Subject.
Year. Month. Date.

ریاضیات مهندسی پیشرفته: دکتر راشد محصل جلسه 1

«۸۹/۷/۴»

* کلیات مباحث این درس:

- حساب تغییرات، به مباحث بهینه‌سازی، روش‌های عددی، نظریه توزیع و مسئله اشتروم لیوویل مربوط می‌شود.

$$\underbrace{I(y)}_{\text{Functional}} = \int_{x_1}^{x_2} F(y,y')\,dx$$

- اشتروم لیوویل:
- توابع تعمیم یافته (Generalized Function): «تابعی» فانکشنال

تابع دیراک یک توزیع است و خواص تابعی ندارد.

- یافتن تابع گرین برای عملگرهای مختلف مثل عملگر هلمهولتز
- وینر-هاپف تکنیک برای حل مسائل با شرایط مرزی ترکیبی نیومن و دیریکله
- مسئله سامرفلد: مسئله دیم همراه با سطح زمین تلفاتی

$\vec{d}$ ↗

"Calculus of Variations"

* حساب تغییرات: ماکزیمم کردن یک فانکشنال هدف این بحث است.

(1) ماکزیمم کردن یک تابع به صورت $f(x_1,x_2,\dots)$ به صورت زیر است:

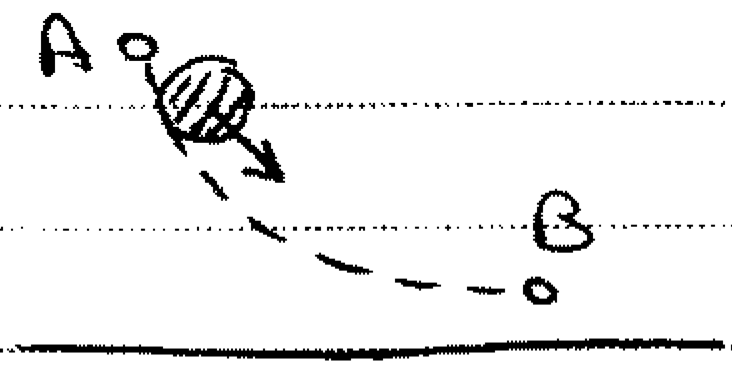
$$df = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}}_{=0} dx_1 + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_2}}_{=0} dx_2 + \dots$$

(2) ماکزیمم کردن یک تابع به صورت $f(x_1,x_2,\dots)$ با شرایط $\phi_1(x_1,x_2,\dots)=0$ و $\phi_2(x_1,x_2,\dots)=0$ از راه یافتن ضرایب لاگرانژ، صفر قرار دادن آن‌ها بدست می‌آید.

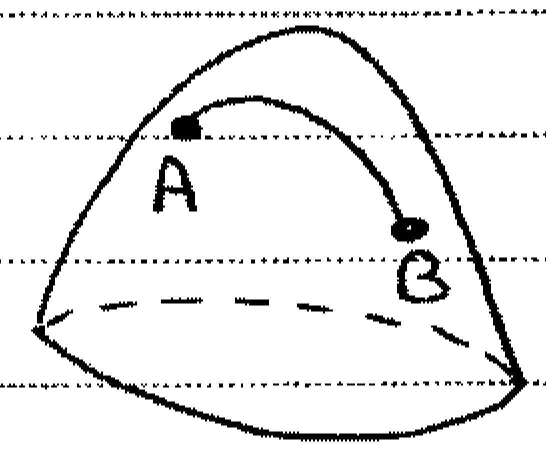
PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

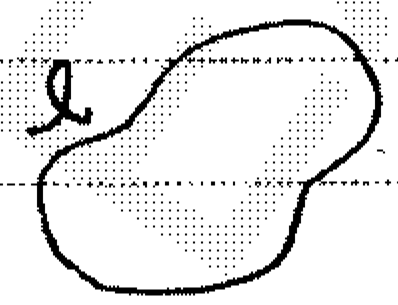
مسائل این فصل:



- یافتن منحنی مسیری که توپ با طی کمترین زمان از نقطهٔ A به B می‌رود.



- یافتن کوتاه‌ترین مسیر روی رویه بین نقاط A و B.
- نخی به طول l که بیشترین سطح مقطع را ایجاد کند.



یک فانکشنال که طول منحنی بین دو نقطهٔ x_1 و x_2 را بیان می‌کند.

$$I(y)=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

فانکشنال عبارتی است که به یک تابع وابسته است و هدف حساب تغییرات یافتن آن تابع است به گونه‌ای که آن فانکشنال اکسترمم شود.

- اویلر روشی را بیان کرد که اساس حساب تغییرات است.
- یک کابل که بین دو نقطه بسته شده است همواره در وضعیتی قرار می‌گیرد که حداقل پتانسیل یا پایین‌ترین محل مرکز جرم را ایجاد کند.

انواع فانکشنال‌ها:

- ساده‌ترین نوع فانکشنال ← در این فانکشنال یک تابع با متغیر مستقلش حضور دارند.

$$I(y)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\,dx$$

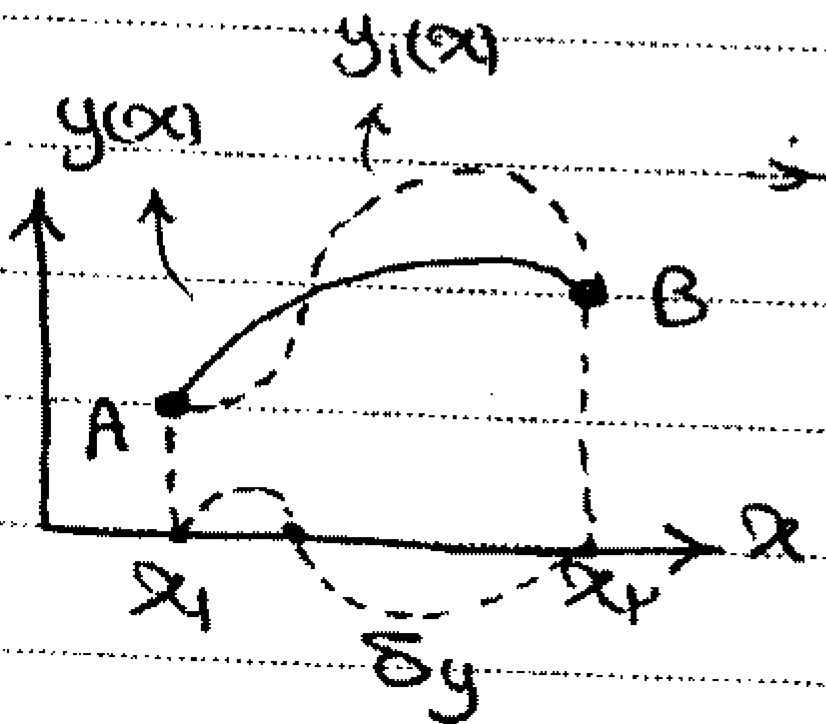
$$I(y)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_1,y_2,\dots,y_n,y_1',y_2',\dots,y_n')\,dx$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$I(y)=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})\,dx$$

$$I=\iiint F\left(x,y,z,u(x,y,z),v(x,y,z),\frac{\partial u}{\partial x},\dots\right)dx\,dy\,dz$$

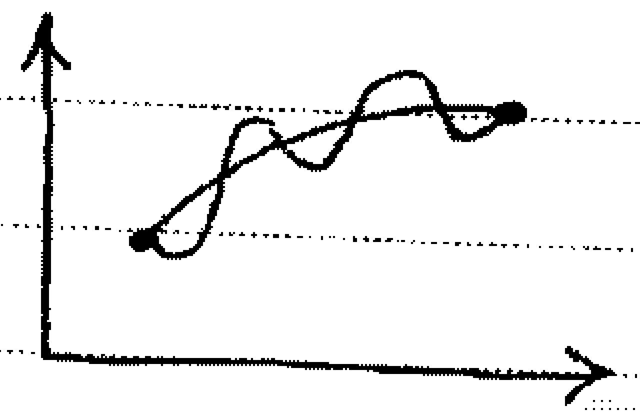
مثال: $y(x)$ ای که این طول را مینیمم کند.

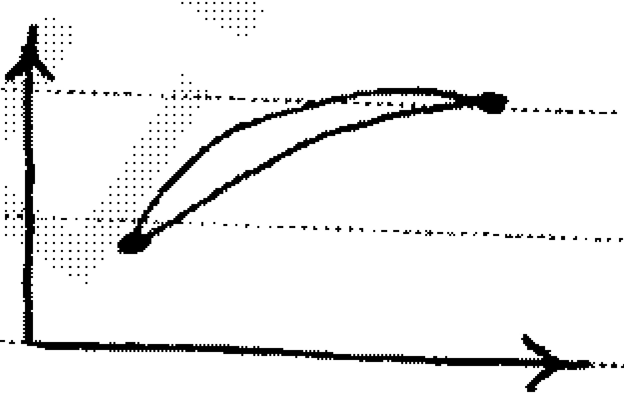


تفاضل دو منحنی

تعاریف: $\delta y=y(x)-y_1(x)$

همسایگی از مرتبهٔ صفر (zero order proximity):





در هر دو شکل بالا هر دو در همسایگی y قرار دارند ولی منحنی سمت راست مشتقاتش نیز با y در همسایگی است.

$\delta y=|y(x)-y_1(x)|=$ کوچک

همسایگی از مرتبهٔ k:
تفاضل دو منحنی و تفاضل مشتقات آنها تا مرتبهٔ k ام کوچک است.

فانکشنال پیوسته: به ازای هر $\varepsilon>0$ کوچک (با مفهوم همسایگی از مرتبهٔ k) بتوان عددی مانند δ پیدا کرد به طوری که برای

$|y-y_0|<\delta$

$|y'-y_0'|<\delta \;\dots\; |y^{(k)}-y_0^{(k)}|<\delta$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

داشته باشیم به طوریکه: $|I(y)-I(y_0)|<\varepsilon$

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \;,\; |y-y_0|<\delta \Rightarrow |I(y)-I(y_0)|<\varepsilon$$
$$|y'-y_0'|<\delta$$
$$|y^{(k)}-y_0^{(k)}|<\delta$$

شرط لازم برای اکستریمم کردن $I(y)$: فرض می‌کنیم:

$y(x)+\varepsilon\eta(x)$

$\to y(x)-y_1(x)$ تفاضل

$\eta(x)$ یک تابع دلخواه است که در مرزها صفر است:

$F_\varepsilon:\ F(x, y+\varepsilon\eta, y'+\varepsilon\eta')$

$\eta(x_1)=\eta(x_2)=0$

شرط لازم برای مینیمم شدن طول $y(x)$ $\Rightarrow \left.\dfrac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0$

$$\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta+\underbrace{\frac{\partial F}{\partial y'}\eta'}_{\text{برای این قسمت جزء به جزء‌ها زنیم}}\right)dx=0$$

$$\circledast\quad \frac{dF}{d\varepsilon}=\cancel{\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{d\varepsilon}}^{\,0}+\frac{\partial F}{\partial(y+\varepsilon\eta)}\frac{d(y+\varepsilon\eta)}{d\varepsilon}+\frac{\partial F}{\partial(y'+\varepsilon\eta')}\frac{d(y'+\varepsilon\eta')}{d\varepsilon}$$

چون تغییرات x از ε مستقل است پس $dx=0$.

$\dfrac{\partial F}{\partial y} \xleftarrow{\varepsilon=0}$ $\qquad \dfrac{\partial F}{\partial y'} \xleftarrow{\varepsilon=0}$

$$\xrightarrow[\text{جزء به جزء}]{\text{ادامه}}\int_{x_1}^{x_2}\underbrace{\frac{\partial F}{\partial y'}}_{u}\underbrace{\eta' dx}_{dv}=\cancel{\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\eta\right|_{x_1}^{x_2}}^{\,0}-\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta\,dx$$

PAPCO

$\eta(x)$ در مرزها صفر است.

Subject: ۵
Year. Month. Date. ( )

$$\rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \left[F_y \eta - \frac{d}{dx}(F_{y'}) \eta \right] dx = 0$$

فرض می‌کنیم: $\frac{\partial F}{\partial y} = F_y$

$\frac{\partial F}{\partial y'} = F_{y'}$

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} \right) \eta(x)\, dx = 0$$

قضیه بنیادی حساب تغییرات: برای هر $\eta(x)$ دلخواه رابطه $\int_{x_1}^{x_2} \Phi(x)\eta(x)\,dx = 0$ زمانی برابر صفر است که $\Phi(x) \equiv 0$. درنتیجه:

$$F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} = 0$$

○ مثال: تابعی بیابید که این فانکشنال را مینیمم کند.

$$V(y) = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2)\, dx \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y(\pi/2) = 1$$

$$\rightarrow F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} = 0 \quad , \quad F = y'^2 - y^2 \rightarrow -2y - \frac{d}{dx}(2y') = 0$$

$$\rightarrow y + y'' = 0 \rightarrow y = \sin x$$

حالت‌های خاص:

(۱) F فقط به y' وابسته باشد:

مثال:

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx \rightarrow \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

$$\rightarrow F_{y'y'}\, y'' = 0 \xrightarrow{\text{اگر}} y'' = 0 \rightarrow y = ax + b$$ یک خط است

$$F_{y'y'} = 0 \rightarrow F = ay' + b$$

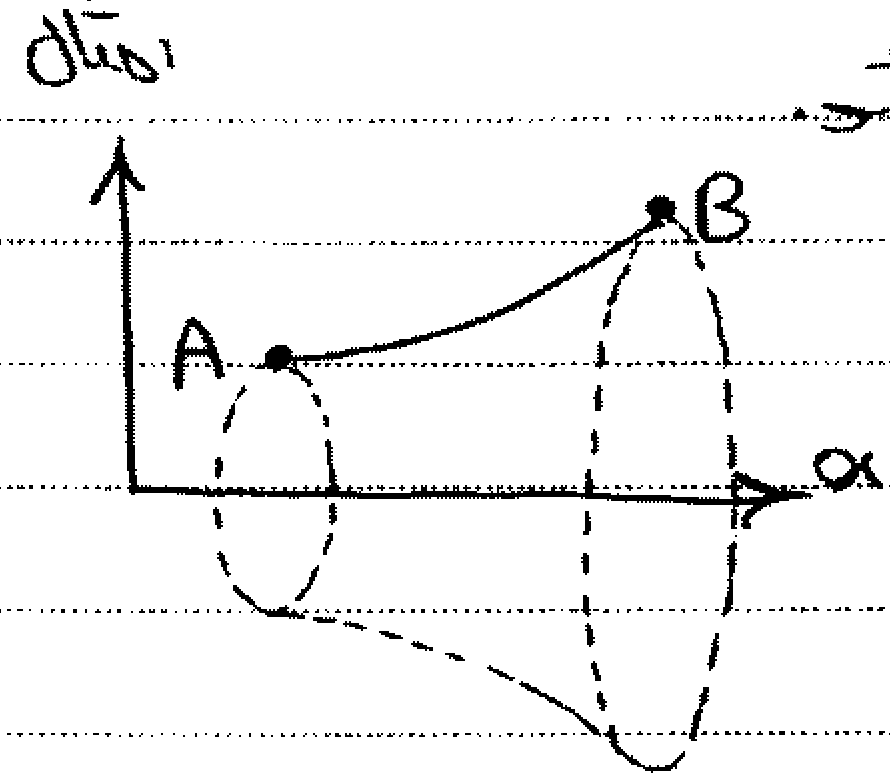
که باز هم خط است.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(۲) $F: F(y, y')$ فقط به y و y' وابسته باشد.

مثال:



منحنی که سطح دوران روبه رو را مینیمم کند

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} 2\pi y \sqrt{1+y'^2}\, dx$$

جمع کردن این رابطه کمی سخت است: $F_y - F_{y'y}\, y' - F_{y'y'}\, y'' = 0$

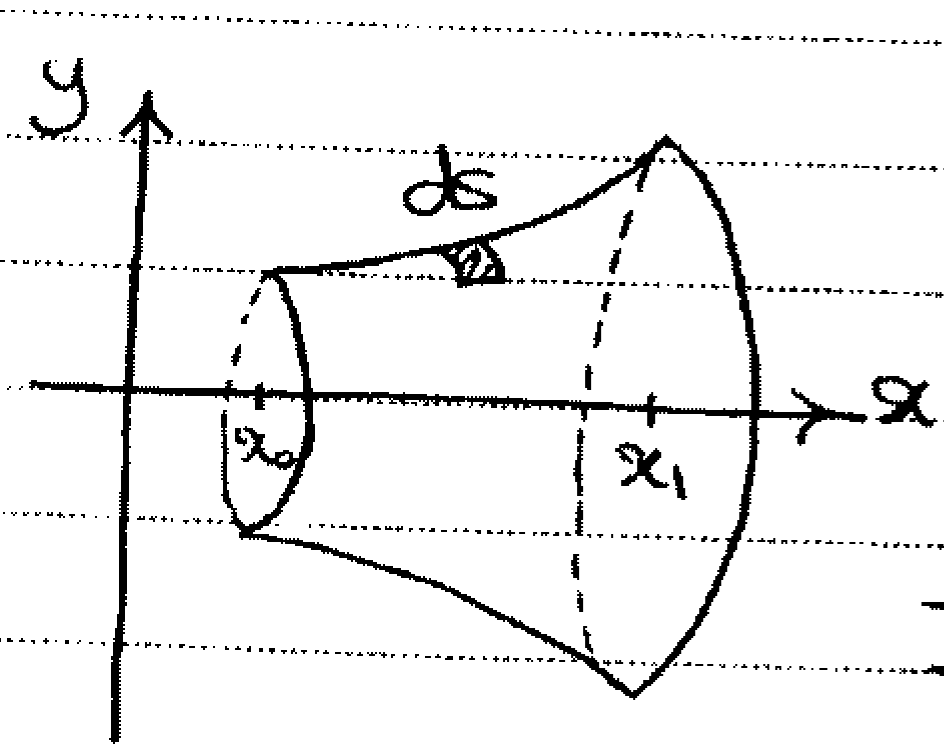
$$\frac{d}{dx}\left(F - y' F_{y'}\right) = 0 = \dots = y'(\ \ )$$

$\rightarrow F - y' F_{y'} = C$ ← برای حالت خاص $F(y, y')$ شرط اویلر به رابطه مقابل ساده می‌شود ←

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

«۸۹/۷/۶»　　جلسه ۲　　ریاضیات مهندسی:



$$S(y)=\int_{x_0}^{x_1} 2\pi y\underbrace{\sqrt{1+y'^2}\,dx}_{ds}$$

۵) اگر $I(y)=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx$

شرط اویلر: $F_y-\frac{dF_{y'}}{dx}=0$ و در حالت خاص $F(y,y')$ داریم: $F-y'F_{y'}=c$

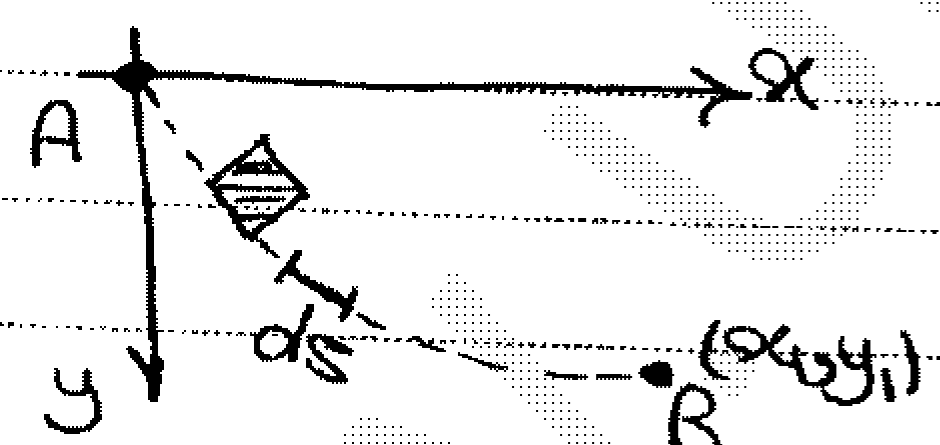
$$\to y\sqrt{1+y'^2}-y'\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}}=c \to \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}}=c$$

$$\xrightarrow{\text{حل پارامتری}} y'=\sinh t \to y=c\cosh t$$

$$\to \frac{dy}{dx}=\sinh t \to dx=\frac{dy}{\sinh t}=\frac{c\sinh t\,dt}{\sinh t}=c\,dt$$

$$\to x=ct+c_1 \to y=c\cosh\left(\frac{x-c_1}{c}\right)$$

c_1 و c نیز از روی شرایط مرزی $y(x_0)$ و $y(x_1)$ محاسبه می‌شوند.



مثال: منحنی‌ای را بیابید که ... از دو نقطه A و B عبور کند و زمان نزول جسم را حداقل کند.

سطح بدون اصطکاک

$$\frac{1}{2}mv^2=mgy$$

$$\to v=\sqrt{2gy}=\frac{ds}{dt}=\frac{\sqrt{1+y'^2}\,dx}{dt}$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

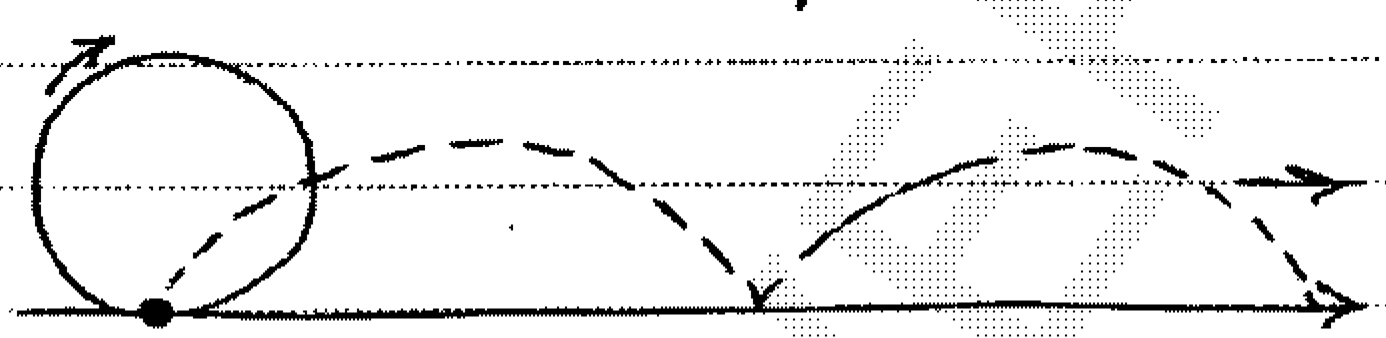
$$\rightarrow dt = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx \rightarrow t = \int_A^B \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}dx$$

رابطهٔ اویلر: $F - y'F_{y'} = c \rightarrow y(1+y'^2) = c_1 \rightarrow y' = \text{cotg}\, t$

$$\rightarrow y = \frac{c_1}{1+\text{cotg}\, t} = c_1 \sin^2 t = c_1/2\,(1 - \cos 2t)$$

$$\frac{dy}{dx} = \text{cotg}\, t \rightarrow x = c_1\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) = \frac{c_1}{2}(2t - \sin 2t)$$

$$2t = \theta \rightarrow \begin{cases} x = \frac{c_1}{2}(\theta - \sin\theta) \\ y = \frac{c_1}{2}(1 - \cos\theta) \end{cases}$$ شکل یک سیکلوئید



⊛ Variation یک تابع:

δy ، $y \rightarrow y + \overbrace{\varepsilon\eta(x)}^{\delta y}$ ⊛ $\frac{d}{dx}\delta y = \delta\left(\frac{dy}{dx}\right)$ جابجایی بین مشتق و δ امکان‌پذیر است: $(\delta y)' = \delta(y')$

$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \dots$ ⊛ $F(x, y, y')$

$$\Delta F = F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x, y, y')$$

PAPCO

$$\rightarrow \Delta F \approx \frac{\partial F}{\partial y}\underbrace{\delta y}_{\Delta y} + \frac{\partial F}{\partial y'}\underbrace{\delta y'}_{\Delta y'} +$$ مراتب بالاتر

شرط این که یک فانکشنال اکسترمم شود این است که variation آن صفر شود

$$\rightarrow \delta F = \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'$$

variation یک تابع

$$\delta(F_1F_2) = F_1\delta F_2 + F_2\delta F_1$$

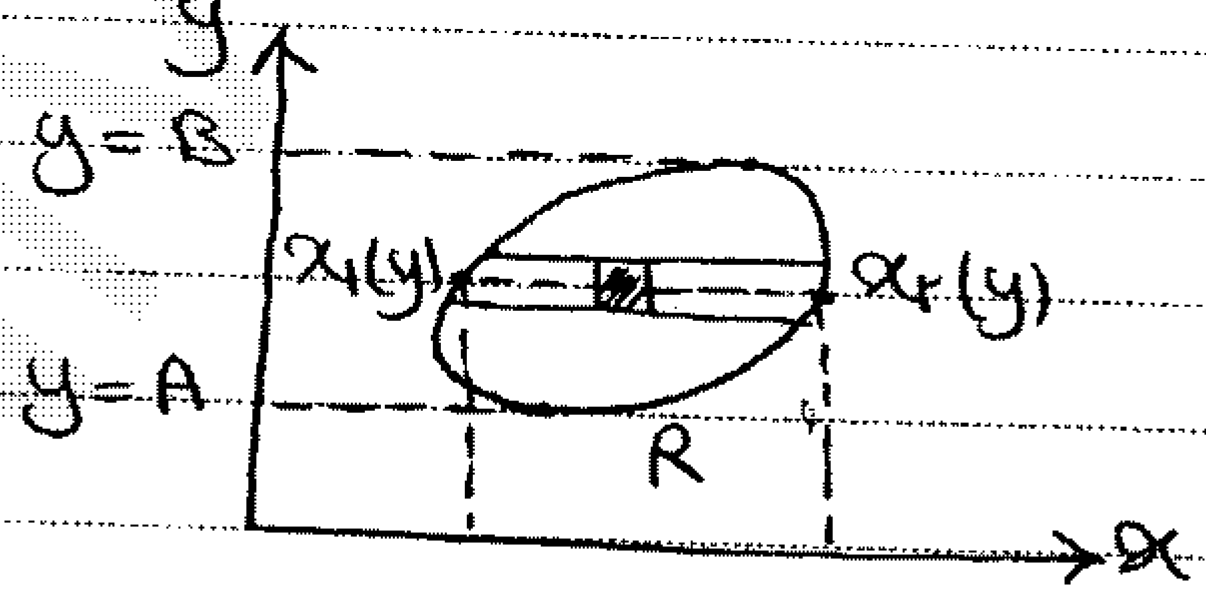
تعمیم رابطه اویلر برای فانکشنال‌ها دو متغیره:

$$F(x,y,u(x,y),v(x,y),u_x,u_y,v_x,v_y)$$

بررسی تابعی از دو متغیر دو تابع:

$$I = \iint_R F(x,y,u,v,u_x,u_y,v_x,v_y)\,dx\,dy$$

δu و δv در مرزها صفر هست



شرط اکسترمم: $\delta I = 0$

$$\delta I = \iint_R \left(\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u_x}\underbrace{\delta u_x}_{\frac{\partial}{\partial x}(\delta u)} + \frac{\partial F}{\partial u_y}\underbrace{\delta (u_y)}_{\frac{\partial}{\partial y}(\delta u)}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial v}\delta v + \right.$$

جابجایی مشتق‌ها

$$\left.\frac{\partial F}{\partial v_x}\underbrace{\delta v_x}_{\frac{\partial}{\partial x}(\delta v)} + \frac{\partial F}{\partial v_y}\underbrace{\delta v_y}_{\frac{\partial}{\partial y}(\delta v)}\right)dx\,dy = 0$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

بااستفاده از تکنیک جزء به جزء انتگرال بالا را ساده می کنیم:

$$\int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\frac{\partial F}{\partial u_x}}_{u} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(\delta u)\,dx}_{dv} = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial u_x}\delta u\Big|_{x_1}^{x_2}}_{0} - \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F_{u_x}}{\partial x}\right)(\delta u)\,dx$$

همین کار را به طور مشابه برای u_y، v_x و v_y تکرار می کنیم

$$\delta I = \iint\Big(\Big[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\Big]\delta u +$$

$$\Big[\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x}F_{v_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{v_y}\Big]\delta v\Big)\,dx\,dy = 0$$

δu و δv ازهم مستقل هستند پس شرط لازم اینست که:

$$\begin{cases} F_u - \dfrac{\partial}{\partial x}F_{u_x} - \dfrac{\partial}{\partial y}F_{u_y} = 0 \\ F_v - \dfrac{\partial}{\partial x}F_{v_x} - \dfrac{\partial}{\partial y}F_{v_y} = 0 \end{cases} \longleftarrow \text{قضیهٔ اویلر تعمیم یافته}$$

$\longrightarrow$ (nتا) تعداد متغیرها زیاد می شود

$\downarrow$ (mتا) تعداد توابع زیاد می شود

مثال:

$$I(\phi, \phi_x, \phi_y) = \iint_R [\phi_x^2 + \phi_y^2]\,dx\,dy$$

این جا یک تابع و دو متغیر داریم پس:

$$F_\phi - \frac{\partial}{\partial x}F_{\phi_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{\phi_y} = -\frac{\partial}{\partial x}(2\phi_x) - \frac{\partial}{\partial y}(2\phi_y) = 0$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

انرژی پتانسیل الکترو استاتیک برای این که مینیمم شود باید در معادله لاپلاس صدق کند.

⊛ حالت های دیگر:

$$I = \int F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n')\, dx \quad ⊛$$

y_1 و y_2 و ... y_n روی مرزها معلوم هستند.

شرط اویلر: $F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} = 0$

← حالت خاص:

۱. اگر F تابع x نباشد شرط اویلر به صورت روبه رو تبدیل می شود:

$$F - y_i' F_{y_i'} = C$$

⊛ فانکشنال هایی به شکل:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})\, dx$$

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} \Big[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\underbrace{\delta y'} + \frac{\partial F}{\partial y''}\underbrace{\delta y''} + \dots\Big) dx = 0$$

یکبار جزء به جزء می گیریم $\quad \frac{\partial}{\partial x}(\delta y) \quad$ دو بار جزء به جزء می گیریم

$$\cancel{F_{y'}\delta y\Big|_{x_0}^{x_1}} - \int_{x_0}^{x} \frac{d}{dx}(F_{y'})\delta y + \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^2}{dx^2}(F_{y''})\delta y$$

0 δy در مرزها ندارد

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$= \int_{x_0}^{x_1} \Big[\underbrace{F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}}}_{} \Big] \delta y \, dx$$

این جمله باید صفر شود

از ترکیب این حالت با حالت‌ها قبلی می‌توان در کلی‌ترین حالت یک فانکشنال را حل کرد که به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل یا یک معادلهٔ دیفرانسیل از مرتبهٔ بالا می‌رسیم.

مثال:

$$V(y) = \int_0^{\pi/2} (y''^2 - y^2 + x)\, dx \quad , \quad y(0)=1 ,\ y(\pi/2)= \quad y'(0)=0 ,\ y'(\pi/2)=-1$$

$$-2y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}(2y'') = 0 \rightarrow y^{(4)} - y = 0 \rightarrow y = \cos x$$

فانکشنال‌ها با محدودیت (constraints):

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n')\, dx$$

$$\Phi_m(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \qquad m < n$$

در غیر اینصورت ممکن است مسئله جواب نداشته باشد (over defined)

برای حل این مسئله با شرایط محدود کننده، ضرایب لاگرانژ را تعریف می‌کنیم:

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$I^* = \int_{x_0}^{x_1} \underbrace{\left[F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\phi_i\right]}_{F^*} dx$$

فانکشنال جدید

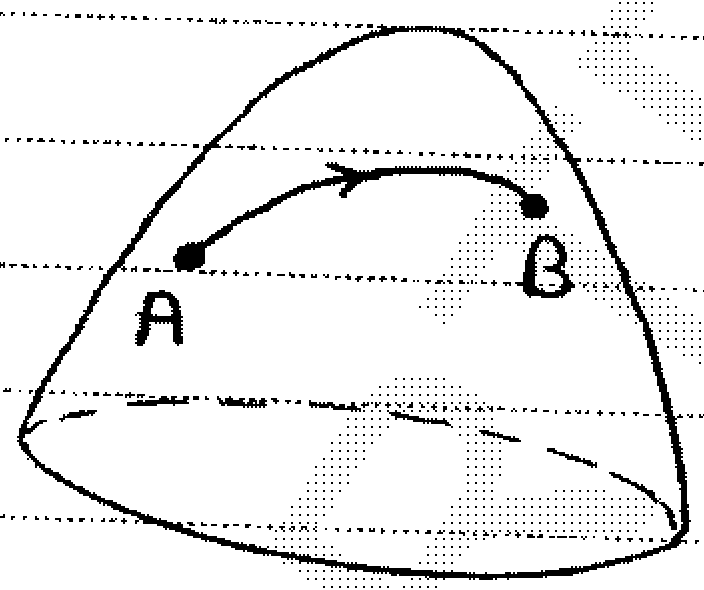
یک فانکشنال جدید ایجاد کردیم که در دل آن فانکشنال قبلی و قیدها با ضرایب لاگرانژ ها باشند و حالا اینها را حل می کنیم:

$$F^*_{y_i} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_i} = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

حل تک تک این فانکشنال ها n بر حسب

مثال:

$$\phi(x, y, z) = 0$$



$$\int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x_1, y_1, z_1)} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx$$ طول مسیر ، شرط $\phi(x, y, z) = 0$

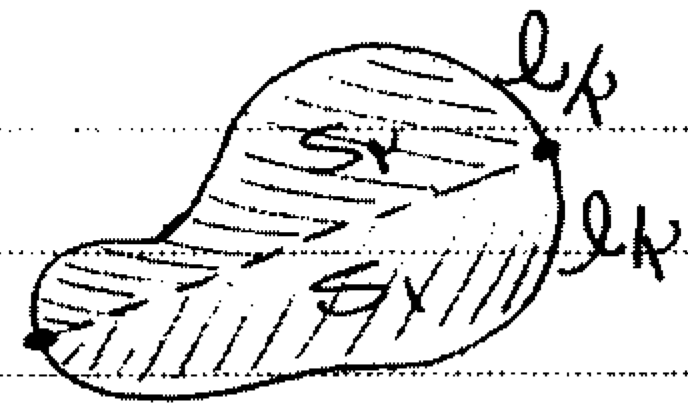
$$I^* = \int \underbrace{\left[\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} + \lambda(x)\phi(x, y, z)\right]} dx$$

دو تابع یا یک متغییر $y(x)$ و $z(x)$

معادلاتی که باید حل شوند:

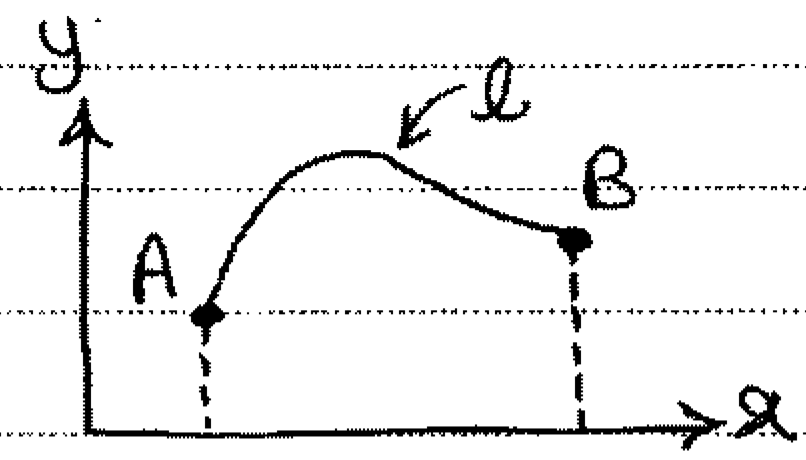
$$\begin{cases} \lambda(x)\phi_y - \dfrac{d}{dx}\dfrac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0 \\ \lambda(x)\phi_z - \dfrac{d}{dx}\dfrac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0 \\ \phi(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

مسئله همپیرامونی:



طول l ثابت است و می‌خواهیم توسط آن ماکزیمم سطح ممکن را ایجاد کنیم.

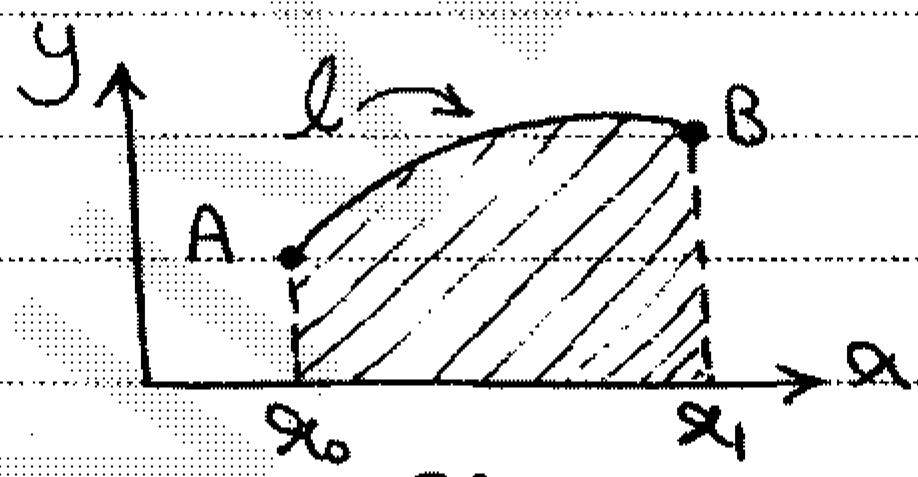
ابتدا با دو طول $l/2$ دو سطح ایجاد می‌کنیم. اگر $S_2>S_1$، به جای S_1 از S_2 استفاده می‌کنیم پس باید این شکل ∞ محور تقارن داشته باشد پس یک دایره است.



