بنام خدا

دانشگاه آزاد اسلامی واحد دزفول

دانشکده تحصیلات تکمیلی

گروه مکانیک تبدیل انرژی

جزوه درسی:

مکانیک سیالات پیشرفته

استاد درس : دکتر علیرضا باهری

تهیه کننده: علی کمندی

تیر ماه:۹۲

فهرست سر فصلها

مکانیک سیالات پیشرفته

استاد درس: دکتر علیرضا باهری

فصل اول: مفاهیم کلی

تعریف سیال: سیال ماده‌ای است که بر اثر اعمال کوچکترین تنش برشی تغییر شکل پیوسته دهد

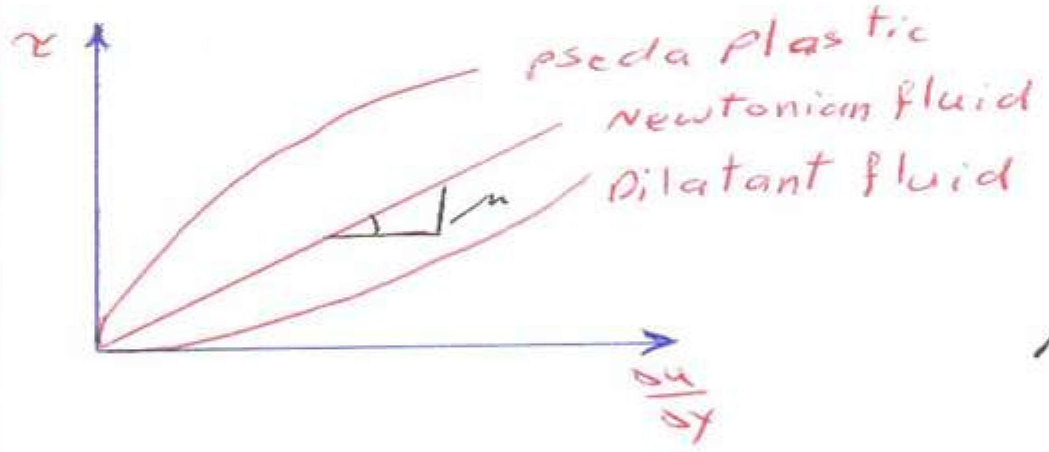
سیالات بر دو نوع هستند: **تراکم پذیر و تراکم ناپذیر**

سیال تراکم پذیر: به سیالی گفته می‌شود که دانسیته آن حین حرکت تغییر کند در حالی که دانسیته یک سیال تراکم ناپذیر همواره ثابت است و تابعی از مکان و زمان نیست.

انواع سیالات: سیالات را بطور کلی به دو گروه نیوتنی و غیر نیوتنی تقسیم می‌کنند

تفاوت این دو در ویسکوزیته آنهاست در یک سیال نیوتنی ویسکوزیته همواره ثابت است و با تغییر تنش برشی تغییر نمی‌کند در این نوع سیالات رابطه بین تنش برشی و تغییر شکل زاویه‌ای (کرنش زاویه‌ای) خطی است که شیب این خط همان ویسکوزیته است. در حالی که در سیالات غیر نیوتنی ویسکوزیته ثابت نیست و با تغییر تنش برشی ویسکوزیته تغییر می‌کند اگر با افزایش تنش برشی سیال مقاومت بیشتری از خود نشان دهد سیال را دیلاتانت (Dilatant) می‌نامند.

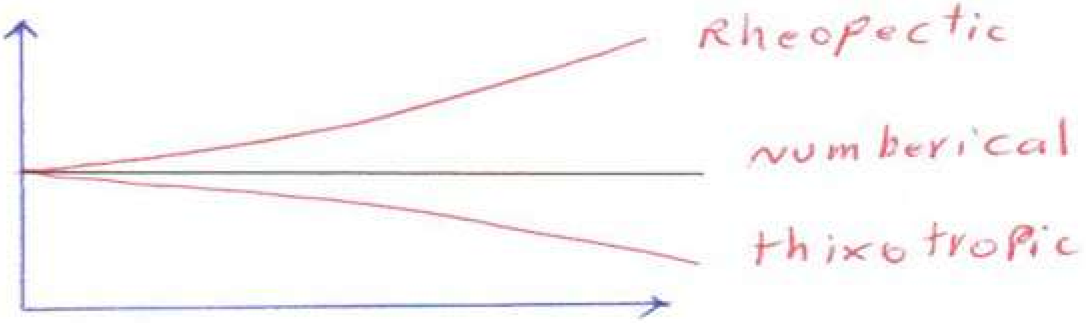
در این گونه سیالها با افزایش تنش برشی ویسکوزیته افزایش می‌یابد هرگاه با افزایش تنش برشی مقاومت سیال در برابر جاری شدن کاهش یابد و ویسکوزیته سیال کم شود سیال را شبه پلاستیک (psudeplastic) می‌نامند در این نوع سیالها (دیلاتانت و شبه پلاستیک) رابطه تنش و کرنش زاویه‌ای خطی نیست.



Newtonian fluid $\tau = \mu \frac{du}{dy}$

Non Newtonian $\tau = \mu \left(\frac{du}{dy}\right)^n$

بسته به وابستگی مقاومت سیال (ویسکوزیته به زمان) سیالات را به سه دسته زیر تقسیم میکنند
1- سیالات عددی 2- سیالات رئوپلتیک 3- سیالات تروپیک تقسیم میکنند



در سیال رئوپلتیک با افزایش زمان مقاومت سیال افزایش می یابد
درحالی که در سیال تیکلوتروپیک با افزایش زمان مقاومت سیال کاهش می یابد.
سیال رئوپلتیک مانند روان سازها و سیال تیکلوتروپیک مانند عسل و یا رب گوجه فرنگی

سیال بینگهام :

سیال بینگهام به سیالی گفته میشود که برای جاری شدن به تنش تسلیم معینی نیاز داشته باشد
بدین معنی که تا آن تنش اعمال نشود سیال جاری نخواهد شد
مانند ژله، خمیر دندان، ماست

$$\boxed{\tau = \tau_y + \mu \frac{du}{dy}}$$

سیال ایده‌آل و سیال حقیقی :

سیال ایده‌آل سیالی است که تراکم ناپذیر باشد و ویسکوزیته آن صفر باشد در این نوع سیال کشش سطحی وجود نداشته و پدیده کاویتاسیون در آن رخ نمی دهد که بدیهی است هیچ سیالی ایده آل نیست و تمام سیالات حقیقی اند فرض ایده آل بودن باعث ساده شدن تحلیل سیال خواهد شد.

روش های کلی تحلیل جریان سیال : برای تحلیل جریان یک سیال می توان دو روش را در نظر گرفت :

۱) روش سیستم   2) روش میدان

روش سیستم : در این روش که به روش حجم کنترل هم معروف است معادلات حاکم بر رفتار سیال بصورت انتگرالی خواهند بود در این روش حجم معینی از سیال را به عنوان سیستم در نظر گرفته ورودی ها و خروجی ها و همچنین نرخ تغییرات یک خاصیت معین در آن حجم کنترل معروف است ، نوشته می شود دقت این روش در تحلیل رفتار سیال به اندازه روش دوم که به روش میدانی معروف است نیست و از آن کمتر است .

روش میدانی (Field method) : از دو منظر می توان روش میدانی را بکار گرفت

منظر اول که به دیدگاه لاگرانژی[1] معروف است رفتار هر ذره از میدان جریان سیال بررسی می شود در دیدگاه لاگرانژی سرعت و شتاب یک ذره سیال که در میدان جریان حرکت می کند هر لحظه با زمان تغییر می کند در حالی که در دیدگاه اویلری نقطه ثابتی از میدان را در نظر گرفته و سرعت و شتاب در آن نقطه و برای هر ذره ای که به آن نقطه می رسد بررسی می شود.

دیدگاه لاگرانژی برای تحلیل سیالات مناسب نمی باشد این دیدگاه در جامدات بکار می رود

1) Lagrangian viewpoint

از دیدگاه اویلری در مسائل مکانیک سیالات استفاده می‌شود در این دیدگاه معادلات حاکم بر رفتار سیال بصورت دیفرانسیلی خواهند بود دقت روش میدانی از روش سیستم بالاتر است

$$\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$$

$$u = u(x, y, z, t) \quad , \quad v = v(x, y, z, t) \quad , \quad w = w(x, y, z, t)$$

$$\vec{a} = \frac{DV}{Dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \overset{u}{\frac{dx}{dt}} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \overset{v}{\frac{dy}{dt}} + \frac{\partial V}{\partial z} \overset{w}{\frac{dz}{dt}}$$

$$\vec{a} = \frac{\partial V}{\partial t} + u\frac{\partial V}{\partial x} + v\frac{\partial V}{\partial y} + w\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\nabla V} = i\frac{\partial V}{\partial x} + j\frac{\partial V}{\partial y} + k\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$(V \cdot \nabla)V = u\frac{\partial V}{\partial x} + v\frac{\partial V}{\partial y} + w\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\vec{a} = \overset{1}{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}} + \overset{2}{(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}}$$

1) convectiv acceleration

2) Local acceleration

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + (V \cdot \nabla)u = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + (V \cdot \nabla)v = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + (V \cdot \nabla)w = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\boxed{\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}}$$

صفحه 5

جریان ثابت

at steady state: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0$

There is only convective acceleration component

جریان یکنواخت

Uniform flow: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

There is only Local acceleration component

آنالیز دیفرانسیلی المان سیال:

المان سیال بصورت های زیر ممکن است تغییر کند:

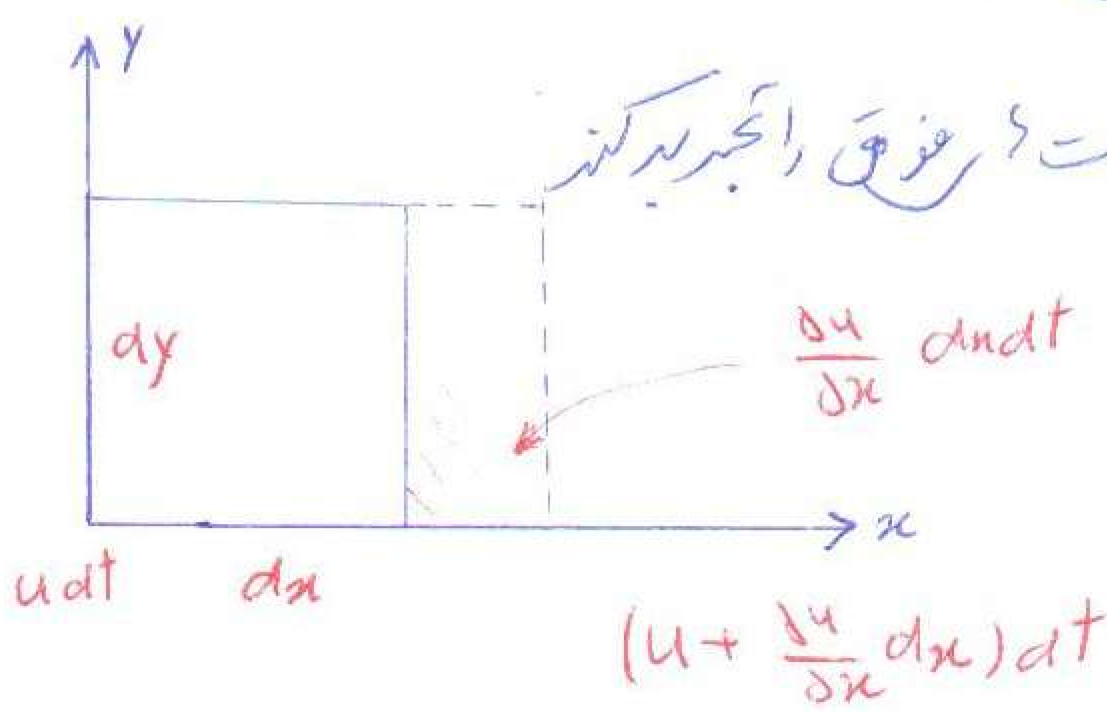
انتقال: در حالت انتقال سیال مانند یک جسم رفتار می کند یعنی بدون تغییر طول و زاویه و تغییر امتداد جابجا می شود (مثل یک جسم جامد)

کشش آمدن: در این حالت سیال در امتداد یکی از اضلاعش و بدون تغییر در زوایای المانش کشیده می شود.

دوران: در این حالت تغییری در اضلاع المان سیال و زوایای بین آنها رخ نمی دهد و المان تماماً می چرخد

تغییر شکل زاویه ای: در حالت تغییر شکل زاویه ای المان سیال از حالت مربعی به متوازی الاضلاع در آمده و در حقیقت زوایای المان تغییر می یابد.

المان سیال ممکن است یک یا تمام حالت های فوق را تجربه کند



صفحه 6

$$\delta V_x = \frac{\partial u}{\partial x} dx dt \, dy dz$$

x از مشتق مکان

$$\frac{1}{V} \delta V_x = \frac{1}{dx\,dy\,dz} \frac{\partial u}{\partial x} dx dt \, dy dz = \frac{\partial u}{\partial x} dt$$

$$\frac{1}{V} \frac{d(\delta V_x)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}$$ نرخ تغییر حجم در راستای x

$$\frac{1}{V} \frac{d(\delta V_y)}{dt} = \frac{\partial v}{\partial y}$$ نرخ تغییر حجم در راستای y

$$\frac{1}{V} \frac{d(\delta V_z)}{dt} = \frac{\partial w}{\partial z}$$ نرخ تغییر حجم در راستای z

$$\frac{1}{V} \frac{d}{dt} (\delta V_x + \delta V_y + \delta V_z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\frac{1}{V} \frac{d}{dt} \delta V = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla V$$

در انتهای رابطه x ثابت شد

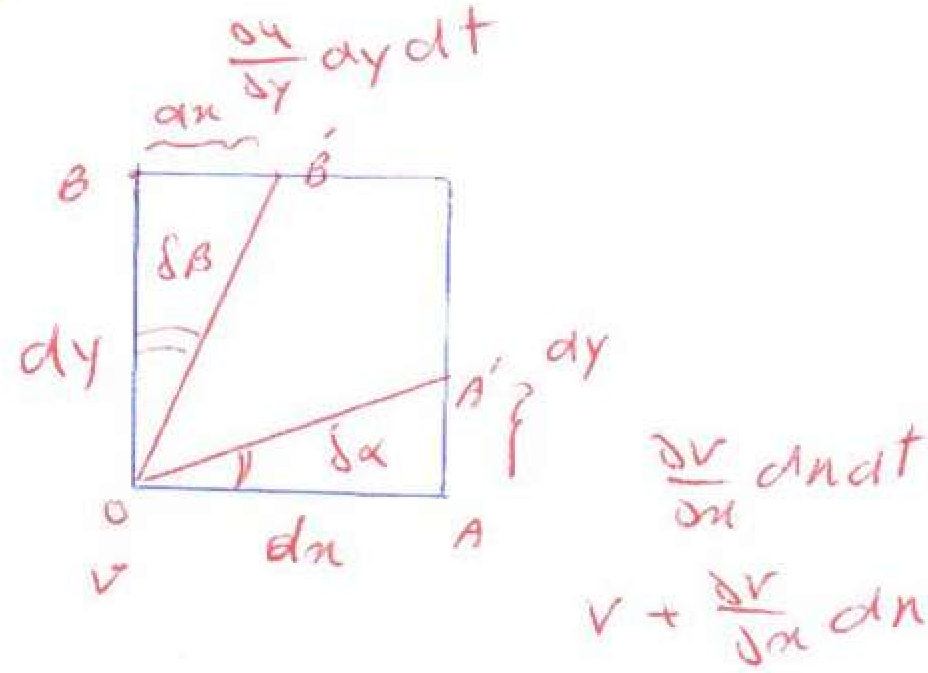
چنانچه سیال تراکم ناپذیر باشد پس حجم آن ثابت است یعنی $\frac{d}{dt} \delta V = 0$ است ولذا حجم

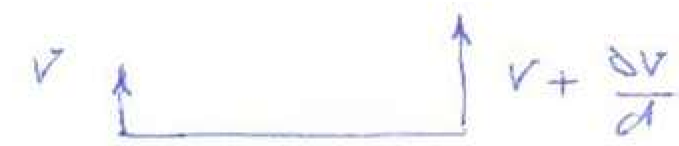
$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ خواهد بود

بنابراین برای سیال تراکم ناپذیر دیورژانس سرعت برابر صفر است.

$$\nabla . V = 0$$

Rotation چرخش





$$V + \frac{\partial V}{\partial x} dx - V = \frac{\partial V}{\partial x} dx$$

اختلاف سرعت

$$\delta\alpha = tg\,\delta\alpha = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx\, dt}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} dt$$

$$\omega_{OA} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta\alpha}{\delta t} = \lim_{dt \to 0} \frac{\frac{\delta v}{\partial x} dt}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\delta_B = tg\,\delta_B = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy\, dt}{dy} = + \frac{\partial u}{\partial y} dt$$

مثبت CCW +

چرخش خلاف جهت عقربه ساعت

$$\omega_{OB} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta_B}{\delta t} = \lim_{dt \to 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dt}{dt} = - \frac{\partial u}{\partial y}$$

CW

قرارداد: ω میانگین ω_{OA} و ω_{OB} می‌شود

قرارداد می‌کنیم که چرخش در جهت ساعتگرد منفی باشد و $\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$

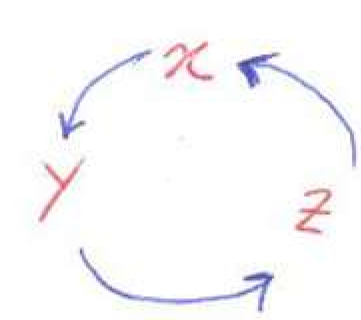
همچنین چرخش هر المان حول محور z برابر میانگین چرخش اضلاع آن المان می‌باشد

x	y	z
u	v	w

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$



عامل چرخشی شدن جریان تغییرات ویسکوزیته است و چون در لایه مرزی ویسکوزیته حاکم است پس در لایه مرزی $\omega \neq 0$ چرخشی است و از معادله برنولی نمی‌توان استفاده کرد

$$\omega = \frac{1}{2}\nabla \times \vec{V} = \frac{1}{2}\,\mathrm{curl}\,V = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

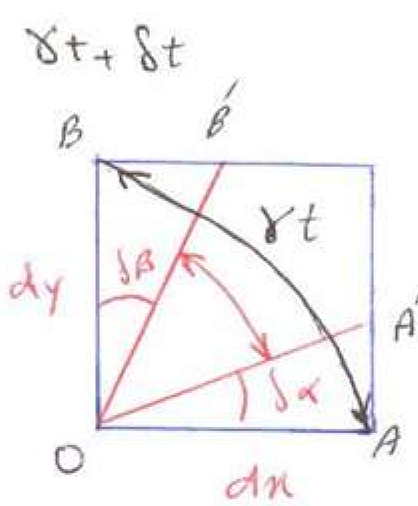
vorticity $\zeta = \nabla \times \vec{V}$ یا $\vec{\zeta} = \mathrm{curl}\,\vec{V}$ $\boxed{\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\zeta}}$

تعریف جریان چرخشی و غیر چرخشی :

جریان چرخشی جریانی است که المان‌های سیال حین حرکت تغییر شکل زاویه‌ای داشته باشد

در این حالت $\mathrm{curl}\,V \neq 0$ هرگاه سیال حین حرکت تغییر شکل داشته باشد ولی تغییر شکل زاویه‌ای نداشته باشد، جریان را غیر چرخشی می‌نامند

در جریان غیر چرخشی ω و ζ هر دو صفر هستند



نرخ کرنش زاویه‌ای :

$$\delta\gamma = \gamma_{t+\delta t} - \gamma_t = \delta\alpha + \delta\beta$$

$$\frac{\delta\gamma}{\delta t} = \dot{\gamma} = \lim_{dt\to 0}\frac{\delta\alpha}{\delta t} + \lim_{dt\to 0}\frac{\delta\beta}{\delta t}$$

$$\dot{\gamma} = \lim_{dt\to 0}\frac{\dfrac{\frac{\partial v}{\partial x}\,dx\,dt}{dx}}{\delta t} + \lim_{dt\to 0}\frac{\dfrac{\frac{\partial u}{\partial y}\,dy\,dt}{dy}}{dt}$$

نرخ کرنش زاویه‌ای

$$\boxed{\dot{\gamma}_z = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}}$$

فصل دوم

معادلات اساسی : Basic equations

در این فصل معادلات اصلی حاکم بر جریان سیالات بررسی می‌شود معادلاتی که بطور کلی بر جریان سیالات حاکم است عبارتند از معادله بقای جرم ، معادله بقای مومنتوم و معادله بقای انرژی نوع خاصی از معادله انرژی که در شرایط معین صادق است و به معادله برنولی موسوم است.

قضیه انتقال رینولدز : Reynolds Transport

قضیه انتقال رینولدز که بصورت انتگرالی نوشته می‌شود تمام معادلات اساسی را در بر می‌گیرد این قضیه بصورت زیر است

حجم جزئی   سطح جزئی

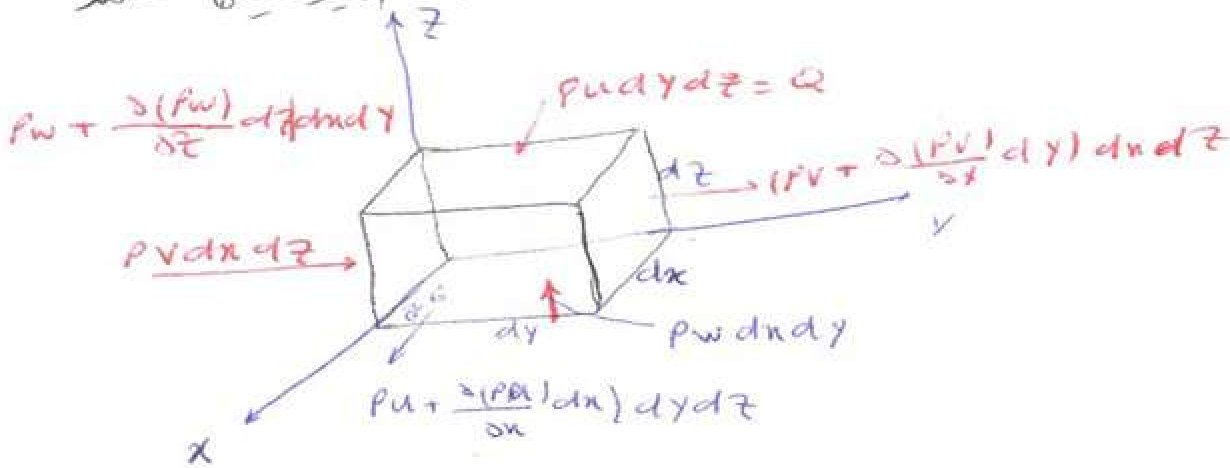
$$\boxed{\frac{dB}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\iiint \eta \rho\, dV + \oiint \eta \rho V\cdot n\, dA}$$

سرعت   بردار یکه عمود بر سطح

$\eta = \frac{B}{m}$ در این رابطه حجم کنترل B یک کمیت مقداری (مانند جرم و مومنتوم) و η یک کمیت شدتی است

در روش حجم کنترل معادلات به فرم انتگرالی هستند و در روش میدانی معادلات به فرم (دیفرانسیلی) هستند

معادله بقای جرم : (معادله پیوستگی)



$$\boxed{\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}}$$

$\rho A V$ دبی جرمی

$Q = AV$ دبی حجمی

$$\boxed{\rho = \frac{m}{V}}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

دبی جرم خروجی − دبی جرم ورودی = تغییرات جرم حجم کنترل نسبت به زمان

$$\left.\frac{dm}{dt}\right|_{cv} = \sum \dot{m}_{in} - \sum \dot{m}_{out}$$

$$m = \rho V \Rightarrow dm = \rho\, dV$$

$\rho\,dx\,dy\,dz$

$\sum \dot m_{in} = \rho u\,dy\,dz + \rho v\,dx\,dz + \rho w\,dx\,dy$

$\sum \dot m_{out} = \left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dx\right)dy\,dz + \left(\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dy\right)dx\,dz + \left(\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}dz\right)dx\,dy$

جایگزاری

$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\,dx\,dy\,dz) = \cancel{\rho u\,dy\,dz} + \cancel{\rho v\,dx\,dz} + \rho w\,dx\,dy - \left(\cancel{\rho u} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dx\right)dy\,dz$

$-\left(\cancel{\rho w} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}dz\right)dx\,dy - \left(\cancel{\rho v} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dy\right)dx\,dz$

$\cancel{dx\,dy\,dz}\,\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\cancel{dx\,dy\,dz} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\cancel{dx\,dy\,dz} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\cancel{dz\,dx\,dy} = 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \\ \nabla\cdot V = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases}$$

$\boxed{V = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}}$

$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho V) = 0}$ معادله بقای پیوستگی (شکل دیفرانسیلی)

برای هر جریانی صادق است

Steady: $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla\cdot(\rho V) = 0}$

Steady & Incompresible $\Rightarrow \boxed{\nabla\cdot V = 0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0}$ در مختصات دکارتی:

مثال:

دو بعدی $\quad w = 0$

$u = x^2 y + x y \qquad v = ?$

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} = -2xy - y$

$\frac{\partial v}{\partial y} = -2xy - y \Rightarrow v = \int(-2xy - y)\,dy + f(x) \Rightarrow \boxed{v = -xy^2 - \frac{y^2}{2} + f(x)}$

همانگونه که بیان شد معادله پیوستگی یکی از سه معادله ای است که برای هر میدان جریان سیال ممکن باید صادق باشد. شکل کلی این معادله همانگونه که اثبات شد

$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho V) = 0}$

این معادله در حالتهای خاص ساده می شود در جریان پایدار

$\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla\cdot(\rho V) = 0$

اگر جریان پایدار و سیال تراکم ناپذیر باشد علاوه بر اینکه $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ و ρ تابعی از مکان نمی باشد لذا

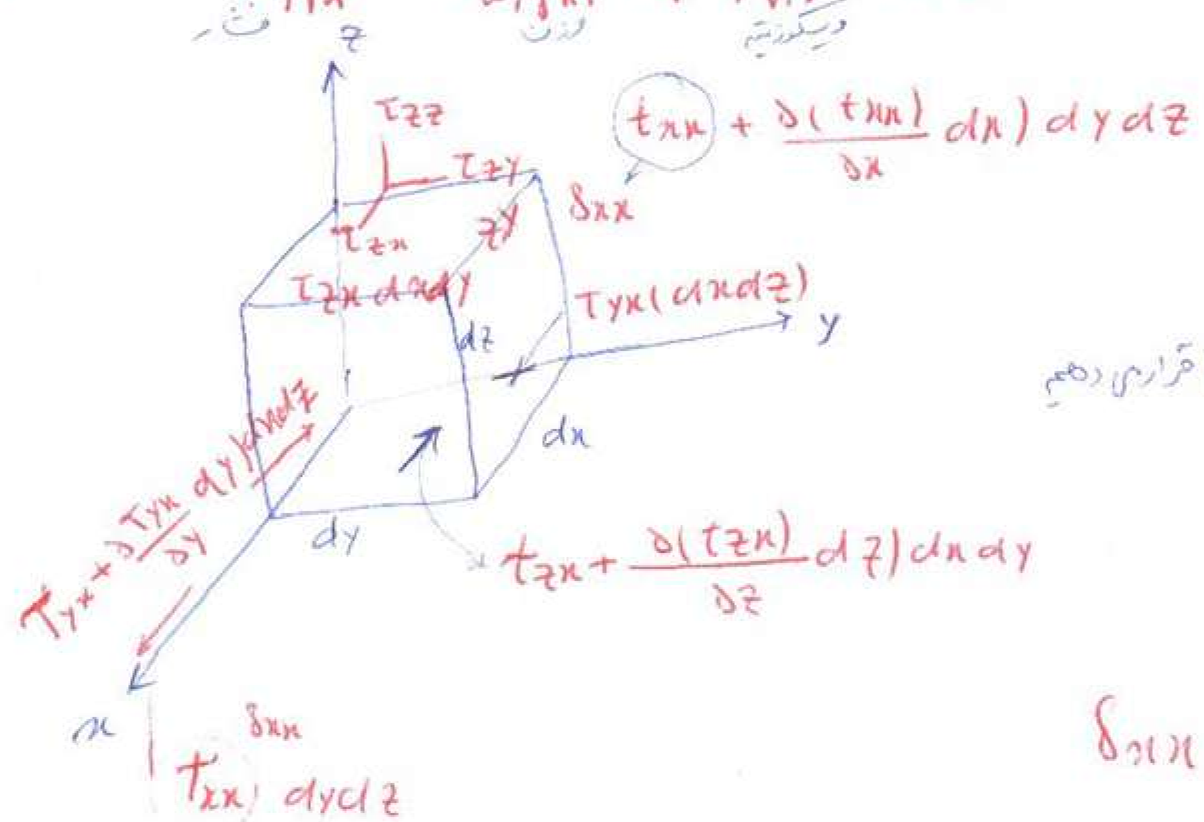
$\boxed{\nabla\cdot V = 0}$

و یا در شکل باز آن $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$ مفهوم این رابطه این است که در یک جریان پایدار و تراکم ناپذیر مؤلفه‌های سرعت حتماً باید در این رابطه صدق کنند.

