Subject: ۱۶ Year: Month: Date: سیگنال

$$X_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

مانند همان موج مربعی که جلسه قبل حساب کردیم.

$$= \frac{1}{T_0}\left[\int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt + \int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t_1}\, dt\right] \Rightarrow$$

می بینیم که این دو تا قرینه می شوند.

$t_1 = t - \frac{T_0}{2}$ ← t و t₁ تو انتگرال هر دو متغیر ظاهری باشد

تقارن نصف موج زوج: می دانیم انتگرال هایی که داشتیم هر دو یک پریود هستند ... تبدیل می کنند.

اگر وسط سری فوریه را در ... برابر دوره تناوب ببریم چه می شود؟ انگار که فرکانس ها ... برابر می شوند دامنه ها تغییر می کنند.

پریود کاذب

$$\begin{cases} T_1 = 2 & \to \quad \frac{6}{2} - 1 = 2 \text{ ، ۲ صفر insert میکنیم} \\ T_2 = 3 & \to \quad \frac{6}{3} - 1 = 1 \to \text{ ۱ صفر} \\ T = \text{ک.م.م}(2,3) = 6 \end{cases}$$

توضیح می‌دهیم

در تقارن نیم موج زوج ← $T' = \frac{T_0}{2}$

ضرب داخلی دو بردار: معیاری است برای شباهت سنجی بین دو سیگنال.

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-N}^{N} X_n e^{jn\omega_0 t}$$

همه را ریسمان کردیم

تعریف: $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

قضیه: (RMSE) با فرض RMSE، سری فوریه بهینه است.

Root Mean Square error

یعنی با

به راحتی اثبات می شود که سری فوریه جزء سری های بهینه است.

اثبات) یک ضرب داخلی تعریف می کنیم. $\langle \varphi_n(t), \varphi_m(t)\rangle = \frac{1}{T_0}\int \varphi_n(t)\, \varphi_m^*(t)\, dt$

برای سیگنال های تناوبی ابعاد سیگنال ها را از $\frac{1}{T_0}$ با بعد مناسب $\langle T_0 \rangle$

$\hat{x}(t)$: سیگنال پریودیک $= \sum_{n=0}^{N} d_n \varphi_n(t)$

می‌خواهیم $\varphi_n(t)$ و $\varphi_m(t)$ پایه باشند.

متعامد یکه (بردار نرمال)

برای یکه سازی:

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n$

تکمیل عمودی

$e_1 = \frac{\vec{v}_1}{|v_1|}$ $\quad \vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{v}_2 \cdot \vec{e}_1$

به این روش، همه جا بکار بریم فضا را متعامد سازیم.

$e_2 = \frac{\vec{v}_2}{|v_2|}$ $\quad v_3' =$

$$\langle \varphi_n(t), \varphi_m(t)\rangle = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

بر هم عمودند.

حالا یک خطا تعریف می کنیم. $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

$$\int_{\langle T_0\rangle} \varepsilon^2(t)\, dt =$$

ادامه حل بر عهده خودتان.

$$\boxed{\text{امتحان ساعت ۸/۳۰ سه‌شنبه}}$$

Subject: Year: Month: Date:

جلسه ۱۴

$x(-f) = x(f)$: قرار دادیم

تبدیل فوریه:

$$x(t) \to X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos\omega t\, dt - j\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin\omega t\, dt$$

نشان دهید: $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j\omega t}\, df$

شرط کافی ـ ـ ـ $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt < M$ پایدار بودن (محدود باشد)

و $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt$ انرژی بودن

کدام شرط سخت گیرانه تر است؟ شرط پایدار بودن

بررسی خواص:

نکته [۱] اگر $x(t)$ حقیقی باشد، در حوزه فوریه چه چیزی را تحلیل می کند؟ اینکه طیف دامنه زوج است و طیف فاز فرد

$\angle X(f) = -\angle X(-f)$ $\quad |X(f)| = |X(-f)|$

اثبات:

$$X^*(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x^*(t)}_{\substack{=x(t)\\ \text{حقیقی}}} e^{+j\omega t}\, dt = X(-f)$$

نکته [۲] اگر $x(t)$ حقیقی و زوج باشد، $X(f)$ نیز حقیقی و زوج است.

اثبات $X(f) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos\omega t\, dt}_{\text{حقیقی و زوج}} - j\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin\omega t\, dt}_{0}$ (فرد، زوج)

نکته [۳] اگر $x(t)$ حقیقی و فرد باشد، $X(f)$ موهومی خالص و فرد است.

اثبات | اولی صفر شده در انتگرال فوق

مثال) اگر فاز سیگنال ۰ و π باشد، چه سیگنالی است؟ حقیقی و زوج (چون sin صفر است)

خاصیت اول: خطی بودن: اگر x و y هر دو دارای تبدیل فوریه باشند آنگاه $z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t)$

هم دارای تبدیل فوریه خواهد بود $Z(f) = \alpha X(f) + \beta Y(f)$

اثبات: از نامساوی مثلثی استفاده میکنیم: $|x+y| \le |x| + |y|$

راه ۲: اگر $|x|$ انتگرال پذیر باشد $|y|$ هم انتگرال پذیر باشد آنگاه $|x+y|$ هم انتگرال پذیر است

نشان داده ایم که $z(t)$ هم دارای تبدیل فوریه است

خاصیت دوم: شیفت زمانی: میدانیم $y(t) = x(t-t_0)$ و میدانیم $x(t)$ تبدیل فوریه دارد. آنگاه

نشان دهید $y(t)$ هم دارای تبدیل فوریه می باشد. $Y(f) = e^{-j\omega t_0} X(f)$

اثبات: بار نشان دادن عملی: وقتی انتگرال را از $-\infty$ تا $+\infty$ کامل بگیریم تغییر مبدأ آن هیچ تأثیری ندارد.
شیفت دادن

بار نشان دادن دستی توام:

$$x(t-t_0)=\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j\omega(t-t_0)}\, df = \int \underbrace{\boxed{X(f)\, e^{-j\omega t_0}}}_{Y(f)} e^{j\omega t}\, df$$

نکته: در شیفت زمانی، طیف دامنه تغییری نمی‌کند ولی طیف فاز به اندازه‌ی $-\omega t_0$ تغییر می‌کند.

