی یکسان، سرعت‌های خروجی دو سازوکار برابر باشند. ∞^2 ∞^3

۳. به ازای شتاب " " ، شتاب " " " " " . ∞^1 ∞^1

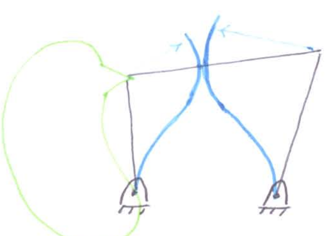
استاد می‌گویند اولین شرط غلط است. اگر دومی برقرار بود می‌شود سازوکار معادل (لحظه‌ای) از نظر سرعت. اگر سومی هم به تنهایی برقرار بود همین می‌شود. اگر ۲ و ۳ باهم برقرار بودند می‌شود دائم.



اگر دو زوج نقطه ی مزدوج داشته باشی، می‌توانی مرکز انحنای هر نقطه‌ای را بیابی!

برای شتاب‌شناسی ∞^1 جواب داری درصورتی که برای سرعت‌شناسی ∞ جواب داری!

مثلاً می‌خواهی روی چهارمیله‌ای روبه‌رو یک مکانیزم تماس مستقیم طراحی کنی!



اگر محل تماس را روی ③ درنظر بگیریم ← تماس مستقیم، اگر روی یکی از لولاها ← تماس نوک‌تیز

جواب ∞^1 ← جواب ۲ ←

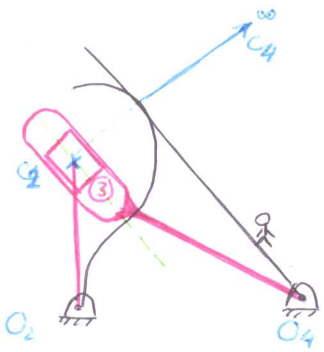
LearnElement.ir

اگر بخواهیم غلت خالص باشد، باید محل تماس را بگذاریم روی مرکز آنی دوران نسبی ② و ④ !

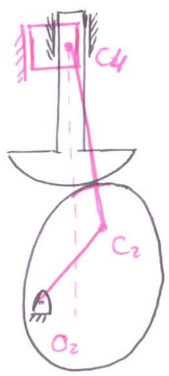
برای آنکه غلت خالص دائم باشد، محل I_{24} روی بند 2 و 4 را (به کمک واروش) بدست می‌آوریم!

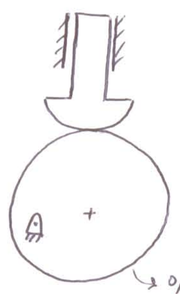
مکانیزم معادل روبه‌رو را می‌خواهیم: باید ۴ نقطه O_2 و O_4 و C_2 و C_4 را بیابیم!

این قوس اگر دایره باشد، می‌شود مکانیزم معادل دائم!



پیرو را معمولاً دایره یا خط می‌گیرند و پیچیدگی‌های طراحی را می‌اندازند روی طراحی بادامک!

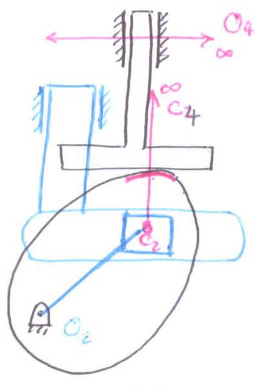


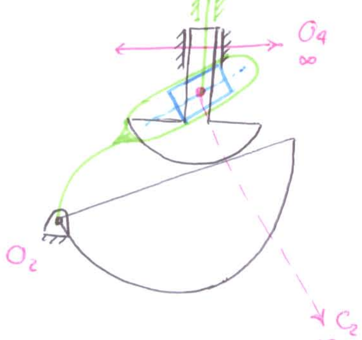


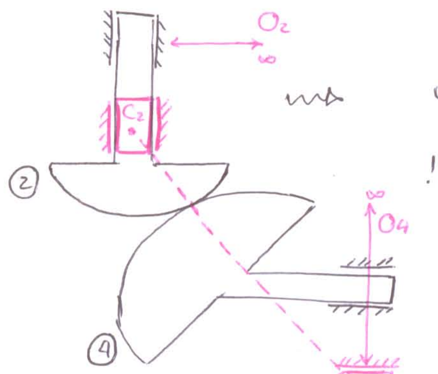
مکانیزم معادل دائم ← دایره

inversion ای از بیضی‌نگار ← نوع اسکاتلندی Scotch Yoke ← مکانیزم معادل

یکی از لغزنده‌ها ثابت!







بیضی‌نگار، متعامد ← مکان هندسی

محل تماس روی بند ① بیضی است!

انواع این حالت‌ها را طبقه‌بندی کنید برحسب محدود یا نامحدود بودن چهار نقطه (هرکدام با یک شکل) و بدهید به استاد.

LearnElement.ir

ب) غلتش خالص:

$\vec{V}_{P_{n/m}} = \vec{0}$

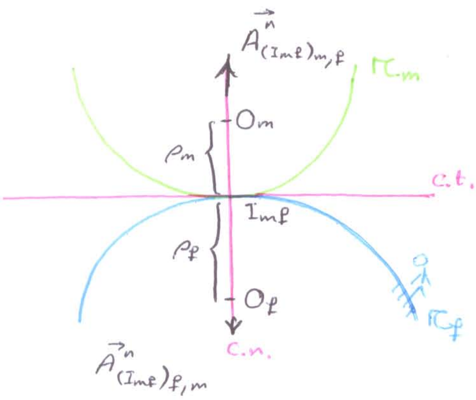
$\vec{A}^c_{P_{n/m}} = 2\vec{\omega}_m \times \vec{V}_{P_{n/m}} = 0$

$\vec{A}^n_{P_{n/m}} = \vec{0} \qquad \frac{V^2_{P_{n/m}} \to 0}{\rho_{P_{n/m}} \to 0} \to 0$

$\vec{A}^t_{P_{n/m}} \neq \vec{0}$

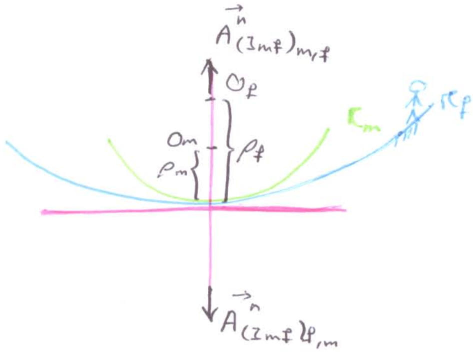
اسمش را می‌گذاریم شتاب غلتشی:

دوتا جسم متخارج (خارج از هم) داریم که روی هم می‌غلتند.



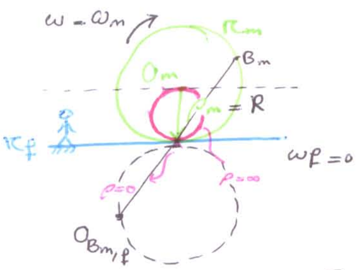
$$\vec{A}^n_{(I_{mf})_{m,f}} = \underbrace{\frac{\rho_f \rho_m}{\rho_f+\rho_m}}_{\text{شعاع دایره عطف}} (\omega_m - \omega_f)^2 \vec{j}$$

اگر این دو جسم داخل هم باشند:



$$\vec{A}^n_{(I_{mf})_{m,f}} = \frac{\rho_f \rho_m}{\rho_f-\rho_m} (\omega_m - \omega_f)^2 \vec{j}$$

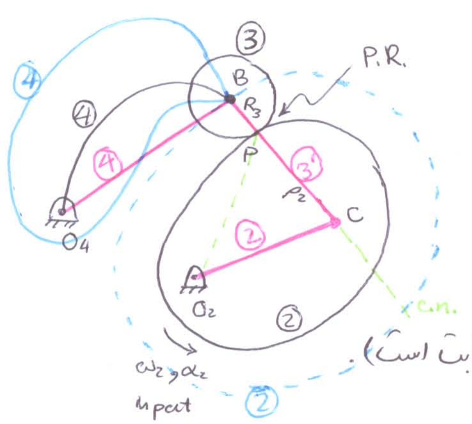
اگر یکی از جسم‌ها تخت باشد:



$$\lim_{\rho_f \to \infty} \frac{\rho_f \rho_m}{\rho_f \pm \rho_m} = \lim \frac{\rho_m}{1 \pm \rho_m/\rho_f} = \rho_m = R$$

$$\vec{A}^n_{(I_{mf})_{m,f}} = R\omega^2$$

دوتا نکته: شعاع انحنای تمام نقاط روی دایره‌ی صورتی (روی دیسک) ∞ است به غیر از نقطه‌ی روی زمین که صفر است. مرکز انحنای هر نقطه‌ی روی دیسک از تقاطع خط واصل آن نقطه و محل تماس با دایره‌ی تصویر دیسک نسبت زمین پیدا می‌شود.



مثال: این را از چند راه می‌شود حل کرد:

۱) روی خود مکانیزم اصلی اطلاعات را از نقاط جابه‌جا کنیم.

۲) استفاده از مکانیزم معادل!

۳) منحنی مسیر مرکز دایره، موازی با دامک است (طول عمود مشترک این دو محدود به دو منحنی ثابت است).

LearnElement.ir

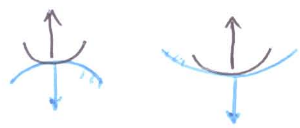
این وضعیت ها را به یک پیرو نوک تیز و یک بادامک Offset شده می‌رساند ($\vec A^n_{P_2}+\vec A^t_{P_2}$)

۸۸/۱۰/۷

روش اول:

$$(\underbrace{\vec A^n_{B4}}_{\substack{(O_4B)\omega_4^2\\ \parallel O_4B}}+\underbrace{\vec A^t_{B4}}_{\perp O_4B}) = (\underbrace{\vec A^n_{C_2}}_{\substack{(O_2C)\omega_2^2\\ \parallel O_2C}}+\underbrace{\vec A^t_{C_2}}_{\substack{(O_2C)\alpha_2\\ \perp O_2C}}) + (\underbrace{\vec A^N_{P_2/C_2}}_{\substack{(PC)\omega_2^2\\ \parallel PC}}+\underbrace{\vec A^T_{P_2/C_2}}_{\substack{(PC)\alpha_2\\ \perp PC}}) + \underbrace{\vec A^n_{P_3/2}}_{\substack{\frac{\rho_2R_3(\omega_3-\omega_2)^2}{(\rho_2+R_3)}\\ \parallel c.n.}} + (\underbrace{\vec A^N_{B_3/P_3}}_{\substack{(PB)\omega_3^2\\ \parallel PB}}+\underbrace{\vec A^T_{B_3/P_3}}_{\perp PB})$$

* * * * *



شتاب علتش همیشه در جهت احتمال دورشدن جسم متحرک منحنی است.

روش دوم:

$$(\vec A^n_{B4}+\vec A^t_{B4}) = (\vec A^n_{C_2}+\vec A^t_{C_2}) + (\underbrace{\vec A^N_{B_3'/C_3'}}_{\substack{(BC)\omega_3'^2\\ \parallel BC}}+\underbrace{\vec A^T_{B_3'/C_3'}}_{\perp BC})$$

* *

روش سوم:

$$(\vec A^n_{B4}+\vec A^t_{B4}) = (\vec A^n_{C_2}+\vec A^t_{C_2}) + [(\underbrace{\vec A^n_{B4/2}}_{\substack{\frac{V^2_{B4/2}}{(\rho_2+R_3)=\rho_{B4/2}},\ \parallel c.n.}}+\underbrace{\vec A^t_{B4/2}}_{\parallel c.t.})+\underbrace{\vec A^c_{B4/2}}_{\substack{2\omega_2 V_{B4/2}\\ \parallel c.n.}}] + (\underbrace{\vec A^N_{B_2/C_2}}_{\substack{(BC)\omega_2^2\\ \parallel BC}}+\underbrace{\vec A^T_{B_2/C_2}}_{\substack{(BC)\alpha_2\\ \perp BC}})$$

* * *

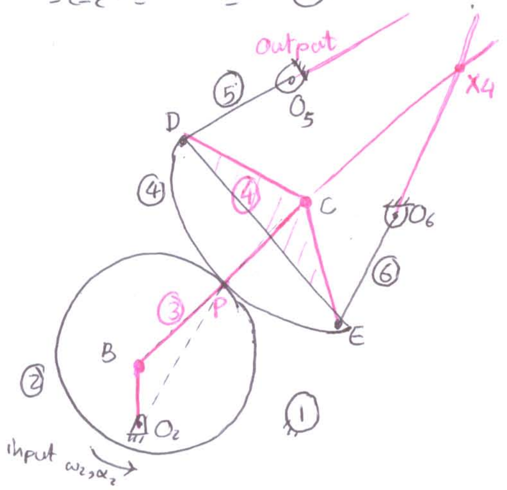
پنج جمله‌ی * در روش اول، معادل دو جمله‌ی * در روش دوم و پنج جمله‌ی * در روش سوم است.

- مکانیزم روبرو پیچیده نیست چون مفصلک بند مشاور دارد. (این حرف اشتباه) برو سراغ تعریف مکانیزم پیچیده!

مکانیزم معادلش، مکانیزم واته!

تعریف مکانیزم پیچیده این بود: در مکانیزم معادل شامل اتصالات مرتبه پایین، ...

