جزوه کنترل موجودی

دکتر پور سعیدی

۱ـ تعاریف و مفاهیم کنترل موجودی

۱ـ۱ـ تعریف موجودی و کنترل موجودی

ـ **موجودی:** ذخیره‌ای از مواد و کالاست که برای مدت زمان مشخصی جهت جوابگویی تقاضا تحت کنترل سازمان به صورت ثابت نگهداری می‌شود.

نکته: همان‌طور که در تعریف موجودی نیز ذکر گردیده است موادی که به صورت ثابت نگهداری نمی‌شوند مانند نفت داخل لوله‌های پالایشگاه جزو موجودی به حساب نمی‌آیند ولی موادی مانند نفت داخل مخازن که بر طبق تعریف هستند، جزو موجودی به حساب می‌آیند.

ـ **کنترل موجودی:** بررسی و نگاه‌داری سطحی از موجودی که هزینه‌های سیستم موجودی را کمینه می‌کند.

۱ـ۲ـ عوامل موثر در مدل‌های موجودی

عوامل زیر سازنده فرضیات مدل‌های موجودی می‌باشند و با شناخت نوع آن‌ها در هر مدل می‌توان مدل‌های مختلف را از یکدیگر متمایز ساخت.

۱ـ **تقاضا:** مهم‌ترین عامل در کنترل موجودی است و به دو دسته قطعی و احتمالی که آن‌ها نیز به دو دسته ساکن و پویا تقسیم می‌گردند. Demand
D
نماد تقاضا

ـ تقاضای قطعی و ساکن: تقاضا قطعی است و مقدار آن در طول مدت برنامه‌ریزی تغییری نمی‌کند.

ـ تقاضای قطعی و پویا: تقاضا قطعی است و مقدار آن در طول زمان‌های مختلف به‌صورت مشخص تغییر می‌کند.

ـ تقاضای احتمالی و ساکن: تقاضا احتمالی است و توزیع آن در طول مدت برنامه‌ریزی تغییری نمی‌کند.

ـ تقاضای احتمالی و پویا: تقاضا احتمالی است و توزیع آن در زمان‌های مختلف تغییر می‌کند.

۲ـ **کمبود:** تقاضایی است که در زمان مقرر به آن جواب نمی‌دهیم. در مدل‌های موجودی می‌تواند کمبود مجاز باشد و یا مجاز نباشد در صورتی که کمبود مجاز باشد به دو نوع پس افت و فروش از دست رفته تقسیم می‌شوند. درکمبود پس افت به تقاضایی که به کمبود می‌خورد پاسخ می‌دهیم ولی در کمبود فروش از دست رفته به تقاضایی که به کمبود تبدیل شده دیگر جواب نمی‌دهیم.

۳ـ **محدودیت:** در مدل‌های موجودی ممکن است محدودیت‌های زیر وجود داشته باشد:

ـ محدودیت فضا

ـ محدودیت تعداد دفعات سفارش چون هر دفعه سفارش یک هزینه ثابت سفارش دهی دارد

ـ محدودیت سرمایه درگیر موجودی

همان لحظه به انبار تحویل داده می‌شود

۴ـ **سفارش:** مدل‌های موجودی با توجه به نرخ و چگونگی دریافت سفارش به دو نوع مدل‌های تولیدی و مدل‌های خرید تقسیم می‌شوند.

باید تولید شود در نتیجه به تدریج به انبار تحویل داده می‌شود.

البته خود آن فروشنده یک سقف موجودی دارد یعنی تا هر مقدار که بخواهیم می‌توانیم سفارش دهیم

ـ مدل خرید: در مدل خرید کل سفارش در یک لحظه به انبار تحویل داده می‌شود بنابراین نرخ دریافت سفارش بی‌نهایت است.

ـ مدل تولید: در مدل تولید سفارش به تدریج به انبار تحویل می‌گردد و در واقع نرخ دریافت سفارش یک عدد است.

شما هر دفعه بیش از یک مقداری نمی‌توانید سفارش دهید

۵- مدت زمان تحویل سفارش (L): مدت زمان بین لحظه سفارش تا لحظه دریافت اولین قطعه سفارش است و می‌تواند قطعی و یا احتمالی باشد.

۶- قیمت کالا در طول مدت برنامه‌ریزی: قیمت کالا در طول مدت برنامه‌ریزی می‌تواند ثابت باشد و یا این‌که متغیر باشد مانند مدل‌های تورمی، حراج، تخفیف و ...

۷- برنامه‌ریزی: در مدل‌های موجودی می‌توان برای یک محصول و یا چند محصول به‌طور همزمان برنامه‌ریزی کرد.

۱-۳- متغیرهای حالت در یک سیستم موجودی

در یک سیستم موجودی، متغیرهای حالت، متغیرهایی هستند که در هر لحظه وضعیت یا حالت سیستم موجودی را مشخص می‌کنند. این متغیرها به شرح ذیل می‌باشند:

$I(t)$: موجودی در دست در زمان t

$b(t)$: مقدار کمبود در زمان t

$O(t)$: مقدار مواد در سفارش در زمان t یا مقدار سفارش در راه در زمان t

$I(t) \geq 0$
$b(t) \geq 0$
$O(t) \geq 0$
همگی غیرمنفی هستند

نکته: 3 متغیر فوق همگی غیرمنفی و مستقل می‌باشند در حالی که 2 متغیری که در ادامه می‌آید وابسته به 3 متغیر فوق هستند و می‌توانند منفی یا مثبت باشند.

نکته: در هر لحظه از زمان داریم:

if $I(t)>0 \rightarrow b(t)=0$
if $b(t)>0 \rightarrow I(t)=0$ → ممکن است هر دو با هم صفر باشند

$I(t) \cdot b(t)=0 \rightarrow$ اگر موجودی داشته باشیم پس کمبود نداریم و اگر کمبود داشته باشیم پس موجودی نداریم.

یعنی $I(t)=0$ و $b(t)=0$

$NS(t)$: موجودی خالص در زمان t

$NS(t)=I(t)-b(t) \rightarrow$
$NS(t)>0 \rightarrow I(t)>0$ و $b(t)=0$
$NS(t)<0 \rightarrow I(t)=0$ و $b(t)>0$
$NS(t)=0 \rightarrow I(t)=0$ و $b(t)=0$

$Y(t)$: موقعیت موجودی در زمان t

$Y(t)=Ns(t)+O(t)=O(t)+I(t)-b(t)$

۱-۴- هزینه‌های سیستم موجودی

۱-۴-۱- هزینه تدارک مواد

هزینه‌ای است که از زمان سفارش دادن مواد تا رسیدن به درب انبار به سیستم شارژ می‌شود. هزینه تدارک مواد برای دو مدل خرید و تولید تعاریف جداگانه‌ای به شرح ذیل دارد.

هزینه تدارک مواد در مدل خرید به دو هزینه ثابت سفارش‌دهی و هزینه خرید مواد تقسیم می‌شود:

الف) هزینه ثابت سفارش‌دهی: (A = هزینه هر بار سفارش)

هزینه‌ای است که جهت سفارش مواد به سیستم موجودی شارژ می‌شود. این هزینه به مقدار سفارش بستگی ندارد. یعنی قابل بیان به ازای واحد محصول نیست. مانند: فکس، تلفن، پیگیری و ...

CQ

ب) هزینه خرید مواد: (CQ= کل هزینه هر بار خرید)

هزینه‌ای است که جهت خرید مواد به سیستم موجودی شارژ می‌شود و به مقدار هر بار سفارش (Q) و قیمت واحد محصول (C) بستگی دارد.

هزینه تدارک مواد در مدل تولیدی به دو هزینه آماده‌سازی و هزینه تولید محصول تقسیم می‌شود:

الف) هزینه آماده‌سازی: (A= هزینه هر بار آماده‌سازی)

هزینه‌ای است که جهت آماده‌سازی برای تولید تعدادی محصول بر سیستم شارژ می‌شود. این هزینه به مقدار سفارش تولید بستگی ندارد. مانند هزینه تعویض قالب‌ها، هزینه آموزش کارکنان و ...

ب) هزینه تولید محصول (CQ= کل هزینه هر بار تولید)

هزینه‌ای است که جهت تولید تعدادی محصول به سیستم شارژ می‌شود و به مقدار هر بار سفارش تولید (Q) و قیمت تمام شده (متغیر) محصول (C) بستگی دارد.

مثال: کدام‌یک از هزینه‌های زیر جزو هزینه‌های آماده‌سازی نیست.

نکته‌ای که هست هزینه‌های آماده‌سازی برای مدل تولیدی و هزینه ثابت سفارش‌دهی برای مدل خرید به تعداد محصول بستگی ندارد

۱) هزینه بازآموزی پرسنل جدید
۲) هزینه ضایعات ابتدای تولید
۳) هزینه کارآیی پایین ابتدایی تولید
۴) هزینه ضایعات مواد

هر چقدر محصول بیشتر بشه هزینه ضایعات بیشتره

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

هزینه ضایعات مواد به ازای واحد محصول قابل بیان است، بنابراین جزو هزینه‌های آماده‌سازی نیست.

نکته: هزینه‌های حمل و نقل مواد سفارش داده شده و بازرسی جزو هزینه‌های تدارک مواد محسوب می‌شوند. این هزینه‌ها اگر قابل بیان به ازای واحد محصول باشند در قیمت محصول محاسبه شده و جزو هزینه‌های خرید مواد و یا هزینه‌های تولید محصول قرار می‌گیرند. در غیر این‌صورت در هزینه‌های سفارش‌دهی و یا هزینه‌های آماده‌سازی محاسبه می‌گردند.

مثال: کدام‌یک از عبارت‌های زیر در هزینه‌های سفارش‌دهی هر بار (A) مورد استفاده قرار نمی‌گیرد:

۱) هزینه بازرسی وقتی که برای کلیه واحدها انجام می‌شود.
۲) هزینه بازرسی وقتی که برای تعدادی از واحدها انجام می‌شود.
۳) هزینه حمل وقتی که به ازای واحد محصول پرداخت نمی‌شود.
۴) هزینه‌های تلکس و پیگیری

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

همان‌طور که در نکته فوق ذکر شد هزینه بازرسی وقتی که برای کلیه واحدها انجام می‌شود در هزینه خرید محاسبه می‌گردد.

۱-۴-۲- هزینه نگهداری موجودی

هزینه‌ای است که به علت نگهداری موجودی به سیستم موجودی شارژ می‌شود. این هزینه‌ها در دسته‌بندی زیر قرار می‌گیرند:

الف) هزینه تسهیلات انبار شامل اجاره سالیانه انبار، هزینه آب، برق، گاز و ...

ب) هزینه انتقال و جابه‌جایی مانند هزینه حمل و نقل داخل انبار

ج) هزینه افت و یا از بین رفتن مانند فاسد شدن، شکستن چینی‌آلات

د) هزینه متروک شدن یا از مد افتادن مانند تغییر مد لباس و یا قدیمی شدن Chipsetهای کامپیوتری

هـ) هزینه‌های بیمه و مالیات

و) هزینه سرمایه درگیر موجودی (هزینه خواب سرمایه) بدین معنی که چقدر فرصت سود از دست داده‌ایم

برای محاسبه هزینه نگهداری پارامتر h به صورت زیر تعریف می‌گردد:

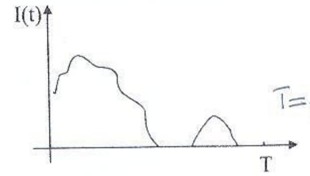
h : متوسط هزینه نگهداری هر واحد موجودی در واحد زمان

$h = i.c + \omega$

که در آن i نرخ هزینه نگهداری، c قیمت هر واحد محصول و ω هزینه نگهداری است که به قیمت کالا بستگی ندارد اما بر اساس واحد محصول بیان می‌شود.

نحوه محاسبه هزینه نگهداری از 0 تا T

هزینه نگهداری بر اساس منحنی موجودی در دست به صورت زیر محاسبه می‌گردد.



T دوره است. اگر دوره دوماهه باشه $T=\frac{1}{6}$

اگر هزینه سالیانه را بخواهیم $T=1$

کل هزینه نگهداری از 0 تا T = h × (مساحت زیرمنحنی موجودی در دست) = $h\int_0^T I(t)dt = h\bar{I}T \rightarrow h\int_0^T I(t)dt = h\left(\frac{\int_0^T I(t)dt}{T}\right)\times T$

$\downarrow \bar{I}$

(متوسط موجودی) $\bar{I} = \dfrac{\text{مساحت زیرمنحنی در دست}}{T} = \dfrac{\int_0^T I(t)dt}{T}$

با استفاده از رابطه هزینه نگهداری، کل هزینه نگهداری سالیانه با قرار دادن $T = 1$ به‌دست می‌آید.

کل هزینه نگهداری سالیانه $= h\bar{I}$

نکته: تمامی هزینه‌های نگهداری موجودی عموماً به قیمت محصول بستگی دارد به جز هزینه تسهیلات انبار که از دو جهت با بقیه متفاوت است:

۱- به قیمت واحد محصول (C) بستگی ندارد.

۲- تسهیلات انبار معمولاً بر اساس ماکزیمم موجودی در مدت زمان بررسی می‌شود، اما سایر هزینه‌های نگهداری بر اساس متوسط موجودی بیان می‌شود.

کل هزینه‌های سالیانه برای این حالت به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

h_1 : هزینه‌هایی از نگهداری که به متوسط موجودی بستگی دارد.

h_2 : هزینه‌هایی از نگهداری که به ماکزیمم موجودی بستگی دارد.

کل هزینه نگهداری سالیانه $= h_1\bar{I} + h_2 \times I_{max}$ سوال میشود

$h_1\bar{I} + h_2 I_{max} \rightarrow$ همان ... است هزینه فضا

امکان انبار ...

۱-۴-۳- هزینه کمبود

هزینه‌ای است که به صورت جریمه باعث عدم تامین به موقع تقاضا به سیستم شارژ می‌شود. این هزینه به دو دسته تقسیم می‌شود.

- هزینه کمبود وابسته به زمان $(\hat{\pi})$
- هزینه کمبود مستقل از زمان (π)

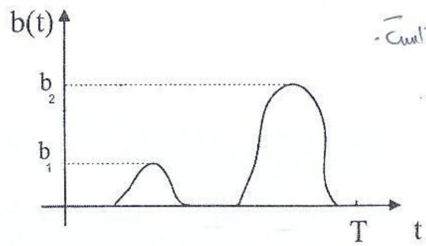
وابسته به زمان $\rightarrow \hat{\pi} \rightarrow$ جریمه دیرکرد

مستقل از زمان $\rightarrow \pi \rightarrow$ هزینه‌های اداری اضافی

نحوه محاسبه کل هزینه کمبود از 0 تا T

هزینه کمبود بر اساس منحنی میزان کمبود بر حسب زمان محاسبه می‌گردد.

این هزینه‌های کمبود برای حالت پس افت است.



کل هزینه کمبود از 0 تا T = $\hat{\pi}$ (مساحت زیرمنحنی کمبود) + π (مقدار کمبود از 0 تا T)

$$=\hat{\pi}\int_0^T b(t)\,dt+\pi\left(b_1+b_2\right)=\hat{\pi}\bar{b}T+\pi\left(b_1+b_2\right)$$

$$\hat{\pi}\,\frac{\int_0^T b(t)\,dt}{T}\times T$$

$$\bar{b}=\frac{\int_0^T b(t)\,dt}{T}$$ (متوسط کمبود)

مثال: منحنی موجودی خالص یک محصول در طی 10 ماه به صورت شکل زیر است. در صورتی که هزینه کمبود هر واحد تقاضا در سال 60 تومان باشد و همچنین هزینه کمبود هر واحد نیز برابر با 10 تومان باشد هزینه نگهداری هر واحد موجودی در ماه 20 تومان باشد موارد زیر را محاسبه کنید:

$\hat{\pi}=60$ تومان/سال $=5$ تومان/ماه

$\pi=10$ تومان/واحد موجودی

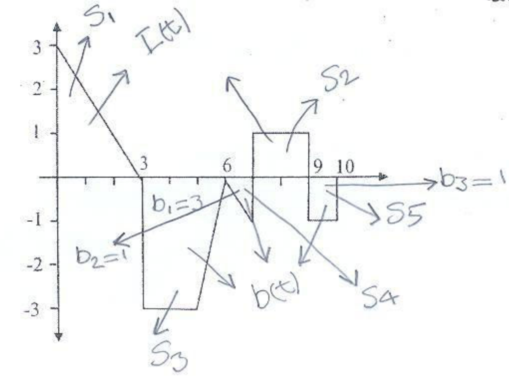
$h=20$ تومان/واحد موجودی_ماه

الف) کل هزینه نگهداری 10 ماهه

ب) کل هزینه کمبود 10 ماهه

ج) متوسط موجودی طی 10 ماه

د) متوسط کمبود 10 ماهه



حل:

$h=20$ $\frac{\text{تومان}}{\text{عدد ماه}}$ $\pi=10$ $\frac{\text{تومان}}{\text{عدد}}$ $\hat{\pi}=60$ $\frac{\text{تومان}}{\text{عدد سال}}$ $=5$ $\frac{\text{تومان}}{\text{عدد ماه}}$

کل هزینه نگهداری 10 ماهه $=20\left(\frac{3\times3}{2}+1\times2\right)=130$ تومان $=20(S_1+S_2)=130$ تومان

$5(S_3+S_4+S_5)+10(b_1+b_2+b_3)=95$

$$\text{کل هزینه کمبود 10 ماهه} = 5\left(3\times2+\frac{3\times1}{2}+\frac{1\times1}{2}+1\times1\right)+10\left(3+1+1\right)=150+50=95 \text{ تومان}$$

$$\text{متوسط موجودی} = \frac{\text{مساحت زیرمنحنی موجودی در دست}}{T} = \frac{\overset{S_1}{\frac{3\times3}{2}}+\overset{S_2}{1\times2}}{10}=0.65$$

$$\text{متوسط کمبود} = \frac{\text{مساحت زیر منحنی کمبود}}{T} = \frac{\overset{S_3}{3\times2+\frac{3\times1}{2}}+\overset{S_4}{\frac{1\times1}{2}}+\overset{S_5}{1\times1}}{10}=\frac{9}{10}=0.9$$

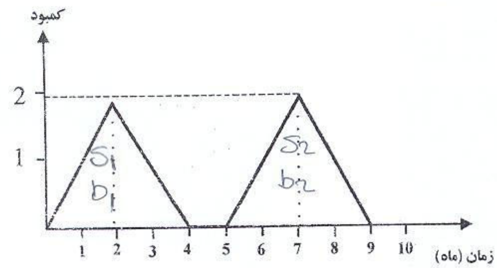
مثال: اگر هزینه کمبود یک واحد موجودی در ماه برابر 2 تومان باشد $(\hat{\pi}=2)$ و هزینه کمبود هر واحد موجودی یک تومان $(\pi=1)$ باشد. آن‌گاه هزینه کمبود در 9 ماه گذشته با توجه به منحنی کمبود زیر چقدر است؟

۱) 16 تومان

۲) 18 تومان

۳) 20 تومان

۴) 24 تومان



حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

هزینه کمبود وابسته به زمان + هزینه کمبود مستقل از زمان= کل هزینه کمبود

$$=1(\underset{b_1}{2}+\underset{b_2}{2})+2\left(\overset{S_1}{\frac{2\times4}{2}}+\overset{S_2}{\frac{2\times4}{2}}\right)=4+16=20$$

مثال: هزینه‌های حمل و نقل موجودی جزو کدام‌یک از هزینه‌های سیستم موجودی است؟

۱) هزینه خرید

۲) هزینه سفارش

۳) هزینه نگهداری

۴) می‌تواند جزو هر یک از هزینه‌های نگهداری، خرید یا سفارش باشد.