خاصیت سوم: شیفت فرکانسی

$$y(t)=x(t)\, e^{j\omega_0 t} \rightarrow Y(f)=X(f-f_0)$$

اثبات: $X(f-f_0)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi(f-f_0)t}\, dt$

$$Y(f)=X(f-f_0)=\int \boxed{e^{+j\omega_0 t}\, x(t)}\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$\Rightarrow y(t)=e^{j\omega_0 t}\, x(t)$$

تمرین: $y_1(t)=x_1(t)\cos\omega_0 t \rightarrow Y_1(f)=?$

$$\cos\omega_0 t=\frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

$$\rightarrow Y(f)=\frac{1}{2}X(f-f_0)+\frac{1}{2}X(f+f_0)$$

خاصیت چهارم: مشتق

$$y(t)=\frac{d}{dt}x(t) \longrightarrow Y(f)=j\omega\, X(f)$$

$$\frac{d}{dt}x(t)=y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\,\frac{d}{dt}e^{j\omega t}\, df=\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\boxed{X(f)\, j\omega}}_{Y(f)}\, e^{j\omega t}\, df \Rightarrow$$

چرا مشتق گیر ناپایدار است؟ زیرا $|Y(f)|=\omega|X(f)|$ یعنی اگر نویزی در مدار در فرکانس 100 و ω باشد همان نویز در 100 و ω ضرب می‌شود و آن را به شدت افزایش می‌دهد.

خاصیت پنجم: انتگرال

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\, d\lambda$$

اثبات: $x(t)=\frac{dy(t)}{dt} \xrightarrow{\text{قضیه ۴}} X(f)=j\omega Y(f) \rightarrow Y(f)=\frac{1}{j\omega}X(f) + ?$

این غلط است. چرا؟ کجایش غلطه؟

~~وقتی یک $x(t)$ دارم ازش مشتق بگیرم دوباره تبدیل فوریه بگیرم اگه خودش نیست~~

ایرادش را پیدا کنید. (راهنمایی: dc و ac را جدا کنید. $x(t)=x_{dc}(t)+x_{ac}(t)$)

اگر از مقدار ثابت تبدیل فوریه بگیریم: $x(t)=A \longrightarrow X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} A\, e^{-j\omega t}\, dt$

این قضیه فعلاً نیمه تمام بماند.

خاصیت ششم: کانولوشن

$$z(t)=x(t) * y(t) \quad \text{و} \quad Z(f)=X(f)\,Y(f)$$

?

خاصیت هفتم: ضرب

$$? \quad Z(f)=X(f) * Y(f) \rightarrow z(t)=x(t)\,y(t)$$

خاصیت هشتم: $\boxed{\text{تغییر مقیاس}}$

$y(t) = x(\alpha t) \rightarrow X(f) = \frac{1}{|\alpha|} X(\frac{f}{\alpha})$

$y(t) = x(10t) \rightarrow Y(f) = \frac{1}{10} X(\frac{1}{10} f)$

y لاغر شده x است ۱۰ برابر فشرده

Y(f) چاق شده X است ۱۰ برابر گسترش

سطح آن هم ۱۰ برابر کاهش پیدا کرده

if $x(t) = A \rightarrow X(f) = A\delta(f)$

گسترده ترین سیگنال زمانی — فشرده ترین

خاصیت نهم:

$y(t) = t\,x(t) \rightarrow Y(f) =$

اثبات: می‌دانیم: $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$

مشتق نسبت به f

$\frac{d}{df} X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)(-j2\pi t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = -j2\pi \int x(t)\, t\, e^{-j2\pi f t}\, dt$

پس $\boxed{\frac{-1}{j2\pi} \frac{d}{df} X(f)} = \int_{-\infty}^{+\infty} t\,x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$

تبدیل فوریه این

خاصیت دهم: $\boxed{\text{قضیه دوگان}}$ (Duality)

$x(t) = X(f)$

if $y(t) = X(t)$ یک تابع است با نام جدید، t را به جای f قرار دادیم $X(t)$

$\rightarrow Y(f) = x(-f)$

$Y(f) = \int X(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \quad t=-t,\ dt=-dt$ با جدا انتگرال را...

می‌دانیم $\int X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df = x(t)$

$\int X(-t)\, e^{j2\pi f t}\, dt = x(-f)$ ✓ انتگرال روی t

قضیه پارسوال تعمیم یافته:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, y^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, Y^*(f)\, df}$$

معیار شباهت سنجی

یعنی ترتیب ضرب داخلی تابع حوزه‌اش نیست (چه زمان چه فرکانس)

اثبات: $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} Y^*(f)\, e^{-j2\pi f t}\, df\right) dt \overset{\text{تعویض انتگرال}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} Y^*(f) \left(\underbrace{\int x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt}_{X(f)}\right) df$

می‌دانیم $y^*(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y^*(f)\, e^{-j2\pi f t}\, df$

if $x=y \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\, df$

$\boxed{\text{چگالی طیف انرژی}\ G_x(f) = |X(f)|^2}$

سوال) نشان دهید که بی‌نهایت تابع وجود دارد که معادل فرکانسی و زمانیش یکی است.

