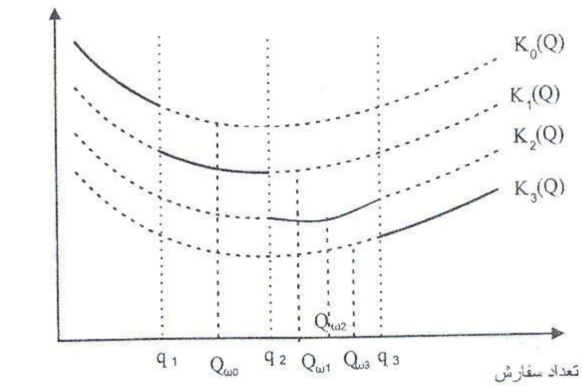


بهترین نقطه تابع محدوده j ام با مشتق‌گیری از k به دست می‌آید و به صورت زیر است:

$$Q_{\omega j} = \sqrt{\frac{2QA}{h_j}}$$

اما ممکن است این نقطه داخل محدوده خود نباشد بنابراین بهترین نقطه قابل قبول محدوده j ام به صورت زیر تعیین می‌گردد.

- اگر $Q_{\omega j}$ از نقطه تخفیف انتهایی محدوده (q_{j+1}) بیشتر باشد، بهترین نقطه قابل قبول محدودهٔ j ام (Q_j^*) برابر q_{j+1} می‌باشد.

$$q_{j+1} < Q_{\omega j} \Rightarrow Q_j^* = q_{j+1}$$

- اگر $Q_{\omega j}$ بین نقاط تخفیف ابتدایی و انتهایی محدوده خود باشد، بهترین نقطه قابل قبول محدوده برای $Q_{\omega j}$ می‌باشد.

$$q_j \le Q_{\omega j} < q_{j+1} \Rightarrow Q_j^* = Q_{\omega j}$$

- اگر $Q_{\omega j}$ از نقطه تخفیف ابتدایی محدوده (q_j) کمتر باشد، بهترین نقطه قابل قبول محدوده j ام (Q_j^*) برابر q_j می‌باشد.

$$Q_{\omega j} < q_j \Rightarrow Q_j^* = q_j$$

بنابراین الگوریتم حل مدل به صورت زیر خواهد بود.

از محدوده n ام (محدوده آخر) ابتدا $Q_{\omega j}$ و سپس Q_j^* را برای محدوده محاسبه می‌کنیم. این کار را تا زمانی ادامه می‌دهیم که برای اولین بار $Q_{\omega j}$ داخل محدوده قابل قبول تخفیف بیافتد $(Q_j^* = Q_{\omega j})$ در این جا متوقف می‌شویم و برای نقاط قابل قبول بهینه بدست آمده، $k_j(Q_j^*)$ را محاسبه می‌کنیم، کمترین هزینه، هزینه بهینه سالیانه و نقطه متناظر با آن نقطه بهینه مدل است.

$$K(Q^*) = \min K_j(Q_j^*)$$

تذکر : علت متوقف شدن در آنجا که برای اولین بار $Q_{\omega j}$ داخل محدوده قابل قبول تخفیف خود می‌افتد این است که طی قضیه‌ای ثابت می‌گردد که هزینه سالیانه زمانی که $Q_j^* = Q_{\omega j}$ از تمام هزینه‌های Q_i^*های سمت چپ خود (محدوده‌ها با نقاط شکست کوچک‌تر) کمتر است و نیازی به محاسبه هزینه آنها نمی‌باشد.

بنابراین نقطه بهینه در مدل تخفیف کلی تنها می‌تواند نقطه ویلسون و نقاط تغییر قیمت درست است نقطه ویلسون باشد.

نکته: روابط زیر برای $Q_{\omega j}$ و $K(Q_{\omega j})$ های تمام محدوده‌ها برقرار است.

$$Q_{\omega_0} \le Q_{\omega_1} \le Q_{\omega_2} \le \dots \le Q_{\omega_n}$$

$$K_0(Q_{\omega_0}) > K_1(Q_{\omega_1}) > K_2(Q_{\omega_2}) > \dots > K_n(Q_{\omega_n})$$

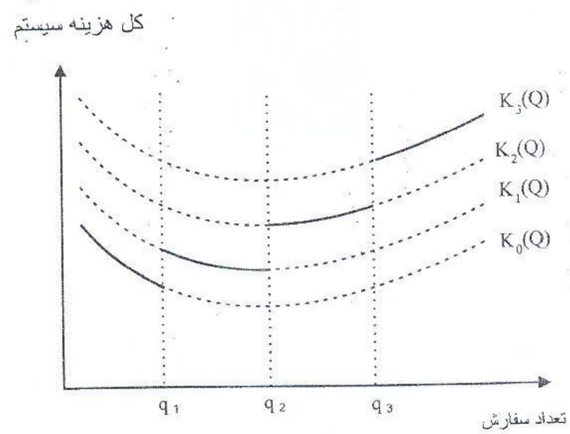
نکته: همان‌طور که ذکر گردید. مجموعه قابل بررسی نقاط بهینه برای به دست آوردن Q^* نقطه ویلسون و نقاط تغییر قیمت بعد از آن است یعنی:

$$Q^* = \{Q_{\omega_2}, q_3, q_4 \dots\}$$

نکته: اگر کل هزینه نگهداری سالیانه را TCH و کل هزینه سفارش‌دهی سالیانه را TCS بنامیم. در نقطه Q_{ω_2}، $TCS = TCH$ و در نقاط ... , q_2, q_3 از آنجا که بزرگتر از $Q_{\omega i}$ مربوط به خود هستند $TCH > TCS$ است پس می‌توان گفت در نقطه بهینه مدل تخفیف رابطه بین هزینه نگهداری و هزینه سفارش‌دهی به صورت زیر است:

$$TCH \ge TCS$$

نکته: در یک مدل خلاف تخفیف کلی اگر به ازای افزایش مقدار سفارش، قیمت واحد کالا نیز افزایش یابد یعنی $C_0 < C_1 < C_2 < \dots < C_n$ روش حل مدل مشابه تخفیف کلی است، با این تفاوت که از محدوده اول شروع می‌کنیم و Q_j^* را تا آنجا که $Q_j^* = Q_{\omega j}$ شود ادامه می‌دهیم و.... در این حالت ترتیب نمودارها برعکس می‌گردد یعنی نمودار هزینه کل به صورت زیر خواهد بود:



در این حالت مجموعه نقاط بهینه قابل بررسی، نقطه ویلسون و نقاط تغیر قیمت در سمت چپ نقطه ویلسون است یعنی

$$Q^* = \{Q_{\omega_2}, q_2, q_1\}$$

همچنین رابطه بین هزینه نگهداری و هزینه سفارش‌دهی سالیانه به صورت زیر است.

$$TCH \le TCS$$

نکته: در صورتی که تخفیف کلی برای سایر پارامترهای مدل مثل h, A, ... باشد، دقیقاً مانند روش حل مدل تخفیف کلی عمل می‌کنیم با این تفاوت که k_j, Q_{ω_j} را بر اساس پارامتر تغییر یافته محاسبه می‌کنیم.

مثال: قیمت خرید هر واحد کالایی برابر 2 تومان و میزان تقاضای سالیانه آن 1000 واحد می‌باشد. هزینه نگهداری سالیانه هر واحد کالا 2 تومان بوده و هزینه انجام یک سفارش وابسته به مقدار سفارش و چنین است:

10 تومان اگر کمتر از 110 واحد سفارش داده شود و 8 تومان اگر بیش از 110 واحد سفارش شود. اندازه بهینه سفارش‌دهی چند واحد خواهد بود؟

۱) 110   ۲) 100   ۳) 90   ۴) 89

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$C = 2,\ D = 1000,\ h = 2$

شماره محدوده	محدوده	A
0	$Q < 110$	10
1	$Q > 110$	8

$$Q_{\omega_1} = \sqrt{\frac{2 \times 1000 \times 8}{2}} = 89.5 \not> 110 \Rightarrow Q_1^* = 110$$

$$Q_{\omega_0} = \sqrt{\frac{2 \times 1000 \times 10}{2}} = 100 < 110 \Rightarrow Q_0^* = 100$$

$$k\left(Q_1^*\right) = \frac{DA_1}{Q} + h\frac{Q_1}{C} = \frac{1000 \times 8}{110} + \frac{2 \times 110}{2} = 182$$

$$K\left(Q_0^*\right) = \sqrt{2DA_0 h} = \sqrt{2 \times 100 \times 10 \times 2} = 200$$

از ناحیه آخر شروع می‌کنیم تا به اولین Qw برسیم Q های کوچکتر از Qw نمی‌توانند در محاسبات مقادیر بهینه Q های بدست آمده تا این مرحله را در تابع هزینه قرار داده و کمترین TC را بدست می‌آوریم.

بنابراین $Q^* = 110$ می‌باشد که کمترین هزینه را داراست.

مثال: برای خرید یک کالا، فروشنده در مقابل مقادیر هر بار سفارش (q)، قیمت هر واحد را به شرح زیر اعلام نموده است.

قیمت واحد	q
510	$0 \le q \le 100$
400	$100 \le q \le 300$
390	$300 \le q$

با توجه به نرخ تقاضای کالا و هزینه سفارش آن، نقطه ویلسون معتبر منحنی هزینه کل موجودی‌ها برابر با 250 واحد کالا محاسبه شده است. مقدار بهینه (اقتصادی EOQ) برای سفارش این کالا مطابق با کدام گزینه می‌باشد؟

۱) 250 یا 300   ۲) دقیقاً 250

۳) 250 یا 200 یا 100   ۴) هر مقداری از 250 به پایین

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

از آنجا که $Q_\omega = 250$ در محدوده دوم قرار دارد بر اساس الگوریتم حل ذکر شده، مجموعه نقاط بهینه قابل بررسی 250 و 300 است و از آنجا که اطلاعات کافی برای محاسبه هزینه این دو نقطه در دست نیست تنها می‌تواند گفت که نقطه بهینه 250 یا 300 می‌باشد.

مثال: برای خرید یک نوع کالا، فروشنده به ازا مقادیر مختلف سفارش تخفیفی قائل نمی‌شود، ولی شرکت حمل و نقل هزینه‌های حمل کالا را به صورت زیر پیشنهاد نموده است:

مقدار	واحد هزینه حمل $\left(\frac{\text{ریال}}{\text{کیلو}}\right)$
$0 < Q < 10000$	2.5
$Q \geq 10000$	1.5

هزینه هر بار سفارش کالا 400 ریال و واحد هزینه نگهداری (انبارداری) کالا $= 0.1 \frac{\text{ریال}}{\text{کیلو - سال}}$ و مصرف سالیانه کالا 500 کیلو است.

در این شرایط مقدار اقتصادی هر بار سفارش کالا برابر است با:

۱) 2000 ۲) 1000 ۳) 12000 ۴) 500

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$D = 500\ ,\ A = 400\ ,\ h = 0.1$$

$$Q_{\omega} = \sqrt{\frac{2 \times D \times A}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times 500 \times 400}{0.1}} = 2000$$

Q_{ω} در محدوده اول است بنابراین

$$Q_1^* = 2000$$

$$Q_2^* = 10000$$

$$K\left(Q_2^*\right) = \frac{DA}{Q_2} + \frac{hQ_2}{2} + C_2D = \frac{500 \times 400}{2000} + \frac{0.1 \times 2000}{2} + 1.5 \times 500 = 1275$$

$$K\left(Q_1^*\right) = \sqrt{2DAh} + C_1D = \sqrt{2 \times 500 \times 4 \times 0.1} + 2.5 \times 500 = 1450$$

$1450 > 1275$ است بنابراین $Q_2^* = 10000$ که کمترین هزینه را دارد، به عنوان مقدار اقتصادی هر بار سفارش در نظر گرفته می‌شود.

۶ـ۲ـ مدل تخفیف نموی یا افزایشی

فرضیات مدل مانند مدل EOQ است با این تفاوت که تخفیف از نوع نموی وجود دارد.

هدف مدل تعیین مقدار سفارش بهینه (Q^*) و نقطه سفارش بهینه با کمینه کردن هزینه‌هاست.

همان‌طور که ذکر شد تابع کل هزینه سالیانه در مدل‌های تخفیف برای هر محدوده متفاوت است و در مدل تخفیف نموی به صورت زیر است.

$$k_j(Q) = \frac{DA}{Q} + h_j\frac{Q}{2} + \bar{C}D\ ,\ h_j = i\bar{C} \qquad q_j \leq A < q_{j+1}$$

که در آن $\bar{C} = \frac{R(Q)}{Q}$ متوسط قیمت خرید است و

$$R(Q) = \sum_{i=1}^{j} C_{i-1}\left(q_i - q_{i-1}\right) + C_j\left(Q - q_j\right)$$

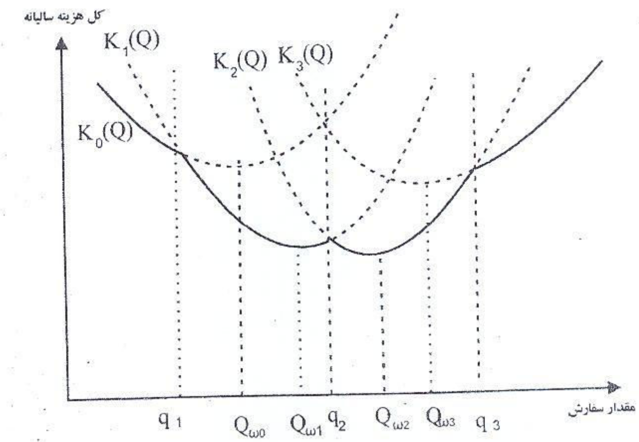
برابر کل هزینه خرید Q کالاست. به همین صورت می‌توان کل هزینه خرید تا نقطهٔ شکست q_j را به صورت $R\left(q_j\right)$ را به صورت $R\left(q_j\right)$ و با استفاده از رابطه بالا محاسبه کرد. بنابراین رابطه کل هزینه سالیانه برای محدوده j ام به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$K_j(Q)=\frac{D}{Q}\left(A+R\left(q_j\right)-C_j q_j\right)+iC_j\frac{Q}{2}+C_jD+\frac{iR\left(q_j\right)}{2}-\frac{iC_jq_j}{2}$$

بر اساس این تابع و با مشتق‌گیری از آن مقدار بهینه هر محدوده به صورت زیر خواهد بود:

$$Q_{\omega j}=\sqrt{\frac{2D\left(A+R\left(q_j\right)-C_jq_j\right)}{iC_j}}$$

نمودار هزینه کل سالیانه مدل تخفیف نموی باشد نمودار هزینه خرید آن پیوسته است و به صورت شکل زیر خواهد بود.