معادله بقای مومنتوم: Conservation of momentum

یکی دیگر از معادلاتی که بر رفتار کلی جریان سیال حاکم است معادله مومنتوم نام دارد برخلاف معادله پیوستگی که نیروهای وارد بر سیال نقشی نداشتند در معادله مومنتوم نیروهای وارد بر سیال در نظر گرفته شده و در حقیقت این معادله توازن کلی از نیروهای وارد بر سیال است.

$$\sum F = ma = \underset{\text{فشار}}{F_{pru}} + \underset{\text{وزن}}{F_{wight}} + \underset{\text{ویسکوزیته}}{F_{vis}} = ma$$



فقط در جهت x

به جای τ_{xx} $\delta_{xx}=\tau_{xx}$ (+) قرار می‌دهیم

$\delta_{xx}=\tau_{xx}$

$$\text{در جهت } x \quad dF_{vis\,x} = \left(\bcancel{\tau_{xx}} + \frac{\partial(\tau_{xx})}{\partial x}dx\right)dydz - \bcancel{\tau_{xx}}(dydz)$$

$$+\left(\bcancel{\tau_{yx}} + \frac{\partial(\tau_{yx})}{\partial y}dy\right)dxdz - \bcancel{\tau_{yx}}(dxdz)$$

$$+\left(\bcancel{\tau_{zx}} + \frac{\partial(\tau_{zx})}{\partial z}dz\right)dxdy - \bcancel{\tau_{zx}}\,dydx$$

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}dxdydz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dydxdz + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}dzdxdy$$

$$\text{در جهت } x \quad df_{vis} = \frac{dF_{vis\,x}}{dV=(dxdydz)} \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}}_{i=(x,y,z)} = \boxed{\nabla\cdot\tau_{ix}}$$

(12)

در جهت y $\quad df_{vis} = \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \boxed{\nabla \cdot \tau_{iy}}$

در جهت z $\quad df_{vis} = \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = \boxed{\nabla \cdot \tau_{iz}}$

$$\left|\ \delta_{xx} = \tau_{xx} - P\ \right|$$

$$\boxed{\tau_{xx} = \delta_{xx} + P}$$

<u>weight (Gravity):</u>

$$dF_w = mg = \rho g\, dV = \rho g\, dx\, dy\, dz = \rho (dx\, dy\, dz)\cdot(g_x\hat{i} + g_y\hat{j} + g_z\hat{k})$$

$$df_w = \frac{dF_w}{dV} = \rho(g_x\hat{i} + g_y\hat{j} + g_z\hat{k}) = \boxed{\rho g_x \vec{i}}$$

معادله حرکت در جهت x $\quad \sum F_x = \overset{\rho V}{m}\, a_x$

در واحد حجم $\quad \boxed{\sum \underset{F_x/V}{f_x} = \rho\, a_x} \quad \Big| \quad x \text{ در جهت } \ a_x = \dfrac{Du}{Dt} = \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z}$

$$\sum df_x = \rho a_x = df_{Pre+vis} + df_w = \rho a_x$$

$$df_x)_{vis} + df_x)_w = \boxed{\rho \frac{Du}{Dt}} \quad \text{شتاب}$$

(1) $\quad \underbrace{\dfrac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}}_{vis} + \underbrace{\rho g_x}_{weight} = \underbrace{\rho \overset{a_x}{\dfrac{Du}{Dt}}}_{\text{شتاب}}$ $\qquad$ در جهت x

(2) $\quad \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho g_y = \rho \dfrac{Du}{Dt}$ $\qquad$ در جهت y

?

(3) $\quad \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho g_z = \rho \dfrac{Du}{Dt}$ $\qquad$ در جهت z

$$\boxed{\nabla \cdot \tau_{ij} + \rho g = \rho a}$$

④ $\overset{\text{از لزجت}}{\tau_{xx}} = \overset{\text{مقدار کل تنش}}{\delta_{xx}} + \overset{\text{فشار}}{P}$

⑥ $\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$

⑤ $\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$

⑦ $\tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$

در جهت x

② $$\frac{\partial (\tau_{xx} - P)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho g_x = \rho \frac{Du}{Dt}$$

③ $$-\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho g_x = \rho \frac{Du}{Dt}$$

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{d}{dx}\left(2\mu \frac{du}{dx}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] +$$

$$\frac{d}{dz}\left(\mu\left(\frac{du}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] + \rho g_x = \rho \frac{Du}{Dt}$$

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2} + \mu \frac{d^2 v}{dy\,dx} + \mu \frac{d^2 u}{\partial z^2} + \mu \frac{d^2 w}{dz\,dx} + \rho g_x = \rho \frac{Du}{Dt}$$

$$\mu \frac{d^2 u}{dx^2} + \mu \frac{d^2 u}{dx^2}$$

$$\mu \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) = 0$$

معادله ناویر استوکس

$$\rho\left(\frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x +$$

$$\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

با توجه به رابطه ($\delta_{xx} = \tau_{xx} - P$) معادله ① تبدیل به ② و سپس ③ می‌شود

δ_{xx} مقدار کل تنش را در جهت x و روی صفحه‌ای که عمود بر راستای x است را نشان می‌دهد که تشکیل می‌شود از تنش ناشی از لزجت (τ_{xx}) و فشار ترمودینامیکی (P)

$$\nabla P = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

از مکانیک محیط پیوسته می‌دانیم که ⑤ ⑥ ⑦ با جایگذاری در ③ به معادله ناویراستوکس‌ها رسیم معادله بدست آمده به معادله ناویراستوکس در جهت x موسوم است (نیوتنی لزجت ثابت و تراکم ناپذیر باشد).

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial y}+\rho g_y+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$ در جهت y

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial z}+\rho g_z+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$ در جهت z

در جهت x $$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+(V\cdot\nabla)u\right)=-\frac{\partial P}{\partial x}+\rho g_x+\mu\nabla^2 u$$

در جهت y $$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+(V\cdot\nabla)v\right)=-\frac{\partial P}{\partial y}+\rho g_y+\mu\nabla^2 v$$

در جهت z $$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+(V\cdot\nabla)w\right)=-\frac{\partial P}{\partial z}+\rho g_z+\mu\nabla^2 w$$

سطحی — ویسکوزیته — کاملا نیوتنی

⑧ $$\rho\left(\frac{\partial V}{\partial t}+(V\cdot\nabla)V\right)=\underbrace{-\nabla P}_{\text{فشار}}+\underbrace{\rho g}_{\text{وزن حجمی}}+\mu\nabla^2 V \rightarrow \nabla\cdot\tau_{ij}$$

کلی تر

چنانچه: معادله بدست آمده که معادله ناویراستوکس نامیده می‌شود و برای سیالات نیوتنی و تراکم ناپذیر بکار می‌رود به جای عبارت $\mu\nabla^2 V$ ، $\nabla\cdot\tau_{ij}$ بکار رود معادلهٔ کلی حاکم بر جریان سیال (چه نیوتنی و چه غیر نیوتنی) بدست می‌آید.

معادله اویلر: هرگاه اثرات ویسکوزیته را در جریان سیال در نظر نگیرند معادله اویلر بدست می‌آید معادله بقای مومنتوم همانگونه که در ابتدای بحث مطرح شده در حقیقت توازن بین نیروهای وارد بر سیال است $(-\nabla P)$ نیروی فشار که از نوع سطحی هستند و (ρg) نیروی وزن که از نوع حجمی است و $(\mu\nabla^2 V)$ نیروی ویسکوزیته که از انواع سطحی است

معادله بقای انرژی: (Conservational Energy)

سومین معادلهٔ اساسی در جریان سیالات است این معادله بیان می‌کند که انرژی سیال در بالادست جریان برابر انرژی سیال در پائین دست جریان و اتلافات انرژی در طول مسیر است.

اغلب معادله بقای انرژی را به معادله برنولی تعبیر می‌کنند که باید در نظر داشته باشید معادله برنولی در شرایط خاص صادق است و نمی‌توان در هر جا از آن استفاده کرد

جلسه سوم مکانیک سیالات

جریان دائمی- تراکم ناپذیر- ناویسکوز و غیرچرخشی باشد

$$\frac{P}{\rho g}+\frac{V^2}{2g}+z=cte$$

momenton Eq.

$$\rho\frac{DV}{Dt}=\underbrace{\rho g}_{\text{وزن}}-\underbrace{\nabla P}_{\text{نیروی فشاری}}+\underbrace{\mu\nabla^2 V}_{\text{نیروی ویسکوز}}$$

معادله ناویر استوکس

$$\frac{DV}{Dt}=\frac{\partial V}{\partial t}+u\frac{\partial V}{\partial x}+v\frac{\partial V}{\partial y}+w\frac{\partial V}{\partial z}=\boxed{\frac{\partial V}{\partial t}+(V.\nabla)V}$$

شتاب فضایی

$$*\ \rho\left(\frac{\partial V}{\partial t}+(V.\nabla)V\right)=\rho g-\nabla P+\mu\nabla^2 V$$

$$\boxed{\nabla^2 V=\nabla(\nabla.V)+\nabla\times(\nabla\times V)}$$

$$\nabla V^2=2V(V.\nabla)-2\nabla\times(\nabla\times V)\Rightarrow V(V.\nabla)=\boxed{\frac{1}{2}\nabla V^2+\nabla\times(\nabla\times V)}$$

شکل برداری

$$*=\rho\left(\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla V^2+\nabla\times(\nabla\times V)\right)-\rho g+\nabla P-\mu(\nabla(\nabla.V)+\nabla\times(\nabla\times V))=0$$

$$-\rho g=\nabla(\rho g z)=\rho g\nabla z$$

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial V}{\partial t}}+\frac{1}{2}\nabla V^2+\nabla\times(\cancel{\nabla\times V})\right)+\rho g\nabla z+\nabla P-\mu\left[\nabla(\cancel{\nabla.V})+\nabla\times(\nabla\times V)\right]=0$$

پایدار Steady $\longrightarrow$ $\frac{\partial V}{\partial t}=0$

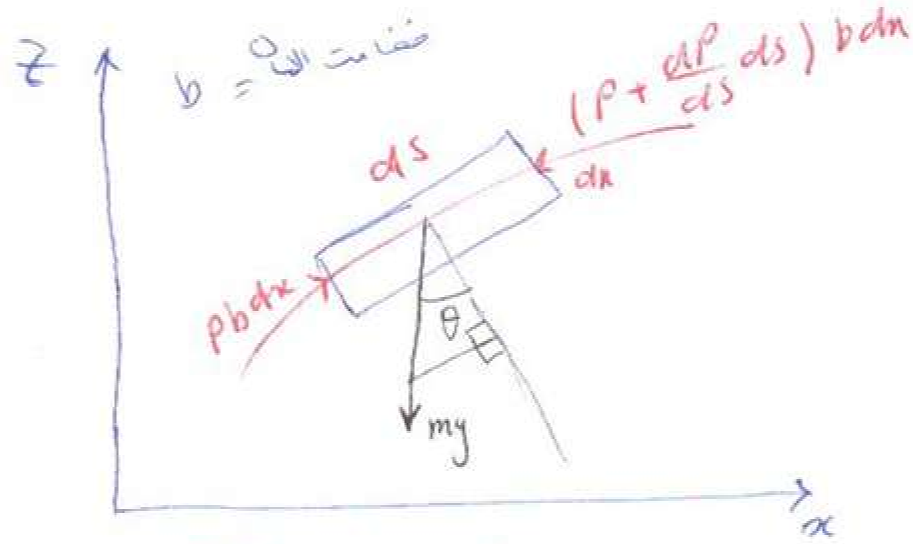
غیرچرخشی Inrot : $\nabla\times V=0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\rho\left(\frac{1}{2}\nabla V^2\right)+\rho g\nabla z+\nabla P=0}$ تقسیم بر ρ

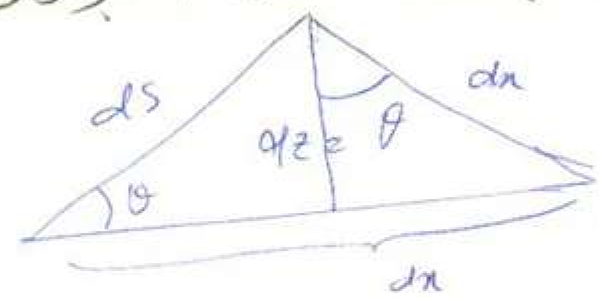
تراکم ناپذیر Incom: $\nabla.V=0$ $\quad$ $\boxed{\frac{1}{2}\nabla V^2+g\nabla z+\frac{1}{\rho}\nabla P=0}$

معادله برنولی بیان می‌کند که روی یک خط جریان انرژی مکانیکی بر واحد جرم تغییر نمی‌کند

$$\nabla\left(\frac{P}{\rho}+\frac{1}{2}V^2+gz\right)=0\Rightarrow\frac{P}{\rho}+\frac{1}{2}V^2+gz=C$$

(18) اثبات معادله برنولی:





$$\sin\theta = \frac{dz}{ds}$$

$$\sum F_s = m\,a_s$$

P = فشار

ρ = چگالی

$$a_s = \frac{dv_s}{dt} = \frac{dv_s}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv_s}{ds}$$

$$\sum F_s = \underbrace{\rho\, b\,dn\,ds}_{} \;\; \overbrace{v\frac{dv}{ds}}^{a_s}$$

$$\sum F_s = \cancel{P b\,dn} - (\cancel{P} + \frac{dP}{ds}ds)\,b\,dn - mg\sin\theta$$

$$\sum F_s = -\frac{dP}{ds}ds\,b\,dn - \rho g\,b\,dn\,ds\,\frac{dz}{ds} - \frac{dP}{ds}\cancel{b\,dn\,ds} - \rho g\,\cancel{b\,dn\,ds}\frac{dz}{ds}$$

$$= \rho b\,\cancel{dn\,ds}\,v\frac{dv}{ds} + \frac{dP}{ds} + \rho g\frac{dz}{ds} + \rho v\frac{dv}{ds} = 0$$

ثابت

$$\int\frac{dP}{ds}ds + \int\rho g\frac{dz}{ds}ds + \int\rho v\frac{dv}{ds}ds = c$$

فرض ρ ثابت

$$P + g\int\rho\,dz + \int\rho v\,dv = c$$

تقسیم بر ρg

$$P + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2 = c$$

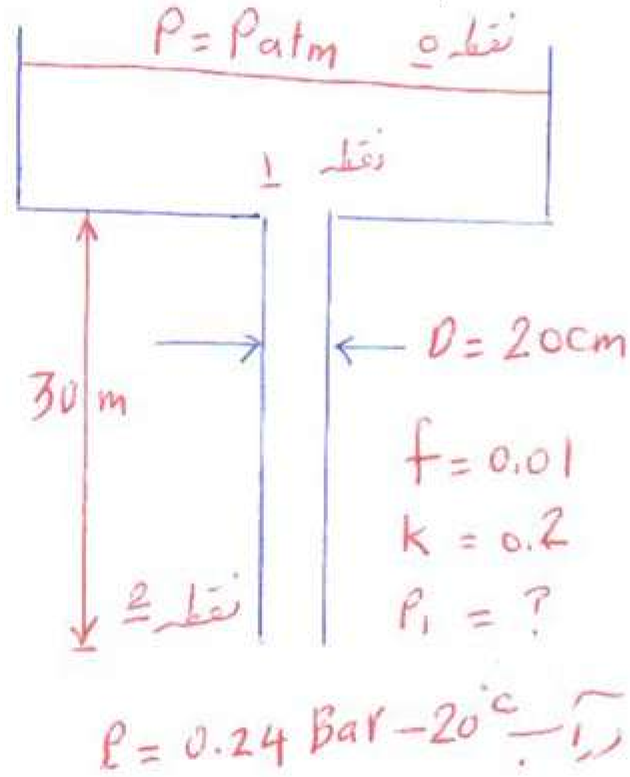
$$\frac{P}{\rho g} + z + \frac{v^2}{2g} = c$$ با فرض عدم ویسکوزیته بدست آمده

برنولی سیال تراکم ناپذیر باشد. ثانیاً از اثرات لزجت صرفنظر شود (ناویسکوز)

اگر جریان غیر چرخشی باشد معادله برنولی بین دو نقطه از جریان معتبر است ولی اگر چرخشی باشد به نقاط روی خط جریان اعمال می گردد.

مثال :

مطابق شکل زیر آب $20^\circ c$ از یک مخزن بسیار بزرگی که ارتفاع آزاد آن $2m$ می‌باشد توسط لوله صافی به قطر $0.2m$ و طول $30m$ در حال تخلیه است اگر ضریب اصطکاک لوله برابر 0.01 و ضریب افت موضعی در مقطع یک $K=0.2$ باشد فشار مطلق را در نقطه یک محاسبه کنید:



$$\frac{P}{\rho g}+\frac{V^2}{2g}+Z=c^{te}$$ اگر از اصطکاک صرفنظر شود

$$\frac{P_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}+Z_1=\frac{P_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g}+Z_2+hf+hm$$

$$hf=f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} \qquad hm=\sum km\frac{v^2}{2g}$$

معادله برنولی بین نقاط ۰ و ۱

$$\cancel{\frac{P_0}{\rho g}}+\cancel{\frac{V_0^2}{2g}}+\overset{2m}{\cancel{Z_0}}=\frac{P_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}+\cancel{Z_1}$$

سطح مبنا برابر صفر

سرعت در سطح آزاد برابر / فشار اتمسفر

$$\frac{P_1}{\rho g}+\underbrace{\frac{V_1^2}{2g}}_{11.35}=2m \longrightarrow \boxed{P_1=-0.9665\ Bar}$$

معادله برنولی بین نقاط ۰ و ۲

$$\cancel{\frac{P_0}{\rho g}}+\cancel{\frac{V_0^2}{2g}}+\underset{32}{\cancel{Z_0}}=\cancel{\frac{P_2}{\rho g}}+\frac{V_2^2}{2g}+\cancel{Z_2}+\overset{f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}}{hf}+\overset{km\frac{v^2}{2g}}{hm}$$

تماس با فضای آزاد

$$\frac{V_2^2}{2g}+0.01\times\frac{30}{0.2}\frac{V_2^2}{2g}+0.2\frac{V_2^2}{2g}=32$$

$$\left(1+0.01+\frac{30}{0.2}+0.2\right)\frac{V_2^2}{2g}=32=V_2$$

$$\overset{Q}{V_1A}=\overset{Q}{V_2A_2}=V_1=V_2\Rightarrow V_1\Rightarrow P_1$$

$$\boxed{V_1=15.249\ \frac{m}{s}}$$

نکته :

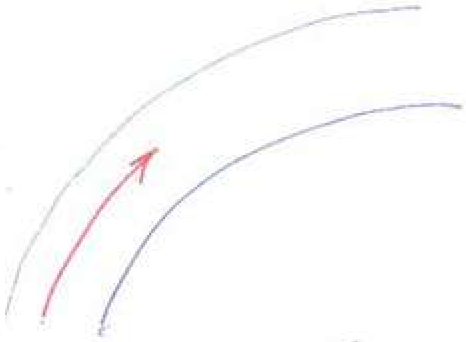
می‌توان مشاهده نمود با افزایش طول لوله فشار در نقطه یک کاهش می‌یابد با توجه به اینکه چنانچه در نقطه ① فشار از حدی کمتر شود پدیده کاویتاسیون رخ خواهد داد لذا طول لوله مقدار حداکثری دارد.

تکلیف شماره ①

در مثال قبل حداکثر طول مجاز لوله را بدست آورید (با فرض: سیال آب)

تکلیف شماره ②

با در نظر گرفتن یک المان از سیال و نوشتن نیروها در جهت عمود بر حرکت نشان دهید که با افزایش فاصله شعاعی از مرکز فشار افزایش می یابد

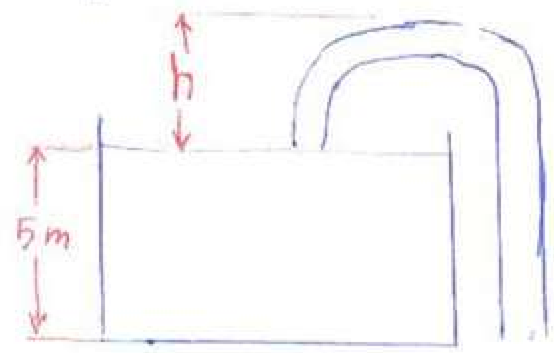


تکلیف شماره ③

حداکثر ارتفاع سیفون (h) چقدر می تواند باشد تا شرایط پیوستگی مایع بدلیل پیوستگی مایع تغییر شدن آن نقض نشود از افت فشار ناشی از اصطکاک صرفنظر کنید

الف - سیال درون مخزن آب $\rho = 1000 \ kg/m^3$

ب - بنزین $\rho = 760 \ kg/m^3$



تغییر سیستم مختصات:

در این بحث روشی را یاد خواهید گرفت که معادلات را در یک سیستم مختصات بتوان به سیستم مختصات دیگری انتقال داد توجه داشته باشید که گرادیان، دیورژانس، کرل یک بردار با تبدیل سیستم مختصات تغییر خواهد کرد در حالی که طول بردار ثابت است

① $(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2 = (h_1 dx_1)^2+(h_2 dx_2)^2+(h_3 dx_3)^2 \Rightarrow$ $h_1 ✓$ $h_2 ✓$ $h_3 ✓$

② $\nabla\phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial x_1} \ , \ \frac{1}{h_2} = \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \ , \ \frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial x_3}$

③ $div(A) = \nabla\cdot A = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2h_3A_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(h_1h_3A_3)+\frac{\partial}{\partial x_3}(h_1h_2A_3)\right]$

④ $curl A = \nabla\times A = \frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}(h_3A_3)-\frac{\partial}{\partial x_3}(h_2A_2)\right]$

فرض می‌شود x_1, x_2, x_3 محورها در سیستم جدید باشند h_1, h_2, h_3 را به نحوی تعیین می‌کنیم رابطه ① برقرار باشد در این رابطه x, y, z محورها در مختصات قدیم است لازم است روابط تبدیل بین مختصات‌ها را بدانیم برای هر اسکالر در سیستم جدید برابر می‌شود.