مسئله حساب تغییرات:
طول l ثابت است. برای اینکه سطح زیر منحنی آن ماکزیمم شود l باید بخشی از یک دایره باشد.

ریاضیات مهندسی: جلسه ۳ «۸۹/۷/۲۰»

مثال: همپیرامونی



$$\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx=l \quad \text{و} \quad I=\int_{x_0}^{x_1} y\,dx = \text{اکسترمم}$$

$$\xrightarrow{\text{تغییر فانکشنال}} \int_{x_0}^{x_1}\left(y+\lambda\sqrt{1+y'^2}\right)dx = I^*$$

مثل ضرایب لاگرانژ عمل می‌کنیم

$$F-y'F_{y'}=C_1 \longrightarrow y+\lambda\sqrt{1+y'^2}-y'\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1$$

$$\rightarrow y - c_1 = \frac{-\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} \quad , \quad y' = \tan t \rightarrow y = c_1 - \lambda \cos t$$

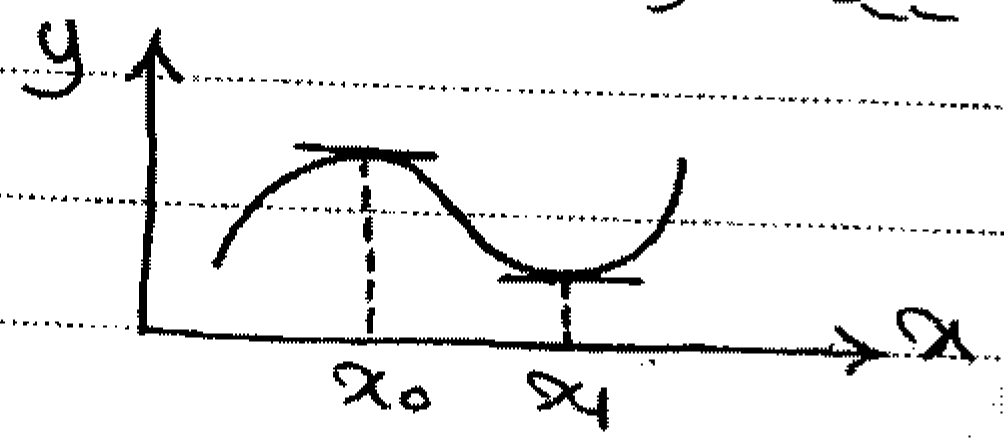
$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} \rightarrow dx = \lambda \cos t\, dt \rightarrow x = \lambda \sin t + c_2$$

حذف t سبب ایجاد یک دایره می‌شود که از نقاط A و B عبور می‌کند.

مثال: مقدار ایستایی λ را پیدا کنید. (Stationary)

$$\lambda = \frac{\int_a^b [p(x)y'^2 - q(x)y^2]dx}{\int_a^b r(x)y^2 dx} = \frac{I_1}{I_2}$$

نقاط max و min ایستا هستند زیرا تغییرات زیادی نمی‌کنند.



$$\delta\lambda \equiv 0 \rightarrow \frac{I_2\delta I_1 - I_1\delta I_2}{I_2^2} = 0 \rightarrow \frac{1}{I_2}\left(\delta I_1 - \frac{I_1}{I_2}\delta I_2\right) =$$

$$= \frac{1}{I_2}(\delta I_1 - \lambda\delta I_2) = 0$$

$$\delta I_1 = \int_a^b [\underbrace{2p(x)y'\delta y'}_{2p(x)y'\frac{d}{dx}[\delta y]} - 2q(x)y\delta y]dx$$

جزء به جزء می‌زنیم

$$\cancel{2p(x)y'\delta y\Big|_a^b}_{\,0} - 2\int_a^b \frac{d}{dx}(p(x)y')\delta y\, dx$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\rightarrow \delta I_1 = -2\int_a^b \left[\frac{d}{dx}(p(x)y') + q(x)y\right]\delta y\,dx$$

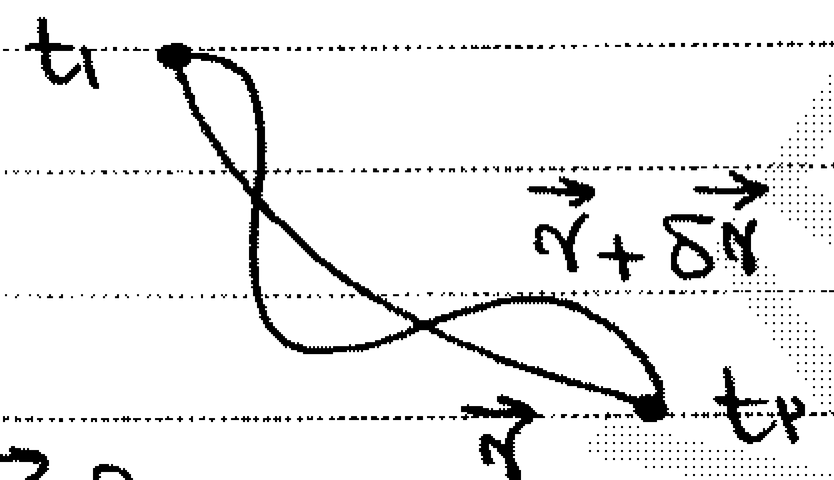
$$\rightarrow \delta\lambda = \frac{1}{I_2}\left\{-2\int_a^b \underbrace{\left[\frac{d}{dx}(p(x)y') + q(x)y + \lambda r(x)y\right]}\delta y\,dx\right\} = 0$$

چون δy یک عبارت اختیاری است برای صفر شدن عبارت بالا باید محل خط کشی شده صفر شود.

$$\rightarrow \frac{d}{dx}[p(x)y'] + (q(x) + \lambda r(x))y = 0 \leftarrow$$ معادلهٔ اشترم لیوویل

* پاسخ های معادلهٔ اشترم لیوویل مقادیر ایستایی λ هستند.

* اصل همیلتون (دینامیک): از اصل همیلتونی می‌توان به بسیاری از قوانین فیزیکی رسید. همیلتونی قوانین نیوتن، همیلتونی معادلات ماکسول، همیلتونی KCL و KVL موارد.



$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - \vec{F} = 0$$

طرفین را در $\delta\vec{r}$ ضرب می کنیم:

می پذیریم که $\vec{r}$ جواب اصلی مسئله است.

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\cdot\delta\vec{r} - \vec{F}\cdot\delta\vec{r} = 0$$

$$\rightarrow \int_{t_1}^{t_2}\Big[\underbrace{m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\cdot\delta\vec{r}} - \vec{F}\cdot\delta\vec{r}\Big]dt = 0$$

جزء به جزء می زنیم

$$\cancel{m\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\delta\vec{r}\Big|_{t_1}^{t_2}}^{\,0} - \int_{t_1}^{t_2} m\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\delta\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)dt = -\frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2}\delta\left[\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2\right]dt$$

اگر δ را در نظر نگیریم عبارت داخل انتگرال انرژی جنبشی (T) می باشد

$$= -\int_{t_1}^{t_2}\delta T\,dt$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\rightarrow -\int_{t_1}^{t_2}[\delta T+\vec{F}\cdot\delta\vec{r}]dt=0$$

اگر $\vec{F}$ پایستار باشد آنگاه:

$$\vec{F}=-\vec{\nabla}\phi=-\vec{\nabla}V \qquad -\vec{\nabla}V\cdot\delta\vec{r}=-\delta V$$

تابع نیرو ← ϕ ، انرژی پتانسیل ← V

چرا: $d\phi=\vec{\nabla}\phi\cdot d\vec{r}$

$$\rightarrow \int_{t_1}^{t_2}\delta(T-V)dt=0 \rightarrow \delta\left[\int_{t_1}^{t_2}(T-V)dt\right]=0$$

هیلتون قوانین نیوتن

انرژی پتانسیل - انرژی جنبشی

$$\underset{(Action)}{A}=\int_{t_1}^{t_2}(T-V)dt$$

Principle Of Minimum Action $\rightarrow \delta A=0$

یا اصل کمترین عمل

مثال:

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-V(x,y,z)$$

لاگرانژ

$$\rightarrow\int_{t_1}^{t_2}(T-V)dt=L(\underset{x}{y_1},\underset{y}{y_2},\underset{z}{y_3},t)$$

تشکیل دستگاه معادلات:

$$\frac{\partial L}{\partial y_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial y_i'}\right)=0$$

$$-\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{d}{dt}(m\dot{x})=0\rightarrow-\frac{\partial V}{\partial x}-m\ddot{x}=0\rightarrow F_x=-\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$-\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{d}{dt}(m\dot{y})=0\rightarrow-\frac{\partial V}{\partial y}-m\ddot{y}=0\rightarrow F_y=-\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$-\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{d}{dt}(m\dot{z})=0\rightarrow-\frac{\partial V}{\partial z}-m\ddot{z}=0\rightarrow F_z=-\frac{\partial V}{\partial z}$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

نیرو برابر منفی گرادیان انرژی پتانسیل می باشد: $\rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla} V$

— * * * —

معادلهٔ اشتروم لیوویل:

تعریف: عملگر الحاقی (Adjoint Operator)

عملگر L

$\hookrightarrow Lu = a_0 \frac{d^n u}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \dots + a_n u$

عملگر L^*

$\hookrightarrow L^* v = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}(a_0 v) + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(a_1 v) + \dots$

L^* عملگر الحاقی (adjoint Operator) عملگر L است.

برای عملگرهای دیفرانسیل مرتبهٔ ۲ داریم:

$$Lu = P_0 \frac{d^2 u}{dx^2} + P_1 \frac{du}{dx} + P_2 u \quad , P_0(x), P_1(x), P_2(x)$$

$$L^* u = \frac{d^2}{dx^2}(P_0 u) - \frac{d}{dx}(P_1 u) + P_2 u$$

$$= P_0 \frac{d^2 u}{dx^2} + (2P_0' - P_1)\frac{du}{dx} + (P_0'' - P_1' + P_2) u$$

این عبارت در بازهٔ $a \le x \le b$ مطرح است. با فرض پیوسته بودن P_2 و P_1 و P_1' و P_0 و P_0' و P_0'' یک عملگر خود الحاق (self Adjoint) است اگر:

شرط لازم: $Lu = L^* u \longrightarrow 2P_0' - P_1 = P_1 \longrightarrow \boxed{P_0' = P_1}$

در این حالت: $Lu = \frac{d}{dx}\left[P_0 \frac{du}{dx}\right] + P_2 u$

معادلهٔ لژاندر و $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$ که در بازهٔ $(-1,1)$ برقرار بود

است Self Adjoint زیرا $(1-x^2)' = -2x$ یعنی:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)y'\right] + n(n+1)y = 0$$

نقاط $x = \pm 1$ باعث حذف y'' می‌شوند از این رو به
آن‌ها نقاط تکین می‌گویند.

* معادله‌ی بسل $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$ خودالحاق نیست.

* اگر معادله‌ی دیفرانسیلی خودالحاق نباشد با ضرب طرفین آن در $g(x)$ خودالحاق می‌شود.

$$« g(x) = \frac{1}{P_0} e^{\int \frac{P_1}{P_0} dx} »$$

مثلاً برای تابع بسل داریم:

$$g(x) = \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{x}{x^2} dx} = \frac{1}{x^2} e^{\ln x} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

$$\rightarrow xy'' + y' + \left(\frac{x^2 - \nu^2}{x}\right)y = 0 \rightarrow \frac{d}{dx}\left[xy'\right] + \left(\frac{x^2 - \nu^2}{x}\right)y = 0$$

* تعریف نقاط تکین برای معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی ۲:

اگر معادله‌ی دیفرانسیل به فرم زیر باشد:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

اگر توابع $P(x)$ و $Q(x)$ برای نقطه‌ی $x = x_0$ محدود باشند به x_0 یک نقطه‌ی معمولی گویند. ولی اگر یکی یا هر دوی آن‌ها وقتی $x \to x_0$ می‌رود واگرا شوند نقطه‌ی x_0 یک نقطه‌ی تکین است.

دو نوع نقطه‌ی تکین داریم:

۱- نقطه‌ی تکین یکنواخت (Regular):

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0) P(x) = \text{finite}$$

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 Q(x) = \text{finite}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۲ـ نقطه تکین غیریکنواخت (irregular):

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0) P(x) = \text{infinite}$$

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 Q(x) = \text{infinite}$$

⊗ عملگر اشتروم ـ لیوویل (Sturm_Liouville):

$$L: \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right] + q(x)$$

⊗ $Lu = -\lambda u$ ← هدف یافتن مقادیر ویژه است

⊗ البته طرف دوم را در یک تابع وزنی $r(x)$ نیز ضرب می کنیم:

$$Lu = -\lambda r(x) u$$

عملگر اشتروم لیوویل — مقدار ویژه — تابع وزنی — توابع ویژه

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[p\frac{du}{dx}\right] + (q + \lambda r)u = 0$$

⊗ در عبارت $Lu(x) + \lambda r(x) u(x) = 0$ برای یک λ داده شده، تابعی مثل $u_\lambda(x)$ که با فرض شرایط مرزی تحمیلی در معادلهٔ مقدار ویژه صدق می کند را یک تابع ویژه معادل مقدار ویژه λ می گویند. هیچ تضمینی وجود ندارد که برای هر λ دلخواه حتماً بتوانیم $u_\lambda(x)$ را یافت. در حقیقت، نیاز به وجود یک تابع ویژه معمولاً مقادیر λ را به یک مجموعهٔ گسسته محدود می کند.

مثال: انتشار حرارت در محیط غیر یکنواخت

PAPCO

$$C(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]+Q(x)$$

گرماویژه ← $C(x)$ ، چگالی جرمی ← $\rho(x)$ ، ثابت انتشار حرارتی ← $k(x)$ ، منبع حرارتی ← $Q(x)$

اگر از جداسازی متغیرها استفاده کنیم و فرض کنیم منبع حرارتی $Q(x)=\alpha u$ باشد آن گاه: $Q(x)=\alpha u$ ، $u(x,t)=X(x)T(t)$

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\Big[\underbrace{k(x)}_{p(x)}\dfrac{dX}{dx}\Big]+\big(\underbrace{\alpha}_{q(x)}+\lambda\underbrace{\rho(x)C(x)}_{r(x)}\big)X=0 \\ \dfrac{dT}{dt}+\lambda T=0\end{cases}$$

→ معادله اشتروم لیوویل:

Singular Strum-Liouville : اگر $p(x)=0$ شود یا $q(x)=\infty$ شود آن گاه ما باید مسئله تکینه اشتروم-لیوویل سروکار داریم.

مسئله عادی اشتروم-لیوویل:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right]+(q(x)+\lambda r(x))u(x)=0 \qquad a<x<b$$

توابع p و q و r و p' همگی حقیقی با متغییر x هستند و در بازه $a<x<b$ پیوسته‌اند. در بازه $a\le x\le b$ داریم $p(x)>0$ و $r(x)>0$ اگر صفر شوند دیگر مسئله عادی نیست.

شرایط مرزی به صورت زیر است:

$$\alpha_1 u(a)+\alpha_2\frac{du}{dx}\Big|_{x=a}=0$$ (α_1 و α_2 همزمان صفر نیستند)

طرف دوم حتماً باید صفر باشد:

$$\beta_1 u(b)+\beta_2\frac{du}{dx}\Big|_{x=b}=0$$ (β_1 و β_2 همزمان صفر نیستند)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ریاضی مهندسی: جلسه ۴ «۸۹/۷/۲۲»

* مسئله عادی اشتروم-لیوویل: (Regular S.L. Prob.)

$$\frac{d}{dx}\left[p\frac{du}{dx}\right]+(q+\lambda r)u=0 \qquad a\leq x\leq b$$

* در نقاط a و b ممکن است مسئله تکین شود. از این رو آن‌ها را در نظر نمی‌گیریم.

شرط‌های مرزی:

$$\begin{cases}\alpha_1 u+\alpha_2\frac{du}{dx}\Big|_{x=a}=0 & (\alpha_1,\alpha_2 \text{ همزمان صفر نیستند})\\ \beta_1 u+\beta_2\frac{du}{dx}\Big|_{x=b}=0 & (\beta_1,\beta_2 \text{ همزمان صفر نیستند})\end{cases}$$

p و q و r و p' توابعی حقیقی از x هستند و برای $a\leq x\leq b$ پیوسته‌اند.
توابع $p(x)$ و $r(x)$ در بازهٔ $a\leq x\leq b$ مثبت‌اند.

* کتاب Morse & Feshbach به خوبی این بحث را پوشش داده است.

* اگر مسئله اشتروم لیوویل عادی را به صورت $Lu=-\lambda r u$ بنویسیم:
- مقادیر ویژه λ_n همگی حقیقی‌اند. (λ_1 و λ_2 و .... طیف مسئله)
- مقادیر ویژه کران پایین دارند و کران بالا ندارند.

$\lambda_1<\lambda_2<\dots$

- هر مقدار ویژهٔ λ_n یک تابع ویژهٔ $U_n(x)$ متناظر یکتا (در صورت نرمالیزه کردن) دارد که در بازه $a\leq x\leq b$ دارای $n-1$ صفر است.
- توابع ویژه $U_n(x)$ یک مجموعه کامل را تشکیل می‌دهند.

* مجموعه کامل: هر تابع دلخواه تکه‌ای پیوسته در بازهٔ $a\leq x\leq b$ را می‌توان توسط $U_n(x)$ها بسط داد.

تابع لژاندر یک مسئله عادی SL نیست زیرا در نقاط مرزی $x=\pm1$ ....
$p(x)$ را صفر می کند.

- این مجموعه توابع ویژه U_n و U_m متناظر با دو مقدار ویژه متفاوت
با تابع وزنی $r(x)$ متعامدند. $a<x<b$

$$\int_a^b U_n(x)U_m(x)r(x)\,dx=0 \qquad m\neq n$$

نسبت Rayleigh:

$$\left(\frac{d}{dx}\left[p\frac{d}{dx}\right]+q\right)u=-\lambda r(x)u$$

عملگر SL

$$\lambda=\frac{-p(x)u(x)\frac{du}{dx}\Big|_a^b+\int_a^b\left[p\left(\frac{du}{dx}\right)^2-qu^2\right]dx}{\int_a^b u^2(x)r(x)\,dx}$$

نسبت Rayleigh

مسئله تکین اشتروم-لیوویل: (Singular S.L. Prob.)

- q در بازهٔ $a\le x\le b$ بینهایت شود یا ناپیوسته شود.
- $p(x)$ و $r(x)$ در یک انتها (یا a یا b یا هردو) صفر شوند.

۱ اگر $p(x)$ در $x=a$ یا $x=b$ صفر شود بالاترین مرتبه معادله $\frac{d}{dx}\left[p\frac{du}{dx}\right]$ صفر می شود.

نقطهٔ تکین ← نقطه ای که $p(x)$ را صفر می کند.
نقطه ای که $q(x)$ را بینهایت می کند.

مثال برای نقاط تکین:

$$(xX')'+\left(\frac{-n^2}{x}+\lambda x\right)X=0$$

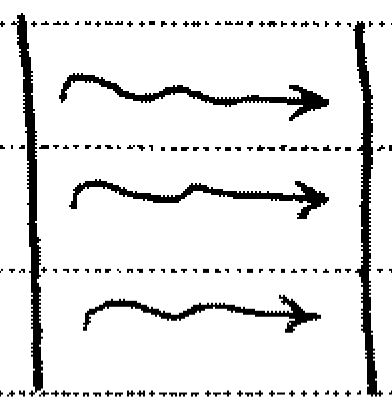
$\rightarrow$ در $x=0$ $q=\infty$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$[(1-x^2)X']' + \lambda X = 0$$

↳ $x=\pm 1$ در $p=0$

• مثال محیط غیر یکنواخت برای معادله گرما:



$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = C(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}$$

که $u(x,t)$ تابعی از x و t است.

جداسازی: $u=X(x)T(t)$

$$\frac{d}{dx}\left[\underbrace{k(x)}_{p(x)}\frac{dX}{dx}\right] + \lambda \underbrace{C(x)\rho(x)}_{r(x)} X = 0 \quad و \quad \frac{dT}{dt} = -\lambda T$$

شرایط مرزی: $X(0)=0$, $X'(x=l)=0$ و $u(x,0)=f(x)$

$\rho(x)$ و $C(x)$ از داده های مسئله هستند.

جواب: $u(x,t)=\sum_n a_n X_n(x) e^{-\lambda_n t}$

هیچ اطلاعاتی در مورد این نداریم ولی از خواص داریم:

$$u(x,0)=\sum_n a_n X_n(x) = f(x)$$

$$a_n = \frac{\int_0^l f(x)C(x)\rho(x)X_n(x)\,dx}{\int_0^l C(x)\rho(x)X_n^2(x)\,dx}$$

• از همه جالبتر تفسیرهای مهندسی است مثلاً:

$u(x,t)\approx a_1X_1(x)e^{-\lambda_1 t}$ $\quad \lambda_1<\lambda_2 \dots$

$t\to\infty$ درجه تقریب با معلوم بودن λ_1 ها مشخص می شود.

• در معادله دیفیوژن: $\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \xrightarrow{\times 4} \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \dots \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$

PAPCO

* با دقت خوبی در جملات بالا قابل حذفند

۱۵. اگر بتوانیم مقادیر ویژه را تخمین بزنیم با تقریب خوبی جواب مسئله را یافته‌ایم
۱۵. ما بیشتر از خواص مسئله SL استفاده می‌کنیم

۱۵. قضیه ۱: توابع ویژه X_m و X_n متناظر با دو مقدار ویژه λ_m و λ_n با تابع وزنی $r(x)$ متعامدند و در حالت‌های زیر معتبر هستند:
- اگر $P(a)=0$ باشد شرط مرزی ابتدایی حذف می‌شود.
- اگر $P(b)=0$ باشد شرط مرزی انتهایی حذف می‌شود.
- شرط مرزی تناوبی (مثله ای که سروته آن را به هم وصل کرده‌ایم)
$P(a)=P(b)$ نیز معتبر است.

اثبات: $X_m \rightarrow (pX_m')' + qX_m = -\lambda_m r X_m$: ضرب در X_n

$X_n \rightarrow (pX_n')' + qX_n = -\lambda_n r X_n$: ضرب در X_m

با ضرب کردن X_m و X_n و کم کردن معادلات از هم و انتگرال گیری داریم:

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b r X_m X_n \, dx = p(x)\Big[X_m X_n' - X_n X_m'\Big]\Big|_a^b$$

$\Delta(x) = \begin{vmatrix} X_m & X_m' \\ X_n & X_n' \end{vmatrix}$ دترمینان

طرف دوم $\rightarrow P(b)\Delta(b) - P(a)\Delta(a)$

شرط مرزی $\rightarrow \begin{cases} \alpha_1 X_m(a) + \alpha_2 X_m'(a) = 0 \\ \alpha_1 X_n(a) + \alpha_2 X_n'(a) = 0 \end{cases}$

- اگر $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$ باشند آنگاه باید $\Delta(a)=0$ باشد.
- اگر $\beta_1, \beta_2 \neq 0$ باشند آنگاه باید $\Delta(b)=0$ باشد.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

پس طرف دوم صفر است:

$$(\lambda_m-\lambda_n)\int_a^b r X_m X_n \, dx=0$$

اگر $\lambda_n \neq \lambda_m$ باشد آنگاه: $\int_a^b r X_m X_n \, dx=0$

حالت های خاص:

۱_ اگر $P(a)$ صفر باشد شرط مرزی ابتدایی حذف می شود.

۲_ اگر $P(b)$ صفر باشد شرط مرزی انتهایی حذف می شود.

۳_ اگر $P(a)=P(b)$ باشد (شرط مرزی تناوبی) نیز این قضیه صدق می کند.

قضیه ۲: λها حقیقی هستند.

می دانیم که r و q و p حقیقی اند. $\frac{d}{dx}\left[p\frac{dX}{dx}\right]+(q+\lambda r)X=0$

مزدوج می گیریم $\rightarrow \frac{d}{dx}\left[p\frac{d\bar{X}}{dx}\right]+(q+\bar{\lambda} r)\bar{X}=0$

$\bar{\lambda}$ مقدار ویژه متناظر با $\bar{X}$ است. با کمک قضیه ۱ داریم:

$$(\lambda-\bar{\lambda})\int_a^b r(x)\, X\bar{X}\, dx=(\lambda-\bar{\lambda})\int_a^b r(x)|X|^2 dx=0$$

چون $r(x)$ همواره مثبت است پس $\lambda=\bar{\lambda}$ یعنی λ حقیقی است.

قضیه ۳: یکتایی توابع ویژه

دو تابع ویژه متفاوت $X(x)$ و $y(x)$ متناظر با λ را در نظر می گیریم و نشان می دهیم که $y=cX$ است. (c ثابت است)

$$\frac{d}{dx}\left[pX'\right]+(q+\lambda r)X=0$$

PAPCO

$$\frac{d}{dx}[Py'] + (q+\lambda r)y = 0$$

شرایط مرزی:
$$\begin{cases} \alpha_1 X(a) + \alpha_2 X'(a) = 0 \\ \beta_1 X(b) + \beta_2 X'(b) = 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} \alpha_1 Y(a) + \alpha_2 Y'(a) = 0 \\ \beta_1 Y(b) + \beta_2 Y'(b) = 0 \end{cases}$$

فرض می‌کنیم:
$$Z(x) = Y'(a)X(x) - X'(a)Y(x)$$

تابع $Z(x)$ در معادلهٔ SL صدق می‌کند. (ترکیب خطی)

در رابطه با شرایط مرزی داریم:

$$Z'(a) = 0 \quad , \quad Z(a) = ?$$

ادعا می‌کنیم:
$$Z(a) = Y'(a)X(a) - X'(a)Y(a) = 0$$

می‌دانیم برای اینکه α_1 و α_2 صفر نشوند باید دترمینان ضرایب آن‌ها صفر باشد و $Z(a)$ دترمینان ضرایب آن‌هاست پس $Z(a)=0$ است. با توجه به قضیهٔ یکتایی جواب معادلات دیفرانسیل و معلوم بودن $Z(a)=Z'(a)=0$ داریم:

$$Z(a) = 0 \;,\; Z'(a) = 0 \rightarrow Z(x) \equiv 0$$

$$\rightarrow Y(x) = \frac{Y'(a)}{X'(a)} X(x) = cX(x)$$

* اگر شرط مرزی از نوع نیومان باشد که $X'(a)=0$ باشد آن‌گاه این رابطه دچار مشکل می‌شود، برای رفع این مشکل در این حالت یک تابع کمکی $Z(x)$ جدید تعریف می‌کنیم تا این مشکل برای آن پیش نیاید.

قضیهٔ ۴: نسبت Rayleigh_Cauchi (R.Q) یک کران بالا برای کمترین مقدار ویژه بدست می‌دهد.

$$\lambda = \frac{[-PX'X]_a^b + \int_a^b [PX'^2 - qX^2]dx}{\int_a^b rX^2 dx}$$

با ضرب طرفین رابطه و به روی X و انتگرال‌گیری داریم: $LX = -\lambda r X$

$$\lambda = -\frac{\int_a^b XLX\,dx}{\int_a^b r X^2\,dx}$$

$$X = \sum_n a_n X_n \rightarrow LX = \sum_m a_m L X_m = \sum a_m(-\lambda r X_m)$$

$$RQ = +\frac{\int_a^b \sum_m \sum_n a_n a_m \lambda_n\, r X_n X_m\,dx}{\sum_m \sum_n \int_a^b r a_n a_m X_n X_m\,dx}$$

$$= +\frac{\sum_n \int_a^b \lambda_n a_n^2 r X_n^2\,dx}{\sum_n \int_a^b r a_n^2 X_n^2\,dx}$$

اگر به جای λ_n ها λ_1 را قرار دهیم داریم:

که اگر به جای λ_nها کمترین λ که همان λ_1 است قرار دهیم داریم:

$$RQ > \lambda_1 \frac{\sum_n \int_a^b a_n^2 r X_n^2\,dx}{\sum_n \int_a^b a_n^2 r X_n^2\,dx} = \lambda_1 \rightarrow RQ > \lambda_1$$

که RQ یک کران بالا برای کمترین مقدار ویژه (λ_1) است.

که تخمین کمترین مقدار ویژه:

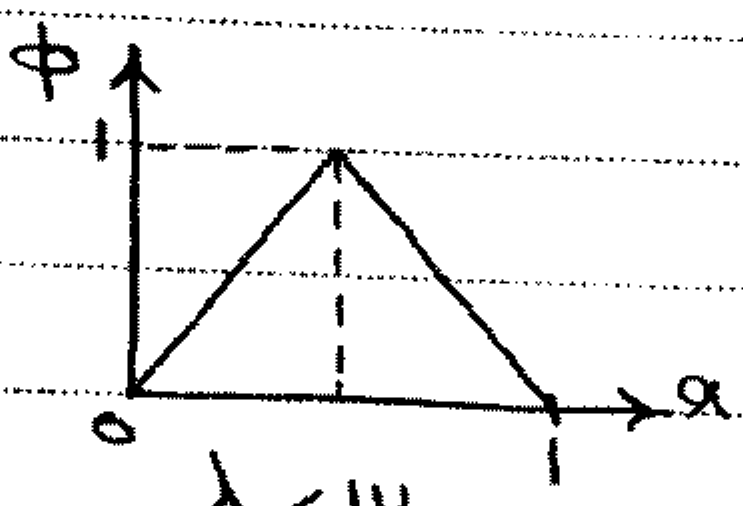
مثال ساده: $p(x)=1$ ، $q(x)=0$ ، $r(x)=1$

$\rightarrow \phi'' + \lambda\phi = 0$ باشرط $\phi(0) = \phi(1) = 0$

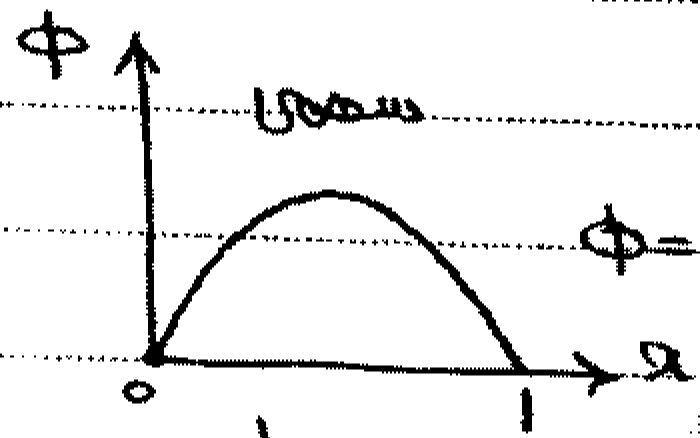
Subject:
Year. Month. Date. ( )

جواب دقیق: $\phi_n = \sin n\alpha \qquad \lambda_n = n^2\pi^2$

توابع آزمون:



$\lambda < 12$

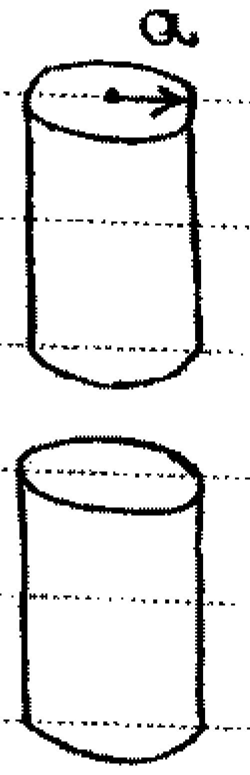


$\phi = (1-\alpha)\alpha$

$\lambda < 10$

به کمک نسبت Rayleigh جوبالای λ_1 را می‌یابیم:
جواب دقیق π^2 است که می‌بینیم خیلی به λ شکل سهموی نزدیک است.

مثال: امپدانس ورودی یک آنتن:



$$Z_i = -\frac{1}{I(0)^2}\int_{-l}^{l}\int_{-l}^{l} I(z)I(z')k(z,z')\,dz\,dz'$$

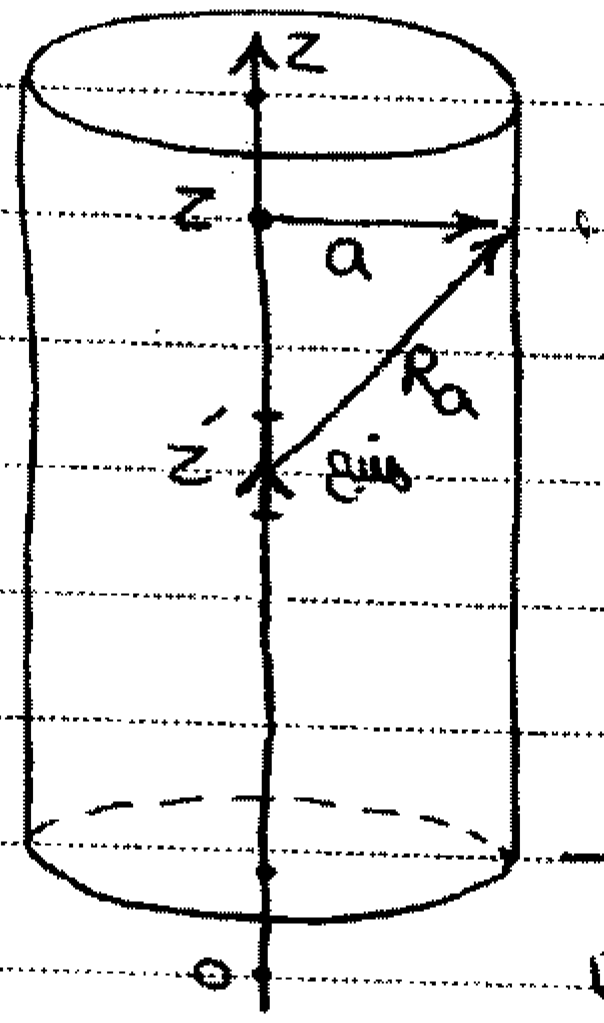
$$k(z,z') = -j\omega\mu\left[1+\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]G_0(z,z')$$

تابع گرین

$$G_0(z,z') \rightarrow \frac{e^{-jkR_a}}{4\pi R_a}$$

$$R_a = \sqrt{(z-z')^2 + a^2}$$

جریان‌ها در مرکز سیم در نظر گرفته شده.



یک شاخهٔ آنتن
سیمی که برای راحتی
استوانه‌ای شکل شده است.

۱. اگر $I(z)$ را سینوسی فرض کنیم:

تقریب storer:

$$I(z)=I_0 \sin k(l-|z|)$$

($\frac{2\pi}{\lambda}$)

← برای $l=\frac{\lambda}{2}$ داریم $I(0)=I_0 \sin \pi =0$ است و این در عبارت Z_i که ضریب $\frac{1}{I(0)}$ دارد ایجاد مشکل می‌کند. این تقریب تا $l=\frac{\lambda}{2}$ قابل قبول است.

۲. تقریب بوری:

$$I(z)=I_0 \sin k(l-|z|)+A[1-\cos k(l-|z|)]$$

← این تقریب نیز در $kl=2\pi$ دچار مشکل می‌شود: $I(0)=0$

۳. تقریب Tai:

$$I(z)=I_0 \sin k(l-|z|)+B(l-|z|)\cos k(l-|z|)$$

این تقریب مشکلی ایجاد نمی‌کند.

✓ در این مسئله ما تلاش کردیم به کمک توابعی که با تقریب خوبی در شرایط مرزی صدق می‌کنند λ های مسئله را تقریب بزنیم.

۱. نکته جانبی در مورد عملگر L و عملگر الحاقی L^*:

- دیفرانسیل کامل:

$$uLv-vL^*u=\frac{d}{dx}[P(u,v)]$$

ساختار بالا $uLv-vL^*u$ تولید یک دیفرانسیل کامل می‌کند.

۱. جواب‌های معادله اشتورم لیوویل همیشه معلوم نیستند. ما یک سری توابع حدس می‌زنیم که در شرایط مرزی صدق می‌کنند و توسط این توابع و نسبت Rayleigh سعی می‌کنیم تا مقادیر ویژه λ را مینیمم کنیم. آنگاه باید تقریب بهترین توابع، توابع ویژه می‌گوییم.