نکته: ثابت می‌گردد که نقاط تخفیف هیچ‌گاه نمی‌توانند نقطه بهینه باشند بنابراین بهینه از بین $Q_{\omega j}$ هایی خواهد بود که در محدوده خود قرار گیرند.

بدین اساس الگوریتم حل مدل به صورت زیر خواهد بود:

برای تمامی محدوده‌ها Q_{ω_j} را بدست می‌آوریم. هر محدوده‌ای که Q_{ω_j} آن داخل محدوده تخفیف افتد، آن $Q_j^*=Q_{\omega_j}$ می‌گردد. سایر محدوده‌ها نقاط بهینه قابل قبول ندارند. نقاط بهینه قابل قبول بدست آمده را در تابع هزینه مرتبط گذاشته و $k_j\left(Q_j^*\right)$ را بدست می‌آوریم. کمترین هزینه، هزینه بهینه سالیانه Q_j^* متناظر با آن، Q_j^* بهینه است.

مثال: در یک مدل تخفیف نموی (Incerementel Discount) اگر مقدار خرید مساوی و یا کمتر از q_1 باشد هزینه هر واحد C_0 و اگر مقدار خرید بیشتر از q باشد، هزینه هر واحد برای واحدهای اضافه بر q_1 برابر C_1 $\left(C_1<C_0\right)$ است. مقدار بهینه سفارش را با Q_0 نشان دهید. در این صورت به نظر شما کدام‌یک از عبارات زیر صحیح است؟

۱) Q_0 همیشه کوچک‌تر از q_1است.

۲) Q_0 بزرگتر از q_1 است.

۳) Q_0 نمی‌تواند برابر q_1 باشد.

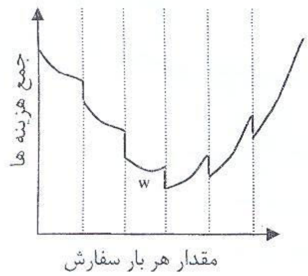
۴) برای تعیین Q_0 باید هزینه سیستم در نقطه q_1 محاسبه شود.

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

همان‌طور که ذکر شد نقطه بهینه تخفیف نموی (Q_0) نمی‌تواند برابر نقاط تخفیف (مانند q_1) گردد.

مهم

مثال: در صورتی‌که فروشنده حاضر باشد با زیاد شدن مقدار هر بار سفارش، تخفیفی در قیمت واحد کالا قائل شود، آنگاه منحنی جمع هزینه موجودی‌ها در سال (شامل هزینه سفارشات + هزینه نگهداری + هزینه خرید) مطابق نمودار خواهد بود. نقطه W را نقطه ویلسون می‌نماییم. برای یافتن مقدار اقتصادی هر بار سفارش (EOQ) باید مقدار جمع هزینه موجودی‌ها را در نقاط زیر حساب نموده و با یکدیگر مقایسه نمود:



۱) فقط نقطه ویلسون

۲) نقطه ویلسون و نقاط تغییر قیمت در سمت چپ نقطه ویلسون

۳) نقطه ویلسون و نقاط تغییر قیمت در سمت راست نقطه ویلسون

۴) نقطه ویلسون و نقاط تغییر قیمت در سمت راست و چپ نقطه ویلسون

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

از نمودار مشخص است که تخفیف به صورت کلی می‌باشد. بنابراین همان‌طور که ذکر شد نقطه بهینه یکی از نقاط ویلسون و یا نقاط تغییر قیمت در سمت راست نقطه ویلسون است.

مهم

مثال: جهت جلوگیری از احتکار، قیمت کالایی طبق جدول زیر پیشنهاد شده است به طوری‌که $C_1 < C_2 < C_3$ می‌باشد. هزینه نگهداری این کالا مستقل از قیمت است، اگر کل هزینه‌های نگهداری سالیانه را با TC_h کل و هزینه‌های سفارش‌دهی سالیانه را با TC_s نشان دهیم، کدام رابطه را خواهیم داشت:

۱) $TC_h = TC_s$　　۲) $TC_h > TC_s$

۳) $TC_h \neq TC_s$　　۴) $TC_h \leq TC_s$

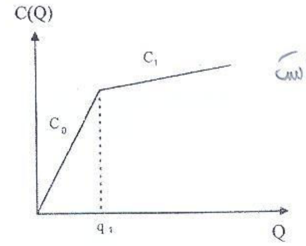
$C_1 > C_2 > C_3 \rightarrow TC_h \geq TC_s$

مقدار سفارش	قیمت هر واحد
$0 - q_1$	C_1
$q_1 - q_2$	C_2
$q_2 - q_3$	C_3

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

این مدل، خلاف مدل تخفیف کلی است یعنی $C_1 < C_2 < C_3$ می‌باشد. بنابراین مجموعه نقاط بهینه نقطه ویلسون و نقاط تخفیف سمت چپ آن (کوچک‌تر از نقطه ویلسون) است پس $TC_h \leq TC_s$ می‌باشد.

مثال: در یک مسأله تخفیف اگر مقدار هر بار خرید برای Q باشد، آنگاه مقدار هزینه مواد در هر بار $C(Q)$ در شکل رسم شده است. اگر قیمت هر واحد مواد را با C نمایش دهیم، و مقدار EOQ را به ازای $C = C_0$ با $Q_\omega(0)$ و به ازای $C = C_1$ با $Q_\omega(1)$ نشان دهیم. فرض کنید $q_1 < Q_\omega(0)$ و نیز $q_1 < Q_\omega(1)$ است. با توجه به این اطلاعات کدام عبارت صحیح است؟



چون $Q_w(1)$ تنها نقطه مورد نظر ماست
پس همان نقطه بهینه است پس نیازی به
محاسبه هزینه سالیانه نیست

۱) برای پیدا کردن مقدار سفارش بهینه به هیچ‌گونه محاسبه هزینه سالیانه نیاز نیست.

۲) برای پیدا کردن مقدار سفارش بهینه باید هزینه سالیانه سیستم در نقطه q_1 محاسبه شود.

۳) برای پیدا کردن مقدار سفارش بهینه باید هزینه سالیانه سیستم در نقطه $Q_\omega(1)$ محاسبه شود.

۴) برای پیدا کردن مقدار سفارش بهینه باید هزینه سالیانه سیستم در نقطه $Q_\omega(0)$ محاسبه شود.

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

شکل نمودار هزینه خرید بیان‌گر این مطلب است که تخفیف از نوع نموی است. بنابراین نقاط بهینه، نقاط ویلسونی هستند که در محدوده تخفیف خود قرار گیرند. $q_1 < Q_\omega(0)$ است بنابراین در محدوده تخفیف خود $(Q < q_1)$ قرار ندارد. $q_1 < Q_\omega(1)$ است یعنی در محدوده تخفیف خود $(Q > q_1)$ قرار دارد و از آنجا که تنها $Q_\omega(1)$ در محدوده تخفیف خود قرار دارد نیازی به محاسبه هزینه سالیانه‌ای نیست و $Q_\omega(1)$ نقطه بهینه مدل است.

newsboy problem

۷ـ مدل احتمالی یک دوره‌ای

این مدل تنها برای یک دوره است بنابراین به مدل درخت کریسمس یا پسرک روزنامه فروش نیز معروف است.

فرضیات مدل:

۱ـ تقاضا احتمالی و ساکن است.

۲ـ سفارش صرفاً یکبار در ابتدای دوره به موجودی اضافه می‌گردد.

۳ـ برنامه‌ریزی صرفاً برای یک دوره انجام می‌پذیرد و موجودی باقیمانده در انتهای دوره حراج شده یا از بین می‌رود.

۴ـ کمبود جایز است.

۵ـ هزینه نگهداری صرفاً برای واحدهای باقی‌مانده در انتهای دوره (که حراج می‌شوند یا از بین می‌روند) محاسبه می‌گردد.

۶ـ در ابتدای دوره موجودی برابر با I به عنوان موجودی ابتدای دوره وجود دارد.

پارامترهای مدل:

D: متغیر تصادفی تقاضا در یک دوره

$f_D(x)$: تابع چگالی تقاضا در مدت زمان یک دوره

$H = h - L$

$F_D(x)$: تابع توزیع تجمعی تقاضا در مدت زمان یک دوره

C: قیمت خرید هر واحد

V: قیمت فروش هر واحد

π: هزینه کمبود هر واحد

L: قیمت حراج هر واحد

A: هزینه هر بار سفارش

h: هزینه نگهداری هر واحد در مدت زمان یک دوره

H: ترکیب هزینه‌های هر واحد باقیمانده در انتهای دوره

$H = h +$ هزینه انتقال جهت حراج یا فروش برحسب هر واحد $-L$

I: موجودی ابتدای دوره (یک لحظه قبل از سفارش)

متغیرهای مدل:

R^*: موجودی بهینه ابتدای دوره (یک لحظه بعد از سفارش)

Q^*: مقدار سفارش بهینه

$Q^* = R^* - I$

همان‌طور که در فرضیات مدل ذکر شد موجودی به دوره‌ی بعد منتقل نمی‌گردد و در آخر دوره باید تصمیم بگیریم که آن را از بین ببریم یا با قیمتی کمتر از C آن را بفروشیم.

مدل‌های احتمالی تک دوره‌ای می‌توانند با تقاضای پیوسته و یا گسسته باشند و همین‌طور هزینه هر بار سفارش دهی (A) ممکن است صفر باشد بنابراین مدل‌های احتمالی تک دوره‌ای به 4 نوع تقسیم می‌گردند:

- تقاضا پیوسته و $A = 0$
- تقاضا پیوسته و $A \neq 0$
- تقاضا گسسته و $A = 0$
- تقاضا گسسته و $A \neq 0$

در اینجا مدل‌هایی که در آن $A = 0$ را بررسی خواهیم کرد، روش حل مدل‌هایی که در آن $A \neq 0$ است به صورت سعی و خطاست

الگوریتم حل مدل در حالتی که تقاضا پیوسته و $A = 0$ باشد به صورت زیر است:

مقدار R را از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم:

$$F_D(R^*) = \frac{V + \pi - C}{V + \pi + H}$$

بدین معنی که به دنبال نقطه‌ای می‌گردیم که تابع توزیع تجمعی در آن نقطه برابر $\frac{V + \pi - C}{V + \pi + H}$ شود، آن نقطه برابر R^* می‌باشد.

- اگر $R^* \leq I$ باشد نیازی به سفارش نمی‌باشد.
- اگر $R^* > I$ باشد باید به میزان $Q^* = R^* - I$ سفارش دهیم.

در حالت گسسته ممکن است تابع توزیع تجمعی در هیچ نقطه‌ای دقیقاً برابر $\frac{V + \pi - C}{V + \pi + H}$ نشود بنابراین برای حالاتی که تقاضا گسسته و $A = 0$ است به صورت زیر عمل می‌کنیم.

در حالت گسسته، کوچک‌ترین مقداری از تقاضا در مدت زمان یک دوره که تابع توزیع تجمعی تقاضا را مساوی و یا بزرگتر می‌کند را به عنوان R^* انتخاب می‌کنیم، یعنی کوچک‌ترین مقداری که به ازای آن

$$F_D(R^*) \geq \frac{V + \pi - C}{V + \pi + H}$$

- اگر $R^* \leq I$ باشد نیازی به سفارش نمی‌باشد.
- اگر $R^* > I$ باشد به میزان $Q^* = R^* - I$ سفارش می‌دهیم.

تذکر: متوسط هزینه نگهداری، متوسط هزینه کمبود، متوسط موجودی باقیمانده و متوسط مقدار کمبود از روابط زیر بدست می‌آید.

تقاضا پیوسته:
$$\text{متوسط موجودی باقیمانده در انتهای دوره} = \int_0^R (R - x) f_D(x)\,dx$$

تقاضا گسسته:
$$\text{متوسط موجودی باقیمانده در انتهای دوره} = \sum_{x=0}^{R} (R - x)\,p\{D = x\}$$

(متوسط موجودی باقیمانده در انتهای دوره) $h =$ متوسط هزینه نگهداری برای واحدهای باقیمانده در انتهای دوره

تقاضا پیوسته:
$$\text{متوسط تعداد کمبود در یک دوره} = \int_R^{\infty} (x - R) f_D(x)\,dx$$

تقاضا گسسته:
$$\text{متوسط تعداد کمبود در یک دوره} = \sum_{x=R}^{\infty} (x - R)\,p\{D = x\}$$

(متوسط تعداد کمبود در یک دوره) $\pi =$ متوسط هزینه کمبود در یک دوره

مثال: کارگاهی قرار است محصولی را که در ایام عید به فروش می‌رسد، تولید کند. تابع توزیع تصادفی تقاضا برای این محصول به صورت زیر است. اگر هزینه تولید هر واحد برابر با 3000 تومان و قیمت فروش هر واحد برابر با 5000 تومان و قیمت حراج هر واحد باقی مانده در انتهای دوره برابر با 2000 تومان باشد.

الف) میزان تولید بهینه برای این محصول چقدر خواهد بود.

ب) متوسط موجودی باقیمانده در انتهای دوره چقدر خواهد بود.

