بسم الله

جزوه درس

کنترل دیجیتال و غیرخطی

(ویرایش دوم)

راحیل زرگری نژاد- کیوان موسوی

فهرست:

بخش اول:

آشنایی با مبانی کنترل دیجیتال

3 بخش اول: آشنایی با مبانی کنترل دیجیتال

1-1- مقدمه

یک سیستم دیجیتال، سیستمی است که با سیگنال های دیجیتال که رشته هایی از اعداد باینری صفر و یک هستند، سر و کار دارد. با گسترش استفاده کاربردی کامپیوترهای دیجیتال در تمامی عرصه های مهندسی مخصوصا مهندسی برق، لزوم طراحی و تحلیل سیستم های دیجیتالی که توانایی کار با کامپیوتر را ممکن سازند اهمیت پیدا نمود. در این درس به تحلیل و طراحی این گونه سیستم ها می پردازیم.
در مهندسی کنترل، کامپیوترهای دیجیتال برای دو منظور مختلف به کار برده شده اند:

- از آنها برای تحلیل و ترکیب سیستم های کنترل پیچیده شامل شبیه سازی دیجیتالی و محاسبه دیجیتالی دینامیک‌های کنترل پیچیده استفاده شده است.
- بصورت کنترل کننده ها در سیستم های کنترل بکار برده شده اند.

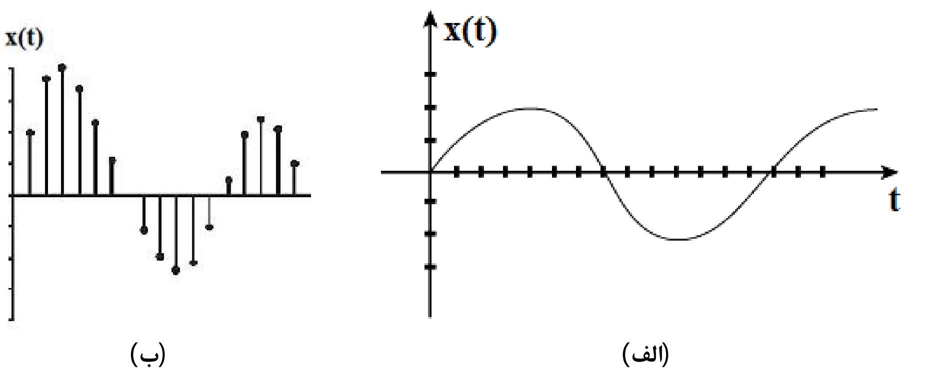
برای آشنایی با سیستم های دیجیتال و کنترل آنها ابتدا لازم است با سیگنال های گسسته و دیجیتال بخوبی آشنا شویم.

1-2- انواع سیگنال

سیگنال ها بطور کلی به دو دسته تقسیم می گردند:

- سیگنالهای زمان-پیوسته
- سیگنال های زمان-گسسته

1- **سیگنال های زمان-پیوسته** سیگنال زمان-پیوسته سیگنالی است که در گستره پیوسته ای از زمان تعریف می‌گردد. دامنه این سیگنال ممکن است گستره پیوسته ای از **مقادیر** یا تعداد محدودی از مقادیر را انتخاب نماید. اگر دامنه سیگنال پیوسته، مقادیر پیوسته ای را اختیار کند، سیگنال پیوسته را از نوع **آنالوگ** گوییم.
2- **سیگنال های زمان-گسسته** سیگنال زمان-گسسته سیگنالی است که تنها در لحظه های گسسته ای از زمان تعریف می‌شود.



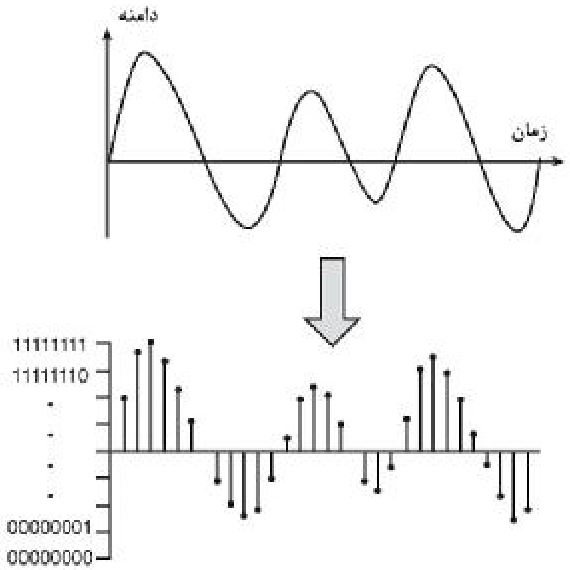
شکل 1-1الف) سیگنال زمان-پیوسته آنالوگ ب) سیگنال زمان-گسسته

تعاریف مهم

نمونه‌برداری از یک سیگنال طبق تعریف، نمونه‌برداری به تبدیل یک سیگنال زمان-پیوسته به یک سیگنال زمان-گسسته با یک زمان نمونه‌برداری مشخص گفته می‌شود. منظور از یک نمونه مقدار سیگنال در یک زمان مشخص است.

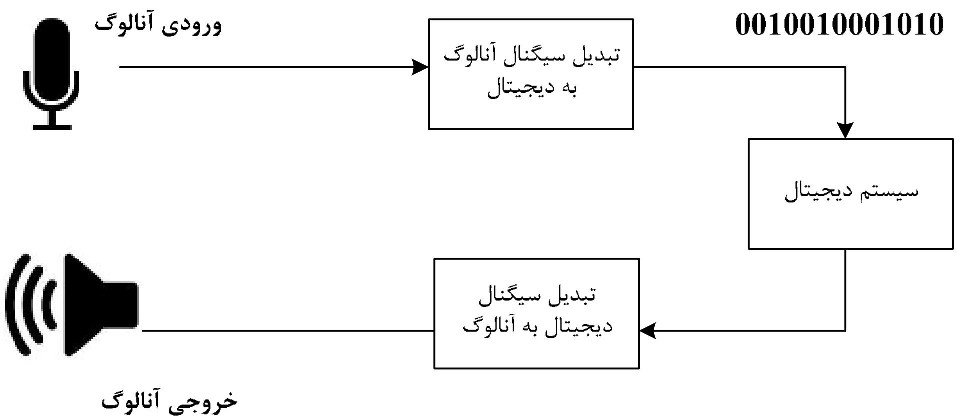
سیگنال کوانتیزه شده کوانتیزه کردن یک سیگنال زمان گسسته فرآیندی است که طی آن دامنه مقادیر ممکن برای نمونه‌های سیگنال از دامنه اعداد حقیقی به اعداد باینری تبدیل می‌شود.

سیگنال دیجیتال سیگنال دیجیتال یک سیگنال زمان گسسته با دامنه کوانتیزه شده است. چنین سیگنالی را می‌توان با دنباله ای از اعداد باینری نمایش داد.



شکل 1-2 تبدیل سیگنال آنالوگ به دیجیتال

از آنجا که سیگنالهای مورد پردازش توسط کامپیوترها، سیگنال های دیجیتال هستند، برای استفاده از آنها در سیستم‌های بزرگتری که با سیگنال های آنالوگ سر و کار دارند، باید به نوعی سیگنال های آنالوگ را به دیجیتال تبدیل نماییم. به دیاگرام زیر توجه نمایید:

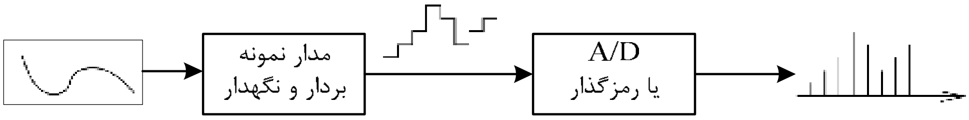


شکل 1-3 یک سیستم دیجیتال ساده با ورودی و خروجی آنالوگ

1-3- تبدیل سیگنال ها

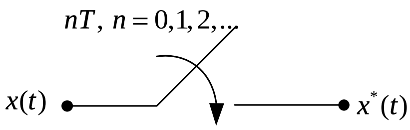
1-3-1- تبدیل سیگنال آنالوگ به دیجیتال

فرآیند تبدیل سیگنال آنالوگ به دیجیتال شامل دو مرحله می باشد:



شکل 1-4 مراحل تبدیل یک سیگنال آنالوگ به دیجیتال

1- **نمونه‌برداری و نگهداری سیگنال**[1] در این مرحله از سیگنال آنالوگ با فاصله های خاصی نمونه‌برداری می شود. اگر زمان نمونه‌برداری را ثابت و برابر T فرض کنیم، هر T ثانیه یک بار از سیگنال نمونه‌برداری می شود. این موضوع را می توان با یک کلید که سر راه سیگنال قرار دارد و در هر T ثانیه یکبار بسته می شود، مدل نمود:



شکل 1-5 نمونه‌برداری از سیگنال $x(t)$

از مبانی ریاضی می دانیم که

$$x(t)d(t-nT)=x(nT)d(t-nT) \qquad 1\text{-}1$$

بنابراین سیگنال $x^*(t)$ را می توان بصورت ریاضی چنین نوشت:

$$x^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty}x(t)d(t-nT) \qquad 2\text{-}1$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)d(t-nT)=x(0)d(t)+x(T)d(t-T)+x(2T)d(t-2T)+\ldots$$

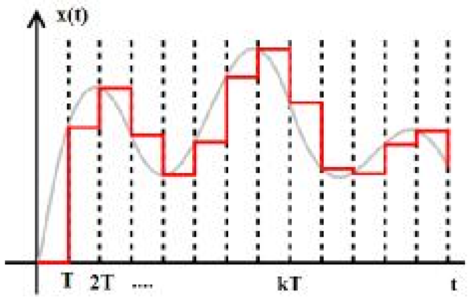
که بیانگر نمونه‌برداری از سیگنال در لحظات $nT, n=0,1,2,\ldots$ می باشد. $x^*(t)$ را با $x[n]$ نمایش می دهند.
مدار نگهدارنده پس از نمونه‌برداری ، مقدار سیگنال را تا قبل از T ثانیه بعدی نگه می دارد. خروجی این مرحله یک سیگنال زمان پیوسته با دامنه گسسته می باشد که به اصطلاح آن را سیگنال مدوله شده دامنه می گویند. به شکل 1-6 توجه کنید.

2- **رمزگذاری سیگنال نمونه‌برداری شده** در این مرحله با استفاده از یک آی سی مبدل A/D[1] به هر یک از مقادیر گسسته دامنه یک مقدار باینری اختصاص می دهد.

---

[1] Sample and Hold (S/H)

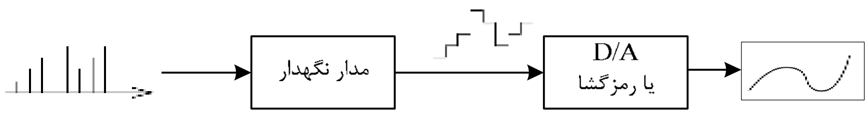
[1] برای توضیحات بیشتر به پیوست 1 مراجعه نمایید.



شکل 1-6 نمونه‌برداری و نگهداری یک سیگنال

1-3-2- تبدیل سیگنال دیجیتال به آنالوگ

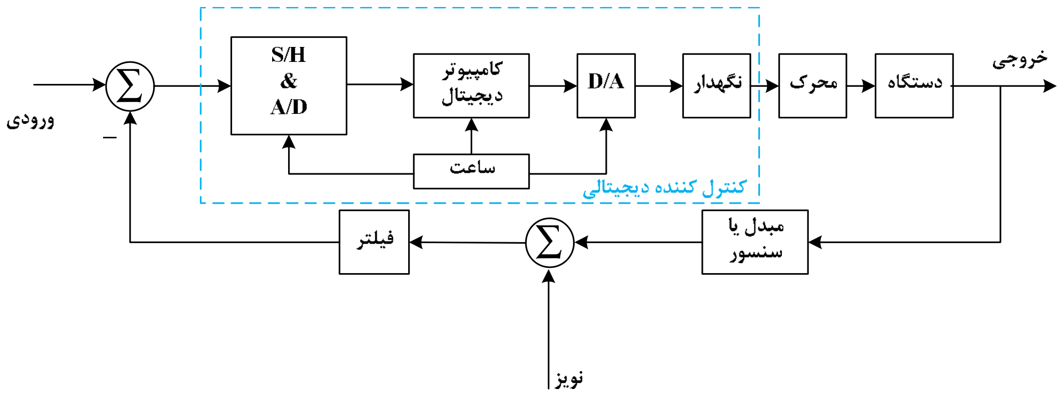
فرآیند تبدیل سیگنال دیجیتال به آنالوگ عکس فرآیند فوق می باشد غیر از آنکه در این فرآیند مرحله نمونه‌برداری وجود ندارد. در مرحله رمزگشایی از یک آی سی D/A[1] استفاده می شود.



شکل 1-7 مراحل تبدیل یک سیگنال دیجیتال به آنالوگ

1-4- بلوک دیاگرام کلی یک سیستم کنترل دیجیتال

اکنون که با انواع سیگنال و تبدیل آنها به یکدیگر آشنا شدیم، به بررسی بخش های مختلف بلوک دیاگرام کلی یک سیستم کنترل دیجیتال می پردازیم. شکل زیر چنین بلوک دیاگرامی را نشان می دهد.



شکل 1-8 دیاگرام بلوکی یک سیستم کنترل دیجیتال

همانطور که از دیاگرام بلوکی فوق مشخص است، ورودی آنالوگ با استفاده از روش های بخش 1-3 به سیگنال دیجیتال تبدیل شده و توسط کامپیوتر دیجیتال آنالیز می گردد. کامپیوتر دیجیتال توسط یک سیگنال ساعت[2] کنترل می شود. سیگنال دیجیتال کنترل شده که خروجی کامپیوتر دیجیتال می باشد مجددا به سیگنال آنالوگ تبدیل شده و به محرک و دستگاه داده می شود. مبدل موجود در حلقه فیدبک سیگنال خروجی را به ورودی تبدیل می کند.

[1] برای توضیحات بیشتر به پیوست 1 مراجعه نمایید.

[2] Clock

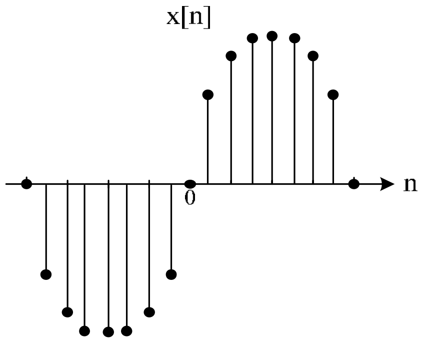
برای طراحی یک کنترل کننده مناسب برای دیاگرام بلوکی شکل 1-7 باید مدل مناسبی از دستگاه در دسترس باشد. مشکل ترین قسمت طراحی سیستم های کنترلی مدلسازی ریاضی دستگاه می باشد. اگرچه برای مدلسازی دستگاه روش های بسیاری وجود دارد اما به دلیل فقدان دینامیک های دقیق فرآیند و حضور پارامترهای تصادفی، مدلسازی تنها تقریبی از مدل فیزیکی واقعی را بدست می دهد.

از مزایای استفاده از سیستم های دیجیتال می توان به نکات زیر اشاره کرد:

- بهبود حساسیت
- انعطاف پذیری بیشتر در برنامه نویسی و قابلیت تغییر برنامه های نرم افزاری بدون نیاز به تغییر سخت افزاری سیستم
- سرعت بیشتر
- قابلیت تولید بالا
- مصرف انرژی کمتر
- تراکم بیشتر و وزن کمتر
- تاثیر کمتر در مقابل نویز و اختلال
- قیمت کمتر
- قابلیت اعتماد بیشتر

1-5- یادآوری مبانی ریاضی سیستم های دیجیتال

در تمام بخش های درس کنترل دیجیتال با سیگنالهای زمان – گسسته و دیجیتال سروکار داریم. بنابراین در این بخش به یادآوری مبانی ریاضی سیستم های دیجیتال می پردازیم.



شکل 1-9 سیگنال زمان-گسسته

دامنه این نوع سیگنالها نقاطی گسسته می باشند که برای آنکه از سیگنالهای زمان – پیوسته قابل تفکیک باشند، آنها را بر حسب n و آرگومان توابع گسسته را بصورت [n] نمایش می دهند که در آن n یک عدد صحیح است.

$$x[n]=\sin[n].u[n] \qquad 3\text{-}1$$

7 نکته بسیار مهم:

توابع گسسته فقط در نقاطی مقدار دارند که مقدار آرگومانشان عدد صحیح باشد. مثلا تابع $x[n]$ در نقطه $\frac{1}{2}$ مقدار ندارد. یا بطور مثال $x[\frac{n}{2}]$ در نقاطی که $\frac{n}{2}$ مقدار صحیحی باشد مقدار دارد؛ یعنی در نقاطی که n زوج باشد مقدار داشته و در نقاطی که n فرد باشد مقدار ندارد.

1-5-1- توابع زوج و فرد گسسته

توابع زوج گسسته تابع $x[n]$ را یک سیگنال زوج گویند اگر نمودار آن نسبت به محور عمودی تقارن داشته باشد و یا داشته باشیم:

$$x[n]=x[-n] \qquad 4\text{-}1$$

توابع فرد گسسته تابع $x[n]$ را یک سیگنال فرد گویند اگر نمودار آن نسبت به مبدا تقارن داشته باشد و یا داشته باشیم:

$$x[n]=-x[-n] \qquad 5\text{-}1$$

2-5-1- توابع متناوب گسسته

تابع زمان – گسسته $x[n]$ را متناوب گویند، اگر یک عدد صحیح مثبت N وجود داشته باشد که به ازای آن و برای تمامی مقادیر n رابطه زیر برقرار باشد:

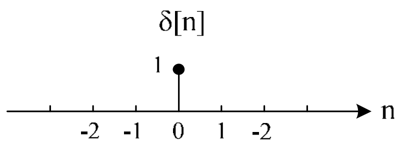
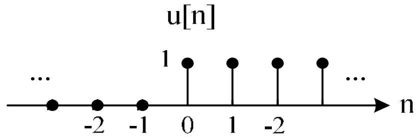
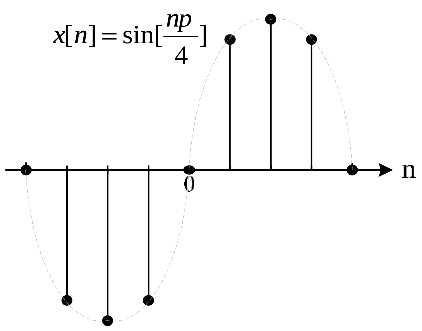
$$x[n]=x[n+N] \qquad 6\text{-}1$$

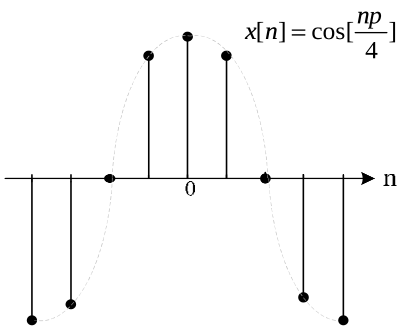
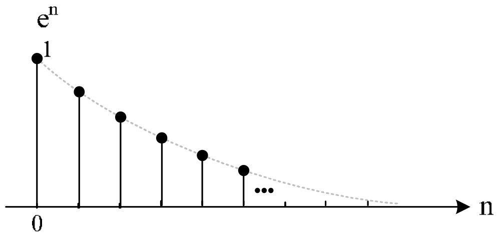
کوچکترین مقدار مثبت N را دوره تناوب اصلی تابع گویند.

3-5-1- توابع زمان – گسسته معروف

جدول زیر انواع توابع زمان گسسته معروف را به همراه نمودار ترسیمی آنها نشان می دهد.

جدول 1-1 توابع زمان – گسسته معروف

ردیف	نام تابع	ضابطه تابع	نمودار تابع
1.	تابع ضربه	$d[n]=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$	
2.	تابع پله واحد	$u[n]=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$	
3.	تابع سینوسی	$x[n]=\sin[n]$	

4.	تابع کسینوسی	$x[n]=\cos[n]$	
5.	تابع نمایی	$x[n]=e^{n}$	

5. تابع نمایی مختلط

تابع نمایی مختلط در حالت زمان گسسته بصورت $x[n]=e^{jw_0n}$ می باشد. این تابع دارای دو خاصیت مهم است:

1) $e^{j(w_0+2p)n}=e^{jw_0n}.e^{j2pn}$

از آنجا که n یک عدد صحیح است داریم:

$$e^{j2pn}=\cos(2pn)+j\sin(2pn)=1$$
$$\rightarrow e^{j(w_0+2p)n}=e^{jw_0n}.e^{j2pn}=e^{jw_0n}$$

بنابراین برخلاف حالت زمان – پیوسته که در آن سیگنال e^{jw_0t}، به ازای مقادیر مختلف w_0 مقادیر متفاوتی خواهد داشت، در حالت زمان – گسسته مقدار یک سیگنال به فرکانس w_0 با مقادیر سیگنالهایی با فرکانس های $w_0\pm2p$ ،$w_0\pm4p$ و غیر یکسان است.

2) $e^{jw_0(n+N)}=e^{jw_0n}$

برای $N>0$ برای متناوب بودن تابع $x[n]=e^{jw_0n}$ باید داشته باشیم:

$$e^{jw_0N}=1\xrightarrow{k>0}e^{jw_0N}=e^{jk2p}\rightarrow w_0N=2kp\rightarrow w_0=\frac{2kp}{N}\rightarrow\frac{w_0}{2p}=\frac{k}{N}$$

یعنی $\frac{w_0}{2p}$ باید یک عدد گویا باشد.

اکنون به بررسی چند مثال در این خصوص می پردازیم:

3 **مثال 1-1**

برای هر یک از توابع زیر ابتدا شکل موج مربوطه را رسم نموده و سپس زوج یا فرد بودن آن را مشخص نمایید:

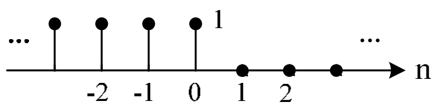
1) $x[n]=u[-n]$

حل:

$$u[n]=\begin{cases}1 & n\geq0\\0 & n<0\end{cases}\rightarrow u[-n]=\begin{cases}1 & -n\geq0\\0 & -n<0\end{cases}\rightarrow u[-n]=\begin{cases}1 & n\leq0\\0 & n>0\end{cases}$$

بنابراین داریم:

u[-n]



این تابع نه نسبت به محور عمودی تقارن دارد و نه مبدأ، پس نه زوج است و نه فرد. با استفاده از ضابطه تابع هم می بینیم که:

$u[n] \neq u[-n]$

$$-u[n] = -\begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} = \begin{cases} -1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \neq u[-n]$$

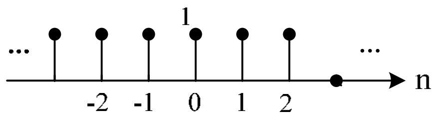
2) $x[n] = u[-n+2]$

حل:

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \rightarrow u[-n+2] = \begin{cases} 1 & -n+2 \geq 0 \\ 0 & -n+2 < 0 \end{cases} \rightarrow u[-n+2] = \begin{cases} 1 & n \leq 2 \\ 0 & n > 2 \end{cases}$$

بنابراین داریم

u[-n+2]



این تابع نه نسبت به محور عمودی تقارن دارد و نه مبدأ، پس نه زوج است و نه فرد.

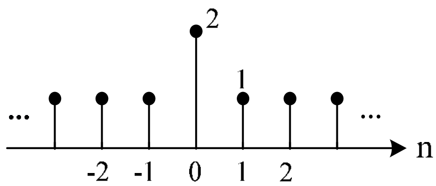
3) $x[n] = u[n] + u[-n]$

حل:

$$\begin{cases} u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \\ u[-n] = \begin{cases} 1 & n \leq 0 \\ 0 & n > 0 \end{cases} \end{cases} \rightarrow u[n] + u[-n] = \begin{cases} 1 & n > 0 \\ 2 & n = 0 \\ 1 & n < 0 \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$u[n] + u[-n]$



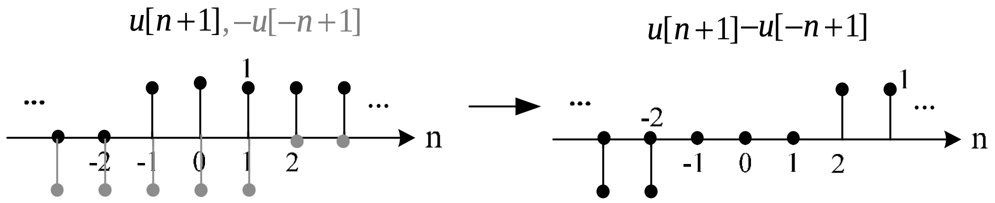
این تابع نسبت به محور عمودی تقارن دارد ، پس زوج است.

4) $x[n] = u[n+1] - u[-n-1]$

حل:

$$\begin{cases} u[n+1] = \begin{cases} 1 & n+1 \geq 0 \\ 0 & n+1 < 0 \end{cases} \\ u[-n+1] = \begin{cases} 1 & -n+1 \geq 0 \\ 0 & -n+1 < 0 \end{cases} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u[n+1] = \begin{cases} 1 & n \geq -1 \\ 0 & n < -1 \end{cases} \\ u[-n+1] = \begin{cases} 1 & n \leq 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases} \end{cases} \rightarrow u[n+1] - u[-n+1] = \begin{cases} 1 & n > 1 \\ 0 & -1 \leq n \leq 1 \\ -1 & n < -1 \end{cases}$$

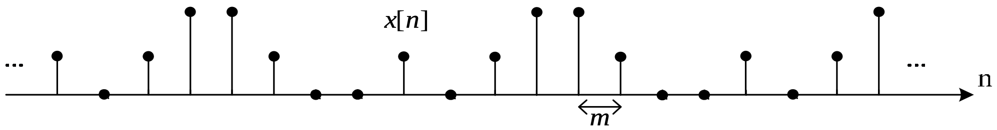
با استفاده از نمودار نیز داریم:



این تابع نسبت به مبدأ تقارن دارد ، پس فرد است.

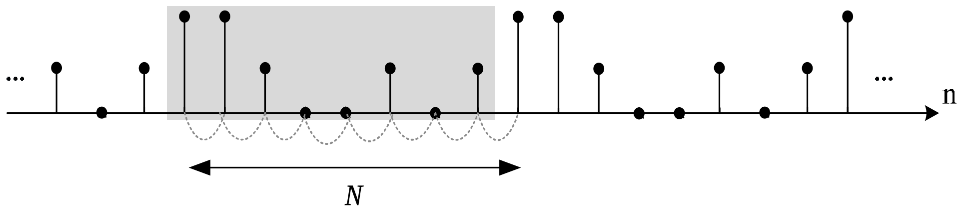
3 مثال 1-2

دوره تناوب تابع زیر محاسبه نمایید:



حل:

برای محاسبه دوره تناوب تابع از روی شکل ابتدا باید الگوی تکرار سیگنال را بدست آوریم:



اکنون با شمردن تعداد فاصله ها داریم : $N = 8m$

3 مثال 1-3

اگر توابع زمان – پیوسته $x_1(t)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$ و $x_2(t)=\sin\left(\frac{6\pi}{7}t\right)$ را با دوره تناوب $T = 1s$ نمونه‌برداری کنیم سیگنال های زمان-گسسته $x_1[n]=\sin\left[\frac{2\pi}{3}n\right]$ و $x_2[n]=\sin\left[\frac{6\pi}{7}n\right]$ بدست می آید. دوره تناوب هر چهار تابع را محاسبه نمایید.

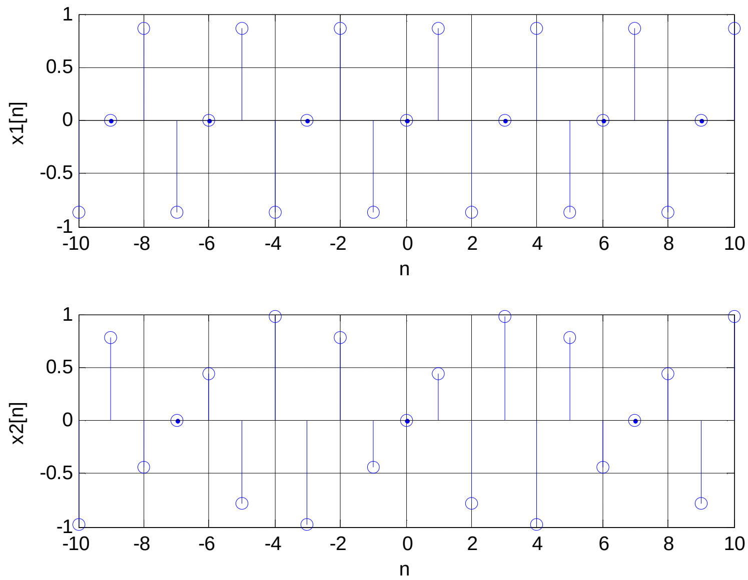
حل:

برای دو تابع زمان-پیوسته داریم:

$$x_1(t)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)\equiv\sin\left(\frac{2\pi}{T_1}t\right)\rightarrow T_1=3$$

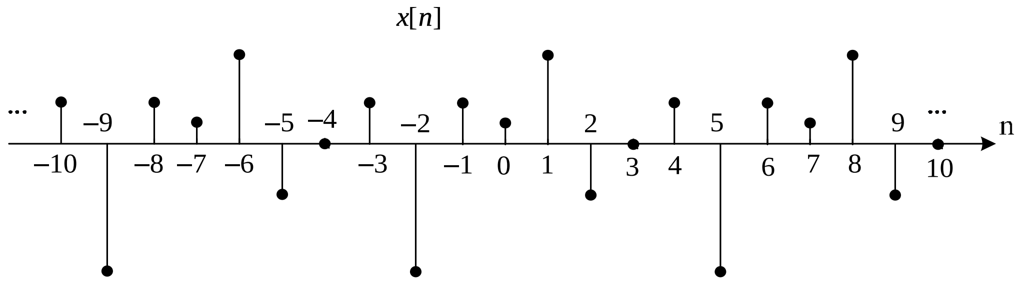
$$x_2(t)=\sin\left(\frac{6\pi}{7}t\right)\equiv\sin\left(\frac{2\pi}{T_2}t\right)\rightarrow T_2=\frac{7}{3}$$

اما برای دو تابع دیگر که زمان-گسسته هستند، با توجه به نکته بخش 1-5 که بیان دارد هر تابع گسسته تنها در مقادیر صحیحی از آرگومان خود مقدار دارد، دیگر نمی توان به این راحتی دوره تناوب را محاسبه نمود. اگر دوره تناوب تابع زمان-پیوسته متناظر عددی صحیح باشد، دوره تناوب سیگنال زمان-گسسته متناظر با آن نیز همان خواهد بود. اما اگر دوره تناوب تابع زمان-پیوسته متناظر عددی کسری بصورت $\frac{a}{b}$ باشد، دوره تناوب سیگنال زمان-گسسته متناظر برابر a خواهد بود. بنابراین برای سیگنال های $x_1[n]$ و $x_2[n]$ دوره تناوب به ترتیب برابر 3 و 7 می باشد. به شکل زیر که توسط نرم افزار MATLAB رسم شده است توجه کنید.



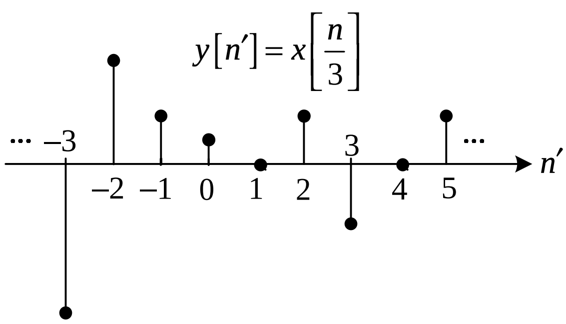
3 مثال 1-4

اگر تابع $x[n]$ را بصورت زیر داشته باشیم، تابع $x[\frac{n}{3}]$ را رسم نمایید.