ϕ در سیستم جدید گرادیان آن $(\nabla \cdot \phi)$ برابر خواهد شد با ② یا ③ از طرفی کرل یک بردار که از یک ضرب گرادیان در بردار بدست می‌آید که بعنوان مثال اولین مولفه آن برابر است با آخرین مولفه

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0 \xrightarrow{\text{در استوانه‌ای}} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta)+\frac{\partial}{\partial z}v_z=0$$

در مختصات استوانه‌ای

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \Rightarrow dx = -r\sin\theta\, d\theta + \cos\theta\, dr \\ y = r\sin\theta \Rightarrow dy = r\cos\theta\, d\theta + \sin\theta\, dr \\ z = z \Rightarrow dz = dz \end{cases}$$

$$dx^2+dy^2+dz^2 = (h_1 dx_1)^2+(h_2 dx_2)^2+(h_3 dx_3)^2$$

$$(-r\sin\theta\, d\theta+\cos\theta\, dr)^2+(r\cos\theta\, d\theta+\sin\theta\, dr)^2+dz^2 = h_1^2(dr)^2+h_2^2(d\theta)^2+h_3^2(dz)^2$$

$$r^2\sin^2\theta(d\theta)^2+\cos^2\theta(dr)^2 \cancel{-2r\sin\theta\cos\theta\, dr\, d\theta}+r^2\cos^2\theta(d\theta)^2+\sin^2\theta(dr)^2$$

$$\cancel{+2r\sin\theta\cos\theta\, dr\, d\theta}+dz^2 = h_1^2(dr^2)+h_2^2(d\theta)^2+h_3^2(dz)^2$$

$$\overbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}^{1}(dr)^2+r^2\overbrace{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}^{1}(d\theta)^2+(dz)^2 = h_1^2(dr)^2+h_2^2(d\theta)^2+h_3^2(dz)^2$$

$$(dr)^2+r^2(d\theta)^2+(dz)^2 = h_1^2(dr)^2+h_2^2(d\theta)^2+h_3^2(dz)^2$$

$$\begin{cases} h_1^2=1 \Rightarrow h_1=1 \\ h_2^2=r \Rightarrow h_2=r \\ h_3^2=1 \Rightarrow h_3=r \end{cases}$$

$$A=\vec{V}=V_r e_r+V_\theta e_\theta+V_z e_z$$

$$\nabla\cdot\vec{V}=\frac{1}{1\times r\times 1}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\times 1\times V_r)+\frac{\partial}{\partial\theta}(1\times 1\times V_\theta)+\frac{\partial}{\partial z}(1\times r\times V_z)\right]=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(V_\theta)+\frac{\partial}{\partial z}(V_z)=0$$

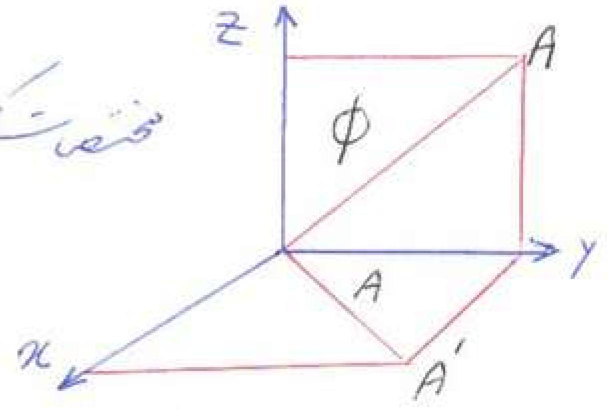
صفحه 20

تکلیف شماره 4 :

معادله پیوستگی در سیستم دکارتی بصورت زیر داده شده است در سیستم استوانه‌ای شکل آن را بنویسید.

اطلاعات مربوط به تمرین 5

مختصات کروی



$$\begin{cases} x = r \sin\phi \cos\theta \\ y = r \sin\phi \sin\theta \\ z = r \cos\phi \\ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \\ \phi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \end{cases}$$

(r, θ, ϕ)

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$$ تمرین 1

تکلیف شماره 5 :

معادله پیوستگی را در مختصات کروی بدست آورید شکل بردار چرخش در یک مختصات چگونه است $(\nabla \times V)$

تکلیف شماره 6 :

رابطه شتاب را در مختصات استوانه‌ای بدست آورید و جملات موضعی و شتاب جابجایی را مشخص کنید.

تعریف تابع جریان:

یک تابع دو متغیره از x و y است که در جریانهای دائمی تراکم ناپذیر و حتماً دو بعدی تعریف می‌شود اگر جریان این شرایط را داشته باشد چرخشی باشد یا غیر چرخشی می‌توان تابع جریان را برای آن بکار برد با توجه به اینکه دو مولفه سرعت را می‌توان برحسب تابع جریان نوشت این عمل باعث کاهش دو متغیره به یک متغیره می‌شود و لذا تحلیل را ساده می‌کند مولفه‌های سرعت (u,v) بصورت روابط زیر به تابع جریان مربوط می‌شود

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

معادله پیوستگی برای جریان دو بعدی بصورت زیر است

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

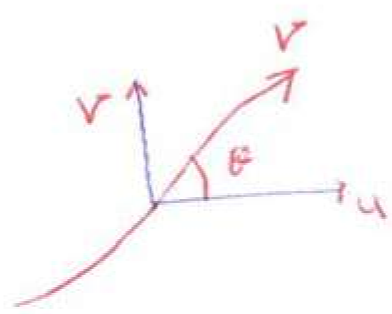
با جایگزاری مولفه‌های سرعت برحسب تابع جریان در این رابطه خواهیم داشت

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = 0$$

با توجه به اینکه تابع جریان معادله پیوستگی را ارضاء نمود معادله از این تابع قابل قبول است

$$V = ui + vj$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \longrightarrow v\,dx - u\,dy = 0$$



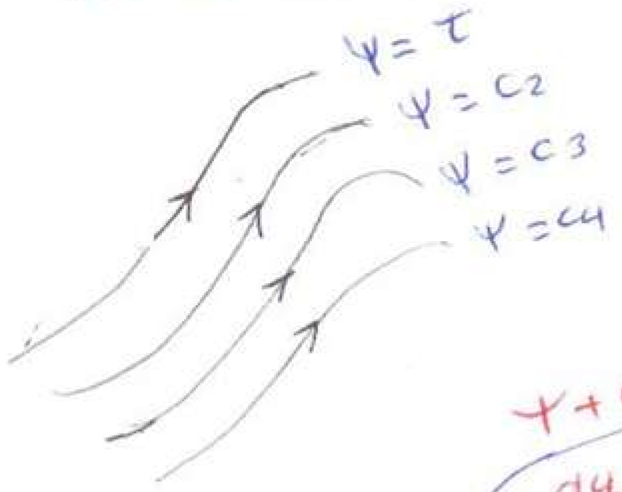
$d\psi = ?$ $\qquad \psi = \psi(x, y)$

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy$$

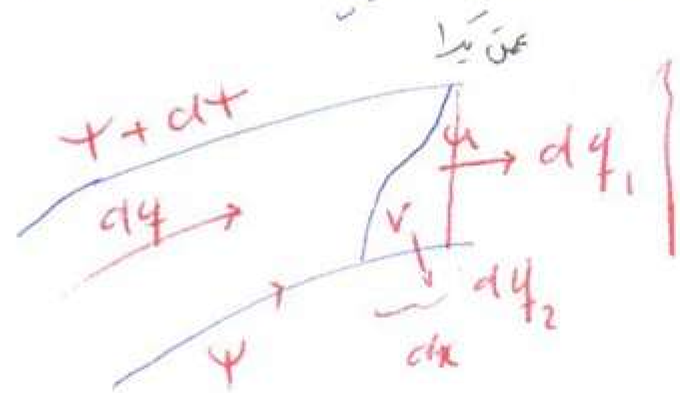
$$d\psi = -v\,dx + u\,dy$$

for a streamline : $u\,dy - v\,dx = 0 \longrightarrow d\psi = 0$

مفهوم جمله فوق آن است که روی یک خط جریان مقدار ψ ثابت است



در یک میدان جریان خطوط جریان همدیگر را قطع نمی‌کنند و هر خط جریان دارای یک مقدار ثابت ψ است.



$$dq = dq_1 + dq_2$$

$$dq = u\,dy - v\,dx = d\psi \Longrightarrow dq = d\psi \Longrightarrow \int dq = \int d\psi \Longrightarrow \boxed{q = \psi_2 - \psi_1}$$

با توجه به روابط فوق نرخ جریان حجمی (q) در واحد عمق بین دو خط جریان ψ_1 و ψ_2 برابر اختلاف آن دو خواهد بود

تابع جریان در سیستم استوانه‌ای:

$$\psi = \psi(r, \theta)$$

$$V_r = \frac{\partial \psi}{r\,\partial \theta} \qquad u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

تمرین

ثابت کنید که تابع جریان در معادله پیوستگی سیستم استوانه‌ای صدق می‌کند. (دو بعدی)

تمرین)

مولفه‌های سرعت در یک جریان تراکم ناپذیر بصورت زیر داده شده است

$$\begin{cases} u = 2y = u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = 4x = v = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

اولاً تابع جریان این میدان را بدست آورید

ثانیاً خطوط جریان را ترسیم نمائید — Stream line

ثالثاً جهت جریان را هم بدست آورید — Direction

$u = 2y$

$v = 4x$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial y} = 2y \Rightarrow \psi = \int 2y\,dy + f_{(x)} \Rightarrow \psi = y^2 + f(x)$$

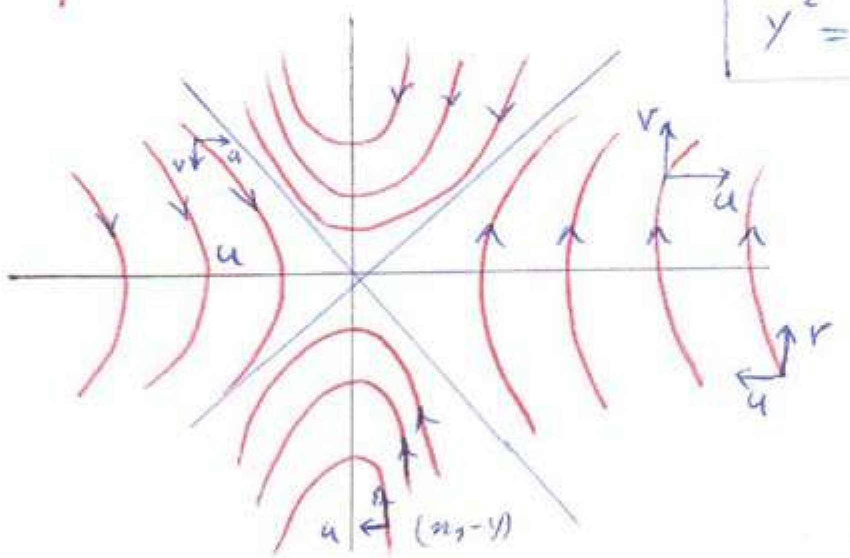
$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \Rightarrow \frac{d\psi}{dx} = -4x \Rightarrow f'(x) = -4x = f(x) = -2x^2 + c$$

$$\boxed{\psi = y^2 - 2x^2}$$

$$y^2 - 2x^2 = c \quad \begin{cases} c = 1 \\ c = 2 \\ c = -1 \\ c = -2 \end{cases} \Rightarrow y^2 - \frac{x^2}{\frac{1}{2}} = c$$

$c = 0$

$$\boxed{y^2 = 2x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}x}$$



اگر c مثبت باشد

اگر c منفی باشد

جهت بستگی به u و v دارد

تابع پتانسیل سرعت: Velocity Potential

همچون تابع جریان یک تابع سه متغیره از x و y و z است که بر خلاف تابع جریان در میدان‌های ۳ بعدی هم قابل تعریف است اما می‌توان آن را در جریان‌های غیرچرخشی استفاده کرد

بطور کلی می‌توان گفت پتانسیل سرعت تابعی است که گرادیان آن در هر راستا مؤلفه سرعت در آن راستا را می‌دهد

مؤلفه‌های سرعت بصورت زیر با تابع پتانسیل سرعت مربوط می‌شوند.

$\phi = (x, y, z)$

$$u = \frac{d\phi}{dx}, \qquad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

(8) $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

(9) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) = 0$$

(10) $$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 = \nabla^2 \phi = 0$$

با توجه به اینکه در یک میدان تراکم ناپذیر همواره (8) برقرار است با جایگذاری u و v و w در معادله پیوستگی بدست می‌آوریم (9) و (10) ...

Irrotational flow

$$\nabla \times V = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow i\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

$$\text{I}\quad \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \qquad \text{II}\quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad \text{III}\quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\text{I}\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) = 0$$

$$\text{II}\quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) = 0$$

$$\text{III}\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = 0$$

ملاحظه می‌شود که پتانسیل سرعت بدون هیچ گونه فرض شرایط غیر چرخشی بودن جریان را ارضاء می‌نماید در حالیکه اتوماتیک وار معادله پیوستگی را ارضاء نمی‌کند و باید ($\nabla^2\phi = 0$) برقرار باشد تا معادله پیوستگی ارضاء شود در حالیکه تابع جریان اتوماتیک وار معادله پیوستگی را ارضاء می‌کرد

7 تمرین) رابطه‌ای مشابه $\boxed{\nabla^2\phi = 0}$ برای تابع جریان بدست آورید.

8 تمرین) پتانسیل سرعت در یک میدان جریان دو بعدی بصورت $\phi = \frac{5}{3}x^3 - 5xy^2$ است
نشان دهید که رابطه پیوستگی ارضاء می‌شود $\nabla^2\phi = 0$ همچنین تابع جریان متناسب با آن را بیابید

پتانسیل سرعت در مختصات استوانه:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$v = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

اثبات عمود بودن خطوط هم پتانسیل و خط جریان

$$\psi = \psi(x, y)$$

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$$

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \boxed{d\psi = -v\,dx + u\,dy}$$

$$\boxed{\phi = \phi(x, y) \qquad d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy}$$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \Rightarrow \boxed{d\phi = u\,dx + v\,dy}$$

شیب خط مماس

ضریب زاویه خط مماس

$$d\psi = 0 \Rightarrow -v\,dx + u\,dy = 0 \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\psi = cte} = \frac{v}{u}$$

$$d\phi = 0 \Rightarrow u\,dx + v\,dy = 0 \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\phi = cte} = \frac{-u}{v}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\psi = cte} \times \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\phi = cte} = -1$$

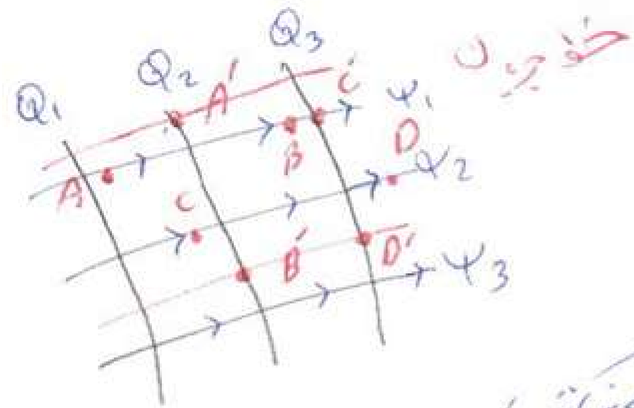
یعنی خط ϕ ثابت به خطوط ψ ثابت عمود خواهد بود.

همان طور که می دانیم دو منحنی زمانی بر هم عمودند که ضریب زاویه ها (شیب) خطوط مماس بر آنها در نقطه تماس بر هم عمود باشند.

ضریب زاویه خط مماس روی منحنی ψ ثابت از برابر قرار دادن $d\psi = 0$ و محاسبه $\frac{dy}{dx}$ است

به همین ترتیب ضریب زاویه خط مماس بر منحنی ϕ ثابت از برابر قرار دادن $d\phi = 0$ و محاسبه $\frac{dy}{dx}$ حاصل است. از طرفی حاصلضرب این دو ضریب زاویه برابر $\boxed{-1}$ است. لذا دو خط مماس و در نتیجه دو منحنی ψ ثابت و ϕ ثابت بر هم عمود خواهند بود. لازم بذکر است که تمام نقاط روی یک خط

تک خط ψ ثابت مسیر واحدی دارند و تمام نقاط روی یک خط φ ثابت دارای سرعت یکسانی هستند



در شکل زیر دو نقطه A و B متعلق به یک خط جریان بوده

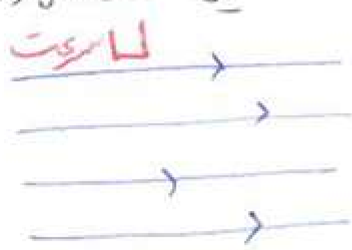
و ذره ای که از نقطه A عبور می‌کند لزوماً از B می‌گذرد

C و D هم متعلق به یک خط جریان می‌باشند (خطوط جریان همدیگر را قطع نمی‌کنند)

از طرفی دو نقطه A' و B' با این که روی دو خط جریان متفاوت قرار گرفته‌اند سرعت یکسانی دارند زیرا هر دو روی یک خط ϕ ثابت واقع اند نقاط C' و D' از آن جایی که روی یک خط ϕ ثابت واقع اند لذا هم سرعت بوده ولی سرعت آنها با سرعت نقاط A' و B' متفاوت است.

جریان یکنواخت : (uniform flow)

جریانی را یکنواخت گویند هرگاه خطوط جریان موازی یکدیگر و به صورت خطوطی مستقیم باشد. این خطوط می‌تواند بصورت افقی و یا نسبت به محور x زاویه دار باشند



جریان آزاد سیال مانند هوا، آب و غیره با این الگو مدل می‌شود

$$u = U \qquad v = 0$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \Rightarrow \frac{d\psi}{dy} = U \Rightarrow d\psi = U\,dy$$

$$\int d\psi = \int U\,dy \Rightarrow \boxed{\psi = Uy + f(x)}$$

$$v = -\frac{d\psi}{dx} \Rightarrow \frac{d\psi}{dx} = 0 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = c$$

$$\Rightarrow \psi = Uy + \cancel{c} \Rightarrow \boxed{\psi = Uy}$$

محاسبه ϕ

$$u = U,\ v = 0 \Rightarrow u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = U \Rightarrow d\phi = U\,dx \Rightarrow \phi = \int u\,dx$$

$$\phi = Ux + f(y)$$

$$v = \frac{d\phi}{dy} \Rightarrow \frac{d\phi}{dy} = 0 \Rightarrow f'(y) = 0 \Rightarrow \boxed{f(y) = c}$$

$$\phi = Ux + \cancel{c'} \Rightarrow \boxed{\phi = Ux}$$

برای رسم خطوط جریان در این حالت (مانند هر حالت دیگر) کافی است که ثابت $c = \psi$ قرار داده و با دادن عدد به c خطوط حاصل را رسم کنید

$$\begin{cases} \phi = Ux \\ \psi = Uy \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi = c \Rightarrow Uy = c \Rightarrow y = \dfrac{c}{U} \\ \phi = c \Rightarrow Ux = c' \Rightarrow x = \dfrac{c'}{U} \end{cases}$$

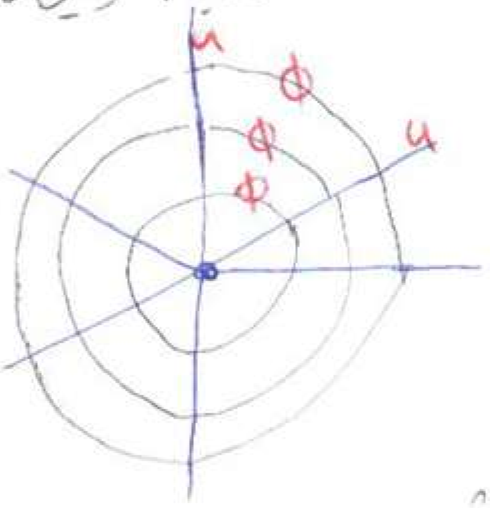
ثابت / ثابت

تمرین) برای جریان یکنواخت زاویه دار که خط جریان زاویه α می سازند تابع جریان و تابع پتانسیل را بدست آورده و ثابت کنید که این دو بر هم عمود اند

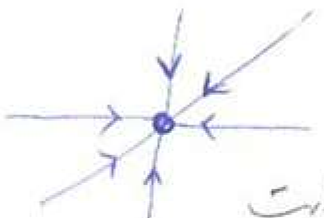
$$\begin{cases} u = U\cos\alpha \\ v = U\sin\alpha \end{cases}$$

چشمه و چاه: (Source & Sink)

هر چند در عمل چشمه و چاه دو بعدی وجود ندارد ولی می توان به صورت زیر آنها را تعریف نمود
استوانه ای را در نظر بگیرید به طول $\underline{b}$ عمود بر تابلو (صفحه کاغذ) جریان از درون استوانه به سمت بیرون در جریان
هرگاه خطوط جریان به صورت شعاعی از دهانه خروجی استوانه به بیرون پخش شوند بطوریکه با افزایش فاصله از
کانون (چشمه) از سرعت کاسته می شود جریان حاصل را چشمه می نامند



اگر جهت جریان معکوس شود یعنی خطوط جریان بصورت شعاعی و در زوایای مختلف وارد کانون یا مرکز شوند جریان حاصل را چاه می نامند. از آنجایی که جریان بصورت شعاعی وارد و خارج می شود



لذا مؤلفه چرخشی سرعت وجود ندارد یعنی $V_\theta = 0$ و تنها مؤلفه شعاعی (V_r) موجود است

$$Q = \underset{2\pi rb}{A} \times V_r \qquad V_r = \frac{Q}{2\pi rb} \qquad \boxed{\frac{Q}{2\pi b} = m}$$

قدرت چشمه یا چاه

با توجه به اینکه مقدار $\frac{Q}{2\pi b}$ همواره برای یک چشمه یا چاه ثابت است.

لذا مقدار آن را m می نامیم که به آن قدرت (شدت) چشمه یا چاه m گویند.

$$\boxed{V_r = \frac{m}{r}}$$

هرگاه $m = +$ باشد منظور چشمه و هرگاه $- = m$ منظور چاه است در نتیجه $V_r = \frac{m}{r}$ یعنی رابطه فوق این است که با فاصله گرفتن از کانون سرعت کاسته می شود

$$V_r = \frac{1}{r}\frac{d\psi}{d\theta} \Rightarrow \cancel{\frac{1}{r}}\frac{d\psi}{d\theta} = \frac{m}{\cancel{r}} = d\psi = m\,d\theta$$

$$\int d\psi = \int m\,d\theta \Rightarrow \boxed{\psi = m\theta + f(r)}$$

$$V_\theta = -\frac{d\psi}{dr} \Rightarrow \frac{d\psi}{dr} = 0 \Rightarrow f'(r) = 0 \Rightarrow f(r) = c$$

$$\psi = m\theta + \cancel{c} \Rightarrow \boxed{\psi = m\theta}$$

$$V_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} \Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{m}{r} = d\phi = m\frac{dr}{r} \Rightarrow \phi = m\ln r + f(\theta)$$

$$V_\theta = \frac{\partial\phi}{r\partial\theta} \Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow f'(\theta) = 0 \Rightarrow f(\theta) = c$$

$$\phi = m\ln r + \cancel{c} \Rightarrow \boxed{\phi = m\ln r}$$

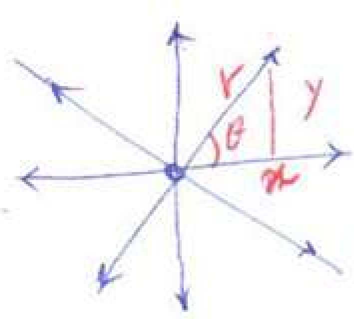
$$\begin{cases} \psi = m\theta = m\theta = c & \boxed{\theta = \frac{c}{m}} \\ \phi = m\ln r \Rightarrow m\ln r = c \Rightarrow & \boxed{\ln r = \frac{c}{m}} \end{cases}$$

$\ln r = c$

$\ln r = k$ اگر دایره می شود

$$\boxed{\psi = m\tan^{-1}\frac{y}{x}}$$

$$\boxed{\phi = m\ln\sqrt{x^2+y^2}}$$



در مختصات دکارتی

$$\boxed{r^2 = x^2 + y^2}$$

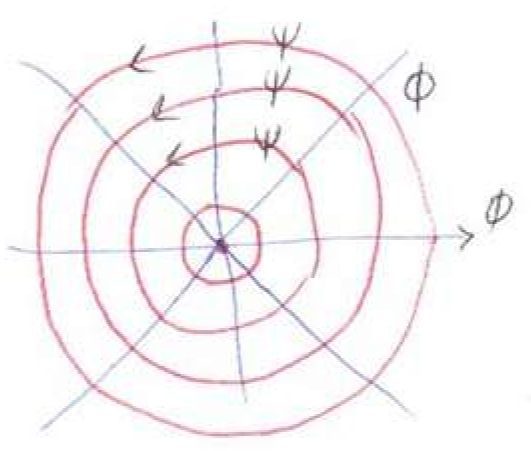
$$\boxed{\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}}$$

هرگاه بشقابی را به صورت افقی زیر شیر باریکی آب قرار دهیم جریان حاصل تقریباً شبیه چشمه خواهد بود.

ورتکس : (Vortex) گردابه :

هرگاه در میدان جریان تنها مؤلفه چرخشی سرعت وجود داشته باشد (در راستای شعاعی سرعت مؤلفه نداشته باشد) به آن میدان گردابه گویند از اینجا می توان فهمید با توجه به اینکه خطوط جریان در vortex بصورت دایره است لذا خطوط هم پتانسیل (هم سرعت) به شکل خطوطی عمود

عمود بر دوایر خواهد بود. درحقیقت تابع جریان Vortex بصورت تابع پتانسیل چشمه یا چاه و تابع پتانسیل



Vortex بصورت تابع جریان چشمه یا چاه خواهد بود

گردبادها یا گردابه ها را بصورت Vortex درنظر گرفته تحلیل می کنند

$V_r = 0$

$V_\theta = \frac{K}{r}$

قدرت گردابه $\frac{K}{2\pi b} = k$

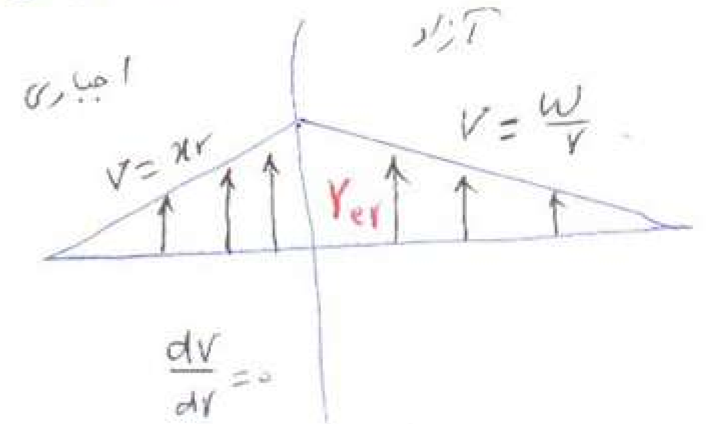
مقدار K را قدرت Vortex می نامند

از این رابطه مشخص می شود که با افزایش فاصله از مرکز Vortex از مقدار سرعت کاسته می شود

تمرین) برای Vortex تابع جریان و پتانسیل سرعت را بدست آورید.