ج) متوسط تعداد کمبود در یک دوره چقدر خواهد بود

x	≤ 5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$p\{D = x\}$	0	0.05	0.05	0.1	0.2	0.2	0.2	0.1	0.05	0.05

حل :

تومان / عدد $L = 2000$ و تومان / عدد $V = 5000$ و تومان / عدد $C = 3000$

$A = 0\ ,\ I = 0\ ,\ h = 0\ ,\ \pi = 0$

$H = (h + 0 - L) = 0 - 2000 = -2000$

ابتدا باید تابع توزیع تجمعی را بدست آوریم:

x	≤5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$p_D(x)$	0	0.05	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	0.95	1

$$\frac{V + \pi - C}{V + \pi + H} = \frac{500 + 0 - 3000}{5000 + 0 + (-2000)} = 0.66$$

$$\Rightarrow\ R^* = 11\ \Rightarrow\ Q^* = R^* - I = 11 - 0 = 11$$

به اندازه 11 واحد سفارش می‌دهیم.

$$\text{متوسط موجودی باقیمانده در انتهای دوره} = \sum_{i=0}^{11} (11 - i)\, p\{D = i\}$$

$$= (11 - 6) \times 0.05 + (11 - 7) \times 0.05 + (11 - 8) \times 0.1 + (11 - 9) \times 0.2 + (11 - 10) \times 0.2 + (11 - 11) \times 0.2 = 1.35$$

$$\text{متوسط کمبود در یک دوره} = \sum_{i=11}^{14} (i - 11) P\{D = i\}$$

$$= (14 - 11) \times 0.05 + (13 - 11) \times 0.05 + (12 - 1) \times 0.1 + (11 - 11) \times 0.2 = 0.35$$

مثال: در یک مدل کنترل موجودی احتمالی یک دوره‌ای، هزینه واحد کسری 20 واحد پول است. اگر توزیع تقاضا یکنواخت در فاصله (0 , 10) باشد، هزینه کسری مورد انتظار وقتی که در ابتدای دوره دو واحد کالا وجود داشته باشد و چهار واحد نیز تهیه شود چقدر است؟

۱) صفر واحد پولی ۲) 12 واحد پولی ۳) 16 واحد پولی ۴) 20 واحد پولی

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$I = 2\ ,\ Q = 4\ ,\ \pi = 20$

$D \sim U(0\ ,10)\ \Rightarrow\ f(x) = \frac{1}{10}$

$R = Q + I = 6$

$$\text{متوسط کسری یک دوره} = \int_6^{10} (x - 6)\frac{1}{10}dx = \left(\frac{x^2}{20} - \frac{6x}{10}\right)\Bigg]_6^{10} = 0.8$$

$$\text{هزینه کسری مورد انتظار} = \pi\ (\text{متوسط کسری در یک دوره}) = 20 \times 0.8 = 16$$

۸ـ خط‌مشی سیستم موجودی/ خط‌مشی دور سیستم موجودی/ خط‌مشی‌های سفارش دهی

در خط‌مشی سیستم موجودی چگونگی کسب اطلاع در موجودی و هم چنین نوع و نحوه سفارش‌دهی مشخص می‌گردد.

دو نوع خط‌مشی اصلی وجود دارد:

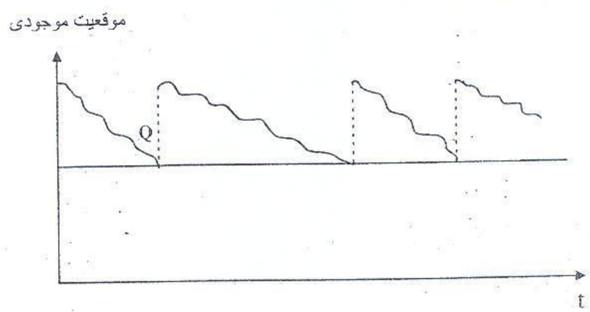
- خط مشی مرور دائم
- خط مشی مرور دوره‌ای

۸ ـ ۱ ـ خط‌مشی مرور دائم

در این خط‌مشی وضعیت موجودی در هر لحظه از زمان بررسی می‌گردد. به محض آنکه مقدار موجودی برابر یا کمتر از نقطه سفارش (r) شود، به اندازه ثابت Q سفارش می‌دهیم.

حالت معروف این خط مشی FOS، (r , Q)، نقطه سفارش، کنترل موجودی مقداری و مقدار سفارش ثابت نامیده می‌شود. در این حالت وضعیت موقعیت موجودی در هر لحظه مرور می‌شود، به محض اینکه به مقدار نقطه سفارش (r) رسید به اندازه ثابت Q سفارش می‌دهیم و این کار به طور مرتب تکرار می‌شود، در این خط‌مشی فاصله بین دو سفارش متوالی لزوماً یکسان نیست.

نمودار موقعیت موجودی این خط مشی می‌تواند به صورت زیر باشد.

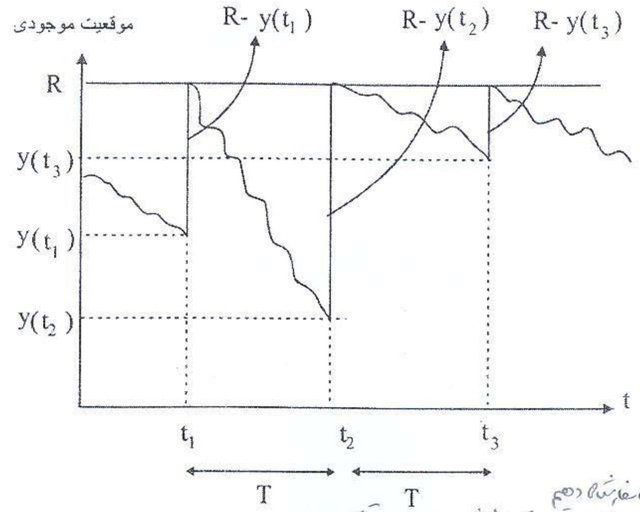


۸ـ ۲ـ خط‌مشی مرور دوره‌ای

در این خط مشی در فواصل زمانی مشخص و یکسان موقعیت موجودی مرور می‌گردد.

حالت معروف این خط مشی FOI، (R , T)، سقف موجودی و فاصله سفارش ثابت نامیده می‌شود. در این حالت زمان‌های t_1 و t_2 و t_3 و ... که فاصله‌ای برابر T دارند، موقعیت موجودی مرور می‌گردد و تا سقف موجودی (R) سفارش داده می‌شود. در این خط مشی مقدار سفارش لزوماً یکسان نیست.

نمودار موقعیت موجودی این خط مشی می‌تواند به صورت زیر باشد.



چون هر موقع که به r رسید به اندازهٔ Q سفارش دهیم
ولی در FOI در زمان مشخص به اندازه‌ای که رسید به حجم R سفارش دهیم به هر مقدار

۸-۳- مقایسه بین FOS و FOI

۱ـ احتمال مواجهه با کمبود به علت مرور دائم در FOS از FOI کمتر است بنابراین ذخیره اطمینان (SS) کمتری دارد.

۲ـ هم گروه کردن اقلام سفارش (سفارش هم زمان) در FOI امکان‌پذیر است اما در FOS امکان‌پذیر نیست.

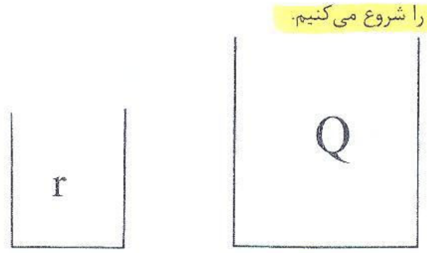
۳ـ هزینه‌های حمل و نقل سفارش در FOI به علت هم‌گروه کردن اقلام سفارش کمتر از FOS است. لذا فروشنده بیشتر تمایل به خط مشی FOI برای خریدار دارد.

۴ـ هزینه‌های مرور سیستم موجودی که جزو هزینه‌های سفارش‌دهی است در FOI نسبت به FOS کمتر است.

۸ـ ۴ ـ خط مشی سفارش‌دهی دو ظرفی، دو قفسه‌ای، مینیمم ماکزیمم، Two – Bin

این خط مشی که حالت کاربردی از خط مشی FOS است (مرور دائم) انبار را به دو قسمت ظرف بزرگتر یا ظرف اول (Q) و ظرف کوچک‌تر یا ظرف دوم (r) تقسیم می‌کند.

ابتدا از ظرف بزرگتر مصرف می‌کنیم و به محض اینکه بخواهیم از ظرف کوچک‌تر (r) مصرف کنیم سفارش می‌دهیم و تا زمان رسیدن سفارش از ظرف کوچک‌تر مصرف می‌کنیم. بعد از رسیدن سفارش ابتدا ظرف کوچک‌تر را تکمیل کرده و هر چه باقی بماند در ظرف بزرگ‌تر خواهیم ریخت و دوباره مصرف را شروع می‌کنیم.



ظرف دوم یا ظرف کوچکتر　　　ظرف اول یا ظرف بزرگتر

مثال: سیستم معروف موجودی دو قفسه‌ای Two Bin system

۱) حالت خاصی از سیستم موجودی مقدار سفارش ثابت محسوب می‌شود.

۲) جزء سیستم دوره ثابت محسوب می‌شود.

۳) ترکیبی از در سیستم فوق است.

۴) جزء هیچ‌کدام از در سیستم فوق نیست.

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

همان‌طور که ذکر گردیده سیستم Two Bin حالت خاصی از خط مشی FOS یا همان مقدار سفارش ثابت است.

۹ـ مدل‌های احتمالی

۹ ـ ۱ـ مدل احتمالی ساده با خط مشی سفارش دهی FOS و (r ,Q)

فرضیات مدل مانند مدل EOQ است با تفاوت‌های زیر:

۱ـ تقاضا احتمالی و ساکن است.

۲ـ کمبود جایز است.

۳ـ خط مشی سفارش‌دهی FOS است.

هدف مدل تعیین مقدار سفارش بهینه (Q) و نقطه سفارش (r^*) با کمینه کردن هزینه‌هاست.

پارامترهای مدل:

D : متغیر تصادفی تقاضا در سال

μ_D: میانگین تقاضا در سال

σ_D : انحراف معیار تقاضا در سال

D_L : متغیر تصادفی تقاضا در مدت زمان تحویل

μ_{D_L} : میانگین تقاضا در مدت زمان تحویل

σ_{D_L}: انحراف معیار تقاضا در مدت زمان تحویل

p: سطح خدمت، [redacted]، سطح اطمینان

متغیرهای مدل:

Q : مقدار سفارش

r: نقطه سفارش، حداقل موقعیت موجودی

SS: موجودی اطمینان (ذخیره ایمنی): موجودی اطمینان در مدل‌های احتمال جهت جواب‌گویی به تغییرات تقاضا در مدت زمان تحویل تعریف می‌گردد و مقدار آن در تعاملی بین کل هزینه‌های کمبود نگهداری تعیین می‌شود.

نکته: در صورتی که SS افزایش یابد، کل هزینه‌های نگهداری افزایش و کل هزینه‌های کمبود کاهش می‌یابد.

$$r = \mu_{D_L} + SS$$

بدین اساس نقطه سفارش مجدد از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

تعریف سطح خدمت

سطح خدمت برابر است با احتمال اینکه در یک دوره با کمبود مواجه نشویم یعنی احتمال اینکه تقاضا در مدت زمان تحویل کوچک‌تر یا مساوی باشد.

$$P\{D_L \le r\} = \text{سطح خدمت} \Rightarrow F_{D_L}(r) = p$$

سطح ریسک یا سطح خطر برابر است با احتمال اینکه در یک دوره با کمبود مواجه شویم: $(1 - P)$

نحوه محاسبه سطح خدمت (p)

الف) توسط مدیر سیستم موجودی مشخص گردد.

ب) از روی مقادیر T_b , N_b توسط رابطه زیر مشخص گردد.

N_b: متوسط تعداد دوره‌های دارای کمبود در سال

T_b : متوسط فاصله زمانی بین دو دوره کمبود متوالی یا فاصله انتظاری مواجه شدن با یک دوره دارای کمبود

$$1-p=\frac{\text{متوسط تعداد دوره‌های دارای کمبود به سال}}{\text{متوسط تعداد دوره‌ها در سال}}=\frac{N_b}{\frac{\mu_D}{Q}}=N_b\times\frac{Q}{D}$$

در مدل‌های احتمالی گاها به جای μ_D از D استفاده می‌کنند.

$$T_b=\frac{1}{N_b}$$

الگوریتم حل مدل احتمالی ساده FOS

برای حل مدل احتمالی ساده FOS دو روش وجود دارد:

۱) با استفاده از مقادیر π و $\hat{\pi}$: در این روش تابع ϕ هزینه‌ها را نوشته و نسبت به Q و r مشتق می‌گیریم و زوابط محاسبه Q و r بدست می‌آید.

۲) با استفاده از مفهوم سطح خدمت که جایگزین پارامترهای π و $\hat{\pi}$ می‌گردد. الگوریتم این روش به شرح ذیل است.

الف) Q^* از رابطه روبرو محاسبه می‌گردد. در این رابطه منظور از D، میانگین توزیع تقاضا در سال یعنی μ_D است.

$$Q^*=\sqrt{\frac{2DA}{h}}$$

ب) مقدار سطح خدمت (p) از روش‌های عنوان شده بدست می‌آید.

$$1-p=N_b\times\frac{Q}{D}$$

ج) مقدار نقطه سفارش (r) از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

اگر تقاضا پیوسته باشد مقداری از تقاضا در مدت زمان تحویل برابر با r می‌باشد که به ازای آن تابع توزیع تجمعی برابر با سطح خدمت (p) شود.

$$F_{D_L}(r)=p$$

اگر تقاضا گسسته باشد کوچک‌ترین مقداری از تقاضا در مدت زمان تحویل که رابطه زیر را برقرار می‌کند برابر r می‌گردد.

$$F_{D_L}(r)\geq p$$

د) مقدار ذخیره اطمینان از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$r=\mu_{D_L}+SS \Rightarrow SS=r-\mu_{D_L}$$

هـ) متوسط مقدار کمبود در دوره $(\bar{b}(r))$، متوسط مقدار کمبود در سال $(B(r))$ و درصد تقاضایی (مشتریانی) که با کمبود مواجه می‌شوند (در دوره یا سال) از روابط زیر محاسبه می‌گردد.