از هردو روش مکانیزم را حل می‌کنیم:



$$* \quad \vec A_{C4} = (\underbrace{\vec A^n_{B_2}}_{\substack{(O_2B)\omega_2^2\\ \parallel O_2B}}+\underbrace{\vec A^t_{B_2}}_{\substack{(O_2B)\alpha_2\\ \perp O_2B}}) + (\underbrace{\vec A^N_{C_3/B_3}}_{\substack{(BC)\omega_3^2\\ \parallel BC}}+\boxed{\underbrace{\vec A^T_{C_3/B_3}}_{\perp BC}}) + (\boxed{\underbrace{\vec A^T_{X4/C4}}_{\perp CX}}+\underbrace{\vec A^N_{X4/C4}}_{\substack{(CX)\omega_4^2\\ \parallel CX}})$$

$$= (\underbrace{\vec A^n_{E_6}}_{\substack{(O_6E)\omega_6^2\\ \parallel O_6E}}+\boxed{\underbrace{\vec A^t_{E_6}}_{\perp O_6E}}) + (\boxed{\underbrace{\vec A^T_{X4/E4}}_{\perp EX}}+\underbrace{\vec A^N_{X4/E4}}_{\substack{(EX)\omega_4^2\\ \parallel EX}})$$

LearnElement.ir

$$\vec{A}^{oo}_{X_4} = (\vec{A}^n_{P_2} + \vec{A}^t_{P_2}) + [(\underbrace{\vec{A}^n_{P_{4/2}}}_{\frac{V^2_{P_{4/2}}}{\rho_{P_{4/2}}}} + \underbrace{\vec{A}^c_{P_{4/2}}}_{2\omega_2 V_{P_{4/2}}}) + [\underbrace{\vec{A}^t_{P_{4/2}}}_{\parallel c.t.}] + [\underbrace{\vec{A}^T_{X_4/P_4}}_{\perp XP}] + \underbrace{\vec{A}^N_{X_4P_4}}_{(PX)\omega_4^2}]$$

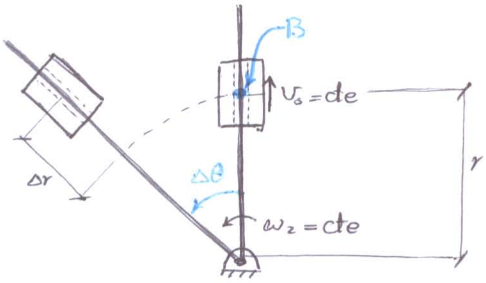
$\parallel c.n$, ↙ $\parallel c.n.$ ↗ $\parallel PX$, ↙

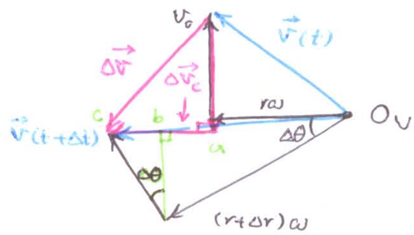
$= ESE \rightarrow$ باید از معادلات اولر ساواری بروم!

بنابراین تنها راه حل این مکانیزم استفاده از مکانیزم معادل است.

● یک مکانیزم دیگه:

اگر یک موتور سنکرون بذاریم، بعضی جاها موتور به عنوان ترمز عمل می‌کند.





$\Delta\theta = \omega\Delta t \quad , \Delta r = V_0\Delta t$

$|\vec{A}_c| = \lim \left(\frac{|\Delta\vec{V}_c|}{\Delta t}\right)$

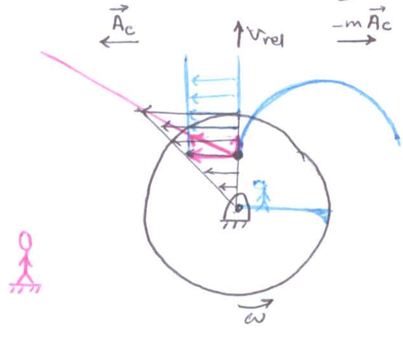
$|\Delta\vec{V}_c| = |\vec{ab}| + |\vec{bc}|$

$$\begin{cases} |\vec{ab}| = (r+\Delta r)\omega \cos\Delta\theta - r\omega \simeq (\Delta r)\omega & (\cos\Delta\theta \simeq 1) \\ |\vec{bc}| = V_0 \sin\Delta\theta \simeq V_0\Delta\theta & (\sin\Delta\theta \simeq \Delta\theta) \end{cases}$$

$$|\vec{A}_c| = \underbrace{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t}}_{V_0}\omega + \underbrace{\lim_{\Delta t\to 0} V_0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}_{\omega} = 2\omega V_0$$

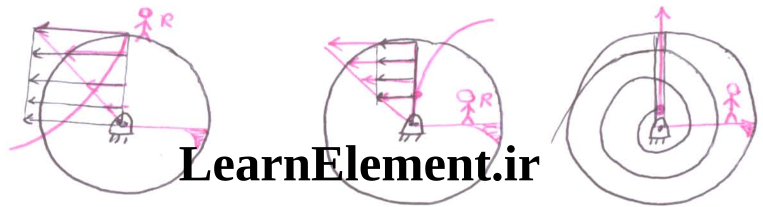
پس یک شتاب عمود بر تیغه داریم که نرمال نیست، بلکه ناشی از تغییر سرعت جای پا است.

دیسک زیر و ذره‌ی روبرو در نظر بگیر، به ذره یک ضربه کوچک در راستای شعاعی می‌زنیم. دیسک از جنس یخ خشک است و بین گلوله و دیسک گاز وجود دارد.



از نظر کسی که روی زمین ایستاده، این گلوله با سرعت ثابت، روی خط مورّب صورتی حرکت می‌کند. ولی از نظر کسی که روی دیسک زندگی می‌کند، گلوله مسیر منحنی طی می‌کند و این آقاهه براش یه شتاب تعریف می‌کند (شتاب کوریولی) و به خاطر اینکه دستگاه مختصات غیر نیوتونی داریم در یک "m−" ضرب می‌شود و نیرویی را می‌سازد که گلوله را منحرف کرده! از دید آقای آبی، گلوله از جای پاش جا می‌مونه!

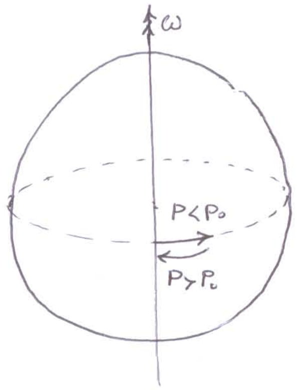
Ferel('s) law



LearnElement.ir

۸۸ , ۱۰ , ۱۴

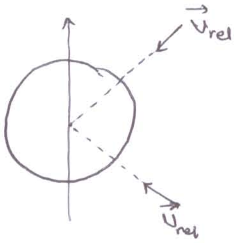
با توجه به جهت سرعت نسبی حرکت اجسام روی زمین، شتاب کوریولیس می‌تواند باعث شود که اجسام سبک‌تر یا سنگین‌تر به نظر برسند. (Otrös ('s) law)

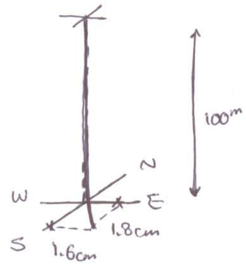


بسیاری از پدیده‌های آب و هوایی نظیر cyclone هم در اثر وجود شتاب کوریولیس به وجود می‌آیند.

شتاب کوریولی روی سقوط آزاد اجسام هم تأثیر می‌گذارد.

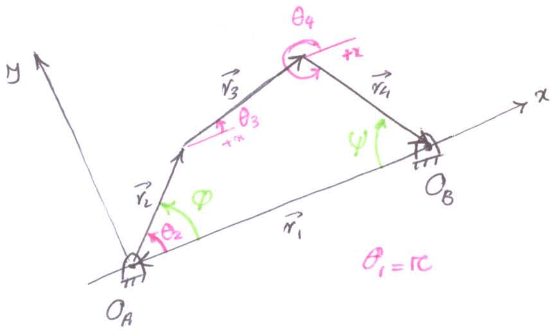
مثلاً در شهر تهران به صورت روبه‌رو منحرف می‌شود.





هر جسم متحرکی بر روی زمین تحت تأثیر شتاب کوریولی است.

* آخرین روش حل:



اساس کار بر این است که: $\vec{r}_1+\vec{r}_2+\vec{r}_3+\vec{r}_4=0$

$$\vec{r}_k = r_k e^{i\theta_k} = r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k) \quad , \quad \sum \vec{r}_k = 0$$

در حرکت شناسی θ_3 و θ_4 برای ما مجهول است:

$$\sum_{k=1}^{4}\vec{r}_k = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1\underbrace{\cos\theta_1}_{-1} + r_2\cos\theta_2 + r_3\cos\theta_3 + r_4\cos\theta_4 = 0 \\ r_1\underbrace{\sin\theta_1}_{0} + r_2\sin\theta_2 + r_3\sin\theta_3 + r_4\sin\theta_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_3\cos\theta_3 + r_4\cos\theta_4 = r_1 - r_2\cos\theta_2 \\ r_3\sin\theta_3 + r_4\sin\theta_4 = -r_2\sin\theta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} r_3\cos\theta_3 = r_1 - r_2\cos\theta_2 - r_4\cos\theta_4 \\ r_3\sin\theta_3 = -r_2\sin\theta_2 - r_4\sin\theta_4 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow r_3^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_4^2 - 2r_1r_2\cos\theta_2 - 2r_1r_4\cos\theta_4 + 2r_2r_4\cos\theta_2\cos\theta_4 + 2r_2r_4\sin\theta_2\sin\theta_4$$

در اینجا راه ما دو تکه می‌شود. یکی برمی‌گردد به طراحی مکانیزم‌ها که همه‌ی طول‌ها را باید طراحی کنیم ولی ورودی و خروجی را داریم. بخش دوم برمی‌گردد به تحلیل که طول‌ها را داریم و می‌خواهیم به کمک θ_2، θ_4 را بیابیم.

LearnElement.ir

$$\cos\theta_4 \underbrace{(2r_2r_4\cos\theta_2 - 2r_1r_4)}_{A} + \sin\theta_4 \underbrace{(2r_2r_4\sin\theta_2)}_{B} + \underbrace{(r_1^2+r_2^2-r_3^2+r_4^2-2r_1r_2\cos\theta_2)}_{C} = 0$$

$$T = tg\frac{\theta_4}{2} \quad , \quad \sin\theta_4 = \frac{2T}{1+T^2} \quad , \quad \cos\theta_4 = \frac{1-T^2}{1+T^2}$$

$$\rightarrow (1-T^2)A + (2T)B + (1+T^2)C = 0 \Rightarrow (C-A)T^2 + (2B)T + (C+A) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta' = B^2 - (C^2-A^2) = B^2+A^2-C^2 > 0 \quad \leadsto$$ اگر مثبت نباشد، اصلاً نمی‌توان مکانیزمی تشکیل داد!

در عبور از 0 و π علامت عوض شود.

$$\rightarrow tg\frac{\theta_4}{2} = T = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta'}}{C-A} \begin{cases} T_1 & \theta_4' = 2tg^{-1}(T_1) \\ T_2 & \theta_4'' = 2tg^{-1}(T_2) \end{cases}$$ $\leftarrow$ یکی را crossed و یکی را open خواهیم نامید

حالا اگر یکی از اینها را در معادله اصلی جایگذاری کنیم، خواهیم داشت: (θ_3 را هم می‌خواستیم)

$$-r_1 + r_2\cos\theta_2 + r_3\cos\theta_3 + r_4\cos\theta_4 = 0 \rightarrow \cos\theta_3 = \frac{r_1 - r_2\cos\theta_2 - r_4\cos\theta_4}{r_3} = C$$

$$r_2\sin\theta_2 + r_3\sin\theta_3 + r_4\sin\theta_4 = 0 \Rightarrow \sin\theta_3 = -\frac{r_2\sin\theta_2 + r_4\sin\theta_4}{r_3} = S$$

$$\theta_3 = tg^{-1}\left(\frac{S}{C}\right) \Rightarrow \checkmark$$ به کمک علامت های $\sin\theta_3$ و $\cos\theta_3$ تشخیص بدهید در کدام ربع است.

قرار داد ما برای θ ها، زاویه‌ی هر یک از بردارها با جهت مثبت محور x است.

در طراحی مکانیزم ها (function generation) با $\varphi = \theta_2$ و $\psi = 2\pi - \theta_4$ سروکار داریم.

در حرکت شناسی ممکن است به معادلات غیرخطی بربخوریم (اگر تعداد مجهولات بالاتر برود) که حلشان مشکل است ولی در سرعت شناسی معادلات ما خطی است.