$x(t) \rightarrow x_e(t) \rightarrow X_e(f)$ کار مهم از هر سیگنال، بخش زوجش را جدا کنیم.

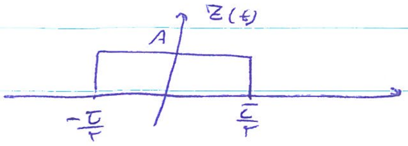
می‌دانیم $x_e(t) + X_e(t) \xrightarrow{F} X_e(f) + x_e(f)$

زوج زوج $(x_e(f) = x_e(-f))$

چون بی‌نهایت تابع می‌توانیم انتخاب کنیم و سپس زوجش را جدا کنیم ← قضیه اثبات شد.

$\boxed{\text{جلسه ۱۵}}$

$A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) = A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$



$Z(f) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A e^{-j\omega t}\, dt = \frac{A}{-j\omega}\left(e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} - e^{j\omega\frac{\tau}{2}}\right)$

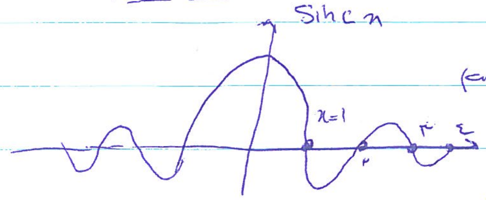
$= \frac{A}{j\omega}\left(2j \sin\frac{\omega\tau}{2}\right) =$

$\frac{\tau 2A}{2\pi f\tau} \sin(\pi f\tau) = A\tau\, \mathrm{sinc}\, f\tau$

حقیقی و زوج
↓
تبدیل فوریه هم حقیقی و زوج

$\mathrm{sinc}\, x = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$

$$\boxed{y(t) = A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \xrightarrow{F} Y(f) = A\tau\,\mathrm{sinc}(f\tau)}$$



$\boxed{1}$ نکته: در تابع sinc ، توزیع صفرها ، یکنواخت است (فاصله بین صفرها یکی است)

$\boxed{2}$ شکل سطح منحنی است که دامنه هارمونیک‌ها با عکس شماره‌ها متناسب است.

$\boxed{3}$ $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2 x\, dx = ?$ $\xleftarrow{\text{سراغ پارسوال می‌رویم}}$ $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2 x\, dx$ ، $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1^2\, dt =$

$? = 1$

$\boxed{4}$ $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}\, x\, dx = 1$

چرا؟

$A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{1}\right) \xrightarrow{F} A\,\mathrm{sinc}\, f$

$\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} A\,\mathrm{sinc}\, f\, df = A$

$\boxed{5}$ $\int_{-1}^{1} \mathrm{sinc}^2 x\, dx$

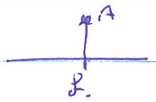
$\boxed{6}$ $\int \mathrm{sinc}^2 x\, dx$

اصل عدم قطعیت در اینجا: با افزایش τ ، در حوزه فرکانس ، از ... می‌شود. وارتفاعش τ برابر می‌شود.

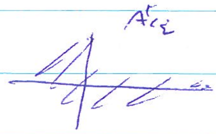
$f\left(\frac{t}{\tau}\right) \rightarrow |\tau|\, F(\tau f)$

نکته:

$A\cos(\omega_0 t) \rightarrow$

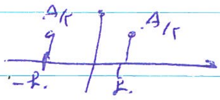


$\xrightarrow{\text{تبدیل}}$



$A\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$

$\frac{A}{2}\delta(f - f_0) + \frac{A}{2}\delta(f + f_0)$



$\xrightarrow{\text{تبدیل}}$ ✓

تبدیل فوریه: $A\delta(t)$

$A\delta(t) \xrightarrow{F} A$

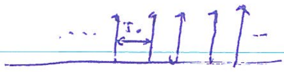
$A \xrightarrow{F} A\delta(-f)$ زوج $\delta(f)$

$A\delta(t - t_0) \xrightarrow{F} Ae^{-j\omega t_0}$

شیفت زمانی

قطار ضربه: $A=1$: $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0) = x_\delta(t)$

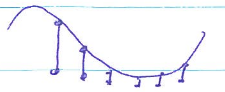
قطار ضربه در حوزه زمان



این ... در تجزیه و تحلیل دو نقش خیلی مهم ایفا می‌کند

از پیوسته گسسته را می‌سازد.

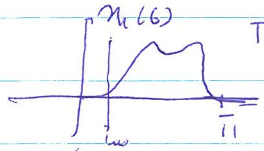
(1) اگر این سیگنال، در قطار سیگنال آنالوگ ضرب شود نمونه‌برداری می‌کند ($x(t)\cdot\delta(t-t_0)=\underbrace{x(t_0)}_{\text{نمونه‌برداری می‌کند}}\delta(t-t_0)$)



پس یک کاربرد قطار ضربه discrete سازی است.

(2) پریودیک سازی — هر چیزی را تکرار می‌کند - با چه فاصله‌ای تکرار بشود.

سیگنالی Time limited



شرط پریودیک سازی: $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(t-kT_0)$ $\quad T_0\geq T_1$ $\quad =x_1(t)*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_0)$

قطار ضربه، خودش یک سیگنال پریودیک است پس احتمالاً سری فوریه دارد.