حل:

از آنجا که توابع گسسته تنها در نقاطی مقدار دارند که آرگومان آنها عددی صحیح باشد، برای $x[\frac{n}{3}]$ داریم



1-6- کاربرد MATLAB

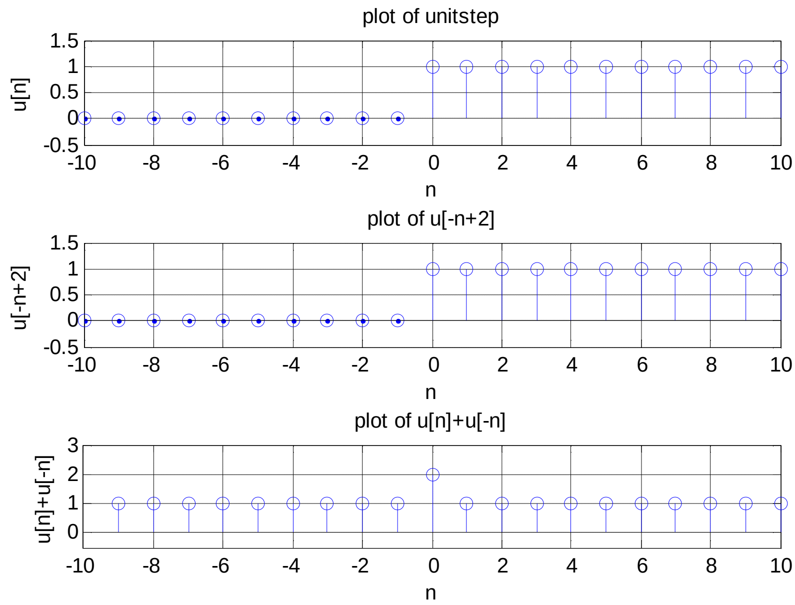
1- تابع تولید پله واحد

```
function u=us(n)
for i=1:length(n)
    if n(i)>=0
        u(i)=1;
    else
        u(i)=0;
```

```
    end
end
```

2- توابع مثال 1-1 با استفاده از 1

```
clear all
clc
close all
n=-10:10;
%--plot of unit step--
subplot(3,1,1)
u1=us(n);
stem(n,u1)
xlabel('n')
ylabel('u[n]')
ylim([-0.5,1.5])
grid on
title('plot of unitstep')
%--plot of u[-n+2]--
subplot(3,1,2)
u2=us(-n+2);
stem(n,u2)
xlabel('n')
ylabel('u[-n+2]')
ylim([-0.5,1.5])
grid on
title('plot of u[-n+2]')
%--plot of u[n]+u[-n]--
subplot(3,1,3)
u3=us(n);
u4=us(-n);
stem(n,u3+u4)
xlabel('n')
ylabel('u[n]+u[-n]')
ylim([-0.5,3])
grid on
title('plot of u[n]+u[-n]')
```



3- کد مربوط به مثال 1-3

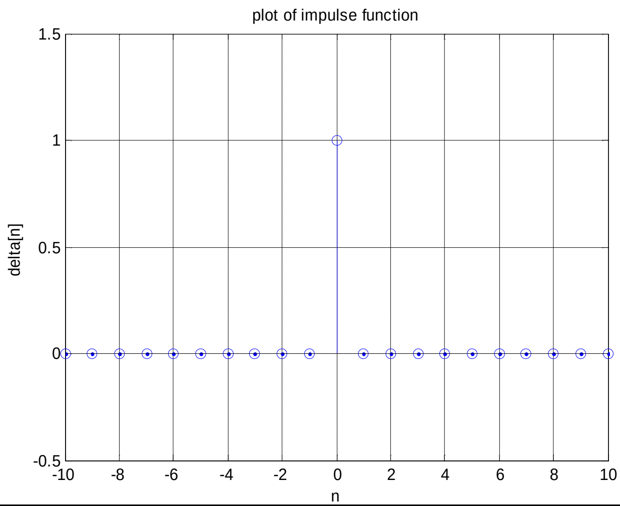
```
n=[-10:10];
x1=sin(2*pi*n/3);
x2=sin(6*pi*n/7);

%----------------
subplot(2,1,1)
stem(n,x1)
xlabel('n')
ylabel('x1[n]')
grid on
%----------------
subplot(2,1,2)
stem(n,x2)
xlabel('n')
ylabel('x2[n]')
grid on
```

4- تابع تولید کننده ضربه

```
function u=imp(n)
for i=1:length(n)
    if n(i)~=0
        u(i)=0;
    else
        u(i)=1;
    end
end
```

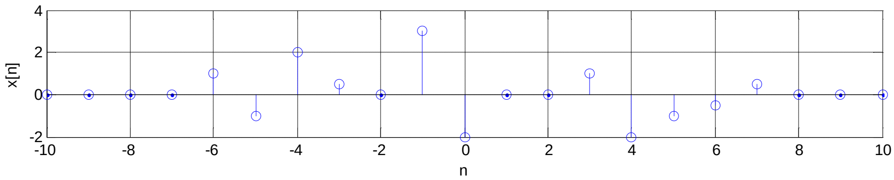
5- رسم تابع ضربه با استفاده از تابع 4

```
clear all
clc
close all
n=-10:10;
u1=imp(n);
stem(n,u1)
xlabel('n')
ylabel('delta[n]')
ylim([-0.5,1.5])
grid on
title('plot of impulse function')
```



1-7- تمرین

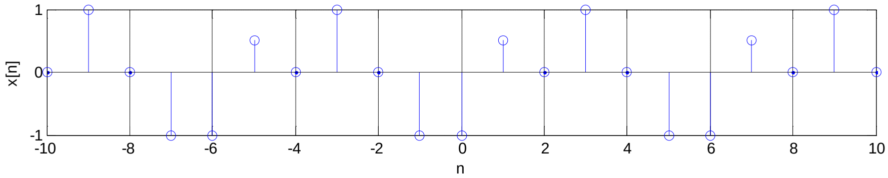
1. سیگنال زمان-گسسته زیر را در نظر بگیرید:



سیگنال های زیر را رسم نمایید:

الف) $x[n+1]$ ب) $x[n].u[3-n]$ ج) $x[2n-1]$ د) $x[n-2]d[n-2]$

2. الف) دوره تناوب سیگنال زیر را مشخص نمایید.



ب) سیگنال های $x[3n]$ و $x[\frac{n}{2}]$ را رسم نموده و دوره تناوب هر یک را مشخص نمایید.

ج) چه ارتباطی بین دوره تناوب سیگنالهای قسمت ب و الف وجود دارد؟

3. سیگنال های زیر را رسم نمایید.

الف) $u[n+3]-u[n-3]$ ب) $\sin[\frac{2p}{5}n]$ ج) $\sum_{k=-5}^{5} d[n-k]$ د) $u[n-3]d[n+1]$

4. سیگنال $\sin\left(\frac{2p}{5}t\right)$ را با دوره تناوب

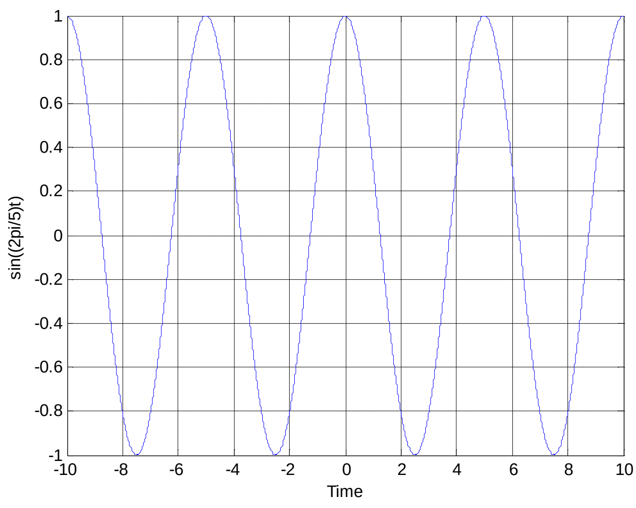
الف) $T=1s$

ب) $T=0.25s$

ج) $T=5s$

نمونه‌برداری نمایید.

کدامیک از دوره تناوب های بیان شده برای نمونه‌برداری از این سیگنال مناسب تر است و چرا؟



5. برای شکل موج تمرین 1 سیگنال زیر را رسم نمایید:

$$y[n]=\begin{cases} x[\frac{n}{2}] & n:even \\ 0 & n:odd \end{cases}$$

6. زوج یا فرد بودن سیگنال های زیر را مشخص نمایید:

الف) $x[n]=u[n]+u[-n]$ ب) $x[n]=\dfrac{\cos[\frac{2p}{3}n]}{n}$ ج) $x[n]=\sin[n]+u[n-2]-u[-n+2]$

بخش دوم:

تبدیل z

3 بخش دوم: تبدیل Z

2-1- مقدمه

یکی از ابزارهای ریاضی که معمولا در تحلیل و ترکیب سیستم های کنترل زمان-گسسته بکار می رود تبدیل Z است. نقش تبدیل Z در سیستم های زمان-گسسته مشابه نقش تبدیل لاپلاس در سیستم های زمان-پیوسته است.
همانطور که در سیستم های زمان-پیوسته تبدیل لاپلاس معادلات دیفرانسیلی خطی را به معادلات جبری بر حسب s تبدیل می کند، در سیستم های زمان-گسسته نیز معادلات تفاضلی خطی به معادلات جبری بر حسب Z تبدیل می شوند.

تعاریف مهم

سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان (LTI)[1] سیستمی که دارای خواص خطی بودن[2] و تغییرناپذیری با زمان[3] باشد را سیستم LTI گوییم. بسیاری از سیستم های فیزیکی دارای این دو خاصیت می باشند و می توان آنها را بصورت سیستم های خطی تغییر ناپذیر با زمان (LTI) مدلسازی نمود.

مشتق در سیگنالهای زمان-گسسته طبق تعریف اصلی مشتق که برای سیگنال های زمان-پیوسته بصورت

$$\frac{d}{dt}y=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}\right)$$

بیان می گردید، برای سیستم های زمان-گسسته مشتق بصورت

$$\left.\frac{d}{dt}y\right|_{t=kT}=\frac{y((k+1)T)-y(kT)}{T}=\frac{y[k+1]-y[k]}{T}$$

تعریف می گردد.

معادله تفاضلی خطی معادله تفاضلی خطی با ضرایب ثابت برای یک سیستم LTI با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ به شکل زیر است

$$\sum_{k=0}^{N}a_k y[n-k]=\sum_{k=0}^{M}b_k x[n-k] \qquad 1\text{-}2$$

بعنوان مثال رابطه $y[n-2]-3y[n-1]+2y[n]=3x[n-1]-x[n]$ یک معادله تفاضلی می باشد.

2-2- تبدیل Z

روش تبدیل z یک روش عملیاتی است که در کارکردن با سیستم های زمان-گسسته بسیار نیرومند است. برای یک تابع زمانی $x(t)$ که با دوره تناوب T نمونه‌برداری شده و به یک سیگنال گسسته به نام $x[n]$ تبدیل شده است، تبدیل Z بصورت زیر تعریف می گردد:

$$X(z)=\mathcal{Z}\{x[n]\}=\sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n} \qquad 2\text{-}2$$

از آنجا که تابع $x[n]$ فقط در مقادیر مثبت مقدار دارد، به این تبدیل، تبدیل Z یکطرفه گوییم.

3 مثال 2-1

[1] Linear Time-Invariant System
[2] سیستم خطی، سیستمی است که دارای خاصیت جمع آثار باشد.
[3] سیستمی را تغییر ناپذیر با زمان گویند که رفتار و مشخصه آن در طی زمان ثابت باشد.

تبدیل Z توابع زیر را محاسبه نمایید

1) $x[n]=d[n]$

حل:

با توجه به رابطه 1-1 می دانیم که:

$$f(t)d(t-kT)=f(kT)d(t-kT)$$

با استفاده از رابطه تبدیل Z داریم:

$$\begin{cases} X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty} d[n]z^{-n} \\ \sum_{n=0}^{\infty} f[n]d[n]=\sum_{n=0}^{\infty} f[0]d[n] \end{cases} \xrightarrow{f[n]=z^{-n}} X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} d[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty} d[n]z^{0}$$

از تعریف تابع ضربه می دانیم که این تابع فقط در $n=0$ مقدار دارد، بنابراین:

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} d[n]z^{0}=...+0+0+1z^{0}+0+0+...=1$$

2) $x[n]=u[n]$

حل:

با استفاده از رابطه تبدیل Z داریم

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty} u[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$$

که معادل رابطه سری هندسی ($\sum_{n=0}^{\infty} a^{n}=\frac{1}{1-a} \quad |a|<1$) می باشد

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}=\begin{cases} \frac{1}{1-z^{-1}} & |z^{-1}|<1 \to 1<|z| \\ \text{واگرا} & |z^{-1}|\geq 1 \end{cases}$$

3) $x[n]=a^{n}u[n]$

حل

با استفاده از رابطه تبدیل Z داریم:

$$x[n]=\begin{cases} a^{n} & n\geq 0 \\ 0 & n<0 \end{cases} \to X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty} a^{n}z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(az^{-1}\right)^{n}$$

که معادل رابطه سری هندسی می باشد

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(az^{-1}\right)^{n}=\begin{cases} \frac{1}{1-az^{-1}} & |az^{-1}|<1 \to |a|<|z| \\ \text{واگرا} & |az^{-1}|\geq 1 \end{cases}$$

4) $x[n]=\cos[an]u[n]$

با استفاده از رابطه تبدیل Z داریم:

$$x[n]=\cos[an]u[n]=\frac{1}{2}\left(e^{ian}+e^{-ian}\right)u[n]$$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(e^{ian}+e^{-ian}\right)z^{-n}=\frac{1}{2}\left(\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{ian}\right)z^{-n}}_{X_1(z)}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-ian}\right)z^{-n}}_{X_2(z)}\right)$$

از بخش قبل می دانیم که:

$$X_1(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-e^{ia}z^{-1}} & \left|e^{ia}z^{-1}\right|<1\\ \text{واگرا} & \left|e^{ia}z^{-1}\right|\ge 1\end{cases}\quad,\quad X_2(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-e^{-ia}z^{-1}} & \left|e^{-ia}z^{-1}\right|<1\\ \text{واگرا} & \left|e^{-ia}z^{-1}\right|\ge 1\end{cases}$$

بنابراین:

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n}=\frac{1}{2}\left(X_1(z)+X_2(z)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-e^{ia}z^{-1}}+\frac{1}{1-e^{-ia}z^{-1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{ia}z^{-1}+1-e^{-ia}z^{-1}}{\left(1-e^{ia}z^{-1}\right)\left(1-e^{-ia}z^{-1}\right)}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2-z^{-1}\left(e^{ia}+e^{-ia}\right)}{1-e^{ia}z^{-1}-e^{-ia}z^{-1}+\underbrace{e^{ia}z^{-1}e^{-ia}z^{-1}}_{e^{ia}e^{-ia}=1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2-z^{-1}\left(e^{ia}+e^{-ia}\right)}{1-z^{-1}\left(e^{ia}+e^{-ia}\right)+z^{-2}}\right)\times\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1-z^{-1}\frac{\left(e^{ia}+e^{-ia}\right)}{2}}{\frac{1}{2}-z^{-1}\frac{\left(e^{ia}+e^{-ia}\right)}{2}+\frac{1}{2}z^{-2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1-z^{-1}\cos(a)}{\frac{1}{2}-z^{-1}\cos(a)+\frac{1}{2}z^{-2}}\right)=\frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{1-z^{-1}\cos(a)}{\frac{1}{\cancel{2}}\left(1-2z^{-1}\cos(a)+z^{-2}\right)}\right)$$

$$=\frac{1-\cos(a)z^{-1}}{1-2\cos(a)z^{-1}+z^{-2}}$$

اما برای اینکه روابط فوق برقرار باشد، تحقق شرط های زیر لازم است:

$$\begin{cases}\left|e^{ia}z^{-1}\right|<1\\ \left|e^{-ia}z^{-1}\right|<1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\underbrace{\left|e^{ia}\right|}_{=1}\left|z^{-1}\right|<1\\ \underbrace{\left|e^{-ia}\right|}_{=1}\left|z^{-1}\right|<1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\left|z^{-1}\right|<1\\ \left|z^{-1}\right|<1\end{cases}\rightarrow\left|z^{-1}\right|<1\rightarrow|z|>1$$

نکات:

1- رابطه بین متغیر z و متغیر لاپلاس بصورت $z=e^{sT}$ می باشد که در آن T دوره تناوب نمونه‌برداری سیگنال است.

2- متغیر z یک متغیر مختلط است ($z=re^{j\theta}$).

3- اگر $r=1$ باشد، رابطه تبدیل z به تبدیل فوریه تغییر خواهد کرد.

همانطور که از مثال 2-1 مشخص است، محاسبات ریاضی تبدیل Z محاسبات زمان بر و پیچیده ایست. بنابراین به منظور راحتی بیشتر در استفاده از تبدیل Z همانند تبدیل لاپلاس جدولی شامل زوج تبدیلات Z تهیه شده است که حل:مسائل مربوط به این موضوع را آسان تر می کند.

جدول 2-1 جدول زوج تبدیلات Z

	$x(t)$	$X(s)$	$x[n]$	$X(z)$	ROC[1]
1	-	-	$d[n]=\begin{cases}1 & n=0\\0 & n\neq 0\end{cases}$	1	برای تمام نقاط
2	$u(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\0 & t<0\end{cases}$	$\frac{1}{s}$	$u[n]=\begin{cases}1 & n\geq 0\\0 & n<0\end{cases}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert>1$
3	$t.u(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$n.u[n]$	$\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert>1$
4	$t^2.u(t)$	$\frac{2}{s^3}$	$n^2.u[n]$	$\frac{T^2z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$	$\lvert z\rvert>1$
5	-	-	$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
6	-	-	$n.a^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
7	$e^{at}u(t)$	$\frac{1}{s-a}$	$e^{an}u[n]$	$\frac{1}{1-e^{aT}z^{-1}}$	$\lvert z\rvert>e^{a}$
8	$\sin(w_0t)u(t)$	$\frac{w_0}{s^2+w_0^2}$	$\sin[w_0n]u[n]$	$\frac{\sin(w_0)z^{-1}}{1-2z^{-1}\cos(w_0)+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>1$
9	$\cos(w_0t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+w_0^2}$	$\cos[w_0n]u[n]$	$\frac{1-\cos(w_0)z^{-1}}{1-2z^{-1}\cos(w_0)+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>1$
10	$e^{-at}\cos(w_0t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+w_0^2}$	$e^{-an}\cos[w_0n]u[n]$	$\frac{1-e^{-aT}\cos(w_0)z^{-1}}{1-2e^{-aT}z^{-1}\cos(w_0)+e^{-2aT}z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>e^{-aT}$
11	$e^{-at}\sin(w_0t)u(t)$	$\frac{w_0}{(s+a)^2+w_0^2}$	$e^{-an}\sin[w_0n]u[n]$	$\frac{e^{-aT}\sin(w_0)z^{-1}}{1-2e^{-aT}z^{-1}\cos(w_0)+e^{-2aT}z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>e^{-aT}$

همانطور که از جدول پیداست، تبدیل z توابع نیز مانند تبدیل لاپلاس فرم کلی کسری دارد. طبق تعریف ریشه های صورت این فرم کسری را **صفر های تابع z** و ریشه های مخرج آن را **قطب های تابع z** حاصله می‌نامند.

2-2-1- خواص تبدیل Z

اکنون که روابط مربوط به تبدیل z را آموختیم، برای محاسبه تبدیل توابعی که در جدول 2-1 قرار ندارند، می توان از ترکیب این جدول و خواص تبدیل z، استفاده نمود.

بدین منظور ابتدا باید خواص اساسی تبدیل z را بشناسیم. جدول 2-2 لیستی از خواص مهم تبدیل Z را نمایش می دهد.

[1] Region of Convergence

تعریف:

ناحیه همگرایی، ناحیه ای است که در آن تبدیل z یک تابع قابل قبول است. در واقع سری مربوط به تبدیل z در این ناحیه همگرا خواهد بود.

جدول 2-2 جدول خواص تبدیل **Z**

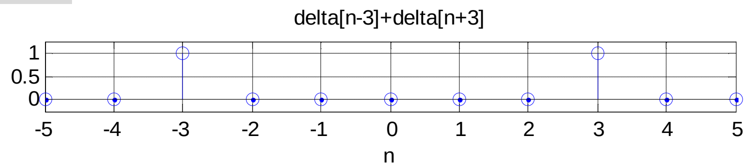
ردیف	خاصیت	$x[n]$	$X(z)$
1	جمع آثار (خطی بودن)	$a\,x_1[n]+b\,x_2[n]$	$a\,X_1(z)+b\,X_2(z)$
2	معکوس زمانی	$x[-n]$	$X(z^{-1})$
3	انتقال حقیقی	$x[n-n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$
4	انتقال حقیقی	$x[n+n_0]$	$z^{n_0}X(z)-z^{n_0}x[0]-z^{n_0-1}x[1]-z^{n_0-2}x[2]-\ldots-z\,x[n_0-1]$
5	انتقال حوزه z	$e^{i\omega_0 n}x[n]$	$X(e^{-i\omega_0}z)$
6	-	$z_0^n\,x[n]$	$X\left(\dfrac{z}{z_0}\right)$
7	مزدوج مختلط	$\bar{x}[n]$	$\bar{X}(\bar{z})$
7	مشتق گیری مختلط	$n^k.x[n]$	$\left(-z\dfrac{d}{dz}\right)^k X(z)$
8	انتگرال گیری مختلط	$\dfrac{x[n]}{n}$	$\int_z^\infty \dfrac{X(z)}{z}dz+\lim_{n\to 0}\left(\dfrac{x[n]}{n}\right)$ به شرطی که $\lim_{n\to 0}\left(\dfrac{x[n]}{n}\right)$ موجود باشد.
9	سری تابع	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}X(z)$
10	کانولوشن	$x_1[n]*x_2[n]$	$X_1(z).X_2(z)$

اکنون با یک مثال این موضوع را بررسی خواهیم کرد:

3 مثال 2-2

با استفاده از دو جدول 2-1 و 2-2 تبدیل Z توابع زیر را محاسبه نمایید، دوره تناوب نمونه‌برداری را برای همه توابع $T=1^s$ در نظر بگیرید

1) $x[n]=d[n-3]+d[n+3]$



حل:

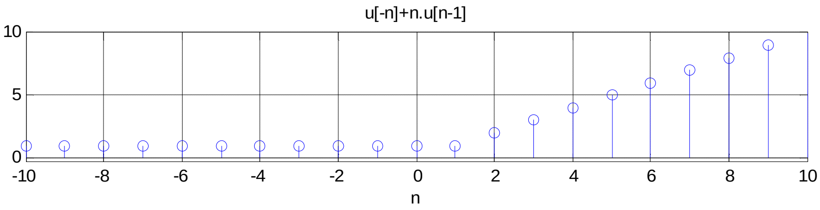
با استفاده از جدول خواص 2-2 می دانیم که:

$$x[n]=\underbrace{d[n-3]}_{x_1[n]}+\underbrace{d[n+3]}_{x_2[n]}\xrightarrow{T2.2.1}X(z)=X_1(z)+X_2(z)=z^{-3}$$

$$X_1(z)=\mathbf{z}\{d[n-3]\}\xrightarrow{T2.2.3}X_1(z)=z^{-3}.\mathbf{z}\underbrace{\{d[n]\}}_{=1(T2.1.1)}=z^{-3}$$

$$X_2(z)=\mathbf{z}\{d[n+3]\}\xrightarrow{T2.2.4}X_2(z)=z^{3}.\mathbf{z}\underbrace{\{d[n]\}}_{=1(T2.1.1)}-z^{3}\,\underbrace{d[0]}_{=1}=z^{3}-z^{3}=0$$

2) $x[n]=u[-n]+n.u[n-1]$



حل:

با استفاده از جدول خواص 2-2 می دانیم که:

$$x[n]=\underbrace{u[-n]}_{x_1[n]}+\underbrace{nu[n-1]}_{x_2[n]}\xrightarrow{T2.2.1}X(z)=X_1(z)+X_2(z)$$

$$\begin{cases}X_1(z)=\mathcal{Z}\{u[-n]\}\\ X(z)=\mathcal{Z}\{u[n]\}\overset{T2.1.2}{=}\dfrac{1}{1-z^{-1}}\end{cases}\xrightarrow{T2.2.2}X_1(z)=X(z^{-1})=\frac{1}{1-\left(z^{-1}\right)^{-1}}$$

$$X_2(z)=\mathcal{Z}\{n.u[n-1]\}=\mathcal{Z}\{(n-1+1).u[n-1]\}=\mathcal{Z}\{(n-1).u[n-1]+u[n-1]\}$$

$$\overset{T2.2.1}{=}\mathcal{Z}\{(n-1).u[n-1]\}+\mathcal{Z}\{u[n-1]\}\overset{T2.2.3}{=}z^{-1}.\mathcal{Z}\{n.u[n]\}+z^{-1}.\mathcal{Z}\{u[n]\}$$

$$\overset{T2.2.7}{=}z^{-1}.\left(-z\frac{d}{dz}.\mathcal{Z}\{u[n]\}\right)+z^{-1}.\mathcal{Z}\{u[n]\}\overset{zz^{-1}=1}{=}-\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right)+\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

$$=-\frac{0\times\left(1-z^{-1}\right)-\left(-z^{-2}\right)\times 1}{\left(1-z^{-1}\right)^2}+\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}=\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}-\frac{z^{-2}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}$$

$$\rightarrow X(z)=X_1(z)+X_2(z)=\frac{1}{1-\left(z^{-1}\right)^{-1}}+\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}-\frac{z^{-2}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}$$

3 مثال 2-3

دو تابع $x_1[n]$ و $x_2[n]$ که با دوره تناوب نمونه‌برداری $T=1^s$ گسسته سازی شده اند، با ضوابط زیر موجود می باشند. تبدیل z تابع حاصل از کانوالو این دو تابع را محاسبه نمایید.

$$x_1[n]=e^{2n}.\sin\left[\frac{p}{4}n\right].u[n]$$

$$x_2[n]=n.[0.5]^n.u[n]$$

حل:

از جدول خواص 2.2 می دانیم که:

$$\mathcal{Z}\{x_1[n]*x_2[n]\}=X_1(z)X_2(z)$$

$$x_1[n]=e^{2n}.\sin\left[\frac{p}{4}n\right].u[n]\xrightarrow[w_0=\frac{p}{4},a=-2]{T2.1.11}X_1(z)=\frac{e^2\sin\left(\frac{p}{4}\right)z^{-1}}{1-2e^2z^{-1}\cos\left(\frac{p}{4}\right)+e^4z^{-2}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}e^2z^{-1}}{1-2\frac{\sqrt{2}}{2}e^2z^{-1}+e^4z^{-2}}$$

$$x_2[n]=n.[0.5]^n.u[n]\xrightarrow[a=0.5]{T2.1.6}X_2(z)=\frac{0.5z^{-1}}{\left(1-0.5z^{-1}\right)^2}$$

اکنون می توان تبدیل z تابع حاصل از کانوالو این دو تابع را محاسبه نمود:

$$x[n]=x_1[n]*x_2[n]\rightarrow X(z)=X_1(z).X_2(z)=\left(\frac{\overbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}e^2}^{5.225}z^{-1}}{1-\sqrt{2}e^2z^{-1}+\underbrace{e^4}_{54.6}z^{-2}}\right)\left(\frac{0.5z^{-1}}{\left(1-0.5z^{-1}\right)^2}\right)$$

$$\rightarrow X(z)\approx\left(\frac{5.225z^{-1}}{1-10.45z^{-1}+54.6z^{-2}}\right)\left(\frac{0.5z^{-1}}{1-z^{-1}+0.25z^{-2}}\right)\approx\frac{2.6125z^{-2}}{1-11.45z^{-1}+63.5z^{-2}-57.2125z^{-3}+13.65z^{-4}}$$

2-2-2- قضایای تبدیل Z:

- **قضیه مقدار اولیه:**

اگر سیگنال $x[n]$ دارای تبدیل z بوده و مقدار $\lim\limits_{z\to\infty}X(z)$ وجود داشته باشد، مقدار اولیه $x[0]$ بصورت زیر محاسبه می گردد

$$x[0]=\lim_{z\to\infty}X(z)$$

- **قضیه مقدار نهایی:**

فرض کنید $x[n]$ $(x[n]=0,n<0)$ دارای تبدیل z بوده و تمام قطب های آن درون دایره واحد قرار گیرند ($x[n]$ می تواند یک قطب ساده روی $z=1$ داشته باشد). در اینصورت مقدار نهایی $x[n]$بصورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\lim_{n\to\infty}x[n]=\lim_{z\to1}\left\{\left(1-z^{-1}\right)X(z)\right\}$$

- **قضیه پارسوال:**

فرض کنید که تبدیل z دنباله $x[n]$بصورت $X(z)$ موجود باشد، آنگاه داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^2[n]=\frac{1}{2\pi i}\oint_C z^{-1}X(z)X(z^{-1})dz$$

که در آن C مسیری است که در آن همگرا خواهد بود.

مثال 2-4 3

اگر تبدیل Z تابع $x[n]$ بصورت زیر داده شود، مقدار $x[0]$ را محاسبه نمایید.

$$X(z)=\frac{\left(1-e^{-T}\right)z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-e^{-T}z^{-1}\right)}$$

حل:

با استفاده از قضیه مقدار اولیه داریم:

$$x[0]=\lim_{z\to\infty}X(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{\left(1-e^{-T}\right)z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-e^{-T}z^{-1}\right)}\overset{\lim\limits_{z\to\infty}z^{-1}=0}{=}\frac{\left(1-e^{-T}\right)0}{(1-0)\left(1-e^{-T}0\right)}=0$$

مثال 3 5-2

اگر تبدیل Z تابع $x[n]$ بصورت زیر داده شود، مقدار نهایی $x[n]$ را محاسبه نمایید.

$$X(z)=\frac{1}{\left(1-z^{-1}\right)}-\frac{1}{\left(1-e^{-aT}z^{-1}\right)}\quad a>0$$

حل:

با استفاده از قضیه مقدار نهایی داریم:

$$\lim_{n\to\infty}x[n]=\lim_{z\to1}\left\{\left(1-z^{-1}\right)X(z)\right\}=\lim_{z\to1}\left\{\left(1-z^{-1}\right)\left(\frac{1}{\left(1-z^{-1}\right)}-\frac{1}{\left(1-e^{-aT}z^{-1}\right)}\right)\right\}$$

$$=\lim_{z\to1}\left\{\left(\frac{\cancel{\left(1-z^{-1}\right)}}{\cancel{\left(1-z^{-1}\right)}}\right)-\left(\frac{\left(1-z^{-1}\right)}{\left(1-e^{-aT}z^{-1}\right)}\right)\right\}=1-\lim_{z\to1}\left(\frac{\left(1-z^{-1}\right)}{\left(1-e^{-aT}z^{-1}\right)}\right)=1-\lim_{z^{-1}\to1}\left(\frac{\left(1-z^{-1}\right)}{\left(1-e^{-aT}z^{-1}\right)}\right)=1-0=1$$

2-3- عکس تبدیل Z

از آنجا که تبدیل Z نیز یک ابزار ریاضی برای ساده سازی محاسبات در حوزه زمان است، برای استفاده مناسب از این ابزار نیاز به روشی است که حوزه z را نیز بتواند به حوزه زمان برگرداند. به این ابزار عکس تبدیل Z گوییم.

$$x[n]=z^{-1}\left\{X(z)\right\}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C X(z)z^{n-1}dz \qquad 3-2$$

که در آن C دایره ایست به مرکز مبدا صفحه z بطوریکه تمام قطب های $X(z)z^{n-1}$ درون آن باشد.

در کاربرد های مهندسی روش تبدیل z، فرم کلی $X(z)$ ممکن است به فرم زیر باشد:

$$X(z)=\frac{b_0\left(z-z_1\right)\left(z-z_2\right)\ldots\left(z-z_m\right)}{\left(z-p_1\right)\left(z-p_2\right)..\left(z-p_n\right)} \qquad 4-2$$

که در آن p_i و z_i ها به ترتیب قطب و صفر های $X(z)$ می باشند.

از آنجا که عکس تبدیل z مستلزم حل:یک رابطه انتگرالی مختلط می باشد، برای محاسبه عکس تبدیل z مانند عکس تبدیل لاپلاس از یکی از روشهای زیر استفاده می کنیم:

- تقسیم کسر
- گسترش به کسر های جزئی[1]
- روش محاسبه ای
- روش انتگرال معکوس سازی

در این جزوه تنها از روش گسترش به کسرهای جزئی استفاده خواهد شد.

[1] برای توضیحات بیشتر به پیوست 2 مراجعه کنید.

3 مثال 2-6

عکس تبدیل Z توابع زیر را محاسبه نمایید.