حالا برویم سراغ سرعت شناسی و حتی شتاب شناسی:

$$\vec{r}_k = r_k e^{i\theta_k} = r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$$

$$\dot{\vec{r}}_k = \underbrace{\dot{r}_k}_{0} e^{i\theta_k} + i r_k \dot\theta_k e^{i\theta_k}$$

$$+ i\dot\theta_k (r_k e^{i\theta_k})$$

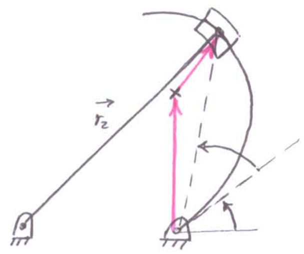
$$+ i\dot\theta_k \vec{r}_k \qquad (i\omega_3 \vec{BC})$$

$$\ddot{\vec{r}}_k = \underbrace{\ddot{r}_k}_{0} e^{i\theta_k} + \underbrace{i \underbrace{\dot r_k}_{0} \dot\theta_k e^{i\theta_k} + i \underbrace{\dot r_k}_{0} \dot\theta_k e^{i\theta_k}}_{2i\underbrace{\omega_k}_{\vec\omega} \underbrace{\dot r_k e^{i\theta_k}}_{\vec{V}_{rel}}} + \underbrace{i r_k \ddot\theta_k e^{i\theta_k}}_{i\alpha_3(\vec{BC})} + \underbrace{i^2 r_k \dot\theta_k^2 e^{i\theta_k}}_{\substack{-\omega_k^2 (r_k e^{i\theta_k}) \\ -\vec{BC}\,\omega_3^2}}$$

با توجه به مکانیزم در نظر گرفته شده، در اینجا شتاب نرمال نداریم ولی مثلاً در مکانیزم صفحه‌ی بعد داریم:

LearnElement.ir

در اینجا $\frac{v^2}{\rho}$ ظاهر می‌شود!



$$\dot{\vec{r}}_k = i r_k \dot{\theta}_k e^{i\theta_k} = r_k \omega_k (i\cos\theta_k - \sin\theta_k) \quad , \quad \dot{\vec{r}} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i & r_2\omega_2\cos\theta_2 + r_3\omega_3\cos\theta_3 + r_4\omega_4\cos\theta_4 = 0 \\ - & r_2\omega_2\sin\theta_2 + r_3\omega_3\sin\theta_3 + r_4\omega_4\sin\theta_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r_3\omega_3\cos\theta_3 + r_4\omega_4\cos\theta_4 = -r_2\omega_2\cos\theta_2 \\ r_3\omega_3\sin\theta_3 + r_4\omega_4\sin\theta_4 = -r_2\omega_2\sin\theta_2 \end{cases}$$

برای چهارمیله‌ای حل تحلیلی وجود دارد ولی اگر بیشتر باشد تعداد بندها باید با روش‌های عددی حل نمود. (از کتاب Numerical Recepies کمک بگیرید)

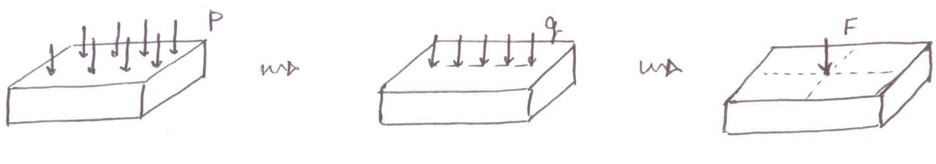
$$\ddot{\vec{r}}_k = i r_k \ddot{\theta}_k e^{i\theta_k} - r_k \dot{\theta}_k^2 e^{i\theta_k} \rightarrow \alpha_3 , \alpha_4 \checkmark$$

۸۸,۱۰,۱۶

* نیروشناسی

	نوع	برد	شدت
۱) گرانش	جاذبه	بلند	متوسط
۲) الکترومغناطیس	جاذبه - دافعه	کوتاه	قوی
3) قوی هسته‌ای	جاذبه	کوتاه	قوی
4) ضعیف هسته‌ای	دافعه	کوتاه	ضعیف

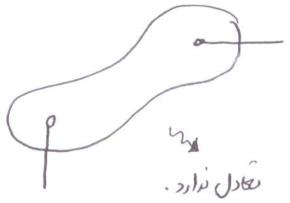
در اصل همه‌ی نیروهای ما به حجم وارد می‌شود ولی اگر مثلاً ضخامت حجمی که با نیرو درگیر است کم باشد، می‌شود با تقریب خوبی در نظر گرفت که به سطح وارد می‌شود. به همین ترتیب توزیع‌های نیرو در خط و همینطور با نقطه‌ای به عنوان تقریب‌های خوب به دست می‌آیند.

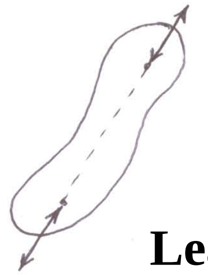


* نیروشناسی استاتیکی:

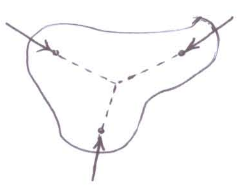
- جسم تحت تاثیر دو نیرو : Two Force Body

برای آنکه در تعادل باشد، نیروها باید هم‌راستا باشند و مختلف الجهت!





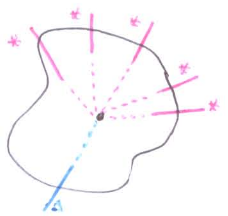
LearnElement.ir



- جسم تحت تأثیر سه نیرو ← سه نیرو متقاربند و همرسند!

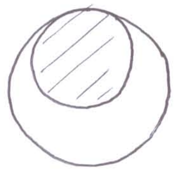
- جسم تحت تأثیر ۴ نیرو یا بیشتر قاعده‌ی خاصی ندارد.

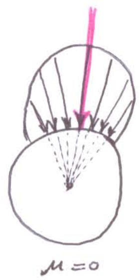
* اگر جسمی تحت اثر n تا نیرو باشد و n-1 نیرو همرسند ← نیروی n ام هم از آن نقطه خواهد گذشت.



جسم دو نیرویی ⇐ (مثلث + جمع ستاره‌ها یک نیرو)

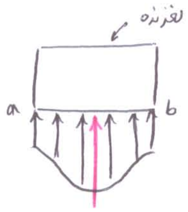
- یک شفت و یک چرخنده:





پس اگر اصطکاک نباشد، باید برآیند نیروها از مرکز عبور کند.

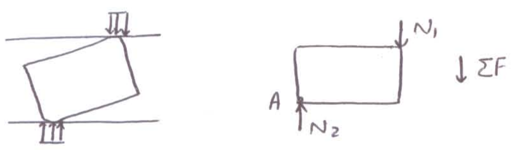
تنش برشی فقط زمانی به وجود می‌آید که اصطکاک وجود داشته باشد.



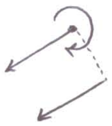
← یکدسته نیروهای همرسند که نقطه همرسیشان در ∞ است. ← پس برآیند نیروها هم نقطه همرسیش در ∞ است.

زمانی که تابع نیرو پیوسته است، برآیند نیرو حتماً باید بین a و b باشد. اگر برآیند گرفتیم و به سمت پایین شد، نشان می‌دهد که از بالا چسبیده

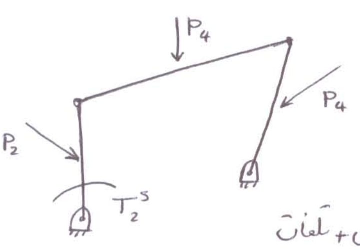
امّا اگر تکیه‌گاه پیوسته باشد (مثل زمانی که clearance ها زیاد باشد) برآیند نیروها می‌تونه جایی بیرون از a و b بیفته!



ΣF برای اینکه همین گشتاور را بدهد حول A، باید دورتر قرار بگیرد.



- رنچ (wrench): یک نیرو و یک گشتاور داریم، می‌توانیم با جابه‌جا کردن نیرو، گشتاور را برداریم.



چه نیرویی بگذاریم تا بر نیروهای خارجی غلبه کند؟

$T_2^s + \mu$ ↓ غلبه بر نیروهای خارجی و کار خارجی + تلفات

$T_2^d + \mu$ جا خودگردانی + تلفات

خازن مکانیکی = فلایویل: اگر یک آونگ دور کامل بزند (اصطکاک نداریم) زمانی که به اوج می‌رسد، سرعتش کم است و وقتی پایین می‌آید

LearnElement.ir

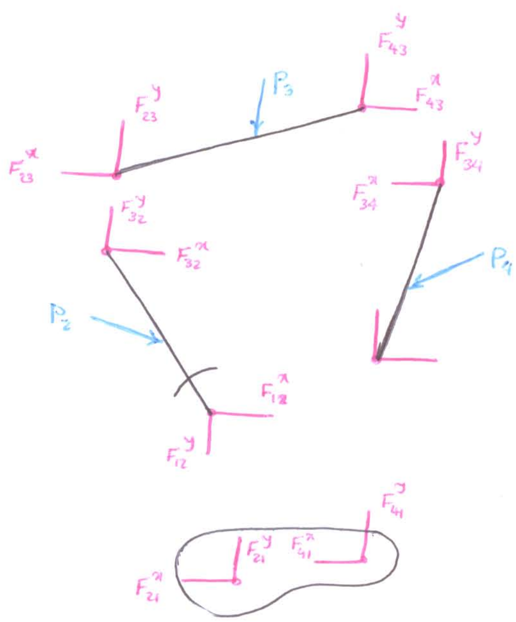
سرعتش زیاد است. برای یکنواخت کردن سرعت، از فلایویل استفاده می‌کنیم.

نیروهای استاتیکی قابل حذف نیستند، اما نیروهای دینامیکی قابل صفر کردن هستند. هیچ‌گاه صفر نمی‌شوند. به این عمل بهینه‌سازی یا بالانسینگ می‌گویند.

- قاعده‌ی علامت‌ها برای نیروها:

		مقدار	جهت	راستا	نقطه اثر
• نیروها:	↗	✓	✓	✓	✓
		?	?	✓	✓
	↗	?	✓	✓	✓
		?	?	?	✓
					?

		مقدار	جهت
• گشتاورها:		✓	✓
		?	✓
		?	?



• نیروشناسی چهارمیله‌ای:

F_{mn}

عضوی که نیرو به آن وارد می‌شود ← n ، m → عضو وارد کننده نیرو

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = \vec{0} \rightarrow \begin{cases} \sum F^x = 0 \\ \sum F^y = 0 \end{cases} \\ \sum M_a = 0 \end{cases}$$

تعداد مجهولات	تعداد معادلات
$8+1$	$3\times3=9$

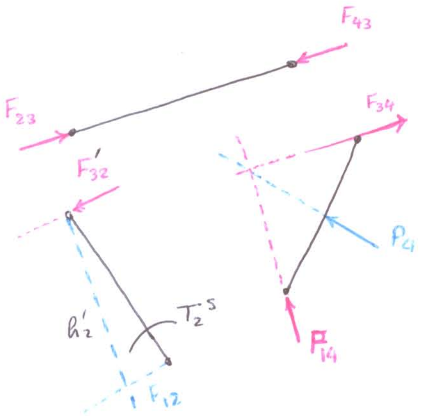
تعداد مجهولات از هر تعداد معادلات بیش‌تر است ← حل نمی‌شود.

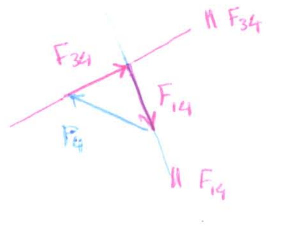
یک روش حل این است که یکبار $P_4 \neq 0$ می‌گذاریم، یکبار P_3 و یکبار P_2.

1) $P_4 \neq 0$

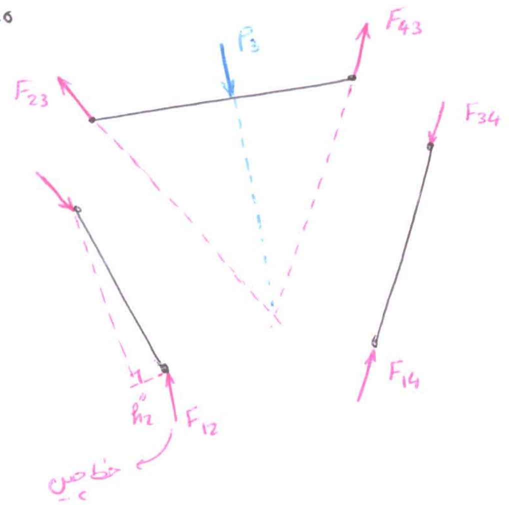
LearnElement.ir

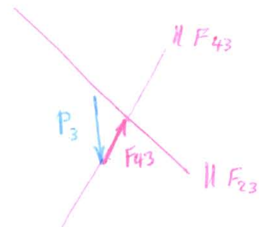
$$T_2^{s} = F'_{32} \times h'_2 \quad c.w.$$





2) $P_3 \neq 0$

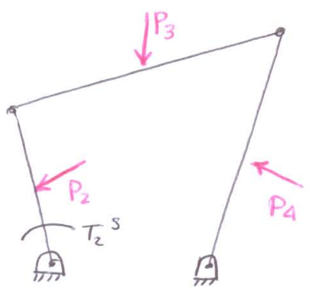


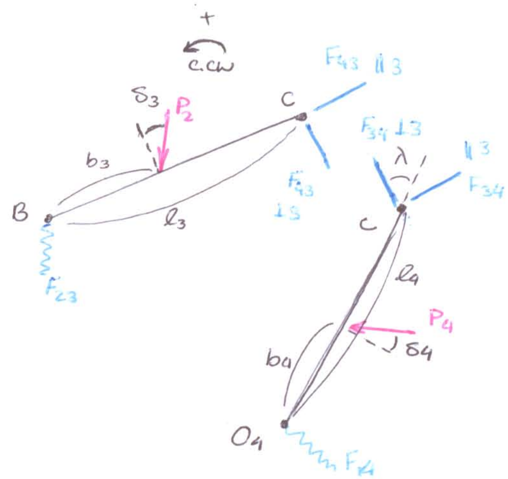


$$T_2^{s''} = F''_{32} \cdot h''_2 \quad c.w.$$

LearnElement.ir

روش سوم :





③ دربند : $\sum M_B = 0 \Rightarrow F_{43}^{\perp 3}$ ✓

$$F_{43}^{\perp 3} = \frac{b_3}{l_3} P_3 \cos\delta_3$$

④ از بند : $\sum M_{O_4} = 0 \Rightarrow F_{34}^{\parallel 3}$ ✓

$$F_{34}^{\parallel 3} = \frac{1}{\cos\lambda}\left(-\frac{b_4}{l_4} P_4 \cos\delta_4 + F_{34}^{\perp 3}\sin\lambda\right)$$

عضو سه نیرویی ③ $\Rightarrow F_{23}$ ✓

عضو سه نیرویی ④ $\Rightarrow F_{14}$ ✓

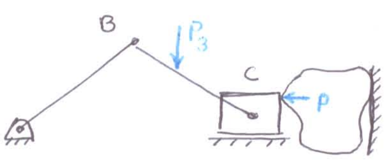
$$T_2 = T_2^s + T_2^d \qquad \begin{cases} T_2\omega_2 = P_{in} \\ P_4\omega_4 = P_{out} \end{cases} \qquad \eta = \frac{T_4\omega_4}{T_2\omega_2}$$

پس مراحل آخر کار به صورت زیره :

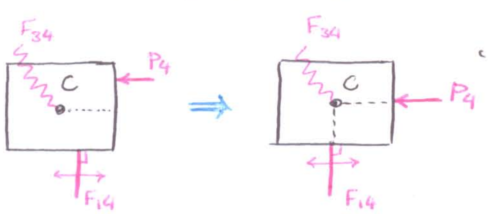
۱. طراحی اجزا ۲. راندمان ۳. انتخاب موتور

برای نقاط بحرانی طراحی کنید . همه چی را روی ماکزیمم در نظر بگیرید .