سری فوریه (1) $x_0(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_0)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X_n e^{jn\omega_0 t}$ $\quad X_n=\frac{1}{T_0}=f_0$

$X_n=\frac{1}{T_0}\int \sum \delta(t-kT_0)e^{-jn\omega_0 t}dt=\frac{1}{T_0}\sum e^{-jn\omega_0 kT_0}$

از طرفی تبدیل فوریه:

$A\delta(t+kT_0)\xrightarrow[\text{شیفت زمانی}]{F}Ae^{j\omega kT_0}$ — فرمول پواسون

$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_0)\xrightarrow{F}\ ?$

$Ae^{jn\omega_0 t}\xrightarrow[\text{قضیه شیفت فرکانسی}]{F}A\delta(f-nf_0)$

$\sum$ (2) $\Rightarrow \sum Ae^{jn\omega_0 t}\xrightarrow{F}\sum A\delta(f-nf_0)$

(1) و (2) مقایسه $(A=f_0)$ $\Rightarrow$ $\boxed{x_0(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_0)=\sum f_0 e^{jn\omega_0 t}\rightarrow f_0\sum\delta(f-nf_0)}$

پس تبدیل فوریه قطار ضربه در حوزه زمان، می‌شه قطار ضربه در حوزه فرکانس

- $x(t)$ پریودیک است پس بسط سری فوریه دارد: $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X_n e^{jn\omega_0 t}\xrightarrow{F}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X_n\delta(f-nf_0)$ (1)

$x(t)=x_1(t)*\sum\delta(t-kT_0)\xrightarrow[\text{تبدیل فوریه}]{F}X(f)=X_1(f)\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f_0\delta(f-nf_0)$

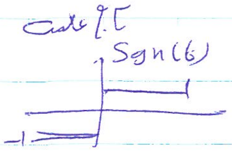
$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f_0X_1(nf_0)\delta(f-nf_0)$ (2)

(1) و (2) مقایسه ← هر دو $x(t)$ اند ← ضرایب باید برابر باشد $\rightarrow \boxed{X_n=f_0X_1(nf_0)}=\frac{1}{T_0}X_1(\frac{n}{T_0})$

نتیجه: هر وقت پریودیک سازی می‌کنیم، نوشتن ضرایب سری فوریه‌اش کار ساده‌ای است.

قضیه جابجایی انتگرال:

$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\lambda)d\lambda\rightarrow y(t)=u_{-1}(t)*x(t)$



تابعی تعریف می‌کنیم که dc و را نداشته باشد

$$\begin{cases} u(t) = \frac{1}{2}sgn(t) + \frac{1}{2} \\ t>0 \to u(t) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1 \\ t<0 \to u(t) = 0 \end{cases} \xrightarrow{F} \boxed{F(u(t)) = \frac{1}{2}F(sgn(t)) + \frac{1}{2}\delta(f)}$$

می‌خواهیم تبدیل فوریه $sgn(t)$ را حساب کنیم. ابتدا تابع کمکی تعریف می‌کنیم ($x(t) = e^{-\varepsilon|t|} \cdot sgn(t)$)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon|t|} \underbrace{}_{sgn(t)} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{0} -e^{\varepsilon t} e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-\varepsilon t} e^{-j\omega t} dt =$$

sgn فرد است — در اینجا علامت منفی

if $\varepsilon \to 0 \Rightarrow x(t) \to sgn(t)$ — می‌خواهیم حد x را بگیریم و ε را به صفر میل دهیم.

$$\to X(f) = \frac{-1}{\varepsilon - j\omega} + \frac{1}{\varepsilon + j\omega} \underset{\varepsilon\to 0}{=} \frac{2}{j\omega} = \frac{2}{j2\pi f} = \frac{-j}{\pi f}$$

پس $sgn(t) \xrightarrow{F} \frac{-j}{\pi f}$ — از طرفی: $\frac{1}{\pi t} \xrightarrow[\text{Duality}]{F} -j\,sgn(f)$

$$\begin{cases} \frac{-j}{\pi t} \to -sgn(f) \\ \frac{j}{\pi t} \to sgn(f) \end{cases}$$

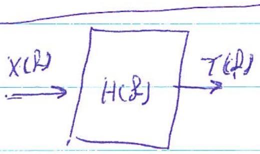
راه دوم

$$\begin{cases} u(t) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}sgn(t) \\ F\{\underbrace{\frac{d}{dt}[\frac{1}{2}sgn(t)]}_{\delta(t)}\} = j\omega F\{\frac{1}{2}sgn(t)\} \\ \to F\{\frac{1}{2}sgn(t)\} = \frac{1}{j\omega} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{*} F(u(t)) = \frac{1}{2}F(sgn(t)) + \frac{1}{2}F\{1\} = \frac{1}{j\omega} + \frac{1}{2}\delta(f)$$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{j\omega}X(f) + \frac{1}{2}X(0)\delta(f)}$$

آنالیز سیستم در حوزه فرکانس : (فشرده و LTI)



$H(f)$: تبدیل فوریه پاسخ ضربه

مشخصه پاسخ فرکانسی سیستم

$$x(t) \Rightarrow y(t) = x(t) * h(t)$$
$$\xrightarrow{F} Y(f) = H(f)X(f)$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} \text{ یا } F[h(t)]$$

برای حافظه صفر بودن سیستم ← $H(f)$ باید عدد ثابت باشد زیرا $h(t)$ باید $k\delta(t)$ بود

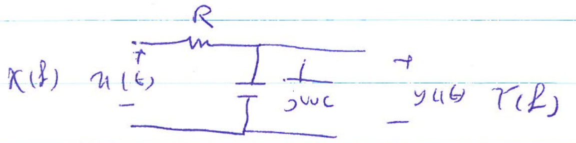
برای پایداری ← $h(t)$ را به دست آوریم و انتگرال آن را چک کنیم