1) $X(z)=\dfrac{10z}{(z-1)(z-0.2)}$

حل:

ابتدا تابع $X(z)$ را به فرم استاندارد بر حسب z^{-1} تبدیل می کنیم، برای این کار از تک تک جملات از یک z فاکتور می‌گیریم:

$$X(z)=\frac{10z}{(z-1)(z-0.2)}=\frac{10z}{\left(z\left(1-z^{-1}\right)\right)\left(z\left(1-0.2z^{-1}\right)\right)}=\frac{10\cancel{z}}{z^{\cancel{2}}\left(1-z^{-1}\right)\left(1-0.2z^{-1}\right)}$$

$$=\frac{10}{z\left(1-z^{-1}\right)\left(1-0.2z^{-1}\right)}=\frac{10z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-0.2z^{-1}\right)}$$

اکنون با استفاده از روش گسترش کسرهای جزئی، تابع را به دو بخش تقسیم می کنیم:

$$X(z)=\frac{10z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-0.2z^{-1}\right)}=\frac{A}{\left(1-z^{-1}\right)}+\frac{B}{\left(1-0.2z^{-1}\right)}$$

$$\rightarrow A=\lim_{z^{-1}\rightarrow 1}\left(1-z^{-1}\right)X(z)=\lim_{z^{-1}\rightarrow 1}\frac{10z^{-1}}{\left(1-0.2z^{-1}\right)}=\frac{10}{1-0.2}=12.5$$

$$\rightarrow B=\lim_{z^{-1}\rightarrow \frac{1}{0.2}}\left(1-0.2z^{-1}\right)X(z)=\lim_{z^{-1}\rightarrow 5}\frac{10z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)}=\frac{50}{1-5}=-12.5$$

$$\rightarrow X(z)=12.5\left(\frac{1}{\left(1-z^{-1}\right)}-\frac{1}{\left(1-0.2z^{-1}\right)}\right)$$

با استفاده از جدول 2-1 داریم:

$$x[n]=z^{-1}\left\{12.5\left(\frac{1}{\left(1-z^{-1}\right)}-\frac{1}{\left(1-0.2z^{-1}\right)}\right)\right\}=12.5z^{-1}\left\{\left(\frac{1}{\left(1-z^{-1}\right)}-\frac{1}{\left(1-0.2z^{-1}\right)}\right)\right\}$$

$$=12.5\left(z^{-1}\left\{\left(\frac{1}{\left(1-z^{-1}\right)}\right)\right\}-z^{-1}\left\{\frac{1}{\left(1-0.2z^{-1}\right)}\right\}\right)=12.5\left(\underbrace{u[n]}_{T\,2.1.2}-\underbrace{(0.2)^n u[n]}_{T\,2.1.5}\right)=12.5\left(1-0.2^n\right)u[n]$$

2) $X(z)=\dfrac{z+2}{z^2(z-2)}$

ابتدا تابع $X(z)$ را به فرم استاندارد بر حسب z^{-1} تبدیل می کنیم:

$$X(z)=\frac{z+2}{z^2(z-2)}=\frac{z(1+2z^{-1})}{z^3\left(1-2z^{-1}\right)}=\frac{z^{-2}(1+2z^{-1})}{\left(1-2z^{-1}\right)}=z^{-2}\frac{1}{\left(1-2z^{-1}\right)}+\frac{2z^{-3}}{\left(1-2z^{-1}\right)}$$

با استفاده از خاصیت سوم جدول 2-2 داریم:

$$x[n]=z^{-1}\left\{\frac{z^{-2}}{\left(1-2z^{-1}\right)}+\frac{2z^{-3}}{\left(1-2z^{-1}\right)}\right\}\qquad ,Y(z)=z^{-1}\left\{\frac{1}{\left(1-2z^{-1}\right)}\right\}\overset{2.1.5}{=}2^n u[n]$$

$$\xrightarrow{T\,2.2.3}x[n]=2^{n-2}u[n-2]+\overbrace{2\times 2^{n-3}}^{2^{n-2}}u[n-3]=2^{n-2}\left(u[n-2]+u[n-3]\right)=\begin{cases}0 & n=0,1\\ 1 & n=2\\ 2^{n-1} & n\geq 3\end{cases}$$

3) $X(z)=\dfrac{2z^3+z}{(z-1)(z-2)^2}$

$$X(z)=\frac{z\left(2z^2+1\right)}{(z-1)(z-2)^2}$$

$$Y(z)=\frac{X(z)}{z}=\frac{2z^2+1}{(z-1)(z-2)^2}=\frac{A}{(z-1)}+\frac{B}{(z-2)}+\frac{C}{(z-2)^2}$$

$$A=\lim_{z\to1}(z-1)Y(z)=\lim_{z\to1}\frac{\left(2z^2+1\right)}{(z-2)^2}=\frac{3}{(1-2)^2}=3$$

$$B=\lim_{z\to2}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left\{(z-2)^2Y(z)\right\}=\lim_{z\to2}\frac{d}{dz}\left\{\frac{\left(2z^2+1\right)}{(z-1)}\right\}$$

$$=\lim_{z\to2}\frac{(4z)(z-1)-(1)(2z^2+1)}{(z-1)^2}=\frac{(8)(1)-(9)}{1}=-1$$

$$C=\lim_{z\to2}(z-2)^2X(z)=\lim_{z\to2}\frac{\left(2z^2+1\right)}{(z-1)}=\frac{9}{1}=9$$

بنابراین:

$$Y(z)=\frac{X(z)}{z}=\frac{3}{(z-1)}+\frac{-1}{(z-2)}+\frac{9}{(z-2)^2}$$

$$=\frac{3}{z\left(1-z^{-1}\right)}+\frac{-1}{z\left(1-2z^{-1}\right)}+\frac{9}{z^2\left(1-2z^{-1}\right)^2}$$

$$X(z)=\frac{3}{\left(1-z^{-1}\right)}+\frac{-1}{\left(1-2z^{-1}\right)}+\frac{9z^{-1}}{\left(1-2z^{-1}\right)^2}$$

اکنون با استفاده از جدول 2-1 داریم:

$$x[n]=3u[n]-2^nu[n]+\frac{9}{2}n.2^nu[n]$$

$$=3u[n]+2^nu[n](4.5n-1)$$

مثال 2-7 3

عکس تبدیل z تابع زیر را برای $T=1^s$ محاسبه نمایید.

$$X(z)=\frac{z^2+6z}{\left(z^2-2z+2\right)(z-1)}$$

حل:

این بار نیز مانند مثال 2-6-3 عمل می کنیم:

$$X(z)=\frac{z^2+6z}{\left(z^2-2z+2\right)(z-1)}\to Y(z)=\frac{X(z)}{z}=\frac{z+6}{\left(z^2-2z+2\right)(z-1)}$$

$$\to Y(z)=\frac{z+6}{\left(z^2-2z+2\right)(z-1)}=\frac{Az+B}{z^2-2z+2}+\frac{C}{z-1}$$

$$(Az+B)(z-1)+C\left(z^2-2z+2\right)\equiv z+6$$

$$\to Az^2-Az+Bz-B+Cz^2-2Cz+2C\equiv z+6$$

$$\to\begin{cases}A+C=0\\-A+B-2C=1\\-B+2C=6\end{cases}\to\begin{cases}A=-7\\B=8\\C=7\end{cases}$$

$$\to Y(z)=\frac{-7z+8}{z^2-2z+2}+\frac{7}{z-1}=\frac{z\left(-7+8z^{-1}\right)}{z^2\left(1-2z^{-1}+2z^{-2}\right)}+\frac{7}{z\left(1-z^{-1}\right)}$$

$$\to X(z)=z.Y(z)=\frac{\cancel{z^2}\left(-7+8z^{-1}\right)}{\cancel{z^2}\left(1-2z^{-1}+2z^{-2}\right)}+\frac{7\cancel{z}}{\cancel{z}\left(1-z^{-1}\right)}=\frac{\left(-7+8z^{-1}\right)}{\left(1-2z^{-1}+2z^{-2}\right)}+\frac{7}{\left(1-z^{-1}\right)}$$

$$=\frac{\left(-7+7z^{-1}+z^{-1}\right)}{\left(1-2z^{-1}+2z^{-2}\right)}+\frac{7}{\left(1-z^{-1}\right)}=-7\frac{\left(1-z^{-1}\right)}{\left(1-2z^{-1}+2z^{-2}\right)}+\frac{z^{-1}}{\left(1-2z^{-1}+2z^{-2}\right)}+\frac{7}{\left(1-z^{-1}\right)}$$

از جدول 2-1 داریم:

$$\mathcal{z}\left\{e^{-an}\cos[w_0n]u[n]\right\}=\frac{1-e^{-a}\cos\left(w_0\right)z^{-1}}{1-2e^{-a}z^{-1}\cos\left(w_0\right)+e^{-2a}z^{-2}}$$

$$\mathcal{z}\left\{e^{-an}\sin[w_0n]u[n]\right\}=\frac{e^{-a}\sin\left(w_0\right)z^{-1}}{1-2e^{-a}z^{-1}\cos\left(w_0\right)+e^{-2a}z^{-2}}$$

از مقایسه روابط فوق و $X(z)$ داریم:

$$x[n]=\mathcal{z}^{-1}\left\{-7\frac{\left(1-z^{-1}\right)}{\left(1-2z^{-1}+2z^{-2}\right)}+\frac{z^{-1}}{\left(1-2z^{-1}+2z^{-2}\right)}+\frac{7}{\left(1-z^{-1}\right)}\right\}$$

$$\mathcal{z}^{-1}\left\{\frac{\left(1-z^{-1}\right)}{\left(1-2z^{-1}+2z^{-2}\right)}\right\}=\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\left(\frac{p}{4}n\right)u[n]$$

$$\left(\begin{cases}e^{-a}\cos(w_0)=1\\e^{-2a}=2\end{cases}\to\begin{cases}\cos(w_0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\to w_0=\frac{p}{4}\\e^{-a}=\sqrt{2}\end{cases}\right)$$

$$\mathcal{z}^{-1}\left\{\frac{z^{-1}}{\left(1-2z^{-1}+2z^{-2}\right)}\right\}=\left(\sqrt{2}\right)^n\sin\left(\frac{p}{4}n\right)u[n]$$

$$\left(\begin{cases}e^{-a}\cos(w_0)=1\\e^{-2a}=2\end{cases}\to\begin{cases}\cos(w_0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\to w_0=\frac{p}{4}\\e^{-a}=\sqrt{2}\end{cases}\right)$$

$$x[n]=7u[n]-7\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\left(\frac{p}{4}n\right)u[n]+\left(\sqrt{2}\right)^n\sin\left(\frac{p}{4}n\right)u[n]$$

یکی از کاربردهای تبدیل z در حل:معادلات تفاضلی گسسته می باشد. با یک مثال این موضوع را نشان خواهیم داد.

مثال 2-8 3

با استفاده از تبدیل Z معادلات زیر را حل کنید:

1) $y[n]-2y[n-1]=d[n]$

حل:

برای حل این نوع معادلات از طرفین تبدیل z می گیریم:

$$\mathcal{Z}\{y[n]-2y[n-1]\}=\mathcal{Z}\{d[n]\}$$

$$\mathcal{Z}\{y[n]\}-2\mathcal{Z}\{y[n-1]\}=\mathcal{Z}\{d[n]\}$$

$$\rightarrow Y(z)-2z^{-1}Y(z)=1\rightarrow Y(z)\left(1-2z^{-1}\right)=1\rightarrow Y(z)=\frac{1}{1-2z^{-1}}$$

$$\rightarrow y[n]=2^n u[n]$$

2) $\begin{array}{l} y[n+2]-4y[n+1]+4y[n]=0 \\ y[0]=1, y[1]=3 \end{array}$

حل:

برای حل این نوع معادلات از طرفین تبدیل z می گیریم:

$$\mathcal{Z}\{y[n+2]-4y[n+1]+4y[n]\}=0$$

$$\mathcal{Z}\{y[n+2]\}-4\mathcal{Z}\{y[n+1]\}+4\mathcal{Z}\{y[n]\}=0 \qquad (*)$$

$$\mathcal{Z}\{y[n+2]\}\overset{T2.2.5}{=}z^2Y(z)-z^2y[0]-zy[1]=z^2Y(z)-z^2-3z$$

$$\mathcal{Z}\{y[n+1]\}\overset{T2.2.5}{=}zY(z)-zy[0]=zY(z)-z$$

$$\xrightarrow{(*)}\left(z^2Y(z)-z^2-3z\right)-4\left(zY(z)-z\right)+4Y(z)=0\longrightarrow Y(z)\left(z^2-4z+4\right)=z^2-z$$

$$\longrightarrow Y(z)=\frac{z^2-z}{z^2-4z+4}$$

چون کسر دارای صورت و مخرج هم درجه است؛ برای استفاده از عکس تبدیل z ابتدا صورت را به مخرج تقسیم می کنیم:

$$\begin{array}{l|l} z^2-z & z^2-4z+4 \\ \hline -\left(z^2-4z+4\right) & 1 \\ \hline 3z-4 & \end{array}$$

$$Y(z)=\frac{z^2-z}{z^2-4z+4}=1+\frac{3z-4}{z^2-4z+4}=1+\frac{3z}{(z-2)^2}-\frac{4}{(z-2)^2}$$

بنابراین:

$$Y(z)=1+\frac{3z}{z^2\left(1-2z^{-1}\right)^2}-\frac{4}{z^2\left(1-2z^{-1}\right)^2}=1+\frac{\frac{3}{2}\times 2z^{-1}}{\left(1-2z^{-1}\right)^2}-\frac{2\times 2\times z^{-1}\times z^{-1}}{\left(1-2z^{-1}\right)^2}$$

$$\rightarrow y[n]=d[n]+\frac{3}{2}n.2^n u[n]-2(n-1).2^{n-1}u[n-1]=d[n]+\frac{3}{2}n.2^n u[n]-(n-1).2^n u[n-1]$$

نکته:

به اپراتورهای خطی زیر توجه کنید:

$$\nabla x[n]=x[n]-x[n-1]$$
$$\nabla^2 x[n]=\nabla\{\nabla x[n]\}=\nabla\{x[n]-x[n-1]\}=\nabla x[n]-\nabla x[n-1]$$
$$=\left(x[n]-x[n-1]\right)-\left(x[n-1]-x[n-2]\right)$$
$$=x[n]-2x[n-1]+x[n-2]$$
$$\rightarrow \boxed{\nabla^k x[n]=\nabla^{k-1}x[n]-\nabla^{k-1}x[n-1]}$$

$$\Delta x[n]=x[n+1]-x[n]$$
$$\Delta^2 x[n]=\Delta\{\Delta x[n]\}=\Delta\{x[n+1]-x[n]\}=\Delta x[n+1]-\Delta x[n]$$
$$=\left(x[n+2]-x[n+1]\right)-\left(x[n+1]-x[n]\right)$$
$$=x[n+2]-2x[n+1]+x[n]$$
$$\rightarrow \boxed{\Delta^k x[n]=\Delta^{k-1}x[n+1]-\Delta^{k-1}x[n]}$$

3 مثال 2-9

معادله زیر را به روش تبدیل z حل نمایید.

$$\nabla^2 x[n]=d[n-1]$$

حل:

برای حل این معادله ابتدا اپراتور ∇ را اعمال می کنیم:

$$\nabla^2 x[n]=u[n-1]\rightarrow x[n]-2x[n-1]+x[n-2]=u[n-1]$$

اکنون از طرفین تبدیل z می گیریم:

$$\mathbf{z}\,\{x[n]-2x[n-1]+x[n-2]\}=\mathbf{z}\,\{d[n-1]\}\rightarrow \mathbf{z}\,\{x[n]\}-2\mathbf{z}\,\{x[n-1]\}+\mathbf{z}\,\{x[n-2]\}=\mathbf{z}\,\{d[n-1]\}$$

$$\rightarrow X(z)-2z^{-1}X(z)+z^{-2}X(z)=z^{-1}\rightarrow X(z)\left(1-2z^{-1}+z^{-2}\right)=z^{-1}\rightarrow X(z)\left(1-z^{-1}\right)^2=z^{-1}$$

$$\rightarrow X(z)=\frac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}\rightarrow x[n]=n.u[n]$$

2-4- کاربرد MATLAB

1- مثال 2-2

(1)	(2)

clear all
clc
close all
n=-5:5;
y=imp(n+3)+imp(n-3);
stem(n,y)
xlabel('n')
title('delta[n-3]+delta[n+3]')
ylim([-0.25,1.25])
grid on
	clear all
	clc
	close all
	n=-10:10;
	y=unitstep(-n)+n.*unitstep(n-1);
	stem(n,y)
	xlabel('n')
	title('u[-n]+n.u[n-1]')
	ylim([-0.25,120])
	grid on

2- مثال 2-6-3

```
>> syms z
>> expand((z-1)*(z-2)^2)
ans =
z^3 - 5*z^2 + 8*z - 4
>> [r,f,k]=residue([2 0 1],[1 -5 8 -4])
r =
   -1.0000
    9.0000
    3.0000
f =
    2.0000
    2.0000
    1.0000
k =
     []
```

تابع تبدیل گسسته و پیوسته

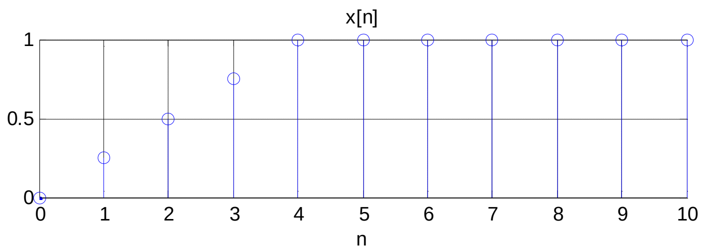
`>> x_t=tf([1],[1 2 2])`
 	
`Transfer function`
`      1`
`-------------`
`s^2 + 2 s + 2`
	`>> x_n=tf([1],[1 2 2],0.1)`
	`Transfer function`
	`      1`
	`-------------`
	`z^2 + 2 z + 2`
	
	`Sampling time 0.1`

2-5- تمرین

1. تبدیل Z توابع زیر را بدست آورید:

الف) $x[n]=n^2 d^{n-1}$ ب) $(n-1)a^{n-2}u[n]$ ج) $\cos\left(\frac{np}{3}\right)u[n-1]$ د) $\frac{1}{2}n(n-1)$

2. تبدیل Z منحنی زیر را بدست آورید:



3. عکس تبدیل Z توابع زیر را بدست آورید:

الف) $X(z)=\frac{z^2+z+2}{(z-1)\left(z^2-z+1\right)}$ ب) $X(z)=\frac{1}{4}\frac{z^{-1}\left(1-z^{-4}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)^2}$ ج) $X(z)=\frac{z^{-1}\left(0.5-z^{-1}\right)}{\left(1-1.5z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)^2}$

4. معادلات تفاضلی زیر را حل نمایید:

الف)
$$x[n+2]-x[n+1]+0.25x[n]=u[n+2]$$
$$x[0]=2$$
$$x[1]=3$$

ب) $2x[n]-2x[n-1]+x[n-2]=u[n]$

بخش سوم:

مطالب زمینه ای

برای بررسی سیستم ها در حوزه Z

3 بخش سوم: مطالب زمینه ای برای بررسی سیستم ها در حوزه z

3-1- مقدمه

استفاده از روش های تحلیل z برای تحلیل و طراحی سیستم های LTI تک ورودی و تک خروجی[1] زمان-گسسته بسیار مفید می باشد. در این فصل به بررسی روش های تحلیل و طراحی سیستم های زمان-گسسته از این طریق می پردازیم. البته بکارگیری تبدیل z محدودیت های خاصی نیز دارد:

- زمان نمونه‌برداری سیگنال ها باید بسیار کمتر از مهمترین ثابت زمانی سیستم باشد.
- سیگنال نمونه‌برداری شده در بین دو لحظه نمونه‌برداری نباید تغییرات زیادی داشته باشد.
- سیستم باید از نوع SISO باشد.

3-2- نمونه‌برداری ضربه ای و نگهداری سیگنال

سیستم های زمان-گسسته ممکن است دارای بخش های مختلف زمان-گسسته و زمان-پیوسته باشند. در تحلیل سیستم های کنترل زمان-گسسته تبدیل z نقش مهمی را ایفا می کند که با معرفی مفهوم نمونه‌برداری ضربه ای می توان بیشتر به این موضوع پرداخت.

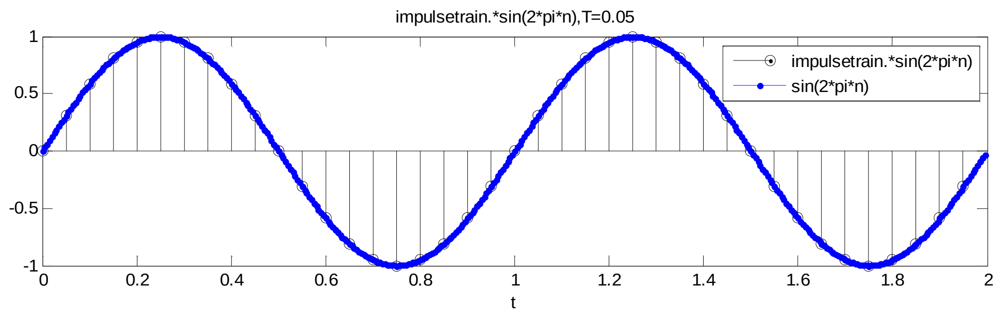
همانطور که در بخش یک بیان گردید، برای نمونه‌برداری یک سیگنال با دوره تناوب T از یک سیگنال قطار ضربه بصورت زیر استفاده می شود:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} d(t-nT) \qquad 1\text{-}3$$

برای نمونه‌برداری از سیگنال $x(t)$، $x(t)$ بر روی این سیگنال که به اصطلاح سیگنال حامل[2] (کاریر) نامیده می شود، سوار می‌گردد:

$$x^*(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t).d(t-nT) \qquad 2\text{-}3$$

سیگنال $x^*(t)$ را سیگنال مدوله شده[3] و کل این فرآیند را مدولاسیون دامنه[4] گویند.



شکل 3-1 مدولاسیون دامنه سیگنال $\sin(20\pi t)$ با دوره تناوب نمونه‌برداری $T=0.05^s$

[1] Single Input Single Output (SISO)
[2] Carrier
[3] Modulated signal
[4] Amplitude Modulation

در مرحله بعد با یک مدار نگهدارنده مرتبه kام با رابطه زیر، سیگنال در فواصل نمونه‌برداری نگهداری می شود. (یعنی دامنه هر نمونه از یک لحظه نمونه‌برداری تا لحظه بعدی با این رابطه نگه داشته می شود.)

$$h(nT+t)=\begin{cases} x(nT) & t=nT \\ a_k t^k + a_{k-1}t^{k-1}+\ldots+a_1 t + x(nT) & nT<t<(n+1)T \end{cases} \qquad 2\text{-}3$$

که در آن $a_i, i=1,\ldots n$ توابعی بر حسب مقادیر قبلی سیگنال و $h(t)$ خروجی مدار نگهدارنده می باشد. بطور کلی رابطه 2-3 را می توان بصورت

$$h(nT+t)=a_k t^k + a_{k-1}t^{k-1}+\ldots+a_1 t + x(nT) \qquad 0\le t<T \qquad 3\text{-}3$$

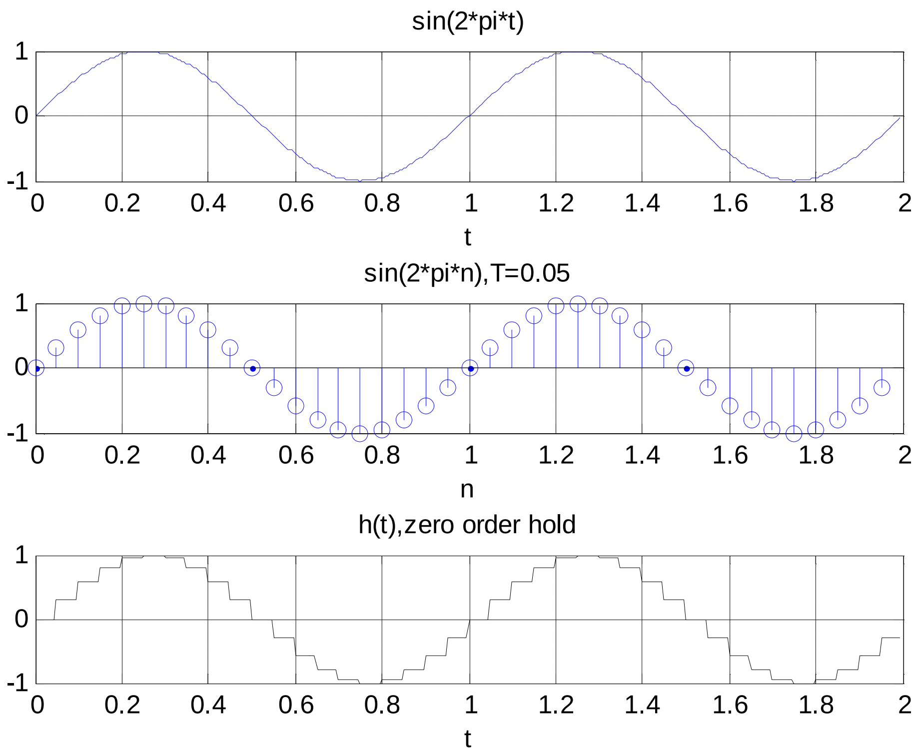
بیان نمود. هر چه مرتبه نگهدارنده (k) بالاتر باشد، دقت سیستم بالاتر خواهد بود اما این دقت به بهای تاخیر زمانی بیشتر خواهد بود. در این بخش تنها به معرفی نگهدارنده های مرتبه صفر و اول می‌پردازیم.

3-2-1- نگهدارنده مرتبه صفر

اگر در رابطه 3-3 مقدار k را برابر صفر قرار دهیم، داریم:

$$h(nT+t)=x(nT) \qquad 0\le t<T \qquad 4\text{-}3$$

آنگاه پس از هر بار نمونه‌برداری مقدار سیگنال تا نمونه‌برداری دیگر ثابت خواهد ماند. به شکل زیر توجه کنید:



شکل 3-2 مراحل نمونه‌برداری و نگهداری سیگنال $\sin(20\pi t)$ با دوره تناوب نمونه‌برداری $T=0.05^s$

در اینجا خروجی $h(t)$ که خروجی مدار نگهدارنده می باشد را می توان بصورت زیر بیان نمود

$$h(t)=x(0)\left[u(t)-u(t-T)\right]+x(T)\left[u(t-T)-u(t-2T)\right]+\ldots$$

$$h(t)=\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)\left[u(t-nT)-u(t-(n+1)T)\right] \qquad 5\text{-}3$$

تبدیل لاپلاس رابطه 3-5 برابر است با:

$$L\{h(t)\}=L\left\{\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)\left[u(t-nT)-u(t-(n+1)T)\right]\right\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)L\{u(t-nT)-u(t-(n+1)T)\}=\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)\left(L\{u(t-nT)\}-L\{u(t-(n+1)T)\}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)\left(\left(\frac{1}{s}e^{-nTs}\right)-\left(\frac{1}{s}e^{-(n+1)Ts}\right)\right)=\frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)\left(\left(e^{-nTs}\right)-\left(e^{-nTs}e^{-Ts}\right)\right)=\frac{1}{s}\left(1-e^{-Ts}\right)\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)e^{-nTs}$$

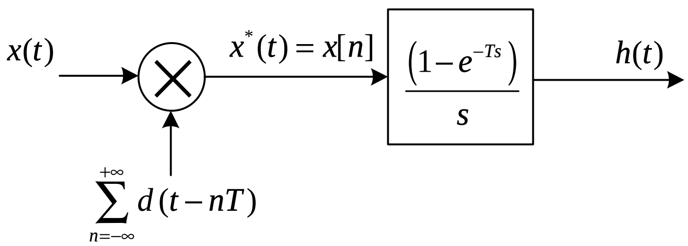
بنابراین:

$$H(s)=\frac{\left(1-e^{-Ts}\right)}{s}\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)e^{-nTs} \qquad 6\text{-}3$$

از بخش قبل می دانیم که $z=e^{Ts}$ بنابراین رابطه 3-6 را می توان به شکل روابط 3-7 بیان نمود:

$$H(s)=\frac{\left(1-e^{-Ts}\right)}{s}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)z^{-n}}_{X(z)}=G_{h0}(s).X^{*}(s) \qquad 7\text{-}3$$

که در آن $G_{h0}(s)$ تابع تبدیل مدار نگهدار مرتبه صفر و $X^{*}(s)$ همان $X(z)$ می باشد. به بلوک دیاگرام زیر توجه کنید:



شکل 3-3 بلوک دیاگرام مدار نگهدارنده مرتبه صفر

خروجی دیاگرام 3-3 شکل موجیست که در فاصله های نمونه‌برداری با مقدار سیگنال در لحظه نمونه‌برداری نگهداشته شده است. (شکل 3-2-3)

3-2-1- نمونه بردار مرتبه اول

اگر در رابطه 3-3 مقدار k را برابر یک قرار دهیم، داریم:

$$h(nT+t)=a_1 t+x(nT) \qquad 8\text{-}3$$

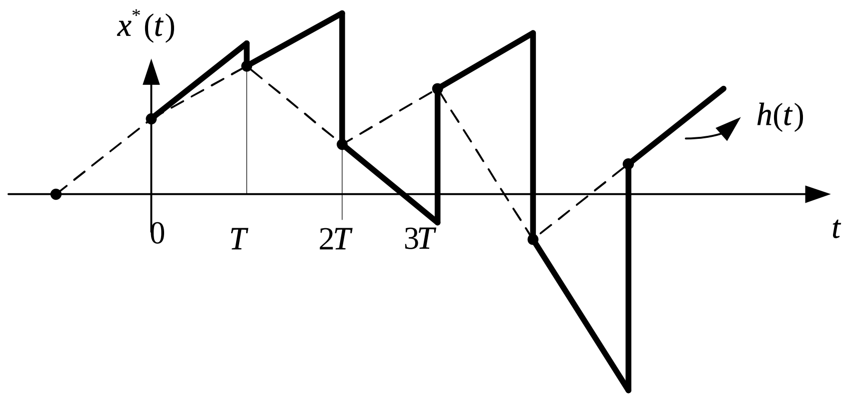
که در آن:

$$a_1=\frac{x(nT)-x((n-1)T)}{T}$$

می باشد. در این حالت پس از هر بار نمونه‌برداری مقدار سیگنال تابعی خطی از مقادیر قبلی خود خواهد بود:

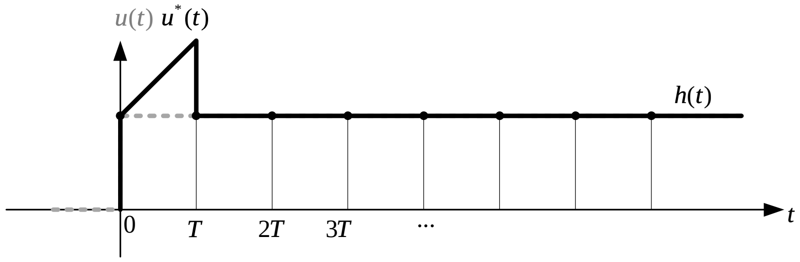
$$h(nT+t)=\left(\frac{x(nT)-x((n-1)T)}{T}\right)t+x(nT)\qquad 0\le t<T \qquad 9\text{-}3$$

به شکل زیر توجه کنید:



شکل 3-4 مراحل نمونه‌برداری و نگهداری سیگنال $x(t)$ با دوره تناوب نمونه‌برداری T

از آنجا که نگهدارنده مرتبه اول به مقادیر گذشته سیگنال بستگی دارد نمی توان مانند نگهدارنده مرتبه صفر فرم کلی برای آن بدست آورد، اما بعنوان مثال اگر ورودی $x(t)$ را پله واحد در نظر بگیریم:



شکل 3-5 مراحل نمونه‌برداری و نگهداری سیگنال $u(t)$ با دوره تناوب نمونه‌برداری $T=0.4^s$

خروجی $h(t)$ که خروجی مدار نگهدارنده می باشد را با استفاده از رابطه 3-9 می توان بصورت زیر بیان نمود:

$$h(nT+t)=\left(\frac{u(nT)-u((n-1)T)}{T}\right)t+u(nT)\qquad 0\le t<T$$

$$\to h(0+t)=\left(\frac{x(0)-x(-T)}{T}\right)t+x(0)=\left(\frac{1-0}{T}\right)t+1=\frac{t}{t}+1$$

$$\to h(T+t)=\left(\frac{x(T)-x(0)}{T}\right)t+x(T)=\left(\frac{1-1}{T}\right)t+1=1$$

$\vdots$

$$\to h(nT+t)=\left(\frac{x(nT)-x((n-1)T)}{T}\right)t+x(nT)=\left(\frac{1-1}{T}\right)t+1=1$$

که این موضوع به خوبی در شکل 3-4 دیده می شود. از شکل 3-4 داریم:

$$h(t)=\left(1+\frac{t}{T}\right)u(t)-\left(\frac{t}{T}\right)u(t-T)=\left(1+\frac{t}{T}\right)u(t)-\left(\frac{t-T}{T}\right)u(t-T)-u(t-T)$$

بنابراین تبدیل لاپلاس خروجی نگهدارنده مرتبه اول برای ورودی پله واحد برابر است با:

$$H(s)=\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{Ts^2}\right)-\frac{1}{Ts^2}e^{-Ts}-\frac{1}{s}e^{-Ts}=\frac{1-e^{-Ts}}{s}+\frac{1-e^{-Ts}}{Ts^2}=\left(1-e^{-Ts}\right)\left(\frac{1+Ts}{Ts^2}\right)$$

از آنجا که ورودی نگهدارنده مرتبه اول سیگنال پله نمونه‌برداری شده بود داریم:

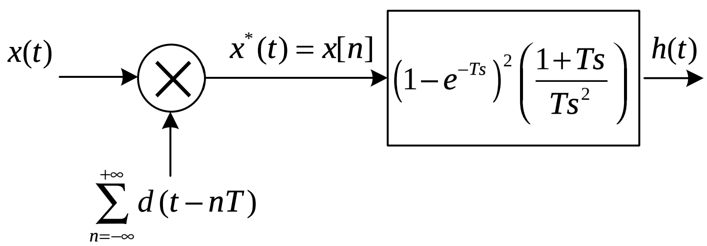
$$u^*(t)=u[n]\rightarrow U^*(s)=U(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}\overset{z=e^T}{=}\frac{1}{1-e^{-sT}}$$

اکنون با داشتن تبدیل لاپلاس ورودی و خروجی، تابع تبدیل نگهدارنده مرتبه اول بدست می آید:

$$\begin{cases}U^*(s)=\dfrac{1}{1-e^{-sT}}\\ H(s)=\left(1-e^{-Ts}\right)\left(\dfrac{1+Ts}{Ts^2}\right)\end{cases}\rightarrow G_{h1}(s)=\frac{H(s)}{U^*(s)}=\frac{\left(1-e^{-Ts}\right)\left(\dfrac{1+Ts}{Ts^2}\right)}{\dfrac{1}{1-e^{-sT}}}=\left(1-e^{-Ts}\right)^2\left(\frac{1+Ts}{Ts^2}\right)$$

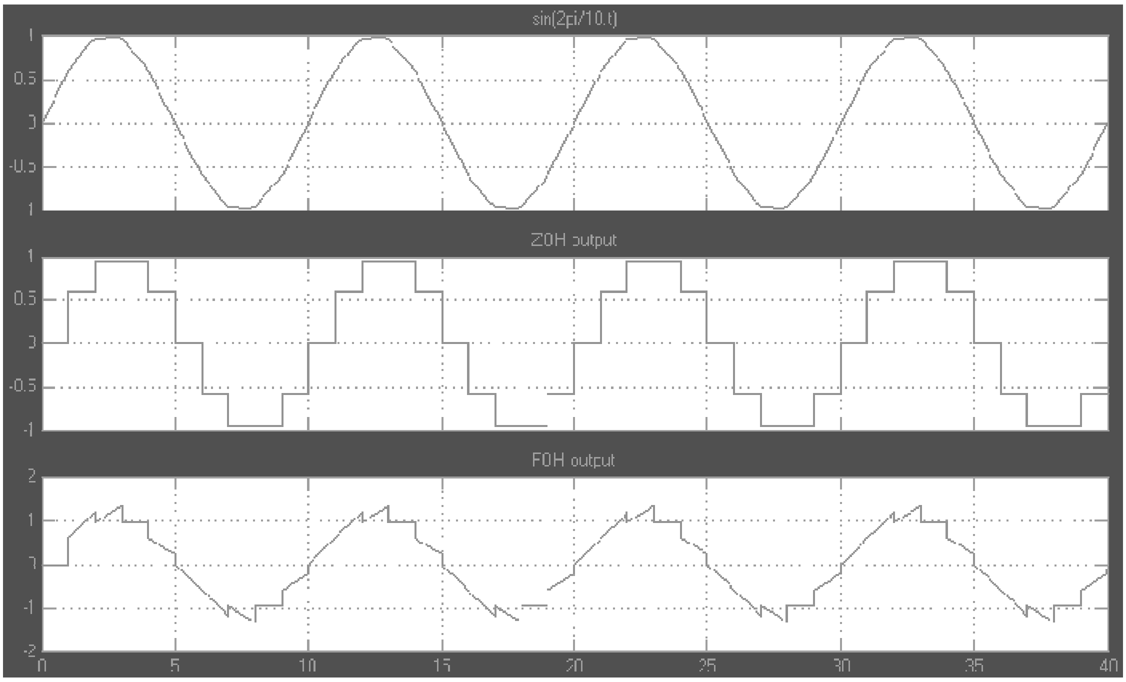
$$G_{h1}(s)=\left(1-e^{-Ts}\right)^2\left(\frac{1+Ts}{Ts^2}\right) \qquad \text{10-3}$$

بنابراین بلوک دیاگرام مدار نگهدارنده مرتبه اول بصورت زیر خواهد بود:



شکل 3-6 بلوک دیاگرام مدار نگهدارنده مرتبه اول

شکل 3-7 مقایسه بین دو مدارنگهدارنده معرفی شده را نشان می دهد:



شکل 3-7 مقایسه خروجی نمونه بردار مرتبه صفر و اول بر روی سیگنال $\sin\left(\frac{2p}{10}t\right)$ با $T=1^s$

بطور کلی مدارهای نگهدار فیلترهای پایین گذر هستند، یعنی فرکانس بالای موجود در سیگنال نمونه‌برداری شده را حذف می‌کنند. در صورتیکه بخواهیم سیگنال گسسته شده را مجددا به سیگنال زمان-پیوسته تبدیل کنیم، (شکل 1-7) بار دیگر به مدارهای نگهدار احتیاج خواهیم داشت. فیلتر های پایین گذر ایده آل دقیقاً سیگنال اصلی را بازسازی خواهند کرد، اما مدارهای نگهدار مرتبه صفر و اول واقعی (که تقریبی از فیلتر پایین گذر ایده آل هستند) سیگنال اصلی را بطور تقریبی بازسازی خواهند کرد.