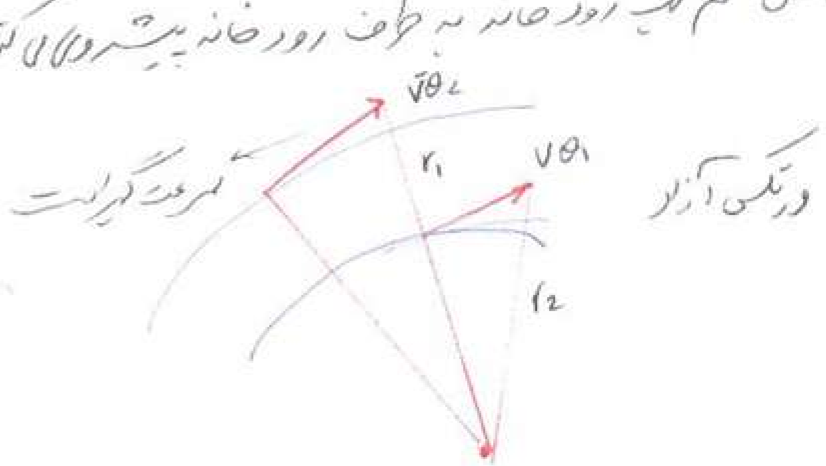
گرداب گردباد طبیعی:

در گردابه یا گردباد طبیعی در فاصله دور از مرکز با توجه به اینکه می توان جریان را غیرچرخشی فرض کرد و از اثرات لزجت هم چشم پوشید بنابراین می توان جریان را در آن نواحی بصورت Vortex آزاد مدل کرد در حالیکه از مرکز گردابه تا شعاع خاصی (بحرانی r_{cr}) هم جریان چرخشی است و هم اثرات لزجت بسیار مهم است لذا در این حالت Vortex یک Vortex آزاد نخواهد بود به این گردابه ورتکس اجباری گفته می شود. در حالت ورتکس اجباری با افزایش فاصله از مرکز به سرعت هم افزوده می شود

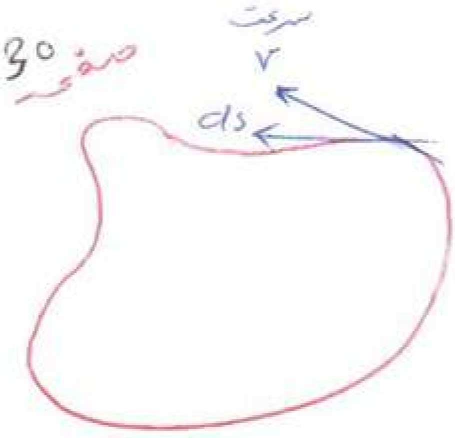


تمرین)

توضیح دهید چرا به مرور زمان خشکی در سمت داخل خم یک رودخانه به طرف رودخانه پیشروی می کند و همچنین در سمت خارج خم رودخانه به سمت خشکی



صفحه 30



سیرکولاسیون : Circulation

$$\Gamma = \oint \underbrace{V \cdot ds}_{\text{بردار}} \rightarrow V\,ds\cos\alpha$$

مماس بر مسیر

$$\Gamma = \oint \nabla\phi \cdot ds = \oint d\phi$$

یک بحث کاملاً ریاضی است با استفاده از سیرکلاسیون بعداً نیروی لیفت یا برا تعریف می‌شود

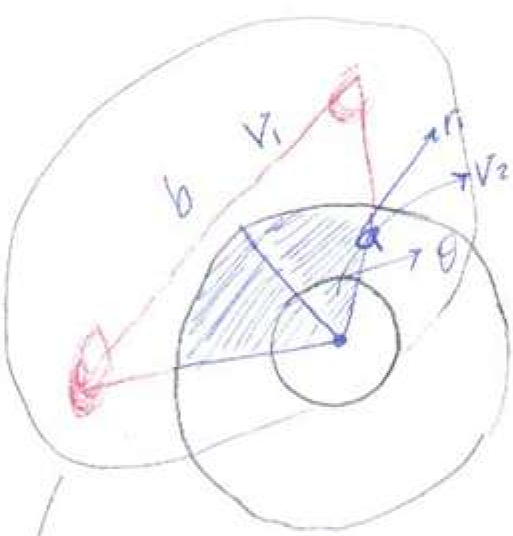
به موجب تعریف سیرکلاسیون برابر انتگرال خطی مؤلفهٔ مماس سرعت حول یک مسیر بسته می‌باشد

با توجه به اینکه $(V \cdot ds)$ می‌شود $V\,ds\cos\alpha$ لذا می‌توان گفت سیرکلاسیون می‌شود

$$\Gamma = \int^{2\pi} V\,ds\cos\alpha$$

در جریان غیر چرخشی مقدار $\Gamma = 0$

(چشمه - چاه - ورتکس) غیر چرخشی هستند



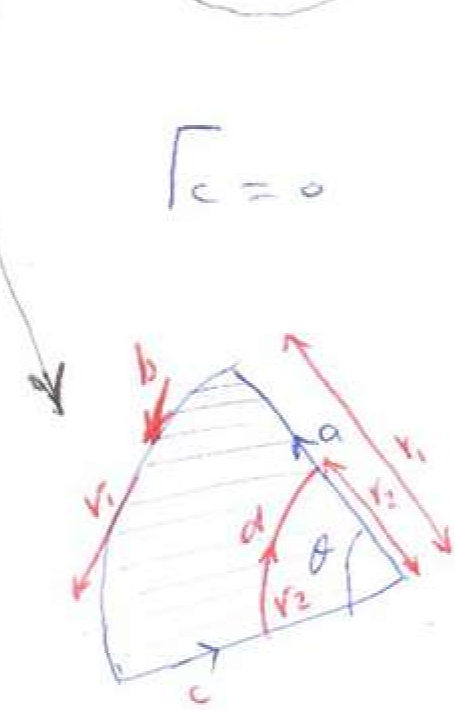
$$\Gamma = \Gamma_a + \Gamma_b + \Gamma_c + \Gamma_d$$

$$\Gamma_a = 0$$

$$\Gamma_b = \int_0^{\theta} V_1 r_1\, d\theta = r_1 V_1 \theta$$

$$\Gamma_c = 0$$

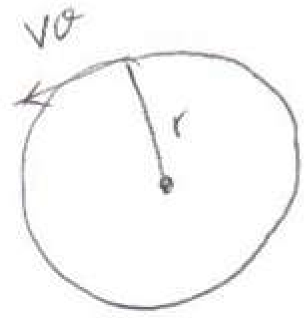
$$\Gamma_d = \int_{\theta}^{0} V_2 r_2\, d\theta = -r_2 V_2 \theta$$



$$\Gamma_{\text{کل}} = r_1 V_1 \theta - r_2 V_2 \theta$$

$$\begin{cases} \Gamma = \theta\,(r_1 V_1 - r_2 V_2) = 0 \\ V = \dfrac{k}{r} \Rightarrow V_1 r_1 = V_2 r_2 \end{cases}$$

همانطور که در بالا اثبات شد مقدار سیرکلاسیون حول یک منحنی که از مرکز ورتکس عبور نکند برابر صفر است اما اگر سیرکلاسیون را حول یک منحنی که از مرکز ورتکس می‌گذرد در نظر بگیریم سیرکلاسیون صفر نخواهد بود



$$\Gamma = \oint V \cdot ds = \int_0^{2\pi} V_\theta \, r \, d\theta = r V_\theta 2\pi$$

$$\left\{ V_\theta = \frac{k}{r} = \frac{K}{2\pi r} \qquad r V_\theta 2\pi = K \right.$$

همانطور که ملاحظه شد سیرکولاسیون حول منحنی که مرکز را در بر داشته باشد غیر صفر است. اما حول منحنی که مرکز را در بر نداشته باشد صفر است.

32 ۹۱/۱/۲۱

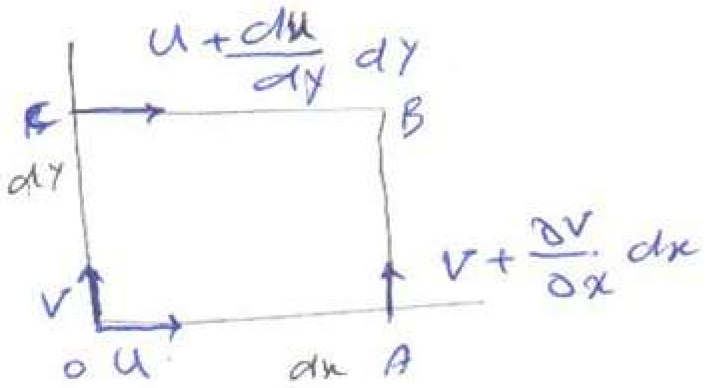
نکاتی از سوالات پیشرفته

ورتیسیتی $\zeta = 2\omega$

vorticity

curl v

I: $\boxed{\zeta = 2\omega = \vec{\nabla} \times \vec{V}}$ II: $\boxed{\Gamma = \oint V \cdot ds}$



$$\Gamma = \Gamma_{OA} + \Gamma_{AB} + \Gamma_{BC} + \Gamma_{CO}$$

① $= u\,dx + \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx\right) dy - \left(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right) dx$

② $- v\,dy$

⑦ $\boxed{\Gamma = \oint \vec{V} \cdot ds = \iint (\nabla \cdot V)\, n\, dA}$

③ $d\Gamma = \frac{\partial v}{\partial x} dx\,dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx\,dy$

④ $d\Gamma = \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{\zeta} \underbrace{dx\,dy}_{dA} \Rightarrow$ ⑤ $\boxed{\Gamma = \iint \zeta\, dA}$ ⑥ $d\Gamma = \zeta\, dA$

المان سیالی را مطابق شکل در نظر می‌گیریم اگر در امتداد OA سرعت u باشد در فاصله dy سرعت برابر $u + \frac{\partial u}{\partial y} dy$ خواهد بود همچنین سرعت در امتداد OC v باشد به فاصله dx از آن سرعت برابر $v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$ است بنابراین الان می‌خواهیم سیرکولاسیون را حساب کنیم با فرض که مقدار سیرکولاسیون در پادساعتگرد + و در حالت ساعتگرد منفی است و می‌دانیم سیرکولاسیون برابر حاصلضرب سرعت x در طول مسیر است II

بنابراین می‌توان نوشت ① و ②

$\Gamma = \oint V \times ds$

با ساده کردن 3 و ④ اما از قبل به یاد داریم که $\overbrace{\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}}^{\zeta}$ برابر vortisity است و در نتیجه سیرکولاسیون برابر $\Gamma = \iint \zeta\, dA$ است

از ریاضیات ۲ به یاد دارید که با استفاده از تعمیم گرین می‌توان انتگرال روی یک مسیر بسته را به انتگرال دوگانه روی یک سطح تبدیل کرد یعنی ⑦ که به نوعی مؤید اثبات ماست

نتیجه بسیار مهم: از رابطه $\boxed{\Gamma = \iint \zeta\, dA}$ نتیجه می‌شود چنانچه vorticity = 0 باشد جریان غیرچرخشی باشد مقدار Γ صفر خواهد بود در حالی که از صفر بودن Γ نمی‌توان نتیجه گرفت که جریان غیرچرخشی است

ترکیب جریانهای ساده — فصل چهارم

در این فصل با ترکیب جریانهای ساده‌ای مانند چشمه، چاه، گرداب به تحلیل جریان اطراف یک بیضی، استوانه کره و ... خواهیم پرداخت. از اصل سوپرپوزیشن برای تعیین تابع کلی استفاده می‌کنیم. این اصل بیان می‌کند که تابع جریان یک جریان مرکب برابر مجموع تابع جریانهای تک تک آن جریانها خواهد بود. این اصل در مورد پتانسیل سرعت هم صادق خواهد بود بنابراین:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 + \cdots \psi_n \qquad \psi_t = \sum_{i=1}^{n} \psi_i$$

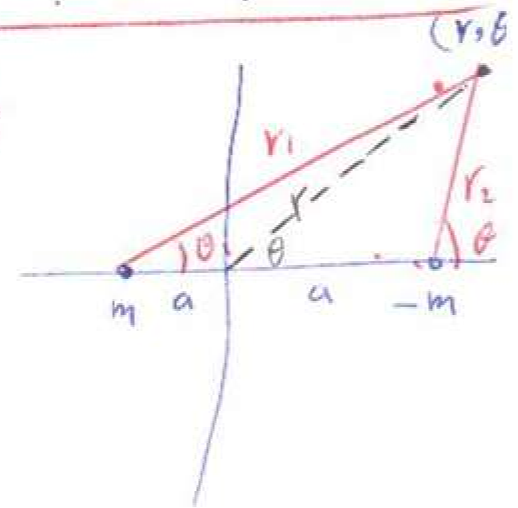
$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \cdots \phi_n \qquad \phi_t = \sum_{i=1}^{n} \phi_i$$

پس از تعیین تابع جریان کل و یا پتانسیل جریان سرعت کل مؤلفه‌ها را می‌توان بصورت زیر بدست آورد

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial \psi_t}{\partial y} = \dfrac{\partial \phi_t}{\partial x} \\ v = -\dfrac{\partial \psi_t}{\partial x} = \dfrac{\partial \phi_t}{\partial y} \end{cases} \qquad \begin{cases} V_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi_t}{\partial \theta} = \dfrac{\partial \phi_t}{\partial r} \\ V_\theta = -\dfrac{\partial \psi_t}{\partial r} = \dfrac{\partial \phi_t}{r\,\partial \theta} \end{cases}$$

ترکیب چشمه و چاه هم قدرت: چشمه‌ای به قدرت m و چاهی به قدرت $-m$ در نقطه

$$\begin{cases} m \quad (-a,0) \\ m \quad (0,a) \end{cases}$$



$$\psi_t = \psi_{source}^{\text{چاه}} + \psi_{sink}^{\text{چشمه}}$$

$$\psi_t = m\theta_1 - m\theta_2$$

$$\frac{\psi}{m} = \theta_1 - \theta_2 \Rightarrow$$

$$tg\frac{\psi}{m} = tg(\theta_1 - \theta_2) = \frac{tg\,\theta_1 - tg\,\theta_2}{1 + tg\,\theta_1\, tg\,\theta_2}$$

سرعت منتج از وجود چاه و چشمه در این فاصله چه خواهد بود؟

$$= \frac{\dfrac{r\sin\theta}{a + r\cos\theta} - \dfrac{r\sin\theta}{r\cos\theta - a}}{1 + \dfrac{r\sin\theta}{a + r\cos\theta} \times \dfrac{r\sin\theta}{r\cos\theta - a}}$$

روند حل این مسائل به این صورت است که نقطه‌ای را در صفحه مختصات به عنوان مدنظر قرار می‌دهیم از آن نقطه خطوطی به سمت تک تک جریانهای ساده می‌کشیم طول خطوط را r و زاویه‌ای که این خط با افق می‌سازد را با θ نشان می‌دهیم برای هر

$$tg\frac{\psi}{m} = \frac{\dfrac{r^2\sin\theta\cancel{\cos\theta} - \cos r\sin\theta - \cos r\sin\theta - r^2\sin\theta\cos\theta}{(a+r\cancel{\cos\theta})(r\cancel{\cos\theta}-a)}}{\dfrac{r^2\cos^2\theta - a^2 + r^2\sin^2\theta}{(a+r\cancel{\cos\theta})(r\cancel{\cos\theta}-a)}}$$

$$= \frac{-2ar\sin\theta}{r^2\underbrace{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}_{1}-a^2} = \boxed{\frac{-2ar\sin\theta}{r^2-a^2}}$$

$$tg\frac{\psi}{m} = \frac{-2ar\sin\theta}{r^2-a^2} \Rightarrow \frac{\psi}{m} = tg^{-1}\left(\frac{-2ar\sin\theta}{r^2-a^2}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\psi = m\, tg^{-1}\left(\frac{-2ar\sin\theta}{r^2-a^2}\right)}$$

(8) $V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \Rightarrow V_r$

(9) $V_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} \Rightarrow V_\theta$

(10) $V = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2}$

جریان از مبدا اندیس معین استفاده می‌کنیم

همچنین از نقطه به مرکز مختصات رسم می‌کنیم و شعاعی را که با افق می‌سازد را با θ بدون اندیس نشان دادیم

آنچه که تاکنون بیان شد برای تمام میدان‌ها صادق است حال یک سیستم مناسب انتخاب کنید دکارتی یا قطبی در تحلیل که ما در اینجا قرار داده‌ایم از سیستم قطبی استفاده نموده‌ایم بنابراین x و y در تحلیل ما ظاهر نخواهد شد و صرفاً تابع جریان کلی برحسب r و θ خواهد بود پس از اینکه تابع جریان کل بدست آمد از برابر قرار دادن آن با مقدار ثابت c و دادن اعداد مختلف به c می‌توان خطوط جریان را رسم کرد

همچنین با استفاده از روابط 8 و 9 مؤلفه‌های سرعت را پیدا کرده و برآیند سرعت از رابطه (10)

تحلیل ما در اینجا به اتمام رسید

$$\begin{cases} -m\, tg^{-1}\dfrac{2ar\sin\theta}{r^2-a^2} = c \\[2ex] \dfrac{2ar\sin\theta}{r^2-a^2} = tg\dfrac{c}{m} \Rightarrow r = r\cos\theta \end{cases}$$

تمرین) این مسئله را با سیستم دکارتی تحلیل کنید.

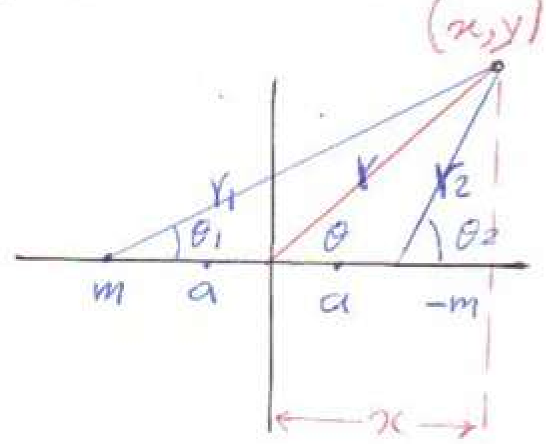
تکلیف :

تحلیل قطبی را با استفاده از مختصات دکارتی بدست آورید علاوه بر تابع جریان کل پتانسیل سرعت را بیابید مولفه‌های سرعت را از هر دو روش مقایسه کنید و بردار سرعت برآیند را تعیین کنید

$$\psi_t = m\,tg^{-1}\frac{y}{x+a} - m\,tg^{-1}\frac{y}{x-a}$$

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad u = \frac{\partial\phi}{\partial x}$$

$$v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad v = \frac{\partial\phi}{\partial y}$$



Doublet :

ترکیب چشمه و چاه هم قدرت که فاصله آنها به صفر میل شده باشد را Doublet می‌نامند

$$\psi = m\,tg^{-1}\left(\frac{-2ar\sin\theta}{r^2-a^2}\right)$$

$$\lim tg^{-1}\frac{-2ar\sin\theta}{r^2-a^2} = \lim tg^{-1}\frac{-2ar\sin\theta}{r^2}$$

$$= \lim_{a\to 0}\frac{-2ar\sin\theta}{r^2} = \boxed{\frac{-2a\sin\theta}{r}}$$

$$\Rightarrow \psi = \frac{-2am\sin\theta}{r} \quad \text{اگر } 2am = \lambda \Rightarrow \boxed{\psi = \frac{-\lambda\sin\theta}{r}}$$

تکلیف :

پتانسیل سرعت را برای Doublet بدست آورید

مشاهده می‌شود که خطوط ϕ ثابت و ψ ثابت (پتانسیل سرعت ثابت و تابع جریان ثابت)
بصورت دوایر عمود بر هم خواهند بود

$$\phi_{Doublet} = \frac{\lambda \cos\theta}{r}$$

$$\psi = \frac{-\lambda r \sin\theta}{r^2} \qquad \psi = \frac{-\lambda y}{x^2+y^2} \quad , \quad x^2+y^2 = -\frac{\lambda}{\psi} y$$

$$x^2+y^2+\frac{\lambda}{\psi}y = 0 \qquad \psi = c$$

$$x^2+y^2+\frac{\lambda}{\psi}y+\frac{\lambda^2}{4\psi^2} = \frac{\lambda^2}{4\psi^2}$$

$$x^2+\left(y+\frac{\lambda}{4\psi}\right)^2 = \frac{\lambda^2}{4\psi^2}$$

$$x^2+\left(y+\frac{\lambda}{2c}\right)^2 = \frac{\lambda^2}{4c^2}$$

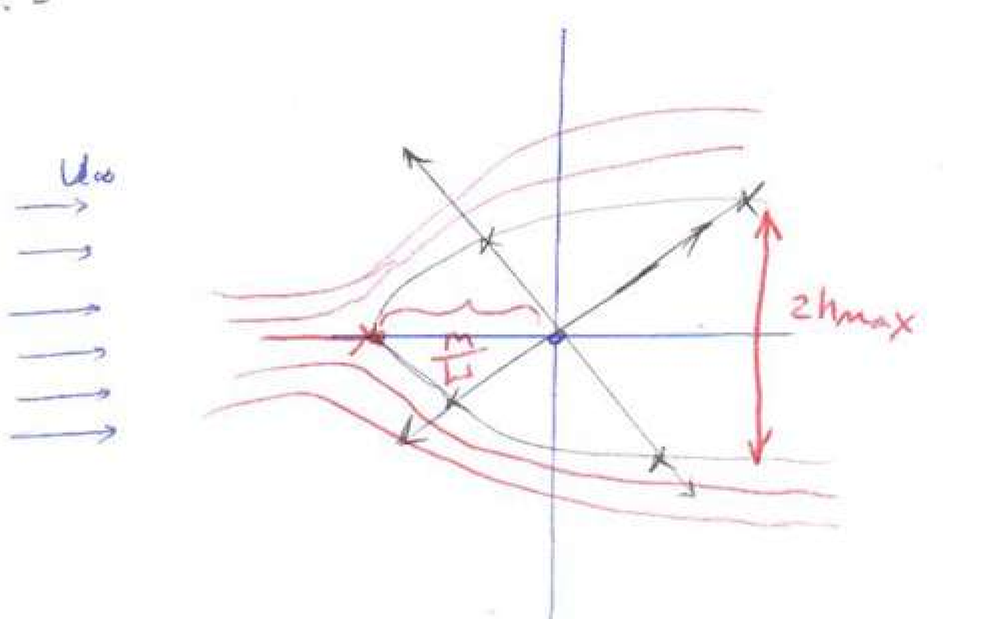
به طریق زیر می‌توان ثابت کرد که خطوط ψ_{cot} دسته دوایری هستند که مرکز آن‌ها روی محور y ها واقع است. به همین روال می‌توان ثابت کرد که خطوط ϕ_{cot} برای Doublet دسته دوایری خواهند بود که مرکز آن‌ها روی محور x ها واقع است. از هندسه تحلیلی به یاد داریم که دوایری که مرکز آن‌ها بر محور y ها واقع است عمود بر دوایری هستند که مرکز روی محور x هستند لذا از اینجا ثابت می‌شود خطوط ϕ_{cot} و ψ_{cot} بر هم عمود است.

اگر جهت محدب قاشقی را روی سطح آرام آب بکشید در ابتدا اشکال شبیه Doublte خواهید داشت

تکلیف: نشان دهید در ترکیب Doublte بردار سرعت برابر خواهد بود با $\frac{\lambda}{r^2}$

ترکیب چشمه و جریان یکنواخت (جریان حول نیم بدنه):

این ترکیب که در حقیقت چشمه در مبداء قرار دارد و جریان یکنواختی با سرعت U_∞ در راستای موازی با محور x جریان دارد. این ترکیب کاربردی است. جریان در اطراف یک پل، جریان در اطراف یک جزیره، جریان به طرف یک تیر نمونه‌هایی از این جریان می‌باشد



①

$$\psi = \psi_{uniform} + \psi_{source} = \boxed{Ur\sin\theta + m\theta}$$

$$V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{1}{r}(Ur\cos\theta + m) = \boxed{U\cos\theta + \frac{m}{r}}$$

$$V_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = \boxed{-U\sin\theta}$$

Stagnation Point (S):

$$V_\theta = 0 \Rightarrow -U\sin\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta = 0 \Rightarrow \begin{cases}\theta = 0 \ \times \\ \theta = \pi \ \checkmark\end{cases}$$

غیرقابل قبول است
قابل قبول است

$$V_r = 0 \Rightarrow U\cos\theta + \frac{m}{r} = 0 \xrightarrow{\theta=\pi} r_s = \frac{m}{U}$$

چون r همیشه + و m و U + هستند جواب برابر با π است

$$\psi = Ur\sin\theta + m\theta \quad \begin{cases}\theta = \pi \\ r = \frac{m}{U}\end{cases}$$

$$\theta = \pi,\ r = \frac{m}{U} \Rightarrow \boxed{\psi = U\frac{m}{U}\cancel{\sin\pi} + m\pi} \Rightarrow \boxed{\psi = m\pi}$$

38 $Ur\sin\theta + m\theta = m\pi$

$\Rightarrow Ur\sin\theta = m(\pi-\theta)$

$$\boxed{r = \frac{m(\pi-\theta)}{U\sin\theta}}$$

نقطه سکون Stagnation Point :

در بعضی از جریان‌های مرکب و شده در همه آنها ممکن است در نقطه یا نقاطی برآیند سرعت صفر شود یعنی مؤلفه‌های سرعت در آن نقطه هر دو صفر شود اسم نقطه را نقطه سکون می‌نامند برای تعیین نقطه یا نقاط یک میدان کافی است مؤلفه‌های سرعت را از سیستم دکارتی یا قطبی تعیین کرده و برابر صفر قرار دهیم مختصات نقطه یا نقاط سکون بدست می‌آید مثلاً در مورد ترکیب جریان یکنواخت و چشمه یک نقطه سکون خواهیم داشت که بصورت زیر بدست می‌آید که برابر

$$\begin{cases} r & \dfrac{m}{U} \\ \theta & \pi \end{cases}$$

چنانچه مختصات این نقطه را در رابطه تابع جریان قرار دهیم

(16) $\boxed{\psi = Ur\sin\theta + m\theta}$

مقدار تابع جریان برای خط جریانی که از نقطه سکون می‌گذرد بدست می‌آید $\psi = m\pi$ و اگر بخواهیم معادله خط جریان دربرگیرنده نقطه سکون را بدست آوریم باید در رابطه تابع جریان (16) به جای ψ ، $m\pi$ قرار داده و r کوچک را برحسب θ بدست آورد

$$V = (V_r^2 + V_\theta^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{U^2\cos^2\theta + \frac{m^2}{r^2} + \frac{2U\cos\theta}{r}m + U^2\sin^2\theta}$$

بدست آوردن سرعت وضعیت ما لازم است

$$\Rightarrow V = \sqrt{U^2 + \frac{2mU}{r}\cos\theta + \frac{m^2}{r^2}}$$

$$\boxed{r = \frac{m(\pi-\theta)}{U\sin\theta}} \Rightarrow h = r\sin\theta = \frac{m(\pi-\theta)}{U}$$

for maximum of h

θ should be zero $\Rightarrow \boxed{h_{max} = \frac{m\pi}{U}}$

maxi thickness $= 2h_{max} = \frac{2m\pi}{U}$

max thickness :

$\theta = 0 \Rightarrow r = \infty \xrightarrow{*} V = U$

تکلیف: نشان دهید برای نیم پیکره فوق در چه زاویه‌ای سرعت در روی نیم پیکره max خواهد بود

محاسبه فشار روی نیم بدنه:

برای تعیین فشار در روی هر نقطه نیم بدنه با استفاده از معادله برنولی می‌توان بدست آورد.