برای علی بودن ← $H(f)$ به ما پاسخ می‌دهد ولی نیاز به تبدیل دیگری داریم که همان قضیه کوشی-ریمان است

جلسه ۱۴

راه‌های محاسبه $H(f)$:

روش اول) حل مدار



$$\frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1+j\omega RC}$$

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$ → خیلی مطلوب نیست

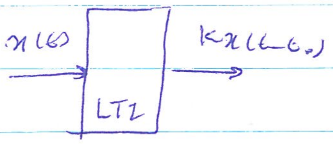
از روی $h(t)$، $H(f)$ را به دست آوریم

روش دوم: از معادله دیفرانسیل: $RC\dot{y}(t) + y(t) = x(t)$

از طرفین تبدیل فوریه می‌گیریم: $RC(j\omega Y(f)) + Y(f) = X(f) \rightarrow \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{1}{1+j\omega RC}$

بعد طبق نکات فوریه:

سیستم بدون اعوجاج: سیستمی است که خروجی کپی کامل و صحیح ورودی باشد ← خروجی فقط ضریبی از ورودی یا شیفت داده شده‌ی آن باشد



مثلاً مرجع، هر چند ابعاد روی تغییر کننده تصحیح می‌شود.

پاسخ ضربه $h(t) = ?$ ورودی $= \delta(t)$ (شرایط اولیه) $\rightarrow h(t) = K\delta(t-t_0) \xrightarrow{F} \boxed{H(f) = Ke^{-j\omega t_0}}$

دامنه و فاز را رسم کنید: $|H(f)| = |K|$ مقدار ثابت، طیف دامنه

$\angle H(f) = -\omega t_0$ طیف فاز، خطی که از مبدأ می‌گذرد.

و با زاویه π می‌گذرد و شیب آن $-2\pi t_0$ است. (اگر منفی باشد)

زمانی که فرکانس محور طولی ما باشد.

اگر محور طولی ما ω باشد ← شیب $= -t_0$

سه پارامتر مهم: ① ضریب ② منفی مشتق فاز (تأخیر) ③ ← بعداً می‌خوانیم

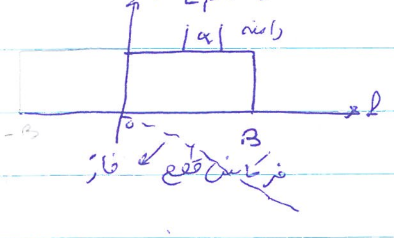
سوال: آیا یک سیستم در تمام طول دامنه‌اش باید بدون اعوجاج باشد؟ (دامنه‌اش ثابت و فازش خطی باشد)؟

$Y(f) = H(f)X(f)$ جایی که $X(f)$ مقدار ندارد، $H(f)$ برای ما چه اهمیتی دارد؟! پس بدون اعوجاج بودن،

در محدوده‌ی پهنای باند مهم است (محدوده‌ای که $X(f)$ مقدار معناداری دارد)

فیلتر: اگر نگاهمان در حوزه فرکانس باشد ← فیلتر

یک فیلتر ایده‌آل، باید در محدوده‌ی گذر، بدون اعوجاج باشد.



اولین فیلتر ایده‌آل: low pass

سه پارامتر مهم: ① پهنای باند ② گین (اهمیتی ندارد) ③ تأخیر

[delay و فرکانس قطع]

اگر مستطیل حوزه فرکانس باشد ← sinc حوزه زمان است. $A\,rect(\frac{t}{\tau}) \xrightarrow{F} A\tau\,sinc(f\tau)$:می‌دانیم: پاسخ ضربه‌ی این سیستم

نکته: مثلاً در واقع از $-B$ تا B است شکل. ... رسم هم کنیم.

$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$

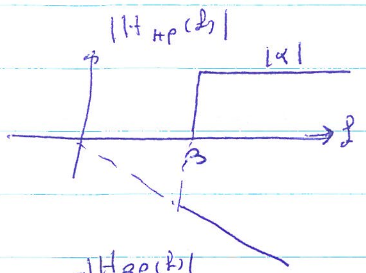
$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt$ ← مقدار برابر سطح زیر

$\mathrm{sinc}(t-t_0) \xrightarrow{F} e^{-j2\pi f t_0}\,|H(f)|$ چون فاز خطی است

$$h(t) = 2B|\alpha|\,\mathrm{sinc}(2B(t-t_0))$$

سوال: این فیلتر علی است یا غیر علی؟ $h(t)$ برای t های منفی صفر نیست → $h(t)$ غیر علی است

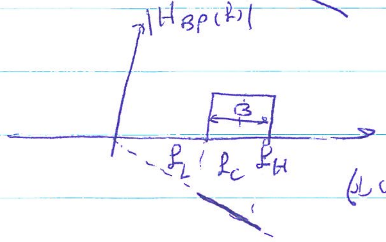
پس این فیلتر قابل ساخت نیست.