گاهی از روی این تابع ویژه که λ را مینیمم می‌کند (با تقریب) به کمک Gram-Schmit

Subject:
Year. Month. Date. ( )

سعی می کنیم توابع ویژهٔ بعدی را نیز بیابیم و از روی آن ها λ_2 و λ_3 و ... را بیابیم

ریاضی مهندسی: جلسهٔ ۵ «۸۹/۷/۲۵»

معادلهٔ دیفیوژن (حرارت)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = k\frac{\partial u}{\partial t}$$

Separation of Variables: $u(x,t) = X(x)\,T(t)$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2X}{dx^2} + \lambda X = 0 \\ \dfrac{dT}{dt} + \dfrac{\lambda}{k} T = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ شرط مرزی از نوع سوم (مخلوط)

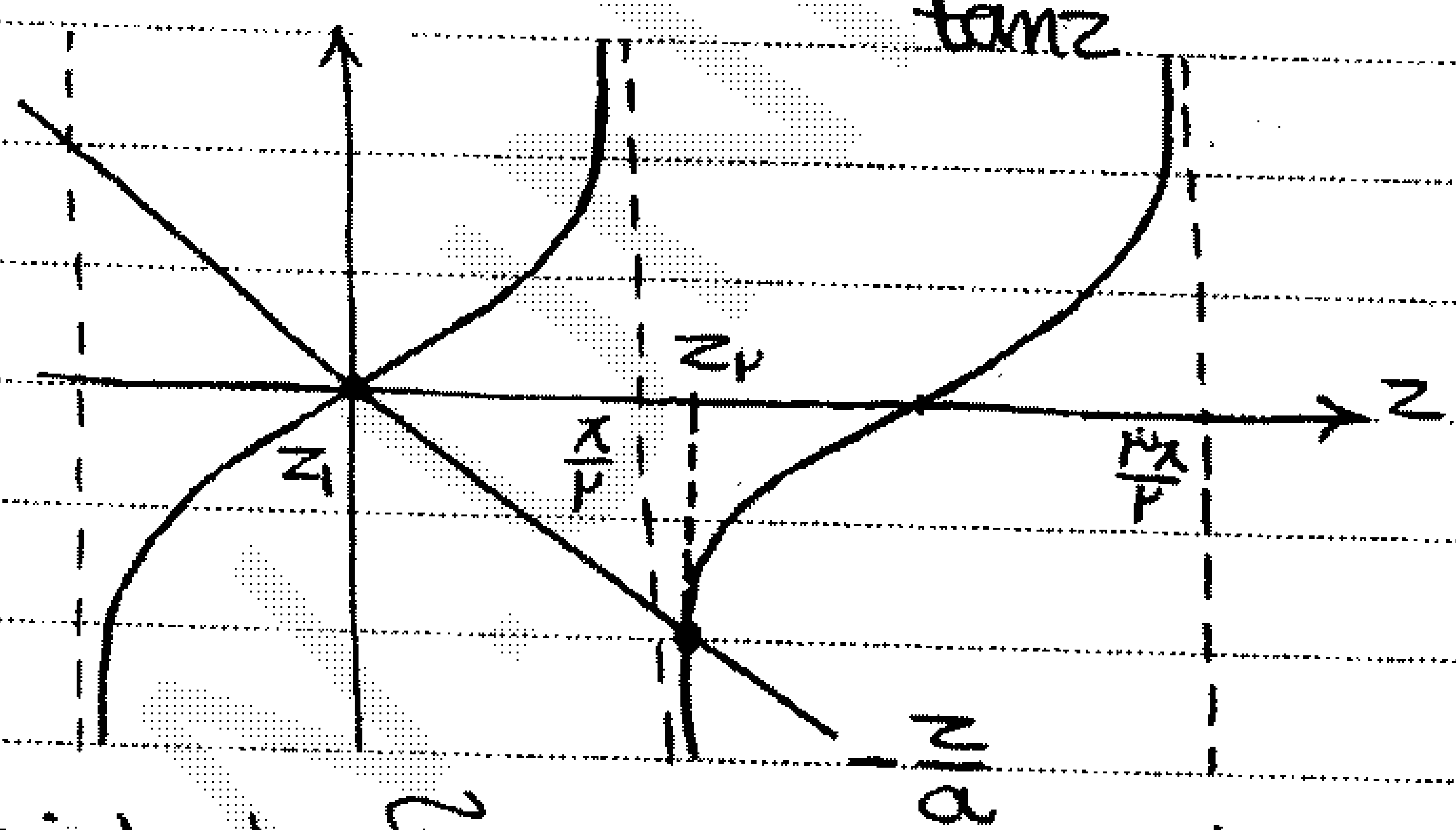
$$\begin{cases} 0 < x < l \\ X(0) = 0 \\ \left.\dfrac{dX}{dx} + hX\right|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

با استفاده از شرایط مرزی:

$$X = A\sin\sqrt{\lambda}x + B\cos\sqrt{\lambda}x$$

$$\tan\sqrt{\lambda}l = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h}$$ معادلهٔ غیرجبری

برای یافتن مقادیر ویژه λ باید معادلهٔ غیر جبری از نوع $\tan z = -\frac{z}{a}$ را حل کنیم



مقادیر ویژه λ از حل این معادله غیر جبری بدست می آید و این از نوع ویژگی ها شرط مرزی سوم است. (شرط Robine)

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تخمین توابع بر حسب توابع ویژه:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n(x)$$ در مسئله اشتروم لیوویل

$$a_n=\frac{\int_a^b f(x)r(x)\phi_n(x)dx}{\int_a^b r(x)\phi_n^2(x)dx}$$

$$f(x)\approx\sum_{n=1}^{N} a_n\phi_n(x)$$ ← یک راه تخمین

یک ضریب α_n جدید تعریف می کنیم و به جای a_n ها از α_n ها در رابطه بالا استفاده می کنیم و نشان می دهیم برای اینکه خطا در این رابطه مینیمم شود باید $\alpha_n=a_n$ باشد.

$$f(x)\simeq\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\phi_n(x)$$

خطای تقریب : $$\mathcal{E}=\int_a^b\Big[f(x)-\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\phi_n(x)\Big]^2 r(x)dx$$

چون تابع وزنی $r(x)$ همواره مثبت است در رابطه تقریب خطا اثر منفی ندارد

$$\mathcal{E}=\int_a^b\Big[f^2(x)-2\sum_{n=1}^{N}\alpha_n f(x)\phi_n(x)+\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\alpha_m\phi_n(x)\phi_m(x)\Big]\ldots$$

$$\ldots r(x)dx$$

$$\mathcal{E}=\int_a^b f^2(x)r(x)dx+\sum_{n=1}^{N}\Big[\alpha_n^2\int_a^b\phi_n^2(x)r(x)dx-2\alpha_n\int_a^b\phi_n(x)\underbrace{r(x)}_{f(x)}dx\Big]$$

این رابطه را به صورت مربع کامل می نویسیم

PAPCO

Subject:
Year:　Month:　Date:　( )

$$\mathcal{E}=\int_a^b f^2(x)r(x)dx+\sum_{n=1}^{N}\left\{\int_a^b \phi_n^2 r dx\left[\alpha_n-\cancel{\frac{\int_a^b f\phi_n r dx}{\int_a^b \phi_n^2 r dx}}\right]^2 \cdots\right.$$

$$\left.\cdots-\frac{\left(\int_a^b f\phi_n r dx\right)^2}{\int_a^b \phi_n^2 r dx}\right\}$$

۵ شرط مینیمم شدن خطا تقریب این است که $\alpha_n=a_n$ باشد.

$$\mathcal{E}\geq 0 \qquad \mathcal{E}=\int_a^b f^2(x)r(x)dx-\sum_{n=1}^{N}a_n^2\int_a^b \phi_n^2(x)r(x)\,dx$$

اگر ϕ_nها را نرمالیزه کرده باشیم آنگاه:

$$\int_a^b \phi_n^2(x)r(x)dx=1 \longrightarrow N\to\infty \Rightarrow \int_a^b r(x)f^2(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$$

← که این همان قضیه پارسوال است.

۵ یافتن جواب‌ها مسئله اشتروم لیوویل:

معادله غیرهمگن: $\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+\left(q(x)+\lambda r(x)\right)y=f(x)$

$$\begin{cases}\alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)=0\\ \beta_1 y(b)+\beta_2 y'(b)=0\end{cases}$$

حل این مسئله ما را به مبحث تابع گرین هدایت می کند.

۵ قضیه Wronskian: اگر y_1 و y_2 دو پاسخ معادله همگن فوق

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

باشند که به‌ترتیب در شرایط مرزی ابتدایی و انتهایی صدق می‌کنند (y_1 فقط در شرط اول صدق می‌کند و y_2 فقط در شرط دوم صدق می‌کند) و y_1'' و y_2'' پیوسته باشند در این صورت:

$$p(x)W(y_1,y_2,x) = C \neq 0 \quad \text{ثابت}$$

اگر ثابت صفر باشد y_1 و y_2 به هم وابسته می‌شوند و دیگر جواب‌های مستقل نیستند.

$$W(y_1,y_2,x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

اثبات:

$$\frac{d}{dx}(py_1') + (q+\lambda r)y_1 = 0 \quad \times y_2$$

$$\frac{d}{dx}(py_2') + (q+\lambda r)y_2 = 0 \quad \times y_1$$

$$\frac{d}{dx}[pW] \equiv 0 \longrightarrow pW = cte \quad (p(x)W(y_1,y_2,x) = cte)$$

حال هدف یافتن جواب معادلهٔ غیرهمگن S.L. است:

با فرض جواب به صورت روبه‌رو: $y = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$

y_1 و y_2 به راحتی از حل معادلهٔ اشتروم لیوویل که فقط در یک شرط مرزی صدق می‌کنند قابل محاسبه هستند.

$$y = u_1y_1 + u_2y_2 \longrightarrow y' = (u_1'y_1 + u_2'y_2) + (u_1y_1' + u_2y_2')$$

چون u_1 و u_2 دو ضریب دلخواه هستند از این رو این را صفر در نظر می‌گیریم

فرض: $u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$ به نوعی تلاشی برای تشکیل معادلاتی است که جواب‌های آن u_1 و u_2 باشند. اگر این محدودیت لحاظ نشود دستگاه معادلات با جواب‌های u_1 و u_2 بی‌نهایت جواب دارد.

P4PCO

$$y'' = (u_1' y_1' + u_2' y_2') + (u_1 y_1'' + u_2 y_2'')$$

می‌دانیم:

$$\begin{cases} p y_1'' + p' y_1' + (q + \lambda r) y_1 = 0 \\ p y_2'' + p' y_2' + (q + \lambda r) y_2 = 0 \end{cases} \quad , \quad p y'' + p' y' + (q + \lambda r) y = f(x)$$

$$\rightarrow u_1 \cancel{[p y_1'' + p' y_1' + (q + \lambda r) y_1]}^{0} + u_2 \cancel{[p y_2'' + p' y_2' + (q + \lambda r) y_2]}^{0} \ldots$$

$$\ldots + p(u_1' y_1' + u_2' y_2') = f(x)$$

$$\rightarrow \begin{cases} p(u_1' y_1' + u_2' y_2') = f(x) \\ u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \end{cases}$$

از حل این دستگاه معادلات مقادیر u_1' و u_2' را یافته و با انتگرال گیری به u_1 و u_2 می‌رسیم:

$$u_1' = \frac{-y_2 f(x)}{p W(y_1, y_2)} \rightarrow u_1 = \frac{1}{pW} \int_x^b f(x') y_2(x') dx' \qquad x' > x$$

علامت منفی با جابه جا کردن کرانه‌های انتگرال حذف شده است.

$$u_2' = \frac{y_1 f(x)}{p W(y_1, y_2)} \rightarrow u_2 = \frac{1}{pW} \int_a^x f(x') y_1(x') dx'$$

با ضرب u_1 در y_1 و ضرب u_2 در y_2 داریم:

$$y = u_1 y_1 + u_2 y_2 = \frac{1}{pW} \begin{cases} \int_a^x f(x') y_1(x') y_2(x) dx' \quad , \quad x > x' \\ \int_x^b f(x') y_2(x') y_1(x) dx' \quad , \quad x < x' \end{cases}$$

به بیان دیگر:

$$g(x,x',\lambda)=\frac{1}{PW}\begin{cases} y_1(x)y_2(x') & x<x' \\ y_1(x')y_2(x) & x>x' \end{cases}$$

$$\rightarrow y(x)=\int_a^b g(x,x',\lambda)f(x')dx'$$

۱. اگر داشته باشیم:

$$L=\frac{d}{dx}\left[p\frac{d}{dx}\right]+(q+\lambda r)$$

آنگاه معادلهٔ اشتروم لیوویل غیرهمگن به صورت روبه‌رو نشان داده می‌شود:

$$Ly=f(x)$$

$$y(x)=\int_a^b g(x,x',\lambda)f(x')dx'$$

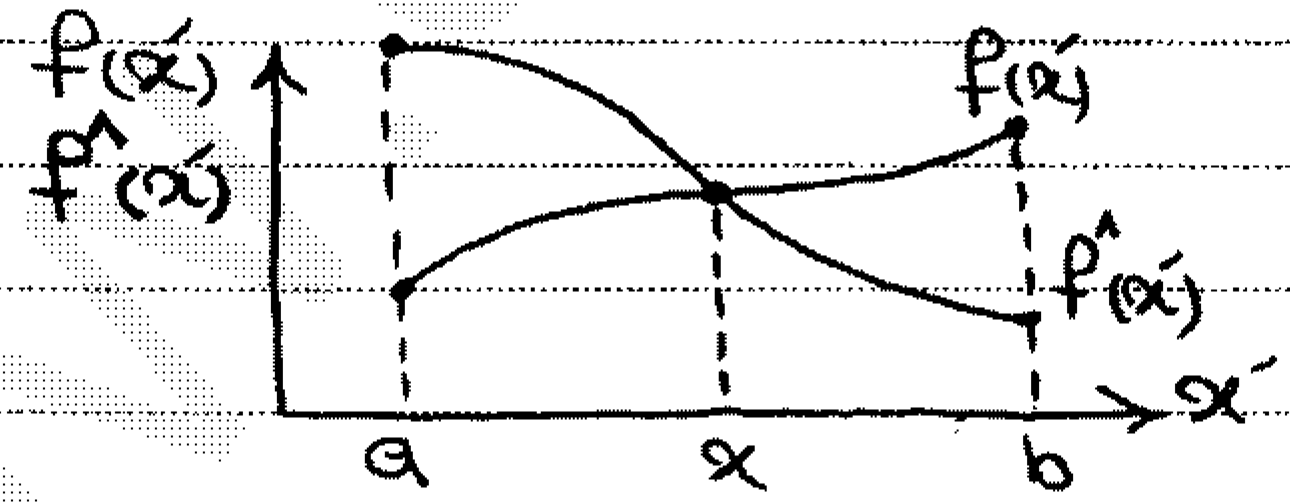
$$\rightarrow Ly=\int_a^b \underbrace{\left\{\frac{d}{dx}\left[p\frac{dg}{dx}\right]+(q+\lambda r)g\right\}}_{\delta(x,x')}f(x')dx'=f(x)$$

عبارت داخل گروشه را $\delta(x,x')$ نام گذاری می‌کنیم داریم:

$$\rightarrow \int_a^b \delta(x,x')f(x')dx'=f(x)$$

برای $\delta(x,x')$ خواصی درنظر می‌گیریم.

می‌دانیم x عددی بین a و b می‌باشد و نسبت به متغیر انتگرال گیری مثل عدد ثابت رفتار می‌کند. دو تابع دلخواه $f(x')$ و $\hat{f}(x')$ که در نقطهٔ x با هم برابرند درنظر می‌گیریم:



$$f(x)=\hat{f}(x)$$

Subject.
Year. Month. Date. ( )

$$\begin{cases} \int_a^b \delta(x,x')\, f(x')\,dx' = f(x) \\ \int_a^b \delta(x,x')\, \hat{f}(x')\,dx' = \hat{f}(x) \end{cases} \quad , \quad f(x)=\hat{f}(x)$$

از کم کردن این دو داریم:

$$\rightarrow \int_a^b \delta(x,x')\left[f(x') - \hat{f}(x')\right]dx' = 0$$

چون f و $\hat{f}$ دو تابع دلخواهند
پس برای این که این انتگرال صفر شود داریم:

خاصیت اوّل تابع $\delta(x,x')$: $\quad x' \neq x \rightarrow \delta(x,x') = 0$

در رابطهٔ $\int_a^b \delta(x,x') f(x')dx' = f(x)$ اگر به جای $f(x') \equiv 1$ قرار دهیم داریم:

خاصیت دوم تابع $\delta(x,x')$: $\quad \int_a^b \delta(x,x')\,dx' = 1$

این دو ویژگی تابع $\delta(x,x')$ را به سمت دلتای دیراک می‌برد.

معادلهٔ توزیع: $\quad \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dg}{dx}\right] + \left(q(x) + \lambda r(x)\right)g = \delta(x,x')$

در این جا $\delta(x,x')$
"تابع" دلتای دیراک است و g تابع گرین مسئله است.
$\delta(x,x')$ از نوع توابع عادی نیست بلکه از نوع توزیع است (Distribution).

اگر ما این معادله را حل کنیم به جواب مسئله $Ly = f(x)$ می‌رسیم. به معادلهٔ بالا معادلهٔ توزیع می‌گوییم.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

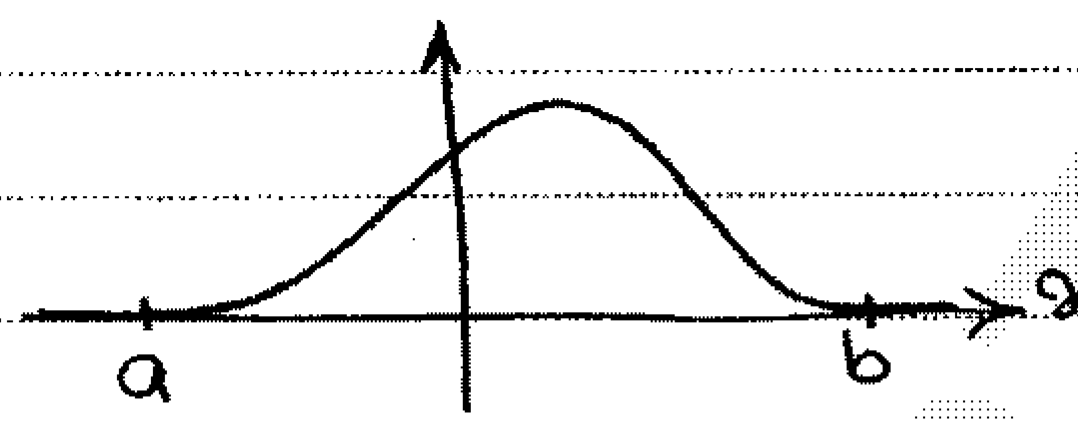
برای $x \neq \tilde{x}$ داریم: $\frac{d}{dx}\left[p\frac{dg}{dx}\right]+(q+\lambda r)g=0$

برای $x=\tilde{x}$ باید از خاصیت $\int_a^b \delta(x,\tilde{x})d\tilde{x}=1$ برای حل معادله استفاده کنیم که کمی غیر عادی است.

Distribution or Generalized function ⊗ تعریف توزیع

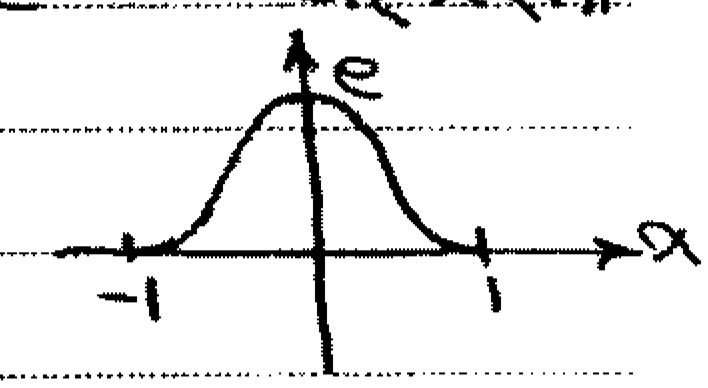
⊗ توابع آزمون (Testing function):

مجموعه توابع آزمون در محدوده $x<a$ و $x>b$ صفر است و مشتق از هر مرتبه‌ای را داراست.



آیا چنین توابعی وجود دارند؟

$-1<x<1$ « $e^{\frac{1}{x^2-1}}$ و در سایر جاها صفر » «bounded support»



$$\varphi(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{(x-a)(x-b)}} & a<x<b \\ 0 & x\leq a, x\geq b \end{cases}$$

در این تابع ترم $e^{-\frac{1}{x^2}}$ آنقدر سریع به سمت صفر حرکت می‌کند که از هر نوع واگرایی توسط ترم‌های $\frac{1}{x^n}$ جلوگیری می‌کند. پس همواره در تمامی نقاط حتی نقاط a و b هم بینهایت مشتق‌پذیر هستیم.

⊗ توابع آزمون در نقاط a و b بسط تیلور ندارند زیرا مشتقاتشان در این نقاط تا بینهایت صفر است.

⊗ مرجع این مبحث کتاب Griffel است.

ریاضی مهندسی: جلسه ۴ «۸۹,۷,۲۷»

— توزیع‌ها — "تابع" دلتای دیراک

PAPCO

قضیه: $\nabla^2\left(\frac{1}{|\bar{x}|}\right) = -4\pi\,\delta(\bar{x})$

(علامت خط بالا x نشانه برداری بودن $\bar{x}$ است.)

معادله توزیع: دلتا دیراک هم یک توزیع است: $Lg = \delta(x, x')$

$$\langle f , \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x')\,\delta(x, x')\,dx'$$

f توزیع مورد نظر که در این جا همان ... توزیع دلتای دیراک است.

φ هم یک تابع آزمون است.

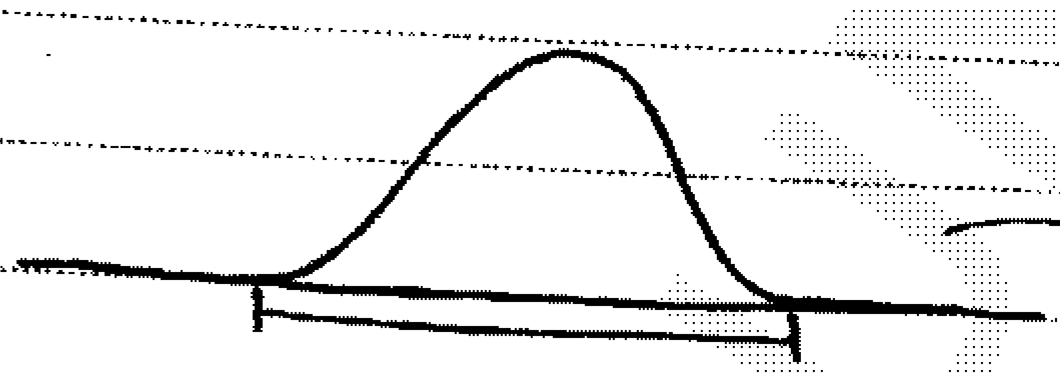
$$\delta(x, x') \; \overset{\text{نگاشت}}{D} \; \phi(\bar{x}') \longrightarrow \underset{\text{عدد}}{\phi(x)}$$

توزیع یک نگاشت از مجموعه توابع آزمون به اعداد می‌باشد.

خاصیت خطی بودن: $\langle \delta , a\varphi_1 + b\varphi_2 \rangle \to a\varphi_1(0) + b\varphi_2(0)$

support: $supp(f) : \{x \mid f(x) \neq 0\}$

تابع آزمون: تابعی است بینهایت بار مشتق پذیر و با supp محدود است (Bounded support).



Smooth هموار

توزیع: یک فانکشنال خطی پیوسته است.

$$\underset{\text{توزیع}}{\delta(x, x')} : \underset{\text{فضای نمونه / توابع آزمون}}{\phi(x)} \longrightarrow \underset{\text{فانکشنال}}{\int \delta(x, x')\,\phi(x')\,dx'}$$

عدد

رابطهٔ $\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(x)|^2 dx$ چون خطی نیست پس یک توزیع نیست.

دنباله‌ای همگرا از توابع آزمون $\phi_n(x)$ را در نظر می‌گیریم. اگر تابعی مورد نظر هر دنبالهٔ همگرا از توابع آزمون را به دنباله‌ای همگرا از اعداد بنگارد آن را پیوسته گوییم.

$$\phi_n \to \phi$$
$$F(\phi_n) \to F(\phi)$$

نکته: هر توزیع جزیک تابع معمولی است.

$d_n(x) = \dfrac{n}{\pi(1+n^2x^2)} \to$ یک توزیع معمولی یک تابع معمولی است.

$\lim\limits_{n\to\infty} d_n(x) = \delta(x) \to$ توزیع دلتا دیراک

$\lim \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\alpha} e^{-\frac{(x-x')^2}{2\alpha^2}} = \delta(x-x') \to$ تابع دلتا دیراک

تساوی دو توزیع: اگر روی هر تابع آزمون دلخواه اثر کنند و حاصل آنها یکسان باشد.

$$\langle f, \varphi(x) \rangle = \langle g, \varphi(x) \rangle$$

اگر فانکشنال غیرخطی باشد دیگر به آن توزیع نمی‌گوییم.

تمام تعاریف در توزیع با یک تابع آزمون چک می‌شود.

ضرب یک تابع در یک توزیع:

$h \quad f$

تابع ← h ، توزیع ← f

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$F(\Phi):\ \Phi \longrightarrow F(\Phi)$$

فضای نمونه — یک عدد

$$\langle hf, \varphi(x)\rangle = \int_a^b h f\, \phi(x) = \langle f, h\phi(x)\rangle$$

تابع آزمون

خاصیت جابجایی مشتق:

$$\langle f', \varphi(x)\rangle = -\langle f, \varphi'(x)\rangle$$

$$\int_a^b f' \varphi(x)\, dx = \cancel{f\phi(x)}\Big]_a^b \xrightarrow{} 0 \; - \int_a^b f \frac{d\varphi(x)}{dx}\, dx$$

تابع آزمون supp محدود دارد

$$\delta:\ \langle \delta', \varphi(x)\rangle = -\langle \delta, \varphi'(x)\rangle = -\varphi'(0)$$

نکته:

$$\langle f^{(n)}, \varphi(x)\rangle = (-1)^n \langle f, \varphi^{(n)}(x)\rangle$$

Heaviside: $H(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$

با مفهوم نظریه توزیع نشان می‌دهیم که توزیع دیراک مشتق تابع پله واحد است.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dH}{dx} \underbrace{\phi(x)}_{\text{تابع آزمون}} dx = \cancel{\phi H}\Big]_{-\infty}^{+\infty} \xrightarrow{} 0 \; - \int_{-\infty}^{+\infty} H(x) \frac{d\phi}{dx}\, dx$$

تابع آزمون supp محدود دارد

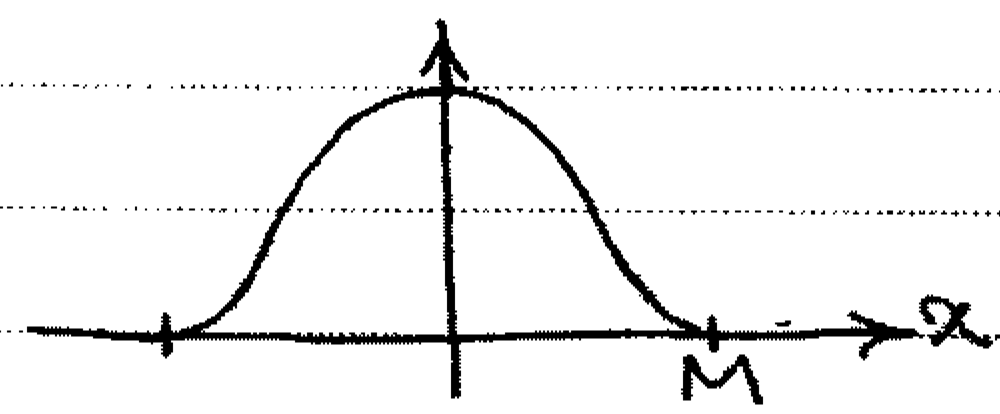
محدودیت ۲ ← M

$$= -\int_0^M H(x) \frac{d\phi}{dx}\, dx = -\int_0^M \frac{d\phi}{dx}\, dx = -[\phi(M) - \phi(0)] = \phi(0)$$

محدودیت ۱ ← 0

← همان عمل توزیع دلتای دیراک است

PAPCO



نکته: $\langle (hf)', \varphi\rangle = \langle hf, -\phi'\rangle = \langle f, -h\phi'\rangle = \dots$

$$= \langle f, -(h\phi)' + \phi h'\rangle = \langle f, \phi h'\rangle + \langle f, -(h\phi)'\rangle = \dots$$

$$= \langle h'f, \phi\rangle + \langle f', h\phi\rangle = \langle h'f, \phi\rangle + \langle hf', \phi\rangle = \dots$$

$$= \langle h'f + hf', \phi\rangle$$

f' یک توزیع است که توسط توابع آزمون باید توضیح داده شود.

Gelfond و Dirac درمورد این نظریهٔ توزیع هر یک جلد کتاب دارند.

هر خاصیت تابع دلتای دیراک باید با یک تابع آزمون نشان داده شود:

$$\langle \delta(ax), \phi(x)\rangle = \langle \frac{1}{|a|}\delta(x), \phi(x)\rangle$$

$$\langle \delta(x-a), \phi(x)\rangle = \phi(a)$$

$$\langle \delta(f(x)), \phi(x)\rangle = \left(\sum_{p} \frac{1}{|f'(x_p)|}\delta(x), \phi(x)\right)$$

ریشه‌های $f(x)$

یافتن توزیع دلتا دیراک از فرمول‌های تبدیل فوریه:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') e^{-j\omega x'} dx'$$

Subject:
Year. Month. Date: ( )

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega x}d\omega$$

$$\rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x')e^{-j\omega x'}dx'\right]e^{j\omega x}d\omega=\dots$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{+j\omega(x-x')}d\omega\right]}_{\delta(x-x')\ \text{توزیع دیراک}}f(x')dx'$$

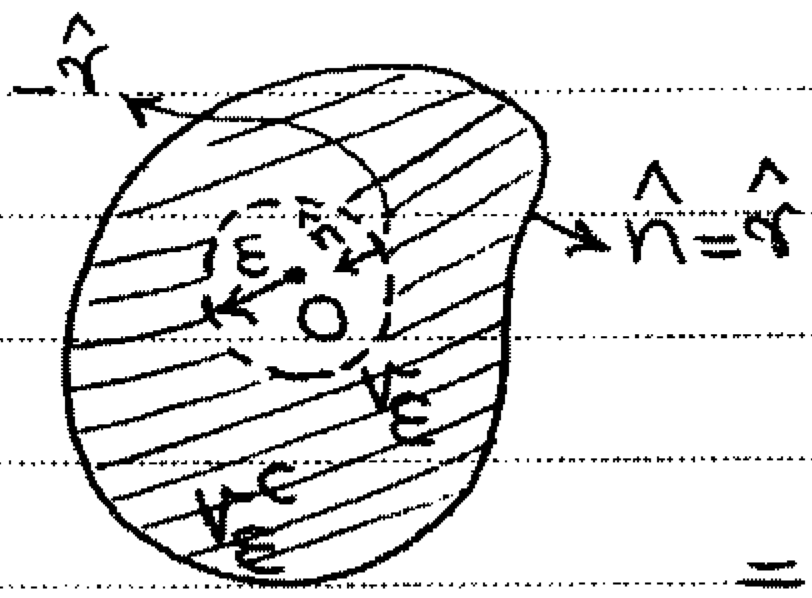
$$\delta(x-x')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega(x-x')}d\omega$$

- Courant_Hilbert در مورد این توزیع‌ها خوب سخن گفته‌اند.
- نماد $\bar{x}$ یک بردار است $\bar{x}=(x_1,x_2,x_3)$
- نمایش ریاضی یک قضیه: $\langle\nabla^2\frac{1}{|\bar{x}|},\phi(\bar{x})\rangle=-4\pi\phi(\bar{0})$
- نمایش مهندسی یک قضیه: $\nabla^2\frac{1}{|\bar{x}|}=-4\pi\delta(\bar{x})$
- $$\left(\nabla^2\frac{1}{|\bar{x}|},\phi(\bar{x})\right)=\langle\frac{1}{|\bar{x}|},\nabla^2\phi(\bar{x})\rangle=-4\pi\phi(\bar{0})$$

چون ∇^2 مشتق مرتبهٔ دوم است نتیجه‌گیری بالا بلامانع است.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )



$$\int_V \frac{1}{|\bar{x}|}\nabla^2\phi(\bar{x})\,dv = \dots$$

$$= \int_{V_\varepsilon} \frac{1}{|\bar{x}|}\nabla^2\phi(\bar{x})\,dv + \int_{V_\varepsilon^c} \frac{1}{|\bar{x}|}\nabla^2\phi(\bar{x})\,dv = \dots$$

$\bar{x}\neq 0 \rightarrow \nabla^2\frac{1}{|\bar{x}|}=0$ روی حجم هاشور زده $\nabla^2\frac{1}{|\bar{x}|}=0$ است.

$$\dots = \int_{V_\varepsilon} \frac{1}{|\bar{x}|}\nabla^2\phi(\bar{x})\,dv + \int_{V_\varepsilon^c} \nabla^2\frac{1}{|\bar{x}|}\,\phi(\bar{x})\,dv + \dots$$

$$+\left[\int_{V_\varepsilon^c} \frac{1}{|\bar{x}|}\nabla^2\phi(\bar{x})\,dv - \int_{V_\varepsilon^c} \phi(\bar{x})\,\nabla^2\frac{1}{|\bar{x}|}\,dv\right] =$$

قضیهٔ دوم گرین:
$$\int (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,dv = \int_{\partial V} (f\vec{\nabla} g - g\vec{\nabla} f)\cdot d\vec{S}$$

$$= \underbrace{\int_{V_\varepsilon} \frac{1}{|\bar{x}|}\nabla^2\phi(\bar{x})\,dv}_{1} + \underbrace{\int_{V_\varepsilon^c} \nabla^2\frac{1}{|\bar{x}|}\,\phi(\bar{x})\,dv}_{2} + \dots$$

$$+\oint_S (-\hat{r})\cdot\Big[\underbrace{\frac{1}{|\bar{x}'|}\vec{\nabla}\phi}_{3} - \underbrace{\phi(\bar{x})\vec{\nabla}\Big(\frac{1}{|\bar{x}'|}\Big)}_{4}\Big]\,ds$$

Subject:
Year Month Date

$\varepsilon \to 0 \qquad |\vec{\nabla}\phi| \le B \ , \ |\nabla^2\phi| \le B'$

① $\int_{V_\varepsilon} \frac{1}{|\bar{x}|}\nabla^2\phi\, d\bar{x} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{r}\nabla^2\phi\, r^2 \underset{\sin\theta}{\wedge} dr\, d\theta\, d\varphi =$

$d\bar{x}$ همان dv

$= \iiint \nabla^2\phi\, r \underset{\sin\theta}{\wedge} dr\, d\theta\, d\varphi \le B' \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\varepsilon} 4\pi\, r\, dr = 0$

② چون $\nabla^2 \frac{1}{|\bar{x}|}$ در $\bar{x} \neq 0$ صفر است پس این انتگرال هم صفر است.

③ $\int_S (-\hat{r})\cdot\left[\frac{1}{|\bar{x}'|}\vec{\nabla}\phi\right] ds = \iint (-\hat{r})\cdot\left[\frac{1}{r}\vec{\nabla}\phi\right] r^2 \underset{\sin\theta}{\wedge} d\theta\, d\phi =$

$= \lim_{r \to 0} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (-\hat{r})\cdot\vec{\nabla}\phi\ \overset{\sin\theta}{r}\, d\varphi\, d\theta = 0$

چون $\vec{\nabla}\phi$ کراندار است و $\varepsilon \to 0$ میل می‌کند
پس این انتگرال نیز صفر است.

④ $\int_S (-\hat{r})\cdot\left[-\phi(\bar{x})\,\underbrace{\vec{\nabla}\frac{1}{|\bar{x}|}}_{-\phi\,\frac{-\hat{r}}{r^2}}\right] \underbrace{ds}_{r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (-\phi) \underset{\sin\theta}{\wedge} d\theta\, d\varphi =$

$= -4\pi\phi(0,0,0) \quad \to \left\langle \nabla^2\frac{1}{|\bar{x}|}, \phi \right\rangle = -4\pi\phi(\bar{0})$

داریم: $\langle \delta(\bar{x}), \phi \rangle = \phi(\bar{0})$

پس: $\nabla^2 \frac{1}{|\bar{x}|} = -4\pi\,\delta(\bar{x})$

PAPCO

ریاضی مهندسی: جلسه ۷ «۸۹/۷/۲۹»

* نشان دادیم: $\left\langle \frac{1}{|\bar{x}'|}, \nabla^2\psi \right\rangle = -4\pi\psi(0,0,0)$

* در مسئله پواسن داریم: $\nabla^2\psi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

اگر طرفین را در $\frac{1}{|\bar{x}'|}$ ضرب کنیم و انتگرال‌گیری کنیم داریم:

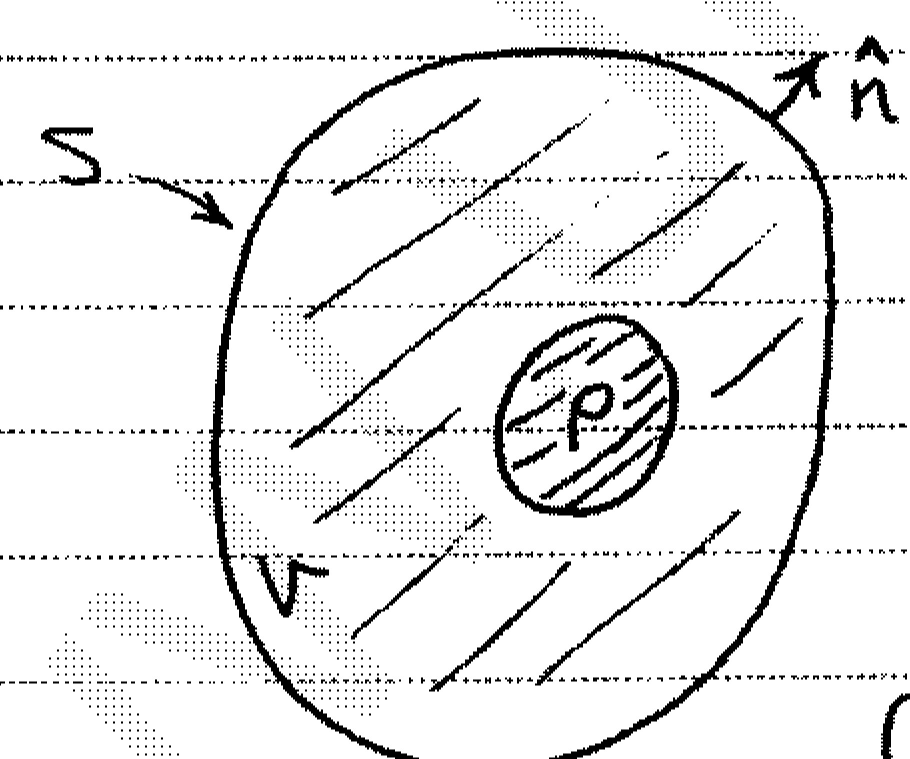
$$\frac{1}{|\bar{x}'|}\nabla^2\psi = \frac{1}{|\bar{x}'|}\,\frac{-\rho(x',y',z')}{\varepsilon_0}$$

$$\underbrace{\int_{v'}\frac{1}{|\bar{x}'|}\nabla^2\psi\, dv'}_{-4\pi\psi(0,0,0)} = \int_{v'} -\frac{1}{|\bar{x}'|}\,\frac{\rho(x',y',z')}{\varepsilon_0}\, dv'$$

$$-4\pi\psi(0,0,0) \rightarrow \psi(0,0,0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{v'}\frac{\rho(x',y',z')}{|\bar{x}'|}\,dv'$$

فرم کلی‌تر جواب: $\psi(\bar{x}) = \int \frac{\rho(x',y',z')}{4\pi\varepsilon_0|\bar{x}'-\bar{x}|}\,dv'$

* برای متغیرها از پرایم و برای ثابت‌ها بدون پرایم استفاده کرده‌ایم.