تقاضا پیوسته

$$\bar{b}(r)=\int_r^\infty (x-r)f_{D_L}(x)dx$$

تقاضا گسسته

$$\bar{b}(r) = \sum_{x=r}^{\infty} (x-r)p\{D_L = x\}$$

$$B(r) = \frac{D}{Q}\bar{b}(r)$$

$$\text{درصد تقاضایی که با کمبود مواجه می‌شوند} = \frac{B(r)}{D} = \frac{\bar{b}(r)}{Q}$$

و) متوسط موجودی در دست از رابطه زیر محاسبه می‌گردد

$$\text{متوسط موجودی در دست } \bar{I} = \frac{Q}{2} + SS$$

مثال: میانگین تقاضا در مدت زمان تحویل محصول 90 واحد و توزیع احتمالی تقاضای محصول در طی مدت زمان تحویل آن در جدول زیر داده شده است. متوسط تقاضای سالیانه این محصول 500 واحد و مقدار هر بار سفارش آن ثابت و برابر 50 واحد است.

X	80	85	90	95	100	105
$p(X=x)$	0.3	0.2	0.05	0.2	0.15	0.1

قرار است سطح خدمت (میزان اطمینان از موجودی) طوری انتخاب شود که احتمال کمبود و موقع دریافت هر بار سفارش 0.25 (25 درصد) باشد در این ارتباط به سوال‌های زیر پاسخ دهید.

ـ موجودی اطمینان این محصول برابر است با:

۱) 5 واحد ۲) 10 درصد ۳) 5 تا 10 واحد ۴) از 10 واحد بیشتر

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

X	80	85	90	95	100	105
$F(x)$	0.2	0.5	0.55	0.75	0.9	1

$1-p = 0.25 \Rightarrow p = 0.75$

به دنبال کوچک‌ترین عدد صحیحی می‌گردیم که $F_X(r) \geq 0.75$ باشد.

$\Rightarrow r = 95$

$\mu_{D_L} = \sum x p\{X=x\} = 80\times0.3 + 85\times0.2 + 90\times0.05 + 100\times0.15 + 105\times0.1 = 90$

$SS = r - \mu_{D_L} = 95 - 90 = 5$

ـ به طور متوسط چه مدت زمان طول می‌کشد تا در یکی از دوره‌های سفارش کمبود رخ دهد؟

۱) 2.5 سال ۲) 1.6 سال ۳) 0.4 سال ۴) 1.4 سال

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$1-p = N_b \times \frac{Q}{D} \Rightarrow N_b = \frac{D}{Q}(1-p) = \frac{500}{50}\times 0.25 = 2.5$$

$$T_b = \frac{1}{N_b} = \frac{1}{2.5} = 0.4$$

ـ مقدار متوسط کل کمبود در سال چقدر است؟

۱) 15 واحد ۲) 17.5 واحد ۳) 1.5 واحد ۴) 1.75 واحد

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\bar{b}(r)=\sum_{95}^{100}(x-r)p\{D_L=x\}=(105-95)\times 0.1+(100-95)\times 0.15+(95-9)\times 0.2=1.75$$

$$B(r)=\frac{D}{Q}\bar{b}(r)=\frac{500}{50}\times 1.75=17.5$$

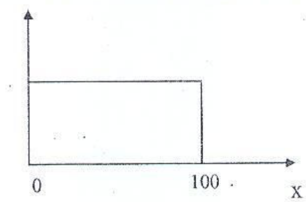
ـ درصد مشتریانی که با کمبود موجودی روبرو می‌شوند چقدر است؟

۱) 14.5 درصد ۲) 15 درصد ۳) 25 درصد ۴) 3.5 درصد

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

درصد مشتریانی که به کمبود موجودی روبه‌رو می‌شوند $\frac{B(r)}{D}=\frac{17.5}{500}=0.035 \Rightarrow \%3.5$

مثال: توزیع احتمالی تقاضای محصولی در طی مدت زمان تحویل یکنواخت بوده و چگالی آن به شکل زیر است



روش سفارش‌دهی این محصول روش مقدار سفارش ثابت بوده، مقدار سفارش در هر بار 40 واحد و متوسط مصرف سالیانه این محصول 400 واحد است. اگر قرار باشد در هر دور سفارش احتمالی کمبود (کسری) مواد برابر 10 درصد باشد به سوال‌های زیر پاسخ دهید.

ـ مقدار موجودی اطمینان برابر است با:

۱) 90 واحد ۲) 50 واحد ۳) 40 واحد ۴) 30 واحد

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$f(x)=\frac{1}{100}$$

$$Q=40\ ,\ D=400\quad ,\quad 1-p=0.1\ \Rightarrow\ p=0.9$$

$$F_{D_L}(r)=p\ \Rightarrow\ \int_0^r f(x)dx=0.9\ \Rightarrow\ \frac{r-0}{100-0}=0.9\ \Rightarrow\ r=90$$

$$\mu_{D_L}=\frac{100+0}{2}=50\ \Rightarrow\ SS=r-\mu_{D_L}=90-50=40$$

ـ حداقل موقعیت موجودی (Inventory Position) این محصول برابر است با:

۱) 40 واحد ۲) 50 واحد

۳) 90 واحد ۴) مقداری بین 50 تا 90 واحد

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

حداقل موقعیت موجودی $= r = 90$

ـ درصد مشتریانی که با کمبود روبرو می‌شوند برابر است با:

۱) 10 درصد ۲) 5 درصد ۳) 2.5 درصد ۴) 1.25 درصد

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\bar{b}(r) = \int_r^{100} (x-90)\frac{1}{100}dx = \left(\frac{x^2}{20} - \frac{90x}{100}\right)\Bigg]_{90}^{100} = 0.5$$

$$\text{درصد مشتریانی که با کمبود روبرو می‌شوند} = \frac{\bar{b}(r)}{Q} = \frac{0.5}{40} = 0.0125 \Rightarrow \%1.125$$

ـ میانگین تعداد دوره‌های سفارش که در یک سال در آنها کمبود رخ می‌دهد برابر است با:

۱) عددی بین 0 تا 0.5 ۲) عددی بین 0.5 تا 1.5

۳) عددی بین 1.5 تا 2.5 ۴) عددی بین 2.5 تا 10

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$1-p = \frac{N_b}{\frac{D}{Q}} \Rightarrow N_b = \frac{D}{Q}(1-p) = \frac{400}{40}\times 0.1 = 1$$

که عددی است بین 0.5 تا 1.5

۹-۲ـ مدل احتمالی ساده با خط‌مشی FOS در حالتی که تقاضا در مدت زمان تحویل دارای توزیع نرمال باشد.

در این مدل تقاضا در مدت زمان تحویل دارای توزیع نرمال با میانگین μ_{D_L} و واریانس $\sigma^2_{D_L}$ است. توزیع نرمال از این جهت با دیگر توزیع‌ها متمایز است که می‌توان به راحتی با استانداردسازی احتمال‌های مورد نظر را محاسبه و رابطه صریحی برای r پیدا نمود.

k_p: ضریب اطمینان $D_L \sim N\left(\mu_{D_L}, \sigma^2_{D_L}\right)$

$$p = p\{D_L \le r\} = p\left\{\overbrace{\frac{D_L - \mu_{D_L}}{\sigma_{D_L}}}^{Z\sim N(0,1)} \le \overbrace{\frac{r-\mu_{D_L}}{\sigma_{D_L}}}^{K_p}\right\}$$

$$\frac{r-\mu_{D_L}}{\sigma_{D_L}} = K_p \Rightarrow r = \mu_{D_L} + k_p\sigma_{D_L}$$

$$SS = k_p\sigma_{D_L}$$

در صورتی که مدت زمان تحویل نیز احتمالی باشد روابط زیر برای تبدیل میانگین و واریانس به کار می‌رود.

D: متغیر تصادفی تقاضا در سال با میانگین μ_D و واریانس σ^2_D

L: متغیر تصادفی مدت زمان تحویل با میانگین μ_L و واریانس σ^2_L

D_L: متغیر تصادفی در مدت زمان تحویل با میانگین μ_{D_L} و واریانس $\sigma^2_{D_L}$

$$\mu_{D_L} = \mu_D \times \mu_L$$

$$\sigma_{D_L} = \sqrt{\mu_D^2 \times \sigma_L^2 + \mu_L\sigma_D^2}$$

بدین اساس حالت‌های زیر برای مدل قابل تصور است.

حالت ۱: D متغیر تصادفی با توزیع نرمال با میانگین μ_D و واریانس σ_D^2 و L ثابت و قطعی باشد.

$$\mu_{D_L} = L\mu_D$$
$$\sigma_{D_L} = \sqrt{L}\,\sigma_D \;\Rightarrow\; r = L\mu_D + k_p\sqrt{L}\,\sigma_D$$
$$SS = k_p\sqrt{L}\,\sigma_D$$

حالت ۲: D ثابت و قطعی و L متغیر تصادفی با توزیع نرمال به میانگین μ_L و وایانس σ_L^2 باشد.

$$\mu_{D_L} = D\mu_L$$
$$\sigma_{D_L} = D\sigma_L \;\Rightarrow\; r = D\mu_L + k_p D\sigma_L$$
$$SS = k_p D\sigma_L$$

حالت ۳: D متغیر تصادفی با توزیع نرمال به میانگین μ_D و واریانس σ_L^2 و L متغیر تصادفی با توزیع نرمال به میانگین μ_L و واریانس σ_L^2 باشد.

$$\mu_{D_L} = \mu_D \times \mu_L$$
$$\sigma_{D_L} = \sqrt{\mu_D^2 \times \sigma_L^2 + \mu_L \times \sigma_D^2} \;\Rightarrow\; r = \mu_D \times \mu_L + kp\sqrt{\mu_D^2 \times \sigma_L^2 + \mu_L \times \sigma_D^2}$$
$$SS = k_p\sqrt{\sigma_D^2 \times \sigma_L^2 + \mu_L \times \sigma_D^2}$$

مثال: تعداد هر بار سفارش محصولی ثابت است مدت تحویل تصادفی و دارای توزیع نرمال با میانگین 40 روز و انحراف معیار 2 روز است. نرخ تقاضای این محصول ثابت و برابر 20 واحد در روز است. اگر سطح خدمت (احتمال نداشتن کمبود در هر دور سفارش) مورد نظر برای این محصول 90 درصد باشد (اگر X دارای توزیع نرمال استاندارد باشد $p\{X < 1.28\} = 0.9$) آنگاه موجودی اطمینان این محصول برابر است با:

۱) 51.2 ۲) 25.6 ۳) 42.56 ۴) 12.8

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$L \sim N\left(40, 2^2\right), D = 20, p = 0.9$$
$$\sigma_{D_L} = D\sigma_L = 20 \times 2 = 40$$
$$SS = k_p\,\sigma_{D_L} = 1.28 \times 40 = 51.2$$

مثال: تقاضای سالیانه کالایی به صورت تابع نرمال با میانگین 8000 واحد و انحراف معیار 1000 واحد است. زمان انتظار تحویل کالا (Lead Time) به صورت ثابت و نیم ماه می‌باشد. اگر سطح سرویس این کالا 0.95 باشد، نقطه سفارش مجدد برابر است با:

$p(z \le 1.64) = 0.95$

۱) 697 ۲) 333 ۳) 806 ۴) 669

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$D \sim N\left(8000, 1000^2\right)$$
$$L = 0.5 \text{ ماه} = \frac{1}{24} \text{ سال}$$
$$p = 0.95 \;\Rightarrow\; k_p = 1.64$$

$$r=\mu_{DL}+SS=L\times\mu_D+k_p\times\sqrt{L}\times\sigma_D$$
$$=\frac{1}{24}\times 8000+1.64\times\sqrt{\frac{1}{24}}\times 1000=669$$

مثال: مصرف روزانه کالایی ثابت و برابر 5 واحد، اما مدت تحویل این کالا دارای توزیع نرمال با متوسط 2 و واریانس 0.57 هفته است. نقطه سفارش مجدد این کالا جهت سطح خدمت‌دهی 90 درصد برابر است با: (هر هفته 6 روز و $0.9 = (p(z \le 1.28)$)

۱) 31 واحد ۲) 89 واحد ۳) 65 واحد ۴) 275 واحد

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد. $\sigma_{DL}=\sqrt{\mu_D^2\times\sigma_L^2+\mu_L\times\sigma_D^2} \rightarrow \sigma_{DL}=\sqrt{30^2\times 0.57^2+2\times 0^2}=30\times 0.57$

$L \sim N(2, 0.57)$ هفته $\quad D=5\ \frac{\text{عدد}}{\text{روز}}=5\times 6\ \frac{\text{عدد}}{\text{هفته}}=30\ \frac{\text{عدد}}{\text{هفته}}$

$p=0.9 \Rightarrow k_p=12.8$

$r=D\mu_L+k_p D_{\sigma_L}=30\times 2+1.28\times 30\times\ 0.57=$ 81.88

۹ـ۳ـ مدل احتمالی ساده با خط‌مشی سفارش‌دهی FOI (R, T)

فرضیات مدل مانند EOQ است با تفاوت‌های زیر :

۱ـ تقاضا احتمالی و ساکن است.

۲ـ کمبود جایز است.

۳ـ خط مشی سفارش‌دهی FOI می‌باشد.

هدف مدل تعیین مقدار سقف موجودی بهینه (R^*) و فاصله زمانی بهینه بین دو سفارش متوالی (T^*) با کمینه کردن هزینه‌هاست.