● مثال : به کمک مکانیزم لغزنده لنگ می خواهیم سنگ را خرد کنیم .



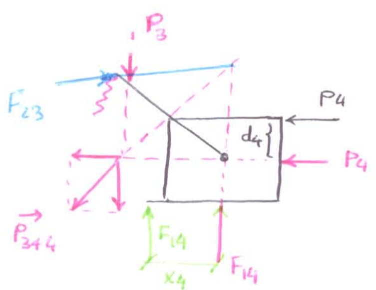
جهت نیروی F_{34} را می دانیم ، محل اعمال نیروی F_{14} را نمی دانیم ولی برای اینکه جسم در حال تعادل باشد ، لنگر نیروهای P_4 و F_{14} حول C باید برابر باهم باشد. به خاطر همین می شود که مکعبمان را به صورت زیر در نظر بگیریم .



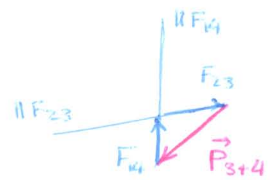
پس مسئله را حل می کنیم ، با توجه به نقطه اثری که برای F_{14} بدست می آید، می شود نتیجه گرفت که درست حل کرده ایم یا نه !

LearnElement.ir

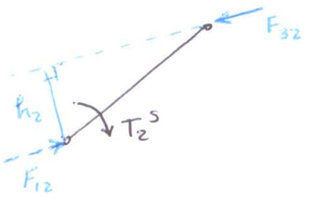
دوتا نیرو را باهم درنظر می‌گیریم :



$$x_4 = \frac{P_4}{F_{14}} d_4$$

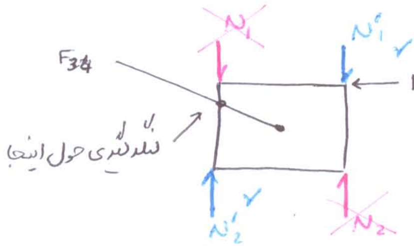


اگر x_4 بیرون طول لغزنده بیفتد، یعنی چرخیده و اشتباه حل کردیم.



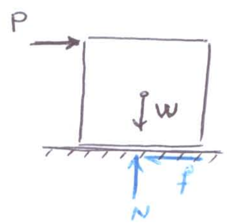
$$T_2^s = F_{32} \times h_2$$

ولی اگر بخواهیم طراحی کنیم باید طول لغزنده را به گونه‌ای طراحی کنیم که از هردوطرف بیشتر از بیشترین مقدار x_4 باشد.



برای اینکه بررسی کنیم می‌چرخد یا نه، با فرض اینکه F_{34} را هم پیدا کرده‌ایم، دو حالت آبی و قرمز ممکن است باشند، که قرمز کلاً ناممکن است چون جسم می‌چرخد.

* نیروشناسی استاتیکی همراه با اصطکاک



از جمله خصوصیات ذاتی مواد این است که برخی دوست دارند درهم نفوذ کنند (بین مولکول‌هایشان جاذبه وجود دارد و در محل تماس درهم نفوذ می‌کنند) و برخی هیچ علاقه‌ای به چسبیدن به مواد دیگر ندارند.

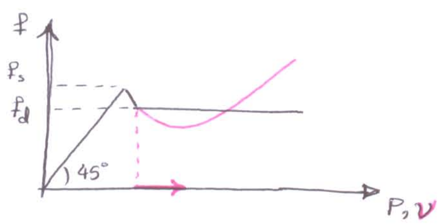
هنگامی که یک جسم روی سطحی قرار دارد، به خاطر نفوذ اتم‌ها و درگیرشدن ذرات، اندکی چسبندگی و جوش خوردن سطحی بین آنها به وجود می‌آید که در نتیجه برای حرکت دادن جسم باید این اتصالات بشکنند. (ضریب اصطکاک)

یک تماس واقعی داریم و یک تماس ظاهری. وقتی جسم را روی سطح فشار بدهیم، درگیری ذرات باهم بیشتر می‌شود و تکان دادن جسم سخت‌تر می‌شود.

$$\mu = \frac{f}{N}$$

μ می‌شود که بیشتر از یک باشد.

هرچه صافی سطح بیشتر باشد، احتمال جوش خوردگی بیشتر می‌شود.



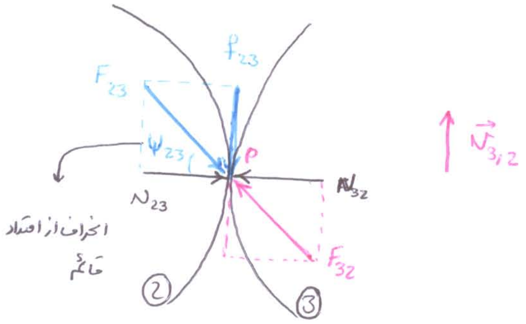
سرعت را که زیاد کنیم، μ می‌رود بالا (در یک محدوده‌ای از سرعت‌های زیاد)

و درنتیجه برخلاف انتظار ما اصطکاک بیشتر می‌شود.

از مواد lubricant هم اگر روی سطح تماس استفاده شود، ضریب اصطکاک به شدت کاهش می‌یابد.

با اصطکاک زندگی سخته، بدون اصطکاک زندگی ناممکنه! ولی ما تا حدودی می‌توانیم کنترلش کنیم.

LearnElement.ir



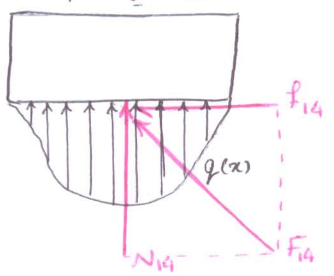
$$\mu = \frac{f}{N} = \tan\psi \Rightarrow \psi = \tan^{-1}\mu$$

μ_s: در آستانه حرکت μ_{ss} ، در حال حرکت μ_{sd} ← slippage

μ_R: در آستانه حرکت μ_{Rs} ، در حال حرکت μ_{Rd} ← Rolling

فرق بین عالم و مهندس:
- عالم هرچی رو می‌بینه می‌پرسه "چرا؟"
- مهندس " " می‌گه "چرا که نه؟!"

مثلاً تمایل حرکت به سمت راست باشد اگر!

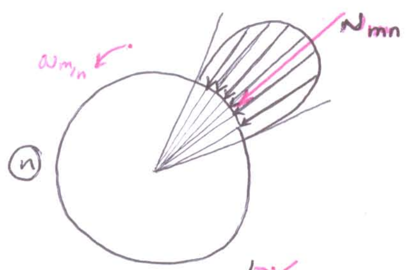


اگر لغزنده رو در نظر بگیریم:

$$df = \mu q(x)\,dx$$

$$f_{14} = \int_0^l \mu q(x)\,dx = \mu \underbrace{\int_0^l q(x)\,dx}_{N_{14}}$$

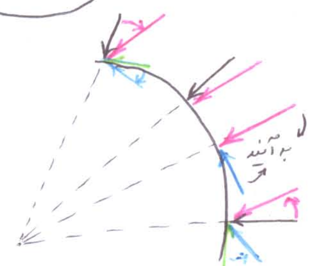
اگر لولا را بررسی کنیم:

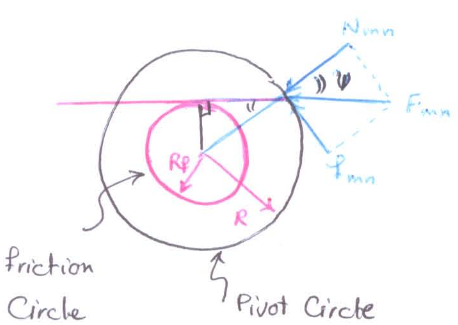


همه جا سرعت زاویه‌ای مطلق استفاده می‌کنیم مگر در دوجا:

۱. محاسبه‌ی شتاب کوریولیس ۲. محاسبه‌ی جهت نیروی اصطکاک

مؤلفه‌های موازی نیروی برآیند باهم جمع می‌شوند و مؤلفه‌های عمود بر نیروی برآیند همدیگه رو خنثی می‌کنند.





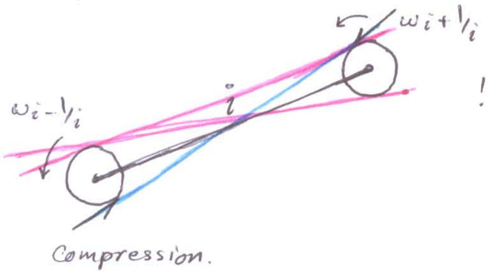
یک عضو دونیرویی یا تحت کشش است، یا تحت فشار!

$$\sin\psi = \frac{R_f}{R}$$

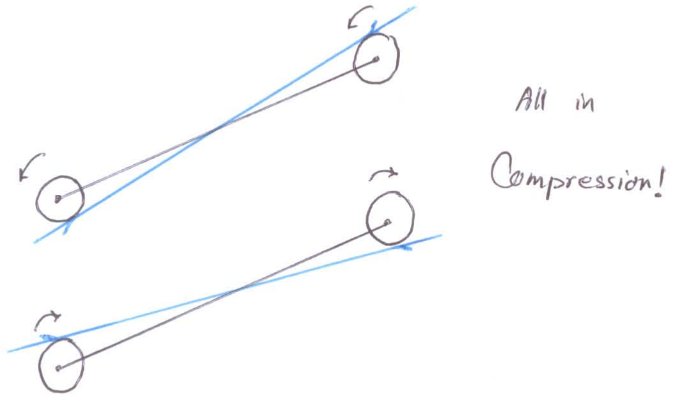
$$R_f = R\sin\psi = R\sin(\operatorname{tg}^{-1}\mu)$$

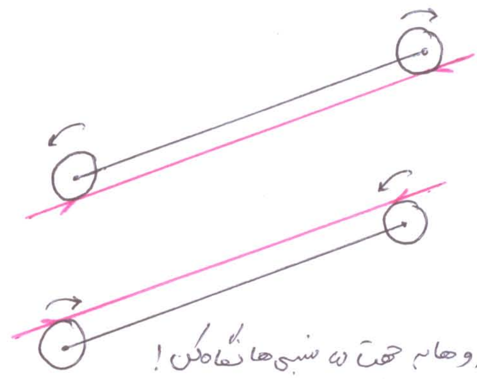
پس نیروی برآیند وارد شده به عضو باید در امتداد مماس مشترک داخلی دایره‌های اصطکاک لولاها باشند یا در امتداد مماس مشترک خارجی!

اگر ωها هم جهت باشند، در امتداد مماس مشترک داخلی است، چه کششی چه فشاری!



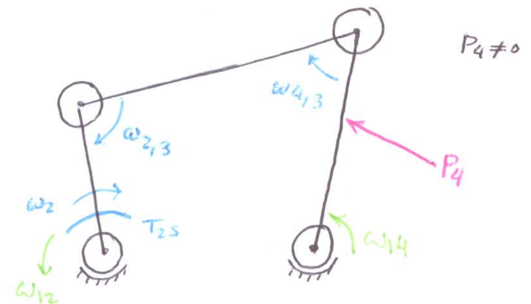
LearnElement.ir





برای جهت نیروها به جهت ω نسبی‌ها نگاه کن!

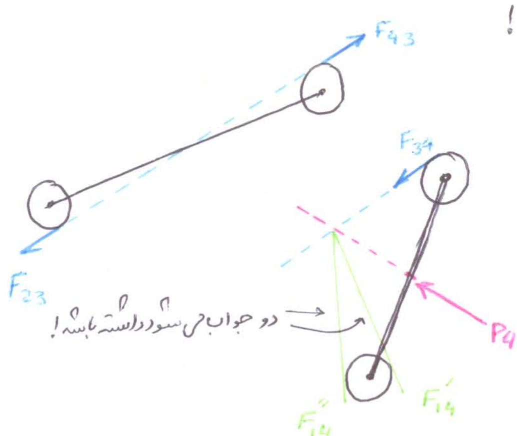
● مثال:



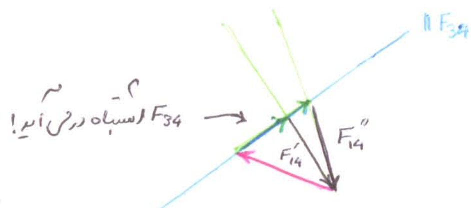
به محدوده‌ای از + تا − برای T_2^S وجود دارد که مکانیزم برای آن ثابت باقی می‌ماند!

جسم ③ را مثلاً تحت کشش در نظر بگیریم:

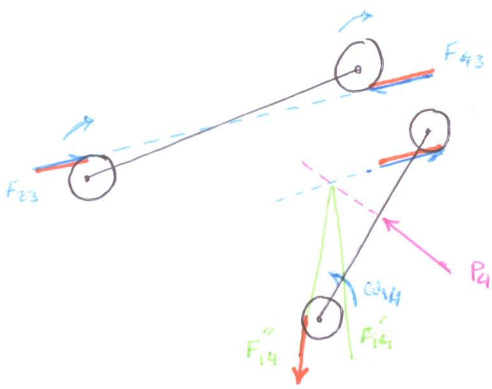
برای جهت ωهای نسبی، به حرکت دورانی نسبی (تخیلی) بندها دقت کن!

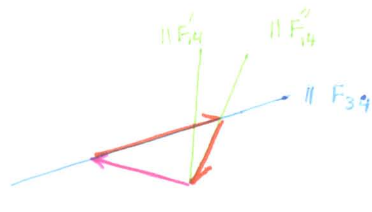


دیاگرام نیروها را اگر بکشیم، می‌فهمیم که فرض کششی غلط است:



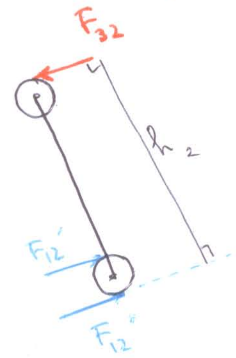
پس فشاری است و نتایج به صورت زیر به دست می‌آیند:





پس نارنجی‌ها جواب مسئله هستند.