$\nabla^2\psi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \longrightarrow$ منبع

$\nabla^2 G = -\delta(\bar{x}-\bar{x}')$ یا δ یا

$\delta(x-x', y-y', z-z')$

$$\int_V (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,dv = \oint_{\partial V}(f\vec{\nabla}g - g\vec{\nabla}f)\cdot\vec{ds}$$

$f=\psi$, $g=G$

$$\int [\psi(x')\nabla'^{2} G(\bar{x},\bar{x}') - G\nabla'^{2}\psi]\, dv' = \dots$$

- ∇' مربوط به متغیرهای پرایم‌دار می‌باشد.

$$= \oint [\psi \vec{\nabla}' G(\bar{x},\bar{x}') - G\vec{\nabla}'\psi]\cdot d\vec{s}'$$

$$\nabla'^{2} G(\bar{x},\bar{x}') = -\delta(\bar{x},\bar{x}')$$

نماد: d^3x'

$$\rightarrow \psi(x) = \int \frac{G(\bar{x},\bar{x}')\rho(x')}{\varepsilon_0}\, dv' + \int_{S'} [-\psi\vec{\nabla}' G + G\vec{\nabla}'\psi]\cdot d\vec{s}'$$

اثر منبع | شرط مرزی

- اگر حجم V به سمت بینهایت برود اثر شرایط مرزی از بین می‌رود.
- با داشتن شرایط مرزی و منابع داخل حجم V می‌توان میدان داخل حجم را یافت.
- شرط مرزی نیومان: $\vec{\nabla}'\psi\cdot d\vec{s}' = \vec{\nabla}'\psi\cdot\hat{n}\, ds' = \frac{\partial\psi}{\partial n}ds'$
- اگر ψ معلوم باشد شرط مرزی دیریکله صادق است.

$\psi = a$

- فرض کنید ψ شرط مرزی معلوم باشد:

$$\nabla^2 G = -\delta(\bar{x}-\bar{x}') \longrightarrow G\big|_{\text{مرز}} = 0$$

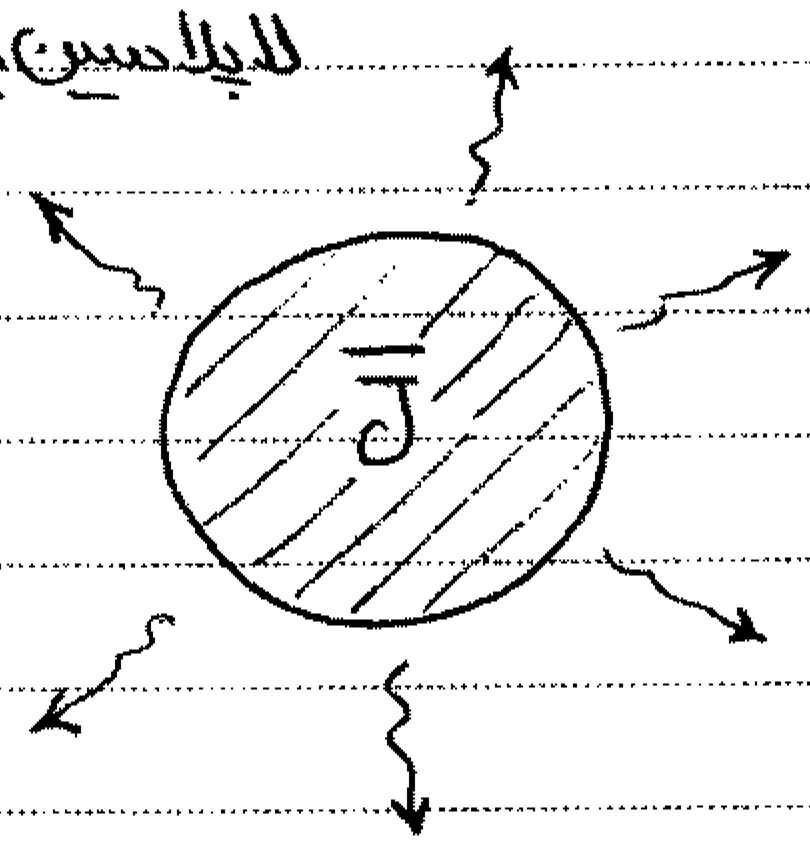
شرط مرزی G همواره باید معلوم باشد تا بتوان تابع گرین آن مسئله را یافت. این شرط مرزی از نوع شرط مرزی خود مسئله است. مثلاً اگر شرط مرزی مسئله دیریکله باشد شرط مرزی G هم دیریکله است و همین طور برای شرط مرزی نیومان.

● برای یافتن تابع گرین مسئله دو چیز لازم است ← اپراتور مثلاً لاپلاس یا هلمهولتز
شرایط مرزی دیریکله یا نیومان

● معادلهٔ هلمهولتز:

$$\bar{\nabla}^2\bar{A}+k^2\bar{A}=-\mu\bar{J} \qquad \begin{cases}\bar{A}=\mu g\hat{a}\\ \bar{J}=\hat{a}\,\delta(\bar{R}-\bar{R}')\end{cases}$$

لاپلاسین برداری



$$\bar{\nabla}^2\bar{A}_1+k^2\bar{A}_1=-\mu\hat{a}\,\delta(\bar{R}-\bar{R}')$$

← بردار یکه در امتداد $\bar{J}$

✓ تبدیل مسئله به معادلهٔ اسکالر (Scaler)

$$\nabla^2 g+k^2 g=-\delta(\bar{R}-\bar{R}')$$

$$\bar{R}\neq\bar{R}' \longrightarrow \nabla^2 g+k^2 g=0 \qquad |\bar{R}-\bar{R}'|=r$$

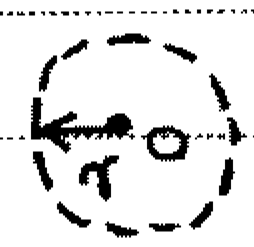
✓ ابتدا مسئله را برای $\bar{R}\neq\bar{R}'$ حل می‌کنیم سپس برای نقطهٔ $\bar{R}=\bar{R}'$ فکری می‌کنیم

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial g}{\partial r}\right)+k^2 g=0 \rightarrow g=C\,\frac{e^{-jkr}}{r}$$

موج برون‌رویا
outgoing

✓ موج درون‌رو هم در معادله صدق می‌کند که ما آن را در نظر نمی‌گیریم زیرا منبع را در فضای حل را ∞ فرض کرده‌ایم و شرط مرزی Sommerfeld در بینهایت صادق است.

✓ برای یافتن مجهول C باید از حجم v زمانیکه $r\to 0$ می‌کند انتگرال بگیریم تا C محاسبه شود.



Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\int_v (\nabla^2 g + \cancel{k^2 g})\, dv = -1 \rightarrow \int_v \bar{\nabla}\cdot(\bar{\nabla} g)\, dv = -1$$

$\{r \to 0\}$, $k^2 g \to 0$, $dv = \underbrace{r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}_{d\Omega \text{ زاویه فضایی}}\, dr$

$$\rightarrow \int_S \bar{\nabla} g \cdot \bar{ds} = \int_S \hat{r}\frac{\partial g}{\partial r}\cdot \hat{r}\underbrace{ds}_{r^2 d\Omega} = -1$$

با جایگذاری $\longrightarrow -4\pi C = -1 \longrightarrow C = \frac{1}{4\pi}$

$$g = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \rightarrow \bar{A} = \int_{v'} \mu \vec{J}(\bar{R}') \frac{e^{-jk|\bar{R}-\bar{R}'|}}{4\pi|\bar{R}-\bar{R}'|}\, dv'$$

* در الکترواستاتیک عملگر حل ما لاپلاس بود و در الکترودینامیک هلمهولتز است. روش یافتن تابع گرین برای هر دو مشابه هم است.

* حل معادلات غیرهمگن: $\mathcal{L}u = f(x)$
به کمک توابع ویژه و مقادیر ویژهٔ عملگر $\mathcal{L}$ مسئله را بررسی می‌کنیم:

۱- ابتدا توابع ویژه و مقادیر ویژه عملگر $\mathcal{L}$ را از رابطهٔ روبه‌رو می‌یابیم: $\mathcal{L}\phi_n = \lambda_n \phi_n$

۲- توابع u و $f(x)$ را برحسب توابع ویژهٔ ϕ_n بسط می‌دهیم:

$u = \sum \alpha_n \phi_n$ ، $f = \sum \beta_n \phi_n$
(α_n: مجهول است، β_n: معلوم است)

$$\beta_n = \langle f, \phi_n \rangle$$

PAPCO

$$\mathcal{L}\left(\sum \alpha_n \phi_n\right) = \sum \beta_n \phi_n \rightarrow \sum \mathcal{L}(\alpha_n \phi_n) = \sum \alpha_n \mathcal{L}(\phi_n)$$

$$= \sum \alpha_n \lambda_n \phi_n = \sum \beta_n \phi_n \rightarrow \sum (\alpha_n \lambda_n - \beta_n)\phi_n = 0$$

در ϕ_m رابطهٔ بالا را ضرب می‌کنیم و انتگرال می‌گیریم داریم:

$$\alpha_n = \frac{\beta_n}{\lambda_n} \rightarrow u = \sum \frac{\beta_n}{\lambda_n} \phi_n$$

(در این جا از تعامد توابع ویژه استفاده کرده‌ایم)

$$u(x) = \sum \frac{\phi_n(x)}{\lambda_n} \int \phi_n^*(x') f(x') dx' = \dots$$

ممکن است $\phi_n(x)$ مختلط باشد

$$= \sum \int \frac{\phi_n(x)\phi_n^*(x') f(x')}{\lambda_n} dx' = \int \underbrace{\sum \frac{\phi_n(x)\phi_n^*(x')}{\lambda_n}}_{\text{تابع گرین است}} f(x') dx'$$

$$\boxed{G(\bar{x}, \bar{x}') = \sum_n \frac{\phi_n(\bar{x})\phi_n^*(\bar{x}')}{\lambda_n}}$$

یک بیان دیگر از تابع گرین:

یک راه کلی یافتن تابع گرین یافتن توابع ویژه و مقادیر ویژه عملگر است.

عملگرهای معادلات درجه دو به راحتی به عملگر اشتروم لیوویل تبدیل می‌شوند.

این حل برای دو و سه بعدی هم معتبر است.

اگر معادله ما به صورت روبرو باشد آن گاه:

$$\mathcal{L}u(\bar{x}) + \lambda u(\bar{x}) = f(\bar{x}) \rightarrow \boxed{G(\bar{x}, \bar{x}') = \sum \frac{\phi_n(\bar{x})\phi_n^*(\bar{x}')}{\lambda_n - \lambda}}$$

Subject: ۵۱

Year. Month. Date.

مثال:

$$\frac{d^2G}{dx^2}+k^2G=\delta(x-x') \qquad x\in(0,l)$$

پاسخ معادله همگن را ابتدا می‌یابیم:

$$x\neq x' \rightarrow \frac{d^2G}{dx^2}+k^2G=0 \rightarrow G=\begin{cases}A\sin kx & x<x'\\ B\sin k(l-x) & x>x'\end{cases}$$

در شرط مرزی ابتدایی صدق می‌کند.

در شرط مرزی انتهایی صدق می‌کند.

دو شرط داریم:

۱- شرط پیوستگی تابع گرین در $x=x'$: $\quad A\sin kx'=B\sin k(l-x')$

۲- شرط منبع:

انتگرال حول x' و برابر با انتگرال می‌دهیم:

$$\left.\frac{dG}{dx}\right|_{x'_-}^{x'_+}=1$$

$$G=\frac{-1}{k\sin kl}\begin{cases}\sin kx\,\sin k(l-x') & x<x'\\ \sin kx'\,\sin k(l-x) & x>x'\end{cases}$$

تابع گرین نسبت به x و x' متقارن است.

در حل مسائل پیچیده به سرعت می‌توانیم یک حدس اولیه برای جواب بزنیم که فقط در یکی از شرایط مرزی صدق می‌کند. سپس به دلیل تقارن توابع گرین به فرم کلی جواب می‌رسیم و فقط باید ضرایب را پیدا کنیم.

$$G=\begin{cases}A\sin kx\\ B\sin k(l-x)\end{cases} \rightarrow G=\text{ضریب}\ldots\begin{cases}\sin kx\,\sin k(l-x')\\ \sin kx'\,\sin k(l-x)\end{cases}$$

مثال: عملگر $\frac{d^2}{dx^2}$ در بازهٔ $[0,1]$: (دیریکله)

$$\frac{d^2f}{dx^2}=-\lambda f$$

حل اول: $\lambda_n=n^2\pi^2\ ,\ \phi_n=\sqrt{2}\sin n\pi x$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تابع گرین برحسب تابع ویژه:

$$G(x,x') = 2\sum_{1} \frac{\sin n\pi x \, \sin n\pi x'}{n^2\pi^2}$$

حل دوم:

$$\frac{d^2f}{dx^2}=0 \quad 0<x<1 \longrightarrow \frac{d^2g}{dx^2}=\delta(x-x')$$

$$\begin{cases} y_1 = x & \text{در شرط مرزی اول صدق می‌کند} \\ y_2 = 1-x & \text{در شرط مرزی دوم صدق می‌کند} \end{cases}$$

$$W(y_1,y_2) = -1 \longrightarrow G(x,x') = \frac{1}{-1}\begin{cases} x(1-x') & x<x' \\ x'(1-x) & x>x' \end{cases}$$

با توجه به اینکه دو حل دو جواب کاملاً متفاوت (از نظر ظاهری) یافتیم که هر کدام برای یک جا کاربرد دارد و هر دو به سمت هم همگرا هستند.

* حل معادلات غیرهمگن:

$$L \equiv f_0(t)\frac{d^2}{dt^2} + f_1(t)\frac{d}{dt} + f_2(t)$$

یافتن تابع گرین:

$$f_0 \frac{d^2G}{dt^2} + f_1\frac{dG}{dt} + f_2 G = \delta(t-t')$$

در بازه (t'_-, t'_+) انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{t'_-}^{t'_+} f_0 \frac{d^2G}{dt^2}\,dt + \underbrace{\int_{t'_-}^{t'_+} f_1 \frac{dG}{dt}}_{0 \text{ کراندار}} + \underbrace{\int_{t'_-}^{t'_+} f_2 G}_{0 \text{ پیوسته}} = 1$$

* دو خاصیت مهم G:
1- G در $t=t'$ پیوسته است.
2- مشتق G در $t=t'$ کراندار است.

Subject:
Year ... Month ... Date ... ( )

جزء به جزء $\longrightarrow f_0 \dfrac{dG}{dt}\Big|_{t'_-}^{t'_+} - \int_{t'_-}^{t'_+} \dfrac{dG}{dt}\,\cancel{\dfrac{df_0}{dt}}\,dt = 1$

کرانه‌دار 0

$$\longrightarrow f_0 \frac{dG}{dt}\Big|_{t'_-}^{t'_+} = 1 \longrightarrow \boxed{\frac{dG}{dt}\Big|_{t'_-}^{t'_+} = \frac{1}{f_0(t')}}$$

۵) معادله همگن را حل می‌کنیم و دو جواب $x_1(t)$ و $x_2(t)$ را می‌یابیم که یکی در شرط مرزی اول صدق می‌کند و دیگری در شرط مرزی دوم صادق است.

$$G(t,t') = \begin{cases} a_1x_1(t)+a_2x_2(t) & t>t' \\ b_1x_1(t)+b_2x_2(t) & t<t' \end{cases}$$

a_1 و a_2 و b_1 و b_2 توابعی برحسب t' هستند.

۶) از دو شرطی که برای تابع G داریم استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} G\big|_{t'=t} = \text{پیوسته} \\ \dfrac{dG}{dt}\Big|_{t'_-}^{t'_+} = \dfrac{1}{f_0(t')} \end{cases}$$

$$\begin{cases} G(t,t') = b_1x_1(t)+b_2x_2(t) - \left[\dfrac{x_1(t)x_2(t')-x_2(t)x_1(t')}{f_0(t')W(t')}\right] & t>t' \\ G(t,t') = b_1x_1(t)+b_2x_2(t) & t<t' \end{cases}$$

۷) حال توسط دو شرط مرزی مسئله مقادیر b_1 و b_2 را می‌یابیم.

PAPCO

مثال: $L \equiv \frac{d^2}{dx^2} + \omega_0^2$ در فاصله $[0,1]$ (شرط دیریکله)

$x_1 = \sin\omega_0 t$ ، $x_2 = \sin\omega_0(1-t)$

$$G(t,t') = \begin{cases} -\dfrac{\sin\omega_0(1-t)\sin\omega_0 t'}{\omega_0 \sin\omega_0} & t>t' \\ -\dfrac{\sin\omega_0(1-t')\sin\omega_0 t}{\omega_0\sin\omega_0} & t<t' \end{cases}$$

ریاضی مهندسی: جلسه ۵ «۸۹/۸/۲»

- تقارن تابع گرین
- تابع گرین برای معادلهٔ پواسن:

تابع گرین برای یک عملگر با شرایط مرزی خطی بدست می‌آید. همواره شرط مرزی تابع گرین چه در حالت دیریکله و چه در حالت نیومان صفر درنظر گرفته می‌شود.

راه های یافتن تابع گرین عملگر مربوط:

۱- حل معادلهٔ همگن و انتگرال گیری حول منبع

۲- درنظر گرفتن یک ناحیهٔ اپسیلونی اطراف منبع و استفاده از قضیه دوم گرین

۳- به کمک توابع ویژهٔ عملگر مربوطه

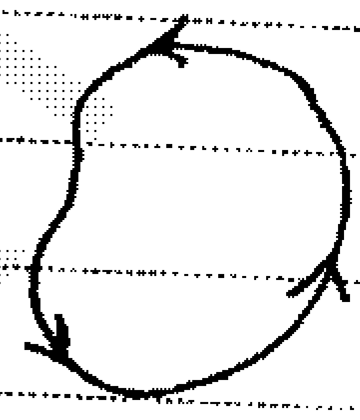
۴- به کمک قضیه رونسکین با فرض دو جواب x_1 و x_2 که هرکدام در یک شرط مرزی به ترتیب صدق می‌کنند. در این جا از پیوستگی تابع گرین و گسستگی محدود مشتق تابع گرین نیز کمک می‌گیریم.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\int (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)\,dv = \oint_S (u\vec{\nabla} v + v\vec{\nabla} u)\cdot d\vec{S}$$

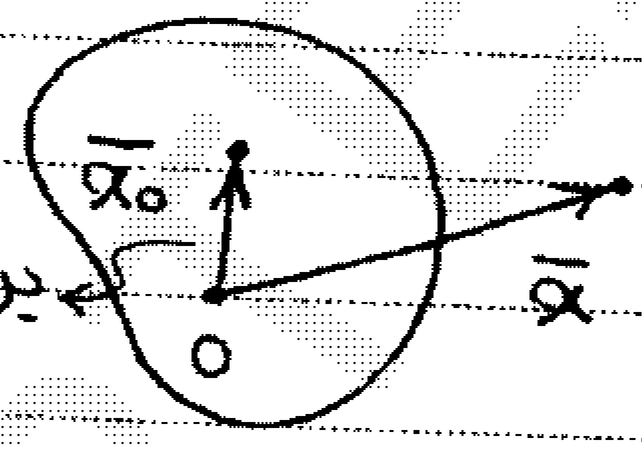
«سه بعدی»

$$\int (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)\,ds = \oint_C (u\vec{\nabla} v + v\vec{\nabla} u)\cdot d\vec{l}$$



«دو بعدی»

$$\nabla^2 G(\bar{x}, \bar{x}_0) = \delta(\bar{x} - \bar{x}_0)$$



* برای یافتن تقارن تابع گرین دو معادله توزیع فرض می‌کنیم:

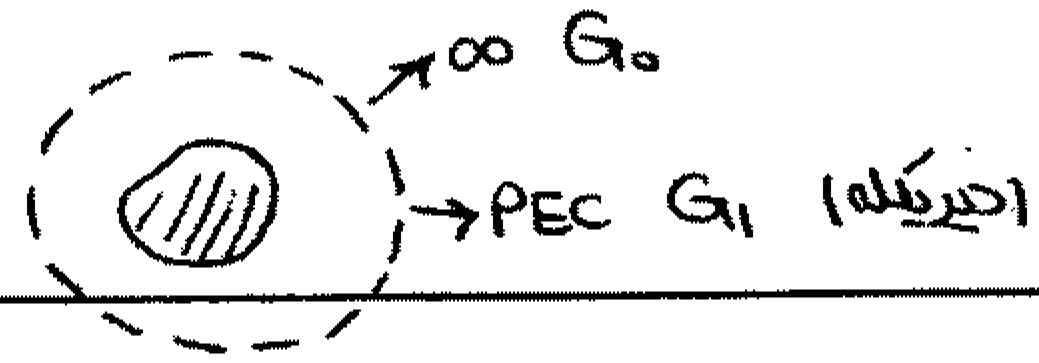
$$\nabla^2 G(\bar{R}, \bar{R}_{01}) = \delta(\bar{R} - \bar{R}_{01})$$
$$\nabla^2 G(\bar{R}, \bar{R}_{02}) = \delta(\bar{R} - \bar{R}_{02})$$
$$u = G(\bar{R}, \bar{R}_{01})$$
$$v = G(\bar{R}, \bar{R}_{02})$$

قضیه دوم گرین: $\int \left[G(\bar{R}, \bar{R}_{01})\,\delta(\bar{R} - \bar{R}_{02}) - G(\bar{R}, \bar{R}_{02})\,\delta(\bar{R} - \bar{R}_{01}) \right] dv$

$$= \oint_S \left[G(\bar{R}, \bar{R}_{01}) \frac{\partial G(\bar{R}, \bar{R}_{02})}{\partial n} - G(\bar{R}, \bar{R}_{02}) \frac{\partial G(\bar{R}, \bar{R}_{01})}{\partial n} \right] ds$$

$$\vec{\nabla} G \cdot \hat{n} = \frac{\partial G}{\partial n}$$

* طرف دوم معادله بالا روی مرز می‌باشد که در هر صورتی صفر است:



- چه شرط فضای آزاد (G_0) یا دیریکله (G_1) یا نیومان (G_2) یا مخلوط (G_3) برقرار باشد طرف دوم معادلهٔ بالا صفر است.

$$\text{طرف اول} = G(\overline{R_{02}}, \overline{R_{01}}) - G(\overline{R_{01}}, \overline{R_{02}}) = 0$$

$$\longrightarrow G(\overline{R_{01}}, \overline{R_{02}}) = G(\overline{R_{02}}, \overline{R_{01}})$$

تقارن در این جا برای عملگر لاپلاس بدست آمده است.

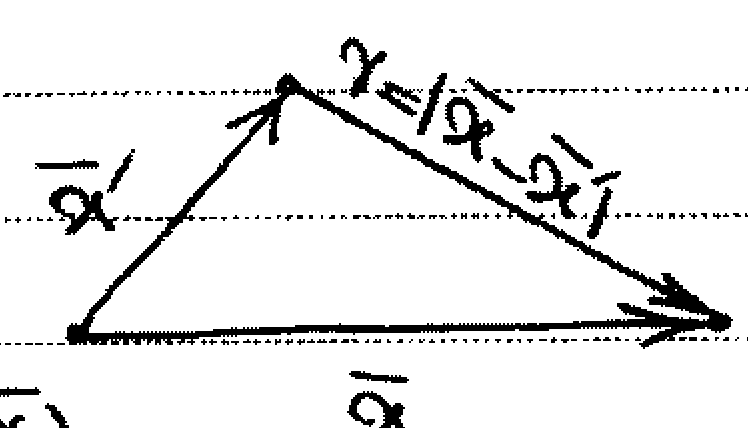
- تقارن تابع گرین به نوعی همان مفهوم Reciprocity می‌باشد و ممکن است در بعضی جاها برقرار نباشد و در واقع تقارن تابع گرین برقرار نباشد.

- تابع گرین برای عملگر هلمهولتز هم متقارن است.

- تابع گرین برای عملگر لاپلاس در حالت ۲ بعدی:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial g}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} = -\delta(\bar{r} - \bar{r}')$$

علامت منها طبق قرارداد معادله پواسن است.



اگر منبع در مبدأ فرض شود $\longrightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial g}{\partial r}\right) = -\delta(\bar{r})$

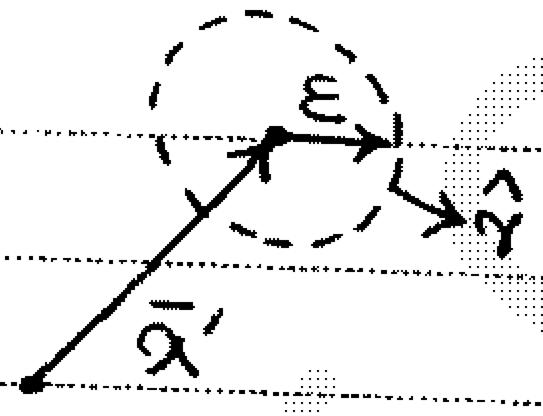
راه‌حل‌ها:

۱- حل معادلهٔ همگن و سپس انتگرال حول مبدأ بگیریم و آن را برابر یک قرار دهیم.

۲- یک دایره کوچک حول منبع بزنیم و از قضیهٔ دوم گرین استفاده کنیم.

$$\int_S \bar{\nabla}^2 g \, ds = -1 \rightarrow \int_S \bar{\nabla}\cdot(\bar{\nabla} g)\, ds = \oint_C \bar{\nabla} g \cdot \hat{n}\, dl = \dots$$

$$= \oint_C \frac{\partial g}{\partial r}\, r\, d\varphi = -1$$



از حل معادله همگن داریم: $g = C \ln r$ که با حل انتگرال بالا داریم: $C = -\frac{1}{2\pi}$.

اگر منبع در مبدأ نباشد و در محل $\bar{r}'$ باشد:

$$g(r, r') = -\frac{1}{2\pi} \ln |\bar{r} - \bar{r}'|$$ است

← منطبق قرار داد.

حل مسئله ۲ بعدی به کمک توابع ویژه:

$$\nabla^2 G(\bar{x}, \bar{x}_0) = \delta(\bar{x} - \bar{x}_0)$$

۱ اگر عملگر خود را با $\mathcal{L}$ نشان دهیم:

$$\mathcal{L}\phi_n = \lambda_n \phi_n$$

برای این مثال خاص داریم:

$$\nabla^2 \phi_n = \lambda_n \phi_n$$

$$G(\bar{x}, \bar{x}_0) = \sum a_m \phi_n \longrightarrow \nabla^2 \sum a_n \phi_n = \sum a_n \nabla^2 \phi_n = \dots$$

$$\dots = \sum a_n \lambda_n \phi_n = \delta(\bar{x} - \bar{x}_0)$$

با ضرب طرفین در ϕ_m و انتگرال گیری داریم:

$$a_m \lambda_m = \phi_m^*(\bar{x}_0)$$

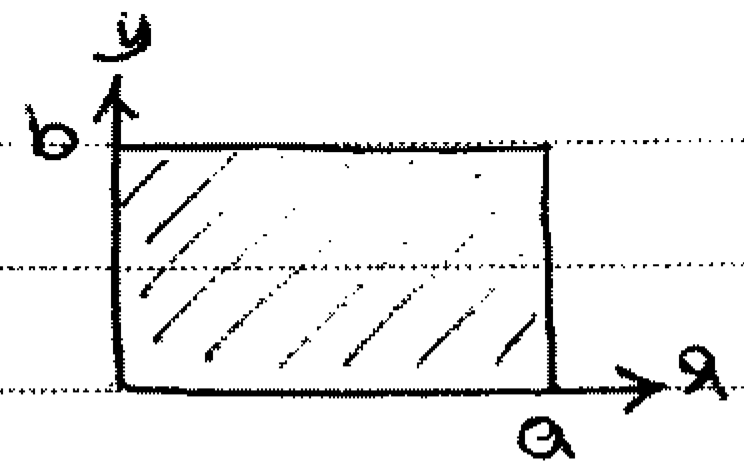
چون ممکن است $\phi_n(\bar{x})$ مختلط باشد از این رو * گذاشته ایم.

$$G(\bar{x}, \bar{x}_0) = \sum_m \frac{\phi_m(\bar{x})\, \phi_m^*(\bar{x}_0)}{\lambda_m}$$

مثال: ناحیه مستطیلی با شرط مرزی دیریکله:

$$\lambda_n = -\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )



$$G=\sum_m\sum_n \frac{\sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)\sin(\frac{m\pi}{a}x_0)\sin(\frac{n\pi}{b}y_0)}{(\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2}$$

اگر ϕ_m و ϕ_m^* را نرمالیزه کنیم ضریب $\frac{4}{ab}$ در عبارت بالا ضرب می‌شود.

یک حل دیگر برای همین مسئله: $\nabla^2 G(\bar{x},\bar{x}_0)=\delta(\bar{x}-\bar{x}_0)$

$$G(\bar{x},\bar{x}_0)=\sum A_m(y)\sin(\frac{m\pi}{a}x)$$

با جایگذاری در معادله داریم:

$$\sum_m\left[\frac{d^2A_m}{dy^2}-(\frac{m\pi}{a})^2A_m\right]\sin\frac{m\pi}{a}x=\delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)$$

دو طرف معادله را در $\sin\frac{m\pi}{a}x$ ضرب می‌کنیم و در مرزهای مسئله انتگرال‌گیری می‌کنیم: $(0,a)$

$$\frac{d^2A_m}{dy^2}-(\frac{m\pi}{a})^2A_m=\frac{2}{a}\sin(\frac{m\pi}{a}x_0)\,\delta(y-y_0)$$

$$A_m(y)=\begin{cases}C_m\sinh(\frac{m\pi}{a}y)\sinh\frac{m\pi}{a}(b-y_0) & y<y_0\\ C_m\sinh\frac{m\pi}{a}(b-y)\sinh\frac{m\pi}{a}y_0 & y>y_0\end{cases}$$

به دلیل حفظ تقارن

$$\left.\frac{dA_m}{dy}\right|_{y_0^-}^{y_0^+}=\frac{2}{a}\sin\frac{m\pi}{a}x_0 \longrightarrow$$ C_m پیدا می‌شود

Subject:
Year. Month. Date. ( )

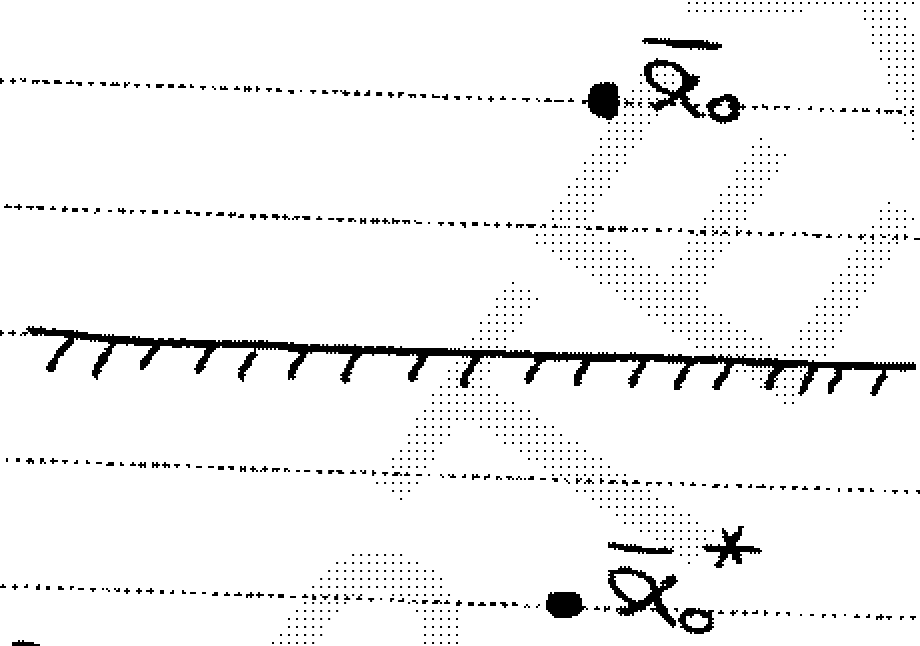
* هر دو حالت جواب مسئله است
و .... هر حالت برای یک جای خاص به درد می خورد

$$C_m=\frac{2\sin\left(\frac{m\pi}{a}x_0\right)}{m\pi\sinh\left(\frac{m\pi b}{a}\right)}$$

* حل مسئله نیم صفحه به کمک تابع گرین:

مسئله اصلی
$$\begin{cases}\nabla^2 u(\bar{x})=f(\bar{x})\\ \bar{x}=(x,y)\\ u(\bar{x})\big|_{y=0}=h(x)\end{cases}$$

شرط دیریکله



برای یافتن تابع گرین مسئله نیم صفحه یک منبع $\bar{x}_0^*$ نیز در زیر نیم صفحه در نظر می گیریم. مسئله تابع گرین به این صورت است:

$$\begin{cases}\nabla^2 G=\delta(\bar{x}-\bar{x}_0)\\ G\big|_{\text{مرز}}=0\end{cases}\longrightarrow \nabla^2 G=\delta(\bar{x}-\bar{x}_0)-\delta(\bar{x}-\bar{x}_0^*)$$

تابع گرین کل صفحه (سطح ۲ بعدی) $\longrightarrow G=\frac{1}{2\pi}\ln|\bar{x}-\bar{x}_0|$

$$G=\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{\bar{x}-\bar{x}_0}{\bar{x}-\bar{x}_0^*}\right|$$

پاسخ مسئله ما تابع گرین نیم صفحه است.

✓ اگر این جواب را در مسئله قرار دهیم می بینیم که صدق می کند و در محل مرز هم داریم $G=0$ و شرط مرزی را هم برآورده می کند پس جواب مسئله همین است.