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

هزینه‌های حمل و نقل در صورتی که در داخل انبار باشد و بر اساس واحد محصول قابل بیان باشد جزو هزینه‌های نگهداری است. در صورتی که خارج از انبار و از زمان سفارش تا درب انبار باشد، اگر به ازای واحد محصول قابل بیان باشد جزو هزینه‌های خرید و اگر قابل بیان به ازای واحد محصول نباشد جزو هزینه‌های سفارش است.

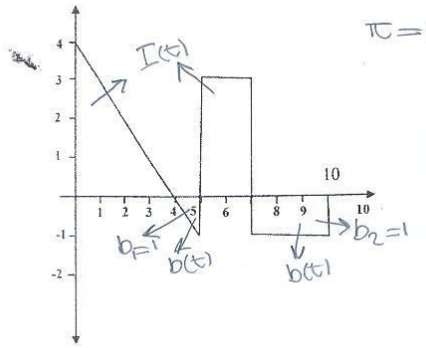
مثال: موجودی خالص محصولی در طی 10 ماه گذشته در شکل زیر داده شده است. اگر هزینه کمبود هر تن 100 تومان باشد، آن‌گاه کل هزینه کمبود در طی 10 ماه گذشته برابر است با:

۱) 150

۲) 200

۳) 350

۴) 400



$\pi = 100$ تومان/تن

حل: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

در این مثال تنها هزینه کمبود مستقل از زمان موجود است.

$\pi=100$

هزینه کمبود = هزینه کمبود مستقل از زمان $=100(1+1)=200$

متوسط موجودی خالص : $\overline{NS} = \overline{I} - \overline{b}$

۲ـ مدل قطعی ساده یا ویلسون یا مقدار سفارش اقتصادی یا EOQ

فرضیات مدل به شرح ذیل است. این فرضیات همان‌طور که ذکر گردید بر اساس عوامل موثر در مدل‌های موجودی تعیین می‌گردند.

۱ـ تقاضا قطعی و ساکن است.

۲ـ کمبود جایز نیست.

۳ـ محدودیت وجود ندارد.

۴ـ سفارش یک‌جا دریافت می‌شود.

۵ـ مدت زمان تحویل سفارش قطعی و عددی است.

۶ـ قیمت کالا در طول مدت برنامه‌ریزی ثابت است.

۷ـ مدل تک محصولی است.

در این مدل هم نرخ سفارش دهی و هم نرخ تقاضا ثابت است.

پارامترهای مدل:

A: هزینه هر بار سفارش (هزینه سفارش‌دهی)

D: نرخ تقاضا

h: هزینه نگهداری هر واحد کالا در واحد زمان

i: نرخ هزینه نگهداری در کالا

c: قیمت واحد کالا

ω: هزینه نگهداری که به قیمت کالا بستگی ندارد

$\pi, \hat{\pi}$: هزینه‌های کسری واحد کالا هزینه‌های کسری در مدل EOQ بسیار زیاد (∞) می‌باشند

P: نرخ تولید، دریافت سفارش در مدل EOQ آنی و بنابراین نرخ تولید بسیار زیاد (∞) می‌باشد

L: مدت زمان تحویل سفارش

متغیرهای مدل:

Q: مقدار هر بار سفارش

r: نقطه سفارش بر حسب موقعیت موجودی. بدین معنی که هر وقت در نمودار موقعیت موجودی، موجودی محصول برابر مقدار r شود زمان سفارش است. $Y(t)$

r_h: نقطه سفارش بر حسب موجودی خالص یا موجودی در دست. بدین‌معنی که هر وقت در نمودار موجودی خالص موجودی محصول برابر مقدار r_h شود، زمان سفارش است. $NS(t)$

متغیر دیگری که می‌توان آن را از طریق بقیه متغیرها به‌دست آورد T است.

T: فاصله بین دو سفارش متوالی یا فاصله بین رسیدن در سفارش متوالی یا مدت زمانی یک دوره

هدف مدل EOQ تعیین مقدار سفارش اقتصادی (Q^*) و تعیین r_h^*, r^* با کمینه کردن هزینه‌ها (هزینه نگهداری + هزینه سفارش‌دهی) است.

در این مدل Q^* را با Q_ω یا EOQ نیز نشان می‌دهند.

۲ـ۱ـ نحوه محاسبه مقدار سفارش اقتصادی (Q^*)

نمودار موجودی خالص در مدل EOQ مانند شکل زیر می‌باشد. در این نمودار زمان‌های t، زمان دریافت سفارش و زمان‌های t' زمان صدور سفارش است که فاصله زمانی بین هر دو t و t' متوالی برابر زمان یک دوره T است.

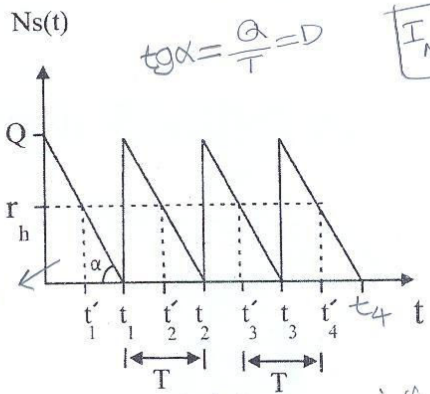
$tg\alpha = \frac{Q}{T} = D$ $\boxed{I_{Max} = Q}$

در این مدل کمبود مجاز نمی‌باشد

$b(t) = 0$

$Ns(t) \geq 0$

$S = \frac{Q.T}{2}$



t_4 و t_3 و t_2 و t_1 زمان‌های دریافت سفارش

t'_4 و t'_3 و t'_2 و t'_1 زمان‌های صدور سفارش

$T =$ فاصله بین دو بار صدور سفارش $=$ فاصله بین دو بار دریافت سفارش

$b(t)=0$

$Ns(t)=I(t)-b(t)$

$D=tg\alpha$ نرخ کاهش یا مصرف کالا

$\boxed{D = \frac{Q}{T} \rightarrow T = \frac{Q}{D}}$

هزینه یک سیستم موجودی برابر است با جمع هزینه‌های نگهداری کمبود و تدارک مواد. از آن‌جا که در مدل EOQ کمبود جایز نیست هزینه‌های کسری برابر صفر می‌باشد. هزینه تدارک مواد نیز به دو قسمت هزینه سفارش‌دهی و هزینه خرید تقسیم می‌گردد بنابراین:

هزینه خرید + هزینه نگهداری + هزینه سفارش‌دهی = هزینه یک دوره

بر اساس آن‌چه در نمودار موجودی خالص مشاهده گردید، هزینه یک دوره به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$\text{هزینه یک دوره} = A + \frac{hQT}{2} + CQ$$

n : متوسط تعداد دوره‌های در سال یامتوسط تعداد دفعات سفارش

$$n = \frac{1}{T} = \frac{D}{Q}$$

در صورتی که هزینه یک دوره در تعداد دوره‌ها در سال ضرب گردد، متوسط کل هزینه سالیانه سیستم موجودی به‌دست می‌آید.

$$\text{متوسط کل هزینه سالیانه سیستم موجودی} = n\ (\text{هزینه یک دوره}) = \underbrace{\frac{D}{Q}A}_{NA} + \underbrace{h\frac{Q}{2}}_{N\frac{hQT}{2}} + \underbrace{CD}_{NCQ}$$

$h\frac{Q}{2} =$ کل هزینه نگهداری سالیانه

$\frac{D}{Q}A =$ کل هزینه سفارشی طی سالیانه

$CD =$ کل هزینه خرید سالیانه

$TC = \frac{h}{2}Q + \frac{D}{Q}A + CD$

از رابطه‌ی صفحه‌ی قبل نسبت به Q مشتق گرفته تا TC حداقل گردد

برای یافتن Q^* باید از رابطه فوق بر حسب Q مشتق گرفته شود. از آن‌جا که CD به مقدار Q بستگی ندارد بنابراین در مشتق‌گیری مقدارش برابر صفر قرار می‌گیرد. از این‌رو $k(Q)$ را به صورت زیر تعریف کرده و هزینه متغیر سالیانه می‌نامند.

$$TRC = K(Q)=\frac{DA}{Q}+\frac{hQ}{2}$$

در صورتی که مشتق تابع فوق بر حسب Q برابر صفر قرار دهیم، مقدار Q^* به‌دست می‌آید.

$$\frac{d\,(\text{کل هزینه سالیانه})}{dQ}=\frac{dK(Q)}{dQ}=0 \;\Rightarrow\; Q^*=Q_{\omega}=EOQ=\sqrt{\frac{2DA}{h}}$$

همچنین هزینه متغیر سالیانه بهینه $(K(Q^*))$ و زمان دوره بهینه (T^*) از روابط زیر محاسبه می‌گردد:

$$K(Q^*)=\frac{DA}{Q^*}+\frac{hQ^*}{2}=\sqrt{2DAh}$$

$$T^*=\frac{Q^*}{D}=\sqrt{\frac{2A}{Dh}}$$

$$\frac{DA}{Q^*}=\frac{hQ^*}{2} \leftarrow \text{در}\ Q_w\ \text{برابرند}$$

$$\Downarrow$$

$$=\sqrt{\frac{DAh}{2}}$$

$$TRC^*=\frac{h}{2}Q^*+\frac{D}{Q^*}A = hQ^*=2\frac{D}{Q^*}A=\sqrt{2DAh}$$

۲ـ۲ـ نحوه محاسبه نقطه سفارش بهینه r^*, r_h^*

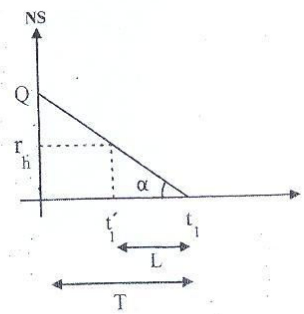
$$\bar{I}^*=\frac{Q_w}{2}=\sqrt{\frac{DA}{2h}}$$

$$\bar{I}^*=\frac{\int_0^T I(t)dt}{T}=\frac{\frac{Q^*.T}{2}}{T}=\frac{Q^*}{2}$$

سیکل عمر یک سفارش T است که در مدت L سفارش
دریافت و در مدت T مصرف می‌شود تا به آخر برسد

برای یافتن r^*, r_h^* دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت اول: $L < T$



$$D=\frac{Q}{T} \xrightarrow{\text{نسبت}} D=\frac{r_h}{L}$$

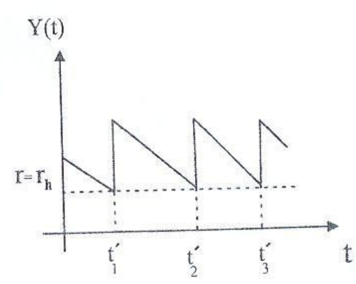
$$\rightarrow r_h^*=DL$$

$$tg\alpha=D=\frac{r_h}{L} \;\Rightarrow\; r_h^*=D.L$$

در این حالت تعداد سفارش در راه یک لحظه قبل از t'_1 (زمان سفارش) برابر صفر و لحظه‌ای بعد از آن برابر Q^* است. بنابراین نمودار موقعیت موجودی آن به صورت زیر خواهد بود.

منظور 1 است.

$$r^*=r_h^*+\overset{0}{m}Q^*=r_h^*$$



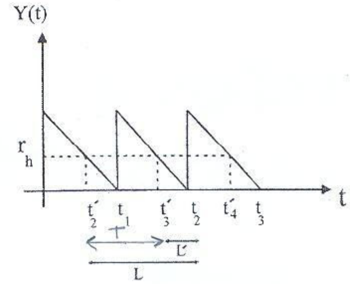
حالت دوم: $L \geq T$

در این حالت نمی‌توان مانند حالت قبل عمل کرد بنابراین L' را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

L' : فاصله زمانی بین انجام سفارش تا رسیدن اولین (نزدیک‌ترین) سفارش که از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

سفارش قبلی — سفارش جدید

$L' = L - mT$, $m = \left[\frac{L}{T}\right]$



در صورتی که L<T و L≥T

$r^* = D.L$

$r_h^* = DL - mQ^*$

$\text{if } L<T : m=0 \rightarrow r_h^* = DL$

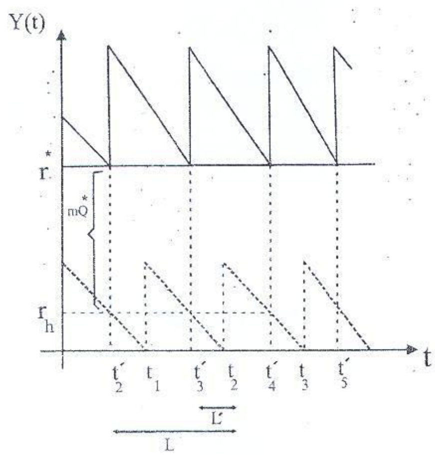
$\text{if } L \geq T : m = \left[\frac{L}{T}\right] \rightarrow r_h^* = DL - mQ^*$

$T = \frac{Q}{D} \rightarrow Q = DT$

$$tg\alpha = D = \frac{r_h}{L'} \Rightarrow r_h^* = D.L' = D(L - mT) = D.L - mDT = DL - mQ^*$$

$$\Rightarrow r_h^* = D.L - mQ^*$$

در این حالت مقدار سفارش در راه لحظه‌ای قبل از t' برابر m و لحظه‌ای بعد از آن $(m+1)$ است. بنابراین نمودار موقعیت موجودی آن به صورت زیر خواهد بود.



$$r^* = r_h^* + mQ^* = D.L - mQ^* + mQ^* = D.L$$

بنابراین نقطه سفارش مجدد در مدل EOQ از رابطه‌های زیر محاسبه می‌گردد.

$$\begin{cases} r^* = D.L \\ r_h^* = D.L - mQ^* \end{cases}$$

$$m = \left[\frac{L}{T}\right]$$

۲ـ۳ـ نکات مدل EOQ

نکته ۱: روابط زیر برای موقعیت موجودی $(y(t))$ برقرار است.

$$r^* \le y(t) \le r^* + Q^*$$
$$D.L \le y(t) \le DL + DT^*$$

همچنین برای موجودی خالص $(I(t))$ داریم:

$$0 \le I(t) \le Q^* = DT^*$$

نکته ۲: در مدل‌های EOQ، r_h^* می‌تواند برابر صفر گردد ولی نمی‌تواند برابر Q^* شود.

$$0 \le r_h^* < Q^* = DT^*$$

اگر مدت زمان تحویل سفارش مضرب صحیحی از T باشد $(L = mT \quad , \quad L' = 0)$ آنگاه r_h^* برابر با صفر است $\left(r_h^* = D.L' = 0\right)$

نکته ۳: در مدل EOQ در زمان‌های قبل از زمان سفارش مقدار سفارش در راه معادل mQ^* و زمان‌های پس از سفارش، مقدار آن $(m+1)Q^*$ است. به‌طور متوسط مقدار سفارش در راه معادل D.L است. همچنین متوسط تعداد محموله‌های در سفارش یا متوسط تعداد دفعات سفارشی که به دست ما نرسیده برابر با $\frac{L}{T^*} = \frac{DL}{Q^*}$ است.

مثال: در مدل ساده موجودی (که نرخ تقاضا ثابت معلوم و کمبود موجودی جایز نیست) فرض کنید مدت تحویل برابر 2.5 ماه، مقدار سفارش اقتصادی برابر 100 واحد و تقاضای سالیانه 1200 واحد است.

مقدار موجودی در دست در موقع سفارش در حالت سفارش اقتصادی: ← یعنی موقعی که سفارش را می‌دهیم چقدر موجودی داریم که همان نقطه سفارش است.