پس برویم سراغ بند ②:



$$T_2^S = F_{32} h_2$$

* نیروشناسی نیروهای دینامیکی

$$\vec{A}_{XYZ} = \vec{A}_{xyz} + \vec{A}_0 + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\alpha} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{xyz}$$

به تبصره لازمه برای اینکه از قانون دوم نیوتون بتوانیم روی دستگاه دوار زمین استفاده کنیم.

$\vec{F} = m\vec{a}$ $\quad$ $\vec{F}_{real.}$ $\quad$ $m \gg 0$ $\quad$ $\dfrac{\vec{a}_{xyz}}{v \ll c}$

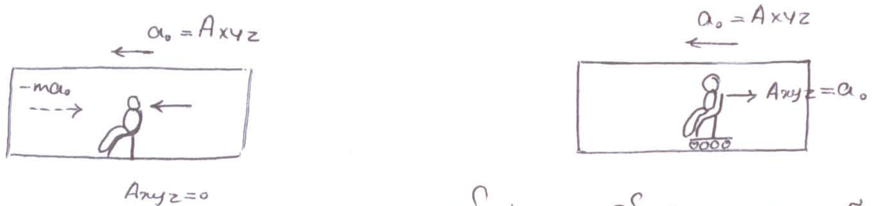
نیروهایی که، وقتی که روی یک دستگاه غیرنیوتونی می‌ایستی، در رابطه‌ی قانون دوم ظاهر می‌شوند، نیروهای دینامیکی نامیده می‌شوند. این نیروها مجازی اند.

$$\underbrace{m\vec{A}_{XYZ} + \underbrace{(-m\vec{A}_0)}_{\vec{F}_{trans.}} + \underbrace{[-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})]}_{\vec{F}_{cen.}} + \underbrace{(-m\vec{\alpha} \times \vec{r})}_{\vec{F}_{crossed}} + \underbrace{(-2m\,\vec{\omega} \times \vec{v}_{xyz})}_{\vec{F}_{cor.}}}_{\vec{F}_{vir.}} = m\vec{A}_{xyz}$$

$$\vec{F}_{real.} + \vec{F}_{vir.} = \vec{F}^{*} = m\vec{A}_{xyz}$$

بیایید تک تک این نیروها را ببینیم:

- آدم روی صندلی:

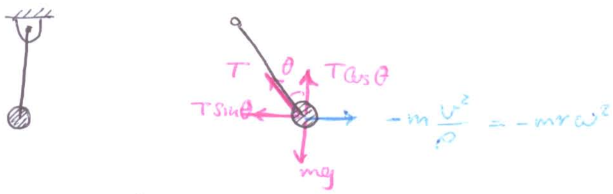


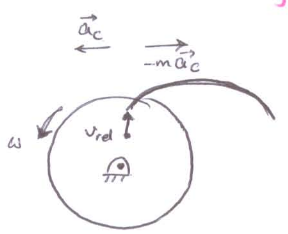
به آدم در این حالت شتابی وارد نمی‌شه!

- توپ آویزون به آینه ماشین:

از دید راننده توپ کج شده و در تعادله (وقتی ماشین داره می‌چرخه) ولی از دید ناظر نیوتونی اصلاً در تعادل نیست:

پس باید $mr\omega^2$ رو هم به حساب بیاریم.

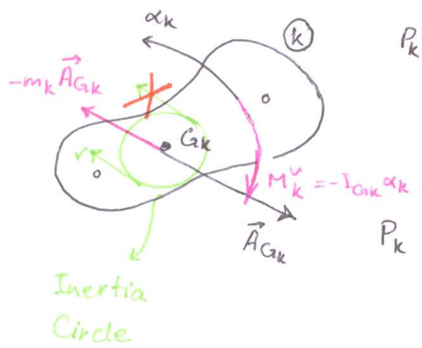




- یا توپ روی دیسک که قبلاً هم دیدیم:

اگر روی مرکز دستگاه غیرنیوتونی بایستی، نیروی گریز از مرکز هم داریم حتی!

LearnElement.ir



$$P_k + \sum \vec{F}_{jk} = m_k \vec{A}_{G_k}$$

$$j = 1, \dots, n \quad j \neq k$$

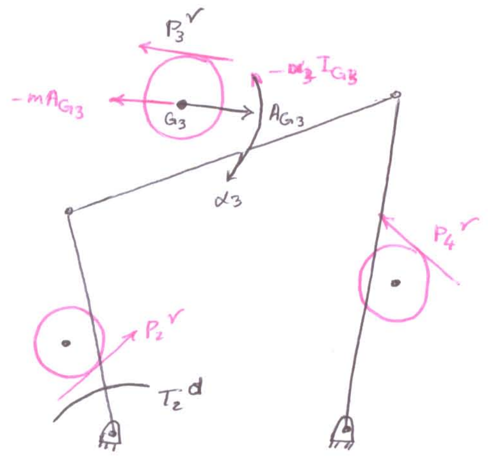
با توجه به اصل دالامبر :

$$P_k + \sum \vec{F}_{jk} + \underbrace{(-m_k \vec{A}_{G_k})}_{P_k^v} = 0$$

$$M_{G_k} = I_{G_k}\alpha_k \Rightarrow M_{G_k} + \underbrace{(-I_{G_k}\alpha_k)}_{M_k^v} = 0$$

$$\vec{M}_a = \frac{d\vec{L}_a}{dt} + m\vec{R}_c \times \ddot{\vec{r}}_a$$

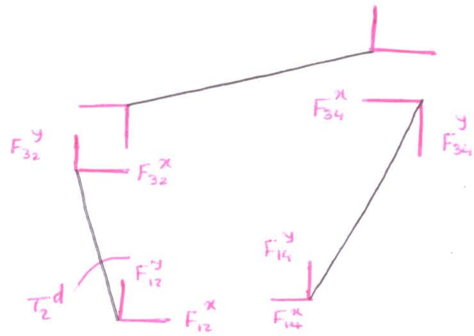
شعاع دایره اینرسی $\quad R_I = \dfrac{M_k^v}{F_k^v} = \dfrac{-I_{G_k}\alpha_k}{-m_k|\vec{A}_{G_k}|} \Rightarrow$ مسئله دینامیکی تبدیل می‌شود به استاتیکی !

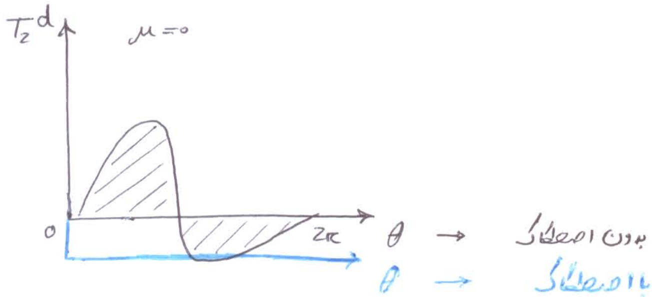


$$\sum \vec{F}_{jk} = m_k \vec{A}_{G_k}$$

$$j = 1, 2, 3, 4 \neq k$$

$$M_k = I_{G_k}\alpha_k$$





اگر اصطکاک نباشد همیشه سطح زیر منحنی T_2^d صفر است.

ولی اگر " باشد، باید انرژی بهش پمپ کنیم!

$$T_2 = T_2^s + T_2^d$$

مکانیزمی خوبه که T_2^d پایینی داشته باشه و خودش بتونه خودشو تأمین کنه!

مثلاً در موتور احتراق داخلی:

یک انکودر می‌ذاریم روی میل لنگ و زاویه میل لنگ را می‌خوانیم، از اختلاف زاویه‌ها در زمان، سرعت و از اختلاف سرعت‌ها، شتاب بدست می‌آید. پس با حرکت شناسی بعد با سرعت شناسی بعد با شتاب شناسی بعد با نیرو شناسی می‌رسیم به T_2^d.

از سلیندر، فشار اندیکاتوری می‌گیریم، اطلاعات میل لنگ هم به کمک انکودر داریم، با کمک جرم‌ها و ممان اینرسی های پیستون، شاتون

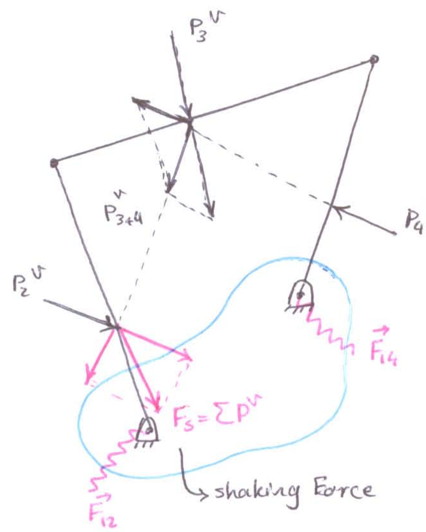
LearnElement.ir

و میل لنگ که از قبل (به کمک آزمایش) بدست آمده، $T_2{}^s$ را هم می‌یابیم. در آخر می‌نویسیم: $T_2 = T_2{}^s + T_2{}^d$

با این $T_2{}^s$ و $T_2{}^d$ بعداً به سراغ Fly Wheel ها می‌رویم.

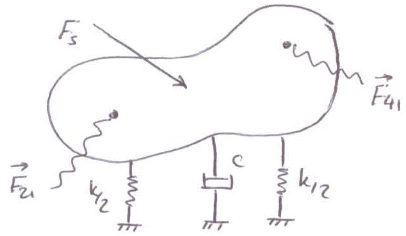
*
* مباحث تکمیلی
*

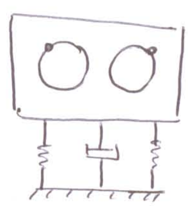
- نیروهای لرزشی:



این نیروهای لرزشی به پایه منتقل می‌شود. حذف کردن این نیروها و بهینه‌سازی آنها را می‌گویند بالانسینگ!

برای جلوگیری از انتقال آنها و از جا در رفتن وانها هم میرا کننده می‌گذارند هم Guide!



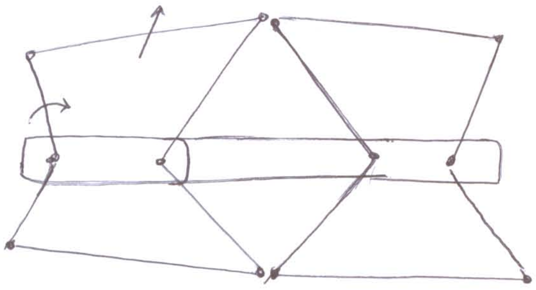


$$(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{14}) + \vec{F}_s = 0$$

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{41} = \vec{F}_s$$

◉ بالانسینگ:

برای بالانس کردن چهار میله‌ای، همی قرینه‌هاشو بهش اضافه می‌کنیم:



۱. خطاهای ساخت ۲. خطاهای نصب ۳. تغییرشکل‌های الاستیک

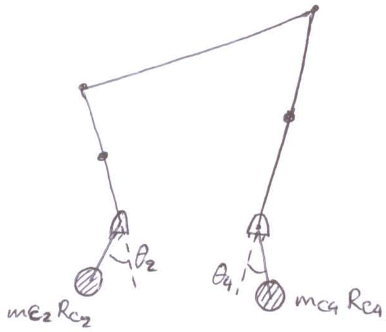
باعث می‌شوند آنچه شما روی کاغذ می‌سازید با آنچه واقعاً می‌سازید فرق داشته باشد.

همه‌چیز غیربالانس است ولی گاهی ما غیربالانس بودن آن را حس نمی‌کنیم.

ولی یه راه دیگه هم وجود داره برای بالانس کردن چهار میله‌ای: یه چندتا جرم اضافه کنیم یا یه کم از جرم کم کنیم؟

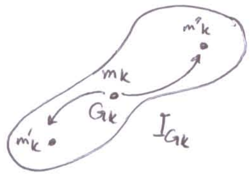
LearnElement.ir

جرم ها را با کمی انحراف از امتداد مرکز جرم بندها اضافه می کنیم و حالا با کمک نوشتن ۴ تا معادله و با استفاده از روش های بهینه سازی می فهمیم دقیقاً کی اضافه کنیم.



اما چون از مسیر مرکز جرم بند ③ خبر نداریم، نمی توانیم این کار را برای بند ۳ هم انجام بدهیم. به هر حال یه کم بهتر می شه اوضاع.

اما به ایده ها آیا مسئله با m_k و I_k و مرکز جرم معلوم، ...



ولی ما نمی توانیم به جرم دست بزنیم!

بله می شه: اگر بتوانیم ممان اینرسی یا در واقع توزیع جرم حول مرکز جرم را تغییر بدهیم، می شود!

اگر یک مکانیزم رفت و برگشتی داشته باشیم، بالانسینگ آن متفاوت است.

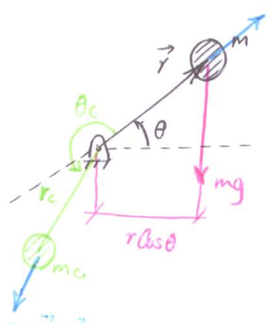
* بالانسینگ اجرام چرخان

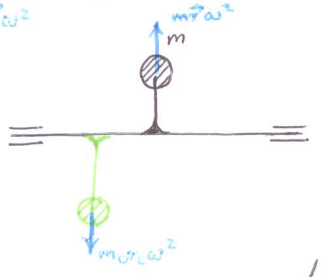
۱) تک جرم چرخان 2) دو جرم چرخان 3) اجرام چرخان هم صفحه 4) اجرام چرخان غیر هم صفحه 5) اجرام چرخان پیوسته

۱) تک جرم چرخان

الف) تراز بندی استاتیکی Static Balancing (SB)

اجرام چرخان در تعادل بی تفاوت قرار بگیرند و تحت هر شرایطی قرارشان بدی، در تعادل باقی بمانند.