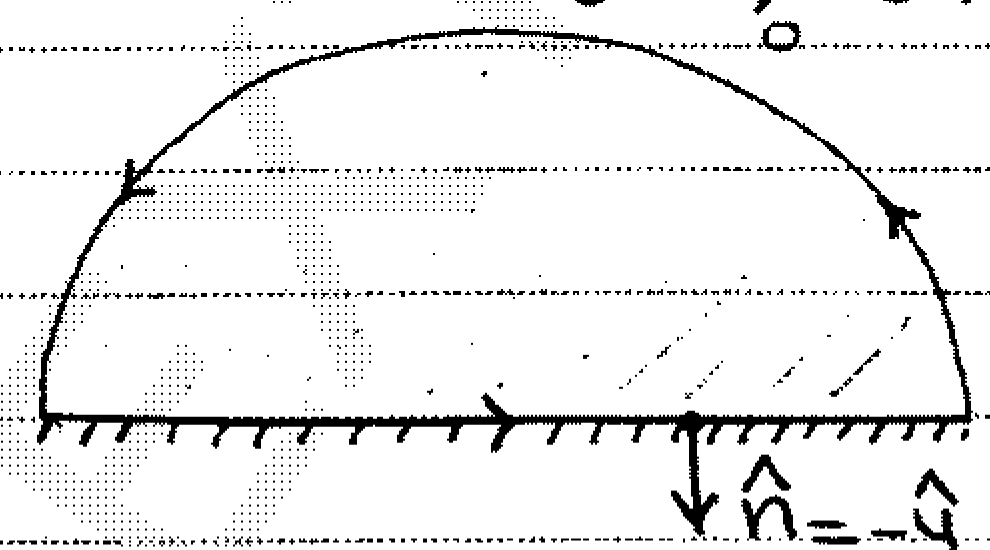
✓ تا حالا ما پاسخ تابع گرین را یافته ایم ولی پاسخ مسئله اصلی چگونه است؟

$$\int_S (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)\,ds = \oint_C (u\vec{\nabla} v - v\vec{\nabla} u)\cdot\hat{n}\,dl$$

G

$$\rightarrow \int_S [u(\bar{x})\delta(\bar{x}-\bar{x}_0) - Gf(\bar{x})]\,\underset{\text{یا } d\bar{x}}{ds} = \int \Big(h(x)\frac{\partial G}{\partial n} - \cancel{G}\frac{\partial u}{\partial n}\Big)\underset{dx}{dl}$$

0



$$u(\bar{x}_0) = \int_S Gf(\bar{x})\,d\bar{x}\ldots$$

$$+\oint h(x)\frac{\partial G}{\partial n}dx$$

با تبدیل $\bar{x}_0$ به $\bar{x}$ و $\bar{x}$ به $\bar{x}_0$ داریم:

$$u(\bar{x}) = \int_S f(\bar{x}_0)\,G(\bar{x},\bar{x}_0)\,d\bar{x}_0 - \int_{-\infty}^{+\infty} h(x_0)\frac{\partial G(\bar{x},\bar{x}_0)}{\partial y_0}dx_0$$

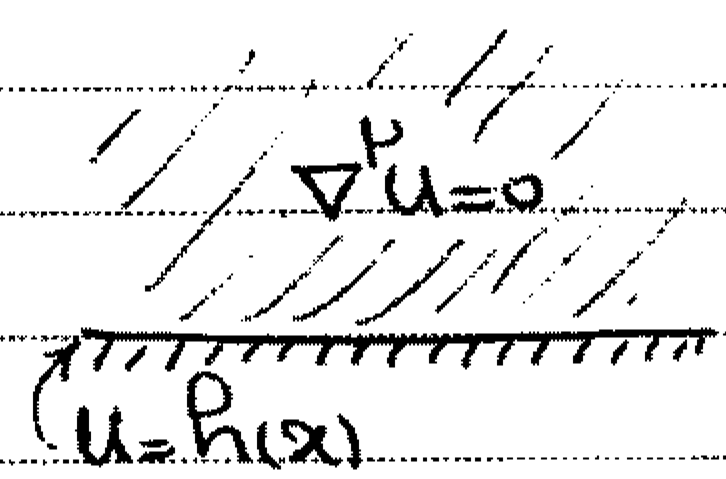
S نیم صفحه ← تقارن دارد dx_0dy_0

$$G = \frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial y_0}\right|_{y_0=0} = \frac{-y}{\pi[(x-x_0)^2+y^2]}$$

حالت خاص $f(\bar{x})=0$ که معادله لاپلاس است:

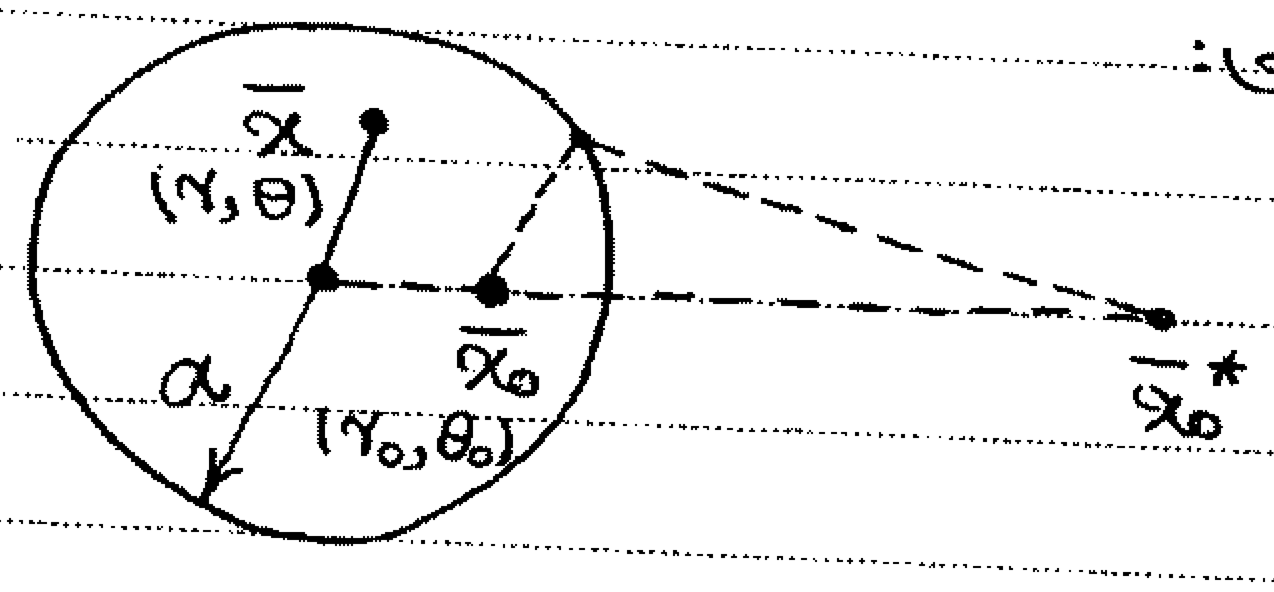
$$u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(x_0)}{(x-x_0)^2+y^2}dx_0$$



اگر قضا نامتناهی بود عبارت دوم $u(x,y)$ موجود نبود و همانطور که جواب موجود بود

Subject:
Year ...... Month ...... Date ......

حل معادله پواسون برای ناحیه دایره‌ای:



$$\nabla^2 u = f(\bar{x})$$

حل با تئوری تصویر:

$$\begin{cases} u(a,\theta) = \text{معلوم} \\ \theta-\theta_0=\varphi \end{cases}$$

حل تابع گرین مسئله:

$$\begin{cases} \nabla^2 G = \delta(\bar{x}-\bar{x}_0) \\ G\big|_{\substack{\text{روی مرز} \\ r=a}} = 0 \end{cases}$$

$$G = \frac{1}{2\pi}\ln|\bar{x}-\bar{x}_0| - \frac{1}{2\pi}\ln|\bar{x}-\bar{x}_0^*| + C$$

$$G = \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{\bar{x}-\bar{x}_0}{\bar{x}-\bar{x}_0^*}\right| + C \leftarrow$$ برای اینکه G روی مرز صفر شود

$$|\bar{x}-\bar{x}_0| = k_1|\bar{x}-\bar{x}_0^*|$$

مقدار C برحسب k_1 قابل بیان است:

$$\bar{x}_0^* = \gamma\,\bar{x}_0$$

هم راستا بودن بردارها $\bar{x}_0$ و $\bar{x}_0^*$:

«هدف صفر کردن تابع گرین روی مرز است»

$$|\bar{x}-\bar{x}_0|^2 = |\bar{x}|^2 + |\bar{x}_0|^2 - 2|\bar{x}||\bar{x}_0|\cos\varphi$$

$$|\bar{x}-\bar{x}_0^*|^2 = |\bar{x}|^2 + |\bar{x}_0^*|^2 - 2|\bar{x}||\bar{x}_0^*|\cos\varphi$$

نسبت مورد نظر باید مستقل از φ ثابت باشد:

$$a^2+r_0^2-2ar_0\cos\varphi = k\left[a^2+r_0^2\gamma^2-2a\gamma r_0\cos\varphi\right]$$

$$k_1=\frac{1}{\gamma}\ ,\ \gamma=\frac{a^2}{r_0^2} \rightarrow \bar{x}_0^* = \frac{a^2}{r_0^2}\bar{x}_0 \rightarrow |\bar{x}_0^*| = \frac{a^2}{r_0}$$

$$G = \frac{1}{4\pi}\ln\left[\frac{r_0^2(r^2+r_0^2-2rr_0\cos\varphi)}{r^2r_0^2+a^4-2rr_0a^2\cos\varphi}\right]\ ,\ \varphi=\theta-\theta_0$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

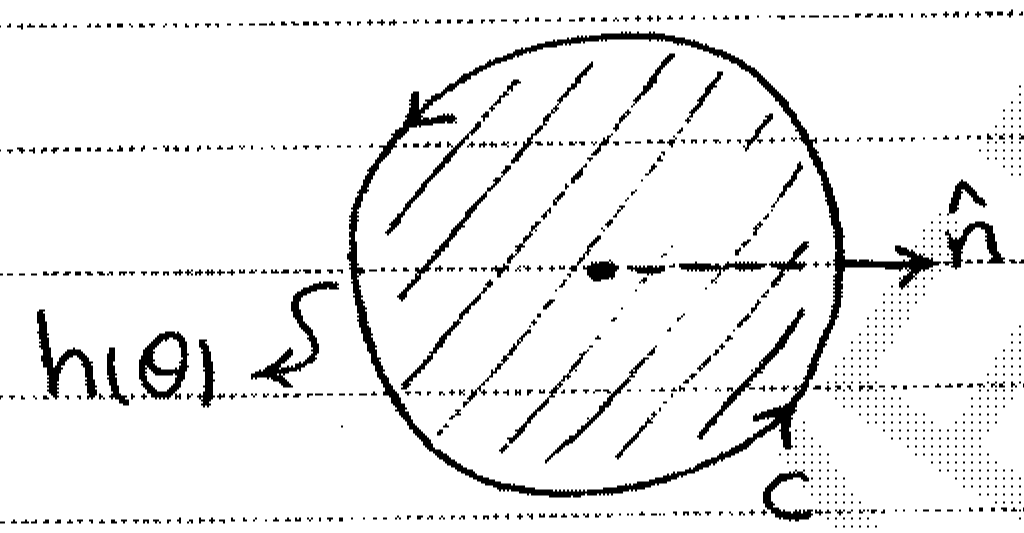
اگر شرط مرزی ما نیومان باشد شکل کلی جواب G عوض می‌شود.

ریاضی مهندسی: جلسه ۹ «۸۹/۸/۴»

تابع گرین با شرایط دیریکله: معادله پواسن

$$\nabla^2 u = f(\bar{x})$$

$$u(\bar{x}) = \iint_A f(\bar{x}_0)\, G(\bar{x},\bar{x}_0)\, dA + \oint_C \underbrace{h(\bar{x}_0)}_{\text{مقدار تابع روی مرز}}\, \nabla_{x_0} G(\bar{x},\bar{x}_0)\cdot\hat{n}\, dl$$



حالت خاص: معادله لاپلاس

$f(\bar{x}_0)\equiv 0$

$(r,\theta)\ ,\ (r_0,\theta_0) \rightarrow \theta-\theta_0=\varphi$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial r_0}\right|_{r_0=a} = \dots = \frac{a}{2\pi}\,\frac{1-(r/a)^2}{r^2+a^2-2ar\cos(\theta-\theta_0)}$$

انتگرال پواسن:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\theta)\left[\frac{a^2-r^2}{a^2+r^2-2ar\cos(\theta-\theta_0)}\right] d\theta_0$$

تابع گرین از عملگر مربوطه با شرایط مرزی خاص بدست می‌آید.

تا کنون تابع گرین داخل کره و نیم فضا را یافته‌ایم.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

کتاب: Field Theory of Guided Waves, Collin

فصل دوم در مورد تحلیل های حوزه طیفی می باشد.

قضیه ۱: اگر $G(x,x')$ تابع گرین عملگر اشتروم لیوویل باشد.

$$\mathcal{L}G + \lambda r G = -\delta(x-x')$$

در اینصورت:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C G(x,x',\lambda)\,d\lambda = -\frac{\delta(x-x')}{r(x')}$$

که C کانتوری است که تمامی تکینی های G را در بر می گیرد. کانتور (پربند)

اثبات: تابع گرین مسئله قبلاً به این صورت بدست آمده است:

$$G(x,x',\lambda) = -\sum \frac{\psi_n(x)\psi_n(x')}{\lambda-\lambda_n}$$

نقاط تکین G، λ_n ها هستند.

$$-\frac{1}{2\pi j}\sum\oint_C \frac{\psi_n(x)\psi_n(x')}{\lambda-\lambda_n}\,d\lambda = -\sum \psi_n(x)\psi_n(x')$$

حل این مسئله به کمک انتگرال های مختلط محاسبه شده است.

که طرفین رابطه روبرو را در $r(x)\psi_m(x)$ ضرب می کنیم و انتگرال می گیریم:

$$\delta(x-x') = \sum \alpha_n \psi_n(x) \rightarrow r(x')\psi_m(x') = \alpha_m$$

$$\delta(x-x') = \sum r(x')\psi_m(x)\psi_m(x') \rightarrow \frac{\delta(x-x')}{r(x')} = \sum \psi_m(x)\psi_m(x')$$

○ در مسائل پیچیده بدست آوردن جواب در حوزه طیفی بسیار پرکاربرد می‌باشد.

○ مثال:

$$\frac{d^2G}{dx^2} + \lambda G = -\delta(x-x') \quad , [0,a)$$

$$G(x,x',\lambda) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}x_< \sin\sqrt{\lambda}(a-x_>)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a}$$

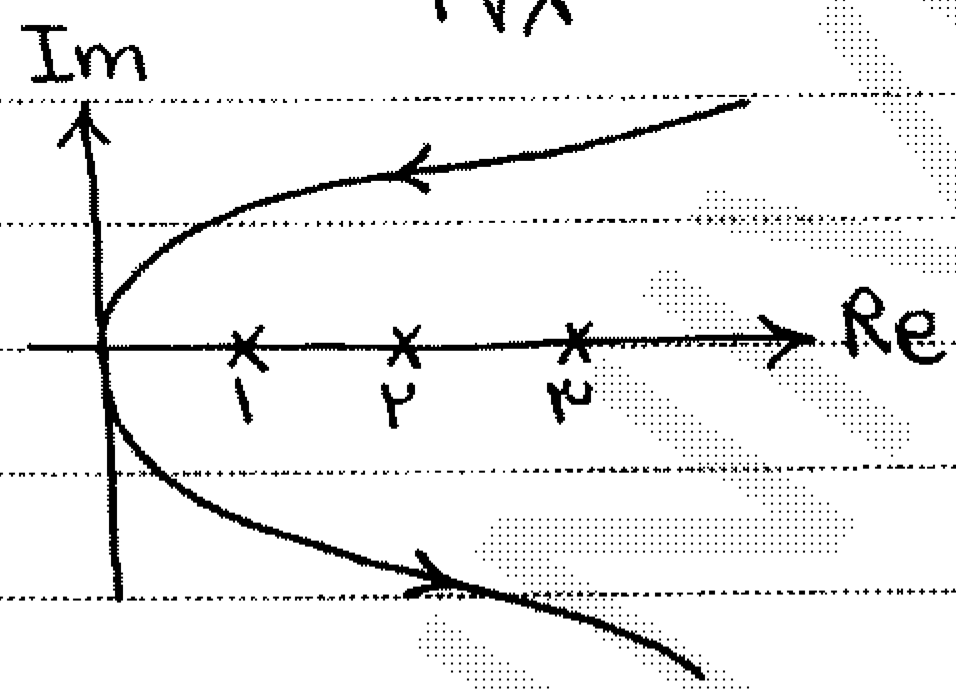
$x_<$: عدد کوچکتر بین x', x

$x_>$: عدد بزرگتر بین x', x

قطب‌های مسئله: $\lambda = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_c G\,d\lambda = \frac{1}{2\pi j}\oint_c G(x,x',\lambda)\,d\lambda = 2\pi j \times \frac{1}{2\pi j} \times \dots$$

$$\left[\sum \frac{\sin\sqrt{\lambda}x_< \sin\sqrt{\lambda}(a-x_>)}{\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}a + \frac{a}{2}\cos\sqrt{\lambda}a}\right] \qquad \lambda = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$$



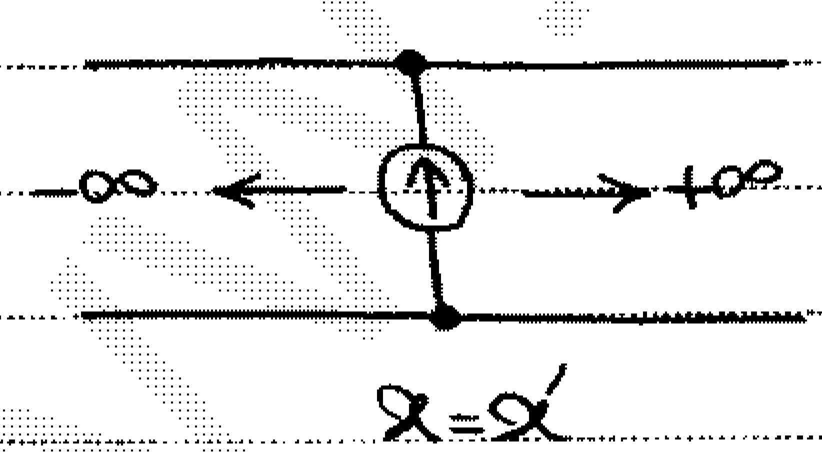
$\gamma(x)$ در اینجا ۱ است.

$$\rightarrow -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{a}\sin\frac{n\pi}{a}x' \sin\frac{n\pi}{a}x = \delta(x-x')$$

این همان تابع دلتا دیراک است.

مثال‌های کاربردی:

○ مثال از خط انتقال یک بعدی:



g_0 تابع گرین است که از دو طرف نامحدود است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\frac{d^2 g_0}{dx^2}+k^2 g_0=-\delta(x-x')$$

× خط اتصال کوتاه ($V=0$) شرط مرزی دیریکله است.

× خط مدار باز ($I=0$) که همان ($\frac{\partial V}{\partial x}=0$) است شرط مرزی نیومان است.

* روش مرسوم (Conventional Method):

$$g_0(x,x')=\begin{cases} Ae^{jkx} \rightarrow \text{outgoing} & x>x' \\ Be^{-jkx} \rightarrow \text{incoming} & x<x' \end{cases}$$

* در فیزیک فازوری $e^{j\omega t}$ به عنوان جواب فرض شده است. $e^{-j\omega t}$ وابستگی زمانی $e^{-j\omega t}$ در ریاضی و

در فیزیک و مهندسی به عنوان وابستگی زمانی جواب فرض می‌شود.

* حال شرط‌های پیوستگی و کراندار بودن مشتق مرتبهٔ اول تابع گرین را می‌نویسیم:

$$Ae^{jkx}=Be^{-jkx} \quad , \quad \left.\frac{dg_0}{dx}\right|_{x'_-}^{x'_+}=-1$$

$$g_0(x,x')=\frac{j}{2k}e^{jk|x-x'|} \leftarrow \text{جواب به این صورت است}$$

* روش Ohm_Rayleigh: این روش جواب را به صورت طیفی می‌دهد

جواب را بر حسب توابع ویژهٔ مسئله فرض می‌کنیم:

× تصادفاً حل این مسئله مشابه تبدیل فوریه شده است و نباید اشتباه شود که این همان مسئله تبدیل فوریه است. در این روش ما توابع ویژهٔ مسئله را می‌یابیم و به کمک آنها مسئله را حل می‌کنیم.

بسط جواب g_0 به کمک توابع ویژه صورت می‌گیرد: $\rightarrow$

$$g_0=\int_{-\infty}^{+\infty} Be^{j\lambda x}\,d\lambda$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\delta(x-x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\lambda(x-x')}\,d\lambda$$

بسط تابع $\delta(x-x')$ به کمک توابع ویژه صورت می‌گیرد.

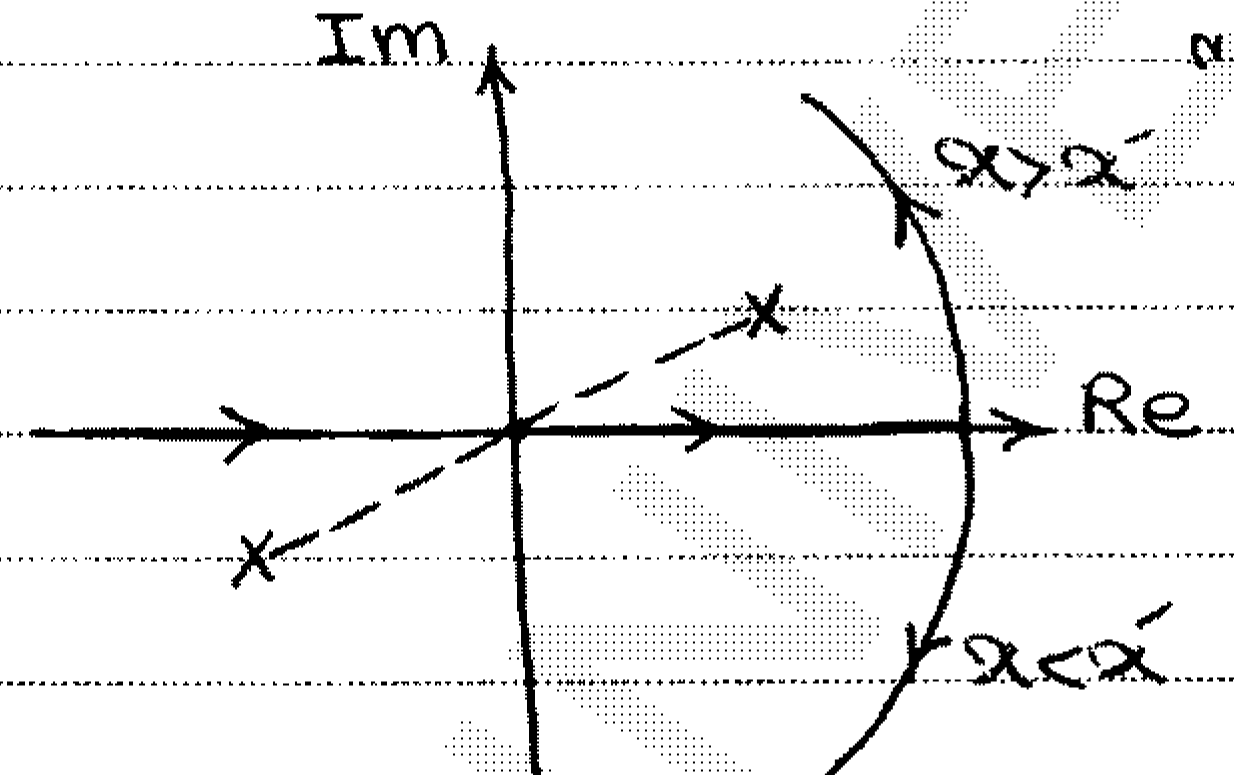
عبارت‌ها بالا را در مسئله قرار می‌دهیم و مجهول B را می‌یابیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} -\lambda^2 B e^{j\lambda x}\,d\lambda + \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 B e^{j\lambda x}\,dx = \text{طرف دوم}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B(k^2-\lambda^2) e^{j\lambda x}\,d\lambda = \text{طرف دوم} \rightarrow B = \frac{e^{-j\lambda x'}}{2\pi(\lambda^2-k^2)}$$

$$\rightarrow g_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\lambda(x-x')}}{2\pi(\lambda^2-k^2)}\,d\lambda$$

این روش حل را روش حل فرم طیفی می‌گوییم.
«Spectral Solution»



$\lambda = \pm k$

اگر تلف داشته باشیم k های ما یک ترم مختلط دارند.

$$g_0 = 2\pi j \times \left[\frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{jk(x-x')}}{2k}\right] \qquad x>x'$$

$$\rightarrow g_0 = \frac{j}{2k}\,e^{jk(x-x')} \qquad x>x'$$

برای $x<x'$ هم به همین ترتیب به جواب می‌رسیم.

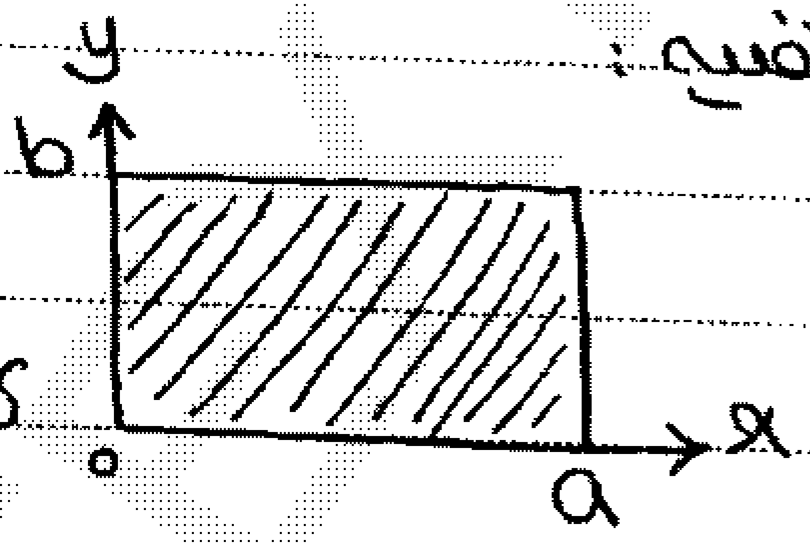
Subject:
Year. Month. Date. ( )

در روش دوم که همان روش طیفی موسوم است تابع گرین را برحسب توابع ویژه بسط می‌دهند.

Eigen function Expansion

توضیح:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}=-\delta(x-x')\delta(y-y')$$



با روش جداسازی متغیرها مسئله را به دو ناحیه بدل می‌کنیم:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\mathcal{L}_x\ ,\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}=\mathcal{L}_y\ ,\ \nabla^2=\mathcal{L}$$

برای یافتن تابع گرین باید این مسئله را حل کنیم و نشان می‌دهیم از حل این مسائل یک بعدی به کمک رابطه‌های پایین می‌توان تابع گرین مسئله ۲ بعدی را یافت.

$$\begin{cases}\mathcal{L}_x G_x+\lambda_x G_x=-\delta(x-x')\\ \mathcal{L}_y G_y+\lambda_y G_y=-\delta(y-y')\end{cases}$$

برای یافتن توابع ویژه باید این دو معادله را حل کنیم:

$$\begin{cases}\mathcal{L}_x \psi_x+\lambda_x \psi_x=0\\ \mathcal{L}_y \psi_y+\lambda_y \psi_y=0\end{cases}$$

$$\lambda_x=-\lambda_y \rightarrow \mathcal{L}=\mathcal{L}_x+\lambda_x+\mathcal{L}_y+\lambda_y$$

$$G(x,y,x',y')=\frac{-1}{2\pi j}\oint_{C_x} G_x(x,x',\lambda_x)\,G_y(y,y',\underbrace{\lambda_y}_{-\lambda_x})\,d\lambda_x=\dots$$

تمام تکینی‌ها G_x را دور بزند و تکینی‌ها G_y را نداشته باشد.

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$= \frac{-1}{2\pi j} \oint_{C_y} G_x(x, x', \underbrace{\lambda_x}_{-\lambda_y}) G_y(y, y', \lambda_y)\, d\lambda_y$$

$G_x|_{x=0,a} = 0 \quad \& \quad G_y|_{y=0,b} = 0$

شرط‌های مرزی تابع گرین عین شرط‌های مرزی مسئله اصلی است ← شرط دیریکله

نشان می‌دهیم که G داده شده در معادله اصلی صدق می‌کند

$$\mathcal{L} G = (\mathcal{L}_x + \lambda_x + \mathcal{L}_y + \lambda_y)\left(\frac{-1}{2\pi j} \oint_{C_x} G_x G_y\, d\lambda_x\right) = \ldots$$

$$= \frac{-1}{2\pi j} \oint_{C_x} (\mathcal{L}_x + \lambda_x + \mathcal{L}_y + \lambda_y) G_x G_y\, d\lambda_x = \ldots$$

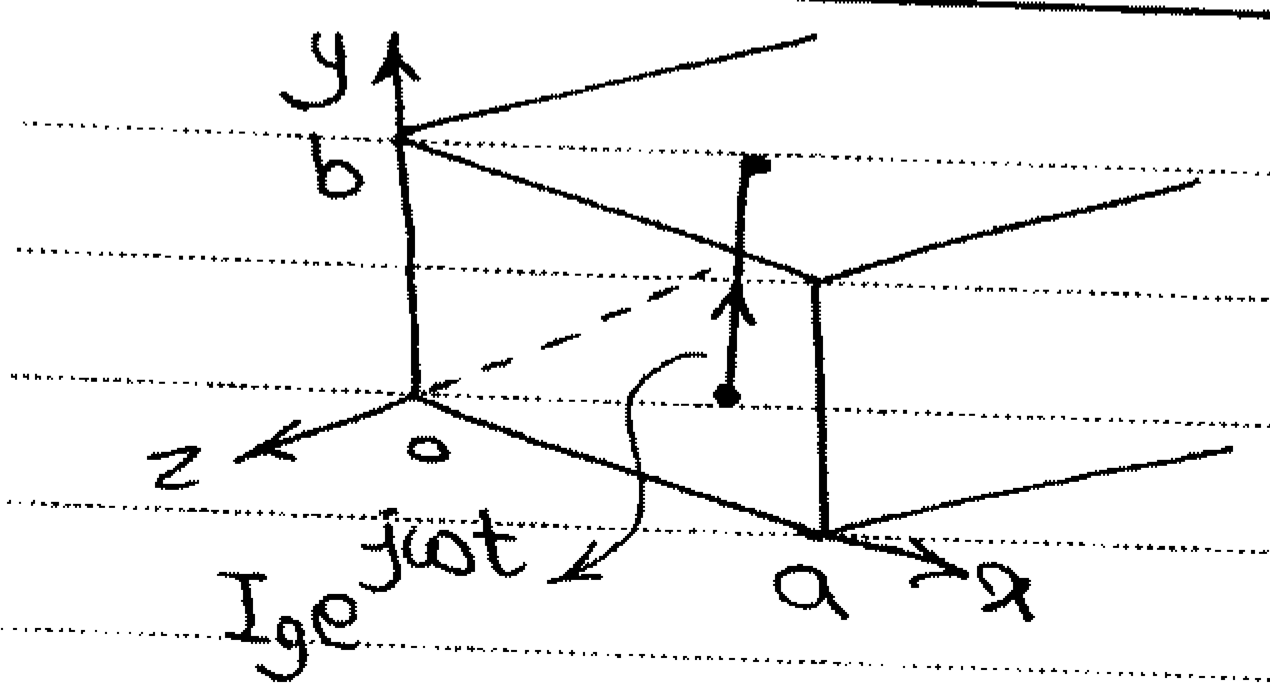
$$= \frac{-1}{2\pi j} \oint_{C_x} [-\cancel{\delta(x-x') G_y}_{\,0} - \delta(y-y') G_x]\, d\lambda_x = \ldots$$

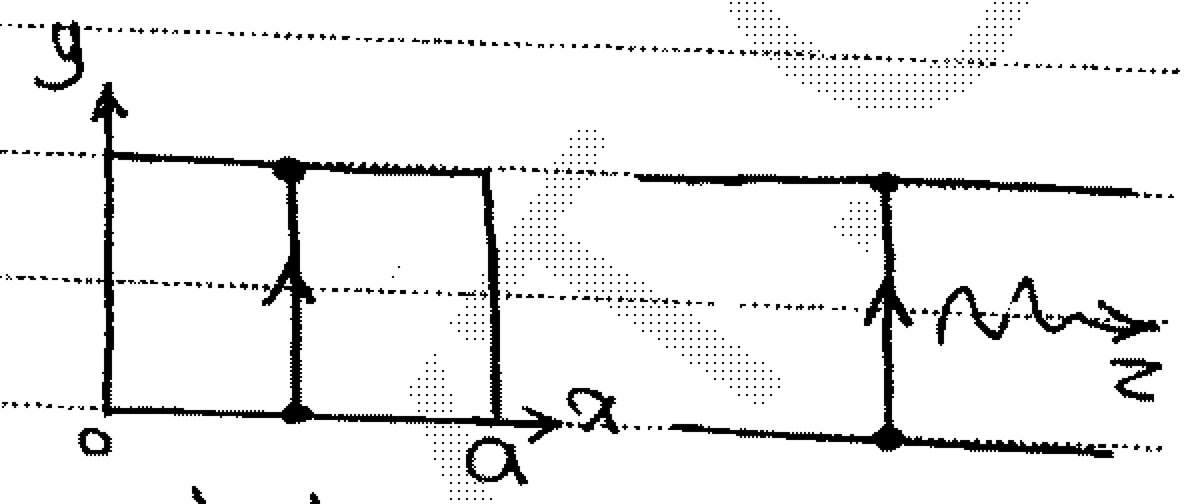
چون C_x فقط تکینی‌های G_x را دور می‌زند.

$$= \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_x} G_x(x, x', \lambda_x)\, \delta(y-y')\, d\lambda_x = \ldots$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \delta(y-y') \oint_{C_x} G_x(x, x', \lambda_x)\, d\lambda_x = -\delta(x-x')\,\delta(y-y')$$

مثال از موجبرها:





مدلسازی منابع الکترومغناطیسی در فصل ۲ مرجع [1] آمده است.

که تبدیل به معادله اسکالر: $\vec{A} = A_y\hat{y} = \psi\hat{y}$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_0^2\right)\psi = -\underline{\mu_0 I_g}\,\delta(x-x')\,\delta(y-y')$$

«می‌توان این را $\perp$ فرض کرد و مسئله را حل کرد.»

دو معادله تفکیک شده

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 G_x}{\partial x^2}+\lambda_x G_x = -\delta(x-x') \quad , \quad G_x\big|_{x=0,a}=0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 G_z}{\partial z^2}+\lambda_z G_z = -\delta(z-z') \end{cases}$$

و در شرط تابش از $-\infty$ تا $+\infty$ صدق کند زیرا موجبر نامحدود است.

«$\lambda_x+\lambda_z=k_0^2$»،

$$G_x = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{a}\,\frac{\sin(\frac{n\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{a}x')}{\lambda_x-(\frac{n\pi}{a})^2}$$

که به کمک تبدیل فوریه حل می‌کنیم:

$$G_z = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\hat{G}_z(\beta)}_{\text{تبدیل فوریه}}\,e^{-j\beta z}\,d\beta = \dots$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

یکبار از طرف بالا و یکبار از طرف پایین انتگرال مختلط می گیریم و جواب مسئله را می یابیم:

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-j\beta(z-z')}}{\underbrace{\beta^2-\lambda_z}_{(\beta-\sqrt{\lambda_z})(\beta+\sqrt{\lambda_z})}} d\beta$$

بازرسیدن ← به پاسخ G از قضیه صفحه ۹۷ یا ۹۸ استفاده کرد.

$$G = \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{a}x')}{\sqrt{\underbrace{(\frac{n\pi}{a})^2-k_0^2}_{\lambda_n}}} e^{-\Gamma_n|z-z'|}$$

«حل انتگرال در صفحه ۸۵ کتاب Collin»

$$\Gamma_n = \sqrt{(\frac{n\pi}{a})^2-k_0^2} \quad , \quad Im\{\Gamma_n\}>0$$

۞ ریاضی مهندسی: جلسه ۱۵ «۸۶/۸/۱۹»

۞ منابع الکترومغناطیسی: «فصل ۴ کتاب Dudley»

⊛ مختصات دکارتی:

$$\delta(\bar{x}-\bar{x}') = \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')$$

⊛ مختصات استوانه‌ای: (استوانه‌ای دو بعدی)

$$f(r,\varphi)\delta(r-r')\delta(\varphi-\varphi') = \frac{1}{r}\delta(r-r')\delta(\varphi-\varphi')$$

$$\int \frac{\delta(r-r')\delta(\varphi-\varphi')}{r} r\,dr\,d\varphi = 1$$

«Weighted Dirac-Delta function»

۞ اگر منبع در مبدأ باشد برای مختصات استوانه‌ای تقارن نسبت به φ داریم:

$$\to \frac{\delta(r)}{2\pi r}$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date

⊛ در حالت سه بعدی: $\dfrac{\delta(r-r')\,\delta(\varphi-\varphi')\,\delta(z-z')}{r}$

⊛ منبع روی محور z: $\dfrac{\delta(r)\,\delta(z-z')}{2\pi r}$

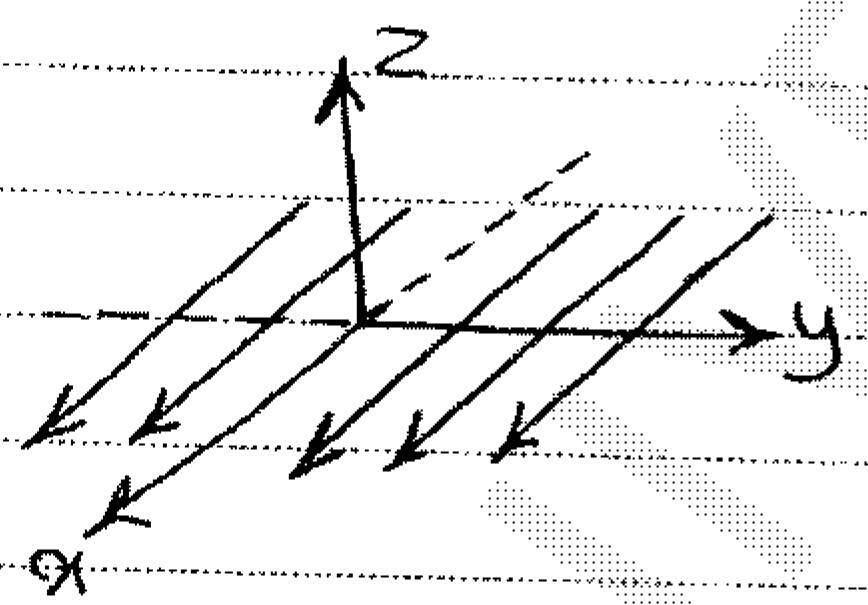
⊛ منبع روی مبدا باشد: $\dfrac{\delta(r)\,\delta(z)}{2\pi r}$

⊛ مختصات کروی: $\dfrac{\delta(R-R')\,\delta(\theta-\theta')\,\delta(\varphi-\varphi')}{R^2\sin\theta}$

⊛ منبع روی مبدا باشد: $\dfrac{\delta(R)}{4\pi R^2}$

⊛ منبع روی محور z باشد: $\dfrac{\delta(R-R')\,\delta(\theta)}{2\pi R^2\sin\theta}$

⊛ منبع صفحه‌ای:



$\vec{J}=\hat{x}\,J_0\,\delta(z)$

$\vec{E}(x,y,z)\,,\,\vec{H}(x,y,z) \longrightarrow$ ⊛ E_x و H_y فقط داریم

$$\begin{cases}\vec{\nabla}\times\vec{E}=-j\omega\mu\vec{H}\\ \vec{\nabla}\times\vec{H}=j\omega\varepsilon\vec{E}+\vec{J}\end{cases}$$

$\dfrac{\partial}{\partial x}=0\ ,\ \dfrac{\partial}{\partial y}=0$

«این منبع در بالا آمده است.»