۱) 150 واحد ۲) 100 واحد ۳) 50 واحد ۴) 25 واحد

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$L = 2.5 \text{ ماه} = \frac{2.5}{12} \text{ سال}$$

$$\begin{matrix} Q^* = 100 \\ D = 1200 \end{matrix} \rightarrow T^* = \frac{Q^*}{D} = \frac{100}{1200} = \frac{1}{12}$$

$$m = \left[\frac{L}{T^*}\right] = \left[\frac{2.5}{\frac{Q^*}{D} = \frac{100}{1200/12}}\right] = [2.5] = 2$$

$$\Rightarrow \quad r_h^* = D.L - mQ^* = 1200 \times \frac{2.5}{12} - 2 \times 100 = 50$$

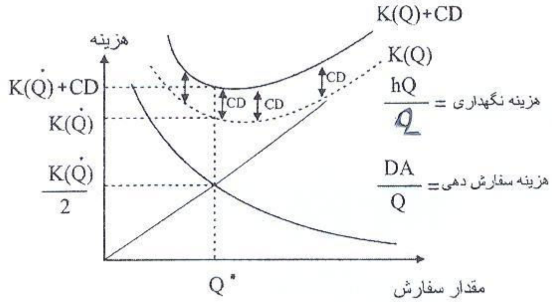
مثال: در مثال فوق مقدار متوسط مقدار مواد در سفارش (موادی که سفارش داده شده و هنوز دریافت نشده‌اند) برابر است با:

۱) 150 واحد ۲) 200 واحد ۳) 250 واحد ۴) 300 واحد

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\text{متوسط مواد در سفارش} = D.L = 1200 \times \frac{2.5}{12} = 250$$

نکته ۴: بررسی هزینه‌های سفارش‌دهی و نگهداری سالیانه با افزایش مقدار سفارش



همان‌طور که مشاهده می‌شود منحنی $k(Q)$ از جمع دو منحنی هزینه سفارش‌دهی و هزینه نگهداری به‌دست می‌آید. منحنی هزینه نگهداری روند صعودی و منحنی هزینه سفارش‌دهی روند نزولی دارد. منحنی کل هزینه‌های سالیانه $(k(Q)+CD)$ نیز با اضافه شدن مقدار ثابت CD به منحنی $K(Q)$ به‌دست آمده است.

نکته ۵: در نقطه بهینه هزینه سفارش‌دهی سالیانه با هزینه نگهداری سالیانه برابر است یعنی محل تلاقی منحنی‌های هزینه نگهداری سالیانه و هزینه سفارش‌دهی سالانه نقطه بهینه است.

$$\frac{DA}{Q^*}=\frac{hQ^*}{2}=\frac{\sqrt{2DAh}}{2}=\frac{K(Q^*)}{2}$$

$$\Rightarrow \quad K(Q^*)=\sqrt{2DAh}=hQ^*=\frac{2DA}{Q^*}=\frac{2A}{T}=2nA$$

نکته ۶: شیب منحنی هزینه‌ها در نقطه بهینه به‌ترتیب برای هزینه نگهداری و هزینه سفارش‌دهی سالانه معادل $\frac{h}{2},\frac{-h}{2}$ است.

نکته ۷: رابطه بین هزینه سفارش‌دهی سالانه و هزینه نگهداری سالانه در صورتی که بیشتر یا کمتر از سفارش اقتصادی سفارش دهیم به صورت زیر است.

اگر $Q>Q^*$ ← هزینه نگهداری > هزینه سفارش‌دهی

اگر $Q=Q^*$ ← هزینه نگهداری = هزینه سفارش‌دهی

اگر $Q<Q^*$ ← هزینه نگهداری < هزینه سفارش‌دهی

نکته ۸: شیب منحنی هزینه‌ها در سمت راست نقطه بهینه نسبت به سمت چپ آن ملایم‌تر است.

$$K(Q^*-a)>K(Q^*+a)$$

نکته ۹: در صورتی که در محاسبه مقدار سفارش بهینه به اشتباه یا از روی تخمین به جای یکی از پارامترها مقداری را جایگزین کنیم، مقدار سفارش انجام شده با این پارامتر نابهینه خواهد بود و کل هزینه‌ها افزایش خواهد یافت. به طور کلی هنگامی که به جای Q^*، Q نابهینه سفارش دهیم، درصد این افزایش از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

$$\frac{K(Q)}{K(Q^*)}=\frac{1}{2}\left(\frac{Q^*}{Q}+\frac{Q}{Q^*}\right)$$

نکته ۱۰: برای مقایسه تغییرات کل هزینه سالیانه $(K(Q)+CD)$ نمی‌توان مانند هزینه متغیر سالیانه $K(Q)$ رابطه‌ای یافت، تنها می‌توان حدود تغییر آن را از نامساوی زیر به‌دست آورد.

$$1\le\frac{K(Q)+CD}{K(Q^*)+CD}<\frac{K(Q)}{K(Q^*)}$$

$$\frac{TRC}{TRC^*}=\boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{Q}{Q_W}+\frac{Q_W}{Q}\right)}$$

$$TRC= (k) TRC^*$$

مثال: چنانچه بدانیم مقدار سفارش بهینه 500 واحد است و در سال بعد 2 برابر این مقدار و در سال دوم نصف این مقدار را سفارش دهیم، هزینه‌های نگهداری + سفارش‌دهی چند درصد افزایش می‌یابد.

حل:

$$Q_1=2Q^* \Rightarrow \frac{K_1}{K^*}=\frac{1}{2}\left(\frac{1000}{500}+\frac{500}{1000}\right)=1.25 \Rightarrow$$ 25% افزایش هزینه‌ها

$$Q_2=\frac{Q^*}{2} \Rightarrow \frac{K_2}{K^*}=\frac{1}{2}\left(\frac{250}{500}+\frac{500}{250}\right)=1.25 \Rightarrow$$ 25% افزایش هزینه‌ها

در هر دو صورت 25% مجموع هزینه نگهداری و سفارش‌دهی افزایش پیدا خواهد کرد.

نکته ۱۱: در صورتی که یکی از پارامترهای مدل تغییر کند، آن‌گاه مطمئناً مقدار سفارش بهینه (Q^*) و هزینه بهینه متغیرسالیانه $(K(Q^*))$ تغییر می‌کند و نسبت این تغییرات به صورت زیر است.

$$\frac{Q_1^*}{Q_0^*}=\frac{\sqrt{\frac{2D_1A_1}{h_1}}}{\sqrt{\frac{2D_0A_0}{h_0}}}=\sqrt{\frac{D_1}{D_0}}\cdot\sqrt{\frac{A_1}{A_0}}\cdot\sqrt{\frac{h_0}{h_1}}$$

$$\frac{K(Q_1^*)}{K(Q_0^*)}=\frac{\sqrt{2D_1A_1h_1}}{\sqrt{2D_0A_0h_0}}=\sqrt{\frac{D_1}{D_0}}\cdot\sqrt{\frac{A_1}{A_0}}\cdot\sqrt{\frac{h_1}{h_0}}$$

نکته ۱۲: با افزایش پارامترهای مدل مقدار سفارش بهینه و هزینهه متغیر سالیانه به صورت زیر تغییر می‌کند.

	Q^*	$K(Q^*)$
افزایش A	افزایش	افزایش
افزایش D	افزایش	افزایش
افزایش h	کاهش	افزایش
افزایش i	تغییر نمی‌کند	افزایش
افزایش c	تغییر نمی‌کند	افزایش
افزایش w	تغییر نمی‌کند	افزایش
افزایش L	تغییر نمی‌کند	تغییر نمی‌کند

نکته ۱۳: اگر h_1، هزینه نگهداری هر واحد موجودی در سال بر اساس متوسط موجودی و h_2 هزینه نگهداری هر واحد در سال بر اساس ماکزیمم موجودی باشد. در محاسبهٔ فرمول‌های مدل EOQ به جای مقدار h، مقدار h_1+2h_2 جایگزین می‌گردد، در واقع هزینه نگهداری که بر اساس ماکزیمم موجودی باشد در 2 ضرب شده و با هزینه نگهداری متوسط موجودی جمع می‌گردد و جایگزین h می‌شود.

نکته ۱۴: هزینه نگهداری در سال که بر اساس واحد موجودی بیان نشود، تاثیری در مقدار بهینه سفارش ندارد.

مثال: شرکتی جهت نگهداری مواد اولیه اقدام به اجاره انبار با اجاره بهای ثابتی در سال نموده است، از سال آینده قرار است اجاره بهای این انبار افزایش یابد. مقدار سفارش اقتصادی این کالا در سال آینده نسبت به شرایط حاضر ...

۱) کاهش خواهد یافت.
۲) افزایش خواهد یافت.
۳) اطلاعات کافی نیست.
۴) ثابت باقی خواهد ماند.

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

همان‌طور که در نکات بالا ذکر گردید، اجاره بهای ثابت سالیانه که بر اساس واحد موجودی بیان نمی‌شود تاثیری در مقدار سفارش اقتصادی ندارد.

مثال: در یک مدل مقدار سفارش اقتصادی بدون کمبود موجودی، کالایی هر 2 ماه‌یک بار سفارش داده می‌شود و هزینه ثابت هر بار سفارش 50 000 تومان است. هزینه نگهداری سالیانه در حالت بهینه چند تومان است؟

۱) 100000 ۲) 200000 ۳) 300000 ۴) 600000

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$h\frac{Q^*}{2}=\frac{D}{Q^*}A$

$NA=\frac{1}{T}A$

$T=$ ماه $2=\frac{1}{6}$ سال

$A=50000$

در حالت بهینه هزینه نگهداری با هزینه سفارش‌دهی برابر است.

$$\text{هزینه نگهداری بهینه} = \text{هزینه سفارش‌دهی بهینه} = \frac{A}{T} = \frac{50000}{\frac{1}{6}} = 300000$$

مثال: در یک مدل ساده قطعی اگر مقدار هر بار سفارش 50 درصد بیشتر یا 50 درصد کمتر از مقدار اقتصادی سفارش باشد به‌ترتیب هزینه متغیر چقدر افزایش خواهد کرد؟

۱) 50% و 50% ۲) 25% و 50% ۳) 250% و 25% ۴) 8% و 25%

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$Q_1=Q^*+\frac{Q^*}{2}=\frac{3Q^*}{2} \Rightarrow \frac{K_1}{K^*}=\frac{1}{2}\left(\frac{Q_1}{Q^*}+\frac{Q^*}{Q_1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\right)=1.08 \rightarrow \text{افزایش } 8\%$$

$$Q_2=Q^*-\frac{Q^*}{2}=\frac{Q^*}{2} \Rightarrow \frac{K_2}{K^*}=\frac{1}{2}\left(\frac{Q_2}{Q^*}+\frac{Q^*}{Q_2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+2\right)=1.25 \rightarrow \text{افزایش } 25\%$$

مثال: مصرف سالیانه مواد اولیه در شرکت تولیدی 2000 تن و هزینه سفارش‌دهی آن برابر 2000 تومان قیمت هر تن از این مواد 100 تومان و هزینه نگهداری هر تن 0.5 تومان در ماه و هزینه بیمه آتش‌سوزی و ... برابر 2 درصد متوسط ارزش موجودی‌ها در سال می‌باشد کل هزینه‌های سفارش‌دهی این کالا در حالت اقتصادی برابر است با:

۱) 2236 ۲) 4000 تومان ۳) 8000 تومان ۴) 3464 تومان

حل: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$D=2000 \quad , \quad A=2000 \quad , \quad C=100 \quad , \quad i=0.02$

$$\left.h_1=0.5 \ \frac{\text{زمان}}{\text{ماه.تن}}=0.5\times12 \ \frac{\text{تومان}}{\text{سال تن}}=6\right\} \Rightarrow h=h_1+h_2=8$$

$h_2=i.c=0.02\times100=2$

$$\text{هزینه سفارش‌دهی بهینه}=\frac{K(Q^*)}{2}=\frac{\sqrt{2DAh}}{2}=\frac{\sqrt{2\times2000\times2000\times8}}{2}=4000$$

مثال: برای مدل ساده موجودی (تقاضا ثابت و معلوم است و کمبود موجودی مجاز نیست) اگر هزینه نگهداری محصول چهار برابر شود آن‌گاه مقدار سفارش اقتصادی EOQ:

۱) نصف خواهد شد. ۲) دوبرابر خواهد شد. ۳) تغییر نخواهد کرد. ۴) هیچ‌کدام

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$h_2 = 4h_1$$

$$\frac{Q_2^*}{Q_1^*} = \frac{\sqrt{\frac{2DA}{h_2}}}{\sqrt{\frac{2DA}{n_1}}} = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

مثال: شرکتی برای یک نوع محصول هر بار 1500 واحد سفارش می‌دهد که این مقدار سفارش شرکت را برای شش ماه کفایت می‌نماید. هزینه خرید هر واحد این محصول 10 تومان و هزینه هر بار سفارش 25 تومان می‌باشد. اگر درصد هزینه نگهداری سالیانه این محصول 25 درصد در سال و زمان انتظار تحویل کالا (Lead Time) برابر 14 هفته باشد. هزینه سیستم کنترل موجودی جاری شرکت بدون توجه به هزینه خرید برابر است با:

1235 (۱ 433 (۲ 1925 (۳ 613 (۴

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$Q=1500 \quad , \quad T = \text{ماه } 6 = \frac{1}{2} \text{ سال} \quad \Rightarrow \quad D = \frac{Q}{T} = 3000$$

$$C = 10 \quad , \quad A = 25 \quad , \quad i = 0.25 \quad , \quad L = 14 \text{ هفته}$$

$$h = i.cs = 0.25 \times 10 = 2.5$$

$$K(Q) = \frac{DA}{Q} + \frac{hQ}{Q} = \frac{3000 \times 25}{1500} + 2.5 \times \frac{1500}{2} = 50 + 1875 = 1925$$

مثال: در مثال فوق اگر سفارش این محصول به صورت بهینه انجام گیرد مقدار صرفه‌جویی هزینه‌ها در سال برابر است با:

1925 (۱ 1313 (۲ 613 (۳ 547 (۴

حل: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$K(Q^*) = \sqrt{2DAh} = \sqrt{2 \times 300 \times 25 \times 2.5} = 612$$

$$\Rightarrow \quad K - K^* = 1925 - 612 = 1313$$

مثال: در مثال فوق نقطه سفارش مجدد بر حسب موجودی در دست برابر است با (سال 52 هفته در نظر بگیرید):

۱) 43 واحد ۲) 67 واحد ۳) 73 واحد ۴) 47 واحد

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$Q = \sqrt{\frac{2DA}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times 3000 \times 25}{2.5}} = 245$$

$$T = \frac{Q}{D} = \frac{245}{3000} = 0.082$$

$$\Rightarrow \quad r_h^* = D.L - mQ^* = 3000 \times \frac{14}{52} - \left[\frac{\frac{14}{52}}{0.082}\right].245 \simeq 73$$

۳ـ مدل‌های کمبود

۳ـ۱ـ مدل کمبود پس افت

فرضیان این مدل مانند مدل EOQ است با این تفاوت که کمبود به صورت سفارشات عقب افتاده جایز است هدف مدل تعیین مقدار سفارش بهینه (Q^*) و مقدار کمبود بهینه در هر دوره (b^*) همین‌طور r^*, r_h^* همراه با کمینه کردن هزینه‌ها می‌باشد.

۳ـ۱ـ۱ـ نحوه محاسبه روابط مقدار سفارش اقتصادی

در این مدل $\pi, \hat{\pi}$ برابر مقدار ثابتی می‌باشند و بقیه پارامترها مانند مدل EOQ است.

T_1 مدت زمانی از سیکل که موجودی داریم
T_2 مدت زمانی از سیکل که کمبود داریم
$T = T_1 + T_2$

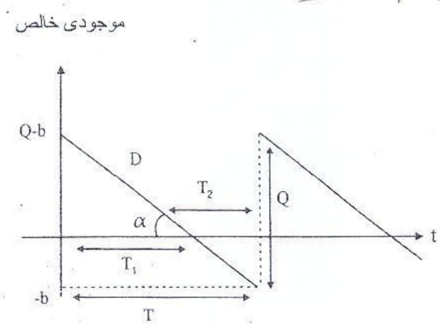
T_2: مدت زمانی از یک دوره که کمبود رخ می‌دهد.