معادله برنولی را بین دو نقطه یکی در بالادست جریان و دیگری نقطه‌ای روی نیم پیکره بنویسید.

$$\frac{P_\infty}{\rho g} + \frac{U_\infty^2}{2g} + \cancel{z} = \frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + \cancel{z} \Rightarrow$$

هم تراز

$$\boxed{\text{اگر} \quad V^2 = U^2 + \frac{2mU}{r}\cos\theta + \frac{m^2}{r^2}}$$

$$\frac{P_\infty}{\cancel{\rho g}} + \frac{\cancel{U_\infty^2}}{\cancel{2g}} = \frac{P}{\cancel{\rho g}} + \frac{\cancel{U^2} + \frac{2mU}{r}\cos\theta + \frac{m^2}{r^2}}{\cancel{2g}}$$

$$\frac{P_\infty - P}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{2m}{rU}\cos\theta + \frac{m^2}{r^2U^2}$$

ضریب فشار

طرفین تقسیم بر U^2

$$\frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2} = -\frac{m}{rU}\left(2\cos\theta - \frac{m}{rU}\right)$$

$$\boxed{r = \frac{m(\pi-\theta)}{U\sin\theta}}$$

قرار دادن

$$\frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2} = -\frac{\cancel{m}}{\cancel{U}}\frac{\cancel{U}\sin\theta}{\cancel{m}(\pi-\theta)}\left(2\cos\theta - \frac{\cancel{m}}{\cancel{U}}\frac{\cancel{U}\sin\theta}{\cancel{m}(\pi-\theta)}\right)$$

$2\sin\theta\cos\theta$

$$\frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{1}{\pi-\theta}\left(\frac{\sin^2\theta}{\pi-\theta} - \sin 2\theta\right)$$

تمرین: می‌دانید که در نقطه‌ای که سرعت max است فشار min است بنابراین اگر از رابطه توزیع فشار مشتق گرفته شود و θ بدست آید موقعیت فشار min معلوم می‌شود از طرفی این نقطه موقعیت سرعت max هم‌زمان خواهد بود. از رابطه توزیع فشار مشتق گرفته و θ را بدست آورید آن را با θ سرعت max مقایسه کنید

بیضی رانکین :

از ترکیب یک چشمه، چاه و یک جریان یکنواخت شکلی پدید می‌آید که به آن بیضی رانکین گفته می‌شود با این شرط که چشمه در نقطه (۰ و a-) و چاه در نقطه (۰ و a) واقع باشد

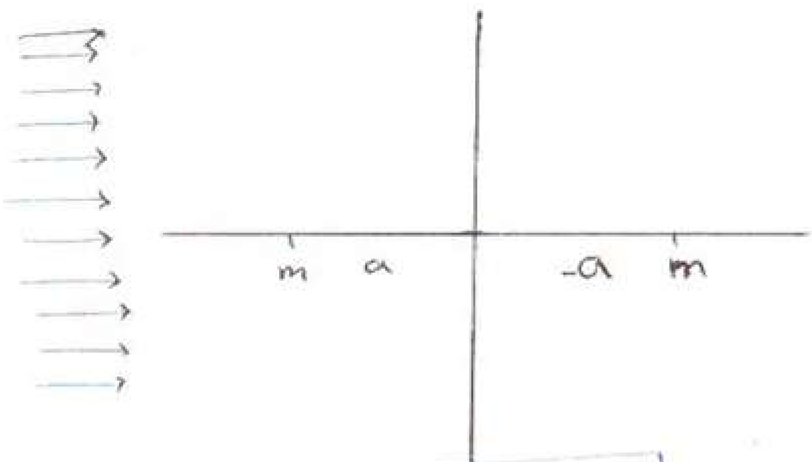
$$\psi_{tot} = \psi_{source} + \psi_{sink} + \psi_{uniform}$$

ضمنا چشمه و چاه باید هم قدرت باشند

$$\psi_{source} = m\theta_1$$

$$\psi_{sink} = -m\theta_2$$

$$\psi_{unif} = Ur\sin\theta$$



$$\boxed{\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}}$$

$$\psi_{tot} = m(\theta_1 - \theta_2) + Ur\sin\theta$$

$$\psi_{tot} = -m\tan^{-1}\frac{2ar\sin\theta}{r^2-a^2} + Ur\sin\theta$$

$$\phi_{tot} = \phi_{source} + \phi_{sink} + \phi_{unif}$$

$$= m\ln r_1 - m\ln r_2 + Ur\cos\theta = m\ln\frac{r_1}{r_2} + Ur\cos\theta$$

$$V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{1}{r}\left[-m\frac{\dfrac{2ar\cos\theta}{r^2-a^2}}{1+\left(\dfrac{2ar\sin\theta}{r^2-a^2}\right)^2} + Ur\cos\theta\right]$$

$$V_\theta = -\frac{d\psi}{dr} = -\left[-m\frac{(2a\sin\theta)(r^2-a^2) - 2r\cdot 2ar\sin\theta/(r^2-a^2)^2}{1+\left(\dfrac{2ar\sin\theta}{r^2-a^2}\right)} + U\sin\theta\right]$$

نقطه سکون $V_r, V_\theta = 0 \Rightarrow$ Stagnation Point از روی شکل چون هندسه متقارن است یا روی محور y ها یا روی محور x هاست. که در اینجا روی محور x هاست.

* برای تعیین نقاط سکون پس از ساده‌سازی V_r و V_θ آنها را برابر صفر قرار می‌دهیم و دستگاه حاصله را حل می‌کنیم از $\theta = 0, \pi$ بدست می‌آید حال این مقادیر را وارد یکی از معادلات دستگاه کرده تا فاصله نقطه‌ی سکون تا مبدأ بدست آید.

نکته: از روی هندسه‌ی ترکیب جریان کاملاً مشخص است که نقاط سکون روی محور x ها باید واقع شوند یعنی $\theta = 0, \pi$

$$V_r \longrightarrow \theta = 0 \Rightarrow -\frac{2mr}{r^2-a^2} + Ur = 0$$

$$\frac{-2ma}{r^2-a^2} = -U \Rightarrow r^2 = a^2 + \frac{2am}{U} \Rightarrow r = \boxed{\left(a^2+\frac{2am}{U}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

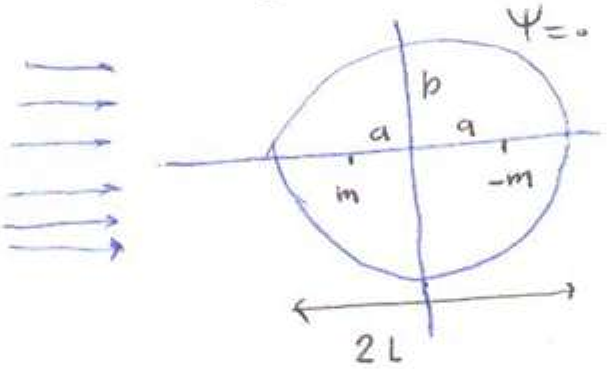
r همیشه مثبت است

اگر طول بیضی را بخواهیم r را در 2 ضرب می‌کنیم $2L = 2\left(a^2+\frac{2am}{U}\right)^{\frac{1}{2}}$

2L قطر ا طول (بزرگتر) بیضی

برای تعیین مقدار عددی خط جریانی که از نقاط سکون می‌گذرد مختصات نقطه‌ی سکون را در معادله تابع جریان کل قرار می‌دهیم

[illegible]



$$\Psi = 0$$

مقدار کل سرعت برابر $V = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2}$

$a = \theta = \frac{a}{2}$ $\qquad V_r = 0$

$$V_\theta = -\left[-m\frac{\frac{2a(r^2-a^2)-4ar^2}{(r^2-a^2)^2}}{1+\left(\frac{2ar}{r^2-a^2}\right)^2} + U\right] = -\left[-m\frac{\frac{-2ar-2a^3}{\cancel{(r^2-a^2)^2}}}{\frac{(r^2-a^2)^2+4a^2r^2}{\cancel{(r^2-a^2)^2}}} + U\right]$$

$$V_\theta = -\left[-m\,\frac{-2a\cancel{(r^2+a^2)}}{\cancel{(r^2+a^2)}^{2}} + U\right] = -\left(\frac{2am}{r^2+a^2} + U\right)$$

$2amr^2 - 2a^3m$

رابطه‌ی بدست آمده مؤلفه‌ی چرخشی سرعت در $\theta = \frac{\pi}{2}$ و یا $\theta = \frac{3\pi}{2}$ به ما می‌دهد توجه داشته باشید که تمام نقاطی از صفحه که $\theta = \pi/2$ داشته باشند شامل این رابطه‌ها باشند حال اگر در شمالی‌ترین نقطه یعنی که $\theta = \frac{\pi}{2}$ است بخواهیم سرعت را بدست آوریم باید ابتدا فاصله این نقطه تا مرکز که همان b است بدست آید و در رابطه‌ی V_θ به جای r آن را قرار دهیم

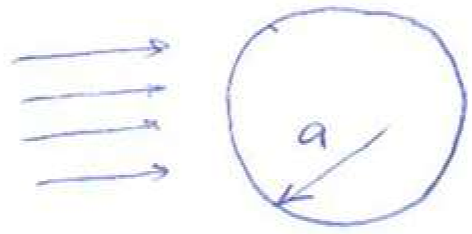
$$\text{at } r=b \quad \psi_t = 0,\ \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow -m\tan^{-1}\frac{2ab}{b^2-a^2} + Ub = 0$$

$$\tan^{-1}\frac{2ab}{b^2-a^2} = \frac{Ub}{m} \Rightarrow \frac{2ab}{b^2-a^2} = \tan\frac{Ub}{m} \rightarrow b$$

معادله بدست آمده یک معادله‌ی ضمنی است با روش‌های عددی می‌توان مقدار b را بدست آورد پس تعیین b در رابطه V_θ به جای r آن را قرار می‌دهیم تا V_θ بدست آید

جریان حول استوانه با مقطع دایره :

در این مبحث جریان اطراف یک استوانه ساکن از دید یک ناظر ساکن بررسی می‌کنیم از ترکیب یک Doublet و یک جریان یکنواخت می‌توان این حالت را مدل کرد



43

$$\Psi_t = \Psi_{Doublet} + \Psi_{\substack{uniform \\ flow}}$$

$$\boxed{\Psi_t = -\frac{\lambda \sin\theta}{r} + U r \sin\theta}$$

$$\phi_t = \phi_{Doublet} + \phi_{uniform}$$

$$\boxed{\phi_t = \frac{\lambda \cos\theta}{r} + U r \cos\theta}$$

$$V_r = \frac{1}{r}\frac{d\Psi}{d\theta} = \frac{1}{r}\left(-\frac{\lambda\cos\theta}{r} + U r \cos\theta\right)$$

$$V_\theta = -\frac{d\Psi}{dr} = -\left(\frac{\lambda \sin\theta}{r^2} + U \sin\theta\right)$$

$$\boxed{\lambda = U a^2}$$

$$\Psi = -\frac{Ua^2}{r}\sin\theta + U r \sin\theta \quad \Bigg| \quad \phi = \frac{Ua^2}{r}\cos\theta + U r \cos\theta$$

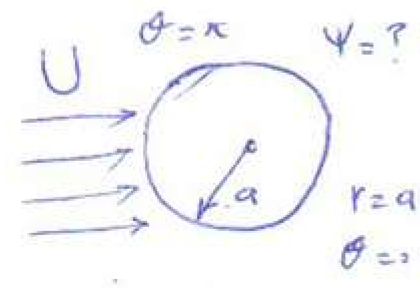
$$\begin{cases} \Psi = Ur\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta \\ \phi = Ur\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta \end{cases}$$

$$V_r = -\frac{\lambda \cos\theta}{r^2} + U\cos\theta$$

$$V_r = -\frac{Ua^2\cos\theta}{r^2} + U\cos\theta \quad \Bigg| \quad V_\theta = -\frac{Ua^2 \sin\theta}{r^2} + U\sin\theta$$

$$V_r = U\cos\theta\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right), \quad V_\theta = -U\sin\theta\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)$$

Stagnation Point



$V_r = 0 \qquad V_\theta = 0$

$V_\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 , \pi$

همیشه ۰ و π نیست. مثلا ممکن است یک سیرکولاسیون اضافه شود

$V_r = 0 \Rightarrow r - \dfrac{a^2}{r^2} = 0 \Rightarrow r = a$

$$\begin{cases} \theta = 0 \quad \text{or} \quad \theta = \pi \Rightarrow \Psi = 0 \\ r = a \end{cases}$$

معادله دایره

در معادله Ψ قرار دادیم

سرعت کل $V = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2} = \sqrt{U^2\cos^2\theta\left(1 - \dfrac{a^2}{r^2}\right)^2 + U^2\sin^2\theta\left(1 + \dfrac{a^2}{r^2}\right)^2}$

$$= U\sqrt{\cos^2\theta\left(1 + \frac{a^4}{r^4} - 2\frac{a^2}{r^2}\right) + \sin^2\theta\left(1 + \frac{a^4}{r^4} + 2\frac{a^2}{r^2}\right)}$$

$$V = U\sqrt{1 + \frac{a^4}{r^4} - 2\frac{a^2}{r^2}\underbrace{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}_{\cos 2\theta}} = U\sqrt{1 + \frac{a^4}{r^4} - 2\frac{a^2}{r^2}\cos 2\theta}$$

$$\text{at} \quad r = a \longrightarrow V = U\sqrt{2 - 2\cos 2\theta} = U\sqrt{2(1 - \cos 2\theta)}$$

$$= U\sqrt{2(2\sin^2\theta} = 2U\sin\theta \longrightarrow \boxed{V = 2U\sin\theta}$$ روی استوانه

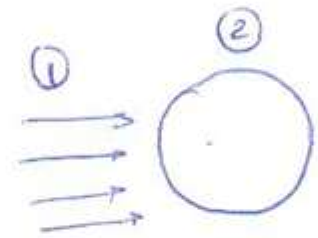
رابطه بدست آمده مقدار سرعت را روی استوانه می دهد

برای تعیین ماکزیمم $\boxed{V = 2U\sin\theta} \xrightarrow{\text{مشتق}} 2U\cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0$

$\theta = \dfrac{\pi}{2} , \dfrac{3\pi}{2}$

$V_{max} = 2U\sin\dfrac{\pi}{2} = 2U$

برای محاسبه فشار روی استوانه از رابطه‌ی برنولی استفاده می‌کنیم ۲ نقطه را یکی در جریان آزاد و دیگری روی استوانه در نظر گرفته بین آن ۲ معادله برنولی نوشته می‌شود



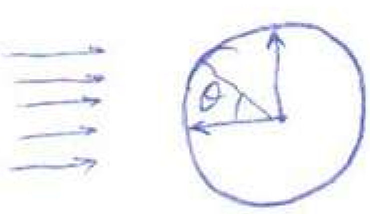
$$\frac{P_\infty}{\rho g}+\frac{U^2}{2g}+\cancel{z}=\frac{P}{\rho g}+\frac{V^2}{2g}+\cancel{z}$$

$$\frac{P_\infty}{\rho g}+\frac{U^2}{2g}=\frac{P}{\rho g}+\frac{4U^2\sin^2\theta}{2g} \Rightarrow \frac{P-P_\infty}{\rho}=\frac{U^2}{2}-\frac{4U^2\sin^2\theta}{2}$$

$$\frac{P-P_\infty}{\rho}=\frac{1}{2}U^2(1-4\sin^2\theta) \longrightarrow \frac{P-P_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2}=1-4\sin^2\theta$$

$$\rightarrow C_P=1-4\sin^2\theta$$

C_P را ضریب فشار می‌نامند نمودار C_P برحسب θ بصورت زیر است



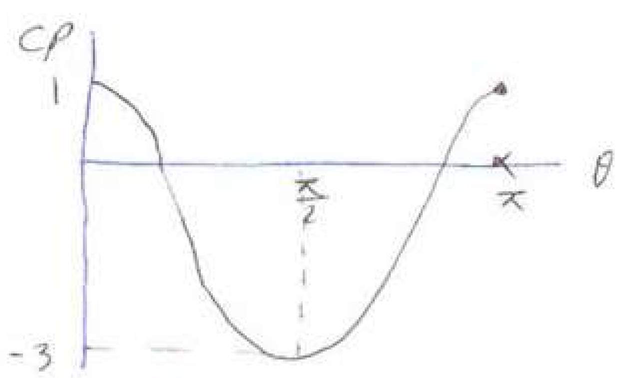
$$\theta=0 \Rightarrow C_P=1 \Rightarrow P=P_\infty+\frac{1}{2}\rho U^2$$

$$\theta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow C_P=-3 \Rightarrow P=P_\infty-\frac{3}{2}\rho U^2$$

$$\theta=\pi \Rightarrow C_P=1 \Rightarrow P=P_\infty+\frac{1}{2}\rho U^2 \ (?)$$

چون اثر لزجت در نظر گرفته نشده است

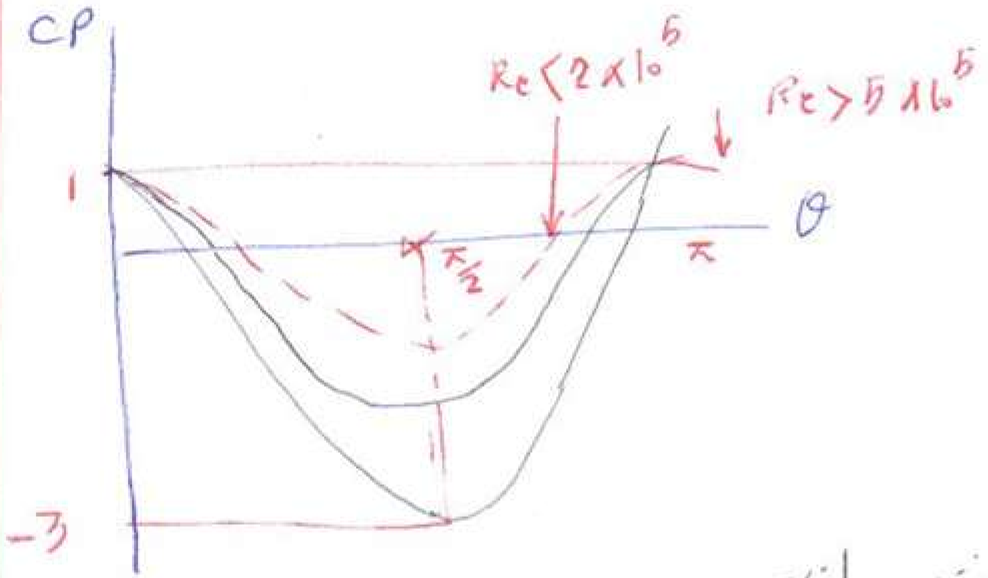
در $\theta=0$ سرعت min و فشار max است و در $\theta=\frac{\pi}{2}$ سرعت max و فشار min



طبق رابطه‌ی بدست آمده برای ضریب فشار مشاهده می‌شود که $\theta=0$ و $\theta=\pi$ فشار یکسانی دارند در حالی که در کل به دلیل افت فشار این ۲ نقطه فشارهای متفاوتی خواهند داشت علت اینکه در این تحلیل ۲ نقطه‌ی جلو و عقب فشارهای یکسانی دارند این است که از اثرات لزجت صرف‌نظر شده است و سیال ایده‌آل فرض شده است

همچنین اندکی بیشتر ثابت شد سرعت ماکزیمم در $\theta = \frac{\pi}{2}$ اتفاق می‌افتد در حالی که در عمل این چنین نیست که دلیل آن هم لزجی بودن سیال است

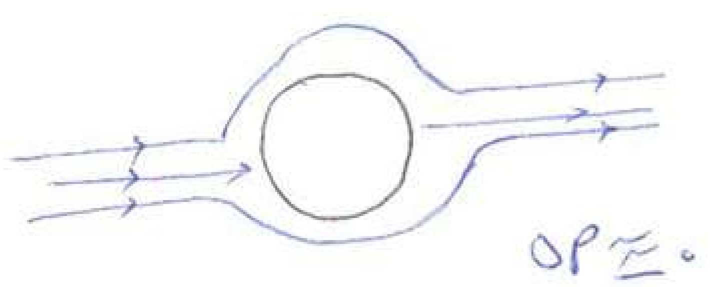
لزجت باعث می‌شود که سرعت ماکزیمم اولاً کمتر از $2U$ و ثانیاً کمتر از $\frac{\pi}{2}$ رخ دهد



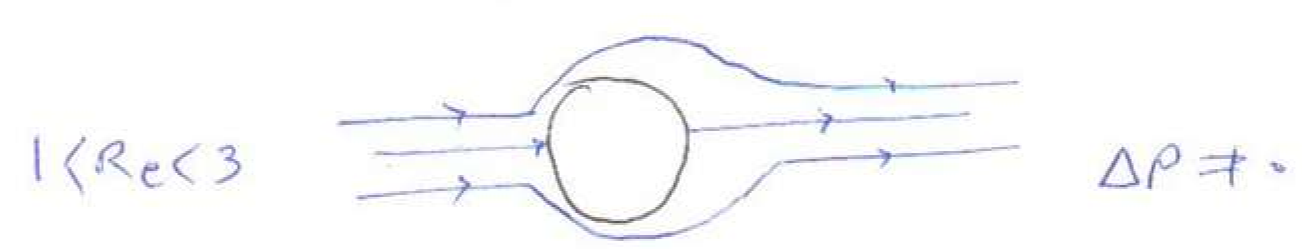
بررسی جریان اطراف یک استوانه در حالت واقعی :

در حالت واقعی سیال را لزج در نظر می‌گیریم و رفتار جریان تابعی از عدد رینولدز خواهد بود

1 - عدد رینولدز خیلی کمتر از یک باشد $(Re \ll 1)$ به این حالت جریان خزشی گفته می‌شود جریان تماماً چرخشی خواهد بود و شکل متفاوتی خواهد داشت

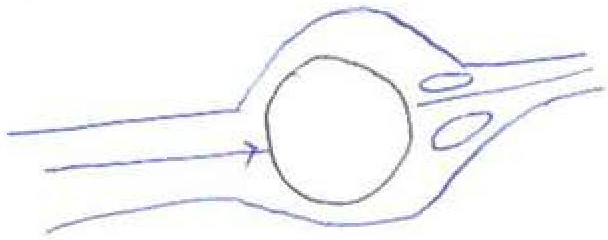


2 - رینولدز $1 < Re < 3$ در این حالت (A) بیشتر میدان چرخشی خواهد بود $(\Delta P \neq 0)$



3 - $3.3 < Re < 35$: در این حالت گردابه‌های ثابتی پشت استوانه ایجاد می‌شود هر چند در بیشتر میدان چرخشی است اما در فاصله‌ای دور از جسم می‌توان جریان را غیر چرخشی فرض کرد

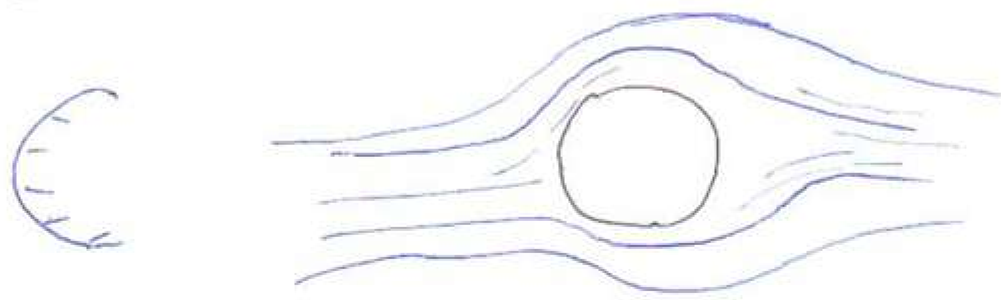
با توجه به اینکه نقطه‌ی سکون طبق تعریف نقطه‌ای است که سرعت جریان غیر چرخشی در آن نقطه صفر شود لذا در هیچ یک از سه حالت فوق نقطه سکون وجود ندارد



$\Delta P = 0$

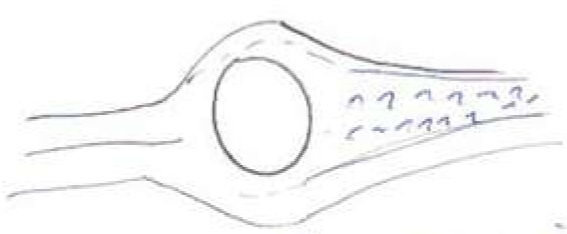
4) $35 < Re < 1250$

با افزایش رینولدز گردابه‌هایی پشت جسم ایجاد می‌شود این گردابه‌ها متناوب اند به جزء در منطقه قبل از جسم و در لایه‌ای نزدیک جدار جریان را می‌توان غیر چرخشی در نظر گرفت



5) $1250 < Re < 2 \times 10^5$:

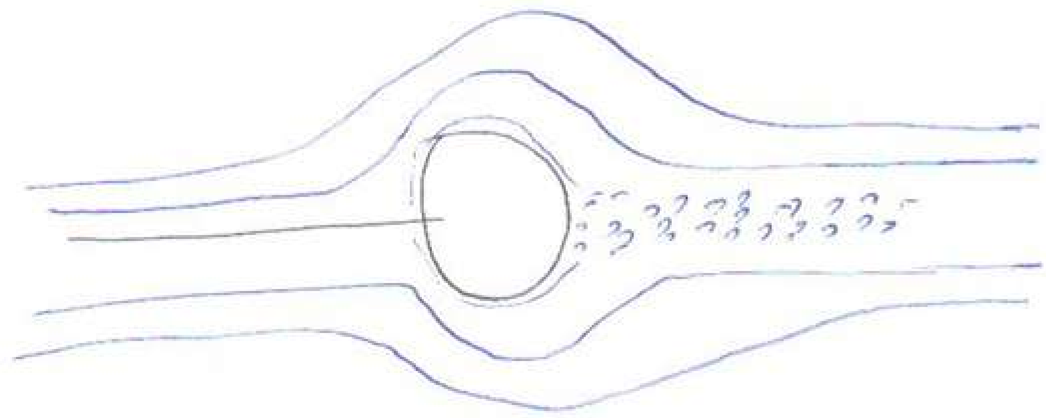
با افزایش بیشتر رینولدز جدایش ایجاد می‌گردد در لایه‌ای بسیار نازک اطراف جسم و پشت جسم جریان چرخشی و در خارج از این ناحیه غیر چرخشی است



نسبت به حالت قبل

6) $Re > 5 \times 10^5$

همچون حالت قبل در پشت جسم Vortex ایجاد می‌شود ولی وسعت این ناحیه کمتر است به جزء در لایه‌ای بسیار نازک اطراف جسم و منطقه Vortex جریان را می‌توان غیر چرخشی در نظر گرفت



$\leftarrow Re > 5\times10^5$

(جریان آشفته Turb)

الگوی استوانه متحرک در سیال ساکن از دید ناظر ساکن :

در این حالت تابع جریان برابر با تابع جریان Doublet خواهد بود

$$\Psi = \Psi_{Doblet} = \frac{-\lambda \sin\theta}{r} \qquad \lambda = U a^2$$

$$\Psi = -\frac{U a^2 \sin\theta}{r}$$

$$\Phi = \frac{\lambda \cos\theta}{r} = \frac{U a^2 \cos\theta}{r}$$

$$V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \frac{1}{r} - \frac{U a^2 \cos\theta}{r} = -\frac{U a^2 \cos\theta}{r^2}$$

$$V_\theta = -\frac{d\Psi}{dr} = -\frac{U a^2 \sin\theta}{r^2}$$

Stagnation Point

$$V_r = 0 \qquad -\frac{U a^2 \cos\theta}{r^2} = 0$$

$$V_\theta = 0 \qquad -\frac{U a^2 \sin\theta}{r^2} = 0$$

با اندکی دقت در دستگاه فوق ملاحظه میکنیم که نقطه سکون در این حالت وجود ندارد

$$V = \sqrt{Vr^2 + V\theta^2} = \sqrt{\frac{Ua^4}{r^4}\cos^2\theta + \frac{Ua^4}{r^4}\sin^2\theta}$$

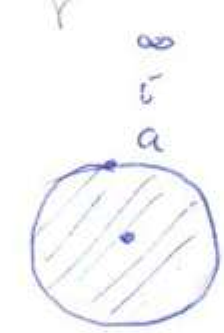
$$= \sqrt{\frac{Ua^4}{r^4}} = \frac{Ua^2}{r^2} = \frac{\lambda}{r^2}$$

وقتی جسم از حالت سکون در سیال حرکت می‌کند و به سرعت U می‌رسد انرژی لازم است که به سیال و جسم شتاب دهد. انرژی جنبشی سیال در اطراف سیلندر به صورت زیر محاسبه می‌شود (طول سیلندر (طول استوانه) را واحد فرض می‌کنیم):

$$dT = \frac{1}{2} v^2 dM$$

$$V = \frac{Ua^2}{r^2}$$

$$T = \frac{1}{2}\int v^2 dM = \frac{1}{2}\int \underbrace{v^2}_{\text{سرعت}} \rho \overbrace{dV}^{\text{حجم}}$$



$$dv = L \times dA = dA = 2\pi r dr$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^\infty v^2 \rho\, 2\pi r dr = \frac{1}{2}\int_a^\infty \frac{U^2a^4}{r^4} \rho\, 2\pi r dr$$

$$= \pi U^2 a^4 \rho \int_a^\infty r^{-3} dr = \pi U^2 a^4 \rho \left.\frac{r^{-2}}{-2}\right]_a^\infty = \frac{\pi U^2 a^4 \rho}{-2}\left(\frac{-1}{a^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\pi U^2 \underbrace{\rho_f}_{\text{سیال}} a^2 = \frac{1}{2} m' U^2 \Rightarrow \boxed{m' = \pi \rho_f a^2}$$

رابطه‌ی فوق مقدار انرژی جنبشی وارد شده از طرف استوانه متحرک به سیال ساکن را بدست می‌دهد از طرفی خود استوانه دارای یک انرژی جنبشی است $T = \frac{1}{2} MU^2$, $M = \pi \rho_s a^2$

$$T_{tot} = \frac{1}{2}\pi \rho_f a^2 + \pi \rho_s a^2 = \frac{1}{2}(M + M')U^2$$

در رابطه ی فوق M' جرم سیال هم حجم استوانه و M جرم خود استوانه است M' را جرم افزوده و $M+M'$ را جرم مؤثر می نامند

تمرین)

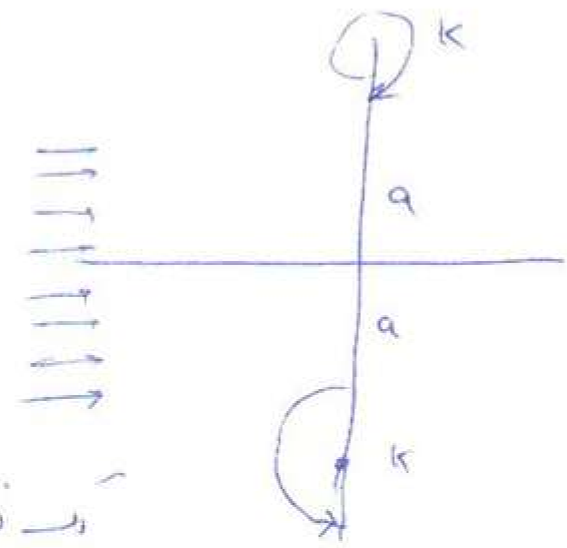
در جریان پتانسیل اطراف نیم بدنه نشان دهید ماکزیمم سرعت در جداره در زاویه ای حدود 63° رخ می دهد و مقدار آن $1.26U$ می باشد (V کل را بدست آوریم و بعد مشتق می گیریم)

تمرین

دو vortex آزاد در خلاف جهت یکدیگر و جریان یکنواخت مطابق شکل زیر در نظر بگیرید تابع جریان این مجموعه بصورت زیر است هم چنین تابع پتانسیل را بدست آورید

$$\psi = Uy - \frac{1}{2} K \ln \frac{x^2+(y+a)^2}{x+(y-a)^2}$$

$$\phi = ?$$

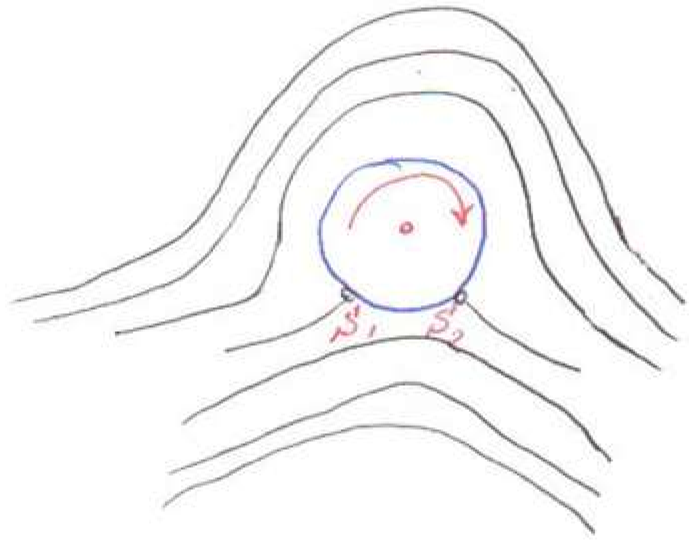


یک نقطه در ربع اول در نظر گرفته و در مختصات دکارتی بدست آوردیم

تمرین) ترکیب یک جریان آزاد با سرعت $10\,m/s$ و یک Doublet با قدرت $\lambda = 40\,\frac{m^3}{s}$ و یک Vortex غیر چرخشی با سیرکولاسیون $\Gamma = 200\,\frac{m^2}{s}$ را تشکیل جریان ایده آل اطراف استوانه با سیرکولاسیون می دهد را در نظر می گیریم مطلوبست تعیین نقاط سکون ، محل نقاط ، مقدار ماکزیمم و مینیمم سرعت و فشار سیلندر

جریان اطراف استوانه با سیرکولاسیون :

تابع جریان این حالت یک جریان یکنواخت، دابلت و یک Vortex است بسته به علامت ورتکس، استوانه می‌تواند ساعتگرد و یا پادساعتگرد بچرخد



$$\Psi_t = \Psi_{uinform} + \Psi_{Doublet} + \Psi_{vortex}$$

$$= Ur\sin\theta - \frac{\lambda \sin\theta}{r} + \frac{K}{2\pi r} \times \ln r$$

$$Vr = \frac{1}{r}\frac{d\Psi}{d\theta} = \frac{1}{r}\left[Ur\cos\theta - \frac{\lambda\cos\theta}{r}\right] = U\cos\theta - \frac{\lambda\cos\theta}{r^2} = \quad \lambda = Ua^2$$

$$Vr = U\cos\theta - U\frac{a^2}{r^2}\cos\theta = \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)U\cos\theta$$

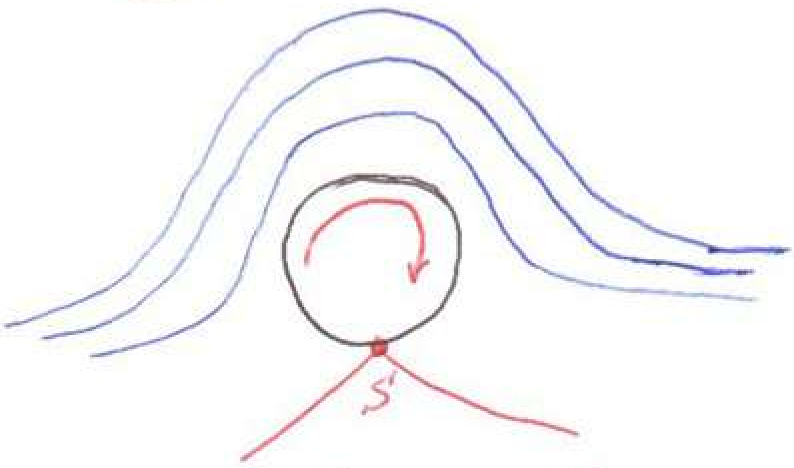
$$V\theta = -\frac{d\Psi}{dr} = -U\sin\theta - \frac{\lambda\sin\theta}{r^2} - \frac{K}{2\pi r} \qquad \lambda = Ua^2$$

$$V\theta = -U\sin\theta - \frac{Ua^2\sin\theta}{r^2} - \frac{K}{2\pi r} = -U\sin\theta\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{K}{2\pi r}$$

stagnation point:
$$\begin{cases} Vr = 0 \Rightarrow \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)U\cos\theta = 0 \Rightarrow r = a \\ V\theta = 0 \Rightarrow -2U\sin\theta - \frac{K}{2\pi a} = 0 \Rightarrow \sin\theta = \frac{-K}{4\pi a U} \end{cases}$$

رابطه‌ای بدست آمده برای θ گویای این است که سه حالت ممکن است رخ دهد اگر قدر مطلق $|-K|$ کوچکتر از $4\pi aU$ باشد در آن صورت 2 جواب برای θ بدست می‌آید که می‌توان گفت 2 نقطه‌ی سکون روی استوانه خواهیم داشت که بصورت متقارن قرار خواهد داشت

چنانچه قدر مطلق K برابر $4\pi aU$ باشد تنها یک جواب برای θ بدست می آید که بیانگر موجود بودن تنها یک نقطه سکون روی جسم است. اگر قدر مطلق K بزرگتر از $4\pi aU$ باشد برای θ جوابی بدست نمی آید تعبیر فیزیکی آن، این است که نقطه سکون روی جسم می تواند واقع باشد



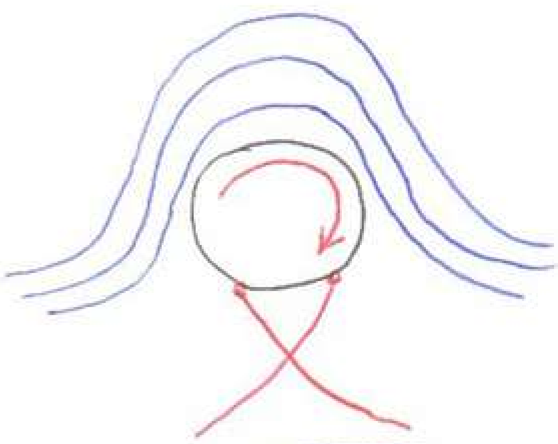
$|K| = 4\pi aU$

پروژه:

تحلیل CFD معادلات غیرخطی مو

ثابت نیست

(سیال غیر نیوتنی)



$|K| > 4\pi aU$

چگونه نیروی لیفت ایجاد می شود:

در حالتی که سیرکولاسیون وجود داشته باشد سیرکولاسیون باعث می شود که بین بالا و پایین جسم اختلاف فشار بدست آید مطابق شکل خطوط جریان در بالای جسم نسبت به پایین جسم به هم نزدیکترند و این باعث می شود که سرعت در بالای جسم بیشتر از مقدار سرعت آن در پایین جسم شود از معادله برنولی می دانیم که فشار و سرعت نسبت عکس با هم دارند لذا در بالای جسم فشار کم و در پایین جسم فشار زیاد خواهد بود. (مثلا در هلیکوپتر) همین اختلاف فشار باعث ایجاد نیروی لیفت (بالابر) می شود

روی استوانه $\quad at \; r = a \quad \begin{cases} V_r = 0 \\ V_\theta = -2U\sin\theta - \dfrac{K}{2\pi a} \end{cases}$

سیرکولاسیون
$$\Gamma = \oint V \cdot \underbrace{ds}_{\substack{r d\theta \\ = a\, d\theta}} = \int_0^{2\pi} V_\theta \, r \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(-2U\sin\theta - \frac{k}{2\pi a}\right) a \, d\theta =$$

$$= -2Ua \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\theta}_{0} - \frac{ak}{2\pi a} \int_0^{2\pi} d\theta = -K$$
(شدت عامل vortex است)

محاسبه فشار:

با نوشتن معادله ی برنولی بین 2 نقطه یکی دور از جسم و دیگری روی سطح استوانه می توان فشار را بدست آورد.

$$\frac{P_\infty}{\rho g} + \frac{U^2}{2g} = \frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{P_\infty}{\rho g} + \frac{U^2}{2g} = \frac{P}{\rho g} + \frac{\left(-2U\sin\theta - \frac{k}{2\pi a}\right)^2}{2g}$$

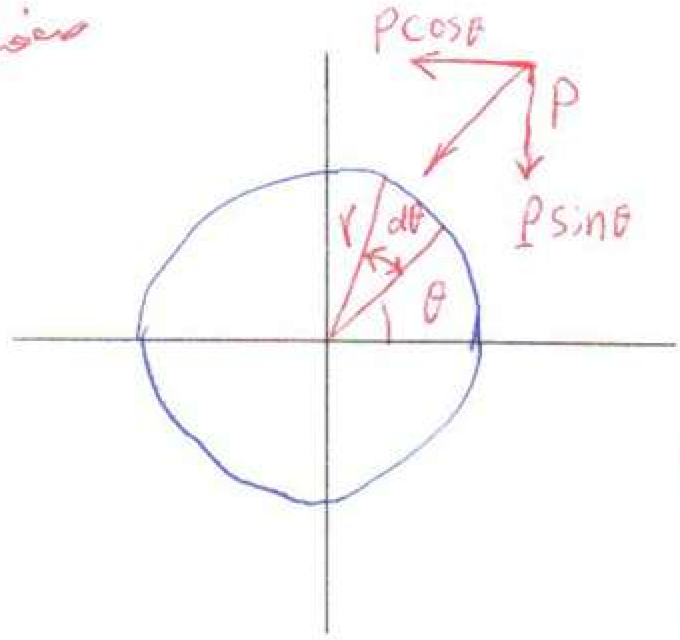
اگر P را فشار نسبی درنظر بگیریم $(P_\infty = 0)$ آنگاه خواهیم داشت:

$$P = \frac{\rho U^2}{2} \left[1 - 4\sin^2\theta - \frac{k^2}{4\pi^2 a^2 U^2} - \frac{2k\sin\theta}{\pi a U}\right]$$

تعریف نیروی درگ و لیفت:

نیروی درگ: نیروی مقاوم در مقابل حرکت جسم ناشی از اختلاف فشار بین جلو و عقب آن است در حالتی که همه چیز متقارن باشد نیروی درگ باید برابر صفر شود Drag

نیروی لیفت یا بالا بر: نیروی عمود بر درگ خواهد بود و ناشی از اختلاف فشار بین پایین و بالای جسم است (نکته: فشار همیشه عمود بر جسم است)



$r = a$

عمق

$$dD = P\cos\theta(a\,d\theta)b$$

$$D = \int_0^{2\pi} P ab\cos\theta\, d\theta$$

تکلیف: با قرار دادن ف بدست آمده از معادله ی برنولی در رابطه ی انتگرالی نیروی درگ ثابت کنید درگ برابر صفر می شود

$$dL = -P\sin\theta(a\,d\theta)b \longrightarrow L = -\int_0^{2\pi} Pab\sin\theta\, d\theta$$

تکلیف: با قرار دادن رابطه ی ف بدست آمده در رابطه ی مربوط به نیروی لیفت ثابت کنید نیروی لیفت می شود

$L = \rho U \Gamma$ (عمق استوانه را واحد فرض کنید $b=1$)

$L = \rho U K$ ویژگی رابطه که r هیچ تأثیری در نیروی لیفت ندارد

اثر ماگنوس:

رابطه ی بدست آمده برای لیفت مستقل از ابعاد استوانه است یعنی نیروی لیفت فقط به مقدار سیرکولاسیون بستگی دارد. ماگنوس با تجربه و آزمایش نشان داده است که نیروی لیفت مستقل از ابعاد جسم است هر چند که در حالت واقعی تا حدودی شکل جسم هم در نیروی لیفت دخیل است

تمرین: یک سیلندر با قطر $0.61m$ با سرعت دورانی $480rpm$ در جریان یکنواخت هوا با سرعت $15\frac{m}{s}$ می چرخد محاسبه کنید نیروی برای (L) وارد بر طول $10m$ استوانه (سیلندر) را (جرم مخصوص هوا (ρ) $1.2\frac{kg}{m^2}$)

مطلوب از 2 چشمه و 2 چاه و یک جریان یکنواخت

معادلات حاکم بر رفتار جریان حقیقی :

معادله پیوستگی : $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$ $\quad (\rho = cte \rightarrow Incomp), steady)$

$$\nabla \cdot V = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w)=0$$

معادله پیوستگی $\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla \cdot \rho V=0$

حجم کنترل C.V $\frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho \, dV+\iint \rho V\cdot n \, dA=0$

پیوستگی (حجم کنترل) $\frac{d}{dt} m_{c.v}=\sum \dot{m}_{in}-\sum \dot{m}_{out}=0$

معادله مومنتوم (Momentom) $\sum F = ma$

(motion equations)

weight → body Force

press, vicusity → surface Force (سطحی)

$$a=\frac{DV}{Dt}=\frac{\partial V}{\partial t}+(V\cdot\nabla)V$$

$$a_x=\frac{\partial x}{\partial t}+(V\cdot\nabla)x=\underbrace{\frac{\partial x}{\partial t}}_{\text{local}}+\underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}}_{\text{convective acceleration}}$$

local: شتاب موضعی

convective acceleration: شتاب جابجایی

$$\rho\left(\frac{\partial x}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\rho g_x+\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}$$

$\sigma_{xx} = -P + \tau_{xx}$

$$\rho\left(\frac{\partial x}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\underbrace{\rho g_x}_{\text{weight}}\underbrace{-\frac{\partial P}{\partial x}}_{\text{pressare force}}+\underbrace{\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}}_{\text{viscusity force}}$$

همانگونه که در جلسه ی اول کلاس مطرح شد معادله ی پیوستگی یکی از معادلات اساسی حرکت سیالات است

در صورت x و y و z معادله پیوستگی می توان آنها را بدست آورد هر چند که حل این معادلات به جز در حالتهای خیلی خاص مشکل است و با استفاده از CFD آنها را حل می نماییم

در حالتی که جریان تراکم پذیر است 7 مجهول خواهیم داشت $(u, v, w, \rho, \mu, T, p)$ و بنابراین به 7 معادله نیز نیاز داریم. به 3 معادله مومنتوم - یک معادله پیوستگی - معادله ی انرژی - معادله ی حالت و ویسکوزیته ی دینامیکی سیال را به دما ربط دهد

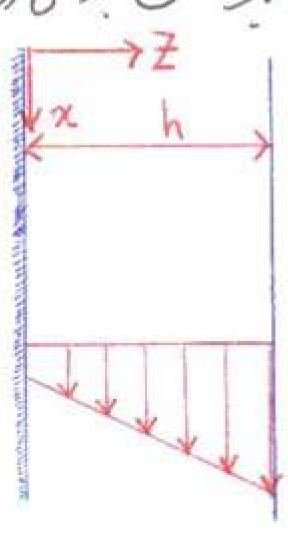
معادله انرژی
$$\rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z}\right) = K \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$$

$$+ \mu \Phi + \dot{q} \qquad \text{اتلافات } \Phi \longrightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \mu \Phi$$

ضریب پخش حرارتی $\alpha = \dfrac{K}{\rho C_p} \leftarrow (1, 2)$

مثال: مطابق شکل زیر برای جریان دائمی، یکنواخت در روی یک سطح عمودی قائم معادلات ناویر استوکس را ساده کرده و با فرض اینکه سیال در اثر نیروی گرانش با ضخامت ثابت h روی این صفحه پایین جریان دارد معادله توزیع سرعت را بدست آورید. فرض کنید تنش برشی روی سطح آزاد سیال صفر است و جریان در جهت x یکنواخت است



Steady state

uniform

N.S

$u = ?$

یکنواخت در جهت x $\quad \frac{\partial u}{\partial x}=0$ | $\frac{\partial u}{\partial y}=0$ بسیار زیاد در جهت y عمود بر کاغذ | $\frac{\partial u}{\partial z}=0$ چون z به اندازه h است

جریان دائمی $\quad \frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho V)=0$

$\frac{\partial \rho}{\partial x,y,z}=0 \quad \rho=cte$ اگر جریان تراکم ناپذیر باشد

$\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$ اگر جریان دائمی steady

$\rho(\nabla\cdot V)=0 \Rightarrow \nabla\cdot V=0$ دائمی تراکم ناپذیر

$V=\vec{u}i+\vec{v}j+\vec{w}k$ تحت اسکالر برداری $\quad \nabla\cdot V=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$

حجم کنترل

$$\sum F=ma \rightarrow F_{pre}+F_{vis}+F_{wigh}=ma=\overbrace{\rho\,dx\,dy\,dz}^{\rho V}\left[\frac{\partial V}{\partial t}+(V\cdot\nabla)V\right]$$

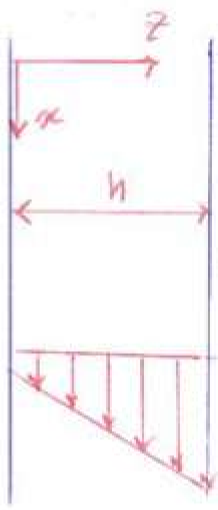
در جهت x $\rightarrow$ $$\rho\left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}+u\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}+v\cancel{\frac{\partial u}{\partial y}}+w\cancel{\frac{\partial u}{\partial z}}\right)=\rho g_x-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}+\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

نیروی وزن   نیروی فشار   نیروی ویسکوز

در جهت y $\rightarrow$ $$\rho\left(\cancel{\frac{\partial v}{\partial t}}+u\cancel{\frac{\partial v}{\partial x}}+v\cancel{\frac{\partial v}{\partial y}}+w\cancel{\frac{\partial v}{\partial z}}\right)=\cancel{\rho g_y}-\frac{\partial P}{\partial y}+\mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}+\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}+\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}}\right)$$

g_y نداریم و فقط در راستای x

در جهت z $\rightarrow$ $$\rho\left(\cancel{\frac{\partial w}{\partial t}}+u\cancel{\frac{\partial w}{\partial x}}+v\cancel{\frac{\partial w}{\partial y}}+w\cancel{\frac{\partial w}{\partial z}}\right)=\rho g_z-\frac{\partial P}{\partial z}+\mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}+\cancel{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}}+\cancel{\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}}\right)$$



$\frac{\partial u}{\partial t}=0$ جریان دائمی

$\frac{\partial u}{\partial x}=0$ تغییرات سرعت در جهت x صفر است جریان یکنواخت در جهت x

$v=w=0 \qquad \rho g_x-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$

$u=V$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}-\rho g_x\right)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \rho g_x\right) z + c_1 \longrightarrow$$

$$\boxed{u(z) = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \rho g_x\right) z^2 + c_1 z + c_2}$$

$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial z}$

$z = 0 \qquad u = 0 \quad \Rightarrow c_2 = 0$

$z = h \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \rho g_x\right)\overset{h}{z} + c_1 = 0$

$$\Rightarrow c_1 = -\frac{1}{\mu}\left(\rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x}\right) h$$

$$u(z) = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \rho g_x\right) z^2 - \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \rho g_x\right) h z \Rightarrow$$

$$\boxed{u(z) = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \rho g_x\right)\left\{ z^2 - 2hz \right\}}$$

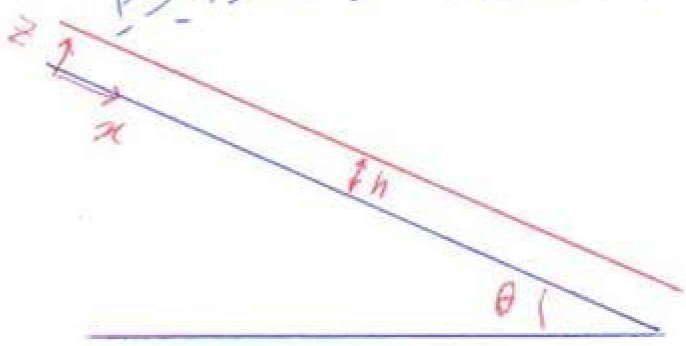
در راستای y $\quad -\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \qquad P = c^{te}$ تغییرات فشار در راستای x وجود ندارد

z 〃 〃 $\quad \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \qquad$ 〃 〃 z 〃 〃 〃 〃

تمرین 1

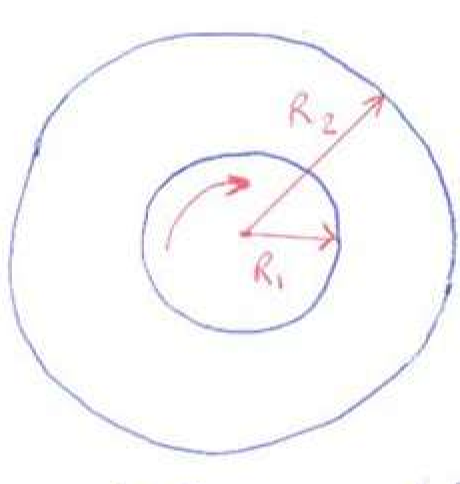
برای جریان دائمی، یکنواخت در روی یک سطح شیبدار با زاویه θ معادلات ناویر استوکس را ساده کنید و با فرض اینکه روغن با عمق ثابت روی یک سطح شیبدار به طرف پایین جریان دارد معادله توسعه ی سرعت را بدست آورید (تنش برشی روی سطح آزاد روغن را صفر در نظر بگیرید)

(g باید تجزیه شود)



تمرین 2

یک میله با مقطع دایره با شعاع R_1 و طول ∞ بینهایت (از طول صرف نظر) با سرعت زاویه ای ω داخل یک سیلندر هم مرکز با میله با شعاع R_2 ($R_2>R_1$) می باشد دوران می کند با فرض اینکه جریان دو بعدی است و سیال بین میله و سیلندر روغن غیر قابل تراکم با لزجت μ می باشد و میله زمان زیادی است می چرخد (جریان دائمی است) نشان دهید $\frac{\partial P}{\partial r}=\frac{dP}{dr}$ و $\frac{\partial P}{\partial \theta}=0$ است و معادلات ناویر استوکس را برای این جریان ساده کنید و توزیع سرعت V_θ و توزیع ورتیسیته $\nabla\times V=\omega=\mathrm{curl}V$ در میدان جریان و مقدار تنش برشی روی جدار سیلندر را بدست آورید.