۲) فیلتر High pass ایده‌آل

از روی شکل

$$h_{hp}(t) = |\alpha|\,\delta(t-t_0) - h_{Lp}(t)$$

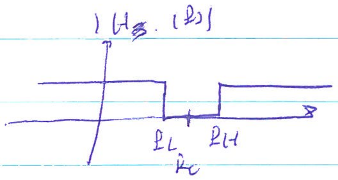


۳) فیلتر میان‌گذر - ایده‌آل Band pass

معمولاً B و f_c آدرس داده می‌شود. (در حالی که f_L و f_H را هم می‌توان آدرس داد)

قضیه مدولاسیون: $x(t)\cos\omega_0 t \xrightarrow{F} \frac{1}{2}X(f-f_0) + \frac{1}{2}X(f+f_0)$

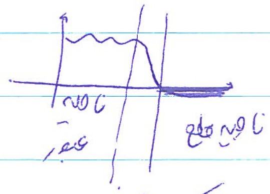
$h(t)$ = همان پاسخ ضربه $\times \cos\omega_c(t-t_0)$



۴) فیلتر میان‌نگذر ایده‌آل

پارامترها: ۱) بهره ۲) فاز ... ۳) فرکانس مرکزی ۴) پهنای باند

یک فیلتر با پهنای گذر واقعی سه ناحیه دارد: ناحیه قطع، ناحیه عبور، ناحیه Transient بین این دو ناحیه



پدیده گیبس: برای نوشتن سری فوریه تابع پالس، چون تعداد محدودی هارمونیک را می‌توانیم بفرستیم

اختلاف با موج اصلی به وجود می‌آید. (به نام overshoot هایی داریم) هرچه تعداد هارمونیک‌ها بیشتر شود این خطا کمتر می‌شود.

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-N}^{N} X_n e^{jn\omega_0 t}$$

اگر پهنای باند آنقدر بالا برود که از پهنای باند سیگنال بیشتر شود → سیگنال بیشتر overshoot را نشان می‌دهد.

یعنی خیلی سریع میاد و به حالت دائم می‌رسیم ببینیمش.

$\frac{1}{\text{پهنای باند}}$ → سرعت

تجانب ضیقی: به تجانب $|H(f)|$ یعنی ($f\to\infty$) شیفتگی دامنه نیاز مندیم.

$|H(f)| = \frac{2}{f^n}$ ← درجه ی هموار بودن ضیقی (Roll off)

نقضیه: برای پیدا کردن درجه Roll off از زمانی آنقدر مشتق می‌گیریم تا به ضربه برسیم.

درصد Roll off ← ضربه شکلی 2 ، درجه Roll off ← ضربه مستطیلی 1

جلسه ۱۷

تبدیل هیلبرت: برای پیاده‌سازی علیت از روی H به ابزاری نیاز داریم که تبدیل هیلبرت است.

تمرین زیاد حل کنید

$$\boxed{x(t) \to \hat{x}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\lambda)}{t-\lambda}\, d\lambda}$$

$x(t) \to \boxed{LTI} \to y(t) = x(t) * h(t)$

$y(t) = \hat{x}(t)$

سوال) آیا انتگرال فوق را می‌توان به صورت کانولوشن نوشت؟

$x(t)=\delta(t) \to$ پاسخ ضربه $= \frac{1}{\pi t}$

خواص تبدیل هیلبرت: ① خطی بودن (به خاطر خطی بودن کانولوشن)

تغییرناپذیر با زمان

② شیفت: $y(t)=x(t-t_0) \to \hat{y}(t) = \hat{x}(t-t_0)$ به سبب این که سیستم LTI، TI است

③ مشتق: $\dot{\hat{x}}(t) = \hat{\dot{x}}(t)$ می‌توانیم ابتدا $\hat{x}$ را حساب کنیم سپس از آن مشتق بگیریم.

تبدیل فوریه:

$y(t) = \hat{x}(t) \to Y(f) = X(f)\cdot H(f) \to \boxed{Y(f) = -j\,\mathrm{sgn}(f)\,X(f)}$

$h(t) = \frac{1}{\pi t} \xrightarrow{F} -j\,\mathrm{sgn}(f)$

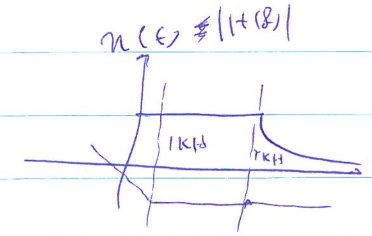
از تبدیل فوریه sgn استفاده می‌کنیم، خاصیت دوگانی

دامنه $|Y(f)| = |X(f)|$ فاز $\angle Y(f) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + \angle X(f) & f>0 \\ +\frac{\pi}{2} + \angle X(f) & f<0 \end{cases}$

تبدیل هیلبرت به دامنه سیگنال دست نمی‌زند. فقط بین مؤلفه‌های چپگرد و راستگرد اختلاف فاز $\frac{\pi}{2}$ ایجاد می‌کند.

نکته: اگر در تبدیل هیلبرت مقدار ثابت بگذاریم ($x(\lambda)$ ثابت) ← حاصل تبدیل صفر می‌شود ← طبق قضیه پارسوال

توان را حفظ می‌کند ولی مقدار صفر آن را بیرون می‌اندازد.



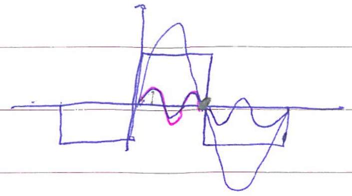
یک فیلتر جابجا کند:

$0-1KH \to$ بدون اعوجاج (دامنه ثابت، فاز خطی که از صفر می‌گذرد)

$1KH - 2KH \to$ اعوجاج فاز

$2KH< \to$ اعوجاج فاز و دامنه

ثابت ← دامنه
t_0 ← فاز
بستگی بدون اعوجاج

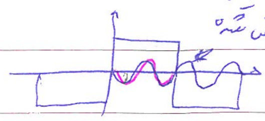


سیستمی که اعوجاج دامنه دارد ← هارمونیک اول در یک عدد ضرب می‌شود و هارمونیک سوم مثلاً ½

در عمل دیگر ← تناسب دامنه‌ی هارمونیک‌ها ⟶

شکال که می‌گفتند ← سر شعوی که ما بزرگ کنیم دست و پا شو خیلی ← دیگه که می‌گفتند نیست.