گشتاور حول محور تک جرم : $mgr\cos\theta$

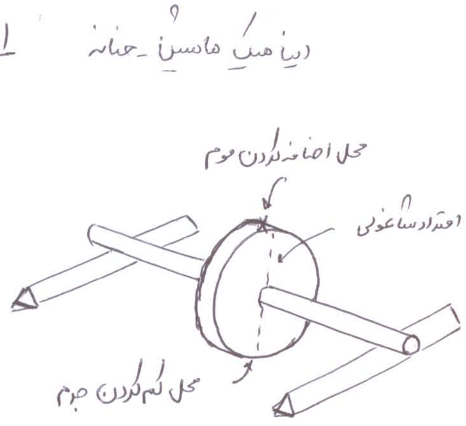
چاره اش اینه که یک جرم موازنه گر (Counter Balancing Mass) اضافه کنیم.

$$mgr(\cos\theta) + m_c g r_c \cos\theta_c = 0 \rightarrow g(mr\cos\theta + m_c r_c \cos\theta_c) = 0$$

$$g \neq 0 \Rightarrow mr\cos\theta = -m_c r_c \cos\theta_c$$

در شرایط بی جاذبه، همه چی در تعادل استاتیکی است

LearnElement.ir



اگر در دو راستای متفاوت، بی‌تفاوت ماند، پس در تمام راستاها بی‌تفاوت می‌ماند.

اگر حرکت کرد، صبر می‌کنیم بایستد، هرجا که ایستاد، آنقدر روی آن موم اضافه می‌کنیم و دوباره آزمایش می‌کنیم تا به تعادل بی‌تفاوت برسد. در این جا حالا یا موم را وزن می‌کنیم و به همان اندازه از طرف مقابلش می‌تراشیم تا بالانس شود یا موم را می‌گذاریم همانجا باشد.

مثلاً فرض کن راستای «متفاوت» دوم، در α درجه اونورتر باشد:

$$mr\cos(\theta+\alpha)+m_c r_c\cos(\theta_c+\alpha)=0$$

$$\Rightarrow mr\cos\theta\cos\alpha - mr\sin\theta\sin\alpha + m_c r_c\cos\theta\cos\alpha - m_c r_c\sin\theta_c\sin\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \cos\alpha\,(mr\cos\theta + m_c r_c\cos\theta_c) - \sin\alpha\,(mr\sin\theta + m_c r_c\sin\theta_c) = 0$$

می‌خواهیم به ازای تمام α ها این دو رابطه برقرار باشند، پس ضرایب $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ باید توأماً صفر باشند.

$$\begin{cases} mr\cos\theta + m_c r_c\cos\theta_c = 0 \\ mr\sin\theta + m_c r_c\sin\theta_c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_c r_c\sin\theta_c = -mr\sin\theta \\ m_c r_c\cos\theta_c = -mr\cos\theta \end{cases}$$

$$tg\,\theta_c = \frac{\sin\theta_c}{\cos\theta_c} = \frac{-\sin\theta}{-\cos\theta} = tg\,\theta$$

$$\Rightarrow \theta_c \begin{cases} \theta \Rightarrow m_c r_c = -mr \\ \theta+\pi \Rightarrow m_c r_c = +mr \end{cases}$$

یعنی در راستای خود r

یعنی یا این طرف جرم اضافه کن یا از اونور جرم بردار!

ب) ترازمندی دینامیکی Dynamic Balancing (DB)

$$m\vec{r}\omega^2 + m_c\vec{r_c}\omega^2 = \vec{0} \Rightarrow \omega^2(m\vec{r} + m_c\vec{r_c}) = \vec{0}$$

$$\omega^2 \neq 0 \Rightarrow m\vec{r} + m_c\vec{r_c} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} mr\cos\theta + m_c r_c\cos\theta_c = 0 \\ mr\sin\theta + m_c r_c\sin\theta_c = 0 \end{cases} \Rightarrow$$ همان نتایج بالانس استاتیکی

پس برای تک جرم چرخان داریم: $SB \Leftrightarrow DB$. کافی است بالانس استاتیکی شود.

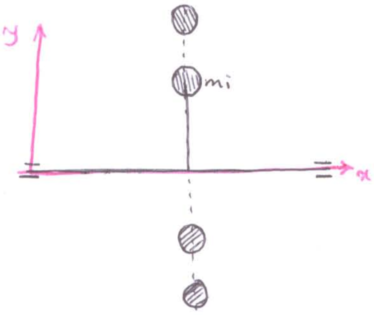
اگر دو جرم چرخان داشتیم، باید دقیقاً می‌آمد زیر اونیکی تا دینامیکی بالانس باشد و گرنه بلبرینگ خرد میشود و از این حرفا! بالانس استاتیکی دقیقاً مثل قبلی است!

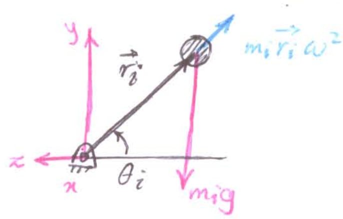
LearnElement.ir

۸۸ , ۱۰ , ۲۱

۳) ترازمندی اجرام چرخان هم صفحه

هم صفحه یعنی همگی اجسام روی یک محور دوران واقع شده باشند.





$$S.B.\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} m_i g r_i \cos\theta_i = 0 \\ \sum m_i g r_i \sin\theta_i = 0\end{cases}$$

برای اینکه بفهمیم برای هر زاویه‌ای برقرار است، ۹۰ درجه می‌چرخانیم‌اش! سیم

$$g \neq 0 \Rightarrow \begin{cases}\sum m_i r_i \cos\theta_i = 0 \\ \sum m_i r_i \sin\theta_i = 0\end{cases}$$

شرط خود ترازمندی استاتیکی
اجرام چرخان هم صفحه

$$D.B. \quad \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r_i} \omega^2 = 0 \quad , \omega^2 \neq 0 \Rightarrow \sum m_i \vec{r_i} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases}\sum m_i r_i \cos\theta_i = 0 \\ \sum m_i r_i \sin\theta_i = 0\end{cases}$$

شرط خود ترازمندی دینامیکی
اجرام هم صفحه

پس می‌بینیم که با هم ترازمندی استاتیکی، ترازمندی دینامیکی را نتیجه می‌دهد و بالعکس. $S.B. \Leftrightarrow D.B.$

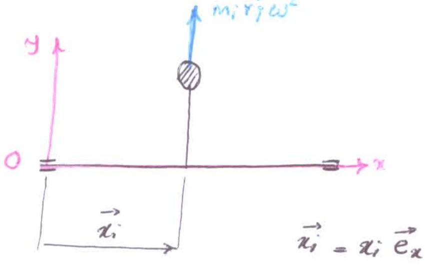
مثل همون پره‌ی هلیکوپتر و یا فن‌ها! $\frac{t}{D} \ll 1$ & $N < 400\,rpm$

$$\begin{cases}\sum m_i r_i \cos\theta_i + m_c r_c \cos\theta_c = 0 \\ \sum m_i r_i \sin\theta_i + m_c r_c \sin\theta_c = 0\end{cases} \Rightarrow \tan\theta_c = \frac{\sin\theta_c}{\cos\theta_c} = \frac{-\sum m_i r_i \sin\theta_i}{-\sum m_i r_i \cos\theta_i}$$

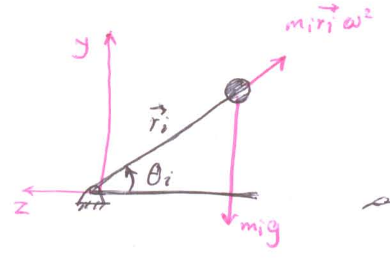
انتخاب θ_c در ربع صحیح

$$m_c r_c = \frac{-\sum m_i r_i \cos\theta_i}{\cos\theta_c} \Rightarrow r_c = \checkmark$$

این اجرام در واقع معادل یک جرم واحد در یک θ مؤثر در همان صفحه هستند. پس کافی است یک جرم روبه‌روی این جرم معادل اضافه کنیم برای ترازمندی!



$\vec{x_i} = x_i \vec{e}_x$



۴) ترازمندی اجرام چرخان غیر هم صفحه:

شرط ترازمندی استاتیکی، مثل اجرام هم صفحه است!

LearnElement.ir

$$S.B.\begin{cases}\sum m_i g r_i \cos\theta_i = 0 \\ \sum m_i g r_i \sin\theta_i = 0\end{cases} , g \neq 0 \Rightarrow \begin{cases}\sum m_i r_i \cos\theta_i = 0 \\ \sum m_i r_i \sin\theta_i = 0\end{cases}$$

شرط خودترازمندی استاتیکی اجرام چرخان غیرهم صفحه

لنگر نیروهای $mr\omega^2$ حول هر نقطه ی دلخواهی از جمله مبداء مختصات باید صفر باشد.

D.B.

$$\begin{cases}\sum m_i \vec{r}_i \omega^2 = \vec{0} \\ \sum x_i \times m_i \vec{r}_i \vec{\omega}^2 = \vec{0}\end{cases} , \omega^2 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases}\sum m_i \vec{r}_i = \vec{0} \\ \sum x_i \vec{e}_x \times m_i \vec{r}_i = \vec{0}\end{cases}$$

$$\sum x_i \vec{e}_x \times m_i \vec{r}_i = \vec{0} \Rightarrow \vec{e}_x \times \left(\sum x_i m_i \vec{r}_i\right) = \vec{0} \Rightarrow \sum x_i m_i \vec{r}_i = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\sum m_i \vec{r}_i = \vec{0} \\ \sum x_i m_i \vec{r}_i = \vec{0}\end{cases}$$

شرط خود ترازمندی دینامیکی اجرام چرخان غیرهم صفحه $\Rightarrow$ پس اینجا دیگر ترازمندی استاتیکی، ترازمندی دینامیکی را تامین نمی کند و اگر دینامیکی تراز مند باشه ترازمندی استاتیکی هم برقرار است.

پس به روابط زیر می رسیم:

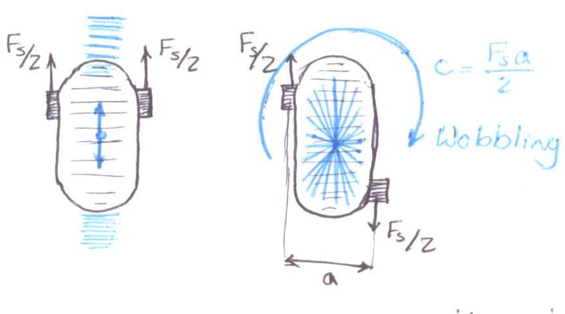
$$D.B.\begin{cases} S.B.\begin{cases}\sum m_i r_i \cos\theta_i = 0 \\ \sum m_i r_i \sin\theta_i = 0\end{cases} \\ \begin{cases}\sum x_i m_i r_i \cos\theta_i = 0 \\ \sum x_i m_i r_i \sin\theta_i = 0\end{cases}\end{cases}$$

شرط خود ترازمندی استاتیکی اجرام چرخان غیرهم صفحه
" " نیروهای لرزشی چرخشی ناشی از چرخش اجرام چرخان غیرهم صفحه

شرط خود ترازمندی گشتاورهای لرزشی چرخشی ناشی از چرخش اجرام چرخان غیرهم صفحه

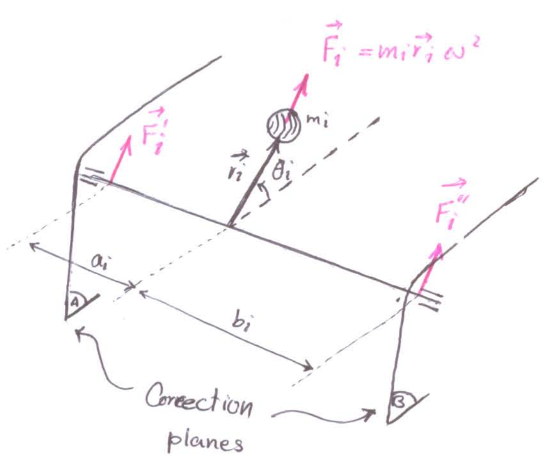
مثلاً در بالانسینگ چرخ ماشین:

* حالا برای بالانس کردن این اجرام چه می کنیم؟

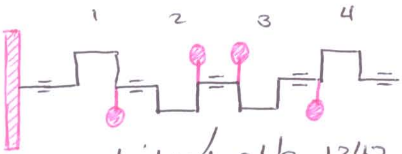


هر جرم در یک صفحه ی مشخص را می شود تبدیل کرد به دو جرم در دو صفحه ی دلخواه.

پس کل اجرام را می شود به دو گروه جرم در دو صفحه ی دلخواه مشخص تبدیل کرد. برای بالانس کردن اجرام هر صفحه یک جرم لازم است. پس در کل به دو جرم نیاز است.



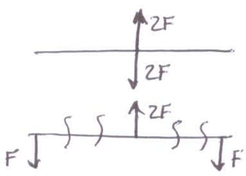
$$\begin{cases} \vec{F_i'} = \overbrace{\left(\dfrac{b_i}{a_i+b_i}\, m_i\right)}^{m_i a} \vec{r_i}\,\omega^2 \\[2ex] \vec{F_i''} = \underbrace{\left(\dfrac{a_i}{a_i+b_i}\, m_i\right)}_{m_i b} r\,\omega^2 \end{cases}$$



مثلاً میل لنگ «پیکان» مربوط به یک موتور چهارزمانه رو در نظر بگیرید!

برای جلوگیری ایجاد لرزش ها و کش اومدن سرسیلندر رو اینجا ترتیب احتراق را به صورت 1342 طراحی کرده اند!