که همیشه باید ارضا شود شکل کلی آن به صورت

$(\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot\rho V)=0$ برای جریان تراکم ناپذیر شکل آن ساده شده و به

صورت $\nabla\cdot V=0$ در می آید صورت حجم کنترلی پیوستگی یا بقاء جرم:

$$V=\frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho\, dV+\iint \rho V\cdot n\, dA=0 \qquad \frac{d}{dt}m_{c.v}=\sum \dot m_{in}-\sum \dot m_{out}$$

معادله مستوم :

معادله مستوم هم معادله حرکت یا قانون دوم نیوتن است $\sum F = ma$

نیروی مؤثر وارد بر سیال عبارتند از نیروی وزن که از نوع حجمی اند و نیروی فشاری و ویسکوزیته که از نوع سطحی اند

$$\tau_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P+\tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & -P+\tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & -P+\tau_{zz} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{vmatrix}$$

$$\tau_{xx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\vdots$$

$$\tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\tau_{yy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\tau_{yz} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

فقط در راستای x

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) =$$

$$\rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y} + \mu\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z} + \mu\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\rightarrow \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\rho g_x-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

$$+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}$$

$$\Rightarrow \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\rho g_x-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\mu\frac{\partial}{\partial x}\left[\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}}_{\text{if }\rightarrow\text{ Incomp steady steat }\rightarrow\ 0}\right]$$

$$\text{in}-x \longrightarrow \rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x}+\rho g_x+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\text{in}-y \longrightarrow \rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial y}+\rho g_y+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

$$\text{in}-z \longrightarrow \rho\left(u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial z}+\rho g_z+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

معادلات ناویر استوکس با فرض تراکم‌ناپذیر بودن جریان و نیوتنی بودن سیال و دائمی بودن جریان از معادلات کلی حرکت استخراج شده‌اند.

معادلات ناویراستوکس در مختصات استوانه‌ای:

در امتداد r

$$\rho\left(\frac{\partial V_r}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}-\frac{V_\theta^2}{r}+V_z\frac{\partial V_r}{\partial z}\right)$$

$$=-\frac{\partial P}{\partial r}+\rho g_r+\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r V_r}{\partial z}\right)-\frac{V_r}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_\theta}{\partial t}+\frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2}\right.$$

در امتداد θ

$$\rho\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_\theta}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}+V_r\frac{V_\theta}{r}+V_z\frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right)$$

$$=-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}+\rho g_\theta+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_\theta}{\partial r}\right)-\frac{V_\theta}{\partial^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}+\frac{\partial V_\theta^2}{\partial z^2}\right.$$

در جهت z

$$\rho\left(\frac{\partial V_z}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_z}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial z}+\rho g_z+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right]$$

می توان بصورت برداری معادلات ناویراستوکس را به صورت زیر نوشت

$$\rho\left[\frac{\partial V}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}\right]=\rho\vec{g}-\nabla P+\mu\nabla^2 V$$

چنانچه جریان تراکم ناپذیر باشد 4 مجهول داریم سه مؤلفه سرعت (w و v و u) و فشار (P)
که به کمک سه معادله‌ی ناویراستوکس است.

Heidro fouil & Air fouil

ایرفول : سازه‌ای هستند که به منظور دریافت کار مفید در حین حرکت درون آب یا هوا طراحی میشوند اگر این سازه‌ها در هوا حرکت کنند آنها را Air fouiled و اگر در آب حرکت کنند آنها را Heidro fouiled و به دو نوع تقسیم می‌شوند :

نوع متقارن - نوع غیر متقارن

نوع متقارن آن ساختش آسان و ارزان است و مرکز فشار آن تغییر نمی‌کند و عملکرد مطلوبی دارد در حالیکه در نوع نامتقارن عملیات ساخت پیچیده‌تر است و ساخت آن گرانتر است اگرچه ضرایب بالابر بسیار بیشتری نسبت به نوع متقارن دارند

بعضی از اصطلاحات در Air fouiled

وتر : (Chord) خطی که لبه ابتدایی (حمله) و لبه انتهایی Air foil را بهم وصل میکند وتر گویند

طول وتر (Chord length) : فاصله بین لبه ابتدایی تا لبه دم فویل foil طول وتر گویند

خط متوسط خمیدگی (chamber)

خطی که از هر نقطه وسط بین بالا و پایین foil می‌گذرد خط متوسط خمیدگی نام دارد

حداکثر ضخامت Max thickness :

حداکثر فاصله بین سطوح بالایی و پایینی در یک foil را حداکثر ضخامت فویل می‌نامند.

شعاع لبه حمله Rediuc of attacks :

شعاع دایره‌ای است که قابل لحاظ کردن در لبه ابتدایی فویل است

زاویه حمله angle of attack :

زاویه‌ای بین خط وتر در راستای Φ جریان آزاد شود که آنرا با α نشان می‌دهند

نیروی پسا Drag force :

نیروی وارد بر فویل در راستای جریان آزاد را نیروی پسا می نامند

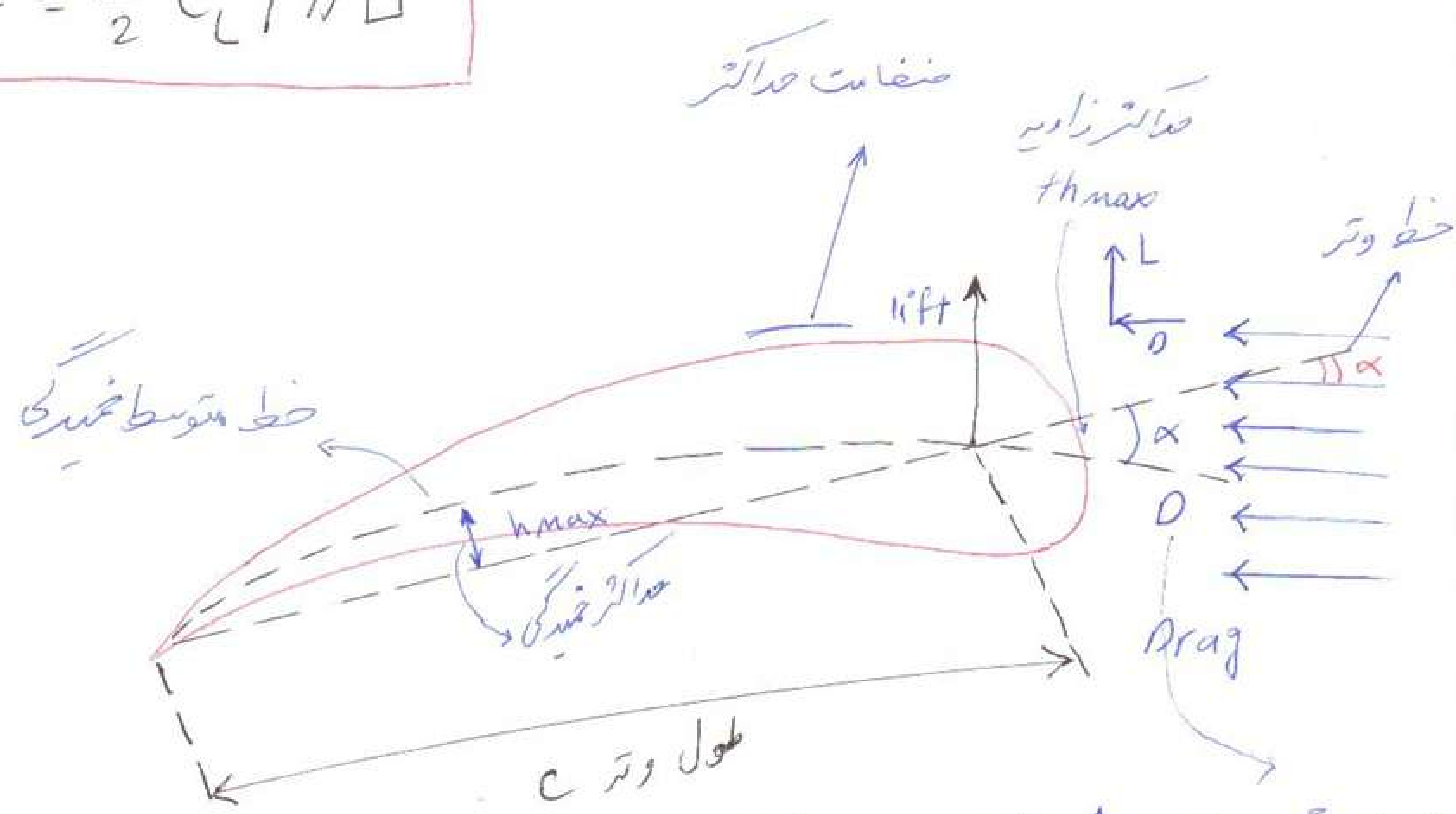
نیروی بالابر lift force :

نیروی وارد بر فویل عمود بر راستای جریان آزاد نیروی بالابر یا لیفت نامیده میشود

Drag و lift از روابط زیر بدست می آیند

$$\boxed{D = \frac{1}{2} C_D \rho A U^2}$$

$$\boxed{L = \frac{1}{2} C_L \rho A U^2}$$



همیشه همسو و مخالف جهت جریان است

نامگذاری فویل ها :

از سه روش برای نامگذاری ایرفویل ها استفاده میشود

۱- ساده ترین آن بصورت زیراست NACA 0000

مقابل حروف NACA چهار عدد قرار میگیرد عدد اول

عدد اول خمیدگی ماکزیمم را برحسب صدم طول وتر

عدد دوم محل خمیدگی ماکزیمم را برحسب دهم طول وتر

و رقم آخر ضخامت ماکزیمم فویل را برحسب صدم طول وتر نشان میدهد

مثلا NACA 2412 فویل را بیان میکند که - طول وتر $h_{max} = 0.02\,\underline{C}$

و محل خمیدگی حداکثر از لبه حمله $0.4\,C$ = فاصله از نوک حمله

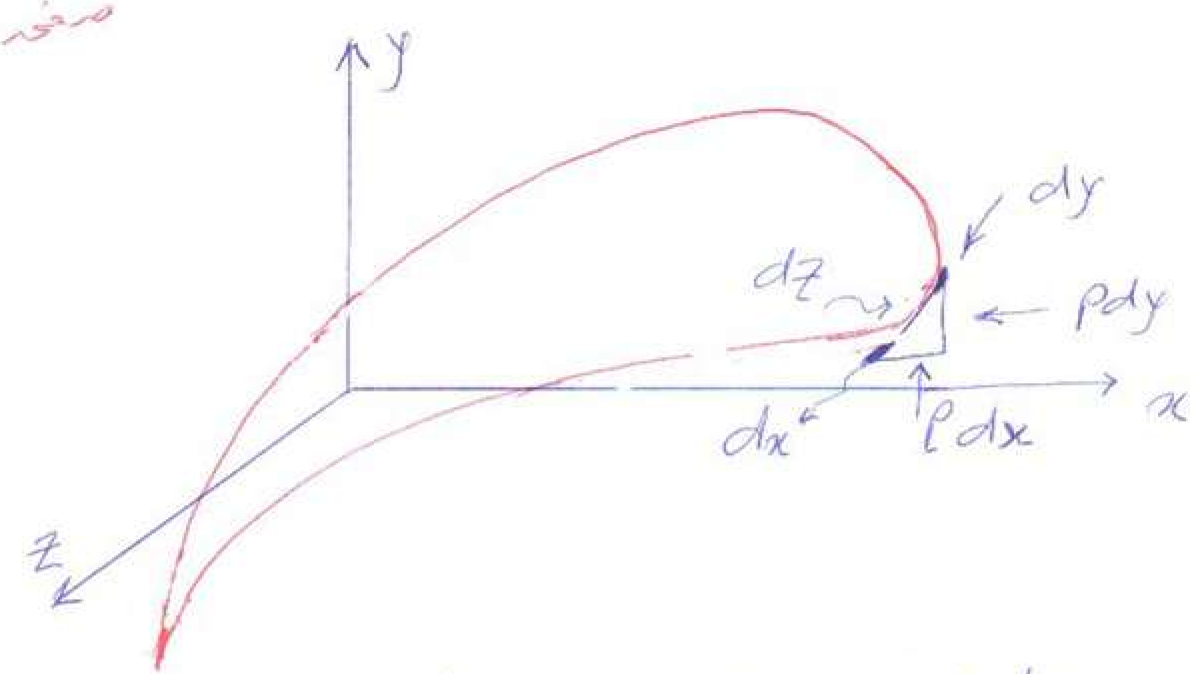
ضخامت ماکزیمم فویل 12% از طول وتر $th = 0.12C$

(تمامی فویل های متقارن دو عدد اول صفر است) NACA 0012

تحلیل نیروهای وارده برفویل (Air foail & Hidro foail)

همانگونه که پیشتر اشاره شد براین فویل دو نیرو وارد میشود نیروی پسا و نیروی بالابر علاوه برآن یک گشتاور هم حول محوری که عمود بر جریان آزاد است برفویل وارد میشود. در این مبحث به محاسبه آنها میپردازیم

(Drag همیشه وجود دارد و عامل مهم ایجاد گشتاور است)



$$(D)\quad dx \qquad dx = -p\,dy \qquad x = -\int p\,dy$$

$$dy = p\,dx \qquad y = \int p\,dx$$

نوشتن فرمول برنولی

$$\frac{P_\infty}{\rho g} + \frac{U^2}{2g} = \frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} \qquad V^2 = u^2 + v^2 = U^2$$

$$\frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} = H \Rightarrow \boxed{P = \rho g\left(H - \frac{V^2}{2g}\right)}$$

$$u^2 + v^2 = (u+iv)(u-iv) \qquad i^2 = -1$$

$$P = \rho g H - \frac{1}{2}\rho(u+iv)(u-iv)$$

$$X - iY = \int p\,dy - i\int p\,dx$$

$$= -\left(\int p\,dy + i\int p\,dx\right)$$

ضرب طرفین در یک منفی

$$= -\int p(dy + i\,dx) \;= -i\int p(dx - i\,dy)$$

$$X - iY = -i\int\left[\rho g H - \frac{1}{2}\rho(u+iv)(u-iv)\right](dx - i\,dy)$$

$$= -i\int \rho g H\,\cancel{(dx - i dy)} - i\int -\frac{1}{2}\rho(u+iv)(u-iv)(dx+idy)$$

برابر صفر، چون همه مسیر بسته است

$$-i\left[\rho g H\int dx - i\rho g H\int dy\right]$$

$$z\bar{\bar{z}}_2 = \bar{z} z_2 \qquad \boxed{\bar{z} = x - iy \quad \Big| \quad z = x+iy}$$

$$(u+iv)(dx-idy) = (u+iv)(dx+idy) \Rightarrow$$

$$x - iy = \frac{1}{2}\rho i\int \underbrace{(u-iv)^2}\underbrace{(dx+idy)}_{dz}$$

$$\boxed{\frac{dw}{dz} = u - iv} \qquad \boxed{W = f(z) = \phi + i\psi}$$

$$\boxed{f'(z) = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x}} \quad ★$$

$$X - iY = \frac{1}{2}\rho i\oint\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz$$

با توجه به اینکه مسیر بسته است

★ : از آنجا که یک فویل تحت چند نگاشت پیاپی از یک دایره بدست می آید و شکل کلی نگاشت بصورت : $\boxed{W = f(z) = \phi + i\psi}$ است .

که ϕ پتانسیل سرعت و ψ تابع جریان است. سرعت مختلط برابر خواهد بود با

$f'(z) = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x}$ و یا $f'(z) = u + iv$ این کمیت را سرعت مختلط می نامند

در حقیقت جهت حقیقی سرعت مختلط مولفه افقی سرعت (u) و قرینه جهت موهومی مولفه عمودی خواهد بود که این بحث به دلیل ضیق وقت از سر فصل درس حذف شده است

$$X = D \qquad Y = L$$

محاسبه گشتاور :

برای محاسبه گشتاور حول مبداء، گشتاور حاصل از دو نیروی Pdx و Pdy را بدست آوریم

$$i \times i = -1$$

$$dm = P(x\,dx + y\,dy)$$

$$z = x + iy \qquad \bar{z} = x - iy \qquad dz = dx + i\,dy \qquad d\bar{z} = dx - i\,dy$$

$$\bar{z}\,dz = x\,dx + ix\,dy - iy\,dx + y\,dy$$

$$= x\,dx + y\,dy + i(x\,dy + y\,dx)$$

$$Re(\bar{z}\,dz) = x\,dx + y\,dy$$

$$dm = Re(P\bar{z}\,dz) \Rightarrow M = \int Re(P\bar{z}\,dz)$$

تمرین :

با جایگذاری فشار در رابطه بدست آمده معادله گشتاور را بصورت زیر ثابت کنید

$$M = -\frac{1}{2}\rho \int Re\left[\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 z\right] dz$$

$$= \frac{1}{2}\rho\, Re\left[\int \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 z\, dz\right]$$

$$W = U\left(z + \frac{a^2}{z}\right) - \frac{ik \ln z}{2\pi}$$

مثال :

تابع تبدیل مختلط برای جریان اطراف استوانه به شعاع a با سیرکولاسیون بصورت زیر میباشد :

با تابع نگاشت $$W = U\left(z + \frac{a^2}{z}\right) - \frac{ik}{2\pi}\ln z$$

U سرعت جریان دور از جسم و K سیرکولاسیون است

نیروی لیفت و درگ و پیچش وارد بر استوانه را محاسبه کنید

X و Y و M?

$$W = U\left(z + \frac{a^2}{z}\right) - \frac{ik}{2\pi}\ln z$$

$$\frac{dw}{dz} = U\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) - \frac{ik}{2\pi z}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_c \frac{A}{z^n}\,dz = 2\pi i\left[\mathrm{Res}[f(z)]\right] \\ \mathrm{Rew}[f(z)] = \frac{1}{(n-1)!}\ln \frac{d^{n-1}}{dz} \end{array} \right.$$

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = U^2\left(1 + \frac{a^4}{z^4} - \frac{2a^2}{z^2}\right) + \frac{k^2}{4\pi^2 z^2} - \frac{ik}{\pi z}U\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right)$$

$$= U^2 - \frac{ikU}{\pi z} + \left(\frac{k^2}{4\pi^2} - 2a^2U^2\right)\frac{1}{z^2} + \frac{ika^2}{\pi z^3} + \frac{U^2a^4}{z^4}$$

$$X - iY = \frac{1}{2}\rho i \oint\left[\cancel{U^2} - \frac{ikU}{\pi z} + \left(\cancel{\frac{k^2}{4\pi^2}} - 2a^2U^2\right)\frac{1}{z^2} + \cancel{\frac{ika^2}{\pi z^2}U} + \cancel{\frac{U^2a^4}{z^4}}\right]dz$$

$$\oint_c \frac{A}{z^n}\,dz = 2\pi i\left[\mathrm{Res}[f(z)]\right]$$

$$\mathrm{Rew}[f(z)] = \frac{1}{(n-1)!}\ln_{z\to 0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[z^n f(z)\right]$$

صفحه 70

$$\int_c \frac{A}{z^n}\, dz = \begin{cases} 0 & n \neq 1 \\ 2\pi i A & n = 1 \end{cases}$$

از ریاضیات مهندسی به خاطر داریم

$$X - iY = \frac{1}{\cancel{2}} \rho i \left(\frac{-ikU}{\cancel{\pi}} \right) \cancel{2} \cancel{\pi} i$$

$$X - iY = \rho k U i$$

$$\begin{cases} \xrightarrow{\text{Drag}} X = 0 \\ \xrightarrow{\text{lift}} Y = \rho U k \end{cases} \quad \text{یا } \rho U \Gamma$$

M توسط دانشجو محاسبه شود؟

در نتیجه نیروی Drag وارد بر استوانه‌ای به شعاع a برابر صفر ولی روی lift برابر $\rho U k$ خواهد بود. باید دارید در جلسه گذشته از روش دیگری ثابت کردیم برای یک استوانه نیروی Drag و نیروی lift $\rho U a$ ($\rho U \, 2\pi \rho$) خواهد بود.

تمرین:

برای استوانه‌ای به شعاع A رابطه‌ای برای گشتاور وارد بر آن بیابید.

$$X - iY = \frac{1}{2} \rho i \oint \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz$$

اثرات سه بعدی بودن Air foil

آنچه تا بحال بیان شد برای ایرفویلی بود که (عرض از آن عمود بر کاغذ بی نهایت بود) در حالیکه اگر اثرات محدود بودن عرض فویل لحاظ شود نیروی لیفت کمتر از آن چه برای فویل با عرض محدود فرض شده و متقابلاً درگ بیشتر.

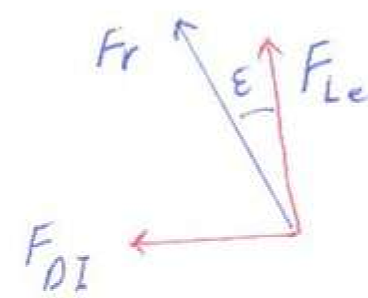
$$A.K. = \frac{b^2}{A^2} = \frac{b^2}{bc} = \frac{b}{c}$$

$b \rightarrow$ عمود بر تابلو

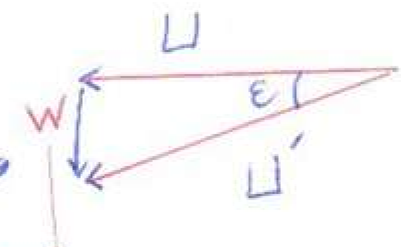
$c \rightarrow$ طول وتر

با معرفی نسبت قطر که بصورت زیر تعریف می‌شود اثرات محدود بودن پهنای فویل لحاظ می‌شود در یک فویل با عرض محدود فشار روی بال کمتر از فشار زیر بال است. جریان در زیر به رو در کناره‌ها خواهیم داشت. و در سرعت بطرف مرکز بال خواهد بود و این باعث ایجاد vortex در لبه انتهایی بال و جریان پایین در پشت بال می‌شود.

در حالیکه فویل محدود فرض می‌شود سرعت نسبی سیال با فویل دیگر U_∞ نیست بلکه U'_∞ است. دلیل آن ایجاد سرعت پایین شو بدلیل vortex می‌باشد.