اعوجاج فاز ⟵ یعنی فاز خطی نباشد که از مبدأ می‌رود. اگه هارمونیک دست نزنیم به فاز دست بزنیم)



دیگر مربع نخواهیم داشت ⟵ فاز عوض شده

مثال که می‌گفتند ← جابجایی اجزاشو عوض کنیم.

اعوجاج دامنه و فاز ← هم دامنه‌ها عوض شوند هم جابجاشون عوض شده.

راه‌های مقابله با اعوجاج: ① اجازه ندهیم دامنه از یک جا بزرگتر شود. ② equalizer (ابتدای خوابش)

$H(f) \cdot H_{eq}(f) = \alpha e^{-j\omega t_0}$

حالا تبدیل هیلبرت ← هیلبرت بدون اعوجاج (دامنه) است.

اگر $x(t)$ انرژی سیگنال ← ۲ راه برای محاسبه هیلبرت: تبدیل فوریه ...

راه دوم) اگر $x(t)$ سیگنال توان ← سری فوریه را می‌نویسیم $x(t) \to x(t) = A_0 + \sum A_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$

$\hat{x}(t) = \sum A_n \sin(n\omega_0 t + \theta_n)$

دامنه را تغییر نمی‌دهد

پس برای نوشتن تبدیل هیلبرت موج مثلث و ... سراغ این روش می‌رویم

سیگنال تحلیلی: سیگنالی است که طیفش یک طرفه باشد.

$Z(t) \rightarrow |Z(f)| = 0$ برای $f<0$ یا $f>0$

طیف دامنه‌اش صفر است یا برای f های + یا برای f های − ← حقیقی نیست (چون حقیقی طیف دامنه‌اش زوج است) تحلیلی

$Z(t) = x(t) + j y(t) \longrightarrow Z(f) = X(f) + j Y(f)$

فرض: برای $f<0$ → $|Z| = 0$ پس $jY(f) = -X(f) \rightarrow Y(f) = jX(f)$

برای $f>0$ → $Y(f) = -jX(f)$ ← علت را بیان کنید

پس $Y(f) = -j\,\mathrm{sgn}(f)\,X(f) \rightarrow y(t) = \hat{x}(t)$ (تبدیل هیلبرت) $\rightarrow x(t) = -\hat{y}(t)$

$(\mathrm{sgn}(f) = -1)$ برای f های − $\rightarrow Y(f) = jX(f)$

$(\mathrm{sgn}(f) = 1)$ برای f های + $\rightarrow Y(f) = -jX(f)$

وارون ← سراغ تبدیل فوریه می‌رویم

توجه ← این همان اصل کوشی-ریمان است.

ما به دنبال علیت بودیم :

$h(t)=0 \quad t<0$

$h_e(t)=\frac{1}{2}\left(h(t)+h(-t)\right)$

از طرفی $h(t)=h_e(t)+h_o(t)$

$t<0 \Rightarrow h(t)=0 \rightarrow \boxed{h_e(t)=-h_o(t)}$

واضح است که در $t>0 \Rightarrow \boxed{h_e(t)=h_o(t)}$ $\rightsquigarrow$ $h_o(t)=\mathrm{sgn}(t)\,h_e(t)$

زیرا $t>0 \Rightarrow h(-t)=0 \Rightarrow h(t)=2h_e(t)$

$\Rightarrow h_o(t)=h(t)-h_e(t)$
$=h_e(t)$ ✓

$\rightarrow h(t)=h_e(t)\left(1+\mathrm{sgn}(t)\right)$

حالا بریم سراغ فوریه :

$$H(f)=H_e(f)*\left(\delta(f)+\frac{j}{\pi f}\right)=H_e(f)+H_e(f)*\frac{j}{\pi f}$$

$$\rightarrow \boxed{H(f)=H_e(f)-j\hat{H}_e(f)}$$

$$x[n]\rightarrow \boxed{X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)e^{-jn\omega}}$$

$\boxed{\text{DTFT}}$: descrete time Fourie Transform

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]\cos(n\omega)-j\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]\sin(n\omega)$$

اگر سیستم پایدار باشد قطعاً DTFT دارد. (چرا ؟) زیرا این سری مطلقاً همگرا است.

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\underbrace{|x[n]e^{-jn\omega}|}_{|x[n]|\,\underbrace{|e^{-jn\omega}|}_{1}}$ ... if $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|^2=$ همگرا $\rightarrow$ سیستم پایدار

$X(e^{j\omega})$ قطعاً پریودیک می‌باشد زیرا :

$X(e^{j(\omega+2\pi)})=X(e^{j\omega}e^{j2\pi})=X(e^{j\omega}) \rightarrow$ پریودیک
دوره تناوب $=2\pi$

inverse DTFT : $\boxed{x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{jn\omega}\,d\omega}$

خواص DTFT :

1. $X(e^{j\omega})$ پریودیک است
2. اگر $x[n]$ حقیقی باشد $\leftarrow$ در DTFT ، طیف دامنه زوج و طیف فاز، فرد می‌شود.
3. اگر $x[n]$ حقیقی و زوج باشد $\leftarrow$ در DTFT هم حقیقی و زوج
4. اگر $x[n]$ حقیقی و فرد $\leftarrow$ $X(e^{j\omega})$ موهومی خالص و فرد

واقعیه لا بقیه را این‌ها هم بنویسید (جمع - شیفت - $n\,x[n]$ - کانولوشن - ضرب - تغییر مقیاس - پارسوال ...)