T_1: مدت زمان یک دوره که در حالت کمبود نیستیم.

b: مقدار هر بار کمبود یا همان مقدار ثابت کمبود در هر سیکل

π هزینه ثابت کمبود هر واحد

$\hat{\pi}$ هزینه کمبود هر واحد در سال



$$D = tg\alpha = \frac{Q-b}{T_1} \Rightarrow T_1 = \frac{Q-b}{D}$$

$$T_2 = \frac{b}{D}$$

$$\Rightarrow T = T_1 + T_2 = \frac{Q}{D}$$

مستقل از زمان　　وابسته به زمان

هزینه خرید + هزینه کمبود + هزینه نگهداری + هزینه سفارش‌دهی = هزینه یک دوره

$$= A + h\frac{(Q-b)T_1}{2} + \hat{\pi}\frac{bT_2}{2} + \pi b + CQ$$

$A + h\bar{I}T_1 + \hat{\pi}\bar{b}T_2 + \pi b + CQ$، $\bar{I} = \frac{Q-b}{2}$، $\bar{b} = \frac{b}{2}$

$n = \frac{D}{Q} = \frac{1}{T}$ = متوسط مقدار دوره‌ها در سال

(متوسط کل هزینه سالیانه سیستم موجودی) $K(Q,b) = n$ (هزینه یک دوره) $= \frac{DA}{Q} + \frac{h(Q-b)^2}{2Q} + \frac{\hat{\pi}b^2}{2Q} + \pi\frac{D}{Q}b + CD$ $\xrightarrow{b=0} TRC_{Q_w}$

برای به‌دست آوردن Q^*, b^* باید از تابع هزینه متغیر $K(Q,b)$ نسبت به Q و b مشتق گرفته و برابر صفر قرار دهیم و معادلات مربوطه را حل کنیم.

$$K(Q,b)=\frac{DA}{Q}+\frac{h(Q-b)^2}{2Q}+\frac{\hat{\pi}b^2}{2Q}+\pi\frac{D}{Q}b$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta K(Q,b)}{\delta b}=0\\ \frac{\delta K(Q,b)}{\delta Q}=0\end{aligned}\right\}\overset{\hat{\pi}\neq 0}{\Rightarrow}\begin{cases}Q^*=\sqrt{\dfrac{2DA}{h}-\dfrac{(\pi D)^2}{h(\hat{\pi}+h)}}\cdot\sqrt{\dfrac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}\\ b^*=\dfrac{\sqrt{2DAh\left(1+\dfrac{h}{\hat{\pi}}\right)-\dfrac{h}{\hat{\pi}}(\pi D)^2}-\pi D}{\hat{\pi}+h}=\dfrac{hQ^*-\pi D}{\hat{\pi}+h}\end{cases}$$

از تابع هزینه به سادگی می‌توان روابط زیر را به دست آورد:

متوسط موجودی در یک‌سال $=\dfrac{(Q-b)^2}{2Q}$ در یک دوره $\dfrac{(Q-b)}{2}T_1$ در یک سال $\rightarrow N\dfrac{(Q-b)}{2}T_1=\dfrac{D}{Q}\dfrac{(Q-b)}{2}\dfrac{(Q-b)}{D}=\dfrac{(Q-b)^2}{2Q}$

متوسط کمبود در سال $=\dfrac{b^2}{2Q}$ در یک دوره $\rightarrow \dfrac{b}{2}T_2$ در یک سال $\rightarrow N\dfrac{b}{2}T_2=\dfrac{D}{Q}\dfrac{b}{2}\dfrac{b}{D}=\dfrac{b^2}{2Q}$

تعداد کمبود در سال $=\dfrac{D}{Q}b$ در یک دوره $\rightarrow b$ در یک سال $\rightarrow Nb=\dfrac{D}{Q}b$

۳ـ۱ـ۲ـ الگوریتم حل مدل

الگوریم حل مسایل کمبود پس افت با توجه به مقایسه دو هزینه $\sqrt{2DAh}$, πD و به صورت زیر می‌باشد:

اگر $\pi D\geq\sqrt{2DAh}$ باشد به مدل EOQ بر می‌گردیم یعنی به سیستم موجودی بدون کمبود که در آن

$Q=Q\omega$, $K(Q^*)=K(Q\omega)$, $b^*=0$

اگر $\pi D<\sqrt{2DAh}$ باشد دو حالت زیر وجود دارد:

- اگر $\hat{\pi}=0$ باشد در این حالت سیستم موجودی وجود نخواهد داشت.
- اگر $\hat{\pi}>0$ باشد به روابطی خواهیم رسید که در قسمت قبل به‌دست آوردیم یعنی:

$$Q^*=\sqrt{\frac{2DA}{h}-\frac{(\pi D)^2}{h(\hat{\pi}+h)}}\cdot\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}$$

$$b^*=\frac{hQ^*-\pi D}{\hat{\pi}+h}$$

۳ـ۱ـ۳ـ حالت خاص مدل کمبود پس افت

مدل کمبود پس افت حالت خاصی دارد که مسایل موجودی عموماً بر اساس این حالت مورد بررسی و مقایسه قرار می‌گیرند. در این حالت $\pi=0$, $\hat{\pi}>0$ است و بنابراین حالت خاصی از قسمت دوم $\pi D<\sqrt{2DAh}$ است. روابط زیر در این حالت برقرار است.

$*$ $$Q^*=\sqrt{\frac{2DA}{h}}\cdot\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}=Q_\omega\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}$$

$*$ $$b^*=\frac{hQ^*}{\hat{\pi}+h}=\sqrt{\frac{2DAh}{\hat{\pi}(\hat{\pi}+h)}}=\frac{hQ_\omega}{\sqrt{\hat{\pi}(\hat{\pi}+h)}}$$

$*$ $$I^*_{max}=Q^*-b^*=\sqrt{\frac{2DA}{h}}\cdot\sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}}=Q_\omega\sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}}$$

$*$ $$K(Q^*)=\sqrt{2DAh}\sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}}=hI^*_{max}=\hat{\pi}b^*$$

$$I^*_{max}=Q_w\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}-\frac{hQ_w}{\sqrt{\hat{\pi}(\hat{\pi}+h)}}=Q_w\left(\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}-\frac{h}{\sqrt{\hat{\pi}(\hat{\pi}+h)}}\right)=Q_w\sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}}$$

$$Q^*=I_{max}\left[\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}\right]$$

روابط r^* و r_h^* مانند مدل EOQ است تنها مقدار b^* از آن کسر می‌شود.

$$r^* = DL - b^*$$

$$r_h^* = DL - mQ^* - b^* \quad , \quad m = \left[\frac{L}{T}\right]$$

نکته: مقایسه مدل کمبود پس افت (حالت خاص) با مدل EOQ

- مقدار سفارش بهینه در مدل پس‌افت بیشتر از مدل EOQ است.
- حداکثر موجودی در مدل EOQ بیشتر از مدل پس‌افت است.
- هزینه‌های متغیر در مدل EOQ بیشتر از مدل پس‌افت است.

$Q: \quad Q^* > Q_w \rightarrow Q_w\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} > Q_w$ $\quad >1$

$I_{max} \quad Q_w > Q_w\sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}}$ $\quad <1$

مثال: تقاضای سالانه قطعه‌ای 8000 واحد، هزینه سفارش 30 واحد پولی، هزینه نگهداری سالانه هر قطعه برابر 3 واحد پولی می‌باشد. اگر کمبود مجاز باشد و هزینه هر قطعه‌ای که با تاخیر تحویل می‌شود برابر 1 واحد پولی در سال محاسبه شود، معین کنید هزینه متغیر سالانه این قطعه (هزینه نگهداری + هزینه سفارش‌دهی + هزینه کمبود) به کدام مقدار زیر نزدیک‌تر است؟

۱) 600 واحد پولی ۲) 800 واحد پولی ۳) 900 واحد پولی ۴) 700 واحد پولی

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$D=8000 \quad , \quad A=30 \quad , \quad h=3 \quad , \quad \hat{\pi}=1$$

$$K(Q^*) = \sqrt{2DAh}\cdot\sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}} = \sqrt{2\times8000\times30\times3}\cdot\sqrt{\frac{1}{1+3}} = 600$$

مثال: مدل مقدار سفارش اقتصادی (EOQ) را در نظر بگیرید. حال فرض کنید کمبود کالا مجاز و قابل جبران باشد و هزینه کمبود تنها به صورت متغیر (وابسته به زمان) محاسبه شود. در این صورت به ترتیب مقدار بهینه (سفارش اقتصادی، حداکثر فضای انبار موردنیاز، متوسط هزینه کل سالانه) نسبت به زمانی که کمبود مجاز نباشد: Sh

۱) به‌ترتیب (بیشتر، کمتر، کمتر) است. ۲) به‌ترتیب (کمتر، بیشتر، بیشتر) است.

۳) به‌ترتیب (بیشتر، بیشتر، کمتر) است. ۴) به‌ترتیب (بیشتر، کمتر، بیشتر) است.

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

مثال: مصرف سالیانه مواد اولیه در شرکت تولیدی 2000 تن و هزینه سفارش‌دهی آن برابر 2000 تومان و قیمت هر تن از این مواد 100 تومان و هزینه نگهداری هر تن 0.5 تومان در ماه و هزینه بیمه و هزینه بیمه و آتش‌سوزی و ...برابر 2 درصد متوسط موجودی‌ها در سال می‌باشد، اگر هزینه کمبود هر تن از این مواد 4 تومان باشد مقدار سفارش اقتصادی این کالا برابر است با:

۱) 1000 تن ۲) 2000 تن ۳) $1000\sqrt{3}$ تن ۴) $2000\sqrt{3}$ تن

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$D=2000 \quad , \quad A=2000 \quad , \quad C=100 \quad , \quad i=0.02 \quad , \quad \pi=4$$

$$h_1 = 0.5\ \frac{\text{تومان}}{\text{تن.ماه}} = 0.5\times12\ \frac{\text{تومان}}{\text{سال.ماه}} = 6\ \frac{\text{تومان}}{\text{سال ماه}}$$

$$h_2 = ic = 0.02\times100 = 2$$

$$\Rightarrow \quad h = h_1 + h_2 = 8$$

نکته اصلی مهم

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{2DAh}=\sqrt{2\times2000\times2000\times8}=8000\\ \pi D=8000\end{array}\right\}\Rightarrow \pi D=\sqrt{2DAh}\Rightarrow \text{EOQ مدل}$$

چون $\pi D \geq \sqrt{2DAh}$ مدل EOQ

$$\Rightarrow Q^*=Q_\omega=\sqrt{\frac{2DA}{h}}=\sqrt{\frac{2\times2000\times200}{8}}=1000$$

۳-۲- مدل کمبود در حالت فروش از دست رفته

فرضیات این مدل مانند مدل EOQ است با این تفاوت که کمبود جایز است و جبران نمی‌شود.

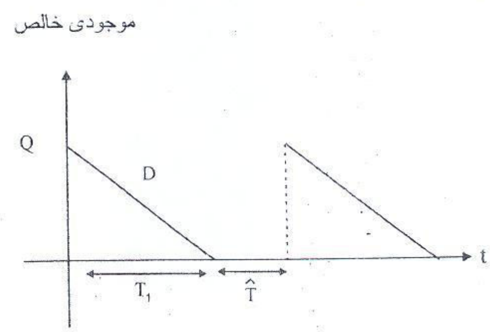
هدف مدل تعیین مقدار اقتصادی سفارش (Q^*) و فاصله زمانی بهینه کمبود در هر دوره $(\hat{T}^*)$ و نقطه سفارش مجدد (r_h^*, r^*) با کمینه کردن هزینه‌هاست.

۳-۲-۱- نحوه محاسبه روابط مقدار سفارش اقتصادی

در این مدل π برابر مقدار ثابتی می‌باشند و سایر پارامترها مانند مدل EOQ است.

$\hat{T}$: مدت زمانی از یک دوره که دارای کمبود هستیم.

T_1 : مدت زمانی از یک دوره که دارای کمبود نیستیم.



$$\left.\begin{array}{l}T=T_1+\hat{T}\\ T_1=\dfrac{Q}{D}\end{array}\right\}\rightarrow T=\frac{Q}{D}+\hat{T}=\frac{Q+D\hat{T}}{D}$$

متوسط مقدار دوره‌ها در سال $=\dfrac{1}{T}=\dfrac{D}{Q+D\hat{T}}$

(کل هزینه متغیر سالیانه) $K(Q,\hat{T})=\dfrac{DA}{Q+D\hat{T}}+\dfrac{hQ^2}{2(Q+D\hat{T})}+\dfrac{\pi D^2\hat{T}}{Q+D\hat{T}}+CQ\dfrac{D}{Q+D\hat{T}}$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در این مدل هزینه خرید هم جزو هزینه‌های متغیر است، زیرا به برخی از تقاضاها اصلاً جواب نخواهیم داد.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\delta K(Q,\hat{T})}{\delta Q}=0\\ \dfrac{\delta K(Q,\hat{T})}{\delta \hat{T}}=0\end{array}\right\}\Rightarrow Q=\frac{\pi D}{h}\pm\sqrt{\left(\frac{\pi D}{h}\right)^2-\frac{2DA}{h}}$$

۳-۲-۲- الگوریتم حل مدل

الگوریتم حل مسایل در حالت فروش از دسته رفته مانند الگوریتم حل مسایل کمبود پس افت با مقایسه $\sqrt{2DAh}$ و πD با هم شکل می‌گیرد و به صورت زیر است:

اگر $\pi D \geq \sqrt{2DAh}$ باشد به مدل EOQ بر می‌گردیم یعنی به سیستم موجودی بدون کمبود و بنابراین داریم:

$$Q^* = Q_{\omega} \quad , \quad K(Q^*) = K(Q_{\omega}) \quad , \quad \hat{T}^* = 0$$

اگر $\pi D < \sqrt{2DAh}$ باشد سیستم موجودی وجود نخواهد داشت یعنی: حالت فروش از دست رفته $\hat{T}^* = \infty$

مثال: مدل مقدار سفارش اقتصادی (EOQ) را در نظر بگیرید. فرض کنید کمبود کالا مجاز ولی قابل جبران نباشد، در این صورت به ترتیب مقدار بهینه (سفارش اقتصادی، حداکثر فضای انبار، متوسط هزینه کل سالانه) نسبت به زمانی که کمبود مجاز نباشد:

۱) به ترتیب (بیشتر، کمتر، کمتر) است.

۲) به‌ترتیب (کمتر، بیشتر، بیشتر) است.

۳) به‌ترتیب (بیشتر، کمتر، بیشتر) است.

۴) در صورت داشتن سیستم موجودی، برابر زمانی خواهد بود که کمبود مجاز نباشد.

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

مثال: کمبود کالایی مجاز و قابل جبران است، با افزایش هزینه‌های کمبود، مقدار سفارش اقتصادی این کالا:

۱) ثابت باقی می‌ماند. ۲) افزایش می‌یابد.

۳) کاهش می‌یابد. ۴) قابل پیش‌بینی نیست.

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DA}{h}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} = \sqrt{\frac{2DA}{h}} \cdot \sqrt{1+\frac{h}{\hat{\pi}}}$$

در صورتی که هزینه کمبود کاسته شود مقدار $\sqrt{1+\frac{h}{\hat{\pi}}}$ کاهش یافته و بنابراین Q^* کاهش خواهد یافت.

مثال: یک قطعه خریداری شده دارای نرخ تقاضای سالیانه 4000 واحد است. هزینه ثابت سفارش 60 تومان بوده و هزینه هر واحد 4 تومان است. نرخ هزینه نگهداری موجودی سالیانه 0.15 است. کمبود موجودی مجاز بوده و به‌صورت سفارشات تاخیر شده در می‌آیند. هزینه سالیانه هر واحدی که به تاخیر می‌افتد 1 تومان است، اندازه انباشته اقتصادی چند واحد است؟

۱) 1081 ۲) 1131 ۳) 1252 ۴) 1304

حل: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$D = 4000 \quad , \quad A = 60 \quad , \quad C = 4 \quad , \quad i = 0.15 \quad , \quad \hat{\pi} = 1$

$h = i.c = 0.15 \times 4 = 0.6$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DA}{h}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} = \sqrt{\frac{2\times 4000\times 60}{0.6} \times \frac{1.6}{1}} = 1131$$

مثال: اگر تقاضای سالیانه محصولی R، هزینه نگهداری سالیانه هر واحد H هزینه هر بار سفارش‌دهی C باشد و ضمناً کمبود مجاز و هزینه سالیانه هر واحد کمبود برابر K باشد، اگر بخواهیم مقدار سفارش اقتصادی 2 برابر حداکثر موجودی باشد، چه رابطه‌ای باید بین هزینه نگهداری سالیانه (H) و هزینه کمبود سالیانه (K) برقرار باشد؟

۱) $H=\frac{1}{2}K$ ۲) $H=K$ ۳) $H=\frac{3}{2}K$ ۴) $H=2K$

حل: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\left.\begin{array}{l} Q=Q_{\omega}\times\sqrt{\dfrac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} \\ I_{max}=Q_{\omega}\times\sqrt{\dfrac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}} \end{array}\right\} \Rightarrow Q=\left(\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}\right).I_{max}$$

می‌خواهیم $Q=2I_{max}$ باشد بنابراین

$$\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}=2 \Rightarrow \hat{\pi}+h=2\hat{\pi} \Rightarrow h=\hat{\pi}$$

یا با توجه به صورت سوال $H=K$

مثال: در یک سیستم موجودی با نرخ ثابت، و در حالتی‌که کمبود موجودی مجاز نمی‌باشد، میزان سفارش اقتصادی کالایی برابر 2814.2 تن و نقطه سفارش مجدد (بر مبنای موجودی در دست و سفارش در راه) برابر 6346.15 تن محاسبه شده است. چنانچه کمبود مجاز باشد و هزینه مربوط بر مبنای هزینه کمبود واحد کالا در سال در محاسبات منظور شود، میزان سفارش اقتصادی 3476.8 تن محاسبه می‌شود. برای این حالت نقطه سفارش مجدد (بر مبنای موجودی در دست و سفارش در راه) را محاسبه و مشخص کنید کدام پاسخ به جواب نزدیک‌تر است؟

۱) 5150 ۲) 5650 ۳) 6150 ۴) 6346

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

برای حالت EOQ:

$$Q^*_{\omega}=2814.2 \quad , \quad r^*=6346.15$$

برای حالت کمبود:

$$Q^*_{\text{کمبود}}=3476.8 \quad , \quad r^*=?$$

برای به‌دست آوردن مقدار b^* دو راه وجود دارد:

راه اول:

$$Q^*_{\text{کمبود}}=Q^*_{EOQ}\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} \Rightarrow \sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}=\frac{3476.8}{2814.2} \Rightarrow 1+\frac{h}{\hat{\pi}}=1.526$$

$$\Rightarrow \frac{h}{\hat{\pi}}=0.526$$

$$b^*=\frac{hQ_{\omega}}{\sqrt{\hat{\pi}(\hat{\pi}+h)}}=\frac{h}{\hat{\pi}}\frac{Q_{\omega}}{\sqrt{\dfrac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}}=0.526\times\frac{2814.2}{1.235}\simeq 1198$$

راه دوم:

$$Q^*_{\text{کمبود}}=Q^*_{EOQ}\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} \Rightarrow \sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}=\frac{3476.8}{2814.2}=1.235$$

$$I_{max\,\text{کمبود}} = Q_{\omega}\sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}} = \frac{2814.2}{1.235} = 2278.7$$

$$b^* = Q^*_{\text{کمبود}} - I^*_{max\,\text{کمبود}} = 3476.8 - 2278.7 = 1198.1$$

مقدار $r^*_{\text{کمبود}}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$r^*_{\text{کمبود}} = r^*_{EOQ} - b^* = 6346.15 - 1198 = 5148.15$$

که به گزینه ۱ یعنی 5150 نزدیک‌تر است.

r^* را که داریم می‌توانیم $b^* = Q^*_{\text{کمبود}} - I_{max\,\text{کمبود}}$ را بدست آورده و r^* را از b^* کم کنیم

۴ـ مدل تولیدی ساده یا مدل مقدار تولید اقتصادی یا مدل EPQ

فرضیات مدل مانند مدل EOQ است با این تفاوت که سفارش یک‌جا دریافت نمی‌شود بلکه با نرخ ثابت P و به تدریج دریافت می‌شود.