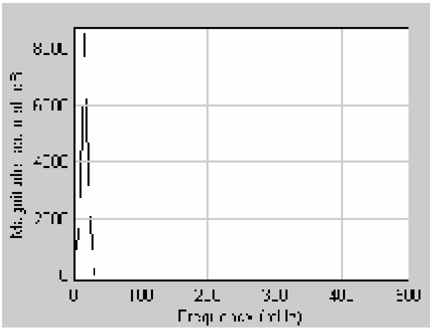
3-3- بازسازی سیگنال های اصلی از روی سیگنال های نمونه‌برداری شده

برای بازسازی یک سیگنال با استفاده از مدارهای نگهدار(فیلتر پایین گذر) مهمترین نکته انتخاب درست دوره تناوب نمونه‌برداری می‌باشد. اگر فرکانس نمونه‌برداری در مقایسه با بالاترین مولفه فرکانسی موجود در سیگنال زمان-پیوسته به قدر کافی بالا باشد، دقت بازسازی سیگنال اصلی بیشتر خواهد بود.

تعریف

طیف فرکانسی نمودار اندازه یک سیگنال بر حسب فرکانس را طیف فرکانسی سیگنال می گویند.

بعنوان مثال طیف فرکانسی تابع $20\sin(0.1t)$ که با نرم افزار MATLAB رسم شده است بصورت زیر می باشد:



شکل 3-8 طیف فرکانسی سیگنال $20\sin(0.1t)$

برای درک بهتر این موضوع به یادآوری مباحث سری و تبدیل فوریه می پردازیم:

یادآوری

سری فوریه سیگنال متناوب $x(t)$ با دوره تناوب T بصورت زیر بیان می گردد

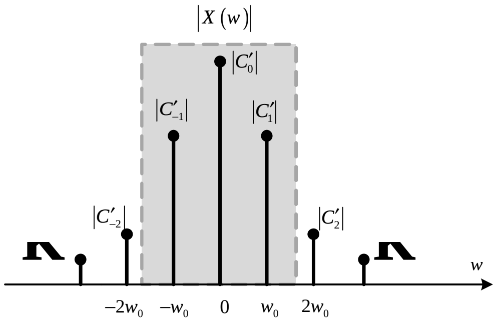
$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\left(\frac{2p\,n}{T}it\right)} \qquad ,C_n=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-i\frac{2p}{T}n} \qquad 11\text{-}3$$

تبدیل فوریه این سیگنال با مراجعه به جدول تبدیلات فوریه[1] بصورت زیر بدست می آید

$$X(w)=2p\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n d\left(w-n\underbrace{\left(\frac{2p}{T}\right)}_{w_0}\right) \overset{C'_n=2p\,C_n}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C'_n d(w-nw_0) \qquad 12\text{-}3$$

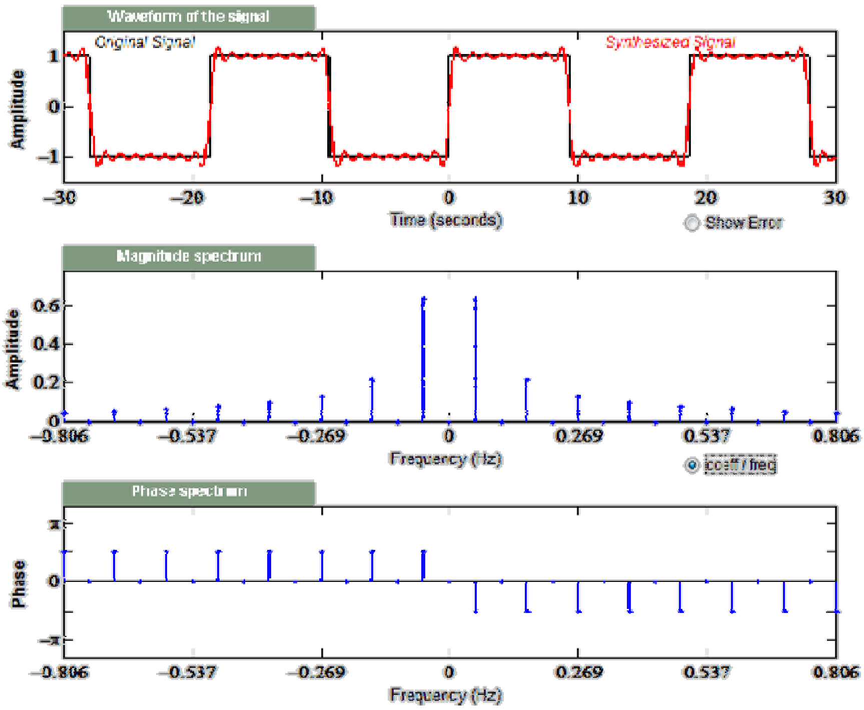
بنابراین یک سیگنال متناوب $x(t)$ با دوره تناوب T در حوزه فرکانسی دارای شکل موجی به صورت زیر می باشد:

[1] برای توضیحات بیشتر به پیوست 2 مراجعه نمایید.



شکل 3-8 طیف فرکانسی سیگنال $x(t)$ با دوره تناوب T

همانطور که از شکل 3-8 نیز پیداست، هارمونیک های سیگنال با افزایش n نسبت به هارمونیک اول به شدت کاهش پیدا می‌کنند. بعنوان مثال برای موج مربعی با دوره تناوب $T=18.6154$ سری فوریه و نمودارهای اندازه و زاویه ضرایب فوریه بصورت زیر می‌باشند:



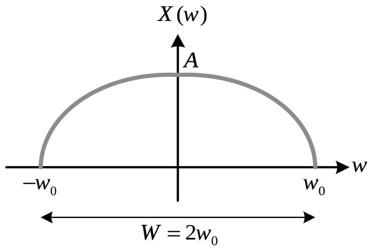
شکل 3-9 سری فوریه و نمودارهای فرکانسی موج مربعی با دوره تناوب $T=18.6154$

بنابراین با بررسی طیف فرکانسی سیگنال های گوناگون متوجه می شویم که بیشترین مقدار قدرت یک سیگنال در محدوده ای شامل هارمونیک اول (یعنی w_0) آن (ناحیه داخل کادر خط چین در شکل 3-8) قرار دارد. به همین جهت طیف فرکانسی یک سیگنال را در این محدوده ترسیم می کنند. اکنون می توانیم به مبحث بازسازی سیگنال باز می گردیم.

۷ قضیه نمونه‌برداری نایکوئیست

اگر w_s فرکانس متناظر با دوره T برای نمونه‌برداری سیگنال $x(t)$ باشد، برای بازسازی مناسب سیگنال نمونه‌برداری شده باید $w_s > 2w_0$ باشد که در آن $2w_0$ عرض محدوده فرکانسی طیف سیگنال $x(t)$ می باشد.

برای درک بهتر این موضوع، به شکل های زیر توجه کنید:

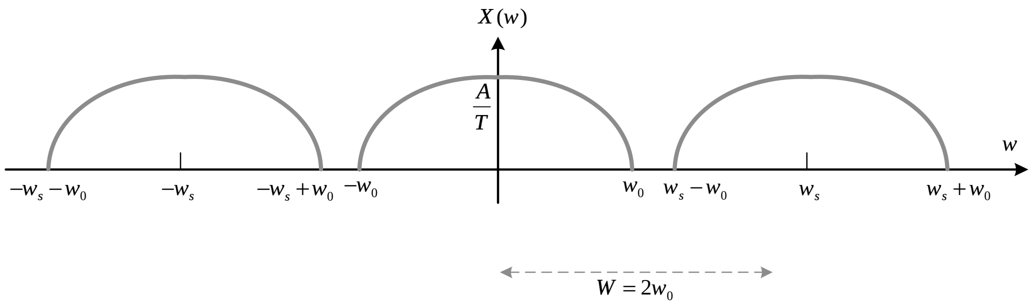


شکل 3-10 نمای کلی طیف فرکانسی یک سیگنال ($x(t)$)

اگر این سیگنال با یک قطار ضربه با دوره تناوب T_s نمونه‌برداری گردد، بر طبق رابطه 3-2 داریم:

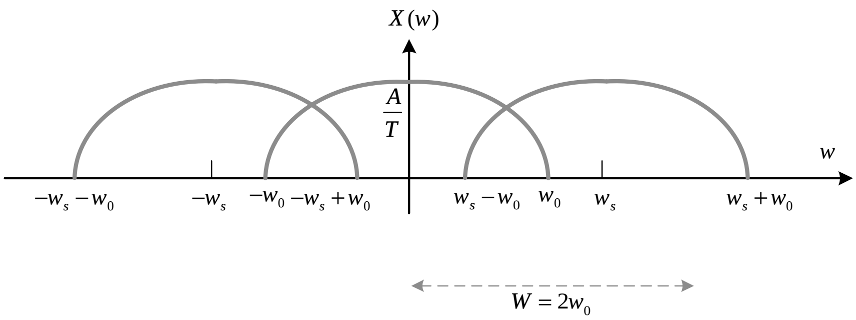
$$x^*(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t).d(t-nT) \xrightarrow{w_s=\frac{2p}{T}} X^*(w)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(w+nw_s)$$

یعنی طیف سیگنال با فاصله هایی به اندازه w_s در محور فرکانس تکرار می گردد. حال اگر w_sمطابق قضیه نمونه‌برداری انتخاب گردد، داریم:



شکل 3-11 نمای کلی طیف فرکانسی سیگنال $x^*(t)$ با رعایت معیار قضیه نمونه‌برداری

اما اگر w_sمطابق قضیه نمونه‌برداری انتخاب نگردد، داریم:



شکل 3-12 نمای کلی طیف فرکانسی سیگنال $x^*(t)$ با عدم رعایت معیار قضیه نمونه‌برداری

اکنون برای بدست آوردن سیگنال اصلی $x(t)$ با استفاده از طیف شکل 3-11 و یک فیلتر پایین گذر مناسب (مدار نگهدارنده) می‌توان به سیگنال اصلی دست پیدا کرد. این درحالیست که چنین عملی برای طیف شکل 3-12 امکان پذیر نمی باشد.

3-4- تابع تبدیل پالسی

از درس کنترل خطی می دانیم که تابع تبدیل سیستم زمان-پیوسته، تبدیل لاپلاس خروجی زمان-پیوسته را به تبدیل لاپلاس ورودی زمان-پیوسته ارتباط می دهد. در چنین سیستمی خروجی از طریق رابطه انتگرال کانولوشن به ورودی مرتبط می گردد:

$$y(t)=\int_0^t g(t-t)x(t)dt=\int_0^t x(t-t)g(t)dt=g(t)*x(t) \qquad 13\text{-}3$$

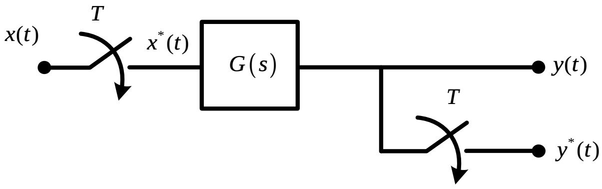
با اعمال تبدیل لاپلاس بر روی معادله 13-3 تابع تبدیل مربوط به آن بدست می آید:

$$Y(s)=\mathcal{L}\{g(t)*x(t)\}=G(s).X(s)\rightarrow G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)} \qquad 14\text{-}3$$

اما برای سیستم های زمان-گسسته تابعی که تبدیل z خروجی را در لحظه های نمونه‌برداری به تبدیل z ورودی نمونه برداری شده ارتباط می دهد را <u>**تابع تبدیل پالسی**</u> گویند. در چنین سیستمی خروجی رابطه مجموع کانولوشنی به ورودی مرتبط می‌گردد:

$$y(nT)=\sum_{h=0}^{n}g(nT-hT)x(nT)=\sum_{h=0}^{n}x(nT-hT)g(nT)=x(nT)*g(nT) \qquad 15\text{-}3$$

که در آن $x(nT)$ یا $x[n]$ همان ورودی نمونه برداری شده است. به شکل زیر توجه کنید:



شکل 3-13 یک سیستم زمان-پیوسته با ورودی و خروجی نمونه برداری شده

با اعمال تبدیل z بر روی معادله 3-15 تابع تبدیل پالسی مربوط به آن بدست می آید:

$$Y(z)=\mathcal{Z}\{g[n]*x[n]\}=G(z).X(z)\rightarrow G(z)=\frac{Y(z)}{X(z)} \qquad 15\text{-}3$$

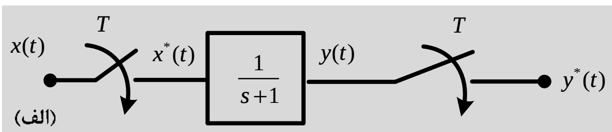
در تحلیل سیستم های کنترل زمان-گسسته اغلب مواقع با سیگنالهایی که برخی نمونه برداری شده و برخی زمان-پیوسته هستند سروکار داریم. بنابراین برای محاسبه تابع تبدیل پالسی و تحلیل اینگونه سیستم ها باید بتوانیم تبدیل سیگنال های خروجی سیستم هایی را که شامل عملیات نمونه برداری در مراحل مختلف سیستم هستند را بدست آوریم. این در حالیست که در اکثر مسائل تابع تبدیل سیستم زمان-پیوسته (تبدیل لاپلاس) داده می شود. اگر ورودی یک بلوک توسط قطار ضربه با دوره T نمونه برداری شود داریم:

$$Y(z)=\mathcal{Z}\{Y^*(s)\}=\mathcal{Z}\{G^*(s).X^*(s)\}=G(z).X(z)$$

تبدیل z را می توان به عنوان تبدیل لاپلاس ستاره دار با جایگزین کردن Z با e^{sT} در نظر گرفت.

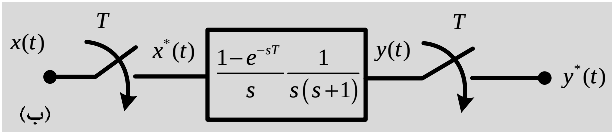
3 مثال 3-1

تابع تبدیل پالسی سیستم های زیر را بدست آورید:



حل:

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)}\rightarrow G(z)=\mathcal{Z}\{G(s)\}\overset{T2.1.7}{=}\frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}}$$



حل:

$$G(s)=\frac{1-e^{-sT}}{s}\frac{1}{s(s+1)}$$

$$\to G(z)=\mathcal{Z}\left\{(1-e^{-sT})\frac{1}{s^2(s+1)}\right\}=(1-e^{-sT})\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)}\right\}\overset{z=e^{sT}}{=}(1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)}\right\}$$

$$=(1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\underbrace{\frac{1}{s^2(s+1)}}_{F(s)}\right\}=(1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s+1}\right\}$$

$$A=\frac{1}{1!}\lim_{s\to0}\frac{d}{ds}\left(s^2F(s)\right)=\lim_{s\to0}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+1}\right)=\lim_{s\to0}\frac{d}{ds}\left(\frac{0\times(s+1)-1\times1}{(s+1)^2}\right)=\frac{-1}{(0+1)^2}=-1$$

$$B=\lim_{s\to0}\left(s^2F(s)\right)=\lim_{s\to0}\left(\frac{1}{s+1}\right)=\frac{1}{0+1}=1$$

$$C=\lim_{s\to-1}\left((s+1)F(s)\right)=\lim_{s\to-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)=\frac{1}{1}=1$$

$$\to G(z)=(1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}\right\}\overset{T2.1}{=}(1-z^{-1})\left(\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}-\frac{1}{(1-z^{-1})}+\frac{1}{(1-e^{-T}z^{-1})}\right)$$

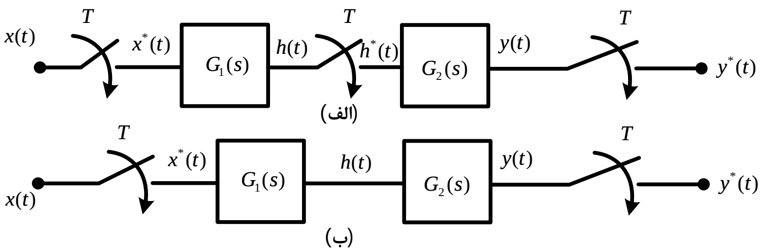
$$=\cancel{(1-z^{-1})}\left(\frac{Tz^{-1}(1-e^{-T}z^{-1})-(1-e^{-T}z^{-1})(1-z^{-1})+(1-z^{-1})^2}{(1-z^{-1})^{\cancel{2}}(1-e^{-T}z^{-1})}\right)$$

$$=\frac{Tz^{-1}-Tz^{-2}e^{-T}\cancel{-1}+z^{-1}+e^{-T}z^{-1}-e^{-T}z^{-2}\cancel{+1}-2z^{-1}+z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-e^{-T}z^{-1})}$$

$$=\frac{(T-1+e^{-T})z^{-1}+z^{-2}(1-e^{-T}-Te^{-T})}{(1-z^{-1})(1-e^{-T}z^{-1})}$$

3-4-1- تابع تبدیل پالسی برای بلوک های متوالی

اکنون برای بلوک های پشت سر هم تابع تبدیل پالسی را محاسبه می کنیم:



شکل 3-14 دو روش برای اتصال بلوک های پشت سر هم

برای شکل 3-14 الف داریم:

$$H(s)=G_1(s).X^*(s)$$
$$Y(s)=G_2(s).H^*(s)$$

با اعمال لاپلاس ستاره دار داریم:

$$\begin{cases} H^*(s)=G_1^*(s).X^*(s) \\ Y^*(s)=G_2^*(s).H^*(s) \end{cases} \rightarrow Y^*(s)=G_2^*(s)G_1^*(s).X^*(s) \rightarrow Y(z)=G_1(z)G_2(z).X(z)$$

بنابراین تابع تبدیل پالسی شکل 3-14 الف برابر $G_1(z)G_2(z)$ می باشد. اما برای شکل 3-14 ب داریم:

$$Y(s)=\underbrace{G_2(s)G_1(s)}_{G_{12}(s)}.X^*(s)$$

با اعمال لاپلاس ستاره دار داریم:

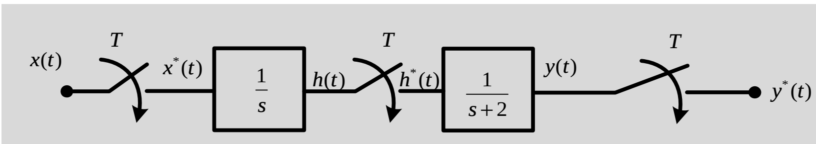
$$Y^*(s)=G_{12}^*(s).X^*(s) \rightarrow Y(z)=G_{12}(z).X(z)$$

بنابراین تابع تبدیل پالسی شکل 3-14 ب برابر $G_1G_2(z)$ می باشد که:

$$G_1G_2(z) \neq G_1(z).G_2(z)$$

3 مثال 3-2

تابع تبدیل پالسی سیستم های زیر را برای $T=1^s$ بدست آورید:



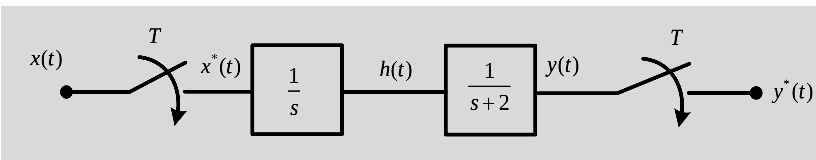
(الف)

حل:

$$G_1(s)=\frac{1}{s} \rightarrow G_1(z)=z\left\{\frac{1}{s}\right\}=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$G_2(s)=\frac{1}{s+2} \rightarrow G_2(z)=z\left\{\frac{1}{s+2}\right\}=\frac{1}{1-e^{-2T}z^{-1}}=\frac{1}{1-e^{-2}z^{-1}} \overset{e^{-2}=0.1353}{=} \frac{1}{1-0.13z^{-1}}$$

$$\rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)}=G_1(z).G_2(z)=\frac{1}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-0.13z^{-1}\right)}$$



(ب)

حل:

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=G_{12}(z)$$

$$\begin{cases} G_1(s)=\frac{1}{s} \\ G_2(s)=\frac{1}{s+2} \end{cases} \rightarrow G_{12}(s)=\frac{1}{s(s+2)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}\right)$$

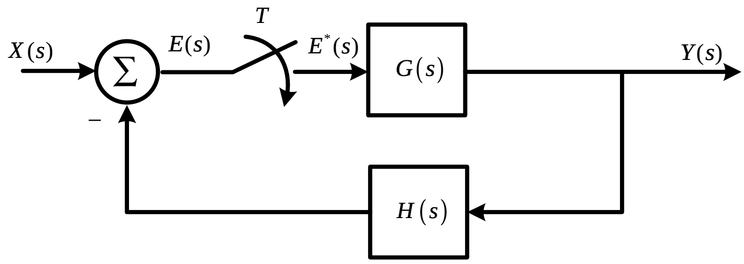
$$A=\lim_{s\to 0}\left(s.G_{12}(s)\right)=\lim_{s\to 0}\left(\frac{1}{(s+2)}\right)=\frac{1}{0+2}=\frac{1}{2}\ ,B=\lim_{s\to -2}\left((s+2).G_{12}(s)\right)=\lim_{s\to -2}\left(\frac{1}{s}\right)=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$$

$$\to G_{12}(z)=z\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}\right)\right\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-0.13z^{-1}}\right)$$

$$=\frac{\cancel{1}-0.13z^{-1}\cancel{-1}+z^{-1}}{2\left(1-z^{-1}\right)\left(1-0.13z^{-1}\right)}=\frac{(1-0.13)\,z^{-1}}{2\left(1-z^{-1}\right)\left(1-0.13z^{-1}\right)}$$

3-4-2- تابع تبدیل پالسی برای سیستم حلقه بسته

در یک سیستم حلقه بسته، وجود یا عدم وجود یک نمونه بردار در حلقه در رفتار سیستم تاثیر می‌گذارد. سیستم حلقه بسته شکل زیر را در نظر بگیرید:



شکل 3-15 دیاگرام بلوکی یک سیستم حلقه بسته با وجود نمونه بردار

در این سیستم از سیگنال خطا نمونه برداری می شود:

$$\begin{cases}E(s)=X(s)-H(s)Y(s)\\ Y(s)=G(s)E^*(s)\end{cases}\to E(s)=X(s)-\underbrace{G(s)H(s)}_{=GH(s)}E^*(s)$$

با اعمال تبدیل لاپلاس ستاره دار داریم:

$$E^*(s)=X^*(s)-GH^*(s)E^*(s)\to E^*(s)\left(1+GH^*(s)\right)=X^*(s)\to E^*(s)=\frac{X^*(s)}{1+GH^*(s)}$$

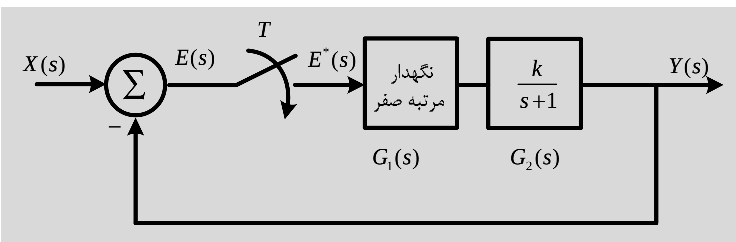
از طرفی:

$$Y(s)=G(s)E^*(s)\to Y^*(s)=G^*(s)E^*(s)\to Y^*(s)=\frac{G^*(s)X^*(s)}{1+GH^*(s)}\to Y(z)=\frac{G(z)X(z)}{1+GH(z)}$$

$$T(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{G(z)}{1+GH(z)} \qquad 16\text{-}3$$

3 مثال 3-3

تابع تبدیل پالسی سیستم زیر را برای $T=1^s$ بدست آورید:



حل:

$$\begin{cases}Y(s)=G_1(s)G_2(s)E^*(s)=G_{12}(s)E^*(s)\\ E(s)=X(s)-Y(s)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}Y^*(s)=G_{12}{}^*(s)E^*(s)\\ E^*(s)=X^*(s)-Y^*(s)\end{cases}$$

$$\rightarrow Y^*(s)=G_{12}{}^*(s)\left(X^*(s)-Y^*(s)\right)\rightarrow Y^*(s)\left(1+G_{12}{}^*(s)\right)=G_{12}{}^*(s)X^*(s)$$

$$\rightarrow T^*(s)=\frac{G_{12}{}^*(s)}{1+G_{12}{}^*(s)}\rightarrow T(z)=\frac{G_{12}(z)}{1+G_{12}(z)}$$

بنابراین ابتدا تک تک توابع را محاسبه می کنیم:

$$G_{12}(z)=\mathbf{z}\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{k}{s+1}\right\}\overset{T=1}{=}k\left(1-e^{-Ts}\right)\mathbf{z}\left\{\underbrace{\frac{1}{s(s+1)}}_{F(s)}\right\}\overset{e^{-Ts}=z^{-1}}{=}k\left(1-z^{-1}\right)\mathbf{z}\left\{\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1}\right\}$$

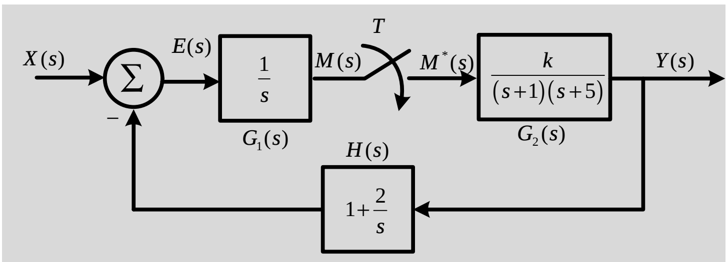
$$=k\left(1-z^{-1}\right)\mathbf{z}\left\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right\}\overset{T=1}{=}k\left(1-z^{-1}\right)\left(\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-e^{-1}z^{-1}}\right)$$

$$A=\lim_{s\to 0}\left(s.F(s)\right)=\lim_{s\to 0}\left(\frac{1}{(s+1)}\right)=\frac{1}{0+1}=1\ ,B=\lim_{s\to -1}\left((s+1).F(s)\right)=\lim_{s\to -1}\left(\frac{1}{s}\right)=-1$$

$$G_{12}(z)=k\cancel{\left(1-z^{-1}\right)}\left(\frac{\cancel{1}-e^{-1}z^{-1}-\cancel{1}+z^{-1}}{\cancel{\left(1-z^{-1}\right)}\left(1-e^{-1}z^{-1}\right)}\right)=\frac{k\left(1-e^{-1}\right)z^{-1}}{\left(1-e^{-1}z^{-1}\right)}$$

مثال 3-4

رابطه بین ورودی و خروجی سیستم زیر را بدست آورید:



حل:

$$\begin{cases}Y(s)=G_2(s)M^*(s)\\ E(s)=X(s)-H(s)Y(s)\rightarrow M(s)=G_1(s)\left(X(s)-H(s)Y(s)\right)\\ M(s)=G_1(s)E(s)\end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{cases}Y(s)=G_2(s)M^*(s)\\ M(s)=G_1(s)X(s)-G_1(s)H(s)Y(s)\end{cases}\rightarrow M(s)=G_1(s)X(s)-G_1(s)G_2(s)H(s)M^*(s)$$

با اعمال تبدیل لاپلاس ستاره دار داریم:

$$\begin{cases}G_1X(s)=G_1(s)X(s)\\ G_{12}H(s)=G_1(s)G_2(s)H(s)\end{cases}\rightarrow M^*(s)=G_1X^*(s)-G_{12}H^*(s)M^*(s)$$

$$\rightarrow M^*(s)\left(1+G_{12}H^*(s)\right)=G_1X^*(s)\rightarrow M^*(s)=\frac{G_1X^*(s)}{1+G_{12}H^*(s)}$$

$$Y(s)=\frac{G_2(s)G_1X^*(s)}{1+G_{12}H^*(s)}\rightarrow Y^*(s)=\frac{G_2^*(s)G_1X^*(s)}{1+G_{12}H^*(s)}\rightarrow Y(z)=\frac{G_2(z)G_1X(z)}{1+G_{12}H(z)}$$

3-5- نگاشت میان صفحه s و صفحه z

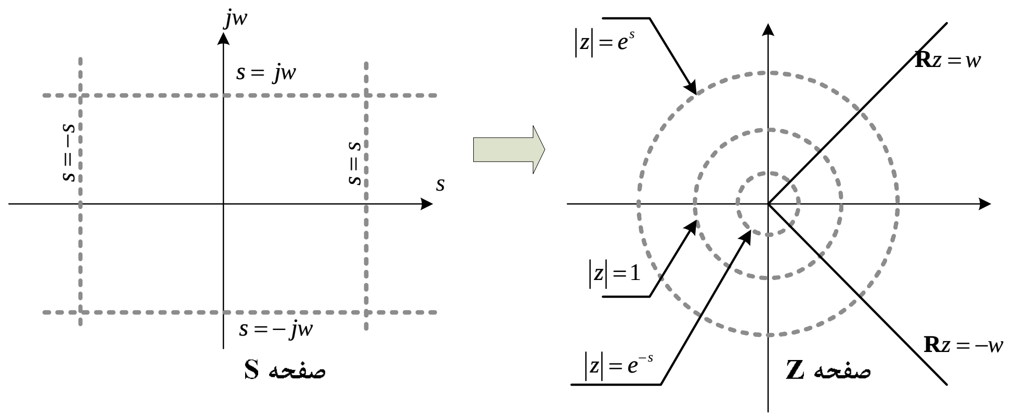
پایداری مطلق و نسبی سیستم ها کنترل حلقه بسته زمان-پیوسته خطی تغییرناپذیر با زمان توسط محل قطب های حلقه بسته در صفحه s تعیین می شود. از آنجایی که متغیرهای مختلط z و s با رابطه $z = e^{Ts}$ به یکدیگر مرتبط هستند، بین قطب ها و صفرهای صفحه s و z نیز ارتباط وجود دارد. پایداری سیستم حلقه بسته زمان-گسسته خطی تغییر ناپذیر با زمان را می توان بر حسب محل قطب های تابع تبدیل پالسی حلقه بسته تعیین نمود. توجه کنید که رفتار دینامیکی سیستم کنترل زمان-گسسته به دوره نمونه برداری T بستگی دارد یعنی تغییر دوره نمونه برداری T محل قطب ها و صفرهای صفحه z را تغییر می دهد.