پارامترهای مدل:

D : متغیر تصادفی تقاضا در سال

μ_D: میانگین تصادفی تقاضا در سال

σ_D: انحراف معیار تقاضا در سال

D_{L+T}: متغیر تصادفی تقاضا در مدت زمان تحویل به‌علاوه زمان یک دوره

$\mu_{D_{L+T}}$: میانگین تصادفی تقاضا در مدت زمان تحول به علاوه زمان یک دوره

$\sigma_{D_{L+T}}$: انحراف معیار تصادفی تقاضا در مدت زمان تحول به علاوه زمان یک دوره

p: سطح خدمت، سطح ریسک، سطح اطمینان

متغیرهای مدل:

R : سقف موجودی، حداکثر موقعیت موجودی

T: فاصله زمانی بین دو سفارش متوالی

SS: موجودی اطمینان (ذخیره ایمنی):

موجودی اطمینان در مدل احتمالی ساده با خط‌مشی FOI برابر است با مقداری از موجودی که جهت جواب‌گویی به تغییرات تقاضا در مدت زمان تحویل بعلاوه زمان یک دوره سفارش تعریف می‌شود و مقدار آن در تعاملی بین هزینه‌های کمبود و هزینه نگهداری بدست می‌آید.

تعریف سطح خدمت

سطح خدمت برابر است با احتمال اینکه در یک دوره سفارش با کمبود مواجه نشویم و برابر است با احتمال اینکه تقاضا در مدت زمان تحویل به علاوه زمان یک دوره سفارش از حداکثر موقعیت موجودی $\left(R^*\right)$ کوچک‌تر یا مساوی باشد.

$$p = p\left\{D_{L+T} \le R\right\} = F_{D_{L+T}}(R)$$

$1-p$: سطح ریسک یا سطح خطر برابر است با احتمال اینکه در یک دوره با کمبود مواجه شویم.

$$1-p = p\left\{D_{L+T} > R\right\} = 1 - F_{D_{L+T}}(R)$$

نحوه محاسبه سطح خدمت (p)

الف) توسط مدیر سیستم موجودی مشخص گردد.

ب) از روی مقادیر N_b و T_b توسط روابط زیر مشخص گردد.

$$1-p = \frac{N_b}{\frac{1}{T}} = N_b.T$$

$$T_b = \frac{1}{N_b}$$

الگوریتم حل مدل احتمال ساده FOI

مدل احتمالی FOI از دو روش زیر قابل حل است.

۱) با استفاده از پارامترهای π و $\hat{\pi}$: در این روش تابع هزینه‌ها را بر اساس متغیرها و پارامترها نوشته و نسبت به دو متغیر T و R مشتق می‌گیریم و روابط محاسبه T و R بدست می‌آید.

۲) با استفاده از مفهوم جایگزین سطح خدمت. الگوریتم این روش به شرح ذیل است.

الف) مقدار T^* از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

$$T^* = \sqrt{\frac{2A}{Dh}}$$

ب) مقدار سطح خدمت از روش‌های عنوان شده محاسبه می‌گردد.

$$1-p = TN_b$$

ج) مقدار سقف موجودی (R) از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

اگر تقاضا پیوسته باشد، مقداری از تقاضا در مدت زمان تحویل به علاوه، یک دوره سفارش برابر با R می‌باشد که به ازای آن تابع توزیع تجمعی برابر با سطح خدمت (p) گردد.

$$F_{D_{L+T}}(R) = p$$

اگر تقاضا گسسته باشد کوچک‌ترین مقداری از تقاضا در مدت زمان تحویل بعلاوه یک دوره سفارش که رابطه زیر را برقرار کند برابر R می‌گردد.

$$F_{D_{L+T}}(R) \ge p$$

د) مقدار ذخیره اطمینان از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

$$R = \mu_{D_{L+T}} + SS \;\Rightarrow\; SS = R - \mu_{D_{L+T}}$$

هـ) متوسط مقدار کمبود در یک دوره $(\bar{b}(R))$، متوسط مقدار کمبود در یک سال $(B(R))$ و درصد تقاضایی (مشتریانی) که با کمبود مواجه می‌شوند (در دوره یا سال) از فرمول‌های زیر محاسبه می‌گردد.

تقاضا پیوسته: $\bar{b}(R) = \int_R^\infty (x - R) f_{D_{L+T}}(x) dx$

تقاضا گسسته: $\bar{b}(R) = \sum_{x=R}^{\infty} (x - R) p\{D_{L+T} = x\}$

$$B(R) = \frac{\bar{b}(R)}{T}$$

درصد تقاضایی که کمبود مواجه می‌شود. $= \frac{B(R)}{D} = \frac{\bar{b}(R)}{D.T}$

و) متوسط موجودی در دست از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

متوسط موجودی در دست $(\bar{I}) = \frac{D.T}{2} + SS$

مثال: در سیستم مرور دوره‌ای (دوره ثابت سفارش) میزان حداکثر موجودی در شرایطی که موجودی ذخیره صفر باشد برابر است با:

۱) میزان تقاضا در زمان دوره سفارش منهای تقاضا در طی زمان تحویل

۲) میزان تقاضا در طول زمان تحویل

۳) میزان تقاضا در طول زمان تحویل + تقاضا در طول دوره سفارش

۴) میزان تقاضا در طول دوره سفارش

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

همان‌طور که ذکر گردید در سیستم FOI، میزان حداکثر موجودی (R) برابر است با میزان تقاضا در طول زمان تحویل بعلاوه یک دوره سفارش + ذخیره اطمینان. از آن‌جا که ذخیره اطمینان برابر صفر فرض گردیده است بنابراین گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

مثال: از کالایی هر Tماه به اندازه‌ای سفارش می‌دهیم که به حداکثر سطح موجودی خود (E) برسد، اگر نرخ تقاضای، ماهیانه این کالا (D) به صورت یک متغیر تصادفی و زمان انتظار تحویل آن L به صورت ثابت باشد در این صورت میانگین موجودی در طول دوره برابر است با:

۱) $E - \frac{D.T}{2} - D.L$ ۲) $E - \frac{D.T + D.L}{2}$ ۳) $\frac{D.T + D.L}{2}$ ۴) $E - \frac{D.L}{2} + D.L$

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$SS = E - \mu_{D_{L+T}} = E - D.(L + T)$$

$$\bar{I} = \frac{D.T}{2} + SS = \frac{D.T}{2} + E - D.L - D.T = E - D.L - \frac{D.T}{2}$$

۹ـ ۴ـ مدل احتمالی ساده با خط‌مشی FOI در حالتی که تقاضا در مدت زمان تحویل بعلاوه یک دوره سفارش دارای توزیع نرمال باشد.

در این مدل تقاضا در مدت زمان تحویل بعلاوه یک دوره سفارش دارای توزیع نرمال با میانگین $\mu_{D_{L+T}}$ و واریانس $\sigma^2_{D_{L+T}}$ است.

$$D_{L+T} \sim N\left(\mu_{D_{L+T}} \ , \ \sigma^2_{D_{L+T}}\right)$$

رابطه سقف موجودی به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$p = p\left\{D_{L+T} \le R\right\} = p\left\{\frac{D_{L+T} - \mu_{D_{L+T}}}{\sigma_{D_{L+T}}} \le \frac{R - \mu_{D_{L+T}}}{\sigma_{D_{L+T}}}\right\} \ \Rightarrow \ R = \mu_{D_{L+T}} + k_p \sigma_{D_{L+T}}$$

$$SS = k_p \sigma_{L+T}$$

در صورتی که مدت زمان تحویل نیز احتمالی باشد، روابط زیر برای تبدیل میانگین و واریانس به کار می‌رود.

D: متغیر تصادفی تقاضا در سال با میانگین μ_D و واریانس σ^2_D

L: متغیر تصادفی مدت زمان تحویل با میانگین μ_L و واریانس σ^2_L

D_{L+T}: متغیر تصادفی تقاضا در مدت زمان تحویل به علاوهٔ زمان یک و سفارش با میانگین $\mu_{D_{L+T}}$ واریانس $\sigma^2_{D_{L+T}}$

$$\mu_{D_{L+T}} = \mu_D \times \mu_{L+T}$$

$$\sigma_{D_{L+T}} = \sqrt{\mu^2_D \sigma^2_{L+T} + \mu_{L+T} \sigma^2_D}$$

T ثابت است

قابل ذکر است که از آنجا T ثابت است، داریم:

$$\mu_{L+T} = \mu_L + T$$

$$\sigma_{L+T} = \sigma_L$$

بنابراین حالت‌های زیر برای مدل قابل ذکر است.

حالت ۱: D متغیر تصادفی با توزیع نرمال $\left(\mu_D , \sigma^2_D\right)$ و L ثابت و قطعی است.

$$\mu_{D_{L+T}} = (L+T)\mu_D$$

$$\sigma_{D_{L+T}} = \sqrt{L+T}\ \sigma_D$$

$$\Rightarrow \ R = (L+T)\,\mu_D + k_p \sqrt{L+T}\ \sigma_D$$

$$SS = k_p \sqrt{L+T}\ \sigma_D$$

حالت۲: D ثابت و قطعی و L متغیر تصادفی با توزیع نرمال $\left(\mu_L , \sigma^2_L\right)$ باشد.

$\mu_L + T$

$$\mu_{D_{L+T}} = D\mu_{L+T} = D\left(\mu_{L+T}\right)$$

$$\sigma_{D_{L+T}} = D\sigma_{L+T} = D\sigma_L$$

$$\Rightarrow \ R = D(\mu_L + T) + k_p D\sigma_L$$

$$SS = k_p\ D\sigma_L$$

حالت ۳: D و L هر دو متغیر تصادفی با توزیع نرمال باشند.

$$\mu_{D_{L+T}} = \mu_D \times \mu_{L+T} = \mu_D\left(\mu_L + T\right)$$

$$\sigma_{D_{L+T}} = \sqrt{\mu^2_D \sigma^1_{L+T} + \mu_{L+T}\sigma^2_D} = \sqrt{\mu^2_D \sigma^2_L + \left(\mu_L + T\right)\sigma^2_D}$$

مثال: محصولی هر سه ماه یکبار سفارش داده می‌شود، مدت تحویل این محصول یک ماه است. توزیع تقاضای این محصول در طی مدت t (به ماه) نرمال با میانگین $100t$ و انحراف معیار $10\sqrt{t}$ است. اگر سطح خدمت و احتمال نبودن کمبود در هر دوره سفارش این محصول 90% باشد، آنگاه حداکثر موقعیت موجودی این محصول عبارت است از: (اگر X دارای توزیع نرمال استاندارد باشد،آنگاه $p(X \le 1.28) = 0.9$ است.)

۱) 125.6 ۲) 425.6 ۳) 112.8 ۴) 312.8

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$T = 3\,,\ L = 1\,,\ D_t \sim N\left(100t\,,\ \left(10\sqrt{t}\right)^2\right)$$

$$p = 0.9 \ \Rightarrow\ k_p = 1.28$$

$$L + T = 3 + 1 = 4$$

$$\mu_{D_t} = 100t \ \Rightarrow\ \mu_{D_{L+T}} = \mu_{D_4} = 100 \times 4 = 400$$

$$\sigma_{D_t} = 10\sqrt{t} \ \Rightarrow\ \sigma_{D_{L+T}} = \sigma_{D_4} = 10\sqrt{4} = 20$$

$$R = \mu_{D_{L+T}} + k_p \sigma_{D_{L+T}} = 400 + 1.28 \times 20 = 425.6$$

مثال: طول دوره سفارش T (فاصله زمانی بین دو سفارش متوالی) برای محصولی ثابت و برابر 1 ماه انتخاب شده است. مدت تحویل این محصول 3 ماه است. توزیع تقاضای این محصول در طی هر ماه متغیر تصادفی با توزیع نرمال با میانگین 100 واحد و انحراف معیار 20 واحداست. قرار است سطح خدمت این محصول طوری انتخاب شود که احتمال کمبود در موقع دریافت سفارش ۵ درصد باشد. (برای متغیر تصادفی نرمال واحد (استاندارد) U داریم: $P(U < 1.65) = 0.95$). متوسط موجودی این محصول به کدام‌یک از تصاویر زیر نزدیک‌تر است؟

۱) 175 ۲) 265 ۳) 125 ۴) 116

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$T = 1\,,\ L = 3\,,\ D \sim N\left(100\,,\ (20)^2\right)$$

$$1 - p = 0.05 \ \Rightarrow\ p = 0.95 \ \Rightarrow\ k_p = 1.65$$

$$SS = k_p \sigma_{D_{L+T}} = k_p\sqrt{(\mu + T)}\,\sigma_D = 1.65 \times \sqrt{(3+1)} \times 20 = 66$$

$$\bar{I} = \frac{D.T}{2} + SS = \frac{100 \times 1}{2} + 66 = 116$$

۹-۵- مقایسه بین مدل احتمالی FOS و مدل احتمالی FOI

معلوم نمی‌باشد

	FOS		FOI
حداکثر موقعیت موجودی	$r+Q$		R
حداقل موقعیت موجودی	r		معلوم نمی‌باشد
متوسط موجودی در دست	$\frac{Q}{2}+SS_{FOS}$	$<$	$\frac{D.T}{2}+SS_{FOI}$
موجودی اطمینان	SS_{FOS}	$<$	SS_{FOI}
موجودی اطمینان در حالت نرمال	$k_p\,\sigma_{D_L}$	$<$	$k_p\,D_{L+T}$
کل هزینه نگهداری سالیانه	h (متوسط موجودی در دست)	$<$	h (متوسط موجودی در دست)
کل هزینه کمبود سالیانه	$\pi\,B(r)$	$<$	$\pi\,B(R)$

شرط مقایسه موارد فوق برابر بودن تمامی پارامتر ها من جمله سطح خدمت (p) است (شرایط یکسان است).

مثال: دو سیستم سفارش دهی $(r\,,Q)$ یا FOS و (R,T) یا FOI را در نظر بگیرید.

۱) برای یک سطح خدمت مشخص در دو سیستم موجودی اطمینان یکسان است.

۲) برای یک سطح خدمت مشخص، متوسط مقدار کسری سالیانه دو سیستم برابر است.

۳) برای یک سطح خدمت مشخص، کل هزینه نگهداری سیستم $(r\,,Q)$ بیشتر از سیستم $(R\,,T)$ است.