هدف مدل تعیین مقدار هر بار تولید اقتصادی (Q^*) و نقطه سفارش مجدد (r^*, r_h^*) با کمینه کردن هزینه‌ها است.

۴ـ۱ـ نحوه محاسبه روابط مدل

موجودی در مدل EOQ یک دفعه وارد می‌شود ولی در مدل EPQ تدریجاً وارد می‌شود.

پارامترهای مدل EOQ است با تغییرات زیر:

A : هزینه هر بار آماده‌سازی

C : هزینه متغیر با قیمت تمام شده هر واحد

P : نرخ دریافت سفارش یا نرخ تولید

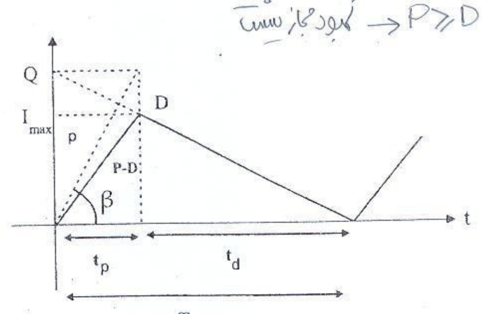
بخشی از هر سیکل که سیستم در حال تولید است

$T = T_p + T_d$

بخشی از هر سیکل که سیستم در حال تولید نیست

موجودی خالص

کمبود مجاز نیست $\rightarrow P \geq D$



نکته: همواره $P \geq D$ است زیرا همان‌طور که از شکل مشخص است اگر $P < D$ باشد به کمبود بر می‌خوریم.

$$tg\beta = P = \frac{Q}{t_p} \Rightarrow \left.\begin{aligned} t_p &= \frac{Q}{P} \\ T &= \frac{Q}{D} \end{aligned}\right\} \Rightarrow t_d = T - t_p = \frac{Q}{P} - \frac{Q}{D} = \frac{Q}{D}\left(1 - \frac{D}{P}\right) = T\left(1 - \frac{D}{P}\right)$$

$$I_{max} = (P - D)t_p = Dt_d = Q\left(1 - \frac{D}{P}\right)$$

$$\bar{I} = \frac{I_{max}}{2} = \frac{Q}{2}\left(1 - \frac{D}{P}\right)$$

$$\text{متوسط تعداد دوره‌ها در سال} = \frac{D}{Q} = \frac{1}{T}$$

$$\text{کل هزینه سالیانه} = \underbrace{\frac{DA}{Q} + h\frac{Q}{2}\left(1 - \frac{D}{P}\right)}_{K(Q)} + CD$$

$$\frac{dK(Q)}{dQ} = 0 \Rightarrow Q^* = \sqrt{\frac{2DA}{h\left(1 - \frac{D}{P}\right)}} = \frac{Q_\omega}{\sqrt{1 - \frac{D}{P}}}$$

$$I_{max}=Q^*\left(1-\frac{D}{P}\right)=Q_\omega\sqrt{1-\frac{D}{P}}$$

$$\bar{I}=\frac{Q^*}{2}\left(1-\frac{D}{P}\right)=\frac{Q_\omega}{2}\sqrt{1-\frac{D}{P}}$$

$$K(Q^*)=\sqrt{2DAh\left(1-\frac{D}{P}\right)}$$

$$\text{کل هزینه بهینه سالیانه}=K(Q^*)+CD=\sqrt{2DAh\left(1-\frac{D}{P}\right)}+CD$$

نقطه سفارش مجدد بر حسب موجودی در دست در مدل EPQ با توجه به این‌که لحظه صدور سفارش در قسمت صعودی نمودار یا نزولی آن بیافتد دو حالت مختلف دارد و این دو حالت از مقایسه بین $L'=L-mT$ و t_d (مدت زمانی که فقط در حال مصرف هستیم) به‌دست می‌آید.

$r^*=D.L$

$$\begin{cases} r_h^*=DL'=D(L-mT)=DL-mQ^* & \text{اگر } L'=L-mT<t_d \\ r_h^*=(P-D)(T-L')=DL-PL+(m+1)\left(\frac{P}{D}-1\right)Q^* & \text{اگر } L'=L-mT\ge t_d \end{cases}$$

۴-۲- نکات مدل EPQ

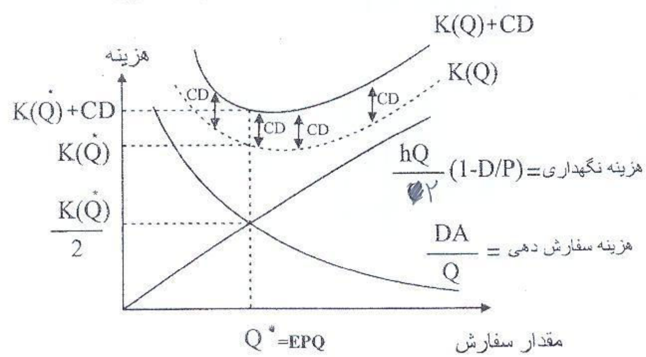
نکته ۱: مقایسه مدل EPQ و مدل EOQ

- مقدار سفارش بهینه در مدل EPQ بیشتر از مدل EOQ است.
- حداکثر موجودی در مدل EOQ بیشتر از مدل EPQ است.
- هزینه بهینه سالیانه در مدل EOQ بیشتر از مدل EPQ است.

نکته ۲: نمودار موقعیت موجودی مدل EPQ کاملاً مشابه مدل EOQ و به همان شکل است.

$D.L\le y(t)\le DL+Q^*$

نکته ۳: نمودار هزینه‌ها بر حسب مقدار سفارش در مدل EPQ مانند مدل EOQ و به شکل زیر است:



نکته ۴: محل تلاقی منحنی هزینه نگهداری و هزینه سفارش‌دهی سالیانه نقطه بهینه است.

$$K(Q^*)=\frac{2DA}{Q^*}=hQ^*\left(1-\frac{D}{P}\right)=2nA=\frac{2A}{T^*}\sqrt{DAh\left(1-\frac{D}{P}\right)}=hI^*_{max}$$

نکته ۵:

اگر $Q>EPQ$ باشد آن‌گاه هزینه نگهداری > هزینه سفارش‌دهی

اگر $Q=EPQ$ باشد آن‌گاه هزینه نگهداری = هزینه سفارش‌دهی

اگر $Q<EPQ$ باشد آن‌گاه هزینه نگهداری < هزینه سفارش‌دهی

نکته ۶: شیب منحنی هزینه‌ها در نقطه بهینه برای هزینه نگهداری و هزینه سفارش‌دهی به ترتیب برابر $\frac{h}{2}\left(1-\frac{D}{P}\right)$ و $-\frac{h}{2}\left(1-\frac{D}{P}\right)$ است.

نکته ۷: در صورتی که به جای مقدار Q^* مقدار نابهینه Q سفارش دهیم، درصد افزایش هزینه متغیر میانه از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\frac{K(Q)}{K(Q^*)}=\frac{1}{2}\left(\frac{Q}{Q^*}+\frac{Q^*}{Q}\right)$$

نکته ۸: مانند مدل EOQ شیب منحنی هزینه‌ها در سمت راست نقطه بهینه نسبت به سمت چپ آن ملایم‌تر است یعنی:

$$K(Q^*-a)>K(Q^*+a)$$

نکته ۹: در صورتی که یکی از پارامترهای مدل تغییر کند، برای مقایسه و یافتن مقدار سفارش بهینه و هزینه بهینه متغیر سالیانه باید از روابط زیر استفاده کرد:

$$\frac{Q_1^*}{Q_0^*}=\frac{\sqrt{\dfrac{2D_1A_1}{h_1\left(1-\dfrac{D_1}{P_1}\right)}}}{\sqrt{\dfrac{2D_0A_0}{h.\left(1-\dfrac{D_0}{P_0}\right)}}}=\sqrt{\frac{A_1}{A_0}}\cdot\sqrt{\frac{h_0}{h_1}}\cdot\sqrt{\frac{D_1\cdot\left(1-\dfrac{D_0}{P_0}\right)}{D_0\cdot\left(1-\dfrac{D_1}{P_1}\right)}}$$

$$\frac{K(Q_1^*)}{K(Q_0^*)}=\sqrt{\frac{2D_1A_1h_1\left(1-\dfrac{D_1}{P_1}\right)}{2D_0A_0h_0\left(1-\dfrac{D_0}{P_0}\right)}}=\sqrt{\frac{h_1}{h_0}}\cdot\sqrt{\frac{A_1}{A_0}}\cdot\sqrt{\frac{D_1\left(1-\dfrac{D_1}{P_1}\right)}{D_0\left(1-\dfrac{D_0}{P_0}\right)}}$$

نکته ۱۰: با افزایش پارامترهای مدل مقدار سفارش بهینه و هزینه بهینه سالیانه به صورت زیر تغییر می‌کند.

	Q^*	$K(Q^*)$
افزایش A	افزایش	افزایش
افزایش D	افزایش	تغییرات مشخص نیست
افزایش h	کاهش	افزایش
افزایش i	تغییری نمی‌کند	افزایش
افزایش c	تغییری نمی‌کند	افزایش
افزایش w	تغییری نمی‌کند	افزایش
افزایش p	تغییری نمی‌کند	افزایش
افزایش L	تغییری نمی‌کند	تغییری نمی‌کند

نکته 10 $\Leftarrow$ استثنا دارد

نکته: مقایسه بین مدل EOQ، EPQ و مدل EOQ در حالت کمبود پس افت (حالت خاص)

	مدل EOQ در حالت کمبود پس افت		مدل EOQ		مدل EPQ
مقدار سفارش بهینه (Q^*)	$Q_\omega\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}$	$<$	Q_ω	$>$	$\frac{Q_\omega}{\sqrt{1-\frac{D}{P}}}$
حداکثر موجودی بهینه (I_{max})	$Q_\omega\sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}}$	$>$	Q_ω	$<$	$Q_\omega\sqrt{1-\frac{D}{P}}$
متوسط موجودی بهینه $(\bar{I})$	$\frac{(Q^*-b^*)}{2Q^*}$	$>$	$\frac{Q_\omega}{2}$	$<$	$\frac{Q_\omega\sqrt{1-\frac{D}{P}}}{2}$
هزینه نگهداری	$h\bar{I}$	$>$	$h\bar{I}$	$<$	$h\bar{I}$
کل هزینه متغیر سالیانه $K(Q^*)$	$\sqrt{2DAh}\sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}}$	$>$	$\sqrt{2DAh}$	$<$	$\sqrt{2DAh}\left(1-\frac{D}{P}\right)$

مثال: مدیر یک سیستم موجودی اغلب با این تصمیم روبرو است که آیا قطعه مورد لزوم را بخرد یا در کارخانه تولید نماید. فرض کنید که اگر قطعه از خارج خریداری شود، هر واحد 25 تومان تمام می‌شود در حالی‌که اگر در کارخانه تولید شود. هر واحد 22 تومان خواهد بود، بهرحال اگر قطعه خریداری شود، هزینه هر بار سفارش 5 تومان است، در حالی‌که اگر قطعه در کارخانه تولید شود، هزینه هر بار راه‌اندازی ماشین‌آلات 50 تومان است. ماشین‌آلات تنها می‌توانند در سال 10000 قطعه تولید نمایند، تقاضای سالیانه این قطعه 2500 واحد بوده و نرخ نگهداری قطعه به‌طور موجودی 10% است.

با توجه اطلاعات فوق به سوالات زیر جواب دهید:

الف) متوسط هزینه سالیانه بهینه برای سیاست خرید عبارت است از:

۱) 62500 تومان ۲) 62750 تومان ۳) 60000 تومان ۴) 63550 تومان

حل: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

مدل خرید: $C=25 \quad , \quad A=5 \quad , \quad D=2500 \quad , \quad i=0.1$

$h=i.c=0.1\times25=2.5$

کل هزینه بهینه سالیانه $=\sqrt{2DAh}+CD=\sqrt{2\times2500\times5\times2.5}+25\times2500=62750$

ب) متوسط هزینه سالیانه بهینه برای سیاست تولید عبارت است از (اعداد روند شده است).

۱) 55000 تومان ۲) 55742 تومان ۳) 55642 تومان ۴) 65324 تومان

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

مدل تولید: $C = 22 \quad , \quad P = 10000 \quad , \quad D = 2500 \quad , \quad A = 50 \quad , \quad i = 0.1$

$h = i.c = 0.1 \times 22 = 2.2$

$$\text{کل هزینه بهینه سالیانه} = \sqrt{2DAh\left(1-\frac{D}{P}\right)} + CD = \sqrt{2\times2500\times50\times2.2\left(1-\frac{2500}{10000}\right)} + 22\times2500 = 55642$$

ج) اندازه انباشته بهینه برای سیاست خرید عبارت است از:

۱) 100 واحد ۲) 250 واحد ۳) 200 واحد ۴) 300 واحد

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DA}{h}} = \sqrt{\frac{2\times2500\times5}{2.5}} = 100$$

د) اندازه انباشته بهینه برای سیاست تولید عبارت است از (اعداد روند شده است):

۱) 377 واحد ۲) 389 واحد ۳) 674 واحد ۴) 730 واحد

حل: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DA}{h\left(1-\frac{D}{P}\right)}} = \sqrt{\frac{2\times2500\times5}{2.5\left(1-\frac{2500}{10000}\right)}} \simeq 389$$

مثال: در یک سیستم سفارشات، دریافت به صورت آنی (لحظه‌ای) بوده و در این شرایط مقدار اقتصادی سفارش (EOQ) برابر 800 است. اخیراً دریافت حالت تدریجی دارد. در شرایط جدید سایر پارامتر مانند قبل است، مقدار اقتصادی سفارش به 1600 رسیده است. در شرایط جدید سرعت مصرف به سرعت دریافت کالا برابر است با:

۱) 0.25 ۲) صفر ۳) 0.75 ۴) ∞

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$Q_{EOQ} = 800$

$Q_{EPQ} = 1600$

$$Q_{EPQ} = \frac{Q_{EOQ}}{\sqrt{1-\frac{D}{P}}} \Rightarrow \sqrt{1-\frac{D}{P}} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1-\frac{D}{P} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{D}{P} = \frac{3}{4}$$

$\frac{\text{سرعت مصرف}}{\text{سرعت دریافت}} = \frac{D}{P}$

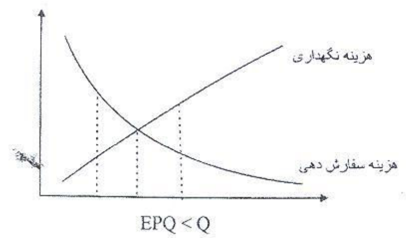
مثال: یک کارخانه که دارای سیستم تولیدی دسته‌ای (Batch Produation) می‌باشد، در هر بار که به تولید محصول X می‌پردازد این محصول را در حجمی بیشتر از مقدار اقتصادی (EPQ) تولید می‌کند.

جمع هزینه‌های نگهداری (انبارداری) کالای x را در سال THC می‌نامیم. جمع هزینه‌های آمادگی سیستم برای تولید محصول x در سال را TOC می‌نامیم. در این شرایط کدام‌یک از گزاره‌های زیر می‌تواند صحیح باشد).

۱) $TOC = 700 \quad , \quad THC = 1000$ ۲) $\frac{1}{2}TOC \le THC \le 2TOC$

۳) $TOC = 1000 \quad , \quad THC = 1000$ ۴) $TOC = 1000 \quad , \quad THC = 700$

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.



با توجه به منحنی هزینه‌ها بر حسب مقدار سفارش مشخص است که هنگامی که EPQ<Q باشد. هزینه نگهداری THC از هزینه سفارش‌دهی TOC به صورت اکید بیشتر خواهد بود بنابراین تنها گزینه (۱) می‌تواند صحیح باشد.

مثال: موقعیت موجودی بر حسب مجموع موجودی در دست و در راه در یک مدل کنترل موجودی قطعی در مقایسه با مدل با دریافت تدریجی به چه صورتی است؟ ($y(t)$: موقعیت موجودی در لحظه E)

۱) $DL \le y(t) \le DL + Q\left(1-\frac{D}{P}\right)$

۲) $DL + Q\left(1-\frac{D}{P}\right) \le y(t) \le DL + Q\left(1-\frac{D}{P}\right)$

۳) $DL + Q\left(1-\frac{D}{P}\right) \le y(t) \le DL + Q$

۴) مانند موقعیت موجودی در مدل ساده قطعی است.