از آنجایی که متغیر s یک متغیر مختلط می باشد که دارای دو جزء حقیقی و موهومی است

$$s = s + jw \qquad \text{17-3}$$

$$z = e^{T(s+jw)} = e^{Ts}\, e^{iTw} \qquad \text{18-3}$$

به شکل زیر توجه کنید:



شکل 3-16 نگاشت بین صفحه s و صفحه z

بعنوان مثال محور jw در صفحه s معادل $|z|=1$ در صفحه z می باشد زیرا:

$$s = 0 + jw \rightarrow z = e^{jwT} \rightarrow |z| = \left|e^{jwT}\right| = 1$$

از ریاضیات مهندسی می دانیم که e^{iTw} یک تابع متناوب با دوره تناوب $2p\,i$ می باشد:

$$z = e^{Ts}e^{iTw} = e^{Ts}e^{i(Tw+2kp)}$$

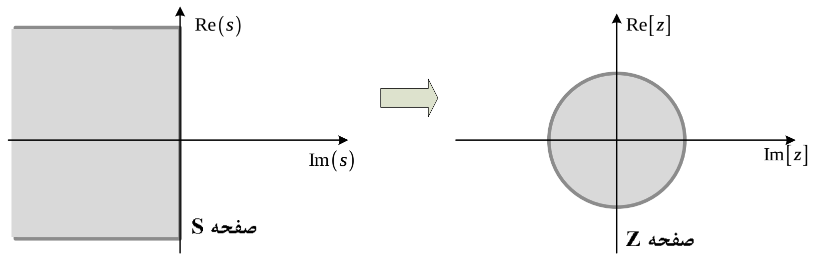
بنابراین قطب ها و صفر های صفحه s در محل هایی که اختلاف آنها مضارب صحیحی از فرکانس نمونه برداری $\frac{2p}{T}$ است به محل های یکسانی در صفحه z نگاشته می شوند یعنی برای هر مقدار z بینهایت معادل s وجود دارد.

3-5-1- نگاشت نیمه چپ صفحه s به صفحه z

در نیمه چپ صفحه s (محل قطب های پایدار) داریم:

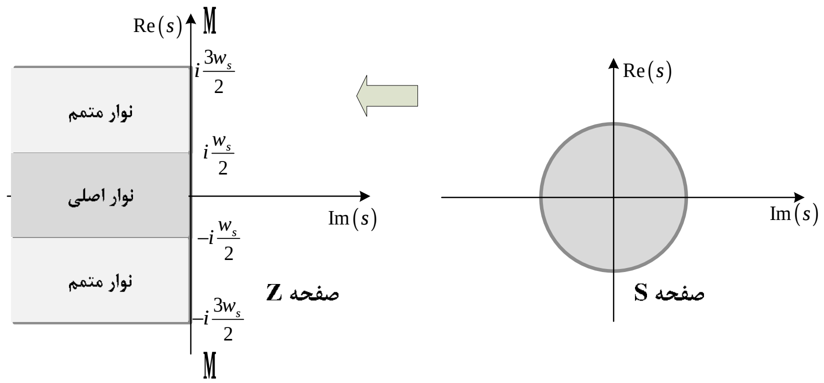
$$z = e^{Ts}e^{iTw} \xrightarrow{s<0} |z| = \left|e^{Ts}\right| \underbrace{\left|e^{iTw}\right|}_{=1} = e^{Ts} < 1$$

بنابراین یک سیستم در صفحه z زمانی پایدار است که تمام قطب های تابع تبدیل پالسی آن در درون دایره واحد به مرکز مبدا قرار گیرند:



شکل 3-17 نگاشت بین نیم صفحه چپ صفحه s و صفحه z

عکس این نگاشت نیز صادق است ولی با توجه به این نکته که برای هر مقدار z بینهایت معادل s وجود دارد، برای زاویه w بین 0 تا $2p$ نوار نگاشته شده در صفحه z را نوار اصلی گویند. برای زوایای مربوط به صفحات ریمان (زاویه های بیشتر از $2p$ یا کمتر از 0) نوارهایی موازی با نوار اصلی به نام نوارهای متمم در صفحه z نگاشته خواهد شد. به شکل زیر توجه کنید:

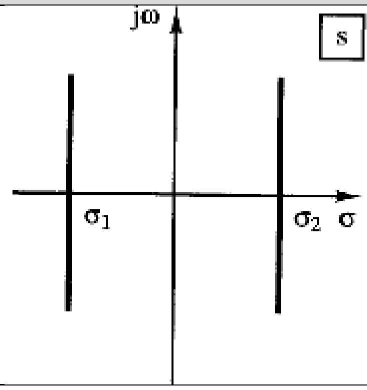
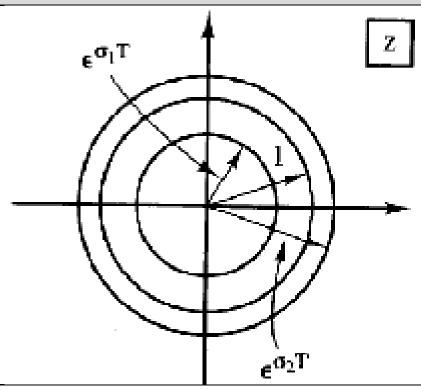


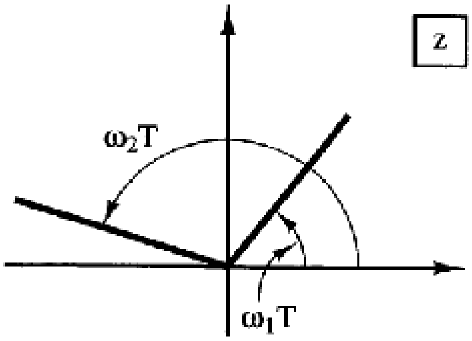
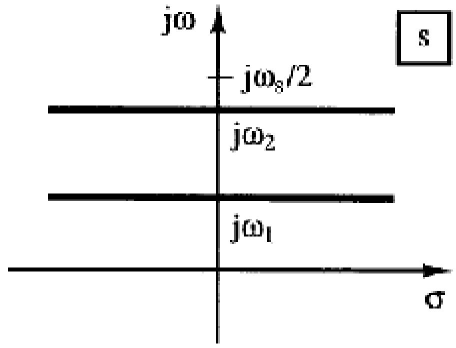
شکل 3-18 نگاشت بین ناحیه داخلی دایره واحد در صفحه S و صفحه z

3-5-2- نگاشت مکان های ثابت

جدول زیر نگاشت مکان های ثابت صفحه s به صفحه z را به خوبی نمایش می دهد:

جدول 3-1 نگاشت مکان های ثابت

نام مکان ثابت	معادل صفحه s	معادل صفحه z
مکان قسمت حقیقی ثابت $(s = cte)$		

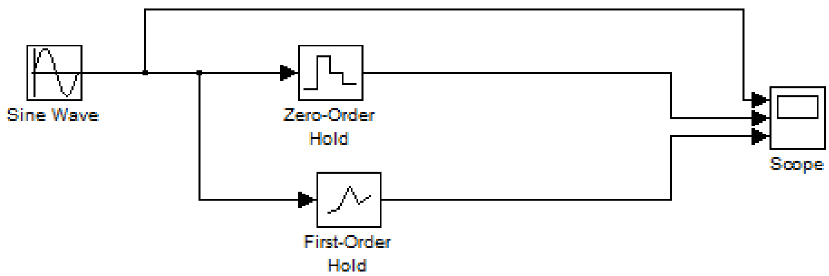
		مکان قسمت موهومی ثابت $(w=cte)$

3-6- کاربرد MATLAB

شکل 3-1

```
close all
Ts = 0.05;
Len = 40;
impulsetrain = ones(1, Len);
n = 0TsTs*(Len-1);
y=impulsetrain.*sin(2*pi*n);
stem(n,y,'k');
hold on
N = 10;
dt = Ts/N;
t = 0dtTs*Len-dt;
z=sin(2*pi*t);
plot(t,z,'.-b')
xlabel('t')
title('impulsetrain.*sin(2*pi*n),T=0.05')
legend('impulsetrain.*sin(2*pi*n)','sin(2*pi*n)')
```

شکل 3-7

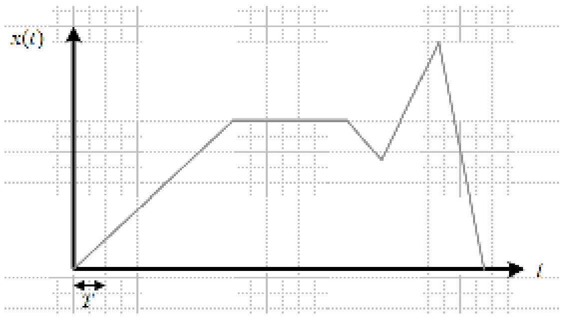


لینک دانلود برنامه شکل 3-9

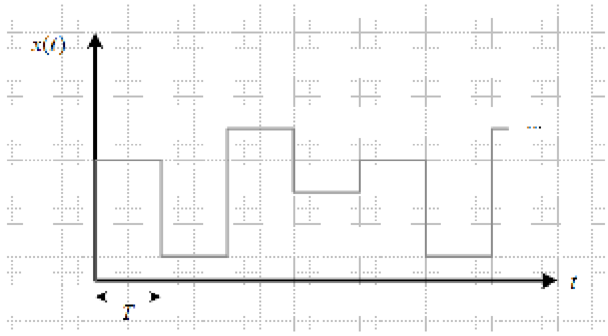
http//users.ece.gatech.edu/mcclella/matlabGUIs/index.html

3-7- تمرین

1. خروجی سیگنال زیر را پس از نمونه‌برداری با دوره تناوب T و عبور از الف) نمونه بردار مرتبه صفر و ب) نمونه بردار مرتبه یک رسم نمایید.

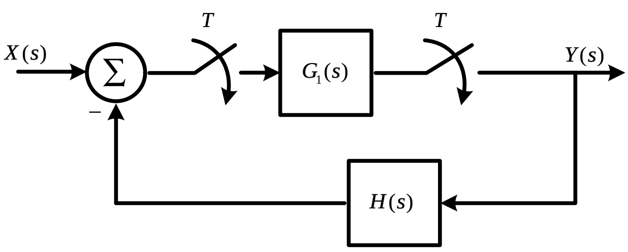


(الف)

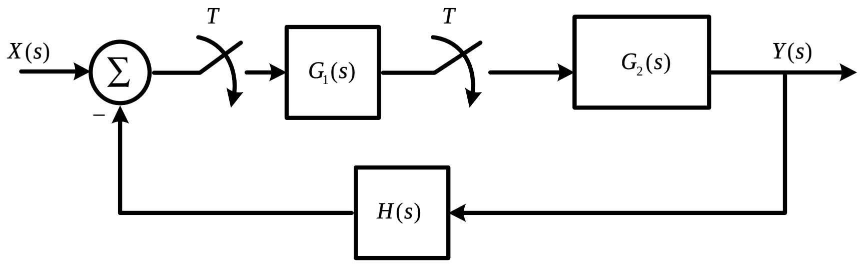


(ب)

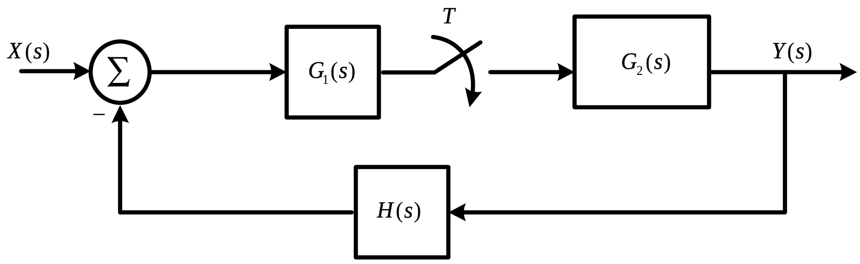
2. رابطه بین ورودی و خروجی سیستم های زیر را بدست آورید:



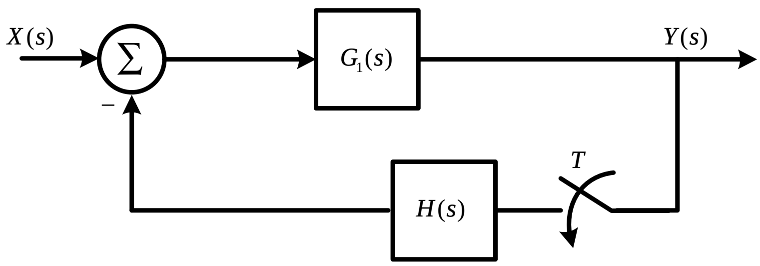
(الف)



(ب)

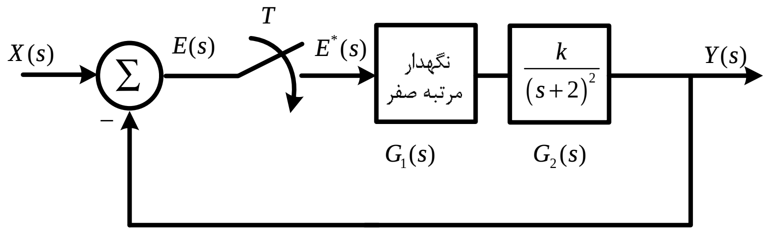


(ج)

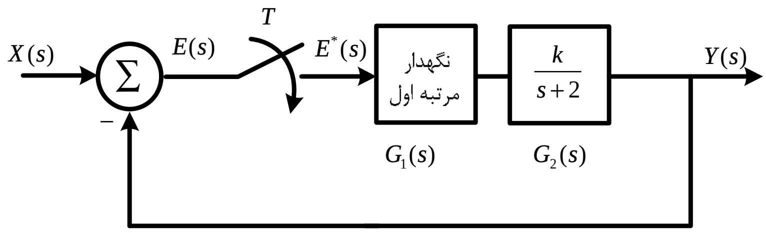


(د)

3. برای سیستم زیر تابع تبدیل پالسی را برای $T = 1^s$ محاسبه نمایید:



4. برای سیستم زیر تابع تبدیل پالسی را برای $T = 1^s$ محاسبه نمایید:



بخش چهارم:

بررسی سیستم ها و کنترل کننده های دیجیتال

3 بخش چهارم: بررسی سیستم ها و کنترل کننده های دیجیتال

4-1- مقدمه

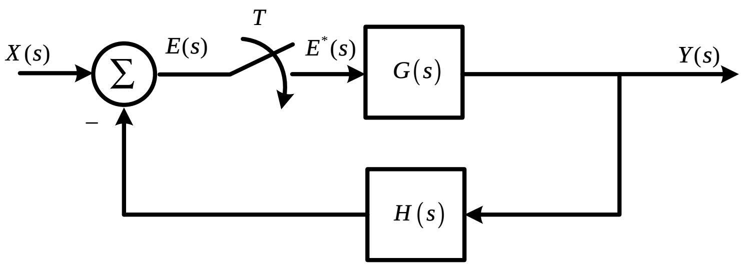
پس از آشنایی با مبانی کنترل دیجیتال در این بخش به بررسی پایداری و مشخصات پاسخ گذرای سیستم های دیجیتال می‌پردازیم.

4-2- تحلیل پایداری سیستم های حلقه بسته در حوزه Z

در بخش قبل دیدیم که تابع تبدیل پالسی سیستم حلقه بسته به شکل 4-1 برابر

$$T(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{G(z)}{1+GH(z)} \qquad 4\text{-}1$$

می باشد.



شکل 4-1 دیاگرام بلوکی یک سیستم حلقه بسته با وجود نمونه بردار

که در آن $G(s)$ می تواند ضرب چندین بلوک پشت سر هم باشد (مدار نگهدار و سیستم و ...). با توجه به معادله 4-1 محل قطب های این سیستم حلقه بسته در صفحه z از ریشه های معادله

$$\Delta(z)=1+GH(z)=0 \qquad 4\text{-}2$$

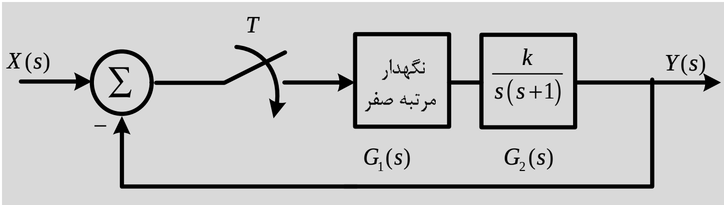
بدست می آید. که این معادله را **معادله مشخصه** تابع تبدیل پالسی گویند. برای پایداری چنین سیستمی نکات زیر باید برقرار باشد:

- برای اینکه سیستم پایدار باشد، قطب های حلقه بسته یا ریشه های معادله مشخصه باید در درون دایره واحد در صفحه z قرار گیرند. هر قطب حلقه بسته که در خارج از این ناحیه باشد، سیستم را ناپایدار می کند.
- در صورتیکه یک قطب ساده در $z=1$ یا $z=-1$ قرار گیرد، (یا دو قطب ساده یکی در $z=1$ و دیگری در $z=-1$) یا یک جفت قطب مختلط مزدوج بر روی دایره واحد در صفحه z قرار گیرد، سیستم پایدار مرزی خواهد بود.
- هر قطب مکرر حلقه بسته بر روی دایره واحد نیز سیستم را ناپایدار می کند.
- صفر های حلقه بسته تاثیری روی پایداری مطلق[1] ندارند.

3 مثال 4-1

سیستم حلقه بسته شکل زیر را در نظر بگیرید. پایداری سیستم را برای $T=1^s, k=1$ بررسی نمایید.

[1] Absolute Stability



حل

ابتدا تابع تبدیل پالسی سیستم را بدست می آوریم :

$$G(s)=G_1(s)G_2(s)=\frac{1-e^{-s}}{s}\frac{1}{s(s+1)}=\frac{1-e^{-s}}{s^2(s+1)}$$

از مثال 3-1-ب داریم:

$$\rightarrow G(z)=\frac{\left(T-1+e^{-T}\right)z^{-1}+z^{-2}\left(1-e^{-T}-Te^{-T}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-e^{-T}z^{-1}\right)}\overset{T=1}{=}\frac{e^{-1}z^{-1}+z^{-2}\left(1-2e^{-1}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-e^{-1}z^{-1}\right)}$$

$$T(z)=\frac{G(z)}{1+G(z)}$$

از رابطه 4-2 داریم:

$$\Delta(z)=1+G(z)=0\rightarrow\Delta(z)=1+\frac{e^{-1}z^{-1}+z^{-2}\left(1-2e^{-1}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-e^{-1}z^{-1}\right)}=0$$

$$\rightarrow\frac{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-e^{-1}z^{-1}\right)+e^{-1}z^{-1}+z^{-2}\left(1-2e^{-1}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-e^{-1}z^{-1}\right)}=0$$

$$\rightarrow\left(1-z^{-1}\right)\left(1-e^{-1}z^{-1}\right)+e^{-1}z^{-1}+z^{-2}\left(1-2e^{-1}\right)=0$$

با ضرب طرفین در یک عامل z^2 داریم:

$$\xrightarrow{\times z^2}(z-1)\left(z-e^{-1}\right)+e^{-1}z+\left(1-2e^{-1}\right)=0\rightarrow z^2\cancel{-ze^{-1}}-z+e^{-1}+\cancel{e^{-1}z}+\left(1-2e^{-1}\right)=0$$

$$\rightarrow z^2-z+\left(1-2e^{-1}+e^{-1}\right)=0\rightarrow\Delta(z)=z^2-z+\left(\underbrace{1-e^{-1}}_{0.6321}\right)=0$$

که ریشه های این معادله برابر است با:

$$z_{1,2}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{1^2-4\times1\times0.6321}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{-1.5284}}{2}=\frac{1\pm\overbrace{\sqrt{-1}}\times\sqrt{1.5284}}{2}\cong0.5\pm0.6181i$$

هر دو ریشه داخل دایره واحد قرار دارند، بنابراین سیستم پایدار است.

از آنجا که تعیین ریشه های معادلات مرتبه سوم به بالاتر نیازمند محاسبات پیچیده و زمان بر می باشد، برای تعیین پایداری سیستم بجای استفاده از روش بدست آوردن ریشه ها از معیاری به نام **معیار پایداری ژوری** استفاده می گردد.

4-1-1- معیار پایداری ژوری

برای اعمال معیار پایداری ژوری به یک معادله مشخصه $\Delta(z)$ با مرتبه n به فرم:

$$\Delta(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0=0 \qquad 3\text{-}4$$

ابتدا جدولی با ضرایب محاسبه شده به شکل زیر بوجود می آوریم:

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix} \quad k = 0,1,2,\dots,n-1 \quad c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix} \quad k = 0,1,2,\dots,n-2 \quad \dots.$$

$$q_k = \begin{vmatrix} p_0 & p_{n-2-k} \\ p_3 & b_k \end{vmatrix} \quad k = 0,1,2$$

جدول 4-1 جدول پایدار ژوری

	z^0	z^1	z^2	z^3	$\cdots$	z^{n-2}	z^{n-1}	z^n
1	a_0	a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
2	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
3	b_0	b_1	b_2	b_3	$\cdots$	b_{n-2}	b_{n-1}	b_n
4	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_2	b_1	b_0
5	c_0	c_1	c_2	c_3	$\cdots$	c_{n-2}	c_{n-1}	c_n
6	c_n	c_{n-1}	c_{n-2}	c_{n-3}	$\cdots$	c_2	c_1	c_0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
$2n-5$	p_0	p_1	p_2	p_3				
$2n-4$	p_3	p_2	p_1	p_0				
$2n-3$	q_0	q_1	q_2					

سپس از معیار پایداری با آزمون ژوری استفاده می کنیم:

۷ معیار پایداری آزمون جوری

سیستمی با معادله مشخصه 4-3 پایدار است اگر تمام شرایط زیر برقرار باشند:

(1) $|a_0| < |a_n|$

(2) $\Delta(z)\big|_{z=1} > 0$

(3) $\Delta(z)\big|_{z=-1} \begin{cases} > 0 & n \text{ زوج} \\ < 0 & n \text{ فرد} \end{cases}$

(4) $|b_{n-1}| < |b_0|$

$|c_{n-2}| < |c_0|$

$\vdots$

۷ نکته:

اگر $\Delta(z)\big|_{z=1} = 0$ باشد و شرط های دیگر برقرار باشند، سیستم حداقل یک ریشه در $z = 1$ دارد.

به مثال زیر توجه کنید:

3 مثال 4-2

پایداری حلقه بسته سیستم های زیر را مشخص نمایید.

$1)\ \Delta(z) = z^4 - 1.2z^3 + 0.07z^2 + 0.3z - 0.08 = 0$

حل:

برای تعیین پایداری سیستم فوق ابتدا جدول ژوری را تشکیل می دهیم:

$n = 4 \to 2n - 3 = 5$

پنج ردیف برای جدول داریم:

	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4
1	-0.08	0.3	0.07	-1.2	1
2	1	-1.2	0.07	0.3	-0.08
3	$\begin{vmatrix} -0.08 & 1 \\ 1 & -0.08 \end{vmatrix} = -0.994$	$\begin{vmatrix} -0.08 & -1.2 \\ 1 & 0.3 \end{vmatrix} = 1.176$	$\begin{vmatrix} -0.08 & 0.0.7 \\ 1 & 0.07 \end{vmatrix} = -0.0756$	$\begin{vmatrix} -0.08 & 0.3 \\ 1 & -1.2 \end{vmatrix} = -0.204$	
4	-0.204	-0.0756	1.176	-0.994	
5	$\begin{vmatrix} -0.994 & -0.204 \\ -0.204 & -0.994 \end{vmatrix} = 0.946$	$\begin{vmatrix} -0.994 & -0.0756 \\ -0.204 & 1.176 \end{vmatrix} = -1.184$	$\begin{vmatrix} -0.994 & 1.176 \\ -0.204 & -0.0756 \end{vmatrix} = 0.315$		

اکنون به بررسی شرایط معیار ژوری می پردازیم:

$1)\quad |a_0| < |a_n| \to |-0.08| < |1| \quad \mathbf{R}$

$2)\quad \Delta(z)\big|_{z=1} = 1 - 1.2 + 0.07 + 0.3 - 0.08 = 0.09 > 0 \quad \mathbf{R}$

n زوج است بنابراین:

$3)\quad \Delta(z)\big|_{z=-1} = (-1)^4 - 1.2(-1)^3 + 0.7(-1)^2 + 0.3(-1) - 0.08 = 1 + 1.2 + 0.7 - 0.3 - 0.03 = 1.89 > 0 \quad \mathbf{R}$

$$4)\quad \begin{array}{l} |b_{n-1}| < |b_0| \to |-0.204| < |-0.994| \\ |c_{n-2}| < |c_0| \to |0.315| < |0.946| \end{array} \quad \mathbf{R}$$

بنابراین این سیستم پایدار است.

```
>> roots([1 -1.2 0.07 0.3 -0.08])
ans =
   -0.5000ü
    0.8000ü
    0.5000ü
    0.4000ü
```

$2)\ \Delta(z) = z^3 - 1.1z^2 - 0.1z + 0.2 = 0$

برای تعیین پایداری سیستم فوق ابتدا جدول ژوری را تشکیل می دهیم:

$n = 3 \to 2n - 3 = 3$

سه ردیف برای جدول داریم:

	z^0	z^1	z^2	z^3
1	0.2	-0.1	-1.1	1
2	1	-1.1	-0.1	0.2
3	$\begin{vmatrix} 0.2 & 1 \\ 1 & 0.2 \end{vmatrix} = -0.96$	$\begin{vmatrix} 0.2 & -1.1 \\ 1 & -0.1 \end{vmatrix} = 1.08$	$\begin{vmatrix} 0.2 & -0.1 \\ 1 & -1.1 \end{vmatrix} = -0.12$	

اکنون به بررسی شرایط معیار ژوری می پردازیم:

$1)\quad |a_0| < |a_n| \to |0.2| < |1| \quad \mathbf{R}$

$$2)\quad \Delta(z)\big|_{z=1} = 1-1.1-0.1+0.2 = 0 \qquad \mathbf{S}$$

n فرد است بنابراین:

$$3)\quad \Delta(z)\big|_{z=-1} = (-1)^3 - 1.1(-1)^2 - 0.1(-1) + 0.2 = -1-1.1+0.1+0.2 = -1.8 < 0 \quad \mathbf{R}$$

$$4)\quad |b_{n-1}| < |b_0| \to |-0.12| < |-0.96| \qquad \mathbf{R}$$

از آنجا که $\Delta(z)\big|_{z=1} = 0$ و سه شرط دیگر برقرار است، سیستم حداقل یک ریشه روی دایره واحد دارد $(z=1)$ و پایدار مرزی است.

```
>> roots([1 -1.1 -0.1 0.2])
ans =
    1.0000 3
   -0.4000ü
    0.5000ü
```

$$3)\ \Delta(z) = z^3 - 1.3z^2 - 0.08z + 0.24 = 0$$

برای تعیین پایداری سیستم فوق ابتدا جدول ژوری را تشکیل می دهیم:

$$n = 3 \to 2n-3 = 3$$

سه ردیف برای جدول داریم:

	z^0	z^1	z^2	z^3
1	0.24	-0.08	-1.3	1
2	1	-1.3	-0.08	0.24
3	$\begin{vmatrix} 0.24 & 1 \\ 1 & 0.24 \end{vmatrix} = -0.9424$	$\begin{vmatrix} 0.24 & -1.3 \\ 1 & -0.08 \end{vmatrix} = 1.2808$	$\begin{vmatrix} 0.24 & -0.08 \\ 1 & -1.3 \end{vmatrix} = -0.232$	

اکنون به بررسی شرایط معیار ژوری می پردازیم:

$$1)\quad |a_0| < |a_n| \to |0.24| < |1| \qquad \mathbf{R}$$

$$2)\quad \Delta(z)\big|_{z=1} = 1-1.3-0.08+0.24 = -0.14 < 0 \qquad \mathbf{S}$$

بنابراین سیستم ناپایدار است.

```
>> roots([1 -1.3 -0.08 0.24])
ans =
    1.2000û
    0.5000ü
   -0.4000ü
```

3 مثال 3-4

محدوده بهره k را طوری تعیین کنید که سیستم زیر پایدار باشد:

$$\Delta(z) = z^2 + (0.3679k - 1.36709)z + (0.3679 + 0.2642k) = 0$$

حل:

برای تعیین پایداری سیستم فوق ابتدا جدول ژوری را تشکیل می دهیم:

$$n = 2 \to 2n-3 = 1$$

یک ردیف برای جدول داریم:

	z^0	z^1	z^2
1	$(0.3679+0.2642k)$	$(0.3679k-1.36709)$	1

اکنون به بررسی شرایط معیار ژوری می پردازیم:

$$1)\quad |a_0|<|a_n| \rightarrow |(0.3679+0.2642k)|<|1|=1 \rightarrow -1<0.3679+0.2642k<1$$
$$\rightarrow -5.1775<k<2.3925$$

$$2)\quad \Delta(z)\big|_{z=1}=\cancel{1}+0.3679k\cancel{-1.36709}+\cancel{0.3679}+0.2642k=0.6321k>0 \rightarrow k>0$$

n زوج است بنابراین:

$$3)\quad \Delta(z)\big|_{z=-1}=1-(0.3679k-1.36709)+(0.3679+0.2642k)=2.7358-0.1037k>0$$
$$\rightarrow k<26.382$$

جدول تنها 1 سطر دارد پس شرط چهارم وجود ندارد:

$$\begin{cases}-5.1775<k<2.3925\\ k>0 \\ k<26.382\end{cases} \xrightarrow{\text{I}} 0<k<2.3925$$

برای بررسی پایداری سیستم های گسسته کماکان می توان از روش روث – هورویتز نیز استفاده نمود اما قبل از استفاده از این معیار باید تبدیل دو خطی $z=\frac{w+1}{w-1}$ به سیستم اعمال گردد. از ریاضیات مهندسی می دانیم که این تبدیل داخل دایره واحد صفحه Z را به نیم صفحه چپ W صفحه می نگارد.

4-3- گسسته سازی کنترل کننده های آنالوگ

برای بدست آوردن معادل های زمان-گسسته کنترل کننده های آنالوگ چندین روش معمول در دسترس است که در این جزوه تنها به بررسی چند مورد آن می پردازیم:

- روش تغییر ناپذیری ضربه
- روش تغییر ناپذیری پله
- روش نگاشت قطب – صفر تطبیق یافته

4-3-1- روش تغییر ناپذیری ضربه

تابع تبدیل زمان پیوسته $G(s)$ را بصورت زیر در نظر بگیرید:

$$G(s)=\frac{a}{s+a}$$

تابع تبدیل بدست آمده با استفاده از روش تغییر ناپذیری ضربه، تابعی است که پاسخ ضربه آن $\left(g[nT]=\boldsymbol{z}^{-1}\{G(s)\}\right)$ در لحظه های نمونه برداری، مساوی T برابر پاسخ ضربه متناظر زمان-پیوسته $\left(g(t)=\boldsymbol{L}^{-1}\{G(s)\}\right)$ باشد که در آن T دوره نمونه برداری است. یعنی:

$$g[nT]=Tg(t)\big|_{t=nT} \qquad 4\text{-}4$$

در واقع در این روش شکل پاسخ ضربه حفظ می شود. بنابراین:

$$g[nT]=Tg(t)\big|_{t=nT} \rightarrow G_D(z)=TG(z) \qquad 5\text{-}4$$

که برای تابع تبدیل مذکور اینچنین بدست می آید:

$$G_D(z)=TG(z)=T\mathcal{z}\left\{\frac{a}{s+a}\right\}=\frac{Ta}{1-e^{-aT}z^{-1}}$$

به این روش، روش تبدیل z نیز گویند.

4-3-2- روش تغییر ناپذیری پله

تابع تبدیل زمان پیوسته $G(s)$ را بصورت زیر در نظر بگیرید:

$$G(s)=\frac{a}{s+a}$$

تابع تبدیل بدست آمده با استفاده از روش تغییر ناپذیری پله، تابعی است که پاسخ پله آن $\left(h(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}G(s)\right\}\right)$ در لحظه های نمونه برداری، برابر پاسخ پله متناظر زمان-پیوسته $\left(h[nT]=\mathcal{z}^{-1}\left\{\frac{1}{1-z^{-1}}G_D(z)\right\}\right)$ باشد، یعنی:

$$\mathcal{z}^{-1}\left\{\frac{1}{1-z^{-1}}G_D(z)\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}G(s)\right\}\Bigg|_{t=nT} \qquad (6\text{-}4)$$

که برای تابع تبدیل مذکور اینچنین بدست می آید:

$$\frac{1}{1-z^{-1}}G_D(z)=\mathcal{z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}G(s)\right\}\Bigg|_{t=nT}\right\}=\mathcal{z}\left\{\frac{G(s)}{s}\Bigg|_{t=nT}\right\}\rightarrow G_D(z)=\left(1-z^{-1}\right)\mathcal{z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}=\mathcal{z}\left\{\frac{\left(1-e^{-Ts}\right)}{s}G(s)\right\}$$

در واقع گویی ورودی تابع تبدیل زمان-گسسته از یک نمونه بردار و نگهدار فرضی عبور کرده و به تابع تبدیل زمان-پیوسته داده می شود.