(I) $-\dfrac{dH_y}{dz}=J_0\,\delta(z)+j\omega\varepsilon E_x\ ,\ \dfrac{dH_x}{dz}=j\omega\varepsilon E_y$ (II)

(III) $0 = j\omega\varepsilon E_z \rightarrow E_z = 0$

(IV) $\frac{dE_y}{dz} = j\omega\mu H_x$, $\frac{dE_x}{dz} = -j\omega\mu H_y$ (V)

(VI) $0 = j\omega\mu H_z \rightarrow H_z = 0$

✓ در روابط بالا (II) و (IV) معادلاتی همگن بدون منبع هستند از این رو هیچ تحریکی ندارند و جواب آن‌ها صفر است: $E_y = H_x = 0$

● در روابط بالا تنها E_x و H_y باقی مانده‌اند پس:

$$\frac{d^2E_x}{dz^2} + k^2E_x = j\omega\mu J_0\,\delta(z)$$

مسئله تابع گرین

● با حل مسئله روبرو با یک ضریب ثابت مسئله اصلی حل می‌شود.

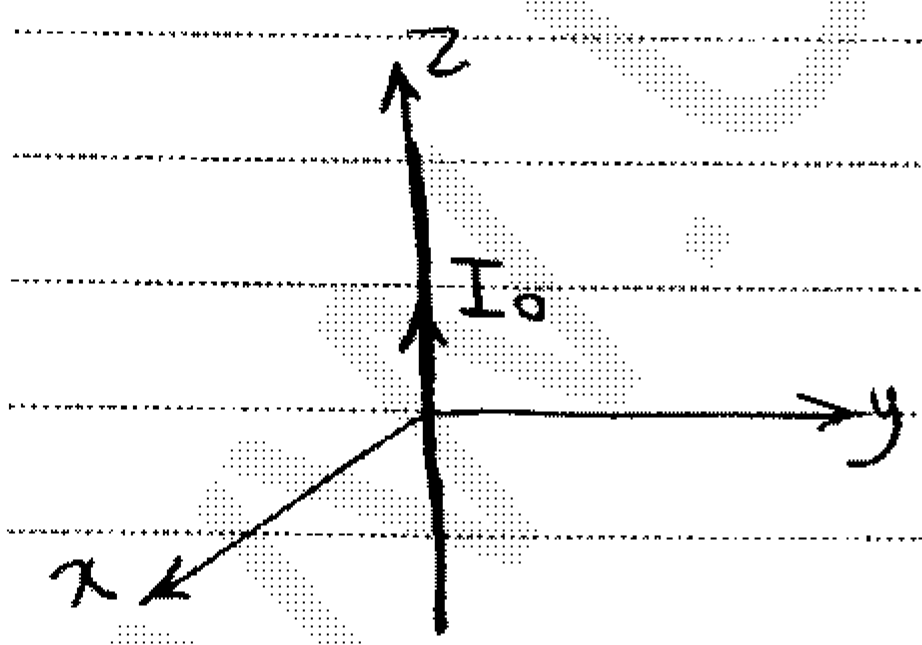
$$\frac{d^2g}{dz^2} + k^2g = -\delta(z)$$

$$g(z,0) = \frac{e^{-jk|z|}}{2jk} \ , \ \mathrm{Im}\{k\} < 0 \leftarrow e^{j\omega t} \text{ قرارداد}$$

به کمک تبدیل فوریه به فرم انتگرالی جواب می‌رسیم که با انتگرال گیری مختلط به فرم بالا می‌رسیم

$$g(z,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e^{j\beta z}}{\beta^2 - k^2}\right)d\beta$$

● منبع خطی (Line Source):



$$\vec{J} = I_0\,\delta(x)\,\delta(y)\,\hat{z}$$

$$\vec{J} = I_0\,\frac{\delta(r)}{2\pi r}\,\hat{z}$$

به دلیل تقارن اثر φ حذف می‌شود.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

∗ به دلیل تقارن $\frac{\partial}{\partial\varphi}=0, \frac{\partial}{\partial z}=0$ ؛ (H_x, H_y, E_z) , (H_φ, E_z)

$$\text{I}\quad \frac{dH_z}{dr} = -j\omega\varepsilon E_\varphi$$

$$\text{II}\quad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rE_\varphi) = -j\omega\mu H_z$$

∗ معادلات I و II چون منبع ندارند و کوپلینگ هم با سایر معادله‌ها ندارند از این رو $E_\varphi=H_z=0$

$$\text{III}\quad \frac{dE_z}{dr} = j\omega\mu H_\varphi$$

$$\text{IV}\quad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rH_\varphi) = J_z + j\omega\varepsilon E_z$$

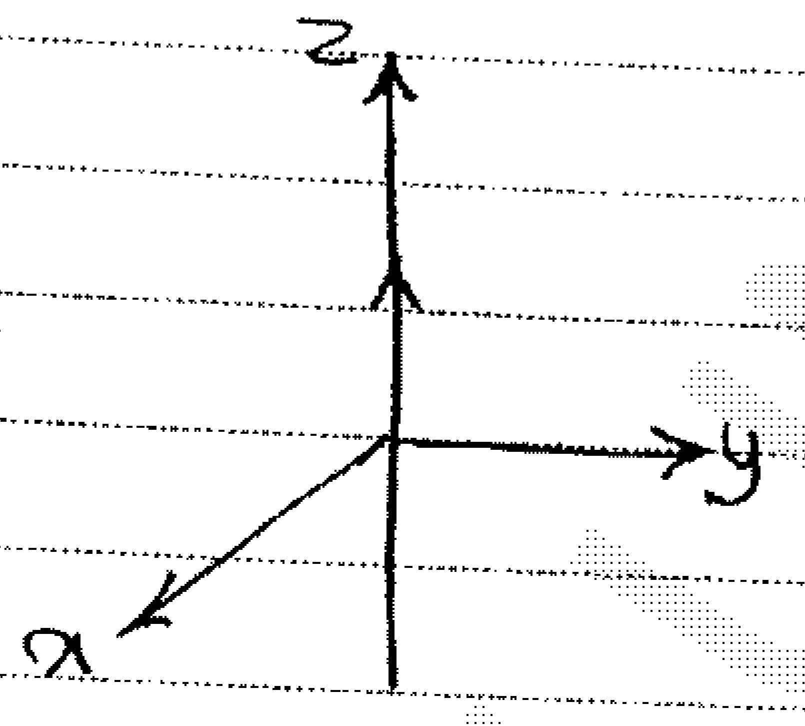
$E_r=0$ ، $H_r=0$

∗ مختصات استوانه‌ای:

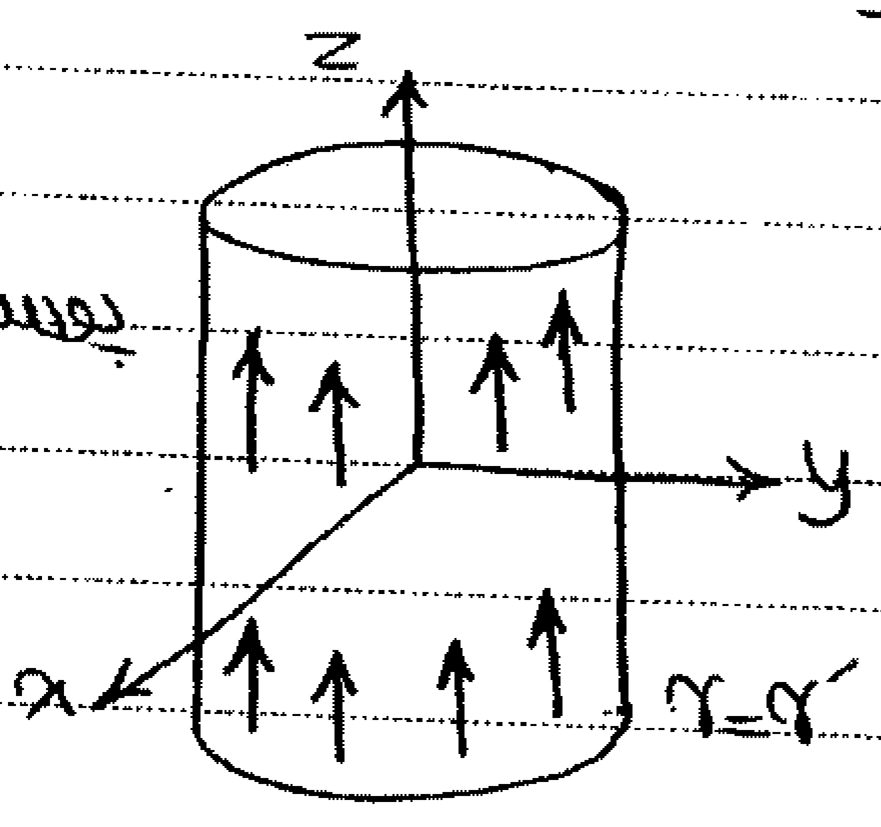
$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dE_z}{dr}\right)+k^2E_z = j\omega\mu\frac{I_0\,\delta(r)}{2\pi r}$$

∗ تابع گرین مسئله ←

$$\rightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dg}{dr}\right)+k^2g = -\frac{\delta(r)}{r}$$



پوسته استوانه‌ای



∗ حل مسئله پوسته استوانه‌ای:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dg}{dr}\right)+k^2g = -\frac{\delta(r-r')}{r}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ابتدا مسئله را برای حالت ممکن حل می‌کنیم:

$$g=\begin{cases} AJ_0(kr)+B\cancel{N_0}(kr) & r<r' \\ CH_0^{(2)}(kr)+D\cancel{H_0^{(1)}}(kr) & r>r' \end{cases}$$

کراندار نیست

incoming wave

$J(x)$، $N(x)$، $H^{(1)}(x)$ و $H^{(2)}(x)$ جوابهای معادله بسل هستند که هرکدام درجای خود کاربرد دارد.

$H^{(2)}(x)=J(x)-jN(x) \rightarrow$ outgoing wave

$H^{(1)}(x)=J(x)+jN(x) \rightarrow$ incoming wave

$J(x)$ و $N(x) \rightarrow$ در حل مسائل با فضای محدود کاربرد دارند

$J(x)$ و $N(x)$ مثل توابع $\sin x$ و $\cos x$ ولی در دستگاه استوانه‌ای هستند.

$H^{(1)}(x)$ و $H^{(2)}(x)$ مثل توابع e^{jkx} و e^{-jkx} ولی در دستگاه استوانه‌ای هستند.

به دلیل تقارن تابع گرین داریم:

$$g=D\begin{cases} J_0(kr)H_0^{(2)}(kr') & r<r' \\ J_0(kr')H_0^{(2)}(kr) & r>r' \end{cases}$$

مجهول D را توسط منبع می‌یابیم:

$$D=\frac{2\pi}{j}$$

$$E_z=\frac{-\omega\mu I_0}{k}\begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases}$$

برای سیم که معادل $r'=0$ است داریم:

$$g(r,0)=\frac{\pi}{2j}H_0^{(2)}(kr)$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حل به کمک تبدیل فوریهٔ بسل (تبدیل هنکل):

$$F(\lambda)=\int_0^\infty f(r)\,J_0(\lambda r)\,r\,dr$$

روابط تبدیل فوریه بسل

$$f(r)=\int_0^\infty F(\lambda)\,J_0(\lambda r)\,\lambda\,d\lambda$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dg}{dr}\right)+k^2 g=-\frac{\delta(r-r')}{r} \leftarrow \text{معادلهٔ تابع گرین}$$

$$\frac{\delta(r-r')}{r}=\int_0^\infty A(\lambda)\,J_0(\lambda r)\,\lambda\,d\lambda \quad \text{و} \quad A(\lambda)=J_0(\lambda r')$$

$$\mathcal{H}\,(\text{طرف اول}) \rightarrow -\lambda^2 G(\lambda)+k^2 G(\lambda)=\text{طرف دوم}$$

$$\rightarrow G(\lambda,r')=\frac{J_0(\lambda r')}{\lambda^2-k^2}$$

$$\rightarrow g(r,r')=\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r')\,J_0(\lambda r)}{\lambda^2-k^2}\,\lambda\,d\lambda$$

مقایسه با جواب قبلی:

$$H_0^{(2)}(kr)=\frac{2}{\pi}j\int_0^\infty\left[\frac{J_0(\lambda r)}{\lambda^2-k^2}\right]\lambda\,d\lambda \qquad (\text{اگر } r'=0 \text{ باشد})$$

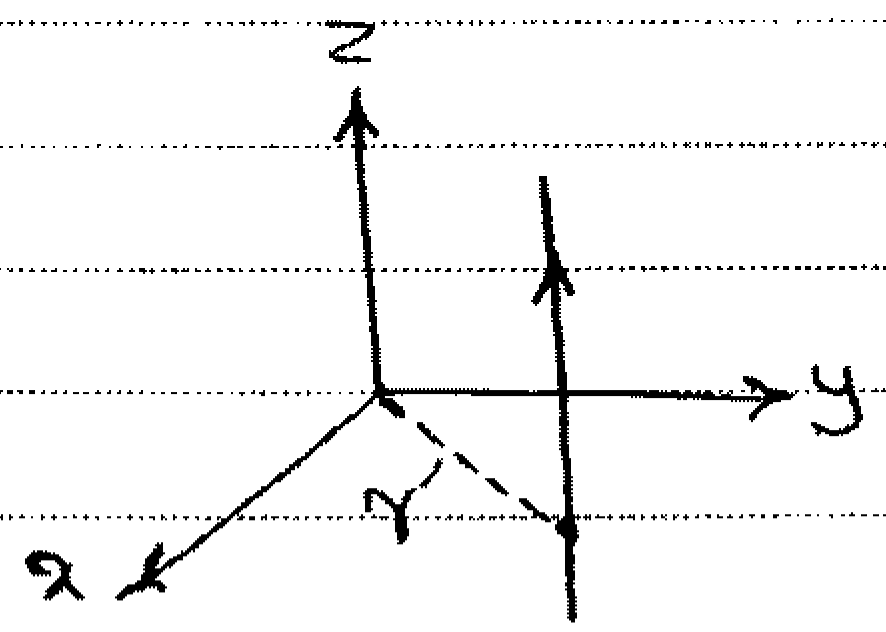
$$\frac{1}{\lambda^2-k^2}=\frac{\pi}{2j}\int_0^\infty H_0^{(2)}(kr)\,J_0(kr)\,r\,dr$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

توابع بسل و هنکل در کتاب Watson به خوبی توضیح داده شده‌اند.

در مختصات دکارتی:



$$\frac{\partial}{\partial z}=0$$

E_z و H_x و H_y موجود هستند و E_x و E_y و H_z حذف می‌شوند.

مود TE به دلیل نبود منبع وجود ندارد.

TM
$$\frac{\partial E_z}{\partial y}=-j\omega\mu H_x$$
$$\frac{\partial E_z}{\partial x}=j\omega\mu H_y$$

TE
$$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-j\omega\mu H_z$$
$$\frac{\partial H_z}{\partial y}=j\omega\varepsilon E_x$$
$$\frac{\partial H_z}{\partial x}=-j\omega\varepsilon E_y$$

TM
$$\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=I\,\underset{(x-x')}{\delta(x)}\,\underset{(y-y')}{\delta(y)}+j\omega\varepsilon E_z$$

برای مد TM:

$$\underbrace{\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}}_{\vec{\nabla}^2 E_z}+k^2E_z=j\omega\mu I_0\,\delta(x)\,\delta(y)$$

«منبع روی محور z»

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تبدیل فوریه نسبت به x:

$$\frac{d^2\hat{E}_z}{dy^2}+(\underbrace{k^2-k_x^2}_{k_y^2})\hat{E}_z=j\omega\mu I_0\delta(y)$$

$$E_z=-\frac{\omega\mu I_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-jk_y|y|}}{k_y}e^{jk_x x}\,dk_x$$

راه دوم: یکبار نسبت به x تبدیل فوریه بگیریم و یکبار نسبت به y و معادله را کلاً به فرم جبری تبدیل کنیم. سپس با ۲ بار عکس فوریه گرفتن به جواب برسیم. هر راه یک فرم برای تابع گرین ارائه می دهد.

$$H_0^{(2)}(k\sqrt{x^2+y^2})=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-j\sqrt{k^2-k_x^2}|y|}}{\sqrt{k^2-k_x^2}}e^{jk_x x}\,dk_x$$

تبدیل فوریه نسبت به x و y:

$$\tilde{E}_z=\frac{j\omega\mu I_0}{k^2-k_x^2-k_y^2}$$

$$E_z=j\omega\mu I_0\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{j(k_x x+k_y y)}}{k^2-k_x^2-k_y^2}\,dk_x\,dk_y$$

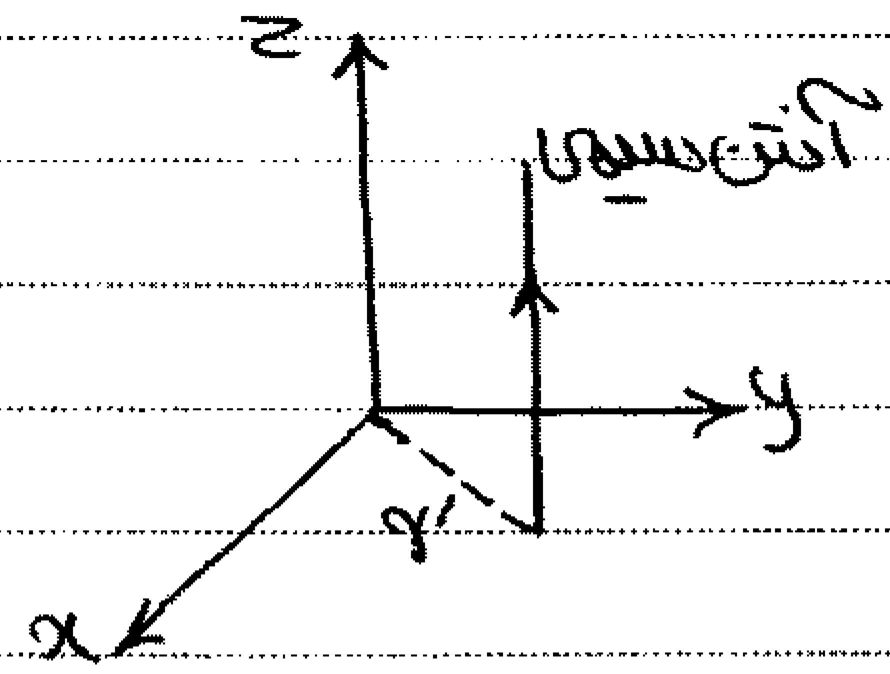
فرم دیگری برای تابع هنکل:

$$H_0^{(2)}(k\sqrt{x^2+y^2})=\frac{1}{j\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{j(k_x x+k_y y)}}{k^2-k_x^2-k_y^2}\,dk_x\,dk_y$$

PAPCO

خیلی از این مزم ها انتگرالی در مسائل Scattering مطرح هستند.

ریاضی مهندسی: جلسه ۱۱ «۸۹/۸/۹»



$$\bar{\nabla}^2 G + k_0^2 G = \delta(\bar{\gamma} - \bar{\gamma}') = \frac{\delta(\gamma-\gamma')\delta(\varphi-\varphi')}{\gamma}$$

$$\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\gamma\frac{\partial G}{\partial\gamma}\right) + \frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial^2 G}{\partial\varphi^2} = \nabla^2 G$$

یک انتخاب برای جواب می کنیم:

$$G = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_m(\gamma,\gamma',\varphi,\varphi')\, e^{jm\varphi}$$

« $e^{\pm jm\varphi}$ توابع ویژه مسئله هستند.»

با جایگذاری داریم:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma} - \frac{m^2}{\gamma^2} + k_0^2\right) g_m e^{jm\varphi} = \frac{\delta(\gamma-\gamma')\delta(\varphi-\varphi')}{\gamma}$$

طرفین را در $e^{-jm\varphi}$ ضرب می کنیم و انتگرال گیری می کنیم (به یک معادله از نوع اشتروم - لیوویل می رسیم که با روش های مختلف قابل حل است.)

$$\gamma\frac{d^2 g_m}{d\gamma^2} + \frac{dg_m}{d\gamma} + \left(\gamma k_0^2 - \frac{m^2}{\gamma}\right) g_m = \frac{e^{-jm\varphi'}}{2\pi}\,\delta(\gamma-\gamma')$$

معادله بالا از نوع بسل است: در مبدأ کراندار نیست

$$\begin{cases} g_m^{(1)} = A_m J_m(k_0\gamma) + B_m \cancel{Y_m}(k_0\gamma) & \gamma<\gamma' \\ g_m^{(2)} = C_m \cancel{H_m^{(1)}}(k_0\gamma) + D_m H_m^{(2)}(k_0\gamma) & \gamma>\gamma' \end{cases}$$

موج برگشتی

● با تشکیل $W(r')$ مسئله در حالت کلی قابل حل است:

$$W(r') = -jk_0 A_m D_m \left[J_m(k_0 r) H_m^{(2)}(k_0 r') - J_m(k_0 r') H_m^{(2)}(k_0 r) \right]$$

$$g(r, r', \varphi') = \begin{cases} J_m(k_0 r) H_m^{(2)}(k_0 r') e^{-jm\varphi'} & r < r' \\ J_m(k_0 r') H_m^{(2)}(k_0 r) e^{-jm\varphi'} & r > r' \end{cases}$$

$$G(r, r', \varphi, \varphi') = \sum g_m e^{jm\varphi}$$

● میدان برای منبع خطی روی محور z:

$$E_z = -\frac{\omega_0 \mu_0 I_0}{4} H_0^{(2)}(k_0 r) \quad , \quad G = \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k_0 r)$$

این علامت منفی اگر از δ استفاده کنیم بدست می‌آید.

اگر منبع خطی روی محور نباشد آنگاه: (منبع در محل r' است)

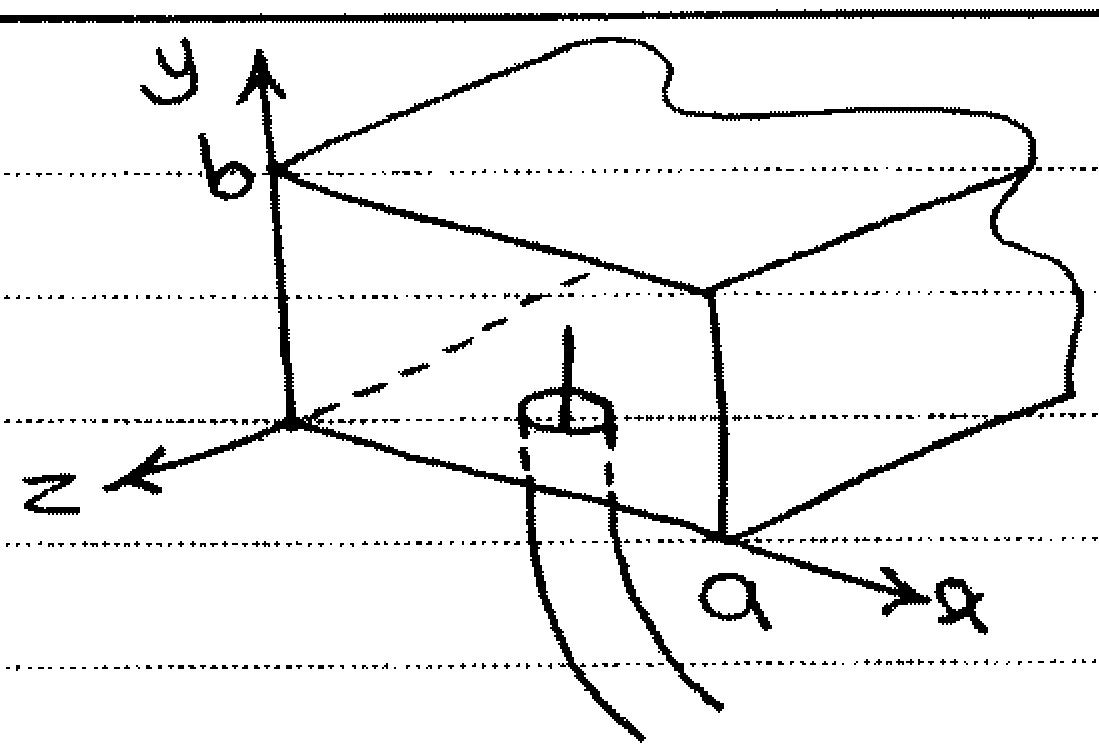
$$G = \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k_0 |\bar{r} - \bar{r}'|)$$

با یکسان قراردادن جواب‌ها داریم:

$$H_0^{(2)}(k_0 |\bar{r} - \bar{r}'|) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_n^{(2)}(k_0 r') J_n(k_0 r) e^{jn(\varphi - \varphi')} & r < r' \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_n^{(2)}(k_0 r) J_n(k_0 r') e^{jn(\varphi - \varphi')} & r > r' \end{cases}$$

«Addition Theorem for Bessel Functions»

Subject:
Year. Month. Date. ( )



مثال از موجبر مستطیلی:

توابعی که در شرایط مرزی صدق می‌کنند:
$$\begin{cases} \sin \frac{m\pi}{a}x \\ \sin \frac{n\pi}{b}y \end{cases}$$

$$\bar{\nabla}^2 \bar{E} + k_0^2 \bar{E} = j\omega\mu \bar{J}$$

$$\bar{\nabla}^2 G + k_0^2 G = \delta(x-x')\,\delta(y-y')\,\delta(z-z')$$

$$G = \sum\sum g_{mn}(x, x', y, y', z, z') \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$\sum\sum \left[-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + k_0^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] g_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

از جایگذاری G در معادله داریم: طرف دوم = ...

برای تبدیل مسئله به یک مسئله یک بعدی طرفین رابطه را در $\sin\left(\frac{p\pi}{a}x\right)$ و $\sin\left(\frac{q\pi}{b}y\right)$ ضرب می‌کنیم و انتگرال می‌گیریم:

مرجع این جلسه فصل ۱۴ کتاب ← Adv. EM, Balanise

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k_z^2\right) g_{mn} = \frac{4}{ab} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x'\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y'\right) \delta(z-z')$$

جواب مسئله را چون از ۲ طرف به ∞ می‌رود را به صورت $e^{\pm jk_z z}$ در نظر می‌گیریم.

PAPCO

$$\begin{cases} g_{mn}^{(1)} = A_m e^{jk_z z} & z<z' \\ g_{mn}^{(2)} = B_m e^{-jk_z z} & z>z' \end{cases}$$

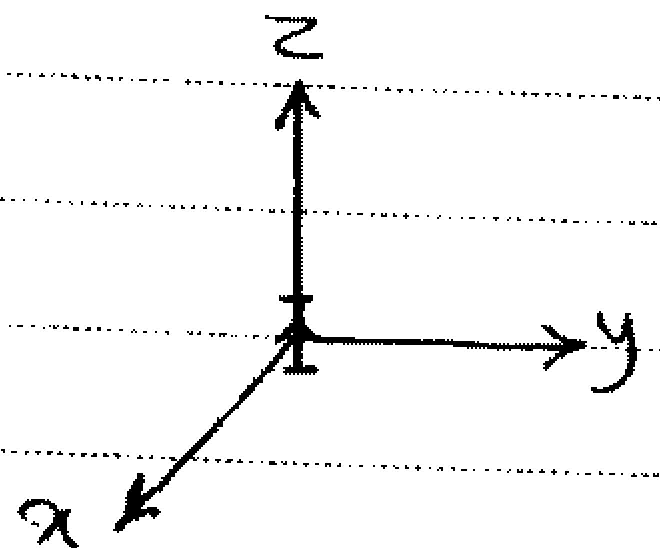
پاسخ نهایی مسئله:

$$g_{mn} = \frac{2j}{ab}\left[\frac{\sin(\frac{m\pi}{a}x')\sin(\frac{n\pi}{b}y')}{k_z}\right] e^{-jk_z|z-z'|}$$

$$G = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} g_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

تقارن مسئله نسبت به متغیرهای x و x' و y و y' معلوم است.

منبع نقطه‌ای در مبدأ:



$$(\nabla^2 + k^2)g = -\delta(\bar{R}-\bar{R}')$$

پاسخ: $\dfrac{e^{-jkr}}{4\pi r}$

مسئله را در مختصات دکارتی حل می‌کنیم. با تبدیل فوریه گرفتن به این جواب می‌رسیم:

$$\hat{G} = \frac{-1}{k^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2}$$

$$G = \frac{-1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j(k_x x + k_y y + k_z z)}}{k^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2}\, dk_x\, dk_y\, dk_z$$

یک راه حل این است که ۲ بار تبدیل فوریه بگیریم و معادله‌ی باقیمانده را حل کنیم.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}+k^2\right)\hat{G}=-\delta(z-z')$$

$$\hat{G}=\frac{e^{-jk|z|}}{2jk} \rightarrow G=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-jk|z|}}{2jk}e^{j(k_x x+k_y y)}dk_x dk_y$$

چون منبع در مبدأ است
$z'=0$

این‌ها همگی شکل‌های مختلف جواب یک مسئله هستند.

⊛ در دستگاه مختصات استوانه‌ای: فصل ۴ کتاب Dudley

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial G}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}+k^2 G=-\frac{\delta(r)\delta(z)}{2\pi r}$$

از تبدیل فوریهٔ بسل کمک می‌گیریم:

۱. تبدیل فوریه بسل نسبت به r:

$$\frac{d^2\tilde{G}}{dz^2}+(\underbrace{k^2-\lambda^2}_{\Gamma^2})\tilde{G}=-\frac{\delta(z)}{2\pi}$$

$$2\pi\tilde{G}=\frac{e^{-j\Gamma z}}{2j\Gamma} \rightarrow G(r,z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-j|\Gamma|z}}{2j\Gamma}J_0(\lambda r)\lambda d\lambda$$

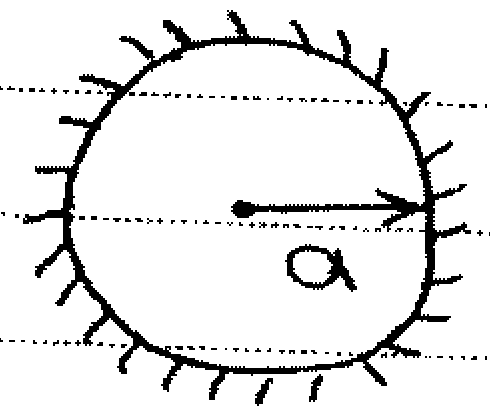
تبدیل فوریهٔ بسل

۲. تبدیل فوریه‌بسل نسبت به z:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\hat{G}}{\partial r}\right)+(\underbrace{k^2-k_z^2}_{\tau^2})\hat{G}=-\frac{\delta(r)}{2\pi r}$$

$$2\pi\hat{G}=\frac{\pi}{2j}H_0^{(2)}(\tau r) \rightarrow G(r,z)=\frac{1}{8\pi j}\int_{-\infty}^{+\infty}H_0^{(2)}(\tau r)e^{jk_z z}dk_z$$

این ها همه فرم های مختلف جواب برای تابع گرین هستند.



* تابع گرین در مختصات کروی:

$$\nabla^2 G + k^2 G = \delta(\bar{R} - \bar{R}') \qquad G\Big|_{\text{مرز}} = 0$$

«شرط دیریکله»

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial G}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial G}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 G}{\partial\varphi^2}\ldots$$

$$\ldots + k^2 G = \delta(\bar{R} - \bar{R}')$$

توابع ویژه: $\varphi: e^{\pm jm\varphi}$

θ: لژاندر وابسته

r: j_n توابع بسل کروی که با (حروف کوچک) نشان داده می شوند

$$G(\bar{R}\,\bar{R}') = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} g_{mn}(r, r', \theta', \varphi')\, \underbrace{P_n^m(\cos\theta)\, e^{jm\varphi}}_{T_{mn}(\theta,\varphi)}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T_{mn}}{\partial\theta}\right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]T_{mn} = 0$$

به جواب های معادله بالا Tesseral Harmonics می گویند.

با جایگذاری G در معادله داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}g_{mn}\right) + \left[(kr)^2 - n(n+1)\right]g_{mn}\right\}T_{mn} = \ldots$$

$$\frac{\delta(r-r')\,\delta(\theta-\theta')\,\delta(\varphi-\varphi')}{\sin\theta}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

T_{mn} ها متعامد هستند از این رو می‌توانیم رابطه بالا را ساده کنیم و به یک بعدی برسیم:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} T_{mn}\, T_{pq}^{*} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \delta_{mp}\,\delta_{nq}$$ ← رابطه تعامد

دلتا کرونکر

کتاب Stratton «EM Theory»

$$T_{pq}^{*} = (-1)^{p}\, T_{(-p)q}$$

$P_n^m(\cos\theta) \rightarrow$ Zonal Harmonics

$$\rightarrow \quad \frac{d}{dr}\left(r^2 g_{mn}\right) + \left[(kr)^2 - n(n+1)\right] g_{mn} = \delta(r-r')\, T_{mn}^{*}(\theta',\varphi')$$

پاسخ این مسئله توابع بسل کروی هستند:

$$\begin{cases} g_{mn}^{(1)} = A_m j_n(kr) + B_m y_n(kr) & r<r' \\ g_{mn}^{(2)} = C_m j_n(kr) + D_{mn} y_n(kr) & r>r' \end{cases}$$

چون مسئله‌ها برای یک فضای محدود است بنابراین از j و y استفاده کردیم. این قسمت از مسئله به روش‌های مختلف قابل حل است زیرا از نوع اشتروم-لیوویل است.

روی $r=a$ پاسخ مسئله صفر است؛

$$D_m = -C_m \frac{j_n(ka)}{y_n(ka)}$$ ← شرایط مرزی دیریکله

$$W(r') = -\frac{1}{k} A_m C_m \frac{j_n(ka)}{y_n(ka)} \frac{1}{r'^2}$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

- توابع بسل کروی قابل تبدیل به توابع بسل استوانه‌ای هستند البته با اندیس غیرصحیح

← ادامهٔ حل در کتاب Balanise آمده است.

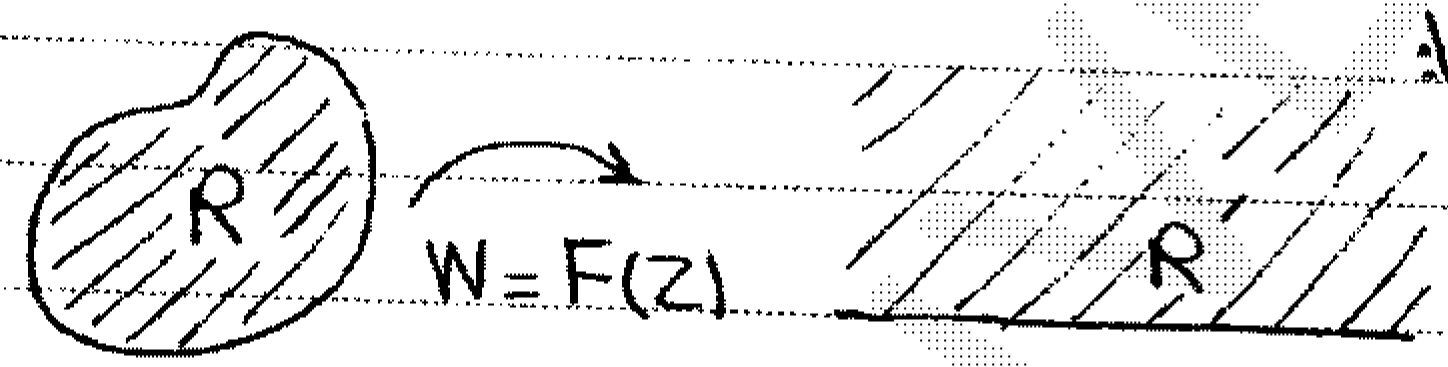
$P_n^m(\cos\theta)\,P_n^m(\cos\theta')\,e^{-jm|\varphi-\varphi'|}$ → چنین عبارت‌هایی در جواب وجود دارد

- رابطه بین توابع بسل کروی و استوانه‌ای:

$$\begin{cases} j_n(x)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}\,J_{n+1/2}(x) \\ y_n(x)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}\,Y_{n+\frac{1}{2}}(x) \end{cases}$$

«۸۹/۸/۱۱» جلسه ۱۲ ریاضی مهندسی:

- تابع گرین به کمک نگاشت‌ها:



$G=\frac{1}{2\pi}\ln|\bar{r}-\bar{r}'|$

جواب تابع گرین برای نیم فضا که توسط تئوری تصویر بدست آمد

- کاربرد اصلی این روش در خطوط مایکرواستریپ می‌باشد.