علی رغم اینکه این میل لنگ خود بالانس است اما با این وجود یه سری نیروهای برشی و لنگر خمشی داخلی دارد که باعث می شود باعث ایجاد خستگی در یاتاقان می شود. پس با استفاده از اضافه کردن جرم، آن را بالانس می کند. حدود 30 تا 40 درصد وزن میل لنگ را افزایش می دهد. اشکالی ندارد. چون برای بالابردن اینرسی سیستم، به هر حال لازم است یک فلایویل به تهِ میل لنگ بذاریم. حالا هرچی میل لنگ خودش قوی تر باشه، بهتره دیگه!



- فرض کن با k تا جرم می خواهیم یه چیزی رو بالانس کنیم. فرض کن m_i و r_i ها رو داده به ما، خب برای طرح مسئله چه چیزهایی می شود به عنوان مجهول در نظر گرفت؟

x_i	θ_i	مجهولات
0	4	
1	3	
2	2	
3	1	
4	0	

با این دو حالت نمی شود مسئله را حل کرد چون کلاً دوتا معادله برای x ها داریم که می شود x ها را به کمک آنها پیدا کرد.

- خود ترازمند نیست، می خواهیم بالانسش کنیم:

$$\text{D.B.}\begin{cases} \begin{cases} \sum m_i r_i \cos\theta_i + \overbrace{m_a r_a} \cos\theta_a + \overbrace{m_b r_b} \cos\theta_b = 0 \\ \sum m_i r_i \sin\theta_i + m_a r_a \sin\theta_a + m_b r_b \sin\theta_b = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sum x_i m_i r_i \cos\theta_i + \widehat{x_a} m_a r_a \cos\theta_a + \widehat{x_b} m_b r_b \cos\theta_b = 0 \\ \sum x_i m_i r_i \sin\theta_i + x_a m_a r_a \sin\theta_a + x_b m_b r_b \sin\theta_b = 0 \end{cases} \end{cases} \rightarrow \text{4 مجهول}$$

در عمل برای ما راحت تر است که x_a و x_b را معلوم کنیم و به کمک آن حالا بقیه مجهولات را پیدا کنیم. در این صورت داریم:

LearnElement.ir

1) $tg\,\theta_b = \dfrac{-\sum x_i r_i m_i \sin\theta_i}{-\sum x_i r_i m_i \cos\theta_i} \Rightarrow \theta_b$ ✓ در ربع صحیح

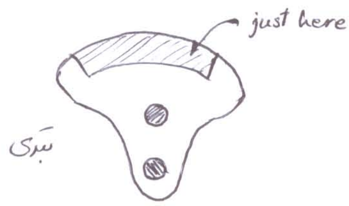
2) $\widehat{m_b r_b} = \dfrac{-\sum x_i m_i r_i \cos\theta_i}{x_b \cos\theta_b}$

3) $tg\,\theta_a = \dfrac{-(\sum m_i r_i \cos\theta_i + m_b r_b \cos\theta_b)}{-(\sum m_i r_i \sin\theta_i + m_b r_b \sin\theta_b)} \Rightarrow \theta_a$ ✓ در ربع صحیح

اگر منفی ها رو بزنی، زاویه جرم موثر بدست می آید ← جایی که جرم باید کم شود.

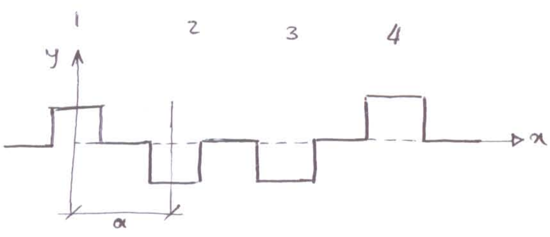
4) $\widehat{m_a r_a} = \dfrac{-(\sum m_i r_i \cos\theta_i + m_b r_b \cos\theta_b)}{\cos\theta_a}$

گاهی وقت ها مجبوریم بجای ۲ تا جرم، به کمک ۴ تا جرم بالانس کنیم. روی بعضی قطعات محدودیت فضا برای اضافه کردن یا برداشتن جرم داریم.



یه راهش اینه که اول یه موقعیت برای دو جرم a و b به کمک بالا می یابیم، بعدش حالا دوباره معادله اصلی های بالانس دینامیکی را با معلوم بودن a و b و داشتن ۴ تا جرم مجهول حل می کنیم. برای x و θ محدودیت داریم، r هم به m وابسته است پس باید با روش های بهینه سازی این مقادیر را پیدا کرد.

گویا زمین خودش، خودش رو بالانس می کنه. معروفه زمین نرم هست و باعث می شه ارتعاشات ناشی از عدم بالانسی رو بگیره. عربستان سالی یه سانت می ره به سمت بستن تنگه هرمز!



● بریم سراغ موتور ۴ سیلندر خطی:

$\theta_1 = \theta_4 = 0 \quad , \theta_2 = \theta_3 = \pi$

$x_1 = 0 \quad , x_2 = a \ , x_3 = 2a \ , \ x_4 = 3a$

$m_i r_i = mr$

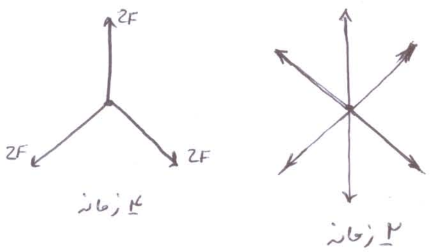
$$\begin{cases} \sum \cos\theta_i = \cos 0 + \cos\pi + \cos\pi + \cos 0 = 0 \\ \sum \sin\theta_i = \sin 0 + \sin\pi + \sin\pi + \sin 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{بالانس استاتیکی هست}$$

LearnElement.ir

$$\begin{cases} \sum x_i \cos\theta_i = 0 \times \cos 0 + a\cos\pi + 2a\cos\pi + 3a\cos 0 = 0 \\ \sum x_i \sin\theta_i = 0 \times \sin 0 + a\sin\pi + 2a\sin\pi + 3a\sin 0 = 0 \end{cases}$$

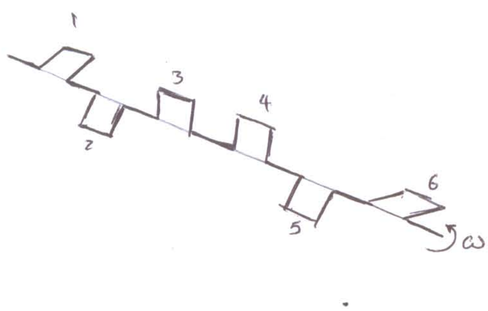
پس ۴ سیلندر، مثل شکلش خود بالانسه، چیزی اضافه نمی‌خواد.

● حالا ۶ سیلندر:



این ۶ تا رو یا میشود به صورت ۳ تا زاویه ۱۲۰° توزیع کرد. یا اینکه ۶ تا ۶۰° !

مثلا موتور رولزرویس ۴ زمانه و خود بالانسه، چرا؟ ببین ↓



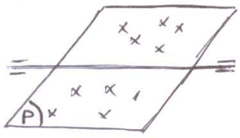
ترتیب احتراق ← 153624

۲ تا شیش سیلندر جناقی رو بذاری پشت سرهم می‌شه ۱۲ سیلندر!

۲ تا دوازده سیلندر جناقی روهم بذاری پشت هم، می‌شه ۲۴ سیلندر!

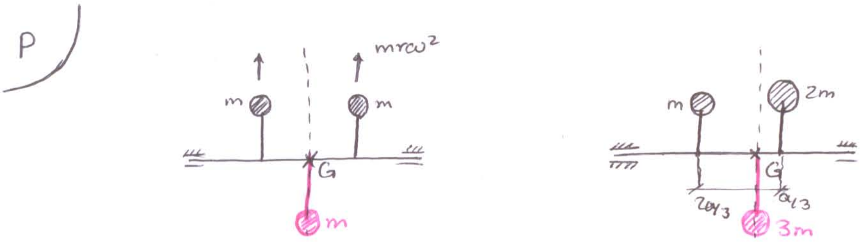
۸۸ ,۱۵ ,۲۴

دیر رسیدم، گویا استاد داره چند حالت خاص رو توضیح می‌ده:



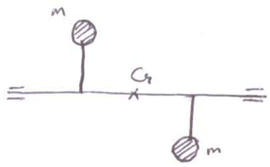
a) یک جرم

b) دوجرم برابر



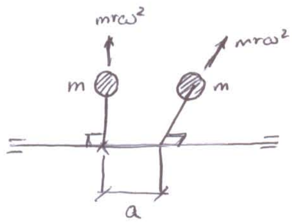
static unbalancing

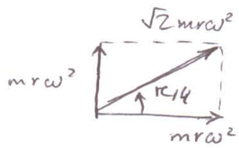
اگر یک جرم جبران‌کننده روی مرکز جرم دوجرم بود، ناترازمندی استاتیکی داریم و اگر نبود می‌شود ناترازمندی شبه استاتیکی!



quasi static unbalancing

اگر حالا دو جرم در یک صفحه نباشند :

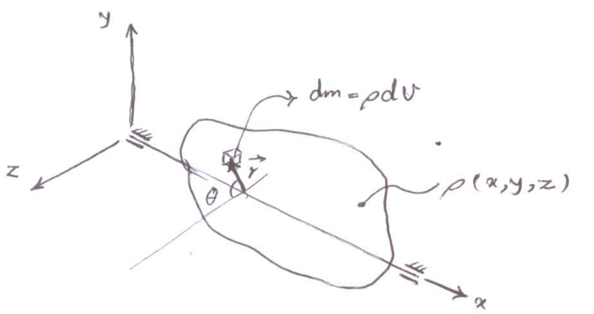




کلی ترین حالت ⟵ دو جرم نابرابر غیرهم صفحه

حالتی خارج از حالت های بالا وجود ندارد.

۱) اجسام چرخان پیوسته :



یک المان از جسم را در نظر می گیریم :

$$\begin{cases} r\cos\theta = z \\ r\sin\theta = y \end{cases}$$

در اینجا دیگر Σ تبدیل می شود به $\int$ و در نتیجه به جای m_i ها هم dm داریم.

S.B.

$$\begin{cases} \sum m_i r_i \cos\theta = 0 \\ \sum m_i r_i \sin\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_V z\rho dV = 0 \\ \int_V y\rho dV = 0 \end{cases}$$

از طرفی : $\bar{z} = \dfrac{\int_V z\rho dV}{\int_V \rho dV = M}$ $\Rightarrow \begin{cases} \bar{z} M = 0 \\ \bar{y} M = 0 \end{cases}$, $M \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \bar{z} = 0 \\ \bar{y} = 0 \end{cases}$

این بیان معناست که مرکز جرم روی محور چرخش واقع باشد. ⟵ شرط خودترازمندی استاتیکی و شرط خودترازمندی نیروهای لرزشی

اگر مثلاً در فضای بی جاذبه یک کلاف داشته باشیم که یک سیخ از مرکز جرمش رد کردیم و ماده حول سیخ می چرخد، اگر سیخ

LearnElement.ir

دو دریاری هم، گلمای هم چنان می‌چرخد.

$$\begin{cases} \sum x_i m_i r_i \cos\theta_i = 0 \\ \sum x_i m_i r_i \sin\theta_i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \iint_V xz\rho\, dv = I_{xz} = 0 \\ \iint_V xy\rho\, dv = I_{xy} = 0 \end{cases}$$

شرط خودتراز مندی گشتاورهای لرزشی

$$\det\begin{bmatrix} I_{xx}-\lambda & \cancel{I_{xy}} & \cancel{I_{xz}} \\ \cancel{I_{yx}} & I_{yy}-\lambda & I_{yz} \\ \cancel{I_{zx}} & I_{zy} & I_{zz}-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (I_{xx}-\lambda).\det\begin{bmatrix} I_{yy}-\lambda & I_{yz} \\ I_{zy} & I_{zz}-\lambda \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \lambda_1 = I_{xx}$$

محور چرخش (x) یک محور اصلی است. پس با توجه به این نتیجه، شرط خودتراز مندی گشتاورهای لرزشی آن است که محور چرخش، یک محور اصلی جسم صلب باشد.

محورهای گذرنده از مرکز جرم به موازات محورهای تقارن، محورهای اصلی هستند.

در مورد بالانس کردن یک جسم نامتراز مند هم داریم:

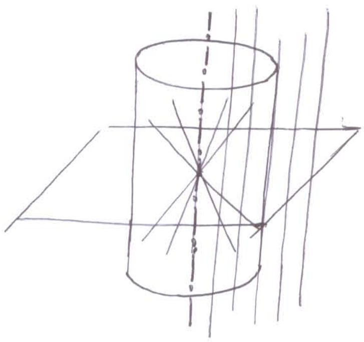
$$M\bar{z} + m_a r_a \cos\theta_a + m_b r_b \cos\theta_b = 0$$

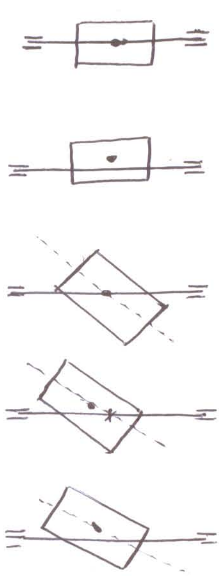
$$M\bar{y} + m_a r_a \sin\theta_a + m_b r_b \sin\theta_b = 0$$

$$I_{xz} + \cancel{x_a}_{0}\, m_a r_a \cos\theta_a + x_b m_b r_b \cos\theta_b = 0$$

$$I_{yz} + \cancel{x_a}_{0}\, m_a r_a \sin\theta_a + x_b m_b r_b \sin\theta_b = 0$$

حالا برویم ببینیم که برای تراز مند کردن یک استوانه، در حالت‌های مختلف نصب، چه‌کار می‌شود کرد!