۴) برای یک سطح خدمت مشخص، متوسط کسری در یک دوره سفارش برای سیستم $(r\,,Q)$ کمتر از سیستم $(R\,,T)$ است.

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

همان‌طور که در مقایسه دو سیستم ذکر گردید، برای یک سطح خدمت مشخص موجودی اطمینان سیستم FOI بیشتر از FOS است $(SS_{FOS} < SS_{FOI})$، متوسط کسری سالیانه سیستم FOI نیز از سیستم FOS بیشتر است $(B(r) < B(R))$، کل هزینه نگهداری سیستم FOS کمتر از سیستم FOI است و نیز متوسط کسری در یک دور سفارش سیستم FOS کمتر از سیستم FOI است $(\bar{b}(r) < \bar{b}(R))$ بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

مثال: مصرف روزانه کالایی ثابت و برابر 10 واحد اما پیش زمان تامین این کالا (Lead Time) متغیر و بر اساس جدول زیر می‌باشد، مقدار سفارش این کالا ثابت و برابر 400 واحد است، در صورتی‌که هزینه نگهداری هر واحد 2 تومان در سال و کل هزینه‌های نگهداری برابر 480 تومان در سال باشد. نقطه سفارش مجدد این کالا برابر است با:

پیش زمان	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
احتمال	0.05	0.07	0.15	0.2	0.15	0.12	0.1	0.08	0.05	0.03

۱) 40 واحد ۲) 120 واحد ۳) 110 واحد ۴) 80 واحد

حل: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$D = 10\,\frac{\text{عدد}}{\text{روز}}\ ,\ Q = 400\ ,\ h = 2$$

$$h\bar{I} = 480 \Rightarrow h\left(\frac{Q}{2} + SS\right) = 480 \Rightarrow 2\left(\frac{400}{2} + SS\right) = 480 \Rightarrow SS = 40$$

$$\mu_L = 4 \times 0.05 + 5 \times 0.07 + 6 \times 0.15 + 7 \times 0.2 + 8 \times 0.15 + 9 \times 0.12 + 10 \times 0.1 + 11 \times 0.08 + 12 \times 0.05 + 13 \times 0.03 = 8$$

$$\mu_{D_L} = D\mu_L = 10 \times 8 = 80$$

$$r = \mu_{D_L} + SS = 80 + 40 = 120$$

مثال: در سیستم نقطه سفارش (سفارشات مستمر یا کنترل موجودی مقداری) با افزایش یافتن هزینه‌های سفارش، در صورتی که سطح خدمت‌دهی (سطح اطمینان از موجودی) ثابت باشد، مقدار کمبود این کالا در سال:

۱) کاهش می‌یابد. ۲) افزایش می‌یابد. ۳) ثابت باقی می‌ماند. ۴) قابل پیش‌بینی نیست.

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

هزینه سفارش‌دهی (A) بر هیچ‌کدام از موارد μ_{D_L} ، σ_{Q_L} ، SS ، r ، $\bar{b}(r)$ تأثیری ندارد و تنها بر $Q = \sqrt{\frac{2DA}{h}}$ تأثیر گذار است.

بنابراین با افزایش A، Q افزایش می‌یابد و $\frac{D}{Q}$ کاهش خواهد یافت و $B(r) = \frac{D}{Q}b(r)$ نیز کاهش می‌یابد.

مثال: یک واحد صنعتی هر هفته نیاز ثابت به 6 واحد از کالایی دارد. سوابق توزیع زمان تحویل کالا در جدول زیر نشان داده شده است. اگر بخواهیم با احتمال 95% یا بیشتر دچار کمبود نشویم میزان موجودی اطمینان چقدر خواهد بود؟

مدت زمان تحویل (هفته)	تکرار
4	14
5	18
6	12
7	6

۱) 6.2
۲) 8.4
۳) 10.8
۴) 12.6

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

ابتدا باید تکرارهای فوق را به احتمال تبدیل کرده و سپس توزیع تجمعی را بیابیم. بنابراین تکرارها را بر مجموع تکرارها یعنی 50 باید تقسیم کرد.

از طرفی باید توزیع D_L را بدست آوریم یعنی باید مدت زمان تحویل را در مقدار ثابت D ضرب نماییم یعنی $D_{LS} = D \times L$

L	4	5	6	7
D_L	4×6	5×6	6×6	7×6
توزیع احتمال	$\frac{14}{50} = 0.28$	$\frac{18}{50} = 0.36$	$\frac{12}{50} = 0.24$	$\frac{6}{50} = 0.12$
توزیع تجمعی	0.28	0.64	0.88	1

$$p = 0.95 \Rightarrow r = 7 \times 6 = 42$$

$$\mu_{D_L} = 24 \times 0.28 + 30 \times 0.36 + 36 \times 0.24 + 42 \times 0.12 = 31.2$$

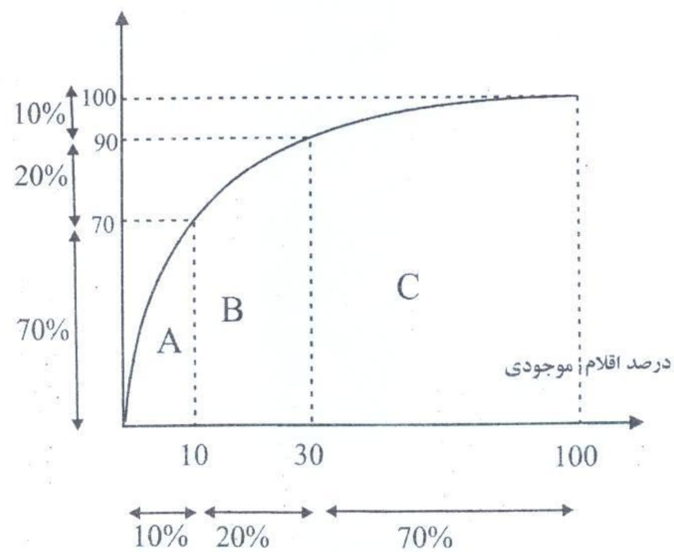
$$\Rightarrow SS = r - \mu_{D_L} = 42 - 31.2 = 10.8$$

۱۰ـ آنالیز ABC

آنالیز ABC که حالتی از نمودارهای پارتو است، اقلام موجودی را به سه طبقه A و B و C به شرح ذیل تقسیم می‌کند:

طبقه	درصد اقلام موجودی	درصد سرمایه دریگر موجودی
A	کمترین (حدود 10%)	بیشترین (حدود 70%)
B	متوسط (حدود 20%)	متوسط (حدود 20%)
C	بیشترین (حدود 70%)	کمترین (حدود 10%)

نمودار درصد سرمایه دیگر موجودی به صورت زیر است.



در این روش حجم سرمایه در گیر موجودی هر کالا به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

حجم سرمایه درگیر موجودی محصول i ام $= C_i \times D_i$

سپس اقلام را بر اساس حجم سرمایه درگیر موجودی به صورت نزولی مرتب می‌کنیم و سپس درصد حجم سرمایه درگیر موجودی برای هر محصول را محاسبه می‌کنیم که برابر است با حجم سرمایه درگیر موجودی محصول i ام تقسیم بر مجموع حجم سرمایه درگیر موجودی محصولات. حدود 10% کالاهای اول که 70% حجم سرمایه درگیر موجودی را دارا می‌باشند گروه A، 20% دوم که حدود 20% حجم سرمایه درگیر موجودی را دارا می‌باشند گروه B و 70% باقی مانده که 10% حجم سرمایه درگیر موجودی را دارا می‌باشند گروه C را در برخواهند داشت.

مثال: کدام‌یک از اقلام زیر جزو گروه A در آنالیز ABC قرار می‌گیرد.

۱) قلم کالایی که بیشترین تقاضای سالیانه را دارد.

۲) قلم کالایی که کمترین سرمایه درگیر موجودی را دارد.

۳) قلم کالایی که بیشترین تقاضا برحسب ریال را دارد.

۴) قلم کالایی که بیشترین قیمت واحد را دارد.

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

همان‌طور که ذکر گردید. آنالیز ABC براساس حجم سرمایه درگیر موجودی، کالاها را گروه‌بندی می‌نماید و تنها قیمت ملاک طبقه‌بندی نسبت بلکه قیمت در تقاضا یا همان تقاضا برحسب ریال ملاک طبقه‌بندی است بنابراین گروه A بیشترین حجم سرمایه درگیر موجودی یا تقاضا برحسب ریال را دارد.

مثال: در آنالیز ABC اقلام موجودی، گروه اقلامی که شامل بیشترین درصد اقلام بوده ولی کمترین درصد حجم پولی را دارا هستند عبارت است از:

۱) گروه Z ۲) گروه A ۳) گروه C ۴) گروه B

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

۱۱ـ مدل های قطعی و پویا

در این مدل‌ها تقاضا به صورت قطعی (غیراحتمالی) است ولی در طول مدت برنامه‌ریزی تغییر می‌کند یعنی در هر دوره با دوره بعد می‌تواند متفاوت باشد.

فرضیات مدل مانند مدل EOQ است با این تفاوت که:

۱ـ تقاضا قطعی و پویا است.

۲ـ کمبود حایز نیست (همان‌طور که ذکر گردید،مانند مدل EOQ)

۳ـ سفارش صرفاً در ابتدای هر دوره می‌رسد.

۴ـ هزینه نگهداری صرفا برای واحدهایی محاسبه می‌گردد که از یک دوره به دوره دیگر منتقل می‌شوند.

دوره: فاصله زمانی تعیین شده که تقاضا در آن مشخص بوده (قطعی بوده) ولی با تقاضا در دوره‌های دیگر متفاوت است. دوره می‌تواند روز، هفته، ماه، سال و یا هر بازه زمانی ثابتی باشد.

هدف این مدل‌ها این است که به چه میزان و برای چند دوره سفارش داده شود. قابل ذکر است که نقاط مشخص شده محل دریافت سفارش است و سفارش L زمان قبل صادر می‌شود.

در این مدل‌ها هزینه هر بار سفارش دهی A و هزینه نگهداری هر واحد در دروه h است.

روش‌های حل مدل

این روش‌ها اکثراً به صورت هیوریستیک (ابتکاری) بوده و جواب‌های بهینه برای تمامی تابع‌های هدف ارائه نمی‌دهند. بنابراین برحسب شرایط مدل برخی از روش‌ها جواب‌های بهتری ارائه می‌دهند. این روش‌ها به شرح ذیل می‌باشند.

۱ـ روش دسته به دسته Lot for Lot

LFL Method

در این روش در هر دوره به اندازه تقاضای آن دوره سفارش داده می‌شود. در این روش، هزینه‌های نگهداری صفر است و از آنجا که در هر دوره سفارش می‌دهیم، هزینه سفارش‌دهی، حداکثر است.

مثال: تقاضای محصولی به صورت زیر است. برنامه سفارش بر اساس روش؟؟؟ LFL مشخص شده و نقطه سفارش به صورت فلش مشخص گشته است.

چون هزینه نگهداری فقط برای موجودی هایی است که از یک دوره به دوره بعدی می رود و چون ما به اندازه مصرف هر دوره سفارش را می دهیم پس در انتهای دوره موجودی صفر است پس هزینه نگهداری صفر است

هزینه سفارش دهی حداکثر است چون برای هر دوره یک سفارش را می دهیم پس به ازای دوره ها n هزینه سفارش دهی داریم

40	50	30	70	10	90	30	40
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
40	50	30	70	10	90	30	40

۲ـ روش FOS با Q دلخواه

در این روش مقدار سفارش‌دهی ثابت (Q) است ولی مقدار Q به صورت دلخواه خواهد بود. یعنی هر بار برای دوره‌هایی سفارش می‌دهیم که مجموع تقاضای آنها برابر Q گردد.

مثلاً مقدار سفارش دهی ما $Q=100$ است
ممکن است یک دوره را جواب دهد
ممکن است چند دوره

مثال: $Q = 80$

30	50	40	30	10	25	55	80

↑ 80 ↑ 80 ↑ 80 ↑ 80

ممکن است

مجموع نیازهایمان از Q کمتر باشد

پس مقداری برای دوره‌ی بعدی جا برود. پس هزینه نگهداری داریم

۳ــ روش FOS با $Q = \sqrt{\frac{2DA}{h}}$

این روش مانند روش قبل است با این تفاوت که $Q = \sqrt{\frac{2DA}{h}}$ است. لازم به ذکر است که در این رابطهٔ D برابر میانگین تقاضا در دوره‌ها می‌باشد.

مثال:

$$D = \frac{60 + 30 + 15 + 15 + 20 + 40 + 25 + 35}{8} = 30$$

$$Q = \sqrt{\frac{2DA}{n}} = \sqrt{\frac{2 \times 30 \times 30}{0.5}} = 60$$

60	30	15	15	20	40	25	35

↑ 60 ↑ 60 ↑ 60 ↑ 60

۴ــ روش FOI با T دلخواه

در این روش تعداد دوره‌های سفارش‌دهی ثابت است، یعنی سفارش در بازه‌هایی زمانی یکسان دریافت می‌گردد. این بازه زمانی به صورت دلخواه مشخص می‌گردد و در طول برنامه‌ریزی ثابت است. مقدار سفارش در هر بار برابر مجموع تقاضای دوره‌های داخل بازه می‌باشد.

مثال:

$T = 2$

25	15	10	40	55	90	30	20

↑ 40 ↑ 50 ↑ 145 ↑ 50

نحوه‌ی محاسبه‌ی هزینه نگهداری

چون به اندازه‌ی ۲ دوره سفارش می‌دهم

برای سفارش اول اینجوری محاسبه می‌شود

40 واحد سفارش می‌دهم. 25 تا برای دوره‌ی اول و 15 واحد برای دوره‌ی دوم. پس در انتهای دوره‌ی اول 15 واحد به دوره‌ی دوم می‌رود پس به اندازه‌ی 15h هزینه نگهداری داریم

۵ــ روش FOI با $T = \sqrt{\frac{2A}{Dh}}$

این روش مانند روش قبل است با این تفاوت که بازه زمانی با توجه به رابطه $T = \sqrt{\frac{2A}{Dn}}$ مشخص می‌گردد. در این رابطهٔ D برابر میانگین تقاضا در دوره‌ها می‌باشد.