- تابع گرین نیم صفحه با شرایط مرزی دیریکله:

$$G=\frac{1}{4\pi}\ln\left[\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}\right]=\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}\right|$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$W=F(z) \rightarrow G=\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{F(z)-F(z_0)}{F(z)-F(\bar{z}_0)}\right|$$

مثال:

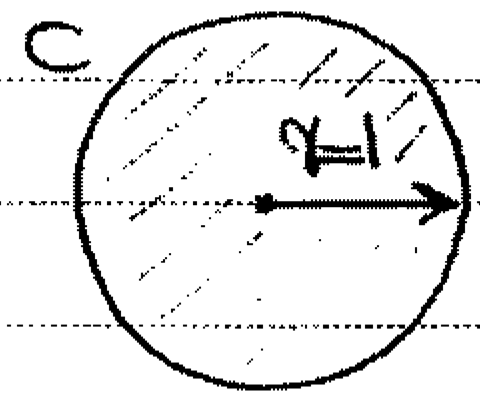
$$\nabla^2\phi(x,y)=0 \rightarrow \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0 \quad , \quad \phi(x,y)=f(x+\alpha y)$$

$$\rightarrow f''(x+\alpha y)+\alpha^2 f''(x+\alpha y)=0 \rightarrow \alpha=\pm j$$

$$\phi(x,y)=f(x+jy) \ \& \ f(x-jy)$$

در این جا f و g و z کاملاً اختیاری هستند و ما هنوز شرایط مرزی مسئله را اعمال نکرده ایم.

$$\phi=f(z)+g(\bar{z})$$



مثال: دایرهٔ یکه

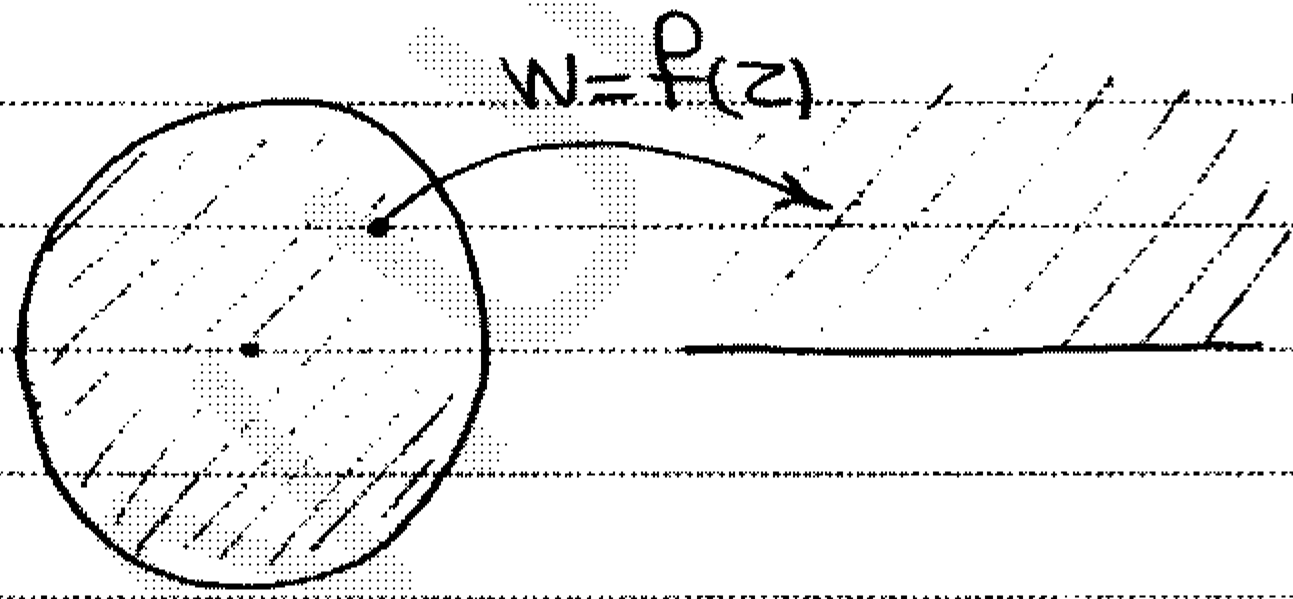
$$\nabla^2\phi=f(\bar{x})=f(r,\theta)$$

$$\phi|_{r=1}=h(\theta)$$

$$\phi(r,\theta)=\iint f(r,\theta)\,G(r,r_0,\theta,\theta_0)\,dA+\oint_C h(\theta_0)\frac{\partial G}{\partial n}\,dl$$

r_0

این فرم کلی جواب مسئله است.



$$F(z)=j\left(\frac{1-z}{1+z}\right) \quad , \quad z=re^{j\theta} \quad , \quad z_0=r_0e^{j\theta_0}$$

Subject.
Year. Month. Date. ( )

$$G(r,r_0,\theta,\theta_0)=\frac{1}{4\pi}\ln\left[\frac{(r^2-2rr_0\cos(\theta-\theta_0)+r_0^2)\,r_0^2}{1-2rr_0\cos(\theta-\theta_0)+r^2r_0^2}\right]$$

$$\frac{\partial G}{\partial n}=\frac{\partial G}{\partial r_0}\bigg|_{r_0=1}=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\theta_0)+r^2}\right]$$

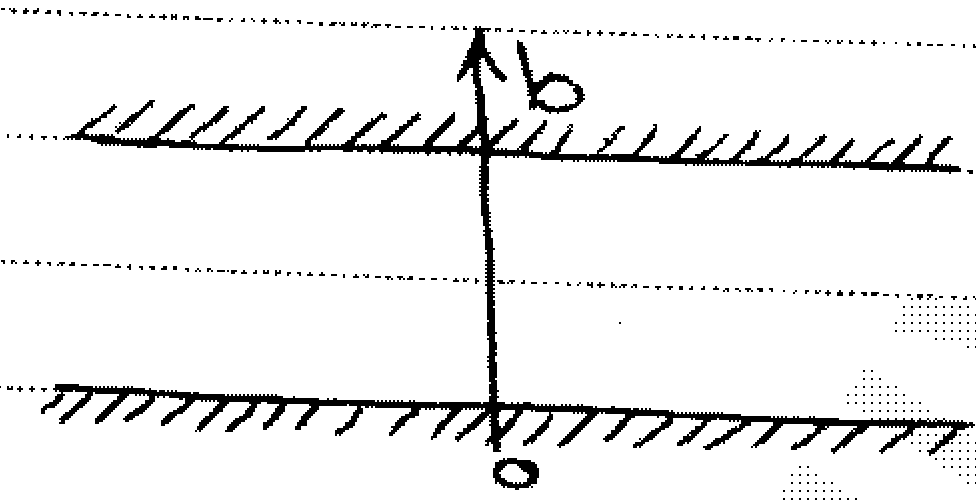
مثال: حل معادلهٔ لاپلاس در ناحیهٔ دایره‌ا : a^2

$$\phi(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-r^2)\,h(\theta_0)}{1-2r\cos(\theta-\theta_0)+r^2}\,d\theta_0+\ldots$$

اگر $a\neq 1$ باشد: a^2 a

به دلیل همگن بودن معادلهٔ لاپلاس 0

تابع گرین در نواحی نامحدود:



نگاشت $W=e^z$ یک ناحیهٔ مستطیلی را به نیم صفحه تبدیل می‌کند.

$$W=e^{\frac{\pi}{b}z}$$

مرزهای ناحیه $\begin{cases} z=x+j0 \\ z=x+jb \end{cases}$

$$G=\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{e^{\frac{\pi}{b}z}-e^{\frac{\pi}{b}z_0}}{e^{\frac{\pi}{b}z}-e^{\frac{\pi}{b}\bar{z}_0}}\right|=\frac{1}{4\pi}\ln\left[\frac{\cosh\frac{\pi}{b}(x_0-x)-\cos\frac{\pi}{b}(y_0-y)}{\cosh\frac{\pi}{b}(x_0-x)-\cos\frac{\pi}{b}(y_0+y)}\right]$$

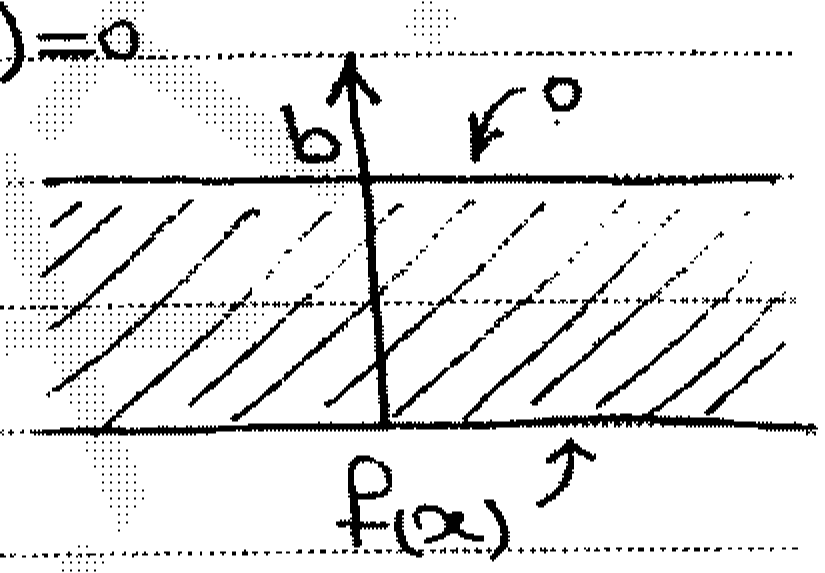
معادلهٔ پواسن را هم برای نیم صفحه حل کرده‌ایم و جواب این مسئله هم با نگاشت قابل یافتن است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

معادلهٔ پواسن: $\{\nabla^2\phi(x,y)=f(x,y)\ ,\ \phi|_{\text{مرز}}=\text{معلوم}\}$

مثال:

$$\nabla^2\phi(x,y)=0\ ,\ \phi(x,0)=f(x)\ ,\ \phi(x,b)=0$$



$$\phi=\iint \underbrace{\cancel{f(\bar{x}_0)}}_{0} G\,dA+\oint_C h(x)\,\bar{\nabla}_{x_0}G\cdot\hat{n}\,dl$$

$$-\frac{\partial G}{\partial y_0}\Big|_{y_0=0}=\frac{1}{2b}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{b}y}{\cosh\frac{\pi}{b}(x_0-x)-\cos\frac{\pi}{b}y}\right]$$

$$\phi(x,y)=\frac{1}{2b}\sin\left(\frac{\pi}{b}y\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{f(x_0)}{\cosh\frac{\pi}{b}(x_0-x)-\cos\left(\frac{\pi}{b}y\right)}\right)dx_0$$

مرجع این مبحث: Field Theory of Guided Waves, Collin

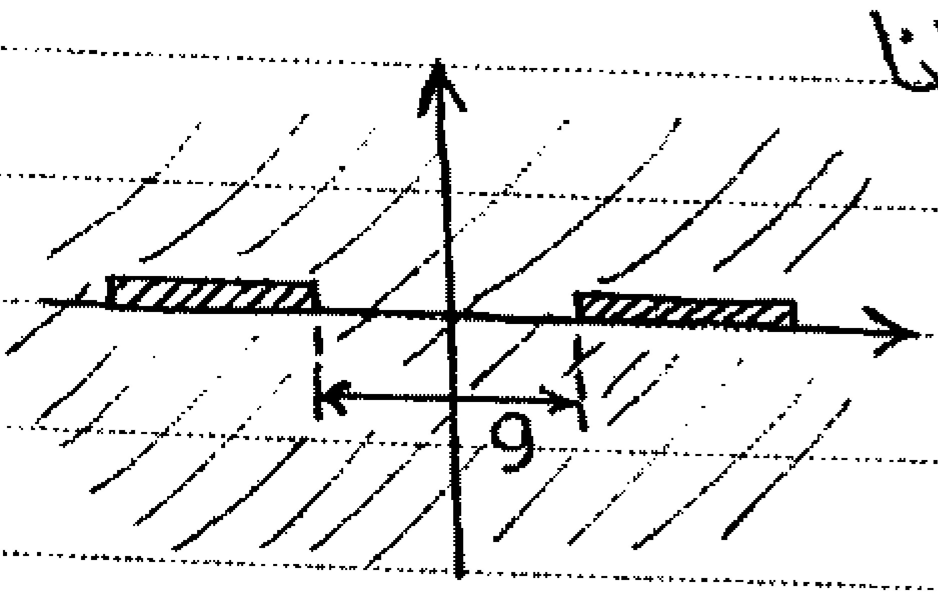
کاربرد این روش در یافتن تابع گرین مسائل مایکرواستریپ خود را به خوبی نشان می‌دهد.

کاربرد نگاشت:

۱ـ بدست آوردن تابع گرین
۲ـ ظرفیت خازن‌ها ـ حل معادلهٔ لاپلاس
۳ـ امپدانس مشخصه

۞ چون انرژی در هر دو فضا (تبدیل یافته و اصلی) تغییر نمی‌کند و V هم در محل مرزها ثابت می‌ماند و انرژی هم در هر دو فضا ثابت است ($W=\frac{1}{2}CV^2$).
پس C در طی نگاشت تغییر نمی‌کند و می‌توان آن را به طور دقیق محاسبه کرد.

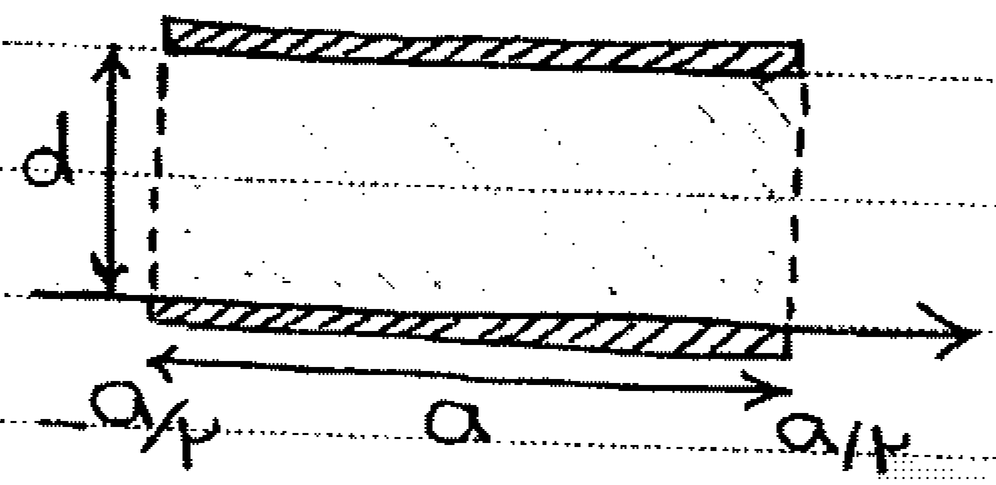
۞ مثال: کاربرد نگاشت _ ظرفیت بین دو رسانا



یک راه حل معادلهٔ لاپلاس در کل فضا و از روی شدت میدان توزیع بار روی صفحات را محاسبه کرده و $C=\frac{Q}{V}$ را بیابیم.

$$W=\frac{1}{2}\varepsilon\iint|\bar{\nabla}V|^2 ds=W$$

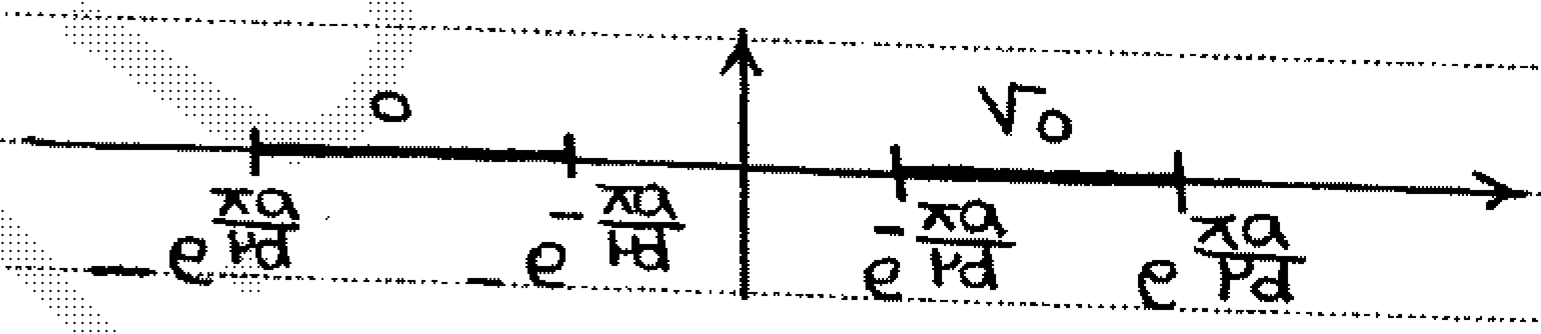
$$u=e^{\frac{\pi}{d}x}\cos\frac{\pi}{d}y$$



$$v=e^{\frac{\pi}{d}x}\sin\frac{\pi}{d}y$$

$$-\frac{a}{2}\le x\le\frac{a}{2},\ y=0\ \rightarrow\ \left(u=e^{\frac{\pi a}{2d}},\ e^{-\frac{\pi a}{2d}},\ v=0\right)$$

$$-\frac{a}{2}\le x\le\frac{a}{2},\ y=d\ \rightarrow\ \left(u=-e^{\frac{\pi a}{2d}},\ -e^{-\frac{\pi a}{2d}},\ v=0\right)$$

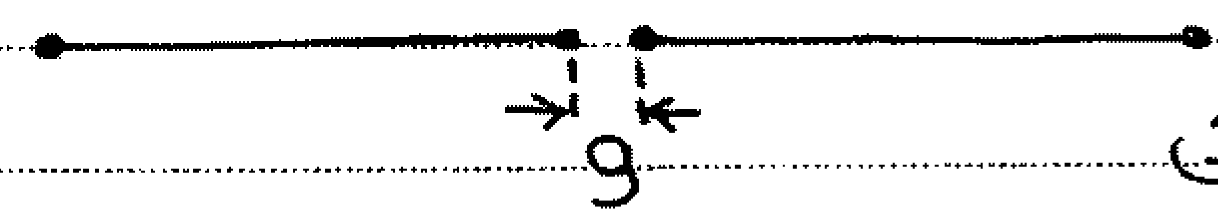


$$g=2e^{-\frac{\pi a}{2d}},\quad \frac{a}{d}=\frac{2}{\pi}\ln\frac{2}{g}\ \rightarrow\ C\simeq\varepsilon_0\frac{a}{d}$$

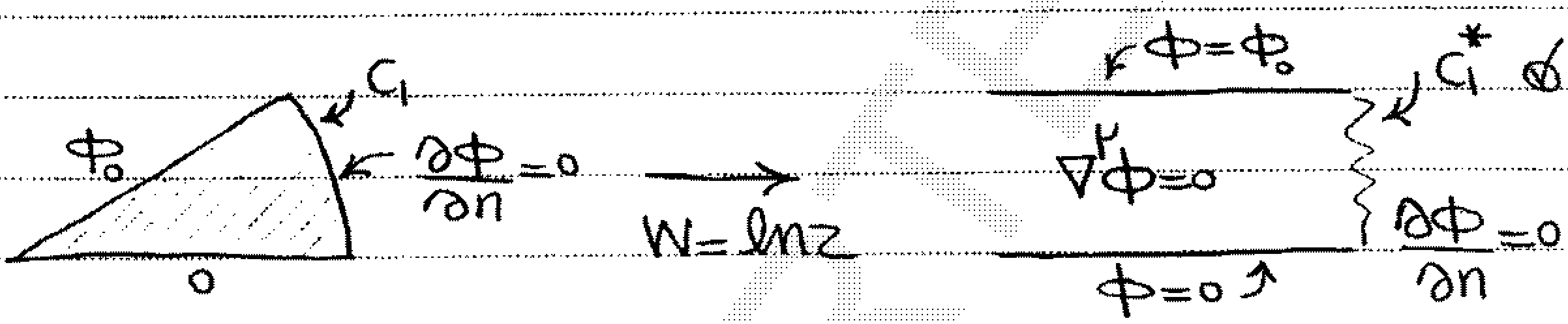
برای عمق ۱ متر

$$\rightarrow C = \frac{2\epsilon_0}{\pi} \ln \frac{2}{g}$$

برای اینکه این تقریب معتبر باشد باید $\frac{a}{d}$ بزرگ باشد که معادل g کوچک است.



همین تقریب در یافتن ظرفیت خازنی خطوط CPW به ما کمک می‌کند.
Coplanar Waveguide

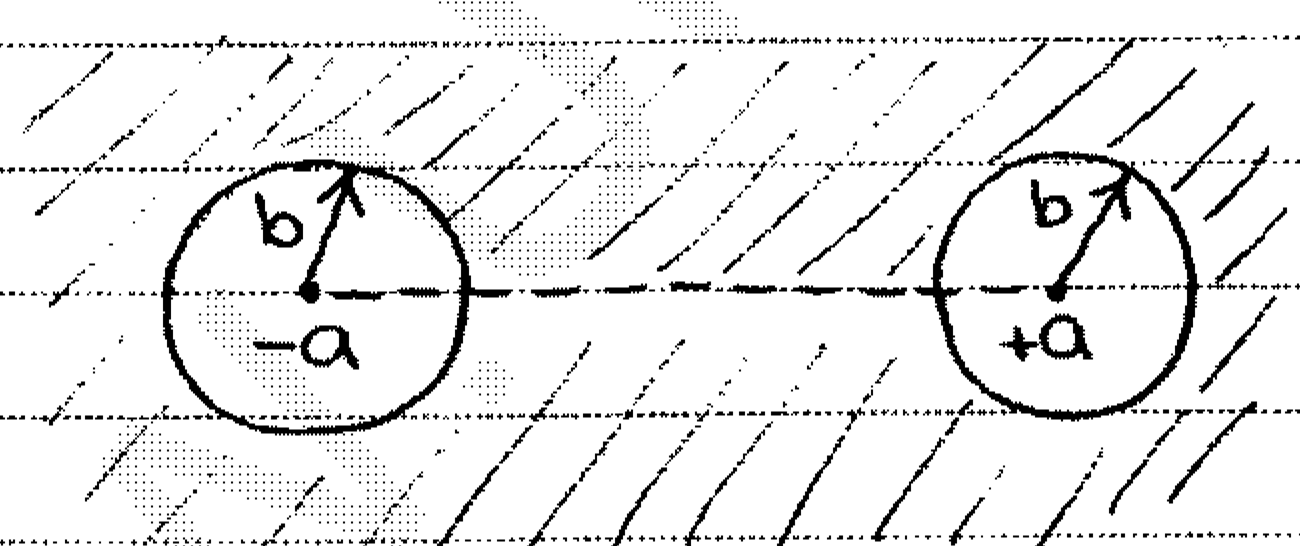


تذکر: اگر شرط دیریکله داشته باشیم در تبدیل یافته هم شرط دیریکله داریم.

اگر شرط نیومان داشته باشیم در تبدیل یافته هم شرط نیومان برقرار است به گونه ای که $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ در محیط جدید از همان n محیط جدید تبعیت می‌کند.

همرجع برای شرایط مرزی تبدیل یافته ← Potential Theory, Kellogg

مثال:



$$z-a = r_1 e^{j\theta_1}$$

$$z+a = r_2 e^{j\theta_2}$$

$$w = \ln\frac{z-a}{z+a} \rightarrow w = u + jv = \ln\frac{r_1}{r_2} + j(\theta_1-\theta_2)$$

$$\begin{cases} u = \ln \dfrac{r_1}{r_2} \\ v = \theta_1 - \theta_2 \end{cases} \rightarrow \frac{r_1}{r_2} = e^{u}$$

$$\frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2} = e^{2u} \quad , \quad (x - a\coth u)^2 + y^2 = (a \operatorname{csch} u)^2$$

شکل یک دایره:

ظرفیت:

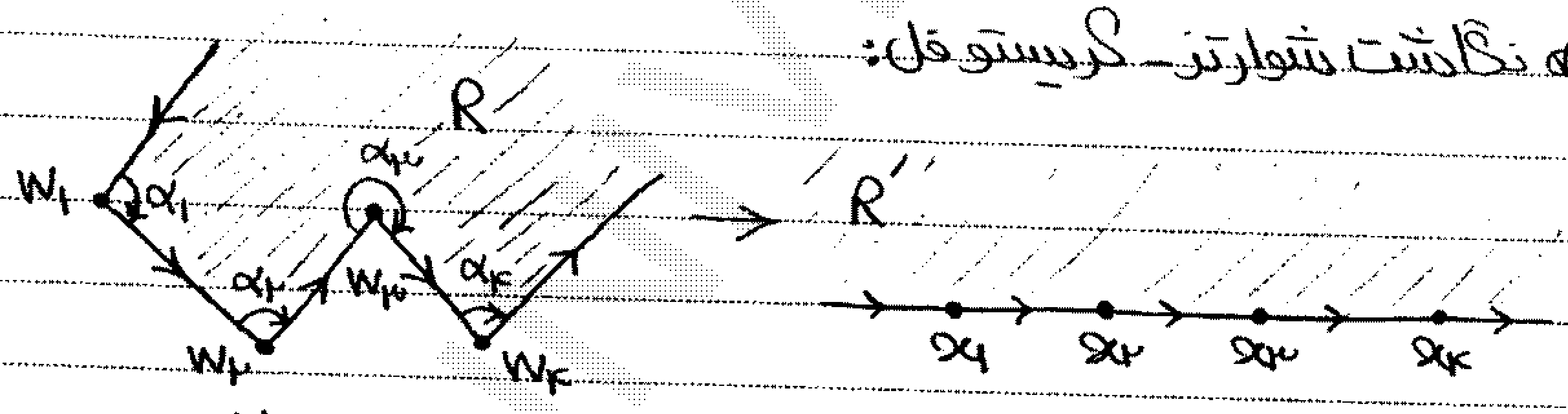
$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\cosh^{-1}\frac{c}{b} - \left(-\cosh^{-1}\frac{c}{b}\right)} = \frac{2\pi\varepsilon}{2\cosh^{-1}\left(\frac{c}{b}\right)}$$

به دلیل تقارن این نتیجه را داده است.

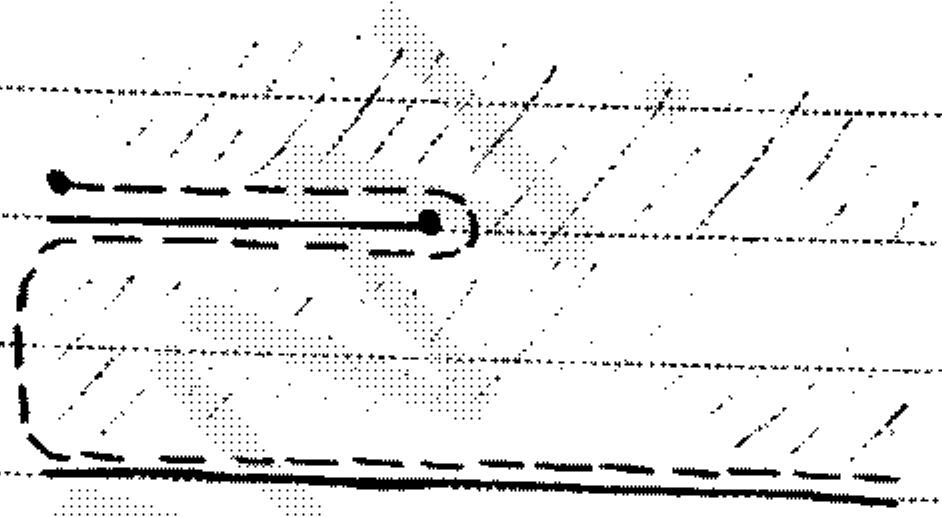
* مسائل تیغه‌ای در نگاشت (نگاشت شوارتز کریستوفل) برتری روش نگاشت است.

<<۸۹/۸/۱۴>> جلسه ۱۳ ریاضی مهندسی:

* نگاشت شوارتز-کریستوفل:



علت استفاده از این نگاشت حل ساده معادله لاپلاس در نیم صفحه است.



* خطوط مایکرواستریپ هم چندضلعی محسوب می‌شوند.

به کمک شکل مقابل می‌توان اثر لبه‌ها را به صورت تحلیلی محاسبه کرد.

$$W=\int A(z-x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1}(z-x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1}\ldots dz+B$$

$$\frac{dW}{dz}=A(z-x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1}(z-x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1}\ldots$$

$$\arg\{dW\}=\arg\{dz\}+\arg\{A\}+(\frac{\alpha_1}{\pi}-1)\arg\{z-x_1\}\ldots$$

$\arg\{W=cte.\}=$ یک خط راست

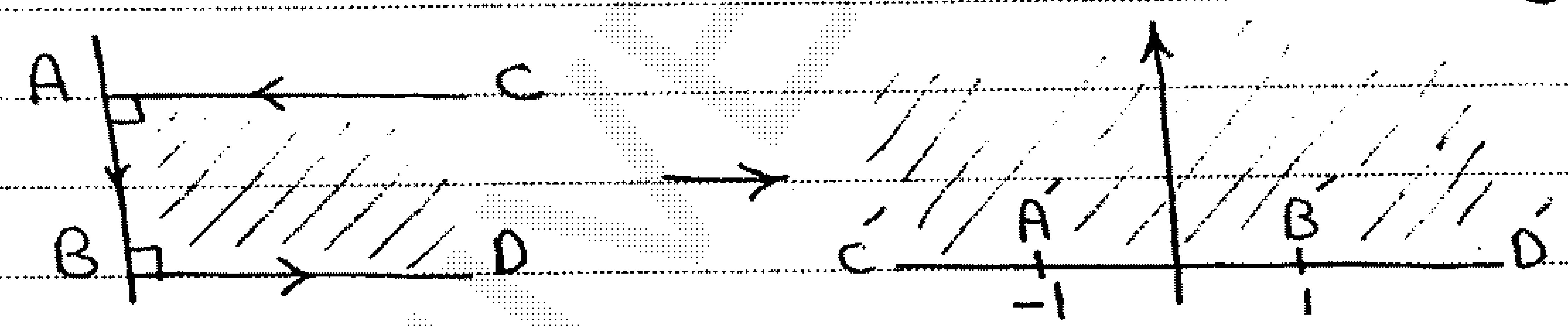
گذر از نقطه‌ی x_1 معادل تغییر آرگومان به اندازه‌ی π می‌باشد.

$\arg z: 0\to\pi$: x_1 گذر از ←

زاویه‌ی طرف اول به اندازه‌ی $(\pi-\alpha_1)$ کم می‌شود یا $(\alpha_1-\pi)$ اضافه می‌شود.

$$(\frac{\alpha_1}{\pi}-1)\pi\to\alpha_1-\pi$$

مثال:



$$\frac{dW}{dz}=A(z+1)^{-1/2}(z-1)^{-\frac{1}{2}}=\frac{A}{\sqrt{z^2-1}}\to W=A\cosh^{-1}z+B$$

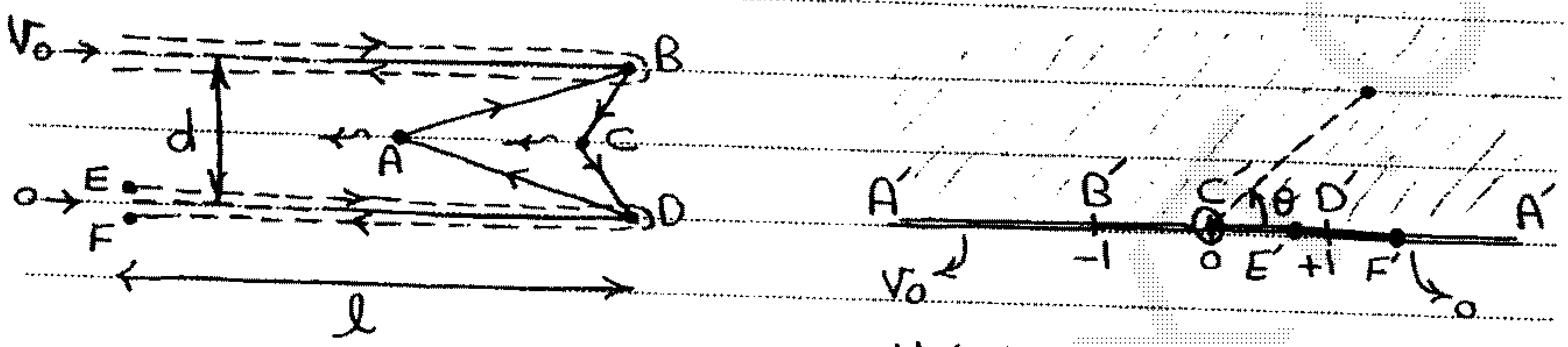
$$\begin{cases} j\pi=A\cosh^{-1}(-1) \\ 0=A\cosh^{-1}(1)+B \end{cases}\to W=\cosh^{-1}z$$

مرجع این بخش: Field theory of Guided Waves, Collin

برای تعیین Z_c و C خطوط انتقال

Year. ____ Month. ____ Day. ____ Subject: ____

مثال: ناحیه مورد بحث کل فضا به غیر از محل خود تیغه ها است.



$$W=\int A(z+1)^{1}(z-0)^{-1}(z-1)^{1}dz+B=\int \frac{A(z^2-1)}{z}dz+B=\dots$$

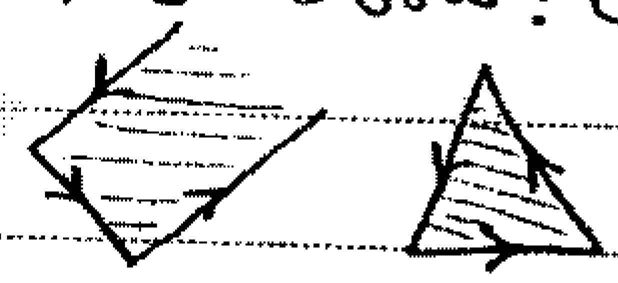
$$\dots=A\left(\frac{z^2}{2}-\ln z\right)+B$$

$$\begin{cases} jd=A\left(\frac{1}{2}-\ln(-1)\right)+B \\ 0=A\left(\frac{1}{2}-\ln(1)\right)+B \end{cases}$$

از روابط مقابل ضرایب مجهول A و B یافته می شوند.

$$W=\frac{d}{\pi}\left[\frac{1-z^2}{2}+\ln z\right]$$

شکل هایی که از یک طرف به ∞ می روند جواب های ساده تری به ما می دهند تا به شکل های بسته:



$$\Phi=A\theta+B=\frac{V_0}{\pi}\theta$$

$$\rho_S=-\varepsilon_0\frac{\partial\Phi}{\partial n}=\varepsilon_0\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}=\varepsilon_0\frac{1}{|x|}\frac{V_0}{\pi}$$

چون خازن ۲ صفحه موازی از یک طرف نامحدود است پس دارای ظرفیت بینهایت است.

با انتخاب طول l به نقاط (E', F') در صفحه جدید می رسیم.

New Clasic

Year. ____ Month. ____ Day. ____ Subject: ____

x_1 و x_2 ریشه های معادلهٔ زیر هستند.

$$Q=\int_{x_1 \to E'}^{x_2 \to E'} \varepsilon_0 \frac{1}{x}\frac{V_0}{\pi}dx=\frac{\varepsilon_0 V_0}{\pi}\ln\frac{x_2}{x_1}$$

$$-l=\frac{d}{\pi}\left[\frac{(1-z^2)}{2}+\ln z\right]$$

$$l\gg d \to -\frac{l}{d}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1-z^2}{2}+\ln z\right] \quad 0<x_1<1,\ x_2>1$$

$$x_1:\ -\frac{l}{d}\approx\frac{1}{\pi}\ln x_1$$

$$x_2:\ -\frac{l}{2}\approx\frac{d}{\pi}\left(-\frac{x_2^2}{2}\right)\to x_2^2\approx\frac{\pi l}{d}$$

$$\ln x_2\approx\frac{1}{2}\ln\frac{\pi l}{d} \to Q(l)=\frac{\varepsilon_0 V_0}{\pi}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{2\pi l}{d}+\frac{\pi l}{d}\right)$$

$$\frac{Q}{V_0}=\frac{\varepsilon_0 l}{d}+\underbrace{\frac{\varepsilon_0}{2\pi}\ln\frac{2\pi l}{d}}_{\text{اثر لبه‌ها}}$$

برای یک خازن $b\times b$:

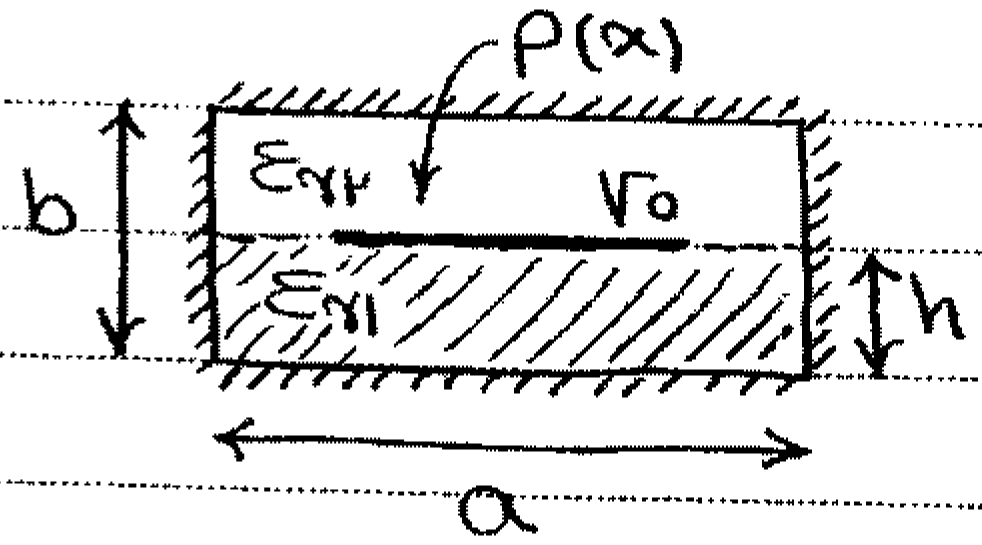
$$C=\frac{\varepsilon_0 b^2}{d}+\frac{2b\varepsilon_0}{\pi}\ln\frac{\pi b}{d}$$

تعیین ظرفیت به کمک:

- استفاده از تابع گرین (روش Variational)
- استفاده از روش تحلیلی

مثال بالا از کتاب الکترومغناطیس Collin گرفته شده است.