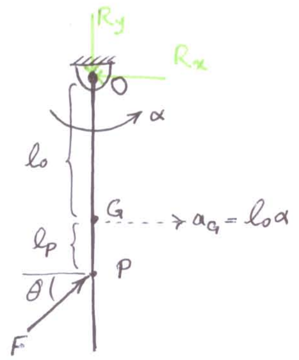
مشخصات اجسام موازنه‌گر	عامل نامترازمندی	نوع نامترازمندی
لازم نیست	—	—
یک جرم در صفحه‌ی عمود بر محور چرخش مار بر G	نیروی لرزشی	استاتیکی
دو جرم برابر - در یک صفحه شامل محور چرخش و محور اصلی در فاصله‌ی دلخواه - موقعیت محوری متناظر	زوج لرزشی	دینامیکی
یک جرم در صفحه‌ی شامل محور چرخش و محور اصلی در صفحه‌ی عمود بر محور چرخش که از G نمی‌گذرد	نیرو و گشتاور لرزشی	شبه استاتیکی
دو جرم نابرابر در دو صفحه‌ی دلخواه عمود بر محور چرخش	"	دینامیکی

دو محور متقاطعند!

محور چرخش و محور اصلی متنافرند!

LearnElement.ir

* مرکز ضربه Center Of Percussion



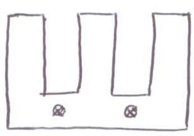
$$\begin{cases} F\cos\theta = m a_G \\ l_p(F\cos\theta) = I_G\alpha = m k_G^2 \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow l_p(m a_G) = l_p(m l_0 \alpha) = m k_G^2 \alpha \Rightarrow k_G^2 = l_p l_0 \qquad l_p = \frac{k_G^2}{l_0}$$

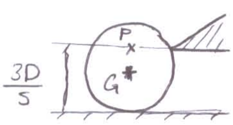
$$k_G = \sqrt{l_p l_0}$$

اگر F را به محل l_p وارد کنیم، نیروی عکس العمل تکیه گاه صفر خواهد بود.

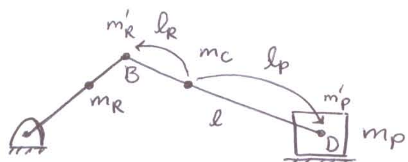
حالا اگر کاربرد مرکز ضربه رو می خواهی، باید بدونی که لولای در، در واقع یک ورقه ی لوله شده است که اگر بهش نیرو وارد بشه، بعد از یه مدتی باز می شه و خراب می شه. وقتی می خوان پیچ در ضربه گیر بذارن، اونو درست پشت مرکز ضربه ی در می گذارن که هیچ نیرویی به لولا وارد نشود.



و یا مثلاً در میز بیلیارد، لبه ی میز را جوری طراحی می کنند که وقتی توپ بهش خورد، با غلت خالص برگرده و پوشش میز سابیده نشه.



کاربرد مرکز ضربه در شاتون:



اگر بتونیم به جای جسم پیوسته ی شاتون، دو تا جسم توی سر میل لنگ و پیستون بذاریم (رفتار دینامیکی دو سیستم یکی باشد)، کارمون خیلی راحت تر می شود.

$$\begin{cases} m'_R + m'_p = m_C \\ m'_R l_R - m'_p l_p = 0 \\ m'_R l_R^2 + m'_p l_p^2 = I_{G_C} = m_C k_{G_C}^2 \end{cases}$$

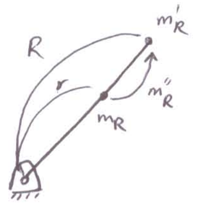
$$m'_R l_R^2 + m'_p l_p^2 = (m'_R l_R) l_R + (m'_p l_p) l_p = m_C k_{G_C}^2$$

$$(m'_p l_p) l_R + (m'_R l_R) l_p = m_C k_{G_C}^2 \Rightarrow l_p l_R \overbrace{(m'_R + m'_p)}^{m_C} = m_C k_{G_C}^2 \Rightarrow k_{G_C}^2 = l_p l_R$$

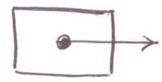
اگه اونا بالا را از P آویزون کنیم، O می شود مرکز ضربه ی جدیدش. پس مرکز ضربه ی مزدوج داریم. حالا اگه برای محل قرار گیری m'_R و m'_p هم چنین رابطه ای باشه (!)، ... شاتون ... بالانس ... می شه.

LearnElement.ir

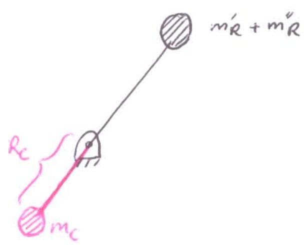
حالا که توانستیم شاتون را تحلیل کنیم، بریم سراغ بالانس کردن میل لنگ!



$$m''_R = \frac{r}{R} m_R$$



$$(m_P)_{eff} = m_P + m'_P$$



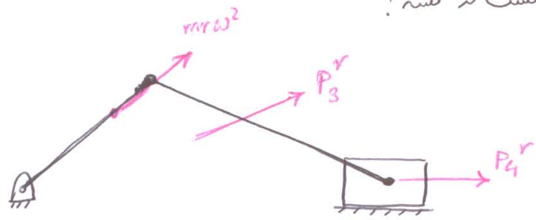
$$m'_R + m''_R \rightsquigarrow \left(\frac{l_R}{L} m_c + \frac{r}{R} m_R\right)$$

$$m_c R_c = R(m'_R + m''_R)$$

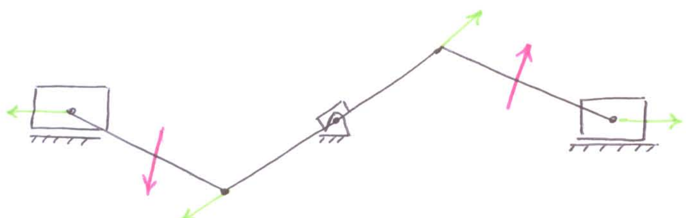
* بالانسینگ موتورها

descretes

یک موتور تک سیلندر داریم که شاتون اش ممکنه تعادل بشه و ممکن هم هست که نشه!



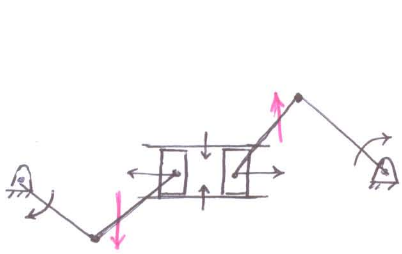
یه راه برای بالانس کردن اینه ←



اما یه کوپل لرزشی داره!

اینطوری اما دوتا سیلندر داره که می‌تونه توان بیشتری بده!

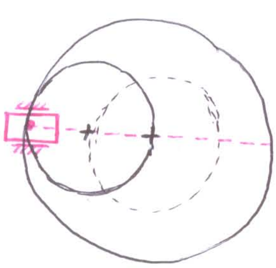
قبلاً که تکنولوژی پیشرفت نکرده بود، براشون سوخت رسانی به دوتا سیلندر سخت بود، چون دور از هم بودن.



دوتا خراب‌شون (برای حل مشکل دومی (۱.۱))، سیلندر رو گذاشتن وسط!

Gabron - Brielle Engine

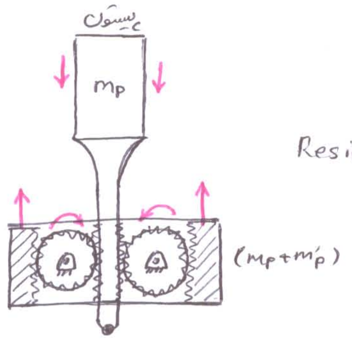
هماهنگ کردن این دوتا لنگ باهم نیاز به تجهیزات اضافه (چرخدنده) داشت. کوپل ایجاد شده گاهی کم و گاهی زیاد بود!



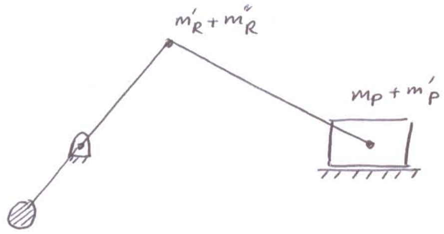
راه سوم، پاک کردن صورت مسئله است. از مکانیزم کاردانو استفاده می‌کنیم و در نتیجه میل لنگ مستقیم به پیستون وصل می‌شود و شاتونی در کار نیست.

LearnElement.ir

راه بعدی، استفاده از pinion های روبرو است که ۱۰۰٪ بالانس است.



آیا می ارزه؟ ← برید ببینید: ISO 1940 ← Residual Eccentric Mass



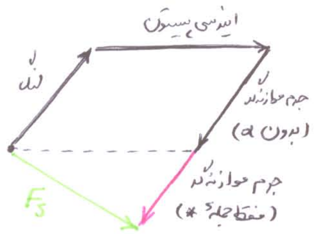
آخرین راه:

$$m_C = \frac{R}{R_C}\left[(m'_R + m''_R) + \underbrace{\alpha(m_p + m'_p)}_{*}\right]$$

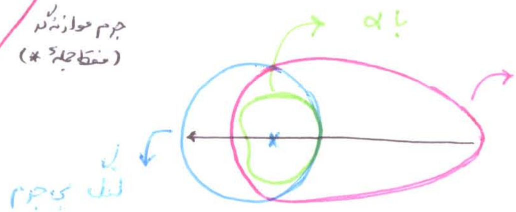
اول بالانسه، از مقصد unbalance می کنه! جمله ی * را اضافه می کنیم تا علاوه بر لنگ، پیستون هم تا حدودی بالانس بشود.

α : 0.5 → 0.6   mk 0.55

← بهترین مقدار α



محدوده ی نیروی لرزشی:



هرچه شکل سبز دایره تر بشه، بهتره!

۲۴، ۱۵، ۱۸

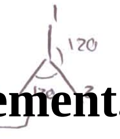
* حل تحلیلی حرکت پیستون (حرکت، سرعت و شتاب + نیرو) را در اسلایدها دیدیم.

گفتیم شاتون را وقتی می توان descrete کرد که نقاط لولای آن به لنگ و پیستون، همان مراکز ضربه ی مزدوج اش باشند.

وقتی شتاب پیستون را بدست آوردیم شامل دو ترم هارمونیک بود که دامنه ی یکی از دیگری کوچکتر بود و دو هارمونیک مختلف بودند، در نتیجه نیروهای لرزشی پیستون در واقع دو نیروی هارمونیک هستند که اولیه و ثانویه نامیده می شوند.

← دامنه ی کوچکتر

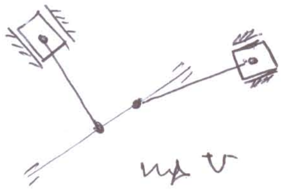
- اگر میخوای ببینی یک ~~لنگ~~ میل لنگ بالانس هست یا نه، ببین آیا از وسط به دو طرف متقارن هست یا نه!

- ترتیب احتراق موتور سه زمانه: ۱۳۲  ← ۷۲۰ را باید با ۳ تا سیلندر حل کنه!

LearnElement.ir

موتورها یا خطی هستند (Inline) که تمام سیلندرها بر روی یک خط هستند، یا صفحه‌ای هستند (Opposed) که سیلندرها در دو خط رو به روی هم (موازی) حول میل لنگ قرار گرفته‌اند. کاربرد دومی در کشتی‌ها و اینهاست.

موتورهای غیرهم صفحه هم داریم. شاتون‌ها باید دوتا دوتا هم صفحه باشند تا کوپل ایجاد نکنند.



سیلندرهای موتورهای غیرهم صفحه به صورت V، W و یا X قرار می‌گیرند مقابل هم.

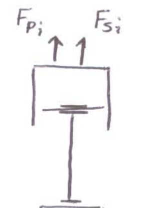
در موتورهای رادیال (اگر برای کم کردن حجم موتور در راستای میل لنگ هستند) همه‌ی سیلندرها توی یک صفحه عمود بر میل لنگ قرار می‌گیرند. بیشتر برای ملخ هواپیما استفاده می‌شوند. در این نوع موتورها یک شاتون Master داریم و بقیه شاتون‌ها روی آن بسته می‌شوند. این کار بالانسینگ را مشکل می‌کند. گاهی شاتون‌ها ثابت نگه داشته می‌شوند و پوسته‌ی موتور می‌چرخد.

Matt Ritman → Vankle موتور

حالا برگردیم سراغ حل موتورها (طراحی و آنالیز):

$$\begin{cases} F_p = (m_p)_{eff}\, R\omega^2 \cos\theta \\ F_s = (m_p)_{eff}\, \dfrac{R^2\omega^2}{L} \cos 2\theta \end{cases}$$

$$(m_p)_{eff} = m_p + m'_p \quad , \quad m'_p = \frac{l_c}{l_c + l_p} m_c$$



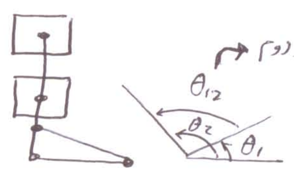
* بررسی موتورهای Inline:

$$R_i = R \quad L_i = L \quad m'_{p_i} = m'_p \quad m_{p_i} = m_p$$

در واقعیت، برای هیچ دو پیستون، میل لنگ و شاتونی، اندازه‌های بالا ↑ یکسان نیستند.

$$F_{p_i} = (m_{p_i} + m'_{p_i})\, R_i \omega^2 \cos(\theta_1 + \theta_{1i})$$

$$F_{s_i} = (m_{p_i} + m'_{p_i})\, \frac{R_i^2 \omega^2}{L_i} \cos 2(\theta_1 + \theta_{1i})$$



زاویه‌ی بین لنگ اول و دوم

$$\theta_2 = \theta_1 + \theta_{12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{p_i} = \vec{0} \Rightarrow \sum (m_p + m'_p) R\omega^2 \cos(\theta_1 + \theta_{1i}) = 0 \Rightarrow (m_p + m'_p) R\omega^2 \sum \cos(\theta_1 + \theta_{1i}) = 0$$

$$\Rightarrow \sum \cos(\theta_1 + \theta_{1i}) = 0 \Rightarrow \sum (\cos\theta_1 \cos\theta_{1i} - \sin\theta_1 \sin\theta_{1i}) = 0 \Rightarrow$$

LearnElement.ir