مثال:

$$D = \frac{15 + 25 + 10 + 60 + 20 + 25 + 45 + 40}{8} = 30 \quad , \quad h = 0.15 \, , \, A = 30$$

$$T = \sqrt{\frac{2A}{Dh}} = \sqrt{\frac{2 \times 30}{30 \times 0.15}} = 2$$

15	25	10	60	20	25	45	40

↑ 40 ↑ 70 ↑ 45 ↑ 80

۶ـ روش حداقل هزینه واحد (LUC)

در این روش هدف می‌نیمم کردن هزینه سفارش‌دهی و نگهداری به ازای هر واحد سفارش است

$$UC = \frac{\text{هزینه سفارش‌دهی + هزینه نگهداری}}{\sum_{i=1}^{j} D_i} = \frac{A + h\sum_{i=1}^{j}(i-1)D_i}{\sum_{i=1}^{j} D_i}$$

که در آن j تعداد دوره، A هزینه سفارش‌دهی برای یک دوره، h هزینه نگهداری به ازای هر واحد در دوره و D_i تقاضای دوره i ام می‌باشد.

تا زمانی ادامه می‌دهیم که $\left.\begin{array}{l} UC(j) < UC(j-1) \\ UC(j) < UC(j+1) \end{array}\right\}$

تا کی ادامه دهیم که UC(j) هم از UC قبل از خود و هم از UC بعد از خود کمتر باشد

و در این صورت برای بار اول باید به تعداد دوره سفارش دهیم و محاسبات را برای بارهای دیگر تکرار کنیم.

D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8
10	25	15	40	30	0	5	10
↑			↑			↑	...
50			70			15	

روش مهم است چون هدف Min کردن هزینه‌ها است

مثال: $A = 100$ و $h = 2$

$$UC(1) = \frac{A+0}{D_1} = \frac{100}{10} = 10$$

$$UC(2) = \frac{A + hD_2}{D_1 + D_2} = \frac{100 + 2 \times 25}{10 + 25} = \frac{150}{35} = 4.28$$

$$UC(3) = \frac{A + h(D_2 + 2D_3)}{D_1 + D_2 + D_3} = \frac{100 + 2 \times 25 + 2 \times 2 \times 15}{10 + 25 + 15} = \frac{210}{50} = 4.2$$

$$UC(4) = \frac{A + h(D_2 + 2D_3 + 3D_4)}{D_1 + D_2 + D_3 + D_4} = \frac{100 + 2 \times 25 + 2 \times 2 \times 15 + 2 \times 3 \times 40}{D_1 + D_2 + D_3 + D_4} = \frac{450}{90} = 5$$

پس برای بار اول برای 3 پریود $(1, 2, 3)$ یعنی $15 + 25 + 10 = 50$ واحد سفارش می‌دهیم.

حال برای بار دوم

$$UC(1) = \frac{A+0}{D_4} = \frac{100}{40} = 2.5$$

$$UC(2) = \frac{A + hD_5}{D_4 + D_5} = \frac{100 + 2 \times 30}{40 + 30} = \frac{160}{70} = 2.29$$

$$UC(3) = \frac{A + h(D_5 + 2D_6)}{D_4 + D_5 + D_6} = \frac{100 + 2 \times 30 + 2 \times 2 \times 0}{40 + 30 + 0} = \frac{160}{70} = 2.29$$

$$UC(4) = \frac{A + h(D_5 + 2D_6 + 2D_7)}{D_4 + D_5 + D_6 + D_7} = \frac{100 + 2 \times 30 + 2 \times 2 \times 0 + 2 \times 2 \times 5}{40 + 30 + 0 + 5} = \frac{80}{75} = 2.4$$

برای بار دوم باز هم به میزان 3 دوره $(4, 5, 6)$ یعنی $0 + 30 + 40 = 70$ واحد سفارش می‌دهیم.

و برای بار سوم:

$$UC(1) = \frac{A + 0}{D_7} = \frac{100}{5} = 20$$

$$UC(2) = \frac{A + hD_8}{D_7 + D_8} = \frac{100 + 2 \times 10}{5 + 10} = \frac{120}{15} = 8$$

برای بار آخر هم 2 دوره یعنی $5 + 10 = 15$ واحد سفارش می‌دهیم.

۷ــ روش سیلور ــ میل

در این روش به اندازه تعداد دوره‌ای سفارش می‌دهیم که هزینه نگهداری و سفارش‌دهی هر دوره را می‌نیمم کند. بنابراین تنها تفاوت این روش با روش قبل در این است که مجموع هزینه‌های سفارش‌دهی و نگهداری بر تعداد دوره تقسیم می‌گردد، یعنی:

$$SC(j) = \frac{\text{هزینه نگهداری + هزینه سفارش دهی}}{j} = \frac{A + h\sum_{i=1}^{j}(i-1)D_i}{j}$$

در اینجا هم تا زمانی ادامه می‌دهیم که $\left.\begin{matrix} SC(j) < SC(j-1) \\ SC(j) < SC(j+1) \end{matrix}\right\}$ محاسبات قبلی

و در این صورت برای بار اول به تعداد j دوره سفارش می‌دهیم و برای بارهای بعد محاسبات را از اول تکرار می‌کنیم.

مثال: $h = 2 \ , \ A = 100$

10	25	15	40	30	0	5	10

↑ 50   ↑ 75   ↑ 10

$$SC(1) = \frac{A + 0}{1} = \frac{100}{1} = 100$$

$$SC(2) = \frac{A + hD_2}{2} = \frac{100 + 2 \times 25}{2} = \frac{150}{2} = 75$$

$$SC(3) = \frac{A + h\left(D_2 + 2D_3\right)}{3} = \frac{100 + 2 \times 25 + 2 \times 2 \times 15}{3} = \frac{210}{3} = 70$$

$$SC(4) = \frac{A + h\left(D_2 + 2D_3 + 3D_4\right)}{4} = \frac{100 + 2 \times 25 + 2 \times 3 \times 15 + 2 \times 3 \times 40}{4} = \frac{450}{4} = 112.5$$

برای بار اول به میزان سه دوره یعنی 50 واحد سفارش می‌دهیم. برای بار دوم:

$$S(1) = \frac{A + 0}{1} = \frac{100}{1} = 100$$

$$SC(2) = \frac{A + hD_5}{2} = \frac{100 + 2 \times 35}{2} = \frac{160}{2} = 80$$

$$SC(3) = \frac{A + h\left(D_5 + 2D_6\right)}{3} = \frac{100 + 2 \times 30 + 2 \times 2 \times 0}{3} = \frac{160}{3} = 53.3$$

$$SC(4) = \frac{A + h\left(D_5 + 2D_6 + 3D_6\right)}{4} = \frac{100 * 2 \times 30 + 2 \times 2 \times 0 + 2 \times 3 \times 5}{4} = \frac{190}{4} = 47.51$$

$$SC(5) = \frac{A + h\left(D_5 + 2D_6 + 3D_7 + 4D_8\right)}{5} = \frac{100 + 2 \times 30 + 2 \times 2 \times 0 + 2 \times 3 \times 5 + 2 \times 4 \times 10}{5} = \frac{270}{5} = 54$$

پس برای بار دوم به اندازه 4 دوره یعنی 75 واحد سفارش می‌دهیم.

و برای بار آخر نیز مشخص است که باید برای 1 دوره یعنی 10 واحد سفارش داد.

۸ـ روش حداقل هزینه کل (LTC)

در این روش ملاک تعیین تعداد دوره بهینه، نزدیکی هزینه نگهداری و سفارش‌دهی می‌باشد. یعنی به اندازه تعداد دوره‌ای سفارش می‌دهیم که قدرمطلق فاصله هزینه نگهداری از هزینه سفارش‌دهی از بقیه کمتر باشد. روابط این دو هزینه به صورت زیر است:

$$\text{هزینه نگهداری} = h\sum_{i=1}^{j} D_j(i-1)$$

$$\text{هزینه سفارش‌دهی} = A$$

تا آنجا ادامه می‌دهیم که قدرمطلق فاصله هزینه نگهداری از هزینه سفارش‌دهی یک دوره از دوره‌ی قبل و بعد خود آنها کمتر باشد

مثال: $h = 2 , A = 100$

10	25	15	40	30	0	5	10
↑ 50		↑ 75				↑ 10	

دوره	هزینه سفارش‌دهی	هزینه نگهداری	فاصله دو هزینه
J	A	$h\sum_{i=1}^{j} D_i(i-1)$	$\left\|A - h\sum D_i(i-1)\right\|$
1	100	0	100
2	100	$2 \times 25 = 50$	50
3	100	$2 \times 25 + 2 \times 2 \times 15 = 110$	10
4	100	$2 \times 25 + 2 \times 2 \times 15 + 2 \times 3 \times 40 = 350$	250

بنابراین برای بار اول برای 3 دوره و به میزان 50 واحد سفارش داده می‌شود.

دوره	هزینه سفارش‌دهی	هزینه نگهداری	فاصله در هزینه
4	100	0	100
5	100	$2 \times 30 = 60$	40
6	100	$2 \times 30 + 2 \times 2 \times 0 = 60$	40
7	100	$2 \times 30 + 2 \times 2 \times 0 + 2 \times 3 \times 5 = 80$	20
8	100	$2 \times 30 + 2 \times 2 \times 0 + 2 \times 3 \times 5 + 2 \times 4 \times 10 = 160$	60

برای بار دوم برای چهار دوره و به میزان 75 واحد سفارش می‌دهیم و برای آخرین بار برای یک دوره و میزان 10 واحد سفارش خواهیم داد.

۹ـ مدل واگنر ـ وی‌تین

در این مدل، از روش‌های برنامه‌ریزی پویا برای حل مدل استفاده می‌گردد.

مهم

مثال: مقادیر تقاضای کالایی در 10 ماه آینده در جدول زیر نشان داده شده است. اگر هزینه نگهداری هر واحد کالا در هر ماه برابر 2 واحد پولی و هزینه هر بار سفارش‌دهی برابر جدول زیر باشد، چنانچه هر بار به اندازه تقاضای 2 ماه سفارش داده شود، هزینه کل (هزینه نگهداری + هزینه سفارش‌دهی) چقدر خواهد بود؟

هزینه سفارش‌دهی	تعداد سفارش
50 واحد پولی	1–100
80 واحد پولی	101 و بیشتر

ماه	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
تقاضا	40	30	70	40	60	40	50	70	80	60

۱) 1040 واحد پولی ۲) 940 واحد پولی ۳) 820 واحد پولی ۴) 760 واحد پولی

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

از آنجا که هر بار به اندازه تقاضای دو ماه سفارش داده می‌شود، تنها کافی است در هر بار هزینه سفارش‌دهی را از جدول مربوط (جدول هزینه سفارش‌دهی) یافته و با هزینه نگهداری جمع کنیم و هزینه کل را از جمع هزینه‌های هر بار بدست آوریم.

دوره	تعداد سفارش	هزینه سفارش‌دهی	هزینه نگهداری	مجموع هزینه‌ها
1 و 2	$40+30=70$	50	$30\times 2=60$	110
3 و 4	$70+40=110$	80	$40\times 2=80$	160
5 و 6	$60+40=100$	50	$40\times 2=80$	130
7 و 8	$50+70=120$	80	$70\times 2=140$	220
9 و 10	$80+60=140$	80	$60\times 20=120$	200
هزینه کل				820

مثال: مقادیر تقاضای محصولی در 10 دوره آینده در جدول زیر آورده شده است:

این سوال مهم

دوره	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
تقاضا	30	60	80	60	50	30	70	100	60	40

اگر هزینه نگهداری هر واحد محصول در هر دوره برابر دو واحد پولی و هزینه هر بار سفارش‌دهی برابر 80 واحد پولی باشد، اولین و دومین سفارش با استفاده از روش حداقل هزینه هر واحد (LUC) چقدر خواهد بود؟

۱) به ترتیب 90 و 80 ۲) به ترتیب 90 و 140 ۳) به ترتیب 30 و 140 ۴) ترتیب 170 و 140

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$h=2\ ,\ A=80$

$$UC(j)=\frac{A+h\sum_{i=1}^{j} D_i(i-1)}{\sum_{i=1}^{j} D_i}$$

$$UC(1)=\frac{80+0}{30}=\frac{80}{30}=2.66$$

چون سفارش اول را که می‌دهیم در حالت بعدی داریم UC(1) برابر با [illegible] و UC(2) برابر با ۱٫۴۲ پس از بعدی خود کمتر است پس به اندازهٔ همان دورهٔ سوم سفارش می‌دهیم.

$$U(2)=\frac{80+2\times60}{40+60}=\frac{200}{90}=2.2$$

$$U(3)=\frac{80+2\times60+2\times2\times80}{30+60+80}=\frac{520}{170}=3.06$$

برای بار اول به میزان دوره‌های اول و دوم یعنی $60+30=90$ واحد سفارش می‌دهیم.

$$UC(1)=\frac{80+0}{80}=1$$

$$UC(2)=\frac{80+2\times60}{80+60}=\frac{200}{140}=1.4$$

پس برای بار دوم به میزان یک دوره (دوره ۳) یعنی 80 واحد سفارش می‌دهیم.