New Clasic



۵) حل معادلهٔ پواسن به کمک توابع گرین:

$$\nabla^2 V = \frac{-\rho}{\varepsilon_0}$$

شرایط مرزی:

$$y=h: \quad \varepsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial y} - \varepsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial y} = -\rho_s$$

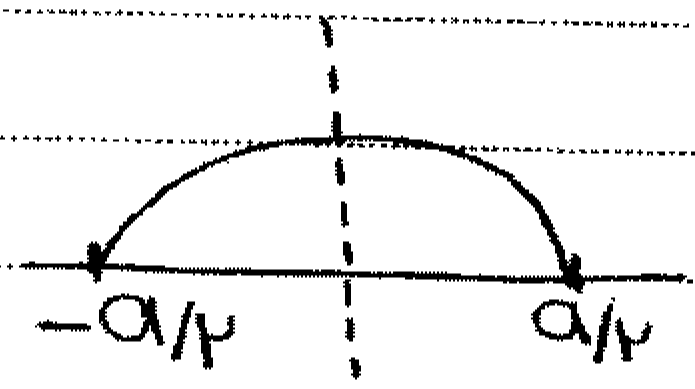
$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{h^+} = \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{h^-}$$

اگر تابع گرین در داخل به صورت $G(x,y,x_0,y_0)$ فرض شود:

$$V(x,y) = \int_{x_0} G(x,y,x_0,y_0)\frac{\rho}{\varepsilon_0}\,dx_0$$

تابع گرین مسئله

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \frac{-1}{\varepsilon_0}\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$$



ایده حدس زدن فرم جواب برای تابع گرین:

$$G = \sum_{n\ \text{فرد}} f_n(y)\cos\frac{n\pi}{a}x$$

$$\sum_n \left[\frac{d^2 f_n}{dy^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 f_n\right]\cos\frac{n\pi}{a}x = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$$

طرفین را در $\cos\frac{n\pi}{a}x$ ضرب می‌کنیم و انتگرال می‌گیریم و به معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$\frac{d^2 f_n}{dy^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 f_n = \frac{-1}{\varepsilon_0}\cos\left(\frac{n\pi}{a}x_0\right)\delta(y-y_0)$$

Year. ____ Month. ____ Day. ____ Subject: ____

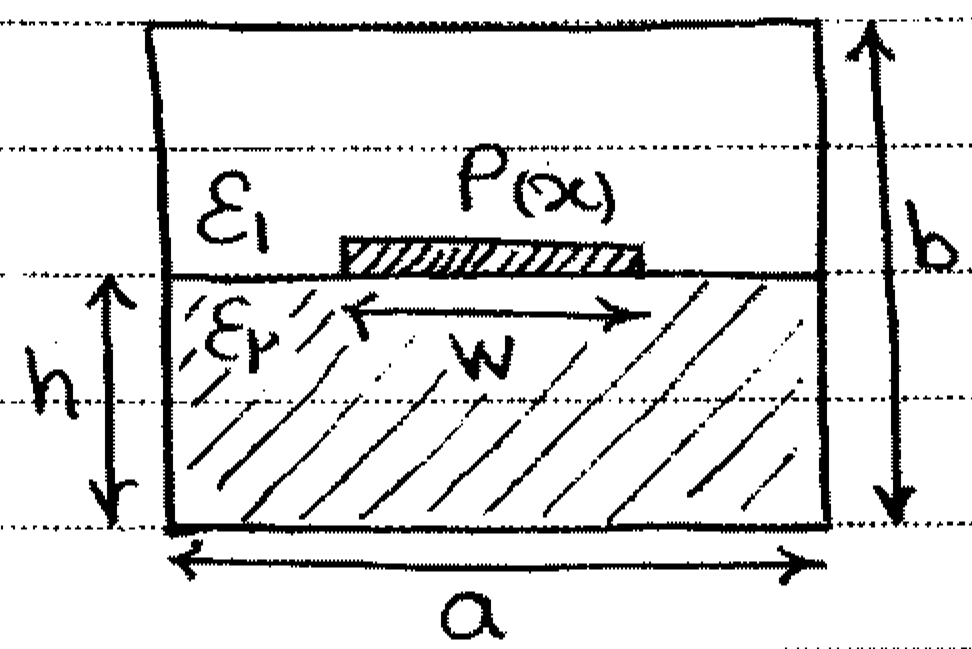
ریاضی مهندسی: جلسه ۱۷ «۸۹/۸/۱۸»

بررسی ساختار مقابل با روش‌ها:

۱- روش variational

۲- روش تحلیلی

هدف یافتن Z_c و C است



$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}=\frac{-1}{\varepsilon}\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$$

$$G=\sum_{n=1,3,\dots} f_n(y)\cos\frac{n\pi}{a}x$$

$$\frac{d^2 f_n}{dy^2}-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 f_n=\frac{-1}{\varepsilon}\cos\left(\frac{n\pi}{a}x_0\right)\delta(y-y_0)$$

$$f_n(y)=\begin{cases} C_1\sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \\ C_2\sinh\left(\frac{n\pi}{a}(b-y)\right)\end{cases}$$

مواردی که باید بررسی شوند:

پیوستگی پتانسیل: $C_1\sinh\frac{n\pi}{a}h=C_2\sinh\left(\frac{n\pi}{a}(b-h)\right)$

شرط منبع: $\hat{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\rho_s$: $\varepsilon_2\frac{df_n}{dy}\Big|_{y=h^+}-\varepsilon_1\frac{df_n}{dy}\Big|_{y=h^-}=\dots$

$$-\cos\frac{m\pi}{a}x_0$$

New Clasic

$$G=\begin{cases}\sum\limits_{n\ \text{فرد}} C_1 \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\\ \sum\limits_{n\ \text{فرد}} C_2 \sinh\left(\frac{n\pi}{a}(b-y)\right)\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\end{cases}$$

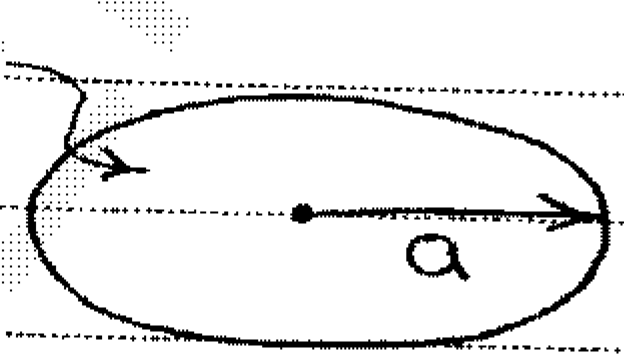
$$C=\frac{Q}{V_0} \rightarrow \int \rho(x_0)dx_0 \longrightarrow C=\frac{Q^2}{QV_0}$$

$$Q^2=\int Q\rho(x_0)dx_0=\iint \rho(x)\rho(x_0)dx\,dx_0$$

$$V_0=\int_{x_0} \rho(x_0)\,G\,dx_0 \longrightarrow C=\frac{Q^2}{QV_0}=\frac{\left[\int_{x_0}\rho(x_0)dx_0\right]^2}{\int_x\int_{x_0}\rho(x)\rho(x_0)\,G\,dx_0\,dx}$$

$$\rho \propto 1+\alpha\frac{|x|}{W}$$

* نحوهٔ توزیع بار روی یک دیسک به شعاع a:



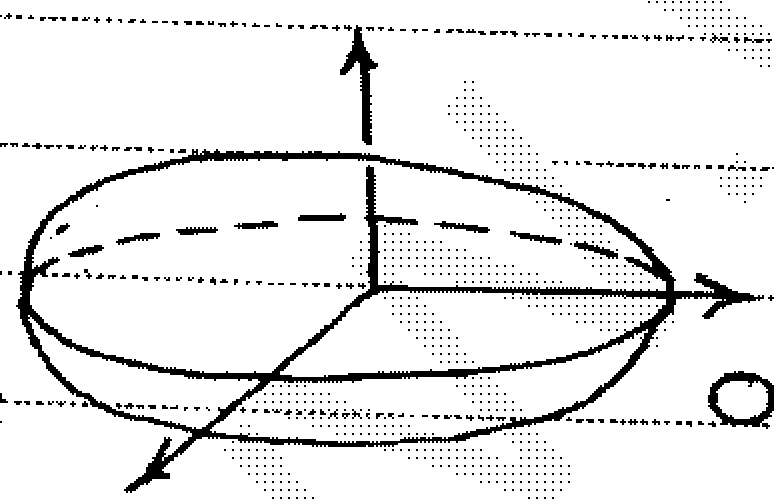
$$\rho \propto \frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}$$

* راه‌های مختلف یافتن توزیع بار روی یک دیسک:

راه اول: برای یافتن تابع $\rho(r')$ ابتدا برای یک نقطه فقط پتانسیل V را یافته سپس این نقطه را روی دیسک قرار می‌دهیم و پتانسیل آن را برابر V_0 می‌گیریم و به یک معادلهٔ انتگرالی برای یافتن $\rho(r')$ می‌رسیم

راه دوم: حل در دستگاه مقابل

$$C=8\varepsilon_0 a$$

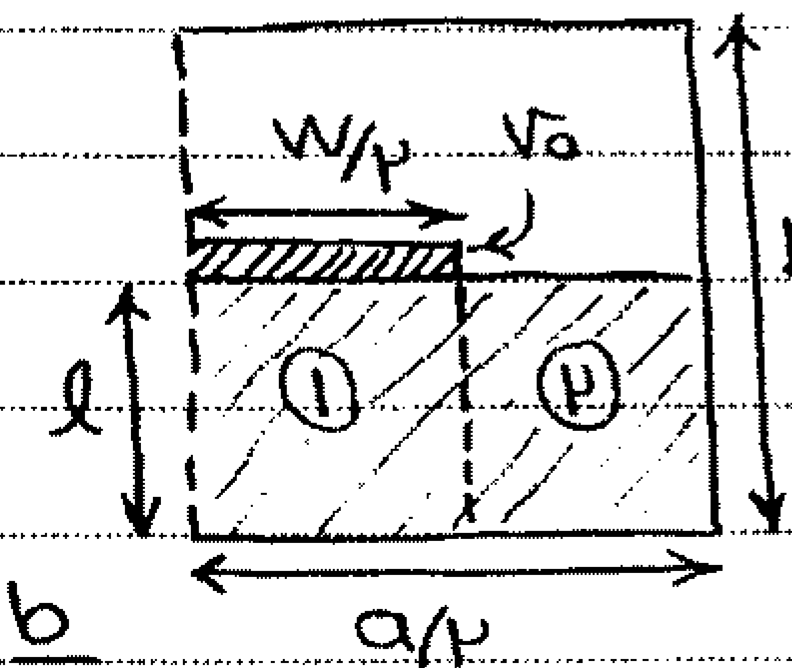


بیضی

oblate spheroid

Year. ____ Month. ____ Day. ____ Subject: ____

مسئله اصلی را ادامه می‌دهیم و آن را به چند بخش تقسیم می‌کنیم و معادله را در هر بخش حل می‌کنیم. در ابتدا فرض می‌کنیم عایقی وجود ندارد



$l = \frac{b}{2}$

$$V_2(x,y) = \sum_{n\ \text{فرد}} B_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}\left(\frac{a}{2} - x\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

این جواب معادله لاپلاس در این بخش است و بسیار دقیق است.

جواب قسمت ① را با تقریب حل می‌کنیم:

$$V_1 = \frac{2V_0}{b} y \qquad \frac{W}{2} \gg l$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{B_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}\left(\frac{a}{2} - \frac{W}{2}\right)\right)}_{C_n} \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \equiv \frac{2V_0}{b} y$$

حال C_n و B_n را می‌یابیم

$$B_n = \frac{8V_0 \sin(n\pi/2)}{n^2\pi^2 \sinh\left(\frac{n\pi}{2b}(a-W)\right)}$$

از روی V می‌توان میدان‌ها را محاسبه کرد.

$$E_{2x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_{2y} = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad \underset{\text{انرژی}}{W_2} = \frac{1}{2}\varepsilon \int |E|^2 dv$$

$$W_2 = \sum_{n\ \text{فرد}} \frac{4\varepsilon_0 V_0^2}{n^3\pi^3} \frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{b}(a-W)\right)}{\sinh^2\left(\frac{n\pi}{2b}(a-W)\right)}$$

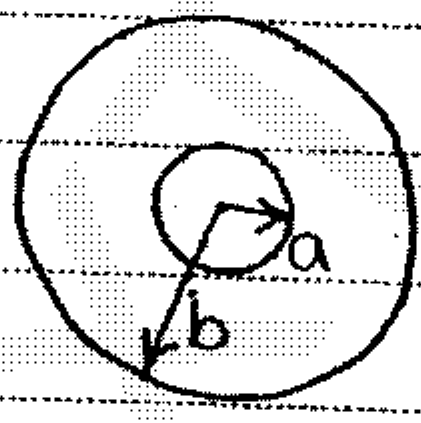
$$C = \varepsilon\left[\frac{4W}{b} + \frac{32}{\pi^3} \sum_{n\ \text{فرد}} \frac{1}{n^3} \frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{b}(a-W)\right)}{\sinh^2\left(\frac{n\pi}{2b}(a-W)\right)}\right]$$

Year. ____ Month. ____ Day. ____ Subject: ____

مرجع این قسمت کتاب Collin است.

مثال: بدست آوردن کران بالا برای $\vec{C}$ به کمک روش Variational

$$C = \frac{\frac{1}{2}\varepsilon \int_v |E|^2 dv}{\frac{1}{2}V_0^2} = \frac{W_e}{\frac{1}{2}V_0^2}$$



$$C = \frac{\varepsilon \int_S |\vec{\nabla}_t \phi|^2 ds}{\left|\int_a^b \vec{\nabla}_t \phi \cdot d\vec{l}\right|^2}$$

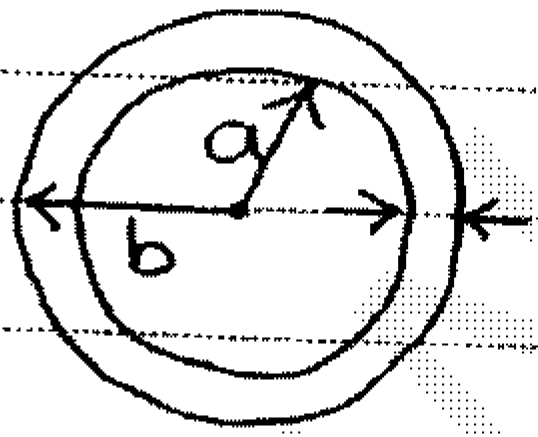
ابتدا یک تقریب برای ϕ می‌زنیم:

$$\phi = A_0 + A_1 r$$

$$C = \frac{\varepsilon \int_0^{2\pi}\int_a^b A_1^2 r\,dr\,d\phi}{\left|\int_a^b A_1 dr\right|^2} = \pi\varepsilon\left(\frac{b+a}{b-a}\right)$$ ← ظرفیت خازن با تقریب

دقیق $C = \dfrac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)}$ $\qquad \ln(b/a) = 2\left[\dfrac{b-a}{b+a} + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{b-a}{b+a}\right)^3 + \cdots\right]$

اگر فاصله ۲ استوانه خیلی کم باشد این تقریب معتبر است.



بررسی مسئله برای حالت $b = 2a$ ← $C \simeq 3\pi\varepsilon_0$

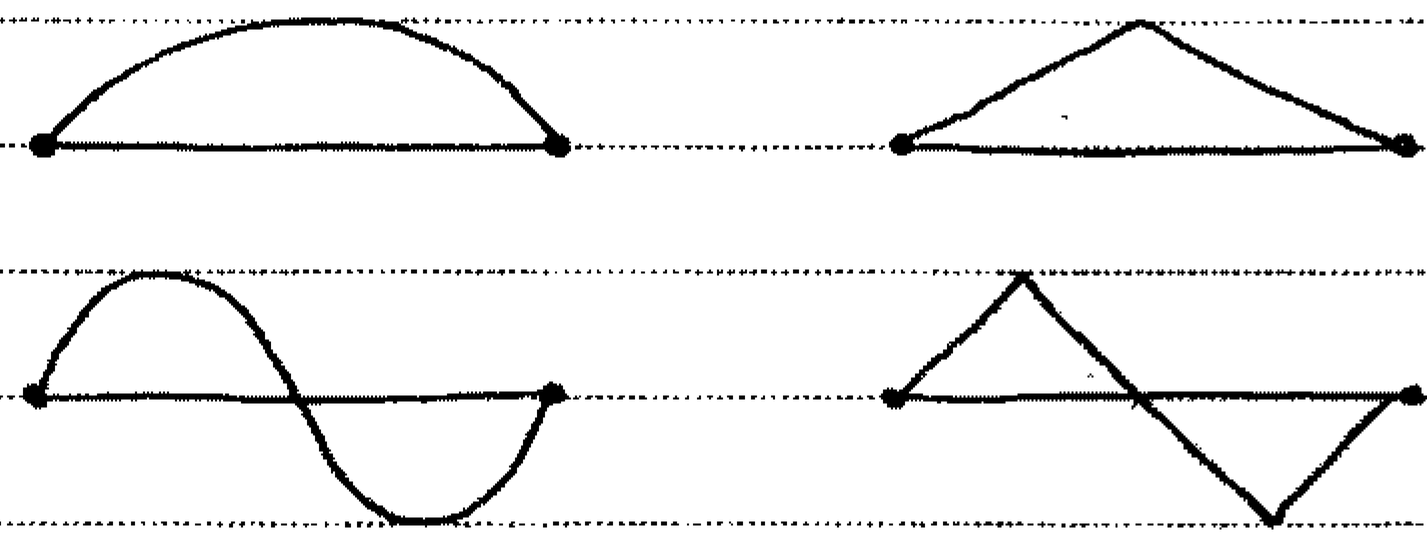
$C = 2.9\pi\varepsilon_0$ $\qquad$ خطا $= \frac{0.1}{3} = 3\%$

برای یافتن مقادیر ویژهٔ تقریبی می‌توانیم از توابع زیر هم استفاده کنیم:

برای عملگر $\frac{d^2}{dx^2}$

λ_1:

λ_2:



اگر برای رسیدن به دقت بیشتر از تقریب زیر استفاده کنیم داریم:

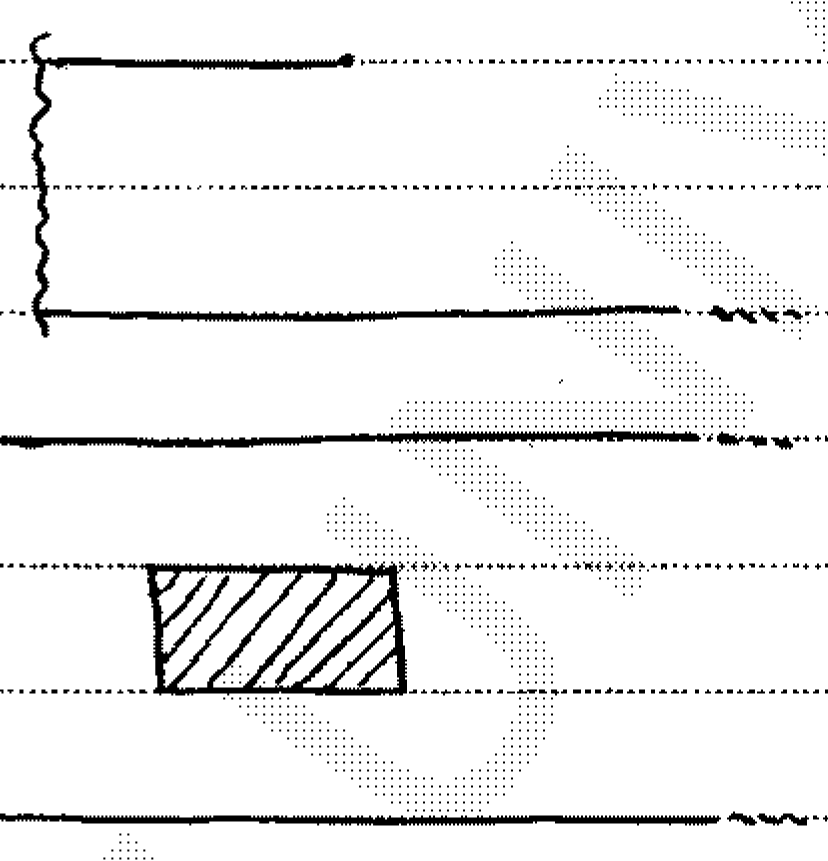
$C = A_0 + A_1 r + A_2 r^2 \longrightarrow C \cong ۲,۸۸۶\epsilon_0$

با انتخاب این فرض برای C مسئله over define می‌شود. ما کمترین C ممکنه از تغییرات پارامترهای A_0 و A_1 و A_2 را اختیار می‌کنیم پس:

$$\frac{\partial C}{\partial A_0} = \frac{\partial C}{\partial A_1} = \frac{\partial C}{\partial A_2} = 0$$

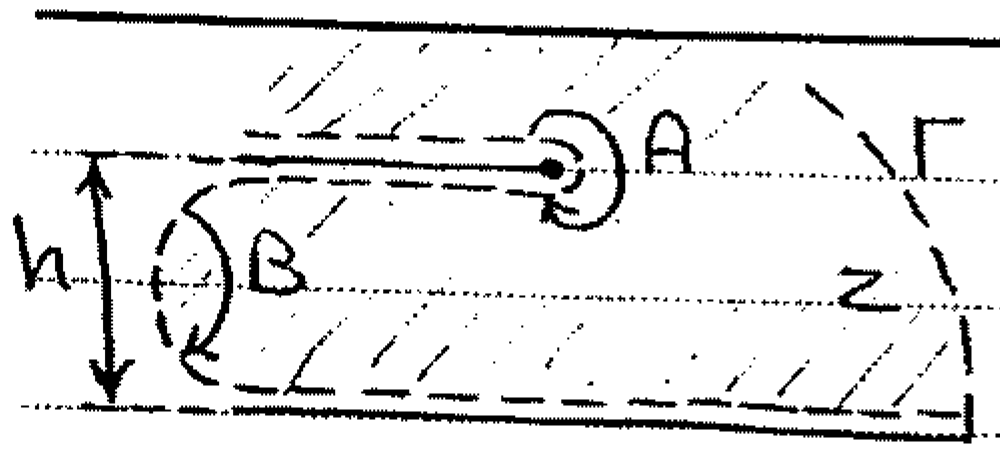
ریاضی مهندسی: جلسه هجده «۸۹/۸/۲۴»

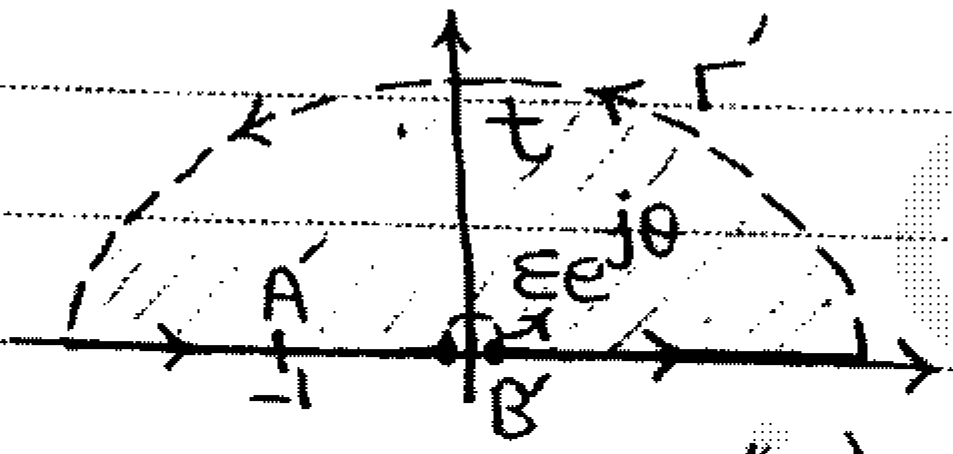
ظرفیت یک خازن نیمه محدود:



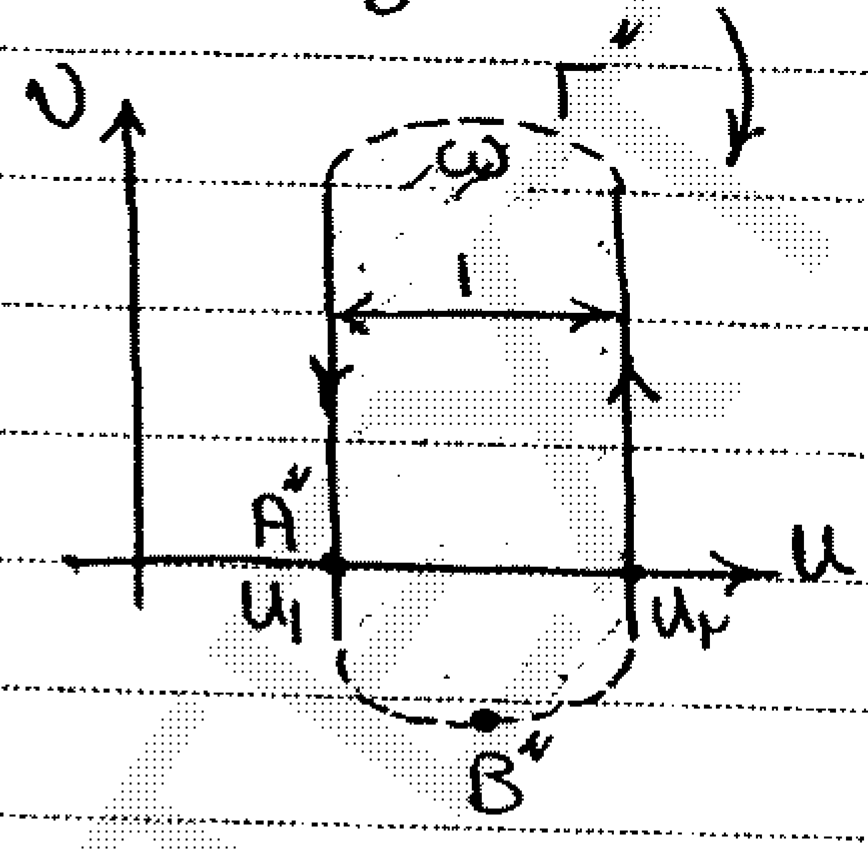
بدست آوردن ظرفیت یا امپدانس مشخصه شکل مقابل به کمک روش variational و توابع گرین

با استفاده از نگاشت شوارتز کریستوفل این شکل را به شکل نیم صفحه بدل می‌کنیم:





ما نگاشت ترکیبی شکل بالا به دو صفحهٔ موازی را پیدا کنیم.
نگاشت اول شوارتز کریستوفل است.



$$Z = A_1 \int (t+1)(t-0)^{-1} dt + A_2$$

$$Z = A_1 \int \frac{t+1}{t} dt + A_2$$

$$Z = A_1(t + \ln t) + A_2$$

$$Z = \frac{h}{\pi}(1 + t + \ln t)$$

$$\omega = D \ln t + E$$

اگر ما از شکل ۲ صفحهٔ موازی به نیم صفحه برویم داریم:

$$W = D \int (t-0)^{-1} dt + E$$

$$W = D \ln t + E$$

در این مرحله نیز از شوارتز کریستوفل کمک گرفته‌ایم.

$$u_1 = D \ln(-1) + E \rightarrow u_1 = j\pi D + E$$

گذر از نقطهٔ تکین B برای یافتن ضرایب مجهول:

$$d\omega = \frac{D}{t}$$

$$\int_{u_1}^{u_2} d\omega = D \int_{\pi}^{0} \frac{j\varepsilon e^{j\theta}}{\varepsilon e^{j\theta}} d\theta \rightarrow u_2 - u_1 = -j\pi D$$

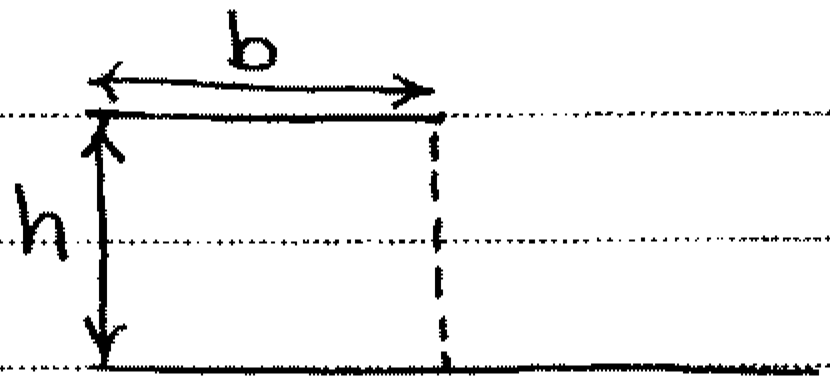
$$\boxed{W = u_2 + j\left(\frac{u_2 - u_1}{\pi}\right) \ln t}$$

Year. ____ Month. ____ Day. ____ Subject: ____

$$t = e^{\pi \frac{\omega - u_2}{j(u_2 - u_1)}} \quad , \quad \omega = u + jv$$

$$x + jy = \frac{h}{\pi}\left[1 + e^{\frac{\pi}{j}\left(\frac{\omega - u_2}{u_2 - u_1}\right)} + \frac{\pi}{j}\left(\frac{\omega - u_2}{u_2 - u_1}\right)\right]$$

$$\boxed{x + jy = \frac{h}{\pi}\left(1 - \pi v + e^{-\pi v}\cos(\pi u)\right) + j\frac{h}{\pi}\left(\pi u + e^{-\pi v}\sin(\pi u)\right)}$$



$$x = -b$$

$$\begin{cases} v_1 \rightarrow -b = \frac{h}{\pi}\left(1 - \pi v_1 + e^{-\pi v_1}\cos \pi u_1\right) \\ v_2 \rightarrow -b = \frac{h}{\pi}\left(1 - \pi v_2 + e^{-\pi v_2}\cos \pi u_1\right) \end{cases}$$

تا اینجا حل دقیق بوده است و با روش‌های عددی می‌توان حل دقیق یافت. ولی در عمل $\frac{h}{b} \ll 1$ است:

$$\frac{h}{b} \ll 1 \rightarrow \{u_1 = 1 \,,\, u_2 = 0\}$$

$$\begin{cases} -\pi\frac{b}{h} = 1 - \pi v_1 - e^{-\pi v_1} \rightarrow -\frac{\pi b}{h} \simeq 1 - \pi v_1 \\ -\pi\frac{b}{h} = 1 - \pi v_2 - e^{-\pi v_2} \rightarrow -\frac{\pi b}{h} \simeq 1 - e^{-\pi v_2} \end{cases}$$

$$V_1 - V_2 = \frac{1}{\pi}\left[1 + \frac{b\pi}{h} + \ln\left(1 + \frac{b\pi}{h}\right)\right]$$

$$C = \frac{\varepsilon_0}{\pi}\left[1 + \frac{b\pi}{h} + \ln\left(1 + \frac{b\pi}{h}\right)\right]$$

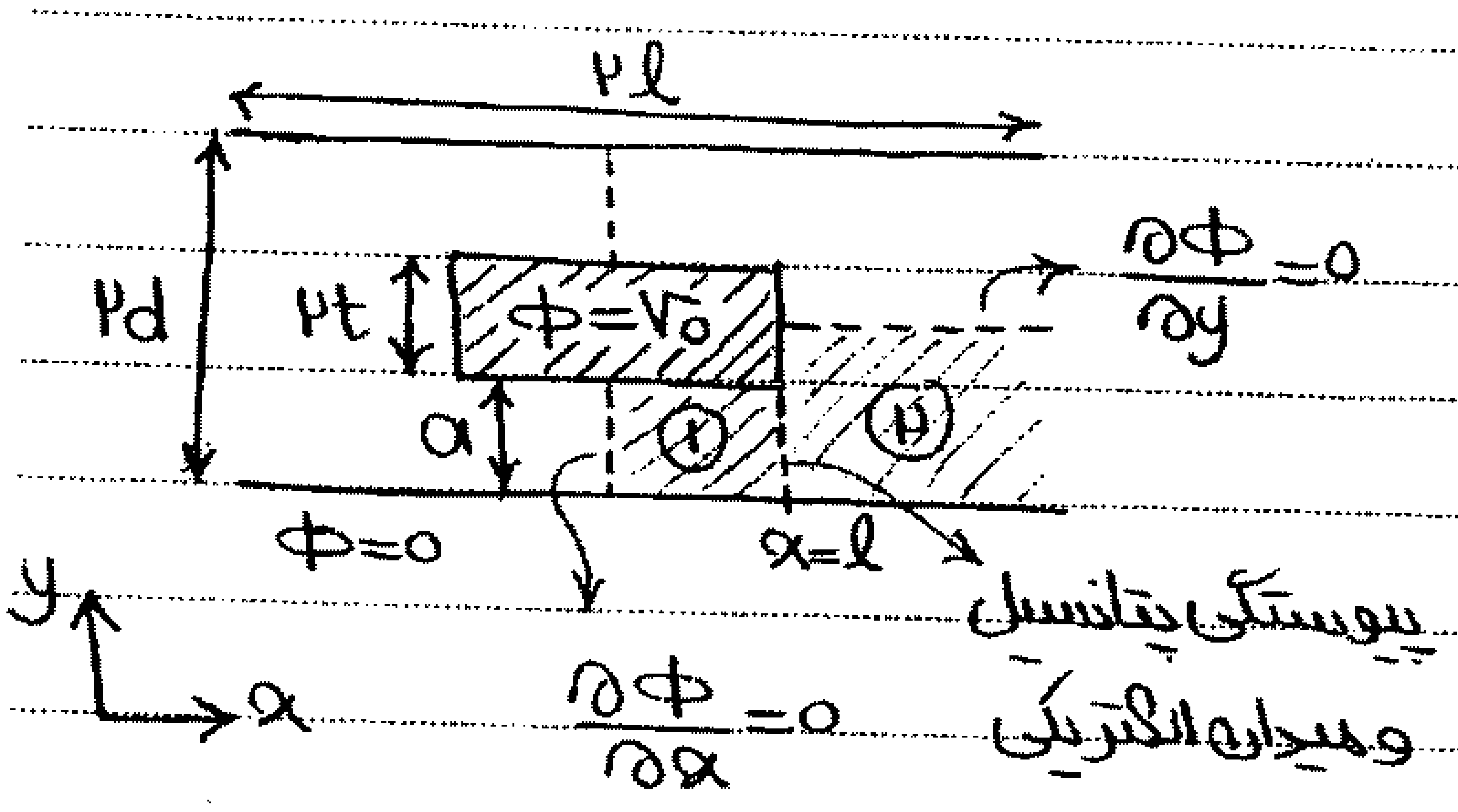
$$C = \underbrace{\frac{\varepsilon_0 b}{h}}_{\text{خازن بدون اثر لبه}} + \underbrace{\left\{\frac{\varepsilon_0}{\pi} + \frac{\varepsilon_0}{\pi}\ln\left(1 + \frac{b\pi}{h}\right)\right\}}_{\text{اثر لبه‌ها}}$$

New Clasic

۱۰۳

Year. ____ Month. ____ Day. ____ Subject: ____

مسئله ۲:



ربع ساختار را در نظر می گیریم و آن را دوباره به دو بخش ۱ و ۲ تقسیم می کنیم

روش Variational:

$$\phi_I=\frac{V_0}{a}y+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cosh\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

?

در حل معادله لاپلاس اگر یک بعد را سینوسی بگیریم دیگری ها یپربولیک است.

$$\phi_{II}=\sum_{n\ \text{فرد}}b_n\sin\left(\frac{n\pi}{2d}y\right)e^{-\frac{n\pi x}{2d}}$$

به دلیل ساختار نامحدود

پیوستگی پتانسیل:

$$\boxed{V_0\frac{y}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cosh\left(\frac{n\pi}{a}l\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)=\sum_{n\ \text{فرد}}b_ne^{-\frac{n\pi l}{2d}}\sin\left(\frac{n\pi y}{2d}\right)}$$

پیوستگی میدان الکتریکی:

$$\boxed{\frac{\partial\phi}{\partial x}\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{a}a_n\sinh\left(\frac{n\pi}{a}l\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)=-\sum_{n\ \text{فرد}}\frac{n\pi}{2d}b_ne^{-\frac{n\pi l}{2d}}\sin\left(\frac{n\pi y}{2d}\right)}$$

New Clasic