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

همان‌طور که در نکات مدل EPQ ذکر شد نمودار موقعیت موجودی مدل EPQ مشابه نمودار موقعیت موجودی مدل EOQ است و محدوده تغییرات آن به صورت زیر است:

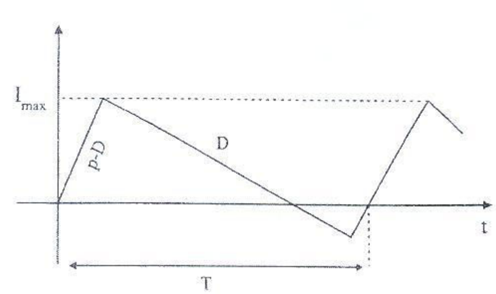
$$DL \le y(t) \le DL + Q$$

۴-۳- مدل EPQ در حالت کمبود پس افت

فرضیات مدل مانند مدل EPQ است با این تفاوت که کمبود به صورت سفارشات عقب افتاده مجاز می‌باشد.

هدف مدل تعیین مقدار سفارش اقتصادی بهینه (Q^*) و مقدار کمبود بهینه (b^*) و همین‌طور r^*, r_h^* با کمینه کردن هزینه‌ها است.

پارامترهای هزینه کمبود $(\pi, \hat{\pi})$ و نرخ تولید (P) مقدار ثابتی را دارا می‌باشند.



الگوریتم حل مدل:

اگر $\pi D \geq \sqrt{2DAh\left(1-\frac{D}{P}\right)}$ باشد به مدل EPQ بر می‌گردیم:

$$Q^* = EPQ \quad , \quad K(Q^*) = \sqrt{2DAh\left(1-\frac{D}{P}\right)} \quad , \quad b^* = 0$$

اگر $\pi D < \sqrt{2DAh\left(1-\frac{D}{P}\right)}$ باشد، دو حالت می‌تواند رخ دهد.

- اگر $\hat{\pi}=0$ باشد سیستم موجودی وجود ندارد.
- اگر $\hat{\pi} > 0$ باشد، مقدار بهینه از مدل EPQ کمبود به‌دست می‌آید.

مانند مدل EOQ با کمبود پس‌افت، مدل EPQ با کمبود پس افت نیز حالت خاصی دارد که از این حالت برای مقایسه حل مسایل این مدل استفاده می‌گردد. در این حالت $\pi = 0 \quad , \quad 0 < \hat{\pi}$ است. روابط بهینه این حالت به صورت زیر است:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DA}{h\left(1-\frac{D}{P}\right)}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}$$

حداکثر موجودی بهینه $I^*_{max} = \sqrt{\frac{2DA}{h}} \cdot \sqrt{1-\frac{D}{P}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}}$

کل هزینه متغیر سالیانه $K(Q^*) = \sqrt{2DAh}\sqrt{1-\frac{D}{P}}\sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}}$

برای نقطه سفارش مجدد بر حسب موجودی درست در این مدل مانند مدل EPQ دو حالت وجود دارد. در ادامه روابط نقطه سفارش مجدد ذکر می‌گردد.

$$r^* = D.L - b^*$$

$$\begin{cases} r_h^* = D.L' - b^* = DL - mQ^* - b^* & \text{اگر } L' = L - mT \leq t_d \\ r_h^* = (P-D)(T-L') - b^* & \\ \quad = DL - PL + (m+1)\left(\frac{P}{D}-1\right)Q^* - b^* & \text{اگر } L' = L - mT > t_d \end{cases}$$

مثال: تقاضای کالایی 24000 واحد در سال است و می‌توان این کالا را با نرخ 48000 واحد در سال تولید کرد. کسری به صورت تقاضای عقب افتاده مجاز است و مقدار بهینه هر بار سفارش‌دهی و کسری در هر دوره سفارش به ترتیب 1200 و 420 واحد محاسبه شده است اگر مدت زمان تحویل یک ماه باشد، نقطه سفارش مجدد چقدر است؟

۱) 20- واحد کالا ۲) 380 واحد کالا ۳) 410 واحد کالا ۴) 790 واحد کالا

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$D = 24000 \quad , \quad P = 48000 \quad , \quad Q^* = 1200 \quad , \quad b^* = 420 \quad , \quad L = \frac{1}{12}$$

$$T = \frac{Q^*}{D} = \frac{1200}{24000} = \frac{1}{20}$$

$U = L - mT = T_d$

$\Downarrow$

$ROP = I_{max}$

$$m=\left[\frac{L}{T}\right]=\left[\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{20}}\right]=1$$

$$\left.\begin{array}{l} L'=L-mT=\frac{1}{12}-1\times\frac{1}{20}=\frac{1}{30} \\ t_d=T\left(1-\frac{D}{P}\right)=\frac{1}{20}\left(1-\frac{24000}{48000}\right)=\frac{1}{40} \end{array}\right\} \Rightarrow \ L'>t_d$$

$$r_h^*=(P-D)(T-L')-b^*=(48000-24000)\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{30}\right)-420=4000-420=-20$$

مثال: شرکتی می‌خواهد به جای یکی از قطعات موردنیاز خود اقدام به تولید آن کند. هزینه آماده‌سازی تولید درست برابر هزینه سفارش‌دهی در حال خرید است. نرخ (سرعت) تولید 2 برابر نرخ (سرعت) تقاضا است، کدام‌یک از عبارات زیر درست است؟

۱) مقدار اقتصادی هر بار تولید برابر تولید مقدار اقتصادی هر بار خرید است.

۲) مقدار اقتصادی هر بار تولید تقریباً 20% بزرگتر از مقدار اقتصادی هر بار خرید است.

۳) مقدار اقتصادی هر بار تولید تقریباً 20% کوچکتر از مقدار اقتصادی هر بار خرید است.

۴) مقدار اقتصادی هر بار تولید تقریباً 40% بزرگتر از مقدار اقتصادی هر بار خرید است.

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$A_{\text{تولید}}=A_{\text{خرید}}$

$P=2D \Rightarrow 1-\frac{D}{P}=\frac{1}{2}$

$$Q_{\text{تولید}}=\frac{Q_{\text{خرید}}}{\sqrt{1-\frac{D}{P}}}=\sqrt{2}\ Q_{\text{خرید}}=1.4Q_{\omega}$$

بنابراین مقدار اقتصادی هر بار تولید 40% بزرگتر از مقدار اقتصادی هر بار خرید است.

مثال: در سوال فوق حداکثر موجودی در حالت تولید نسبت به حداکثر موجودی در حالت خرید:

۱) تقریباً 70% بیشتر است.

۲) تقریباً 70% کمتر است.

۳) تقریباً 30% بیشتر است.

۴) تقریباً 30% کمتر است.

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\frac{I_{max\ \text{تولید}}}{I_{max\ \text{خرید}}}=\frac{Q_{\omega}\sqrt{1-\frac{Q}{P}}}{Q_{\omega}}=\sqrt{1-\frac{D}{P}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=0.7$$

حداکثر موجودی در حالت تولید 30% کمتر از حالت خرید است.

۵ـ مدل‌های چند محصولی و محدودیت‌دار

۵ـ۱ـ مدل چندمحصولی ساده

فرضیات این مدل مانند مدل EOQ است با این تفاوت که برنامه‌ریزی برای چند محصول انجام می‌پذیرد.

هدف مدل تعیین مقدار سفارش بهینه برای هر محصول $\left(Q_j^*\right)$ و نقطه سفارش بهینه $\left(r_{h_j}^*, r_j^*\right)$ با کمینه کردن هزینه‌هاست. این هدف به صورت زیر قابل بیان است.

$$\min = \sum_j \left(\frac{D_j A_j}{Q_j} + \frac{h_j Q_j}{2} + C_j D_j\right)$$

رای یافتن می‌نیمم Z از تابع فوق بر حسب Q_j مشتق گرفته و Q_j^* را می‌یابیم.

$$\frac{\delta z}{\delta Q_j} = 0 \Rightarrow Q_j^* = Q_{\omega j} = \sqrt{\frac{2D_j A_j}{h_j}}$$

ا توجه به Q_j^*های به‌دست آمده کل هزینه متغیر سالیانه برابر جمع هزینه‌های متغیر سالیانه هر کدام از محصولات است.

$$\text{کل هزینه متغیر سالیانه} = \sum_j \sqrt{2D_j A_j h_j}$$

مان‌طور که مشاهده می‌شود، در این مدل چون هیچ‌گونه محدودیتی وجود ندارد و مانند این است که چند محصول را جداگانه نامه‌ریزی کنیم.

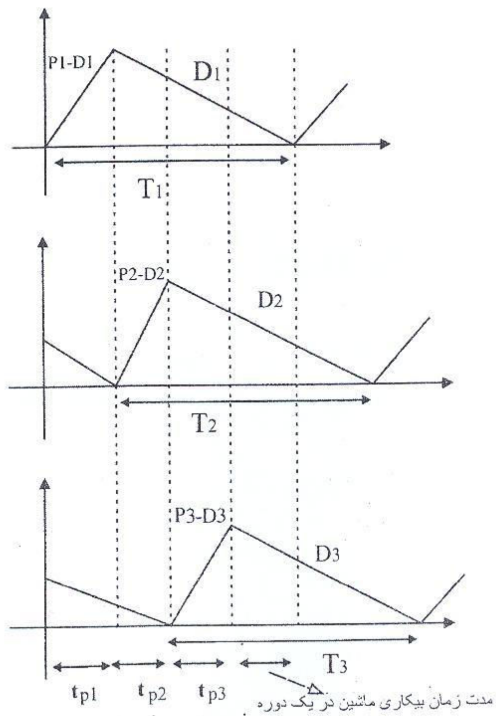
ـ۲ـ مدل چندمحصولی تولیدی

ضیات این مدل مانند مدل چند محصولی ساده است با این تفاوت که:

۱ـ سفارش به تدریج به انبار تحویل می‌شود. $P = cte$

۲ـ کلیه محصولات توسط یک ماشین یا یک خط تولید، تولید می‌شوند.

ـف مدل تعیین مقدار تولید بهینه برای هر محصول $\left(Q_j^*\right)$ و نقطه سفارش بهینه $\left(r_{h_j}^*, r_j^*\right)$ با کمینه کردن هزینه‌هاست.



برای سادگی این مدل طوری برنامه‌ریزی می‌شود که مدت زمان دوره هر محصول برابر با یکدیگر باشد. یعنی فرض می‌کنیم، $\forall_j : T_j = T$

T_j : سیکل تولیدی محصول j‌ام (زمان تولید زمان مصرف)

$$T_j = \frac{Q_j}{D_j}$$

کل هزینه متغیر سالیانه $K(T) = \sum_j \left(\frac{D_j A_j}{Q_j} + \frac{h_j Q_j}{2}\right)\left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right)$

$$\Rightarrow \quad K(T) = \frac{\Sigma A_j}{T} + \frac{T}{2}\sum h_j D_j \left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right)$$

در این مدل ابتدا باید T^* را محاسبه کرده و سپس از طریق آن Q_j^* را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{dK(T)}{dT} = 0 \quad \Rightarrow \quad T^* = \sqrt{\frac{2\sum A_j}{\sum h_j D_j \left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right)}}$$

Q_j^* توسط رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

$$Q_j^* = T^* D_j$$

هزینه متغیر سالیانه بهینه را نیز می‌توان از روابط زیر به‌دست آورد:

$$K(T^*)=\sqrt{2\sum A_j \sum h_j D_j\left(1-\frac{D_j}{P_j}\right)}=\frac{2\sum A_j}{T^*}=T^*\sum h_j D_j\left(1-\frac{D_j}{P_j}\right)$$

۵-۲-۱- شرط لازم برای جواب‌دار بودن

$\frac{D_j}{P_j}$: درصد زمانی از سال که ماشین مشغول تولید محصول jام است.

$\frac{t_{p_j}}{T_j}$: درصد زمانی از یک دوره که ماشین مشغول تولید محصول jام است.

کسرهای فوق چون از جنس درصد هستند بنابراین واحد نداشته و در دوره یا سال بودن آن‌ها تفاوتی نمی‌کند و با هم برابرند.

$$\frac{t_{p_j}}{T_j}=\frac{\frac{Q_j}{P_j}}{\frac{Q_j}{D_j}}=\frac{D_j}{P_j}$$

درصد زمان کار ماشین (در سال یا دوره) = $\sum_j \frac{D_j}{P_j}$

درصد زمان بیکاری ماشین (در سال یا دوره)= $1-\sum_j \frac{D_j}{P_j}$

شرط جواب‌دار بودن مسئله این است که درصد زمان کار ماشین از یک کمتر باشد و یا به عبارتی درصد زمانی بیکاری ماشین از صفر بیشتر باشد.

$$1-\sum\frac{D_j}{P_j}\geq 0 \quad\Rightarrow\quad \sum\frac{D_j}{P_j}\leq 1$$

مدت زمان بیکاری ماشین در سال = $1-\sum_j \frac{D_j}{P_j}$

مدت زمان بیکاری در دوره= $\left(1-\sum_j \frac{D_j}{P_j}\right)T$

۵-۲-۲- الگوریتم حل مدل

ابتدا شرط جواب‌دار بودن مدل را چک می‌کنیم:

$$\sum\frac{D_j}{P_j}\leq 1$$

اگر شرط فوق برقرار نباشد مدل جواب ندارد بنابراین امکان تولید این محصولات با ماشین داده شده وجود ندارد.

در صورتی که شرط فوق برقرار باشد، T^* از روابط به‌دست آمده محاسبه شده و سپس Q_j^* را به‌دست می‌آوریم.

مثال: در یک کارگاه صنعتی سه نوع محصول به‌وسیله یک ماشین تولید می‌شود. ظرفیت تولیدی ماشین برای محصول یک برابر 27000 واحد در سال، برای محصول 2 برابر 36000 واحد در سال، و برای محصول 3 برابر 9000 واحد در سال است. سایر ارقام مربوط به جدول در زیر آمده است:

محصول	1	2	3
مصرف سالیانه به واحد	9000	18000	6000
هزینه نگهداری هر واحد در سال به تومان	5	6	8
هزینه هر بار سفارش به تومان	800	700	500

مقدار اقتصادی هر بار تولید برای هر یک از محصولات چه‌مقدار است؟ (رقم سمت راست مربوط به محصول اول است و رقم سمت چپ مربوط به محصول سوم است.)

۱) 2000، 3200، 1900
۲) 1600، 4200، 17000
۳) 1800، 3600، 1200
۴) تولید این محصولات با ماشین داده شده امکان‌پذیر نیست.

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$D_1 = 9000 \quad , \quad P_1 = 27000 \quad , \quad h_1 = 5 \quad , \quad A_1 = 800$

$D_2 = 18000 \quad , \quad P_2 = 26000 \quad , \quad h_2 = 6 \quad , \quad A_2 = 700$

$D_3 = 6000 \quad , \quad P_3 = 9000 \quad , \quad h_3 = 8 \quad , \quad A_3 = 500$

$\sum \frac{D_j}{P_j} = \frac{9000}{27000} + \frac{18000}{36000} + \frac{6000}{9000} = 1.5 \le 1$ مسئله جواب ندارد

$\sum \frac{D_j}{P_j} < 1$ اگر باشد مسئله جواب دارد

حال اگر بدون توجه به شرط جواب‌دار بودن مسئله به حل آن می‌پرداختیم گزینه 3 به صورت زیر به‌دست می‌آمد که گزینه درستی نمی‌باشد.

$$T^* = \sqrt{\frac{\sum A_j}{\sum h_j D_j \left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \times (800 + 700 + 500)}{5 \times 9000\left(1 - \frac{9000}{27000}\right) + 6 \times 18000\left(1 - \frac{18000}{36000}\right) + 8 \times 6000\left(1 - \frac{6000}{9000}\right)}} = 0.2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_1^* = T^* D_1 = 1800 \\ Q_2^* = T^* D_2 = 3600 \\ Q_3^* = T^* D_3 = 1200 \end{cases}$$

۵-۳- مدل چندمحصولی تولیدی با زمان آماده‌سازی

در این حالت مدل چندمحصولی تولیدی را در حالتی که هر محصول برای هر بار تولید خود نیاز به زمان آماده‌سازی برابر با S_j دارد مورد بررسی قرار می‌دهیم.

S_j: زمان هر بار آماده‌سازی محصول jام

این زمان‌های آماده‌سازی در مدت زمان بیکاری ماشین در هر دوره جای می‌گیرد و در صورتی که از این زمان بیشتر گردد باید T^* را طوری تغییر داد که این زمان را در بر گیرد.