4-3-3- روش قطب و صفر تطبیق یافته

تابع تبدیل زمان پیوسته $G(s)$ را بصورت زیر در نظر بگیرید:

$$G(s)=\frac{a}{s+a}$$

در روش قطب و صفر تطبیق یافته، صورت و مخرج تابع تبدیل $G(s)$ را بصورت جداگانه در نظر گرفته و قطب و صفرهای $G(s)$ را به ترتیب به قطب و صفرهای زمان-گسسته می نگاریم. بدین منظور مراحل زیر باید طی شود:

- ابتدا تابع تبدیل $G(s)$ را بصورت یک تابع تبدیل تجزیه شده به قطب و صفر تبدیل می شود.
- صفر و قطب های کراندار تابع تبدیل توسط نگاشت $z=e^{sT}$ به ترتیب به قطب و صفرهای صفحه z نگاشته می شوند.
- قطب و صفرهای بی کران (صفرهای بی نهایت) به نقطه $z=-1$ نگاشته می شوند.
- بهره تابع تبدیل بدست آمده را طوری تنظیم می کنیم که با بهره تابع تبدیل زمان-پیوسته تطابق داشته باشد. ($G_D(1)=G(0)$ یا $G_D(-1)=G(\infty)$)

3 مثال 4-4

تابع تبدیل زیر را به سه روش تغییرناپذیری با $T=1^s$ گسسته نمایید.

$$G(s)=\frac{s}{s+1}$$

حل:

الف) روش تغییر ناپذیری ضربه:

$$G_D(z)=TG(z)=G(z)$$

$$G(z)=z\left\{\frac{s}{s+1}\right\}=z\left\{\frac{s+1-1}{s+1}\right\}=z\left\{1-\frac{1}{s+1}\right\}=z\{1\}-z\left\{\frac{1}{s+1}\right\}=1-\frac{1}{1-e^{-1}z^{-1}}=\frac{-e^{-1}z^{-1}}{1-e^{-1}z^{-1}}$$

$$\rightarrow G_D(z)=G(z)=\frac{-e^{-1}z^{-1}}{1-e^{-1}z^{-1}}$$

ب) روش تغییر ناپذیری پله:

$$\frac{1}{1-z^{-1}}G_D(z)=z\left\{L^{-1}\left\{\frac{1}{s}G(s)\right\}\right\}=z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

$$\rightarrow G_D(z)=\left(1-z^{-1}\right)z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}=\left(1-z^{-1}\right)z\left\{\frac{1}{s+1}\right\}=\frac{1-z^{-1}}{1-e^{-1}z^{-1}}$$

ج) روش قطب و صفر تطبیق یافته:

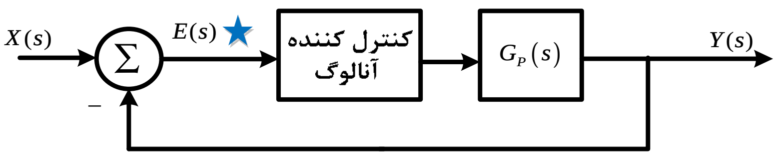
$$\begin{cases}s=0\rightarrow z=e^{Ts}=e^{0}=1\\ s=-1\rightarrow z=e^{Ts}=e^{-1}=0.3679\cong 0.37\end{cases}\rightarrow G_D(z)=k\frac{z-1}{z-0.37}$$

$$\begin{cases}G(0)=0\rightarrow G_D(1)=0=k\dfrac{1-1}{1-0.37} & \mathbf{S}\\ G(\infty)=1\rightarrow G_D(-1)=1=k\dfrac{-1-1}{-1-0.37}\rightarrow k=0.6850 & \mathbf{R}\end{cases}\rightarrow G_D(z)=\frac{0.6850(z-1)}{z-0.37}$$

4-4- اصول طراحی بر اساس معادل زمان-گسسته یک کنترل کننده آنالوگ

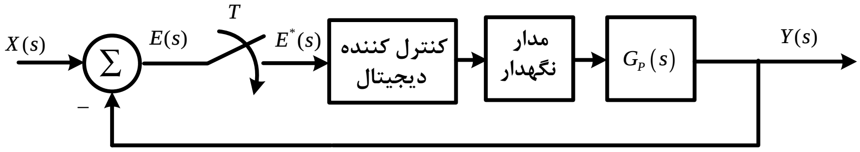
در این بخش با استفاده از معادل زمان-گسسته یک کنترل کننده آنالوگ مبانی طراحی یک سیستم کنترل دیجیتال را بیان می‌کنیم. ابتدا فرض می کنیم تمام سیستم زمان پیوسته باشد و بنابراین با استفاده از روش های تبدیل مرسوم (مکان ریشه و پاسخ فرکانسی) ابتدا کنترل کننده آنالوگ مناسبی در صفحه s طراحی می کنیم و سپس کنترل کننده آنالوگ را گسسته کرده و شکل گسسته شده کنترل کننده آنالوگ را بعنوان کنترل کننده دیجیتال بکار می بریم.

سیستم کنترل نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید.



شکل 4-2 دیاگرام بلوکی یک سیستم حلقه بسته آنالوگ

فرض می کنیم که دستگاه $G_P(s)$ زمان-پیوسته بوده و مشخصه های دینامیکی آن داده شده باشد و کنترل کننده که مشخصات عملکردی داده شده ای را برآورده می کند، از نوع آنالوگ باشد. هدف در اینجا تبدیل کنترل کننده آنالوگ به کنترل کننده معادل دیجیتال است به قسمی که سیستم کنترل دیجیتالی داشته باشیم که مشخصات عملکرد داده شده ای را برآورده نماید. در جایگزین کردن کنترل کننده آنالوگ با یک کنترل کننده دیجیتال لازم است، یک نمونه بردار و پس از آن یک نگهدارنده در نقطه ★ اضافه گردد. به شکل زیر توجه نمایید.



شکل 4-3 دیاگرام بلوکی سیستم شکل 4-2 با جایگزین کردن کنترل دیجیتال بجای کنترل کننده آنالوگ

وجود یک مدار نگهدار بخاطر عامل e^{Ts} یک تاخیر زمانی در سیستم بوجود می‌آورد، بنابراین با جایگزین کردن یک کنترل کننده دیجیتال بجای کنترل کننده آنالوگ به ناچار این تاخیر به سیستم اعمال می گردد که در عمل پایداری سیستم حلقه بسته را کاهش می دهد که باید در طراحی کنترل کننده دیجیتال لحاظ گردد.

v نکته:

= نگهدار مرتبه صفر را می توان با تقریب پاده به فرم زیر جایگزین کنیم:

$$e^{Ts} \cong \frac{1-\frac{Ts}{2}}{1+\frac{Ts}{2}}$$

بنابراین:

$$G_h(s) = \frac{1-e^{Ts}}{s} \cong \frac{1}{s}\left(1-\frac{1-\frac{Ts}{2}}{1+\frac{Ts}{2}}\right) = \frac{T}{1+\frac{Ts}{2}}$$

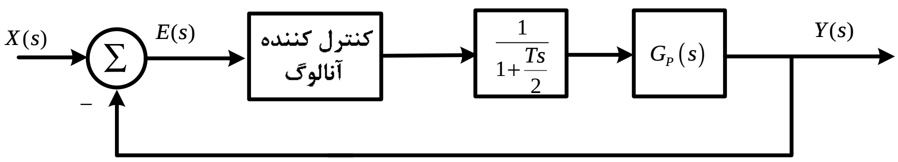
که در آن T چنان انتخاب می شود که قضیه نمونه برداری را برآورده نماید. برای ثابت ماندن بهره DC تابع تبدیل را بصورت زیر جایگزین می کنیم:

$$G_h(s) = \frac{1}{1+\frac{Ts}{2}}$$

= تقریب تابع تبدیل یک سیستم با یک تابع تبدیل دیگر، مهمترین مساله ثابت ماندن بهره DC است. بنابراین در نوشتن رابطه تقریبی معادل رابطه زیر باید برقرار باشد:

$$G(0) = F(0) \to G(s) \approx F(s)$$

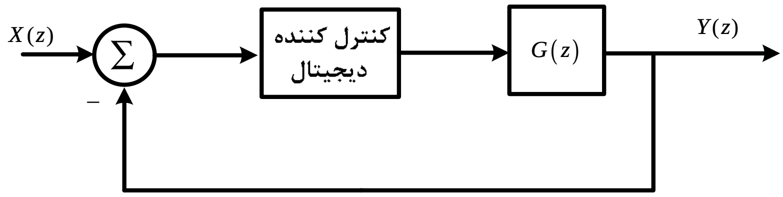
برای این منظور تابع تبدیل $\frac{1}{1+\frac{Ts}{2}}$ در جهت پیش بینی تبدیل از یک کنترل کننده آنالوگ به کنترل کننده دیجیتال به سیستم شکل 4-2 اضافه می کنیم:



شکل 4-4 دیاگرام بلوکی سیستم اصلاح شده شکل 4-2

اکنون می توان از طریق تحلیل پاسخ سیستم، عملکرد آن را تحلیل نمود. برای تحلیل رفتار سیستم، مراحل زیر باید طی شود:

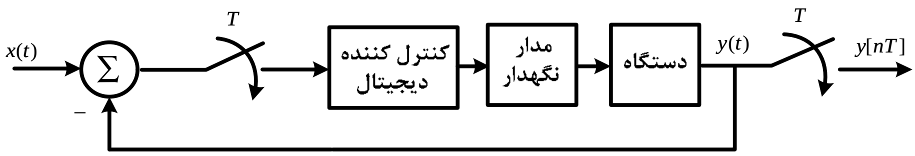
- تابع تبدیل پالسی $G(z)$ دستگاه زمان-پیوسته $G_P(s)$ را که یک نگهدار مرتبه صفر پیش از آن قرار دارد، تعیین گردد.
- پاسخ سیستم گسسته شده شکل 4-4 را که در شکل 4-5 آمده است، به ورودی های مختلف ورودی آزمایش گردد.
- در صورتیکه نتایج قسمت قبل رضایتبخش باشد، با استفاده از کامپیوتر دیجیتال، نتایج بدست آمده را بررسی کنیم.



شکل 4-5 دیاگرام بلوکی سیستم گسسته شده شکل 4-4

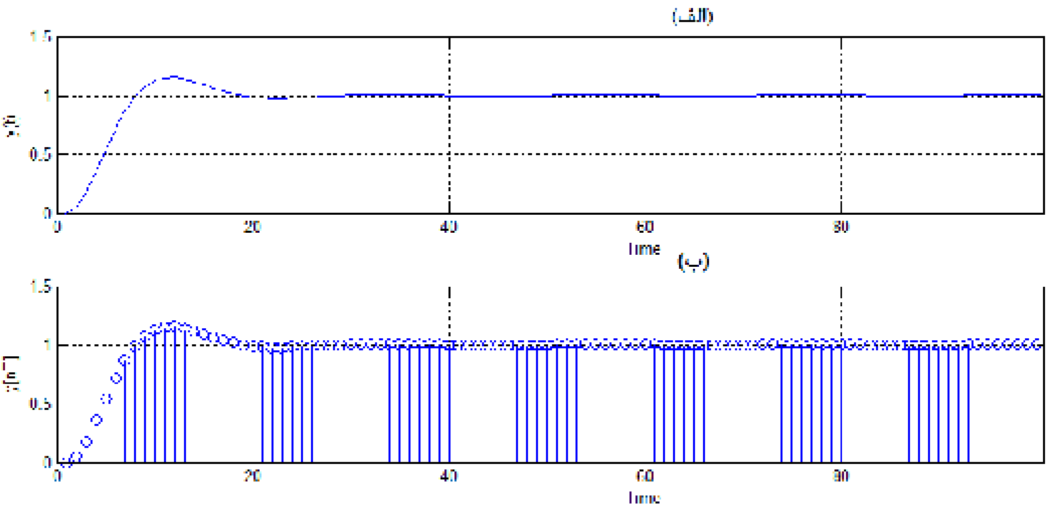
4-5- تحلیل پاسخ گذرا و حالت دائمی

پایداری مطلق شرط اساسی تمام سیستم های کنترلی است. همچنین، پایداری نسبی و دقت خوب حالت دائمی نیز برای هر سیستم کنترلی چه زمان-پیوسته و چه زمان-گسسته لازم است. در بسیاری از حالتهای عملی، مشخصات عملکردی سیستم های کنترل (چه زمان-پیوسته و چه زمان-گسسته) بر حسب کمیت های زمانی مشخص می شوند. دلیل آن اینست که سیستم‌های با ذخیره انرژی نمی توانند پاسخی بطور لحظه ای ارائه کنند و پاسخ آنها همواره دارای بخش پاسخ گذرا خواهد بود. مشخصه های عملکردی یک سیستم کنترل معمولاً بر حسب پاسخ گذرا به ورودی پله مشخص می شود که این پاسخ به شرایط اولیه سیستم (که عموماً صفر است) بستگی دارد.
اغلب سیستم های زمان-گسسته یا دیجیتال دارای دستگاه های زمان-پیوسته ای هستند که توسط یک کنترل کننده دیجیتال کنترل می گردد، بنابراین خروجی این دستگاه ها نیز زمان-پیوسته خواهد بود. سیستم کنترل دیجیتال شکل زیر را در نظر بگیرید.



شکل 4-6 دیاگرام بلوکی سیستم کنترل دیجیتال

شکل کلی خروجی های $y(t)$ و $y[nT]$ به ترتیب در شکل های 4-6 الف و ب نشان داده شده اند.



شکل 4-7 شکل عمومی پاسخ پله سیستم های الف) آنالوگ ب) دیجیتال

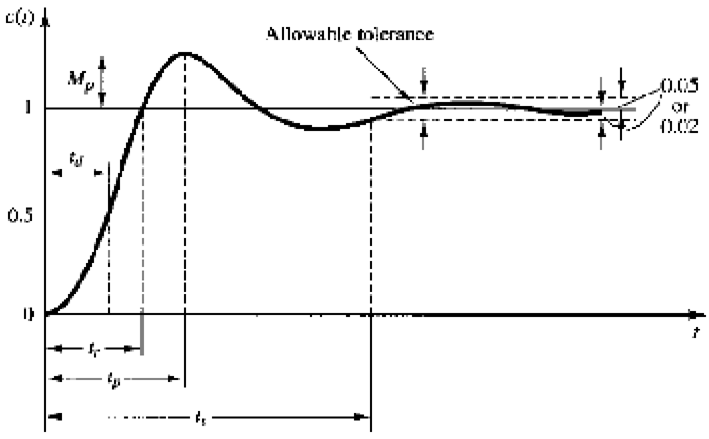
4-5-1- مشخصه های پاسخ گذرا

1- **زمان تاخیر** (t_d) زمان تاخیر زمان لازم برای رسیدن پاسخ به نصف مقدار نهایی آن برای اولین بار است.
2- **زمان صعود**(t_r) زمان صعود، زمان لازم برای صعود پاسخ از 10 به 90 درصد یا از 5 به 95 درصد یا از 0 به 100 مقدار نهایی آن بسته به صورت مساله می باشد.
3- **زمان فراجهش** (t_P) زمان لازم برای رسیدن به اولین فراجهش حداکثر است.
4- **فراجهش حداکثر** (M_P) فراجهش حداکثر برابر اولین مقدار پیک منحنی پاسخ است.
5- **زمان مستقر شدن** (t_s) زمان مستقر شدن برابر زمان لازم برای رسیدن منحنی پاسخ و ماندن آن در فاصله ای در اطراف مقدار نهایی است. که معمولا این فاصله را 2% ± یا 5% ± مقدار نهایی در نظر می گیرند.

برای یک سیستم مرتبه دوم نمونه با تابع تبدیل حلقه بسته زیر:

$$T(s)=\frac{w_n^2}{s^2+2zw_ns+w_n^2} \qquad 7\text{-}4$$

که در آن z نسبت میرایی و w_n فرکانس نوسانات میرا شده نام دارد. به شکل زیر توجه کنید:



شکل 4-9 شکل عمومی پاسخ پله یک سیستم آنالوگ

مشخصات پاسخ گذرا با فرض $\left(w_d = w_n\sqrt{1-z^2}\right)$ بصورت زیر بدست می آید:

$$t_d \cong \frac{1+0.7z}{w_n} \qquad (87\text{-}4)$$

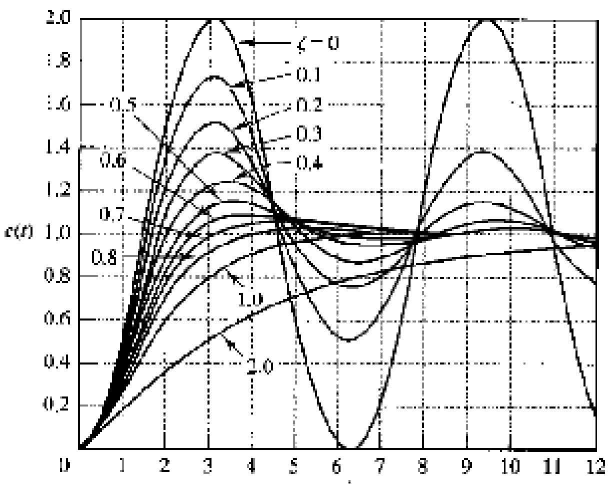
$$t_r = \frac{p - \cos^{-1} z}{w_d} \qquad (9\text{-}4)$$

$$t_P = \frac{p}{w_d} \qquad (10\text{-}4)$$

$$M_P = e^{-\frac{zp}{\sqrt{1-z^2}}} \qquad (11\text{-}4)$$

$$t_s = \frac{4}{zw_n}\ (\%2) \qquad t_s = \frac{3.2}{zw_n}\ (\%5) \qquad (12\text{-}4)$$

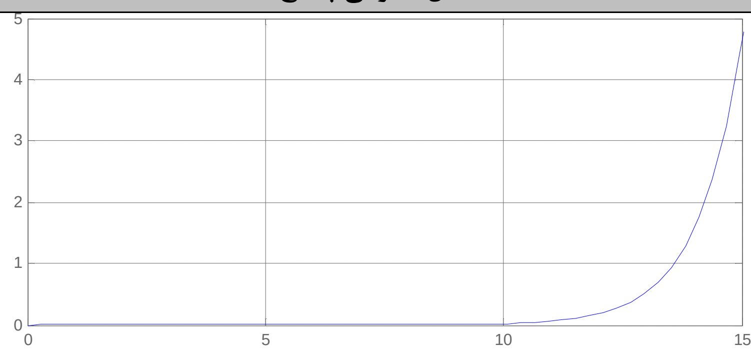
همانطور که از رابطه 4-10 مشخص است، حداکثر فراجهش پاسخ یک سیستم **تنها** به مقدار z بستگی دارد. یعنی با تغییرات z نوع پاسخ سیستم تغییر می کند. به شکل زیر توجه کنید.

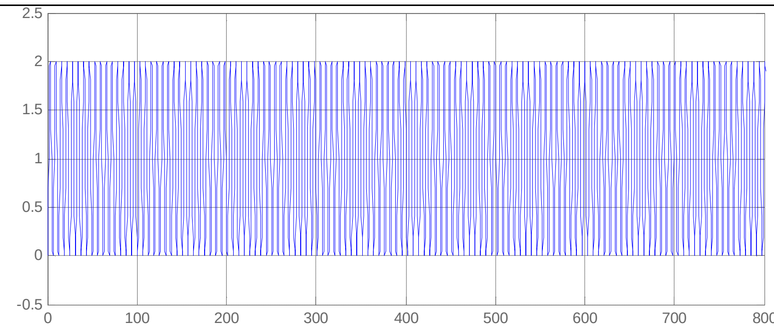
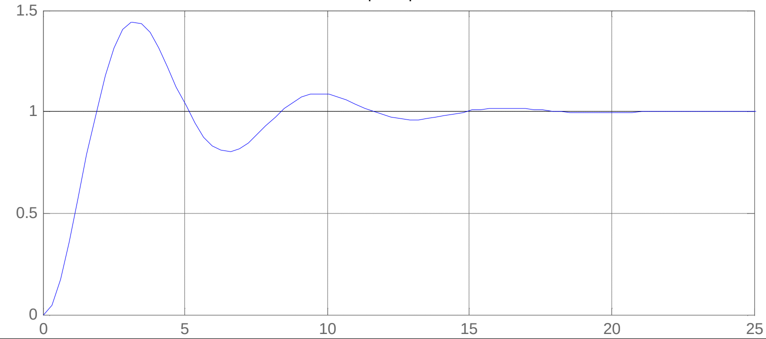
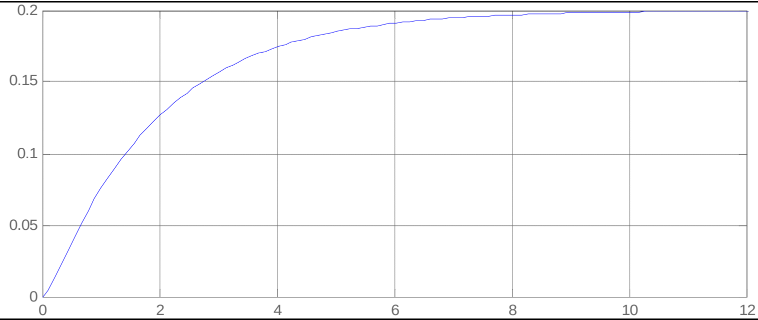
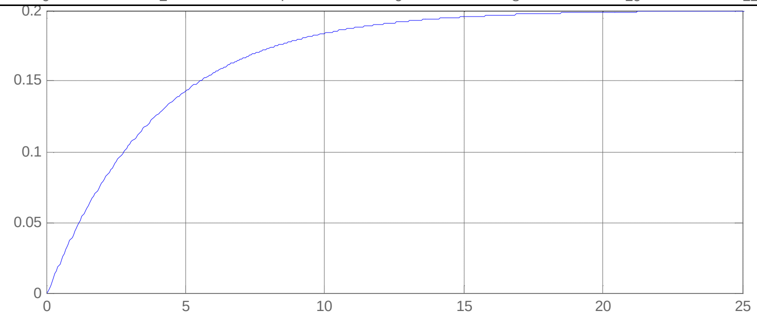


شکل 4-9 ارتباط نوع پاسخ یک سیستم مرتبه دوم با نسبت میرایی (z)

برای درک بهتر رابطه بین z و شکل پاسخ سیستم، حالت های مختلف شکل 4-9 بصورت یک جدول مجزا نمایش داده شده است.

جدول 4-2 ارتباط بین z و شکل پاسخ سیستم

ردیف	مقدار z	نام پاسخ	شکل عمومی پاسخ
1	$z < 0$	پاسخ ناپایدار	

2	$z = 0$	پاسخ نوسانی نامیرا	
3	$0 < z < 1$	پاسخ میرای نوسانی	
4	$z = 1$	پاسخ میرای بحرانی	
5	$z > 1$	پاسخ میرای شدید	

برای سیستم مرتبه دوم 7-4 رابطه بین قطب و صفرهای صفحه s با قطب و صفرهای صفحه z بصورت زیر بدست می آید:

$$z = e^{sT} = e^{T(s+iw)} = e^{Ts}\angle wT \equiv r\angle q$$

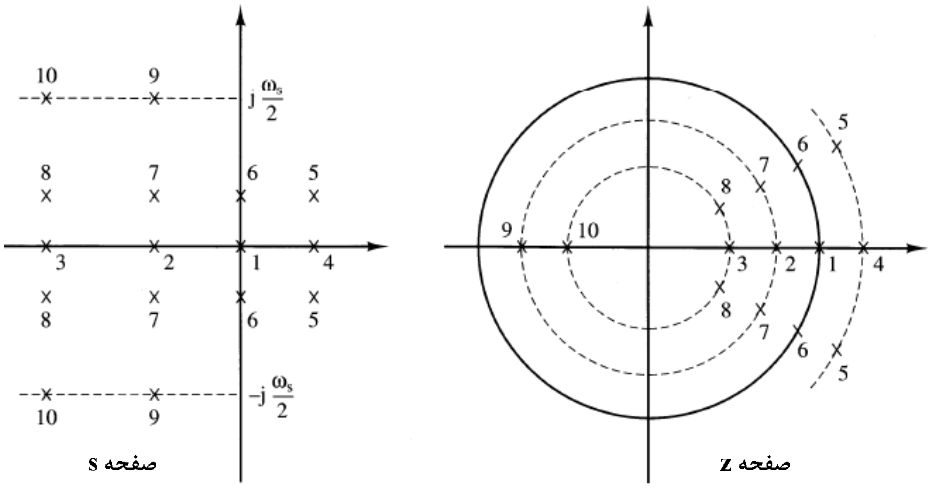
$$\rightarrow \begin{cases} r = e^{Ts} \\ q = wT \end{cases}$$

$$s_{1,2} = -zw_n \pm iw_n\sqrt{1-z^2} \rightarrow \begin{cases} s = -zw_n \\ w = w_n\sqrt{1-z^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r = e^{-zw_nT} \\ q = Tw_n\sqrt{1-z^2} \end{cases}$$

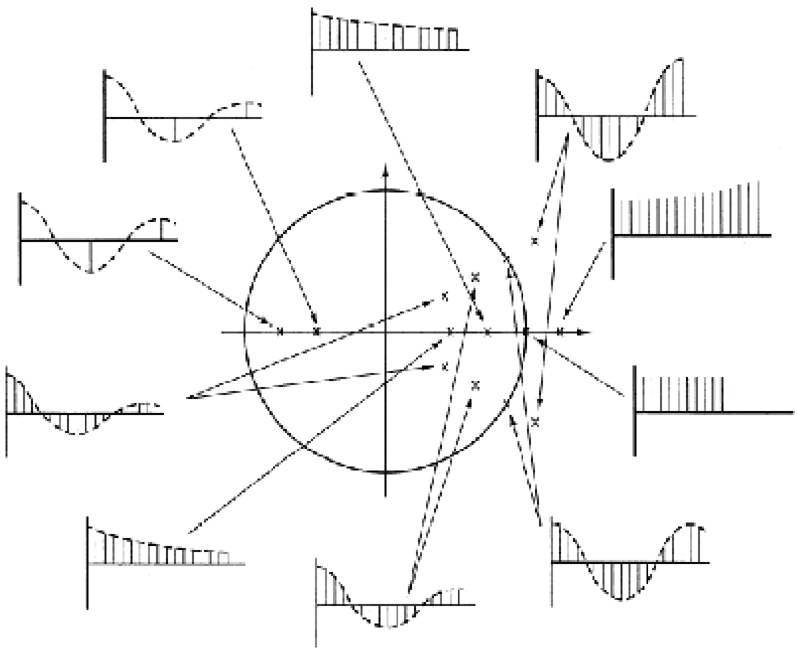
$$z = \frac{-\ln r}{\sqrt{\ln^2 r + q^2}} \qquad 13\text{-}4$$

$$w_n = \frac{1}{T}\sqrt{\ln^2 r + q^2} \qquad 14\text{-}4$$

شکل های زیر رابطه بین قطب و صفرهای صفحه s و صفحه z و ارتباط آن با نوع پاسخ را نشان می دهد.



شکل 4-10 ارتباط بین قطب و صفرهای صفحه s و صفحه z

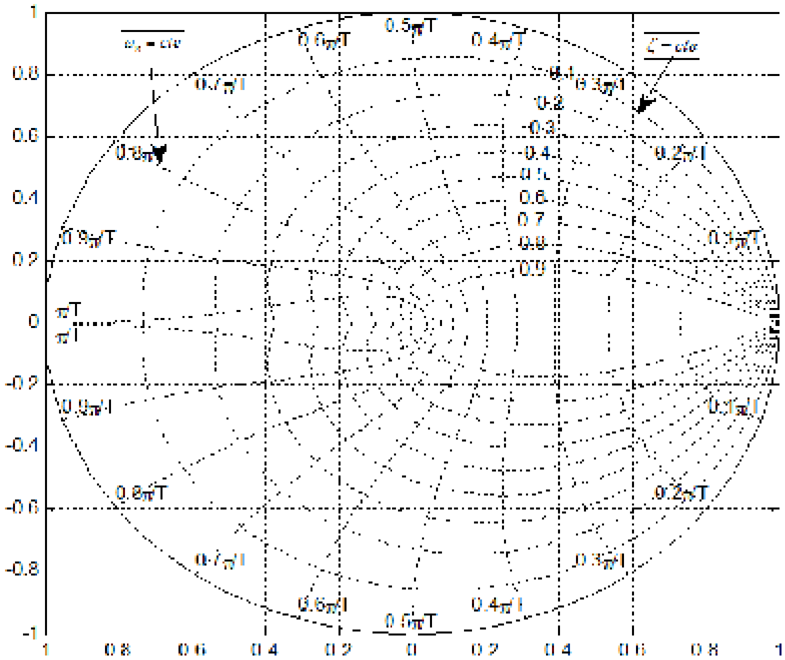


شکل 4-11 ارتباط محل قطب های صفحه z و نوع پاسخ

اکنون که روابط بین قطب و صفر های صفحه s و صفحه z مشخص می باشد، می توان مکان های ثابت z، w_n و w_dT را در صفحه z نیز نمایش داد.

7 نکته:

انتخاب زمان درست نمونه برداری در پایداری سیستم موثر است. زمان نمونه برداری زمانی صحیح است که تعداد نمونه های سیگنال در هر سیکل نوسانات میرا شده بین 8 تا 10 نمونه باشد. اگر این زمان صحیح انتخاب نشود، با پارامتر z نمی توان پایداری را تخمین زد.
در این جزوه فرض بر این است که در تمامی مثال ها دوره نمونه برداری صحیح انتخاب شده است.



شکل 4-12 مکان های ثابت z و W_n در صفحه z

3 مثال 4-5

اگر سیستم مرتبه دومی با دوره تناوب $T = 0.02^s$ نمونه برداری شود، دارای قطب های $r = 0.9316, q = \pm 0.708^{rad}$ خواهد بود. معادله مشخصه تابع تبدیل پالسی مربوطه و قطب های معادل زمان-پیوسته آن را تعیین کنید. نوع پاسخ سیستم چگونه خواهد بود؟ مشخصات پاسخ گذرا را محاسبه نمایید.

حل

$$\begin{cases} r = 0.9316 \\ q = \pm 0.708^{rad} \end{cases} \rightarrow P_{1,2} = r\left(\cos q \pm i \sin q\right) = 0.9316\left(\cos 0.708 \pm i \sin 0.708\right) = 0.9293 \ \pm \ 0.0650\mathrm{i}$$

بنابراین هر دو قطب داخل دایره واحد قرار دارند و سیستم پایدار است. با مقایسه مکان قطب ها و شکل 4-11 نوع پاسخ میرای نوسانی خواهد بود.

$$\rightarrow \Delta(\mathrm{z}) = \left(z - (0.9293 + 0.0650\mathrm{i})\right)\left(z - (0.9293 \ - \ 0.0650\mathrm{i})\right)$$

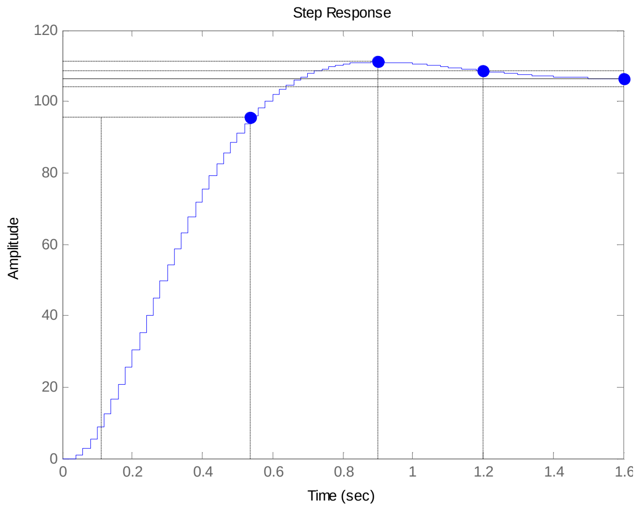
$$= z^2 - \left(0.9293 \ \cancel{+ 0.0650\mathrm{i}} + 0.9293 \ - \ \cancel{0.0650\mathrm{i}}\right) + (0.9293 + 0.0650\mathrm{i})(0.9293 \ - \ 0.0650\mathrm{i})$$

$$= z^2 - 1.8586z + 0.8680$$

برای مشخصات پاسخ گذرا باید معادل حوزه s این دو قطب را بدست آوریم:

$$P_{1,2} = 0.9316e^{i0.708} \rightarrow \begin{cases} z = \dfrac{-\ln r}{\sqrt{\ln^2 r + q^2}} = \dfrac{-\ln(0.9316)}{\sqrt{\ln^2(0.9316) + (0.708)^2}} = 0.707 \\ w_n = \dfrac{1}{T}\sqrt{\ln^2 r + q^2} = \dfrac{1}{0.02}\sqrt{\ln^2(0.9316) + (0.708)^2} = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_d \cong \dfrac{1+0.7z}{w_n} = 0.3 \\ t_r = \dfrac{p - \cos^{-1} z}{w_d} = 0.67 \\ t_p = \dfrac{p}{w_d} = 0.88 \\ M_p = e^{-\frac{zp}{\sqrt{1-z^2}}} = 0.368 \\ t_s = \dfrac{4}{z w_n} = 1.1315 \end{cases}$$

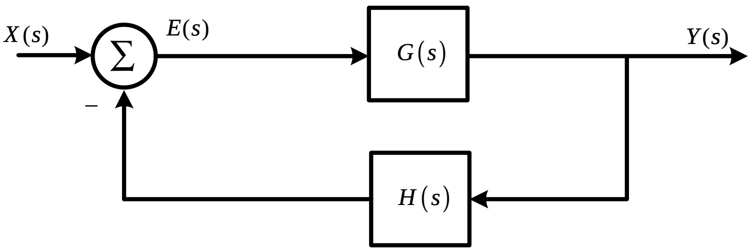


4-5-2- محاسبه خطای حالت دائمی

علاوه بر مشخصات پاسخ گذرا، خطای حالت دائمی یکی از پارامترهای مهم در تحلیل و طراحی سیستم می باشد. عملکرد حالت دائمی یک سیستم کنترل پایدار معمولاً بوسیله خطای حالت دائمی ناشی از ورودی های پله، شیب و شتاب تشخیص داده می‌شود.