مثال: تقاضای محصولی طی پریودهای مختلف (هفتگی) به صورت زیر است. در صورتی‌که هزینه هر بار سفارش 200 تومان و هزینه نگهداری هر واحد محصول در هفته 2 واحد پولی باشد، مقدار اولین سفارش بر طبق روش سیلور - میل (Silver – Meal) به چه میزان خواهد بود؟

پریود (هفته)	1	2	3	4	5	6	7	8
مقدار تقاضا	100	50	40	90	150	150	200	100

۱) 100 واحد ۲) 150 واحد ۳) 190 واحد ۴) 280 واحد

حل: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$h=2\ ,A=200$$

$$SC(j)=\frac{A+h\sum_{i=1}^{j}D_i(i-1)}{j}$$

$$SC(1)=\frac{200+0}{1}=200$$

$$SC(2)=\frac{200+2\times50}{2}=\frac{300}{2}=150$$

$$SC(3)=\frac{200+2\times50+2\times2\times40}{3}=\frac{460}{3}=153.3$$

بنابراین سفارش، برای دو هفته و به میزان $50+100=150$ واحد خواهد بود.

۱۲ـ پیش‌بینی

یکی از قدم‌های ابتدایی در کنترل موجودی، پیش‌بینی تقاضا در آینده است. پیش‌بینی یک تخمین از میزان تقاضا برای یک یا چند محصول در یک پریود زمانی در آینده است.

روش‌های متنوعی برای پیش‌بینی موجود است که با توجه به حساسیت و دقت مورد نیاز جهت کالای مصرفی باید تکنیک مورد نظر را انتخاب نمود. برخی از این روش‌ها به صورت زیر است.

در این روش‌ها X_i معرف تقاضای واقعی سال i ام و $\hat{X}_i$ معرف پیش‌بینی سال i ام می‌باشد.

۱ـ روش معدل (میانگین) ساده

در این روش کلیه داده‌های سال‌های گذشته با هم جمع شده و بر مقدار آن تقسیم می‌گردد. مقدار به دست آمده برای پیش‌بینی سال آینده و سال‌های آینده مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$\hat{X}_{t+\ell} = \hat{X}_{t+1} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_t}{t}$$

این روش صرفا برای داده‌هایی مناسب است که دارای میانگین ثابتی بوده و پیرامون آن میانگین نوسان دارند.

مثال: تقاضا محصولی در 4 ماه اخیر به صورت زیر بوده است. با استفاده از روش میانگین ساده مقدار پیش‌بینی تقاضا برای ماه 9 ام برابر است با:

ماه	1	2	3	4
تقاضا	10	30	20	50

$$\hat{X}_9 = \hat{X}_5 = \frac{10 + 30 + 20 + 50}{4} = \frac{110}{4} = 27.5$$

۲ـ روش معدل متحرک ساده

در این روش N داده آخر با هم جمع شده و بر تعداد آن تقسیم می‌گردد. این روش برای پیش‌بینی سال بعد و سال‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرد. اگر در سال جدید داده‌ای اضافه گردد، قدیمی‌ترین داده مورد استفاده حذف می‌گردد. این روش تمام خصوصیات روش قبلی را داراست، یعنی برای داده‌هایی که نوسانات زیاد دارند مناسب نمی‌باشد.

مثال: در مثال فوق در صورتی که $N = 3$ باشد، پیش‌بینی تقاضای ماه 9 ام برابر است با:

$$\hat{X}_9 = \hat{X}_5 = \frac{50 + 20 + 30}{3} = \frac{100}{3} = 33.3$$

یعنی پیش بینی از میانگین 3 دوره آخر محاسبه می‌شود.

۳ـ روش معدل متحرک تصحیح شده

این روش مانند روش قبل است تنها با برخی اصلاحات در آن روند صعودی و نزولی بودن تقاضا را در نظر می‌گیرد و مقدار عقب افتادگی از روند را به پیش‌بینی اضافه می‌کند.

مهم بیشتر سوال‌های کنکور از این روش داده شده است.

۴ـ روش هموار سازی نمایی

در این روش تخمین جدید برابر است با تخمین قدیم به علاوه درصدی از اختلاف بین تخمین قدیم و مقدار واقعی

$$\boxed{\hat{X}_{t+1} = \hat{X}_t + \alpha\left(X_t - \hat{X}_t\right)} \qquad 0 \le \alpha \le 1$$

رابطه فوق را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$\hat{X}_{t+1} = \alpha X_t + (1-\alpha)\hat{X}_t$$

به ضریب α در این روابط ضریب هموارسازی یا ضریب در نظر گرفتن خطا می‌گویند.

ممکن است که پیش‌بینی سال‌های گذشته نیز بر اساس هموارسازی نمایی باشد یعنی:

$$\hat{X}_{t+1} = \alpha X_t + (1-\alpha)\hat{X}_t$$

$$\hat{X}_t = \alpha X_{t-1} + (1-\alpha)\hat{X}_{t-1}$$

$$\hat{X}_{t-1} = \alpha X_{t-2} + (1-\alpha)\hat{x}_{t-2}$$

در این صورت رابطه پیش‌بینی تقاضای سال آینده بر اساس تقاضای سال‌های گذشته به صورت زیر خواهد بود.

$$\hat{X}_{t+1} = \alpha X_t + \alpha(1-\alpha)X_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 X_{t-2} + \ldots + \alpha(1-\alpha)^{t-1}X_1 + (1-\alpha)^t \hat{X}_1$$

مجموع ضریب‌های رابطه فوق برابر 1 می‌باشد یعنی:

$$\alpha + \alpha(1-\alpha) + \ldots + \alpha(1-\alpha)^{t-1} + (1-\alpha)^t = 1$$

$$Sum = \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)} = 1$$ تصاعد هندسی

همان‌طور که مشاهده می‌شود در این روش هر پیش‌بینی بر اساس پیش‌بینی دوره قبل آن انجام می‌گردد. ممکن است پیش‌بینی دوره قبل نیز بر اساس پیش‌بینی دوره‌های قبل انجام شده باشد. اگر بخواهیم از روش هموار سازی نمایی ساده استفاده کنیم باید یک پیش‌بینی (اولیه) داشته باشیم که بر اساس روشی غیر از روش هموارسازی نمایی محاسبه شده باشد $\left(\hat{X}_1\right)$ این پیش‌بینی ممکن است بر اساس N داده قبلی محاسبه شده باشد. هر چه N بیشتر باشد، ضریب هموارسازی (α) کمتر است. برای محاسبه α می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد:

$$\alpha = \frac{2}{N+1}$$

در نظر گرفتن خطا یا هموارسازی از پیش‌بینی پایه شروع شده و تا پیش‌بینی سال $t+1$ $\left(\hat{X}_{t+1}\right)$ ادامه می‌یابد.

عیب روش

لازم به ذکر است که این روش روند صعودی یا نزولی تقاضا را به خوبی در نظر نمی‌گیرد یعنی در صورتی که تقاضا روند صعودی داشته باشد پیش‌بینی انجام شده از این روش همیشه از مقدار واقعی کمتر است و در صورتی که تقاضا روند نزولی داشته باشد این پیش‌بینی بزرگتر از مقدار واقعی خواهد بود.

نکته: هر چه α بیشتر باشد به داده‌های نزدیک (سال‌های اخیر) اهمیت بیشتری داده می‌شود و بالعکس، به عنوان مثال اگر $\alpha = 0.9$ باشد جمع ضریب سه سال اخیر $\alpha + \alpha(1-\alpha) + \alpha(1-\alpha)^2 = 0.999$ خواهد بود و بنابراین به تمام داده‌های بعد از آن تنها به میزان 0.001 اهمیت داده خواهد شد.

خیلی مهم کنکور ۸۲، (۸۵، ۸۶)

مثال: مقدار واقعی تقاضا برای چهار ماه گذشته به صورت جدول زیر است. اگر پیش‌بینی تقاضا برای ماه سوم برابر با 32 باشد و این مقدار بر اساس سه داده قبلی محاسبه شده باشد. پیش‌بینی تقاضای ماه پنجم و ششم بر اساس روش هموارسازی نمایی ساده چقدر می‌باشد.

ماه	1	2	3	4
تقاضا واقعی	20	25	40	42
پیش‌بینی			32	

$$\alpha = \frac{2}{N+1} = \frac{2}{3+1} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\hat{X}_{t+1} = \alpha X_t + (1-\alpha)\hat{X}_{t-1}$$

$$\hat{X}_4 = 0.5 \times 40 + 0.5 \times 32 = 36$$

$$\hat{X}_5 = 0.5 \times 42 + 0.5 \times 36 = 39$$

بنابراین پیش‌بینی تقاضای ماه پنجم برابر 39 عدد می‌باشد.

$$\hat{X}_6 = 0.5 \times X_5 + 0.5 \times 39$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود در آنجا که تقاضای واقعی ماه پنجم مشخص نمی‌باشد بنابراین در روش هموارسازی نمایی نمی‌توان برای دوره‌ای به جز اولین دوره بعدی پیش‌بینی تقاضا نمود.

۵ـ روش هموارسازی نمایی تصحیح شده

این روش مانند روش قبلی است تنها با تصحیح آن روند صعودی و نزولی تقاضا در نظر گرفته می‌شود.

مثال: در کدام‌یک از حالات زیر روش نمو هموار (هموارسازی نمایی) با تصحیح روند استفاده می‌شود؟

۱) مصرف کالا دارای روند افزایش باشد. ۲) مصرف کالا دارای روند کاهش باشد.

۳) مصرف کالا دارای نوسانات زیاد باشد. ۴) هر سه مورد فوق

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

همان‌طور که ذکر گردید، روش هموراه سازی نمایی با تصحیح روند برای حالاتی استفاده می‌شود که تقاضا دارای روند افزایشی یا کاهشی یا دارای نوسانات زیاد باشد.

مثال: پیش‌بینی تقاضای کالایی در دوره t با استفاده از روش نمو هموار (هموارسازی نمائی) با ضریب ثابت $\alpha = 0.2$ و $\alpha = 0.3$ برابر است با:

$\alpha = 0.2$		$\alpha = 0.3$	
پیش‌بینی	خطا	پیش‌بینی	خطا
80	5	91	6

پیش‌بینی مصرف دوره $t + 1$ عبارتست از:

۱) 81 واحد ۲) 93 واحد ۳) 96 واحد ۴) 87 واحد

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

ابتدا باید مقدار واقعی تقاضای دوره t را محاسبه کنیم. با توجه به پیش‌بینی و مقدار خطاهای داده شده می‌توان مقدار تقاضای واقعی دوره t را محاسبه کرد.

$$\alpha = 0.2 \quad \rightarrow \quad \text{مقدار واقعی}\begin{cases} 80 - 5 = 75 \\ 80 + 5 = 85 \end{cases}$$

$$\alpha = 0.3 \quad \rightarrow \quad \text{مقدار واقعی} = \begin{cases} 91 - 6 = 85 \\ 91 + 6 = 97 \end{cases}$$

از اعداد فوق برمی‌آید که $X_t = 85$ است. حال باید $\hat{X}_{t+1}$ را با $\alpha = 0.2$ و $\alpha = 0.3$ محاسبه کنیم.

$$\hat{X}_{t+1} = \cancel{\hat{X}}_t + \alpha\left(X_t - \hat{X}_t\right)$$

$$\alpha = 0.2 \;\Rightarrow\; \hat{X}_{t+1} = 80 + 0.2(85 - 80) = 81$$

$$\alpha = 0.3 \;\Rightarrow\; \hat{x}_{t+1} = 91 + 0.3(85 - 91) = 89.2$$

که تنها 81 در گزینه‌ها موجود است.

مثال: تقاضای واقعی ماهیانه برای 12 ماه قبل محصولی به صورت زیر است اگر پیش‌بینی تقاضا بر اساس متحرک 9 ماهه برای ماه بیست و دوم برابر 190 واحد باشد پیش‌بینی تقاضا را برای ماه بعد (24) بر اساس روش پیش‌بینی هموار سازی نمایی چقدر است؟

ماه	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
تقاضا	160	180	170	150	180	205	170	160	180	200	195	171

۱) 169 ۲) 176 ۳) 187 ۴) 198

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\alpha = \frac{2}{N+1} = \frac{2}{9+1} = 0.2$$

$$\hat{X}_{t+1} = \hat{X}_t + \alpha\left(X_t - \hat{X}_t\right)$$

$$\hat{X}_{23} = 190 + 0.2(195 - 190) = 191$$

$$\hat{X}_{24} = 191 + 0.2(171 - 191) = 187$$

مثال: مقدار مصرفی واقعی و پیش‌بینی مصرف بر اساس دو روش معدل متحرک و نمو همواره (هموارسازی نمائی) برای دو دوره گذشته طبق جدول می‌باشد. پیش‌بینی مصرف دوره بعد (دوره سوم) چقدر است؟ مهم

دوره	مصرف واقعی	مقدار پیش‌بینی	
		نمو هموار	معدل متحرک
1	30	28	29
2	28	28.4	26

۱) 29.5 ۲) 29 ۳) 28.3 ۴) 27.5

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

از آنجا که N مشخص نمی‌باشد نمی‌توان از روش معدل متحرک برای پیش‌بینی استفاده کرد. برای پیش‌بینی از روش نمو هموار نیز باید α را از روش زیر بدست آوریم:

$$\hat{X}_{t+1} = X_t + \alpha\left(X_t - \hat{X}_t\right)$$

$$\hat{X}_2 = \hat{X}_1 + \alpha\left(X_1 - \hat{X}_1\right) \;\Rightarrow\; 28.4 = 28 + \alpha(30 - 28) \;\Rightarrow\; \alpha = 0.2$$

$$\hat{X}_3 = \hat{X}_2 + \alpha\left(X_2 - \hat{X}_2\right) = 28.4 + 0.2(28 - 28.4) = 28.32$$

مثال: در پیش‌بینی مصرف قطعات یدکی در یک انبار از روش هموارسازی نمایی (Exponential Smoothing) استفاده شده است. برای کالای B,A مقدار ضریب ثابت هموارسازی نمایی (α) به ترتیب 0.2 و 0.3 منظور شده است. در پیش‌بینی مصرف کدام‌یک از دو کالا به مصارف دوره‌های قبل اهمیت بیشتری داده شده است؟

۱) کالای A
۲) کالای B
۳) جواب بستگی به تغییرات α ندارد.
۴) اطلاعات کافی نیست.

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

هر چه α کمتر باشد به مصارف دوره‌های قبل اهمیت بیشتری داده می‌شود.