در صورتی که T^* را T_0 به‌دست آمده از رابطه مدل چند محصولی تولیدی یعنی: $\sqrt{\dfrac{2\sum A_j}{\sum h_j D_j\left(1-\dfrac{D_j}{P_j}\right)}}$ بنامیم نکته ذکر شده را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد.

$$\text{اگر } \sum S_j \le \left(1-\frac{D_j}{P_j}\right)T_0 \Rightarrow T^* = T_0 = \sqrt{\frac{2\sum A_j}{\sum h_j D_j\left(1-\frac{D_j}{P_j}\right)}}$$

$$\text{اگر } \sum S_j > \left(1-\sum\frac{D_j}{P_j}\right) \Rightarrow T^* = T_{min} = \frac{\sum S_j}{1-\sum\frac{D_j}{P_j}}$$

بنابراین الگوریتم حل مدل به‌صورت زیر خواهد بود:

T_0، T_{min} از روابط مربوطه به‌دست آورید، T^* ماکزیمم این دو مقدار خواهد بود.

$$T^* = \max\{T_0, T_{min}\}$$

مقدار سفارش بهینه برای هر محصول از فرمول روبرو محاسبه می‌گردد:

$$Q^* = T^* D_j$$

هزینه مدل از رابطه زیر به‌دست خواهد آمد

$$\text{اگر } T^* = T_0 \text{ باشد } \quad K = \sqrt{2\sum A_j \sum h_j D_j\left(1-\frac{D_j}{P_j}\right)}$$

$$\text{اگر } T^* = T_{min} \text{ باشد } \quad K = \frac{\sum A_j}{T} + \frac{T}{2}\sum h_j D_j\left(1-\frac{D_j}{P_j}\right)$$

مثال: سیکل تولید بهینه 3 محصول که توسط یک ماشین تولید می‌شوند، برابر با 2 سال است. مدت زمان بیکاری این محصولات در سال برابر با 0.1 سال است، اگر زمان آماده‌سازی هر محصول برابر با 0.05 سال باشد، آن‌گاه در حالت جدید (با در نظر گرفتن زمان آماده‌سازی) سیکل بهینه چقدر خواهد بود؟

$T_0 = 2$ سال

$$\text{زمان بیکاری} = 0.1 = 1-\sum\frac{D_j}{P_j}$$

$\sum S_j = 3\times 0.05 = 0.15$

$0.15 > 0.1$

$S_j = 0.05$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} T_0 = 2 \\ T_{min} = \dfrac{\sum S_j}{1-\sum \dfrac{D_j}{P_j}} = \dfrac{3\times 0.05}{0.1} = 1.5 \end{Bmatrix} \Rightarrow T^* = \text{mam}\{2, 1.5\} = 2 = T_0$$

بنابراین سیکل بهینه تغییری نخواهد کرد.

۵-۴- مدل چندمحصولی با محدودیت فضا

فرضیات مدل مانند مدل چندمحصولی ساده است با این تفاوت که حداکثر فضای موجود در انبار برابر با F می‌باشد.

F: حداکثر فضای موجود در انبار

f_j: فضای اشغالی متوسط هر واحد محصول jام

در این صورت حداکثر فضای اشغالی محصول jام از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

حداکثر فضای اشغالی محصول jام = (حداکثر موجودی محصول jام) f_j x

و محدودیت فضای انبار به صورت زیر خواهد بود:

$\sum_j f_j$ (حداکثر موجودی محصول jام) $\le F \Rightarrow \sum_j f_j I_{max} \le F$

باید توجه کرد که برای هر مدل باید I_{max} مربوطه را قرار داد، به عنوان مثال برای مدل تولیدی $I_{max} = Q\left(1-\frac{D}{P}\right)$ و برای مدل ساده قطعی، $I_{max} = Q$ است.

در ادامه مدل را برای مدل چندمحصولی ساده با $I_{max} = Q$ بررسی می‌کنیم و بنابراین مدل به دنبال یافتن جواب مسئله زیر است

$$\text{Min } Z = \frac{D_j A_j}{Q_j} + \frac{h_j Q_j}{2}$$

$$\sum f_j Q_j \le F$$

برای ارضای محدودیت فضا تابع هدف را با استفاده از ضریب لاگرانژ و تکنیک مربوط به آن به صورت زیر تغییر می‌دهیم.

$$\text{Min } J = Z + Q\left(F - \sum f_j Q_j\right)$$

و به روش زیر جواب‌های منحصر به فرد مسئله را به‌دست خواهیم آورد:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial J}{\partial \theta} = 0 \\ \dfrac{\partial \delta}{\partial Q_j} = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sum f_j \sqrt{\dfrac{2D_j A_j}{h_j + 2\theta^* f_j}} = F & (I) \\ Q_j^* = \sqrt{\dfrac{2D_j A_j}{h_j + 2\theta^* f_i}} & (II) \end{cases}$$

بنابراین الگوریتم حل مدل به‌صورت زیر است:

ابتدا از محدودیت فضا صرف‌نظر می‌کنیم، و جواب مسئله $Q_{\omega j} = \sqrt{\dfrac{2D_j A_j}{Q_j}}$ خواهد بود. در صورتی که این جواب محدودیت فضا $\left(\sum F_j Q_j \le F\right)$ را راضی کند، جواب‌های به‌دست آمده جواب‌های مدل هستند و در غیر این صورت مقدار θ^* را با استفاده از روش لاگرانژ از معادله (I) به‌دست آورده و در معادله (II)ن جایگزین می‌کنیم و جواب مسئله را به‌دست می‌آوریم.

تذکر: از آن‌جا که روش به‌دست آوردن θ^* از روابط فوق به‌صورت سعی و خطاست روش فوق زمان حل زیادی را می‌طلبد بنابراین روش حل مسائل فوق به صورت تستی، این است که در صورتی که بعد از محاسبات متوجه می‌شویم که $Q_{\omega j}$ محدودیت را رعایت نمی‌کنند، گزینه‌ای جواب مسئله است که محدودیت فضا را مساوی می‌کند.

نکته: در صورتی که $Q_{\omega j}$ محدودیت را ارضا نکند، جواب‌های بهینه به‌دست آمده الزاماً از $Q_{\omega j}$ها کمتر خواهد بود $\left(Q_j^* < Q_{\omega j}\right)$

مثال: کارخانه‌ای سه نوع کالای سفارشی 1، 2 و 3 دارد. این کارخانه در حدود 700 متر مربع جهت انبار کردن دارد. با توجه به اطلاعاتی که در جدول زیر آمده است:

اول Qw ها را بدست می‌آوریم اگه در محدودیت صدق کرد که هیچ اگه صدق نکرد Q های کوچکتر از Qw را انتخاب می‌کنیم

	کالای 1	کالای 2	کالای 3
تقاضای سالیانه (واحد)	5000	2000	10000
هزینه سفارش (تومان)	100	200	75
هزینه خرید (تومان)	10	15	5
مساحت اشغال شده توسط هر واحد (مترمربع)	0.7	0.8	0.4
نرخ هزینه نگهداری	0.2	0.2	0.2

مقدار سفارش بهینه کالای 1، 2 و 3 به‌ترتیب با توجه به محدودیت ذکر شده عبارت است از:

۱) 707، 516، 1224
۲) 707، 280، 1224
۳) 348، 280، 571
۴) 348، 516، 571

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$F = 700\,m^2$$

$$\sum f_j Q_j \le F \quad \Rightarrow \quad 0.7Q_1 + 0.8Q_2 + 0.4Q_3 \le 700$$

$$Q_{\omega_1} = \sqrt{\frac{2D_1A_1}{h_1}} = 707$$

$$Q_{\omega_2} = 516$$

$$Q_{gw_3} = 1224$$

Q_{ω_i} را در محدودیت می‌گذاریم:

$$0.7\times707 + 0.8\times516 + 0.4\times1224 = 495 + 413 + 490 = 1398 \not\le 700$$

مشاهده می‌گردد که محدودیت را ارضا نمی‌کند بنابراین باید از میان گزینه‌هایی به دنبال جواب گشت که از $Q_{\omega j}$ ها کمتر است تنها گزینه، گزینه 3 است که هر 3، Q_j آن از $Q_{\omega j}$ ها کمتر می‌باشد.

$$0.7\times348 + 0.8\times280 + 0.4\times571 = 244 + 224 + 228 = 696$$

۵ـ۵ـ مدل چندمحصولی با محدودیت سرمایه درگیر موجودی

فرضیات مدل مانند مدل چندمحصولی ساده است با این تفاوت که حداکثر سرمایه موجود برای موجودی برابر با X می‌باشد.

X : حداکثر سرمایه درگیر موجودی

محدودیت سرمایه درگیر موجودی به صورت زیر است:

$$\sum C_j \text{ (حداکثر موجودی محصول jام) } \le X \quad \Rightarrow \quad \sum_j C_j I_{\max j} \le X$$

برای مدل قطعی ساده $I_{\max} = Q$ است و محدودیت به صورت $\sum_j C_j Q_j \le X$ است. حل مدل مانند مدل محدودیت فضا است با این تفاوت که مقدار β^* از رابطه (I) در زیر محاسبه شده و در رابطه‌های (II) جایگزین می‌گردد.

$$\sum C_j \sqrt{\frac{2A_j D_j}{h_j + 2\beta^* C_j}} = X \qquad \text{(I)}$$

$$Q_j^* = \sqrt{\frac{2A_j D_j}{h_j + 2\beta^* C_j}} \qquad \text{(II)}$$

تذکر: مانند مدل محدودیت فضا در صورتی که بعد از محاسبات متوجه شویم که $Q_{\omega j}$ها محدودیت را ارضا نمی‌کنند، گزینه‌ای جواب مسئله است که محدودیت سرمایه درگیر موجودی را مساوی کند.

نکته: در صورتی که $Q_{\omega j}$ها محدودیت را ارضا نکنند، جواب‌های بهینه به‌دست آمده مانند مدل محدودیت فضا، الزاماً از $Q_{\omega j}$ها کمتر خواهند بود. $\left(Q_j^* < Q_{\omega j}\right)$

۵ـ۶ـ مدل چندمحصولی با محدودیت تعداد دفعات سفارش در سال

فرضیات مدل مانند مدل چندمحصولی ساده است با این تفاوت که تعداد دفعات سفارش در سال حداکثر می‌توان برابر ℓ گردد.

ℓ : حداکثر تعداد دفعات سفارش در سال برای کلیه محصولات

$\frac{D_j}{Q_j}$: تعداد دفعات سفارش در سال

محدودیت تعداد دفعات سفارش در سال به صورت زیر است:

$$\sum \frac{D_j}{Q_j} \le \ell$$

روش حل مدل مانند مدل محدودیت فضا است، با این تفاوت که از رابطه (I) مقدار α^* را به‌دست آورده و در رابطه‌های (II) جایگزین می‌کنیم.

$$\sum \sqrt{\frac{h_i D_j}{2\left(A_j + \alpha^*\right)}} = \ell \qquad \text{(I)}$$

$$Q_j^* = \sqrt{\frac{2D_j\left(A_j + \alpha^*\right)}{h_j}} \qquad \text{(II)}$$

تذکر: مانند مدل‌های محدودیت‌دار ذکر شده، در صورتی که بعد ازمحاسبات متوجه شویم که $Q_{\omega j}$ ها محدودیت را ارضا نمی‌کنند، گزینه‌ای جواب مسئله است که محدودیت را مساوی می‌کند.

نکته: برخلاف دو مدل گذشته در صورتی که $Q_{\omega j}$ها محدودیت را ارضا نکنند، جواب‌های بهینه به‌دست آمده الزاماً از $Q_{\omega j}$ ها بزرگتر خواهند بود $\left(Q_j^* > Q_{\omega j}\right)$

۵-۷- مدل چند محصولی در حالت الزام سفارش همزمان محصولات

فرضیات مدل مانند مدل چندمحصولی ساده است با این تفاوت که محصولات باید با هم سفارش داده شوند. در این صورت مساله شرط یکسان بودن سیکل بهینه تمامی محصولات به مساله تحمیل خواهد شد.

$$\forall_j \quad T_j = T = \frac{Q_j}{T_j}$$

بنابراین تابع هدف مدل به صورت زیر است:

$$\min Z = \sum\left(\frac{D_j A_j}{Q_j} + \frac{h_j Q_j}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad K(T) = \frac{\sum A_j}{T} + \frac{T}{2}\sum h_j D_j$$

و T^* از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\frac{dK(t)}{dT} = 0 \quad \Rightarrow \quad T^* = \sqrt{\frac{2\sum A_j}{\sum h_j D_j}}$$

و Q_j^* از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

$$Q_j^* = T^* D_j$$

و در انتها هزینه‌ها را محاسبه می‌نماییم.

$$k(T^*) = \sqrt{2\sum A_j \sum h_j D_j}$$

مثال: دو محصول a و b از یک فروشنده خریداری می‌شوند. این دو محصول همیشه با هم سفارش داده می‌شوند و هزینه ثابت سفارش‌دهی (دو محصول با هم) 2500 تومان است. تقاضای محصول a برابر 10000 تن در سال و تقاضای محصول b برابر 20000 تن در سال است. کمبود موجودی برای هیچ یک از این دو محصول جایز نیست. هزینه نگهداری به غیر از هزینه فضای انبار برای هر واحد محصول a برابر 10 تومان و برای هر واحد محصول b برابر 20 تومان در سال است.

الف:در سه سوال زیر فرض کنید هزینه فضای انبار صفر است.

- مقدار سفارش اقتصادی محصول a برابر است با:

۱) $500\sqrt{20}$ تن　　۲) $500\sqrt{10}$ تن

۳) 15000 تن　　۴) هیچ‌کدام از ارقام فوق نیست.

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\sum A_j = 2500$$
$$D_a = 10000 \quad , \quad h_{1a} = 10$$
$$D_b = 20000 \quad , \quad h_{1b} = 20$$
$$T^* = \sqrt{\frac{2\sum A_j}{\sum h_j D_j}} = \sqrt{\frac{2\times 2500}{10\times 10000 + 20\times 20000}} = 0.1$$
$$\Rightarrow \quad Q_a^* = T^* D_a = 0.1\times 10000 = 1000$$

• تعداد سفارش اقتصادی محصول b برابر است با:

۱) $500\sqrt{20}$ تن
۲) $500\sqrt{10}$ تن
۳) 2000 تن
۴) هیچ‌کدام از ارقام فوق نیست.

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$Q_b^* = T^* D_b = 0.1\times 20000 = 2000$$

• متوسط مجموع هزینه‌های نگهداری و سفارش‌دهی دو محصول در سال در حالت بهینه برابر است با:

۱) $10000\sqrt{20}$
۲) $10000\sqrt{20}$
۳) 50000
۴) هیچ‌کدام از ارقام فوق نیست.

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$K^* = \sqrt{2\sum A_j \sum h_j D_j} = \frac{2\sum A_j}{T^*} = \frac{2\times 2500}{0.1} = 50000$$

ب: در سه سوال زیر فرض کنید هزینه فضای انبار که بر اساس حداکثر موجودی محاسبه می‌گردد برای هر واحد محصول بدون توجه به نوع محصول برابر 10 تومان در سال است.

• تعداد سفارش اقتصادی محصول a برابر است با:

۱) $\frac{5000}{\sqrt{55}}$
۲) $5000\sqrt{\frac{2}{15}}$
۳) $5000\sqrt{\frac{1}{10}}$
۴) هیچ‌کدام از ارقام فوق نیست.

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$h_2 = 10$ (بر حسب حداکثر موجودی)

$$\Rightarrow \quad h_a = h_{1a} + 2h_2 = 10 + 2\times 10 = 30$$
$$h_b = h_{1b} + 2h_2 = 20 + 2\times 10 = 40$$
$$T^* = \sqrt{\frac{2\sum A_j}{\sum h_j D_j}} = \sqrt{\frac{2\times 2500}{30\times 10000 + 40\times 20000}} = \frac{1}{\sqrt{220}}$$
$$Q_a^* = T^* D_a = \sqrt{\frac{1}{220}}\times 10000 = \frac{5000}{\sqrt{55}}$$

• تعداد سفارش اقتصادی محصول b برابر است با:

۱) $1000\sqrt{10}$ ۲) $\frac{1000}{\sqrt{30}}$ ۳) $\frac{500}{\sqrt{15}}$ ۴) هیچ‌کدام

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$Q_b^* = T^* D_b = \sqrt{\frac{1}{220}} \times 20000 = \frac{10000}{\sqrt{55}}$$

• متوسط مجموع هزینه‌های نگهداری و سفارش‌دهی دو محصول در سال برابر است با:

۱) $10000\left(\sqrt{15+4\sqrt{10}}\right)$ ۲) $100000\left(\sqrt{10+30}\right)$

۳) $5000\sqrt{220}$ ۴) هیچ‌کدام

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$K^* = \frac{2\sum A_j}{T^*} = 5000\sqrt{220}$$

۵-۸- مدل چندمحصولی در حالت الزام سفارش همزمان و محدودیت تعداد دفعات سفارش در سال

فرضیات مدل مانند مدل چندمحصولی در حالت الزام سفارش همزمان با اضافه کردن این محدودیت که حداکثر تعداد دفعات سفارش در سال برابر ℓ است.

ℓ: حداکثر تعداد دفعات سفارش در سال

مانند مدل قبل شرط یکسان بودن سیکل بهینه تمامی محصولات را خواهیم داشت.

$$\forall_j \quad T_j = T = \frac{Q_j}{T_j}$$

و محدودیت به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{D_j}{Q_j} = \frac{1}{T_j} = \frac{1}{T} \le \ell$$

الگوریتم حل مدل به صورت زیر خواهد بود:

مقدار T_0 و T_{min} از رابطه‌های زیر حساب می‌کنیم:

$$T_0 = \sqrt{\frac{2\sum A_j}{\sum h_j D_j}}$$

$$T_{min} = \frac{1}{\ell}$$

و T^* حداکثر دو مقدار فوق خواهد بود

$$T^* = \max\left\{T_0, T_{min}\right\}$$

و Q_j^* از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$Q_j^* = T^* D_j$$

مثال: مصرف سالیانه دو کالا به ترتیب 10000 و 12000 واحد و هزینه نگهداری هر واحد هر یک از دو کا لا 2 تومان در سال می‌باشد. این دوکالا الزاماً باید با همدیگر سفارش داده شوند. هزینه سفارش‌دهی این دو کالا مجموعاً 1000 تومان است. بیش از 5 بار سفارش‌دهی در سال مجاز نیست. مقدار سفارش اقتصادی هر یک از این دو کالا برابر است با:

۱) 2132 و 2559 ۲) 3162 و 3464 ۳) 2000 و 2400 ۴) 2236 و 2449

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$D_1=10000 \quad , \quad D_2=12000 \quad , \quad h_1=h_2=2 \quad , \quad \sum A_j=1000 \quad , \quad \ell=5$$

$$T_0=\sqrt{\frac{2\sum A_j}{\sum h_j D_j}}=\sqrt{\frac{2\times 1000}{2\times 10000+2\times 12000}}=0.2132$$

$$T_{min}=\frac{1}{\ell}=\frac{1}{5}=0.2$$

$$T^0=\max\{0.2, 0.2132\}=0.2132=T_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_1^*=T^*D_1=0.2132\times 10000=2132 \\ Q_2^*=T^*D_2=0.2132\times 12000=2559 \end{cases}$$

مثال: در مدل تولید چندمحصولی توسط یک منبع تولید همراه با زمان آماده‌سازی برای هر بار تولید محصول، مسئله وقتی جواب دارد که:

۱) کسر بیکاری ماشین بزرگتر یا مساوی صفر باشد.