در درس کنترل خطی برای سیستم های زمان-پیوسته خطای حالت دائمی به ورودی های پله و شیب و شتاب برای سیستم های نوع[1] صفر تا دو را بررسی کردیم که خلاصه ای از آن در جدول 4-3 نشان داده شده است.

سیستم زمان-پیوسته زیر را در نظر بگیرید:



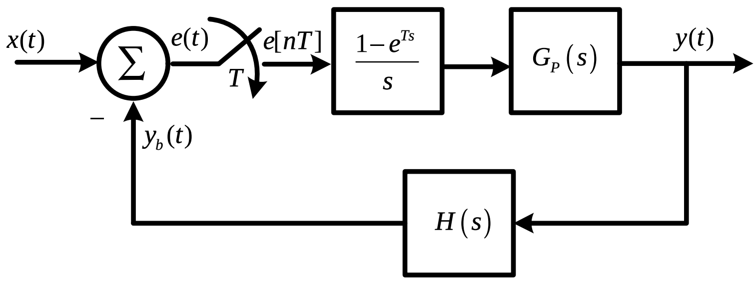
شکل 4-13 سیستم زمان-پیوسته مرتبه N

جدول 4-3- روابط مربوط به خطای حالت دائمی برای سیستم های نوع صفر تا 2

سیستم	خطای حالت دائمی در پاسخ به		
	ورودی پله	ورودی شیب	ورودی شتاب
نوع صفر	$\dfrac{1}{1+K_p}, K_p = \lim\limits_{s\to 0} G(s)H(s)$	∞	∞
نوع یک	0	$\dfrac{1}{K_v}, K_v = \lim\limits_{s\to 0} sG(s)H(s)$	∞
نوع دو	0	0	$\dfrac{1}{K_a}, K_a = \lim\limits_{s\to 0} s^2 G(s)H(s)$

[1] سیستمی را نوع N گویند که دارای قطب مرتبه N در مبدا باشد.

اکنون بار دیگر سیستم زمان –گسسته شکل زیر را در نظر بگیرید. فرض کنیم که سیستم پایدار است و می توان خطای حالت دائمی را محاسبه نمود[1].



شکل 4-14 سیستم زمان -گسسته

رابطه مربوط به خطا تعریف شده در سیستم چنین است:

$$e(t)=x(t)-y_b(t) \qquad 15\text{-}4$$

خطای حالت دائمی برای یک سیستم گسسته در لحظات نمونه برداری مقدار دارد. بنابراین:

$$e_{ss}[\infty]=\lim_{n\to\infty} e[nT]=\lim_{z\to1}\left(1-z^{-1}\right)E(z) \qquad 16\text{-}4$$

از طرفی تابع تبدیل حلقه سیستم برابر است با:

$$\left\{\begin{array}{l} G(z)=\mathbf{z}\left\{\left(\dfrac{1-^{-sT}}{s}\right)G_P(s)\right\}=\left(1-z^{-1}\right)\mathbf{z}\left\{\dfrac{G_P(s)}{s}\right\} \\ GH(z)=\left(1-z^{-1}\right)\mathbf{z}\left\{\dfrac{G_P(s)H(s)}{s}\right\}\end{array}\right. \to T(z)=\frac{G(z)}{1+GH(z)}$$

بنابراین:

$$E(z)=X(z)-Y_b(z)=X(z)-GH(z)E(z)$$
$$\to E(z)\left(1+GH(z)\right)=X(z)$$
$$\to E(z)=\frac{1}{1+GH(z)}X(z)$$
$$\to e_{ss}[\infty]=\lim_{z\to1}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+GH(z)}X(z)\right)$$

اکنون مانند حالت زمان-پیوسته، سه نوع ورودی را در نظر می گیریم:

الف) خطای حالت دائمی سیستم 4-14 به ورودی پله

برای ورودی پله واحد $x(t)=u(t)$ داریم:

$$x(t)=u(t)\to X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$e_{ss}[\infty]=\lim_{z\to1}\left(\frac{\cancel{1-z^{-1}}}{1+GH(z)}\frac{1}{\cancel{1-z^{-1}}}\right)=\lim_{z\to1}\left(\frac{1}{1+GH(z)}\right)$$

[1] از درس کنترل خطی می دانیم که خطای حالت دائمی زمانی معنا دارد که سیستم پایدار باشد.

اگر ثابت خطای پله بصورت:

$$K_P = \lim_{z\to 1} GH(z)$$

تعریف گردد داریم:

$$e_{ss}[\infty] = \frac{1}{1+K_P} \qquad 17\text{-}4$$

یعنی خطای حالت دائمی به ورودی پله زمانی صفر می گردد که $K_P=\infty$ شود، این امر لازم می دارد که تابع $GH(z)$ حداقل دارای یک قطب در $z=1$ باشد.

ب) خطای حالت دائمی سیستم 4-14 به ورودی شیب

برای ورودی شیب $x(t)=t\,u(t)$ داریم:

$$x(t)=t\,u(t) \to X(z) = \frac{Tz^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}$$

$$e_{ss}[\infty] = \lim_{z\to 1}\left(\frac{\cancel{1-z^{-1}}}{1+GH(z)}\frac{Tz^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^{\cancel{2}}}\right) = \lim_{z\to 1}\left(\frac{1}{1+GH(z)}\frac{\overbrace{T\,z^{-1}}}{1-z^{-1}}\right) = \lim_{z\to 1}\left(\frac{T}{(1+GH(z))1-z^{-1}}\right)$$

اگر ثابت خطای شیب بصورت:

$$K_v = \lim_{z\to 1}\frac{1-z^{-1}}{T}GH(z)$$

تعریف گردد داریم:

$$e_{ss}[\infty] = \frac{1}{K_v} \qquad 18\text{-}4$$

یعنی خطای حالت دائمی به ورودی شیب زمانی صفر می گردد که $K_v=\infty$ شود، این امر لازم می دارد که تابع $GH(z)$ حداقل دارای قطب مضاعف در $z=1$ باشد.

ج) خطای حالت دائمی سیستم 4-14 به ورودی شتاب

برای ورودی شتاب $x(t)=\frac{1}{2}t^2u(t)$ داریم:

$$x(t)=\frac{1}{2}t^2u(t) \to X(z) = \frac{T^2\left(1+z^{-1}\right)z^{-1}}{2\left(1-z^{-1}\right)^3}$$

$$e_{ss}[\infty] = \lim_{z\to 1}\left(\frac{\cancel{1-z^{-1}}}{1+GH(z)}\frac{T^2\left(1+z^{-1}\right)z^{-1}}{2\left(1-z^{-1}\right)^{\cancel{3}=2}}\right) = \lim_{z\to 1}\left(\frac{1}{1+GH(z)}\frac{T^2\overbrace{\left(1+z^{-1}\right)}\overbrace{z^{-1}}}{\cancel{2}\left(1-z^{-1}\right)^2}\right) = \lim_{z\to 1}\left(\frac{T^2}{(1+GH(z))\left(1-z^{-1}\right)^2}\right)$$

اگر ثابت خطای شتاب بصورت:

$$K_a = \lim_{z\to 1}\frac{\left(1-z^{-1}\right)^2}{T^2}GH(z)$$

تعریف گردد داریم:

$$e_{ss}[\infty]=\frac{1}{K_a} \qquad 18\text{-}4$$

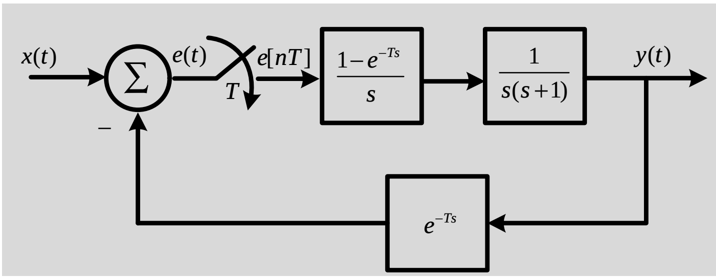
یعنی خطای حالت دائمی به ورودی شیب زمانی صفر می گردد که $K_a=\infty$ شود، این امر لازم می دارد که تابع $GH(z)$ حداقل دارای قطب مکرر مرتبه سومی در $z=1$ باشد.

تعریف

برای یک سیستم گسسته با تابع تبدیل حلقه باز نوع سیستم برابر با تعداد قطب های مکرر در $G(z)$ می باشد. یعنی سیستم را نوع N گویند اگر تابع تبدیل حلقه باز دارای عامل $\dfrac{1}{\left(1-z^{-1}\right)^N}$ باشد.

3 مثال 4-6

برای سیستم زیر خطای حالت دائمی را برای $T=1^s$ به هر سه ورودی پله، شیب و شتاب محاسبه نمایید.



حل:

از مثال 3-1 می دانیم که:

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)}\right\}=\left(\frac{\left(T-1+e^{-T}\right)z^{-1}+z^{-2}\left(1-e^{-T}-Te^{-T}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)^2\left(1-e^{-T}z^{-1}\right)}\right)$$

$$GH(s)=\frac{1-e^{-sT}}{s}\frac{e^{-Ts}}{s(s+1)}$$

$$\to GH(z)=\mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s}\frac{e^{-Ts}}{s(s+1)}\right\}=z^{-1}\left(1-z^{-1}\right)\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)}\right\}$$

$$=z^{-1}\cancel{\left(1-z^{-1}\right)}\left(\frac{\left(T-1+e^{-T}\right)z^{-1}+z^{-2}\left(1-e^{-T}-Te^{-T}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)^{\cancel{2}}\left(1-e^{-T}z^{-1}\right)}\right)=\frac{e^{-1}z^{-2}+z^{-3}\left(1-2e^{-1}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-e^{-1}z^{-1}\right)}$$

بنابراین سیستم نوع 1 می باشد:

$$K_p=\lim_{z\to 1}GH(z)=\lim_{z\to 1}\frac{e^{-1}z^{-2}+z^{-3}\left(1-2e^{-1}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-e^{-1}z^{-1}\right)}=\infty \to e_{ss}[\infty]\Big|_{x(t)=u(t)}=\frac{1}{1+K_p}=0$$

$$K_v = \lim_{z\to 1}\frac{1-z^{-1}}{T}GH(z) = \lim_{z\to 1}\left(\frac{\cancel{1-z^{-1}}}{1}\right)\frac{e^{-1}z^{-2}+z^{-3}\left(1-2e^{-1}\right)}{\cancel{\left(1-z^{-1}\right)}\left(1-e^{-1}z^{-1}\right)} = \frac{e^{-1}+\left(1-2e^{-1}\right)}{\cancel{\left(1-z^{-1}\right)}\left(1-e^{-1}\right)} = 1$$

$$\to e_{ss}[\infty]\Big|_{x(t)=u(t)} = \frac{1}{K_v} = 1$$

$$K_a = \lim_{z\to 1}\frac{\left(1-z^{-1}\right)^2}{T^2}GH(z) = \lim_{z\to 1}\left(\frac{1-z^{-1}}{1}\right)\frac{e^{-1}z^{-2}+z^{-3}\left(1-2e^{-1}\right)}{\left(1-e^{-1}z^{-1}\right)} = 0$$

$$\to e_{ss}[\infty]\Big|_{x(t)=u(t)} = \frac{1}{K_a} = \infty$$

4-6- طراحی بر اساس روش مکان ریشه

پایداری نسبی یک سیستم زمان-گسسته را می توان نسبت به دایره واحد در صفحه z بررسی نمود. علاوه بر مشخصات پاسخ گذرا اغلب لازم است تاثیر تغییرات بهره یا دوره تناوب نمونه برداری بر روی پایداری مطلق و نسبی یک سیستم حلقه بسته بررسی گردد. برای چنین منظورهایی روش مکان ریشه بسیار سودمند می باشد.

روش مکان ریشه سیستم های زمان-پیوسته را می توان بدون تغییر به سیستم های زمان-گسسته تعمیم داد، بجز اینکه مرز پایداری از محور موهومی به مرز دایره واحد در صفحه z تبدیل می شود. مانند درس کنترل خطی برای رسم مکان ریشه ها ابتدا معادله مشخصه را به فرم:

$$1+KF(z)=0 \qquad \text{19-4}$$

تبدیل می کنیم که در آن K پارامتر بهره و $F(z)$ تابع تبدیل پالسی با n قطب و m صفر می باشد. اگر نتوان معادله مشخصه را به فرم 4-19 نوشت، استفاده از روش مکان ریشه ها امکان پذیر نمی باشد. بسته به ساختار بلوک دیاگرامی سیستم زمان-گسسته، $F(z)$ می تواند $GH(z)$ یا $G(z)H(z)$ باشد. سپس بسته به علامت جبری بهره K قواعد رسم مکان ریشه را اعمال می کنیم.

4-6-1- قواعد رسم مکان ریشه برای $K>0$

برای $K>0$ معادل4-19 را می توان بصورت دو شرط کلی بیان نمود:

$$|F(z)| = \frac{1}{K} \qquad \text{20-4}$$

$$\mathbf{R}F(z) = (2k+1)p \qquad k=0,1,2,\ldots \qquad \text{21-4}$$

که معادله 4-20 را شرط اندازه و معادله 4-21 را شرط زاویه گویند. مقادیری از z که هر دو شرط را برآورده نمایند ریشه های معادله مشخصه سیستم حلقه بسته می باشند.

مراحل رسم مکان ریشه برای $K>0$ بصورت زیر است:

- ابتدا برای تابع تبدیل پالسی $F(z)$ محل قطب ها و صفرها را در صفحه z تعیین می کنیم.
- تعداد قطب و صفر بینهایت (تعداد مجانب مربوطه) را مشخص می کنیم. تعداد صفر و قطب در بینهای برابر اختلاف تعداد قطب و صفر $(n-m)$ است.
- مکان ریشه ها از قطب شروع و در صفر پایان می یابد.
- مکان روی محور حقیقی جایی است که سمت راست آن تعداد فردی قطب یا صفر وجود داشته باشد.

- محل تلاقی مجانب ها (s) و زاویه مجانبی (j) بصورت زیر بدست می آیند

$$s = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} \qquad 22\text{-}4$$

$$j = \frac{(2k+1)p}{n-m} \qquad 23\text{-}4$$

- نقاط شکست مکان جایی وجود دارند که مکان بین دو قطب یا دو صفر قرار گیرد. این نقاط از حل:معادله زیر بدست می آیند:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{-1}{F(z)}\right) = 0 \qquad 24\text{-}4$$

- مقدار پارامتر K در هر نقطه از مکان از رابطه زیر بدست می آید:

$$\frac{d_1 d_2 \ldots d_n}{\mathbf{l}_1 \mathbf{l}_2 \ldots \mathbf{l}_m} \qquad 25\text{-}4$$

- که در آن d_i فاصله نقطه مورد نظر از قطب و $\mathbf{l}_i$ فاصله از صفر هاست.
- زاویه خروج از قطب مختلط بصورت زیر بدست می آید

θ − (مجموع زوایای قطب مختلط با دیگر قطبها) + (مجموع زوایای قطب مختلط با دیگر صفرها) = 180   26-4

- مکان ریشه ها نسبت به محور حقیقی، متقارن خواهد بود.

3 مثال 4-7

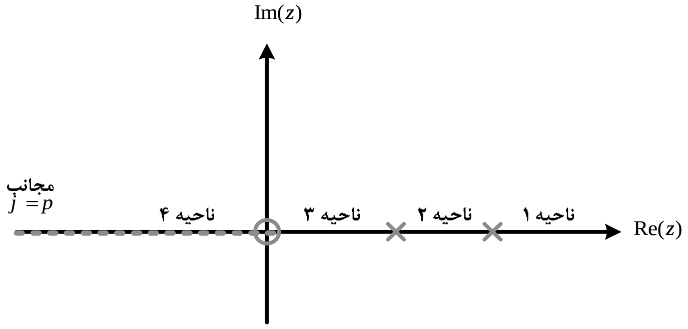
مکان ریشه های سیستمی با معادله مشخصه زیر را برای $K>0, T=0.5^s$ رسم نمایید.

$$\Delta(z) = 1 + K\frac{z(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

حل:

برای رسم مکان ریشه ها مراحل 9 گانه فوق را به ترتیب انجام می دهیم:

$$F(z) = \frac{0.3935z}{(z-1)(z-0.6065)} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 0 \\ p_1 = 1 \\ p_2 = 0.6065 \end{cases}$$



تعداد صفر بینهایت = تعداد مجانب =1 3 یک زاویه مجانبی لازم داریم و دیگر محل تلاقی مجانب ها معنا ندارد.

$$j = \frac{(2k+1)p}{1} \overset{k=0}{=} p$$

سمت راست ناحیه 1 هیچ قطب و صفری وجود ندارد (زوج) 3 مکان نیست.

سمت راست ناحیه 2 یک قطب و صفری وجود دارد (فرد) 3 مکان هست. 3 بین دو قطب 3 نقطه شکست داریم.

سمت راست ناحیه 3 دو قطب و صفری وجود دارد (زوج) 3 مکان نیست.

سمت راست ناحیه 4 سه قطب و صفری وجود دارد (فرد) 3 مکان هست. 3 بین دو صفر 3 نقطه شکست داریم.

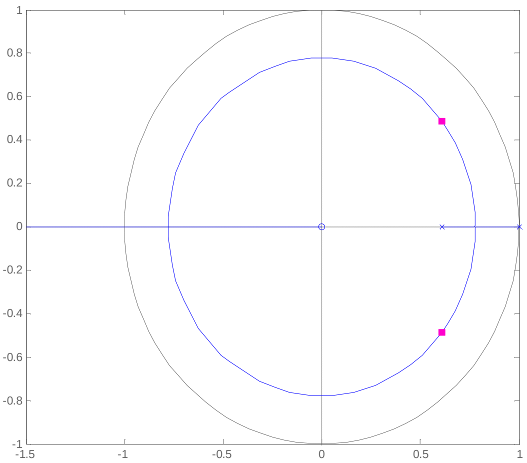
$$F(z) = \frac{0.3935z}{(z-1)(z-0.6065)} \rightarrow -\frac{1}{F(z)} = -\frac{z^2 - 1.607\,z + 0.6065}{0.3935z}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dz}\left(-\frac{z^2 - 1.607\,z + 0.6065}{0.3935z}\right) = -\frac{(2z-1.607)(0.3935z) - (0.3935)(z^2 - 1.607\,z + 0.6065)}{(0.3935z)^2} = 0$$

$$\rightarrow \cancel{2} \times 0.3935z^2 \cancel{-0.6324z} \cancel{-0.3935z^2} + \cancel{0.6324z} - 0.9746 = 0 \rightarrow 0.3935z^2 - 0.9746 = 0$$

$$\rightarrow z^2 = 6065 \rightarrow z = \pm - 0.7788 \quad \mathbf{R}$$

بنابراین مکان ریشه های سیستم مربوطه بصورت زیر خواهد بود.



4-6-2- قواعد رسم مکان ریشه برای $K<0$

برای $K<0$ معادل4-19 را می توان بصورت دو شرط کلی بیان نمود

$$|F(z)| = \frac{1}{K} \qquad 27\text{-}4$$

$$\mathbf{R}F(z) = 2kp \qquad k = 0,1,2,\ldots \qquad 28\text{-}4$$

مراحل رسم مکان ریشه برای $K<0$ تنها در چند مورد با $K>0$ تفاوت دارد:

- مکان ریشه ها از صفر شروع و در قطب پایان می یابد.
- مکان روی محور حقیقی جایی است که سمت راست آن تعداد زوجی قطب یا صفر وجود داشته باشد.
- زاویه مجانبی (j) بصورت زیر بدست می آیند:

$$j = \frac{2kp}{n-m} \qquad 29\text{-}4$$

3 مثال 4-8

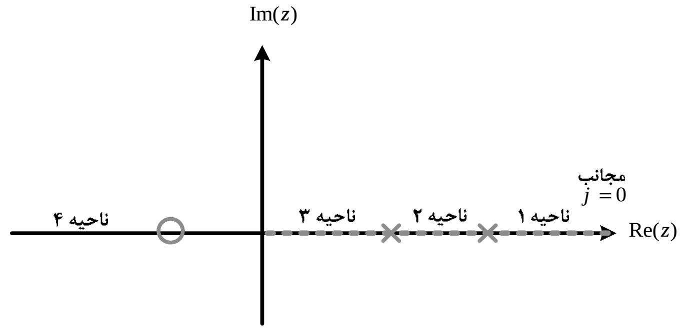
مکان ریشه های سیستمی با معادله مشخصه زیر را برای $K<0$ رسم نمایید.

$$\Delta(z)=1+K\frac{(z+0.7453)}{(z-1)(z-0.4119)}$$

حل:

برای رسم مکان ریشه ها مراحل 9 گانه فوق را به ترتیب انجام می دهیم

$$F(z)=\frac{(z+0.7453)}{(z-1)(z-0.4119)}\rightarrow\begin{cases}z_1=-0.7453\\ p_1=1\\ p_2=0.4119\end{cases}$$



تعداد صفر بینهایت = تعداد مجانب =1 3 یک زاویه مجانبی لازم داریم و دیگر محل تلاقی مجانب ها معنا ندارد.

$$j=\frac{2kp}{1}\overset{k=0}{=}0$$

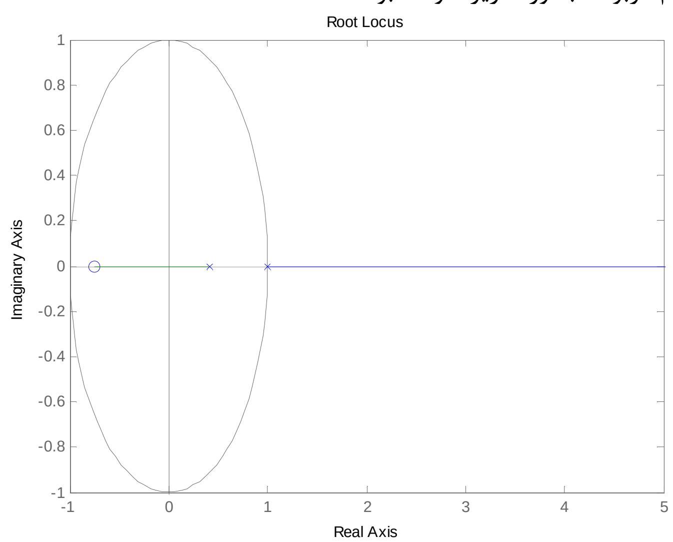
سمت راست ناحیه 1 هیچ قطب و صفری وجود ندارد (زوج) 3 مکان هست.

سمت راست ناحیه 2 یک قطب و صفری وجود دارد (فرد) 3 مکان نیست.

سمت راست ناحیه 3 دو قطب و صفری وجود دارد (زوج) 3 مکان هست.

سمت راست ناحیه 4 سه قطب و صفری وجود دارد (فرد) 3 مکان نیست.

بنابراین مکان ریشه های سیستم مربوطه بصورت زیر خواهد بود:



4-7- طراحی بر اساس پاسخ فرکانسی

پیش از آنکه بتوانیم روش های پاسخ فرکانسی کنترل خطی را به سیستم های زمان-گسسته بطور سودمندانه اعمال کنیم، برخی تغییرات در صفحه z ضروری است. از آنجایی که رابطه بین صفحه z و s بصورت $z = e^{sT}$ است، اگر با این رابطه منحنی‌های بودی را رسم کنیم، سادگی روابط لگاریتمی از بین خواهد رفت. برای اینکار از تبدیل دو خطی استفاده می کنیم و صفحه z را به صفحه w می نگاریم.

تبدیل دو خطی که محدوده دایره واحد صفحه z را به نیم صفحه چپ صفحه w می نگارد بصورت زیر تعریف می گردد:

$$z = \frac{1+\left(\frac{T}{2}\right)w}{1-\left(\frac{T}{2}\right)w} \qquad 4\text{-}30$$

که در آن T دوره تناوب نمونه برداری است.

7 نکته:

صفحه w و صفحه s تا حدود زیادی شبیه هستند. تفاوت بین این دو صفحه در آن است که صفحه w کل نیم صفحه چپ را شامل می شود اما صفحه s تنها نوار اصلی نیم صفحه چپ را شامل می‌شود. اگر w را فرکانس در صفحه s و n را فرکانس در صفحه w فرض کنیم ارتباط بین این دو پارامتر برابر است با:

$$n = \frac{2}{T}\tan\frac{wT}{2}$$

4-7-1- دیاگرام های بودی

با استفاده از تبدیل دو خطی w می توان روش های رسم دیاگرام بودی که در درس کنترل خطی دیدیم را به تابع تبدیل پالسی صفحه w اعمال نمود. به مثال زیر توجه کنید:

3 مثال 4-9

نمودار های بودی تابع تبدیل پالسی زیر را برای $T = 1^s$ رسم نمایید.

$$G(z) = \frac{0.368z + 0.264}{z^2 - 1.368z + 0.368}$$

حل:

برای رسم نمودارهای بودی ابتدا صفحه z را به صفحه w تبدیل می کنیم:

$$z = \frac{1+0.5w}{1-0.5w} \rightarrow G(z) = \frac{0.368\left(\frac{1+0.5w}{1-0.5w}\right)+0.264}{\left(\frac{1+0.5w}{1-0.5w}\right)^2 - 1.368\left(\frac{1+0.5w}{1-0.5w}\right)+0.368} \times \frac{(1-0.5w)^2}{(1-0.5w)^2}$$

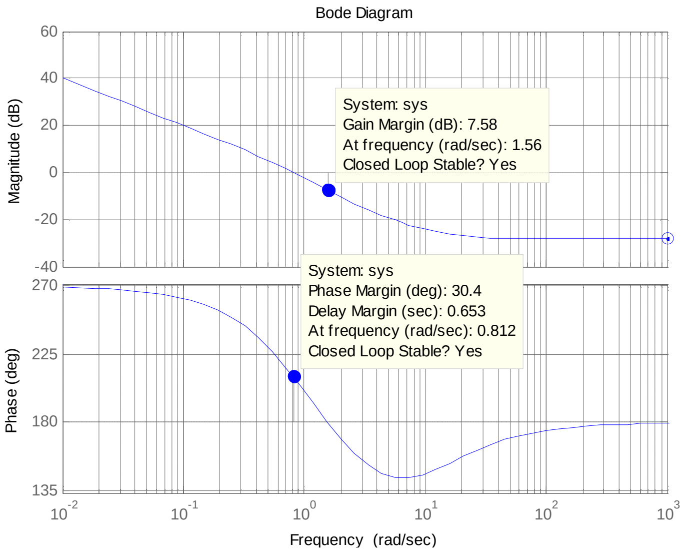
$$=\frac{0.368\left((1-0.5w)(1+0.5w)\right)+0.264(1-0.5w)^2}{(1+0.5w)^2-1.368(1+0.5w)(1-0.5w)+0.368(1-0.5w)^2}$$

$$=\frac{0.368\left(1\cancel{+0.5w-0.5w}-0.25w^2\right)+0.264\left(1-w+0.25w^2\right)}{\left(1+w+0.25w^2\right)-1.368\left(1\cancel{+0.5w-0.5w}-0.25w^2\right)+0.368\left(1-w+0.25w^2\right)}$$

$$=\frac{0.368-0.092w^2+0.264-0.264w+0.066w^2}{\cancel{1}+w+0.25w^2\cancel{-1.368}+0.342w^2\cancel{+0.368}-0.368w+0.092w^2}$$

$$=\frac{-0.026w^2-0.264w+0.632}{0.684w^2+0.632\text{w}}=\frac{-0.0381(w-2)(w+12.14)}{w(w+0.924)}$$

که نمودار بودی آن به صورت زیر خواهد بود:



برای تحلیل پایداری نمودارهای بودی و تشخیص مشخصات جبرانسازهای مربوطه دو معیار حد بهره و حد فاز تعریف می گردد که این دو معیار در دیاگرام بودی مثال 4-10 نیز نشان داده شده است.

4-7-2- یادآوری از درس کنترل خطی

تعریف

فرکانس قطع فاز فرکانس قطع فاز (w_C)، فرکانسی است که در آن زاویه تابع تبدیل برابر $180°$ گردد.

حد بهره حد بهره بصورت زیر محاسبه می گردد:

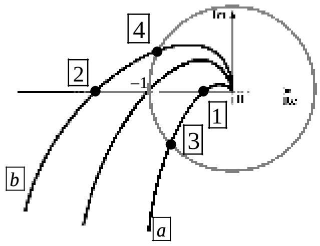
$$GM=20\log\frac{1}{|GH(iw_C)|} \qquad (4\text{-}31)$$

فرکانس قطع بهره فرکانس قطع بهره (w_g)، فرکانسی است که در آن اندازه تابع تبدیل برابر 1 گردد.

حد فاز حد فاز بصورت زیر محاسبه می گردد:

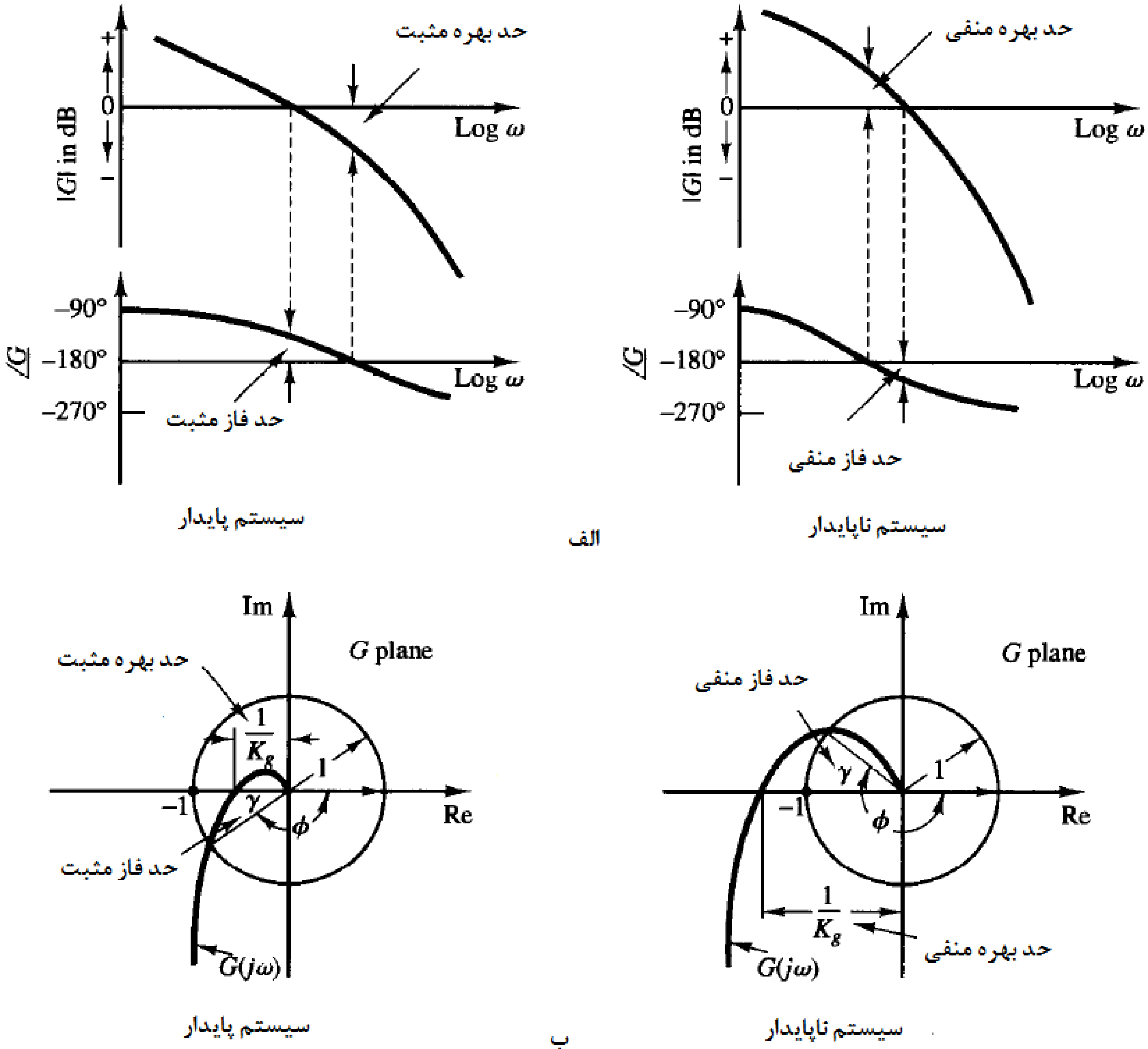
$$PM=\mathbf{R}GH(iw_g)\pm 180 \qquad (4\text{-}32)$$

به شکل 4-15 توجه کنید. برای نمودار $\boxed{a}$، نقاط $\boxed{1}$ و $\boxed{3}$ به ترتیب برابر w_C و w_g می باشد. برای نمودار $\boxed{b}$، نقاط $\boxed{2}$ و $\boxed{4}$ به ترتیب برابر w_C و w_g می باشد.