و در حقیقت جریان پایین شو زاویه حمله را کمی تغییر می‌دهد



سرعت پایین شو

فرض می‌کنیم که زاویه حمله به اندازه ε تغییر کند

$$tg\,\varepsilon = \frac{w}{U_\infty} \qquad tg\,\varepsilon \simeq \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{w}{U_\infty}$$

$$\boxed{F_{Le} = F_L \cos\varepsilon = \rho U'_\infty \Gamma' \cos\varepsilon} \quad \text{lift}$$

$$\boxed{F_{DI} = F_L \sin\varepsilon = \rho U' \Gamma' \sin\varepsilon} \quad \text{Drag}$$

صفحه ۷۲

نیروی برا یا لیفت با معلوم بودن توزیع قدرت Vortex

قدرت Vortex (گاما) $\Gamma = \Gamma(y)$

$$\boxed{L = \rho U \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y)\,dy}$$

$$\boxed{D_I = \rho \int_{-b/2}^{b/2} w\,\Gamma(y)\,dy}$$

از رابطه زیر برای محاسبه سرعت پایین شو می توان استفاده کرد

$$\boxed{W = -\frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma}{dy} \frac{dy}{y-y_1}}$$

سرعت پایین شو

مثال:

برای سیرکولاسیون با توجه به سهموی بصورت $\boxed{\Gamma = \Gamma_0 \left(1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2\right)}$ برای ایرفویل

رابطه سرعت القایی پایین شو را و همچنین درگ القایی و نیروی لیفت را بیابید

$$\frac{d\Gamma}{dy} = -\frac{8\Gamma_0}{b^2} y$$

هروقت سیرکولاسیون تابعی از y شد ایرفویل محدود است

$$\Gamma = \Gamma_0 \left(1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2\right)$$

$$\frac{d\Gamma}{dy} = \Gamma_0 \left(-\frac{4}{b^2}(2y)\right) = \frac{-8\Gamma_0}{b^2} y$$

$$W = -\frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{-8\Gamma_0}{b^2} y \frac{dy}{y-y_1} = \frac{2\Gamma_0}{b^2 \pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{y}{y-y_1}\,dy$$

$$= \frac{2\Gamma_0}{\pi b^2}\left[\int_{-b/2}^{b/2} \frac{y - y_1 + y_1}{y - y_1}\, dy = \frac{2\Gamma_0}{\pi b^2}\left(\int_{-b/2}^{b/2} dy + y_1 \int_{-b/2}^{b/2} \frac{dy}{y - y_1}\right)\right.$$

تکنیک سربه‌سر آوردن ($-y$ $+y$ در صورت)

$$= \frac{2\Gamma_0}{\pi b^2}\left(y \Big]_{-b/2}^{b/2} + y \ln (y - y_1) \Big]_{-b/2}^{b/2}\right.$$

$$W = \frac{2\Gamma_0}{\pi b^2}\left(b + y_1 \ln \frac{b/2 - y_1}{-b/2 - y_1}\right)$$

$\frac{b}{2} + \frac{b}{2} = b$

$$W = \frac{2\Gamma_0}{\pi b^2}\left(b + y_1 \ln \frac{2y_1 - b}{2y_1 + b}\right)$$

(y_1 بین 0 و b است)

یک متغیر مجاز است

W ماکزیمم سرعت پایین شو در خط میان خواهد بود

$$y_1 = 0 \Rightarrow \boxed{W_{max} = \frac{2\Gamma_0 b}{\pi b^2} = \frac{2\Gamma_0}{\pi b}}$$

سرعت پایین شو باید کمتر باشد و برای اینکه کمتر باشد با فرمول زیر ثابت شود

$$* \boxed{\Gamma = \Gamma_0 \left(1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

ثابت می‌شود که در صورتیکه کمترین درگ القائی را خواهیم داشت که توزیع سیرکولاسیون بصورت زیر باشد

تابع زوج

$$\boxed{\Gamma = \Gamma_0 \left(1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad \boxed{\Gamma(-y) = \Gamma(y)}$$

با نگاه به توزیع فوق چون گاما $\Gamma(-y)$ مساوی $\Gamma(y)$ است لذا این توزیع یک توزیع سیرکولاسیون زوج است. $\Gamma(-\frac{b}{2}) = \Gamma(\frac{b}{2}) = 0$ در کنارها صفر و در بالا و پایین ماکزیمم است

$$\Gamma(0) = \Gamma_0$$

چون $\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)=\Gamma\left(-\frac{b}{2}\right)=0$ نتیجه می‌گیریم که کمترین پایه القایی زمانی خواهد بود که توزیع سیرکولاسیون بیضوی باشد.

تمرین: توزیع سیرکولاسیون بصورت $\boxed{\Gamma=\Gamma_0\left(1-\left(\frac{2y}{b}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$ در نظر گرفته و نشان دهید سرعت پایین‌شو ثابت و برابر با $W=\frac{\Gamma_0}{2b}$ بوده و همچنین نیروی لیفت برابر خواهد بود با $L=\frac{\pi b}{4}\rho U\Gamma_0$ و ε برابر خواهد بود $\varepsilon=\frac{\Gamma_0}{2bU}$

و همچنین درگ القایی برابر خواهد بود با $D_I=\frac{1}{8}\rho\pi\Gamma_0^2$

جریان سه بعدی غیر چرخشی : Irrotational 3-Dimensional Flow → ϕ

در این فصل به بررسی جریان‌های سه بعدی و غیر چرخشی می‌پردازیم

تابع جریان و پتانسیل سرعت در این نوع جریان‌ها با فرض اینکه جریان متقارن محوری باشد تعریف می‌شود (این شرط تنها برای تابع جریان است و الا پتانسیل سرعت همینکه جریان غیر چرخشی باشد تعریف می‌شود).

می‌توان از اصل برهم نهش (سوپر پوزیشن) همچنان استفاده نمود و تابع جریان مرکب را با جمع تک تک جریان بدست آورد همچنین پتانسیل سرعت را، نکته قابل توجه در جریان‌های سه بعدی این است برخلاف جریان دو بعدی تابع جریان ψ و پتانسیل سرعت ϕ بر هم عمود نیستند

پتانسیل سرعت در این حالت همچون حالت دو بعدی معادله لاپلاس را ارضا می‌نماید در حالی که تابع جریان معادله لاپلاس را ارضا نمی‌کند

$$
\begin{cases}
① \quad V_r = \dfrac{1}{r^2 \sin\theta} \dfrac{\partial \psi}{\partial \theta} \\[2ex]
② \quad V_\theta = \dfrac{-1}{r \sin\theta} \dfrac{\partial \psi}{\partial r}
\end{cases}
$$

می‌توان ثابت کرد در این حالت خطوط جریان بصورت

$\dfrac{dr}{V_r} = \dfrac{r\,d\theta}{V_\theta}$ خواهد بود

رابطه فوق را ثابت کنید

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} dr + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\theta$$

از معادله‌های ① و ② می‌توان حل کرد.

ولی پتانسیل سرعت از همان روابط جریان دو بعدی بدست می آید

$$V_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

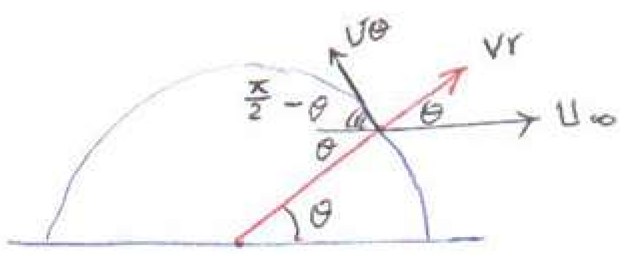
$$V_\theta = \frac{-1}{r \sin\theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \phi}{r \partial \theta}$$

$$\frac{dr}{V_r} = \frac{r\,d\theta}{V_\theta}$$

* بدست آوردن توابع جریان های ساده :

جریان یکنواخت ۳ بعدی

3-D uniform flow



$$\begin{cases} V_r = U_\infty \cos\theta \\ V_\theta = -U_\infty \sin\theta \end{cases}$$

$$V_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U_\infty \cos\theta \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U r^2 \sin\theta \cos\theta \Rightarrow \psi = \int U_\infty r^2 \sin\theta \cos\theta \, d\theta$$

$$\psi = \frac{1}{2} U_\infty r^2 \sin^2\theta + f(r)$$

$$V_\theta = \frac{-1}{r \sin\theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \Rightarrow \frac{-1}{r \sin\theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -U_\infty \sin\theta$$

$$\frac{d\psi}{dr} = U_\infty r \sin^2\theta \Rightarrow \psi = \int U_\infty r \sin^2\theta \, dr$$

$$\psi = \frac{1}{2} U_\infty r^2 \sin^2\theta + g(\theta)$$

$$f(r) = g(\theta) = 0 \Rightarrow \boxed{\psi = \frac{1}{2} U_\infty r^2 \sin^2\theta}$$

با برابر صفر قرار دادن $g(\theta), f(r)$ ψ ارضاء خواهد شد برای در حالت فوق

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = V_r = U_\infty \cos\theta \Rightarrow \phi = \int U_\infty \cos\theta \, dr \Rightarrow$$

$$\phi = U_\infty \cos\theta \, r + f(\theta)$$

$$\frac{\partial \phi}{r\partial \theta} = V_\theta = -U_\infty \sin\theta \Rightarrow \phi = \int -U_\infty \sin\theta \, r \, d\theta$$

$$\phi = U_\infty r \cos\theta + g(\theta)$$

$$f(\theta) = g(r) = 0 \Rightarrow \boxed{\phi = U_\infty r \cos\theta}$$

دیده می‌شود که در این حالت خطوط جریان و خطوط پتانسیل عمود نیستند مجدداً تاکید می‌شود که تابع جریان در معادله لاپلاس (در حالت سه بعدی) صدق نمی‌کند در حالیکه معادله سرعت در معادله لاپلاس صدق می‌کند

* چشمه و چاه سه بعدی:

تصور کنید جریانی، با دبی حجمی بزرگ Q از یک نقطه بصورت شعاعی به اطراف پخش شود مؤلفه شعاعی سرعت برابر خواهد بود با $V_r = \frac{Q}{4\pi r^2}$

ثابت $\boxed{m = V_r r^2 \text{) فلذا } Q = m 4\pi}$

$$m = \frac{Q}{4\pi} \Rightarrow V_r = \frac{m}{r^2}$$

با انجام مراحلی شبیه جریان یکنواخت سه بعدی پتانسیل سرعت و تابع جریان بصورت زیر خواهد بود:

$$\psi = -m\cos\theta \qquad \phi = -\frac{m}{r}$$

چنانچه یک چاه داشته باشیم m به $-m$ تبدیل می‌شود

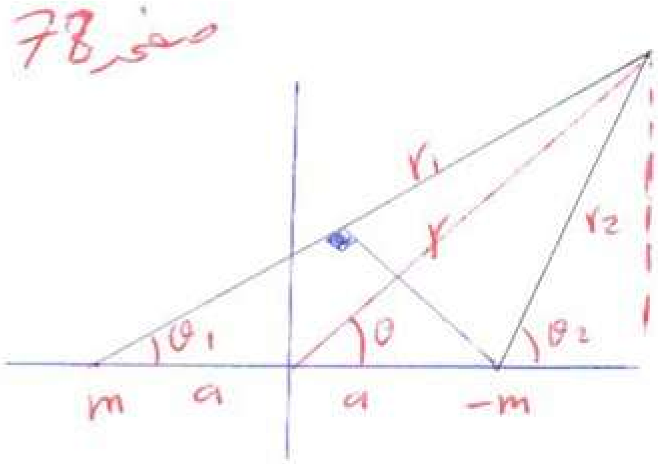
$$m \xrightarrow{\text{Sink}} -m$$

* دابلت سه بعدی

3-D Doublet

چشمه‌ای را در نظر بگیرید که در نقطه $(-a, 0)$ واقع است source و چاهی که در نقطه $(a, 0)$ sink هم قدرت با آن قرار دارد آنگاه فاصله این دو به سمت صفر میل کند

صفحه 78



Doublet تابع جریان بدست می‌آید

$$\star \quad a \to 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 + r_2 \longrightarrow 2r \\ r_1 r_2 \longrightarrow r^2 \\ r_1 - r_2 \longrightarrow 2a\cos\theta \end{cases}$$

$$\Psi_t = \Psi_1 + \Psi_2$$

$$\Psi = -m\cos\theta_1 + m\cos\theta_2$$

$$= m(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

$$= m\left(\frac{r\cos\theta - a}{r_2} - \frac{r\cos\theta + a}{r_1}\right)$$

$$= m\,\frac{r_1(r\cos\theta - a) - r_2(r\cos\theta + a)}{r_1 r_2}$$

$$= m\,\frac{r r_1\cos\theta - a r_1 - r_2 r\cos\theta - a r_2}{r_1 r_2}$$

با ادامه از $\star$ استفاده می‌کنیم

$$= m\,\frac{r\cos\theta(r_1 - r_2) - a(r_1 + r_2)}{r_1 r_2}$$

$$\Psi_{Doublet} = m\,\frac{r\cos\theta(2a\cos\theta) - a(2r)}{r^2} = m\,\frac{2ar\cos^2\theta - 2ar}{r^2}$$

$$= m\,\frac{2ar(\cos^2\theta - 1)}{r^2}$$

$$= \frac{-\overset{\lambda}{2am}\,\sin^2\theta}{r}$$

$$\boxed{\Psi_{Doublet} = \frac{-\lambda\sin^2\theta}{r}}$$

تکلیف :

ثابت کنید پتانسیل سرعت یک Doublet برابر خواهد بود

$$\phi_{Doublet} = \frac{\lambda \cos\theta}{r^2}$$

در روابط فوق λ را قدرت المان Doublet می نامند (توضیح سند ۸)

برخلاف حالت دو بعدی تابع جریان و پتانسیل سرعت عمود بر هم نیستند

و همچنین در این حالت خطوط جریان و پتانسیل سرعت بصورت یک دایره کامل نخواهند بود

نکته :

از آنجایی که Vortex در حالت متقارن محوری نمی تواند وجود داشته باشد لذا Vortex بررسی نخواهد شد

ترکیب جریان یکنواخت و چشمه سه بعدی :

با توام کردن توابع جریان و توابع پتانسیل چشمه و جریان یکنواخت ، جریان حول نیم بدنه متقارن محوری ایجاد خواهد شد

$$\psi = \psi_{uniform} + \psi_{source}$$

$$\psi = \frac{1}{2} U_\infty r^2 \sin^2\theta - m \cos\theta$$

$$V_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{1}{r^2 \cancel{\sin\theta}} \left(\frac{1}{\cancel{2}} U_\infty r^2 \cancel{2} \cancel{\sin\theta} \cos\theta + m \cancel{\sin\theta}\right)$$

$$V_r = U_\infty \cos\theta + \frac{m}{r^2}$$

$$V_\theta = \frac{-1}{r \sin\theta} \frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{-1}{\cancel{r \sin\theta}} \left(\frac{1}{\cancel{2}} U_\infty \cancel{2} \cancel{r} \sin^2\theta\right) = -U_\infty \sin\theta$$

stagnation point(s):

$$V_r = 0 \implies U_\infty \cos\theta + \frac{m}{r^2} = 0$$

$$V_\theta = 0 \qquad -U_\infty \sin\theta = 0 \implies \sin\theta = 0 \implies \begin{cases} \theta = 0 & \times \\ \theta = \pi & \checkmark \end{cases}$$

$$\theta = \pi = U_\infty(-1) + \frac{m}{r^2} = 0 \implies r^2 = \frac{m}{U_\infty} \qquad \boxed{r_s = \left(\frac{m}{U_\infty}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\left.\begin{array}{l} r_s = \left(\frac{m}{U_\infty}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \theta = \pi \end{array}\right| \Rightarrow \psi = m$$

$$1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} \quad *$$

$$* \Rightarrow m = \frac{1}{2} U_\infty r^2 \sin^2\theta - m\cos\theta \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} U_\infty r^2 \sin^2\theta = m(1+\cos\theta) \Rightarrow \boxed{r^2 = \frac{2m(1+\cos\theta)}{U_\infty \sin^2\theta}} \; *$$

$$r^2 = \frac{2m\, 2\cos^2\frac{\theta}{2}}{U_\infty \sin^2\theta}$$

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$r^2 = \frac{4m\cos^2\frac{\theta}{2}}{U_\infty\left(4\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\right)} \longrightarrow \boxed{r^2 = \frac{m}{U_\infty \sin^2\frac{\theta}{2}}}$$

تکلیف) ثابت کنید قطر (ضخامت) این نیم بدنه در فواصل دور برابر $2h = 4a$ خواهد شد

بدست آوردن سرعت کل

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2} = \sqrt{\left(U_\infty\cos\theta + \frac{m}{r^2}\right)^2 + \left(-U_\infty\sin\theta\right)^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{V^2 = U_\infty^2 + \frac{m^2}{r^4} + \frac{2mU_\infty}{r^2}\cos\theta}$$

Bernoulli's equation: برای بدست آوردن فشار از قضیه برنولی

$$\frac{P_\infty}{\rho g} + \frac{U_\infty^2}{2g} + z = \frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z$$

$$\frac{P-P_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 1 - \left(\frac{V}{U_\infty}\right)^2 = -\frac{m^2}{r^4 U_\infty^2} - 2\frac{m}{r^2 U_\infty}\cos\theta$$

حال برای تعیین توزیع فشار روی نیم بدنه مقدار V برحسب θ را که قبلا بدست آورده ایم در معادله برنولی وارد می کنیم

تکلیف ثابت کنید سرعت ماکزیمم و یا فشار مینیمم روی جسم در $\theta = 70.5$ و در $r = a\sqrt{3}$ اتفاق خواهد افتاد و مقدار سرعت V_{max} برابر $1.15 U_\infty$ می شود

از نقطه به بعد سرعت روی بدنه بطور آهسته کاسته می شود تا در بی نهایت به U_∞ می رسد

* ترکیب جریان یکنواخت و دابلت :

این ترکیب معادله جریان حول یک کره ساکن از دید یک ناظر ساکن خواهد بود

$$\psi = \psi_{unif} + \psi_{Doublet}$$

$$\psi = \frac{1}{2} U_\infty r^2 \sin^2\theta - \frac{\lambda \sin^2\theta}{r}$$

تکلیف این نوع ترکیب را بطور کامل تحلیل کنید

V_r , V_θ , stag , ψ , $r = r(\theta)$

V , Bernoully

* جریان حول کره متحرک نسبت به یک ناظر ساکن :

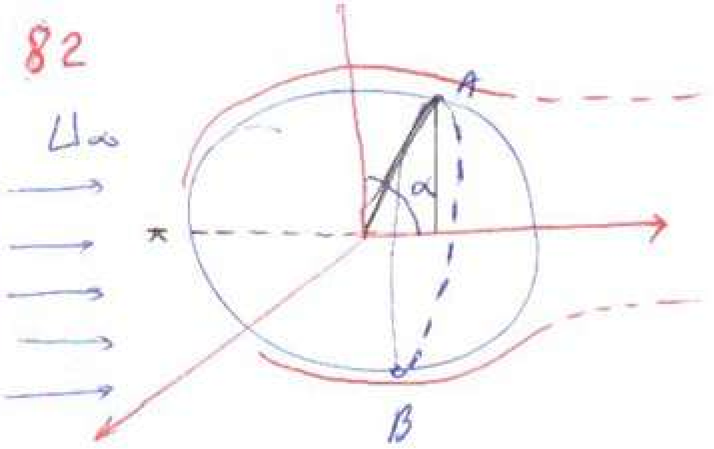
در این حالت تابع جریان معادل یک Doublet به تنهایی خواهد بود

$$\psi = \psi_{Doublet} = -\frac{\lambda \sin^2\theta}{r}$$

$$\phi = \phi_{Doublet} = \frac{\lambda \cos\theta}{r^2}$$

مثال

شکل زیر کره ای به شعاع a در جریان با سرعت یکنواخت U_∞ را در اطراف کره نشان می دهد اگر برخاستگی بر روی محیطی AB در زاویه α رخ دهد (جدایش) با فرض اینکه تا قبل از جدایش جریان پتانسیل معتبر باشد و رابطه زیر برقرار باشد و بازیافت فشار در ناحیه برخاستگی ناچیز باشد ضریب درگ فشاری روی کره را بدست آورید



$$\frac{P-P_\infty}{\frac{1}{2}\rho v^2} = 1-\frac{a}{4}\sin^2\theta$$

α زاویه‌ای که در آن جدایش صورت می‌گیرد

[illegible] هم فشاری هستند

درگ $D_1 = -\iint P\cos\theta \, dA$

$$D_1 = -\int_{\pi}^{\alpha} P\cos\theta \underbrace{(a\,d\theta)(2\pi a\sin\theta)}_{dA}$$

$$D_1 = -\int_{\pi}^{\alpha} \left(\frac{1}{2}\rho U^2\right)\left(1-\frac{a}{4}\sin^2\theta\right)\overbrace{(2\pi^2 a)}^{2a^2\pi}\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$D_2 = -\frac{1}{2}\rho U^2\left(1-\frac{a}{4}\sin^2\alpha\right)\pi(a\sin\alpha)^2$$

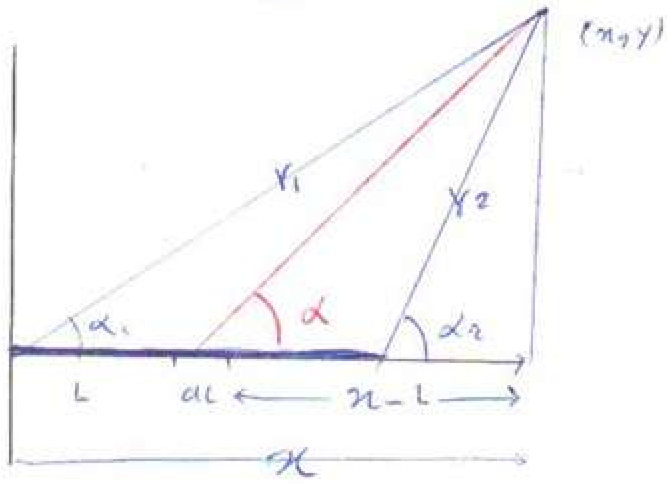
$$D = D_1 + D_2 = D$$

درگ کل $C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 A} = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 \pi a^2} = \frac{a}{8}\sin^4\alpha$

* خط چشمه سه بعدی

خط چشمه سه بعدی پاره خطی است که در امتداد آن بصورت چشمه نقطه‌ای بطور یکنواخت توزیع شده باشد

قدرت خط چشمه مقدار جریانی است که در واحد طول خط چشمه خارج می‌شود



نقطه دلخواه و ثابت در زمان تحلیل

المانی به طول dL از خط چشمه را در نظر گرفته از این المان خطی به نقطه (x, y) می‌کشیم

q ~~قدرت~~ دبی واحد طول خط چشمه می‌باشد

Q دبی تأثیر یافته

$$m = \frac{Q}{4\pi}$$

$$\psi = -m \cos\theta$$

$$\psi = -\frac{Q}{4\pi}\cos\theta$$

$$\frac{q}{4\pi} = m' \Rightarrow d\psi = -m'\, dL \cos\alpha$$

$$d\psi = -\frac{q}{4\pi}\, dL \cos\alpha$$

$$\psi = -m' \int dL \cos\alpha$$

$$\cot\alpha = \frac{x-L}{y} \Rightarrow x - L = y\cot\alpha \Rightarrow -dL = y\left(-\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)d\alpha$$

$$\psi = -m' \int \frac{y}{\sin^2\alpha}\, d\alpha \cos\alpha = -m'y \int \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\, d\alpha$$

$$\psi = -m'y\left(\frac{-1}{\sin\alpha}\right)_{\alpha_1}^{\alpha_2} = m'y\left(\frac{1}{\sin\alpha_2} - \frac{1}{\sin\alpha_1}\right) = m'$$

$$m'\left(\frac{y}{\sin\alpha_2} - \frac{y}{\sin\alpha_1}\right) = m'(r_2 - r_1)$$

برای خط چاه m' به $-m'$ تبدیل می‌شود

تمرین ۱

ترکیب جریان یکنواخت چشمه و چاه

ترکیب جریان یکنواخت در جهت محور x ها و یک چشمه کروی در $x=-a$ و چاه نقطه‌ای در $x=a$ برابر با a جریان را حول یک جسم بیضوی ایجاد می‌کند که به بدنه رانکین معروف است

$$\Psi = \frac{1}{2} U_\infty r^2 \sin^2\theta - m\cos\theta_1 + m\cos\theta_2$$

$$\phi = U_\infty r\cos\theta - \frac{m}{r_1} + \frac{m}{r_2}$$

تکلیف)

ترکیب فوق را بطور کامل تحلیل کنید

تمرین ۲

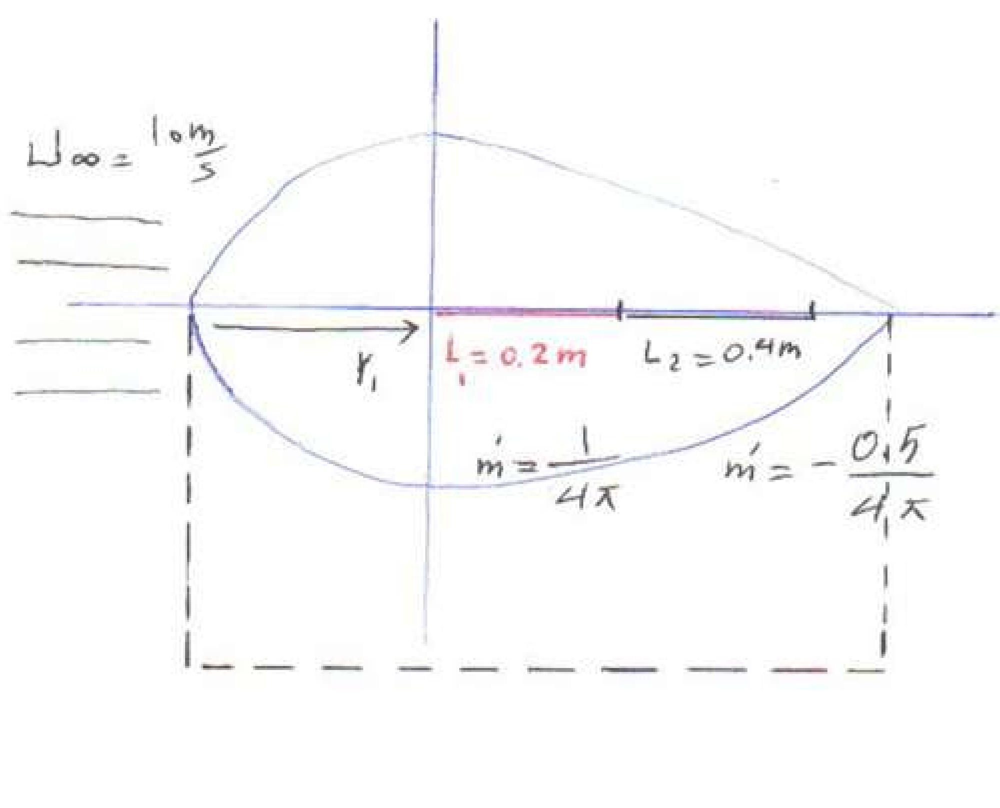
خط چشمه سه بعدی

با ترکیب جریان یکنواختی $U=10\frac{m}{s}$ با یک چشمه خطی به طول $L_1=0.2m$ با قدرت $m'_1=\frac{1}{4\pi}$ به یک چاه خطی به طول $L_2=0.4m$ و به قدرت $m'_2=-\frac{0.5}{4\pi}$ جریان حول بدنه مدوری مانند شکل زیر، طول جسم مدور را محاسبه کنید شعاع این جسم در $\theta=45$ را بدست آورید.

جواب:

طول جسم: $0.6115m$

شعاع: $0.0361m$



$r\sin\theta$

$h=?$

$\theta=45$

$$\Psi = \Psi_{uniform} + \Psi_{\substack{source\\line}} + \Psi_{\substack{sink\\line}}$$

$V_r = ?$

$V_\theta = ?$

stagnation Point