۲) زمان بیکاری ماشین بزرگتر از مجموع زمان‌های آماده‌سازی می‌باشد.

۳) نسبت مجموع زمان‌های آماده‌سازی به کسر بیکاری ماشین بزرگتر از یک باشد.

۴) نسبت مجموع زمان‌های آماده‌سازی به کسر بیکاری کوچکتر از یک باشد.

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

همان‌طور که در مدل چندمحصولی تولیدی ذکر گردید تنها شرط جواب‌دار بودن مسئله این است که $\sum \frac{D_j}{P_j}\le 1$ باشد یا $1-\sum \frac{D_j}{P_j}\ge 0$ باشد که همان کسر بیکاری ماشین است.

نکته: در صورتی که در یک مدل چند محصولی بیش از یک محدودیت ارایه گردد برای حل مدل باید یک محدودیت را در نظر بگیریم و جواب‌های مدل را به‌دست آوریم، چنان‌چه جواب حاصل محدودیت حذف شده را ارضا کند جواب مدل است. در غیر این صورت گزینه‌ای جواب مدل است که محدودیت در نظر گرفته شده را مساوی کند.

مثال: در فروشگاهی حداکثر مساحت قابل استفاده برای انبار کردن دو محصول a و b برابر 150 متر مربع است. به‌علاوه این دو محصول در یک زمان و با یکدیگر سفارش داده می‌شوند و زمان تحویل برای هر دو یکی است. ارقام مربوط به این دو محصول در جدول زیر آمده است.

b	a	محصول
12000	10000	مصرف سالیانه به واحد
350	150	هزینه هر بار سفارش به تومان
5	4	هزینه نگهداری هر واحد در سال به تومان
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{10}$	سطح هر واحد محصول به متر مربع

مقدار اقتصادی هر بار سفارش از محصول a و محصول b به‌ترتیب کدام یک از موارد زیر است؟

۱) 900 و 750 ۲) 1250 و 900 ۳) 1450 و 1150 ۴) 1600 و 1200

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\sum f_i Q_i = \frac{1}{10}Q_1 + \frac{1}{12}Q_2 \not\leq 150$$

$$\forall_j = T_j = T \text{ یا } \frac{Q_1}{D_1} = \frac{Q_2}{D_2}$$

ابتدا تنها محدودیت الزام سفارش همزمان را در نظر می‌گیریم.

$$T^* = \sqrt{\frac{2\sum A_i}{\sum h_i D_i}} = \sqrt{\frac{2(150+350)}{4\times10000+5\times12000}} = \sqrt{\frac{1000}{100\times1000}} = 0.1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_1 = 0.1\times1000 = 1000 \\ Q_2 = 0.1\times12000 = 1200 \end{cases}$$

سپس محدودیت فضا را چک می‌کنیم:

$$\frac{1}{10}\times1000 + \frac{1}{12}\times12000 = 200 \not\leq 150$$

پس گزینه‌ای جواب مسئله است که محدودیت فضا را مساوی کند.

گزینه ۴: $\frac{1}{10}\times1600 + \frac{1}{12}\times1200 = 260 \neq 150$

گزینه ۳: $\frac{1}{10}\times1450 + \frac{1}{12}\times1150 = 241 \neq 150$

گزینه ۲: $\frac{1}{10}\times1250 + \frac{1}{12}\times900 = 200 \neq 150$

گزینه ۱: $\frac{1}{10}\times900 + \frac{1}{12}\times750 = 152.5 \simeq 150$

پس گزینه صحیح، گزینه ۱ می‌باشد.

نکته: در صورتی که در مدلی محدودیت‌دار، محدودیتی غیر از مدل‌های عنوان شده برای مدلی تک‌محصولی ارایه گردد، ابتدا محدودیت را بر اساس متغیر خواسته شده توسط مسئله می‌نویسیم و بدون در نظر گرفتن محدودیت مقدار بهینه متغیر را به‌دست می‌آوریم. در صورتی که محدودیت را رعایت کرد، جواب مسئله است. در غیر این صورت مقداری که محدودیت را مساوی کند جواب مساله می‌باشد.

مثال: تولیدکننده‌ای محصولی تولید می‌کند که از این نقطه‌نظر که محصول در انبار تحت تاثیر فاسد شدن بوده برای شرکت گران می‌باشد. او احساس می‌کند که ماکزیمم زمانی که می‌تواند هر واحد از محصول را به‌صورت موجودی نگه‌دارد، دو هفته می‌باشد. او محصول را به‌صورت انباشته تولید می‌کند و فرآیند تولیدی به نحوی است که کل انباشته در یک لحظه تکمیل شده و به موجودی اضافه می‌شود نرخ تقاضای سالیانه 5200 واحد، هزینه راه‌اندازی تولید 400 تومان، نرخ هزینه نگهداری موجودی 20% هزینه متغیر هر واحد محصول 100 تومان بوده و هیچ کمبود موجودی مجاز نیست. اندازه انباشته اقتصادی را به توجه به محدودیت عمر نگهداری محصولات در انبار محاسبه کنید. سال را 50 هفته در نظر بگیرید.

۱) 258 واحد ۲) 235 واحد ۳) 244 واحد ۴) 208 واحد

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$D=5200 \quad , \quad i=0.2 \quad , \quad A=400 \quad , \quad C=100$

محدودیت موردنظر هفته $T\leq 2$ می‌باشد ابتدا محدودیت را بر اساس متغیر خواسته شده یعنی Q می‌نویسیم:

$$T\leq 2 \text{ هفته} \Rightarrow T\leq \frac{2}{50} \text{ سال} \Rightarrow \frac{Q}{D}\leq\frac{2}{50} \Rightarrow Q\leq 208$$

مشاهده می‌شود تنها گزینه ۴ می‌تواند صحیح باشد.

مثال: با دستگاهی می‌توان محصول را با نرخ (سرعت) سالیانه 10000 واحد در سال تولید کرد. سرعت تقاضای سالیانه برای این محصول 5000 واحد است. هزینه آماده‌سازی هر بار این دستگاه برای تولید برابر 200 تومان، هزینه نگهداری هر واحد این محصول در سال 100 تومان و هزینه مواد برای هر واحد محصول 50 تومان است. اگر قرار باشد حداکثر سرمایه درگیر در موجودی این محصول برابر 2000 تومان باشد، آن‌گاه مقدار تولید بهینه این محصول به کدام‌یک از مقادیر زیر نزدیک‌تر است؟

۱) 40 واحد ۲) 80 واحد ۳) 100 واحد ۴) 200 واحد

حل: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$P=10000 \quad , \quad D=5000 \quad , \quad A=200 \quad , \quad h=100 \quad , \quad C=50 \quad , \quad X=2000$

$$CI_{max}\leq 2000 \Rightarrow CQ\left(1-\frac{D}{P}\right)\leq 2000 \Rightarrow 50\times Q\left(1-\frac{5000}{10000}\right)\leq 2000$$

$$\Rightarrow Q\leq 80$$

$$Q^*=\sqrt{\frac{2DA}{h\left(1-\frac{D}{P}\right)}}=\sqrt{\frac{2\times 500\times 200}{100\left(1-\frac{5000}{10000}\right)}}=200\nleq 80$$

بنابراین $Q^*=80$ می‌باشد.

مثال: دو محصول A و B با هم سفارش داده می‌شوند (فروشنده هر دو محصول یکی است) و مقدار تقاضای سالیانه برای محصول A برابر 500 واحد و محصول B برابر 1500 واحد است. اگر هزینه نگهداری هر واحد محصول A و B سالیانه 10 تومان و هزینه هر بار سفارش‌دهی 100 تومان باشد. تعداد دفعات بهینه سفارش در سال چقدر است؟

۱) 6 ۲) 8 ۳) 10 ۴) 12

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$D_A=500 \quad , \quad D_B=1500 \quad , \quad h_A=10 \quad , \quad h_B=10 \quad , \quad \sum A_j=100$

$$T^*=\sqrt{\frac{2\sum A_j}{\sum h_j D_j}}=\sqrt{\frac{2\times 100}{10\times 2000}}=0.1 \Rightarrow n=\frac{1}{T^*}=\frac{1}{0.1}=10$$

مثال: اطلاعات مربوط به دو نوع مواد اولیه در یک شرکت طبق جدول زیر می‌باشد. این شرکت جهت تولید این مواد از یک ماشین استفاده می‌نماید. مقدار تولید اقتصادی هر یک از مواد I و II برابر است با:

	I	II
مصرف سالیانه	6000	1800
تولید سالیانه	40000	36000
هزینه آماده‌سازی ماشین	500	700
هزینه نگهداری هر واحد در سال	8	6

۱) 960 و 2880 ۲) 866 و 2050 ۳) 1000 و 3000 ۴) 1500 و 1500

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$T^* = \sqrt{\frac{2\sum A_j}{\sum h_j D_j\left(1-\frac{D_j}{P_j}\right)}} = \sqrt{\frac{2(500+700)}{8\times 6000\left(1-\frac{6000}{40000}\right)+6\times 18000\left(1-\frac{18000}{36000}\right)}} = \sqrt{\frac{2400}{14800}} \simeq 0.16$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_1^* = T^* D_1 = 0.16\times 6000 = 960 \\ Q_2^* = T^* D_2 = 0.16\times 18000 = 2880 \end{cases}$$

مثال: مصرف سالیانه ماده اولیه شرکتی 4000 واحد در سال است. قیمت خرید هر واحد این ماده اولیه 50 تومان و نرخ هزینه نگهداری در این شرکت 20 درصد در سال است. هزینه هر بار سفارش دهی این ماده اولیه 200 تومان است. اگر حداکثر مقدار سرمایه درگیر در موجودی این ماده اولیه نبایستی از 10000 تومان تجاوز کند، آنگاه مقدار سفارش اقتصادی چقدر است؟

۱) 400 واحد ۲) 300 واحد ۳) 200 واحد ۴) 100 واحد

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$D = 4000 \quad , \quad C = 50 \quad , \quad i = 0.2 \quad , \quad A = 200$

$h = i.c = 0.2 \times 5 = 10$

$CQ \le 10000 \Rightarrow 50Q \le 10\,000 \Rightarrow Q \le 200$

$$Q_\omega = \sqrt{\frac{2\times 4000\times 200}{10}} = 400 \not\le 200$$

بنابراین $Q^* = 200$ واحد می‌باشد.

مثال: در یک سیستم کنترل موجودی، دو قطعه A و B از یک فروشنده تامین و لذا با هم سفارش داده می‌شوند و فقط یک هزینه سفارش برای هر دو آنها تعلق می‌گیرد (C) برای قطعه A محدودیت تعداد سفارش در هر سال (n) وجود دارد ولی برای قطعه B محدودیتی مطرح نیست. در حالی‌که این دو نقطه همواره با هم سفارش داده شود، با توجه به داده‌های زیر مقدار کل هزینه متغیر سالانه (هزینه موجودی‌ها) را برای این سیستم موجودی محاسبه نموده و مشخص کنید که به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟

($n = 10$ / واحد پولی $C = 1000$ / $H_A = H_B = 200$ هزینه نگهداری/واحد در سال $R_A = 6000$ تقاضا/ واحد در سال $R_B = 4000$ تقاضا)

۱) 100000 ۲) 110000 ۳) 120000 ۴) 200000

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

هنگامی که دو قطعه الزام سفارش هم زمان دارند و یکی از آنها محدودیت تعداد سفارش دارد بنابراین برای هر دو آنها محدودیت تعداد سفارش وجود دارد.

$$T_{min} = 0.1$$

$$T_o = \sqrt{\frac{2\Sigma A_j}{\Sigma h_j D_j}} = \sqrt{\frac{2 \times 1000}{200 \times 6000 + 200 \times 4000}} = 0.032$$

$$T^* = \max\{0.1, 0.032\} = 0.1 = T_{min} \Rightarrow \begin{cases} Q_a = 0.1 \times 6000 = 600 \\ Q_b = 0.1 \times 4000 = 400 \end{cases}$$

$$k = \frac{\Sigma A_j}{T} + \frac{\Sigma h_j Q_j}{2} = \frac{1000}{0.1} + \frac{200 \times 600}{2} + \frac{200 \times 400}{2} = 110000$$

۶ـ مدل‌های تخفیف

تخفیف یعنی قیمت هر واحد کالا (C) با افزایش مقدار سفارش کاهش می‌یابد.
تخفیف دو نوع کلی و نموی (افزایشی) دارد:

- **تخفیف کلی:** در این حالت تخفیف بر کل کالاها به صورت یکسان اعمال می‌شود. به عبارت دیگر در این حالت تمام واحدهای خریداری شده با یک قیمت واحد محصول خریداری می‌شوند.
- **تخفیف نموی یا افزایشی:** در این حالت تخفیف بر هر محدوده به صورت جداگانه اعمال می‌شود به عبارت دیگر در این حالت تمامی واحدهای خریداری شده با یک قیمت واحد محصول خریداری نمی‌شوند و تخفیف بر اساس مقادیر داخل محدوده تخفیف برای هر واحد محصول تعریف می‌شود.

کل هزینه خرید دو نوع تخفیف به صورت جدول زیر می‌باشد:

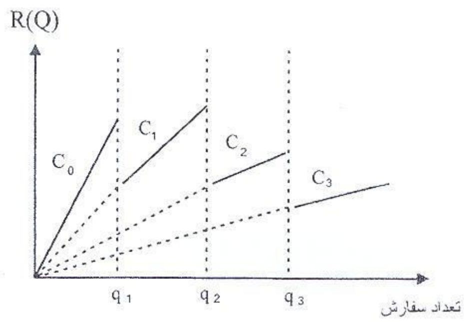
شماره محدوده	محدوده تخفیف	قیمت واحد کالا	کل هزینه خرید (تخفیف کلی)	کل هزینه خرید (تخفیف نموی)
0	$q_0 \le Q < q_1$	C_0	C_0Q	CoQ
1	$q_1 \le Q \le q_2$	C_1	C_1Q	$Co(q_1-q_0)+C_1(Q-q_1)$
2	$q_2 \le Q < q_3$	C_2	C_2Q	$Co(q_1-q_0)+C_1(q_2-q_1)+C_2(Q-q_2)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
j	$q_j \le Q < q_{j+1}$	C_j	C_jQ	$\sum_{i=1}^{j} C_{i-1}(q_i-q_{i-1})+C_j(Q-q_j)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	$q_n \le Q$	C_n	C_nQ	$\sum_{i=1}^{n} C_{i-1}(q_i-q_{i-1})+C_n(Q-q_n)$

همان‌طور که ذکر شد در تخفیف با افزایش مقدار سفارش با قیمت هر واحد کالا کاهش می‌یابد یعنی:

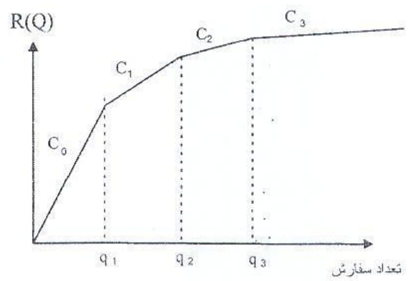
$$C_0 > C_1 > \dots > C_n$$

کل هزینه خریدارا با $R(Q)$ نشان می‌دهند. و به q_j ها نقاط تخفیف یا نقاط شکست یا نقاط تغییر قیمت می‌گویند.

نمودار هزینه خرید برای تخفیف کلی به شکل زیر است. این نمودار به صورت گسسته می‌باشد و امتداد تمام خطوط از مبدأ مختصات می‌گذرد. شیب خطوط نیز برای قیمت خرید است.



نمودار هزینه خرید تخفیف نموی به صورت پیوسته است. این نمودار در شکل زیر مشخص گشته است. شیب خطوط برابر قیمت خرید است.



نکته: اگر قیمت‌ها یکسان باشد، به ازای یک Q مشخص، هزینه خرید در تخفیف نموی بیشتر از تخفیف کلی است.

۶ـ ۱ـ مدل تخفیف کل

فرضیات مدل مانند مدل EOQ است، با این تفاوت که تخفیف از نوع کلی وجود دارد.

هدف مدل تعیین مقدار سفارش بهینه (Q^*) و نقطه سفارش بهینه با کمینه کردن هزینه‌هاست.

همان‌طور که هزینه خرید در هر محدوده متفاوت است، تابع کل هزینه‌ی سالیانه نیز برای هر محدوده متفاوت و به صورت زیر است.

$$k_j(Q) = \frac{DA}{Q} + \frac{h_j Q}{2} + C_j D \,,\ h_j = iC_j + \omega \qquad q_i \le q_{j+1}$$

بنابراین مانند هزینه خرید نمودار کل هزینه‌ی سالیانه سیستم برای مدل تخفیف کلی نیز گسسته می‌باشد.