شکل 4-15 مفاهیم حد فاز و حد بهره

برای پایداری یک سیستم مقادیر حد فاز و حد بهره هر دو باید مثبت باشند. این مقادیر را به راحتی می توان از روی نمودارهای بودی تشخیص داد. برای درک بهتر این موضوع به شکل زیر توجه کنید.



شکل 4-16 نحوه تشخیص علامت جبری حدفاز و حدبهره الف) از روی نمودارهای بودی ب) از روی دیاگرام نایکوییست

توجه کنید که برای خواندن مقدار w_g از روی نمودارهای بودی باید بجای اندازه 1 اندازه $0db$ لحاظ گردد.

4-8- تمرین

1. معادل زمان گسسته تابع تبدیل زیر را از روش قطب و صفر تطبیق یافته و تغییر ناپذیری پله بدست آورید:

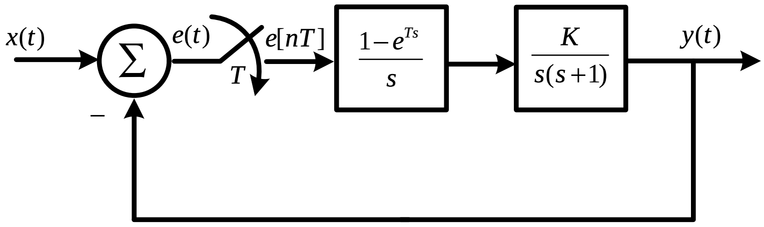
$$G(s)=\frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

2. پایداری سیستمی با معادله مشخصه زیر را بررسی نمایید

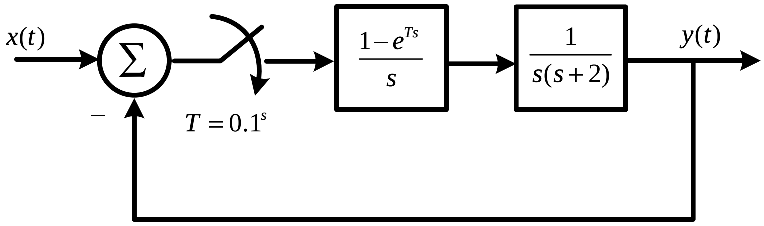
$$\Delta(z)=z^3+2.1z^2+1.44z+0.32=0$$

3. اگر سیستم مرتبه دومی با دوره تناوب $T=0.5^s$ نمونه برداری شود، دارای قطب های $r=0.8, q=\pm 45^o$ خواهد بود. معادله مشخصه تابع تبدیل پالسی مربوطه و قطب های معادل زمان-پیوسته آن را تعیین کنید. نوع پاسخ سیستم چگونه خواهد بود؟ مشخصات پاسخ گذرا را محاسبه نمایید.

4. نمودار مکان ریشه را برای سیستم زیر برای $T=1^s$ و $T=4^s$ رسم نمایید.



5. دیاگرام بودی سیستم زیر را رسم نمایید. پارامترهای پایداری سیستم را روی نمودار بودی مشخص نمایید:



برای سیستم زیر خطای حالت دائمی را برای $T=1^s$ به هر سه ورودی پله، شیب و شتاب محاسبه نمایید:

$$GH(z)=\frac{0.2(1-0.9z^{-1})(1+z^{-1})z^{-1}}{(1-0.12z^{-1})(1-z^{-1})^2}$$

4-9- کاربرد MATLAB

مثال 4-8

```
>> sys=tf([0.3935 0],[1 -1.6065 0.6065],0.5)
 Transfer function
       0.3935 z
----------------------
z^2 - 1.607 z + 0.6065
 Sampling time 0.5
>> rlocus(sys)
```

مثال 4-9

```
>> sys2=tf([1 0.7453],[1 -1.4119 0.4119],1)
 Transfer function
      z + 0.7453
----------------------
z^2 - 1.412 z + 0.4119
 Sampling time 1
>> rlocus(sys2)
```

مثال 4-10

```
>> sys=tf([-0.026 -0.264 0.632],[0.684 0.632 0])
 Transfer function
-0.026 s^2 - 0.264 s + 0.632
----------------------------
    0.684 s^2 + 0.632 s
 >> bode(sys)
```

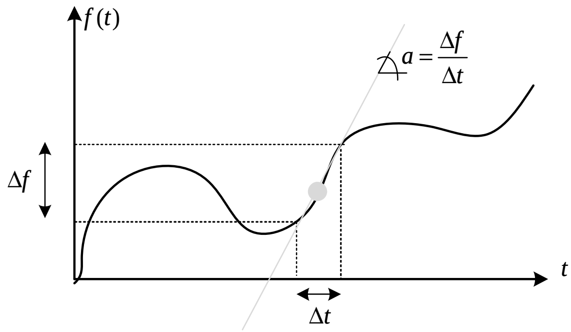
بخش پنجم:

خلاصه ای از کنترل غیرخطی

3 بخش پنجم: خلاصه ای از کنترل غیرخطی

5-1- مقدمه

روشهایی که تا کنون در تحلیل و طراحی سیستم های فیزیکی بکار بردیم، همگی بر اساس تقریبی خطی از ماهیت اصلی سیستم که ذاتاً غیرخطی می باشد، بنا شده اند. معمولاً برای کار با سیستم های غیرخطی، تقریبی خطی منحنی مشخصه سیستم را در اطراف نقطه کار بکار می برند. به شکل زیر توجه کنید:



شکل 5-1 تقریب خطی در اطراف نقطه کار

از آنجا که چنین تقریبی همواره ممکن نبوده و گاهی تقریب نادرست منجر به عملکرد ناپایدار سیستم می گردد، استفاده از مدل غیرخطی بجای تقریب نادرست خطی علیرغم پیچیدگی های کار با آن مفید خواهد بود.

در طبیعت رفتارهای غیر خطی بی شماری را می توان نام برد. در این قسمت پاره ای از توابع و رفتارهای غیرخطی را معرفی می‌کنیم که در اکثر سیستمهای صنعتی با آنها روبرو هستیم. (در ضمن این رفتارها غیر خطی بسیار ایده آل فرض شده اند)

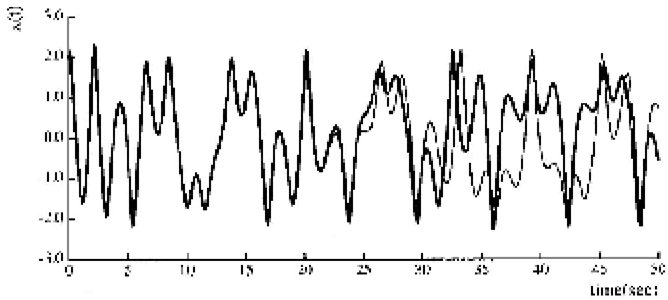
- **عناصر بهره متغیر**: عناصری در سیستم های کنترل وجود دارد که بهره آنها با توجه به بازه ی پارامتر ورودی تغییر می‌کند. (نمونه ای از این سیستمها، سیستم فنرهای موازی است.)
- **ناحیه ی مرده**: این رفتار در سیستمهایی دیده می شود که در آنها خروجی به ازای ورودی های کوچک صفر باقی می‌ماند.
- **اشباع** سیستمهای طبیعی ذاتاً دارای محدودیت هستند. ازاین رو این رفتار در قریب به اتفاق همه این سیستمها دیده می‌شود. این رفتار هم مانند ناحیه ی مرده، یک رفتار چند بهره ای محسوب می شود.(خروجی سیستم به ازای ورودی های بزرگتر از مقدار خاص دارای بهره ثابت است. درحالی که با ورودی های کوچک سیستم دارای بهره ثابتی ست)
- **سیستمهای دو وضعیتی**: از دیگر سیستمهای چند گین معمول می توان به سیستمهای دو وضعیتی اشاره کرد. در اکثر سیستمهای صنعتی خروجی سیستم دارای دو حالت است مانند سنسورهای دو وضعیتی (که برای اعلان هشدار برای کنترلر به کار برده می شوند) یا عملگرهای دو وضعیتی (مانند شیرهای دو وضعیتی یا رله ها). در این سیستمها خروجی به ازای ورودی هایی که مقدار آنها از حد خاصی بیشتر باشد یک وضعیت و در غیر این صورت وضعیت دومی را اختیار می‌کنند.
- **کوانتیزه کننده ها**: این نوع رفتار در سیستمهای دیده می شود که در آنها از مبدلهای آنالوگ به دیجیتال یا سایر مبدلهایی که ورودی را به حالت خاصی کوانتیزه می کنند، دیده می شود.
- **هیسترزیس**: خاصیت هیسترزیس نیز در بیشتر سیستمهای غیر خطی رایج است. نمونه ای از این رفتار در رله های الکتریکی دیده می شود.
- **سیکل حدی**: سیستم های غیرخطی قادرند بدون ورودی، نوسانات با دامنه و تناوب ثابت از خود نمایش دهند. این نوسانات را سیکل حدی گویند.

5-2- مبانی سیستم های غیرخطی

5-2-1- مقایسه سیستم های غیر خطی و خطی

تفاوت های سیستم های خطی و غیر خطی را می توان بصورت زیر بیان نمود:

- پایداری سیستم های غیرخطی به شدت به شرایط اولیه وابسته است. اگر یک سیستم خطی پایدار باشد، برای تمام شرایط اولیه پایدار است اما برای سیستم های غیرخطی این چنین نیست.



شکل 5-2 اختلاف بین پاسخ سیستم غیر خطی به دو شرایط اولیه مختلف

- دامنه نوسان سیستم های غیرخطی مستقل از شرایط اولیه است اما دامنه نوسان سیستم های خطی شدیداً به شرایط اولیه بستگی دارد.
- رفتار سیستم های غیرخطی به شدت به دامنه سیگنال ورودی بستگی دارد.
- در سیستم های غیرخطی مفهومی به نام فرکانس طبیعی وجود ندارد، این در حالیست که در سیستم های خطی فرکانس های طبیعی رفتار سیستم را تشریح می کنند.
- تبدیل لاپلاس فقط در سیستم های خطی قابل اعمال است.
- خاصیت جمع آثار فقط در سیستم های خطی قابل اعمال است.
- سیستم های خطی در زمان بینهایت به سوی بینهایت میل می کنند اما در سیستم های غیر خطی چنین نیست.
- پاسخ یک سیستم خطی به یک ورودی سینوسی با فرکانس w یک سیگنال سینوسی با همان فرکانس است. اما برای یک سیستم غیرخطی پاسخ به یک ورودی سینوسی با فرکانس w می تواند شامل هارمونیک های[1] این فرکانس نیز باشد.
- وجود نقطه تعادل در سیستم های غیرخطی

تعریف:

اگر یک سیستم غیرخطی تغییرناپذیر با زمان را با معادلات حالت و بر حسب متغیرهای حالت مدل نماییم، حالت خاصی را که اگر سیستم در آن وضعیت قرار گیرد، تغییر چندانی نمی کند **نقطه تعادل**[2] یا حالت تعادل سیستم گوییم.

5-2-2- محاسبه نقطه تعادل

فرض کنید معادلات حالت[3] یک سیستم غیرخطی بصورت زیر باشد:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ y &= h(x) \end{aligned} \qquad (1\text{-}5)$$

[1] اگر فرکانس اصلی یک سیگنال w باشد، بخش هایی از سیگنال را که دارای فرکانس $k\,w$ می باشد را هارمونیک های فرکانس اصلی گویند.

[2] Equilibrium point

[3] معادلات حالت یک سیستم خطی بصورت زیر است:

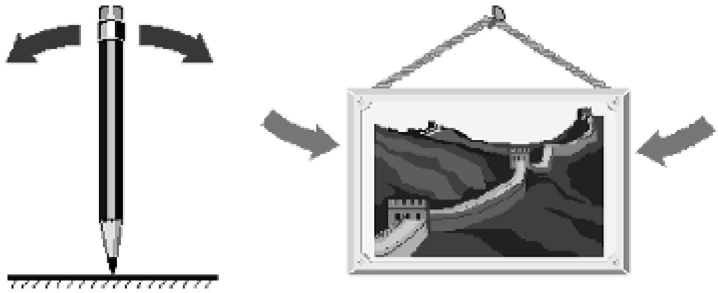
$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

نقطه تعادل این سیستم از حل معادله $f(x)=0$ بدست می آید. یک سیستم غیر خطی می تواند چندین نقطه تعادل داشته باشد. (عموماً نقطه تعادل سیستم های غیرخطی $x=0$ است.) در نقطه تعادل u مشخص است و معمولا آن را صفر در نظر می‌گیرند.

<u>تعریف</u>:

سیستم غیر خطی را **<u>خود گردان</u>**[1] گویند اگر f به زمان بستگی نداشته باشد. در غیر اینصورت سیستم غیرخطی را **<u>ناخودگردان</u>**[2] گویند.

همانطور که در شکل زیر مشخص است، نقاط تعادل یک سیستم می توانند پایدار و یا ناپایدار باشند.



شکل 5-3 شکل سمت راست حالت تعادل پایدار – شکل سمت چپ حالت تعادل ناپایدار

3 **مثال 5-1**

نقطه تعادل سیستم های زیر را محاسبه نمایید:

$$1)\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2^2\\ \dot{x}_2 = x_1 + (x_1+1)x_2 + x_1\sin x_2\end{cases}$$

حل:

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2^2 = 0\\ \dot{x}_2 = x_1 + (x_1+1)x_2 + x_1\sin x_2 = 0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x_2 = 0\\ x_1 + 0 = 0\end{cases} \rightarrow x_e = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$2)\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1\cosh x_2\\ \dot{x}_2 = x_2^2\sinh x_1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1\cosh x_2 = 0 \xrightarrow{\cosh x_2 \neq 0} x_1 = 0\\ \dot{x}_2 = x_1^2 + 1 + x_2 = 0 \rightarrow 1 + x_2 = 0\end{cases} \rightarrow x_e = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

5-2-2- خطی سازی سیستم های غیرخطی

یک سیستم غیرخطی بدون ورودی را می توان با استفاده از بسط تیلور بصورت زیر بیان نمود:

$$\dot{x} = f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=0} x + f_{h.o.t}(x) \qquad 2\text{-}5$$

که در آن $f_{h.o.t}(x)$ جملات مرتبه بالاتر می باشند که می توان از آنها صرفنظر نمود. بنابراین معادله 5-2 را می توان بصورت تقریبی بصورت:

[1] Autonomous
[2] Non Autonomous

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ A = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=0} \end{cases} \qquad 3\text{-}5$$

بیان کرد، که این فرم را مدل خطی تقریبی سیستم و A را ماتریس ژاکوبین[1] گویند.

مثال 3 2-5

سیستم های غیر خطی زیر را با تقریب خطی بیان کنید

$$1)\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^2 + x_1\cos x_2 \\ \dot{x}_2 = x_2 + (x_1+1)x_1 + x_1\sin x_2 \end{cases}$$

حل:

$$\begin{cases} f_1 = x_2^2 + x_1\cos x_2 \\ f_2 = x_2 + (x_1+1)x_1 + x_1\sin x_2 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}_{x=0} = \begin{pmatrix} \cos x_2 & 2x_2 - x_1\sin x_2 \\ 2x_1+1+\sin x_2 & 1+\cos x_2 \end{pmatrix}_{x_1=x_2=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} \cong Ax \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 - x_1^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 + x_2^2 \end{cases}$$

حل:

$$\begin{cases} f_1 = 2x_1 - x_2 - x_1^2 \\ f_2 = x_1 - 2x_2 + x_2^2 \end{cases} \rightarrow\rightarrow A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}_{x=0} = \begin{pmatrix} 2-x_1 & -1 \\ 1 & -2+2x_2 \end{pmatrix}_{x_1=x_2=0} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} \cong Ax \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

$$3)\ \frac{d^2x}{dt^2} - \left(1-x^2\right)\frac{dx}{dt} + x = 0$$

حل:

ابتدا باید معادله دیفرانسیل را به معادلات حالت تبدیل نماییم:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dfrac{dx}{dt} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \left(1-x^2\right)\dfrac{dx}{dt} - x = \left(1-x_1^2\right)x_2 - x_1 \end{cases}$$

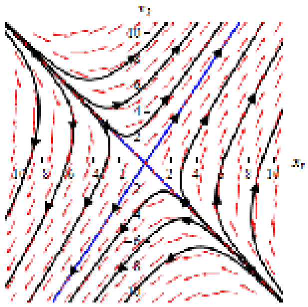
$$\begin{cases} f_1 = x_2 \\ f_2 = \left(1-x_1^2\right)x_2 - x_1 \end{cases} \rightarrow\rightarrow A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}_{x=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2x_1x_2-1 & 1-x_1^2 \end{pmatrix}_{x_1=x_2=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

[1] Jacobian

$$\dot{x} \cong Ax \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 \end{cases}$$

3-5- تحلیل صفحه فاز

روش تحلیل فاز یک روش گرافیکی برای تحلیل سیستم های مرتبه دوم (دارای دو متغیر حالت) می باشد. در این روش نموداری بر حسب رابطه بین دو متغیر حالت در صفحه $x_1 - x_2$ رسم می گردد. این نمودار تغییرات متغیرهای حالت را از شرایط اولیه بر حسب تغییرات زمان نشان می دهد. مجموعه ای از مسیرهای صفحه فاز، که بر حسب شرایط اولیه متفاوت حاصل شده باشد را پیکره صفحه فاز[1] گویند.



شکل 5-3 نمونه ای از پیکره صفحه فاز یک سیستم غیرخطی مرتبه دوم

رسم پیکره صفحه فاز بصورت دستی بسیار پیچیده می باشد. در این جزوه تنها با ارائه یک مثال به این موضوع می پردازیم.

3 مثال 5-3

پیکره صفحه فاز سیستم زیر را رسم نمایید.

$$\ddot{x} + 0.2(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

رسم:

برای رسم منحنی های پیکره فاز ابتدا معادلات حالت را بدست می آوریم

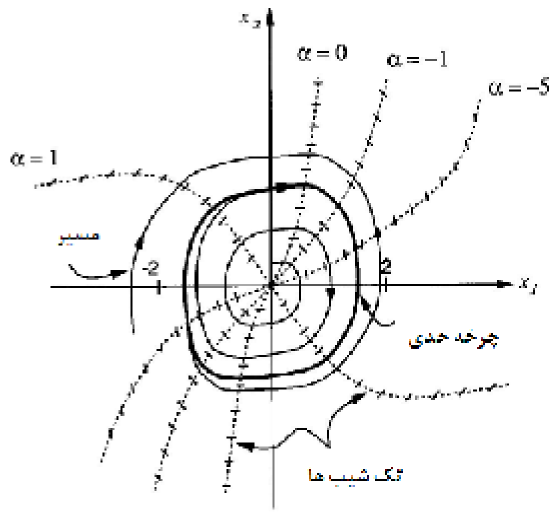
$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} = x_1 \end{cases} \rightarrow \dot{x}_2 = \ddot{x} = -0.2(x_1^2 - 1)x_2 - x_1$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -0.2(x_1^2 - 1)x_2 - x_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -0.2(x_1^2 - 1)x_2 - x_1 \end{cases} \rightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{0.2(x_1^2 - 1)x_2 + x_1}{x_2} = a$$

$$\rightarrow 0.2(x_1^2 - 1)x_2 + x_1 + a\,x_2 = 0 \rightarrow x_2\left(0.2(x_1^2 - 1) + a\right) = -x_1 \rightarrow x_2 = \frac{-x_1}{0.2(x_1^2 - 1) + a}$$

به ازای a های مختلف منحنی های متفاوتی بدست می آید:

[1] Phase Plane Portrait



خطوط روی هر یک از نمودارها شیب a را نشان می دهد که با اتصال این شیب ها به یکدیگر می توان مسیر پیکره فاز را رسم نمود. در این نمودار وجود سیکل حدی قابل مشاهده می باشد.

4-5- بررسی پایداری

مفهوم پایداری در سیستم های غیرخطی با خوش رفتاری سیستم حول نقطه کار مطلوب بیان می گردد. برای درک بهتر این موضوع آشنایی با چند تعریف اصلی لازم است:

تعاریف:

پایدار مجانبی: سیستم غیرخطی را پایدار مجانبی گویند اگر نقطه تعادل آن پایدار باشد و در مسیر پیکره فاز حالت هایی که نزدیک صفر هستند با افزایش زمان به صفر همگرا شوند.

پایدار: اگر پایداری مجانبی سیستم در هر حالت اولیه ای حفظ گردد، نقطه تعادل را پایدار می نامند.

برای بررسی پایداری نقاط تعادل از قضایای لیاپانوف استفاده می شود:

سیستم خطی شده بوسیله روشهای بخش 5-2-2 را در نظر بگیرید. در این روش پایداری نقطه تعادل سیستم را که با معادله حالت $\dot{x} = Ax$ بیان می شود، با استفاده از قضیه لیاپانوف بررسی می کنیم:

- **قضیه اول لیاپانوف:**

اگر مقادیر ویژه ماتریس A را داشته باشیم، پایداری نقطه تعادل سیستم خطی شده بر اساس مقادیر ویژه بدست آمده چنین بیان می گردد:

الف) اگر مقادیر ویژه سمت چپ محور موهومی باشند، نقطه تعادل سیستم سیستم پایدار مجانبی خواهد بود.

ب) اگر سیستم حداقل یک مقدار ویژه در سمت راست محور موهومی داشته باشد ، نقطه تعادل سیستم سیستم ناپایدار خواهد بود.

ج) اگر مقادیر ویژه سمت چپ و روی محور موهومی باشند، از این تست نمی توان برای بررسی پایداری استفاده نمود.

3 مثال 5-4

پایداری نقطه تعادل سیستم های غیر خطی مثال 5-2 را بررسی نمایید.

$$1)\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2^2 + x_1\cos x_2\\ \dot{x}_2 = x_2 + (x_1+1)x_1 + x_1\sin x_2\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\dot{x}_1 = x_1\\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2\end{cases}$$

حل:

ابتدا مقادیر ویژه را محاسبه می کنیم:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} \rightarrow |\lambda I - A| = \begin{vmatrix}\lambda-1 & 0\\ -1 & \lambda-1\end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2}=1$$

بنابراین نقطه تعادل صفر برای چنین سیستمی ناپایدار است.

$$2)\begin{cases}\dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 - x_1^2\\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 + x_2^2\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\dot{x}_1 = 2x_1 - x_2\\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2\end{cases}$$

حل:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix} \rightarrow |\lambda I - A| = \begin{vmatrix}\lambda-2 & 1\\ -1 & \lambda+2\end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+2)+1 = \lambda^2-3=0 \rightarrow \lambda=\pm\sqrt{3}$$

بنابراین نقطه تعادل صفر برای چنین سیستمی ناپایدار است.

$$3)\frac{d^2x}{dt^2} - \left(1-x^2\right)\frac{dx}{dt} + x = 0 \rightarrow \begin{cases}\dot{x}_1 = x_2\\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2\end{cases}$$

حل

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix} \rightarrow |\lambda I - A| = \begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 1 & \lambda-1\end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)+1 = \lambda^2-2\lambda+1=0 \rightarrow \lambda_{1,2}=1$$

بنابراین نقطه تعادل صفر برای چنین سیستمی ناپایدار است.

3 مثال 5-5

پایداری نقطه تعادل سیستم خطی شده زیر را بررسی نمایید.

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_1\\ \dot{x}_2 = -x_2\end{cases}$$

حل:

ابتدا مقادیر ویژه را محاسبه می کنیم

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \rightarrow |\lambda I - A| = \begin{vmatrix}\lambda+1 & 0\\ 0 & \lambda+1\end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2}=-1$$

بنابراین نقطه تعادل صفر برای چنین سیستمی پایدار مجانبی است.

7 قضیه لیاپانوف برای پایداری مجانبی

اگر در ناحیه کروی شکل اطراف نقطه تعادل صفر، یک تابع اسکالر $V(x)$ با مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته وجود داشته باشد، بطوریکه:

الف) $V(x)$ مثبت معین باشد. ب) $\dot{V}(x)$ منفی نیمه معین باشد.
آنگاه نقطه تعادل صفر پایدار مجانبی است.

▼ قضیه لیاپانوف برای پایداری

اگر یک تابع اسکالر $V(x)$ با مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته وجود داشته باشد، بطوریکه
الف) $V(x)$ مثبت معین باشد. ب) $\dot{V}(x)$ منفی معین باشد. ج) در صورتیکه $\|x\| \to \infty$ آنگاه $V(x) \to \infty$.
آنگاه نقطه تعادل صفر پایدار است.

در عمل بدست آوردن تابع $V(x)$ با مشخصات فوق راحت نیست و این موضوع بررسی پایداری سیستم غیرخطی را پیچیده می‌کند.

3 مثال 5-6

پایداری سیستم زیر را با $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ بررسی نمایید.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1\left(x_1^2 + x_2^2\right) \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2\left(x_1^2 + x_2^2\right) \end{cases}$$

حل:

تابع $V(x)$ یک تابع مثبت معین می باشد. بنابراین شرط اول هر دو قضیه برقرار است. اکنون شرط دوم را بررسی می کنیم

$$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1\left(x_2 - x_1\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right) + 2x_2\left(x_1 - x_2\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right) = 2\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2$$

$$\begin{cases} \|x_1\| \to \infty \\ \|x_2\| \to \infty \end{cases} \to V(x) \to \infty$$

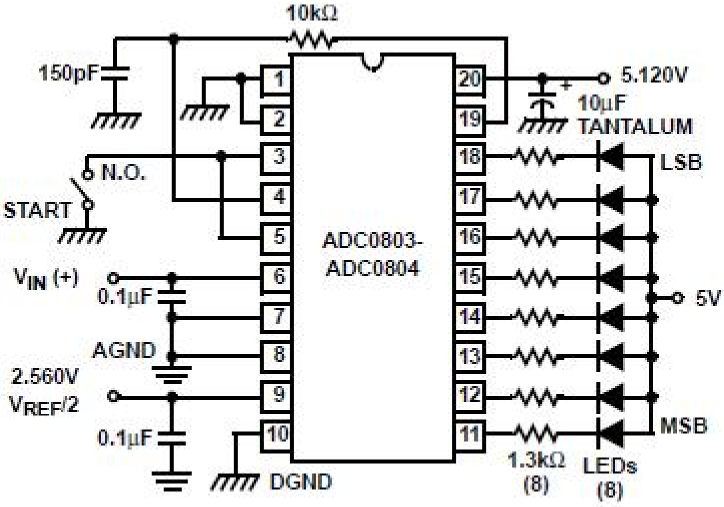
شرط سوم نیز برقرار است بنابراین سیستم پایدار کلی است.

پیوست‌ها

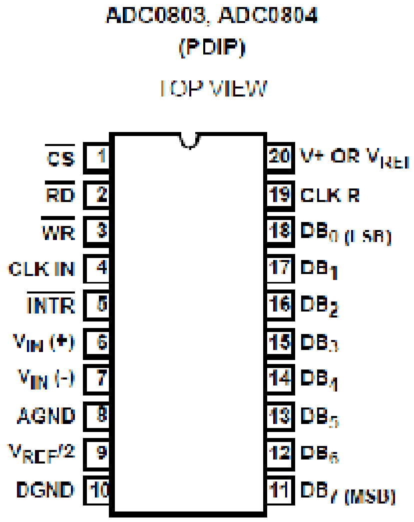
3 پیوست 1: مشخصات دو نوع آی سی A/D و D/A

مشخصات آی سی **ADC0804**:

Pinout



BASIC TESTER FOR THE A/D

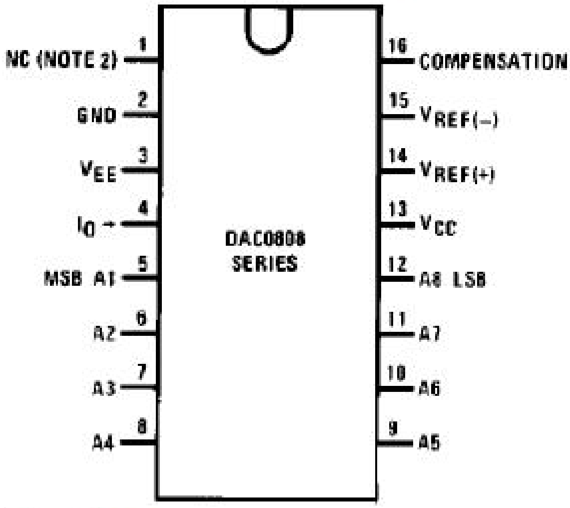


Features

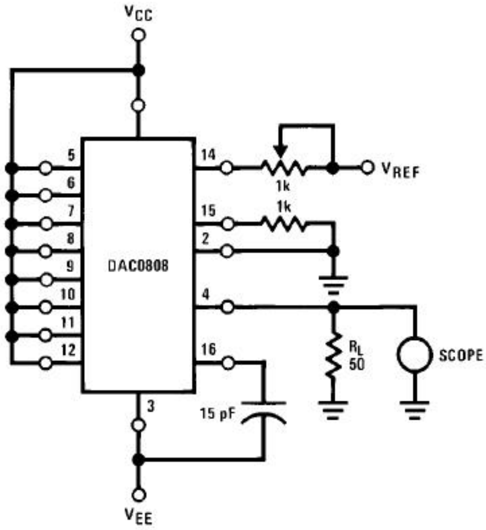
- 80C48 and 80C80/85 Bus Compatible - No Interfacing Logic Required
- Conversion Time . . . . <100µs
- Easy Interface to Most Microprocessors
- Will Operate in a “Stand Alone” Mode
- Differential Analog Voltage Inputs
- Works with Bandgap Voltage References
- TTL Compatible Inputs and Outputs
- On-Chip Clock Generator
- Analog Voltage Input Range (Single + 5V Supply) . . . . 0V to 5V
- No Zero-Adjust Required
- 80C48 and 80C80/85 Bus Compatible - No Interfacing Logic Required

مشخصات آی سی DAC0808:

Dual-In-Line Package



Test Circuits (Continued)



Features

- Relative accuracy: ±0.19% error maximum (DAC0808)
- Full scale current match: ±1 LSB typ
- 7 and 6-bit accuracy available (DAC0807, DAC0806)
- Fast settling time: 150 ns typ
- Noninverting digital inputs are TTL and CMOS compatible
- High speed multiplying input slew rate: 8 mA/µs
- Power supply voltage range: ±4.5V to ±18V
- Low power consumption: 33 mW @ ±5V

3 پیوست 2: روابط ریاضی مورد نیاز

1- روش گسترش کسر به کسر های جزئی:

برای تابع $F(x)$ ضرایب مربوط به کسرهایی که شامل ریشه های ساده مخرج می باشند، بصورت

$$A_i = \lim_{x \to x_0} (x - x_0) F(x)$$

محاسبه می گردند. همچنین هر ریشه مکرر از مرتبه k به k کسر مجزا تجزیه می گردد. ضرایب مربوط به کسر j ام که دارای مخرج $(x - x_0)^j$ می باشد بدین صورت محاسبه می شود

$$A_j = \frac{1}{(k-j)!} \lim_{x \to x_0} \frac{d^{k-j}}{dx^{k-j}} \left((x - x_0)^k F(x) \right)$$

2- جدول تبدیل فوریه:

Function, f(t)	Fourier Transform, F(ω)
Definition of Inverse Fourier Transform $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$	*Definition of Fourier Transform* $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$
$f(t - t_0)$	$F(\omega) e^{-j\omega t_0}$
$f(t) e^{j\omega_0 t}$	$F(\omega - \omega_0)$
$f(\alpha t)$	$\frac{1}{\lvert\alpha\rvert} F(\frac{\omega}{\alpha})$
$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$(j\omega)^n F(\omega)$
$(-jt)^n f(t)$	$\frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$
$\int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau$	$\frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$
$\delta(t)$	1
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$

$j\frac{1}{\pi t}$	$\mathrm{sgn}(\omega)$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_0)$
$rect(\frac{t}{\tau})$	$\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$
$\frac{B}{2\pi} Sa(\frac{Bt}{2})$	$rect(\frac{\omega}{B})$
$tri(t)$	$Sa^2(\frac{\omega}{2})$
$A\cos(\frac{\pi t}{2\tau}) rect(\frac{t}{2\tau})$	$\frac{A\pi}{\tau} \frac{\cos(\omega\tau)}{(\pi/2\tau)^2-\omega^2}$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$
$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$
$u(t)\cos(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]+\frac{j\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$
$u(t)\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{2j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]+\frac{\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2}$
$u(t)e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)$	$\frac{(\alpha+j\omega)}{\omega_0^2+(\alpha+j\omega)^2}$
$u(t)e^{-\alpha t}\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{\omega_0^2+(\alpha+j\omega)^2}$
$e^{-\alpha\|t\|}$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$
$e^{-t^2/(2\sigma^2)}$	$\sigma\sqrt{2\pi}\, e^{-\sigma^2\omega^2/2}$
$u(t)e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{\alpha+j\omega}$
$u(t)te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(\alpha+j\omega)^2}$

3 مراجع:

1- دکتر پرویز جبه‌دار مارالانی و دکتر علی خاکی‌صدیق، *سیستم‌های کنترل دیجیتال*، تالیف ک. اوگاتا، جلد اول، موسسه انتشارات و چاپ دانشگاه تهران، چاپ اول، مهرماه 1373

2- محمدرضا هاشمی گلپایگانی و همکاران، *کنترل غیر خطی کاربردی*، تالیف ژان-ژاک اِ. اسلوتین و وایپینگ لی، نشر دانشگاهی، چاپ دوم، 1389