۲۱ سیگنال

جلسه ۱۸

خواص:

۱) جمع آثار $z[n] = \alpha x[n] + \beta y[n] \rightarrow Z(e^{j\omega}) = \alpha X(e^{j\omega}) + \beta Y(e^{j\omega})$

۲) شیفت زمانی $y[n] = x[n-n_0] \longrightarrow Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$

۳) تک واحد backward $y[n] = \nabla(x[n]) \rightarrow Y(e^{j\omega}) = (1-e^{-j\omega}) X(e^{j\omega})$

$x[n] - x[n-1]$

accumulator ۴) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \rightarrow Y(e^{j\omega}) = \frac{X(e^{j\omega})}{1-e^{-j\omega}} + ?$ → $\pi X(e^{j0}) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi n)$

عامل ریسه است؟

$x[n] = \nabla y[n]$

خیر. باید مشتق شود. (مثل اینکه DC را از آن گرفته باشیم)

کانولوشن ۵) $w[n] = x[n] * y[n] \rightarrow W(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot Y(e^{j\omega})$

۶) $W(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) * Y(e^{j\omega})$? → $w[n]$ $\quad \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}$ $\quad w[n] = x[n] \cdot y[n]$

$X(e^{j\omega}) = \sum x[n] e^{-jn\omega}$

$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$

نکته: دو نوع کانولوشن داریم: ۱) برای اینجور سیگنال‌ها ← linear convolution

۲) circular convolution

۷) $y[n] = n\, x[n] \longrightarrow Y(e^{j\omega}) = j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$

اگر یه طرف ضرب کنیم ← اون طرف یه مرتبه مشتق

شیفت فرکانسی ۸) $y[n] = e^{j\omega_0 n} x[n] \longrightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\omega_0)})$

میدانیم $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jn\omega}$

$\rightarrow Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jn(\omega-\omega_0)}$

scaling ۹) اسپا $y[n] = x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{k}] & \text{اگر n مضرب k باشه} \\ 0 & \text{درغیراین صورت} \end{cases}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x[n]	x[0]	x[1]	x[2]	x[3]	x[4]	x[5]	x[6]	x[7]	x[8]	x[9]
y[n]	x[0]	0	0	x[1]	0	0	x[2]			x[3]

$n = 3k \quad k=3$

scaling تعمیم: if $y[n] = x_{(k)}[n] \longrightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{jk\omega})$

یعنی اگر فرکانس ۳ برابر بشه، برای اینکه سیگنال ها زودتر بیفتند ـ پس از ایم باید لحو شود.

تمرین: DTFT سیگنال $\delta[n]$ و $x[n]$ را بیابید. $\delta[n] \xrightarrow{DTFT} 1$

در جهت اثبات قضیه accumulator

$x[n]=\delta[n-n_0] \xrightarrow{DTFT} e^{-jn_0\omega}$

$x[n]=\sum \delta[n-n_0] \rightarrow \sum e^{-jn_0\omega}$

چون DTFT خطی است.

تعمیم پارسوال عمومی یافته:

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})\,d\omega}$$

نکته:

$$\langle x[n], y[n]\rangle = \langle X(e^{j\omega}), Y(e^{j\omega})\rangle$$

انرژی سیگنال

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \langle X(f), Y(f)\rangle$$

سیگنال‌های ...

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \langle X_n, Y_n\rangle$$

اثبات:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y^*(e^{j\omega})e^{-jn\omega}d\omega\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y^*(e^{j\omega})\underbrace{\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\omega}\right)}_{X(e^{j\omega})}d\omega$$

مثال) $h[n]=\alpha^n u[n]$ ، DTFT را بیابید. $h[n]=\alpha^n u[n]$ پاسخ ضربه سیستم مرتبه اول

$$y[n]-\alpha y[n-1]=x[n]$$

$$Y(e^{j\omega}) - \alpha \underbrace{e^{-j\omega}Y(e^{j\omega})}_{\text{قضیه شیفت}} = X(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}} \qquad |\alpha|<1$$

جلسه ۱۹

آنالیز سیستم‌ها در حوزه فرکانس

$$X(e^{j\omega}) \rightarrow \boxed{H(e^{j\omega})} \rightarrow Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})\cdot X(e^{j\omega})$$

دقت کنید که پریودیک اند با $T=2\pi$

فقط بررسی از ۰ تا π کافی است.

$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$ مشخصه فرکانسی

تبدیل فوریه پاسخ ضربه هم بدست آید: $y[n]-\alpha y[n-1]=x[n] \rightarrow h[n]=\alpha^n u[n]$ ، $|\alpha|<1$ لازم

$$Y(e^{j\omega}) - \alpha e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})$$

$$\rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

حالا اینجا شرط $|\alpha|<1$ دیده نشد؟ ما هیچ شرطی اینجا ننوشتیم؟ که فوریه وجود داشته باشه ـ قبل از اینکه اثبات کنیم وجود داره نمی‌توانستیم بنویسیم.

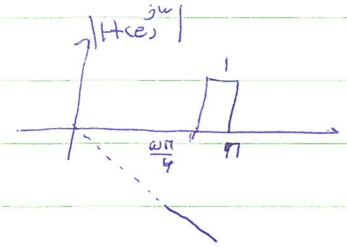
سیستم بدون اعوجاج:

$|H(e^{j\omega})| = |K|$ ثابت

$\angle H(e^{j\omega}) =$ خطی گذرنده از مبدا بود

سوال) یک فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل، مشخصه زمانیش چطور است؟

$h[n] = \cancel{H(e^{j\omega})} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{jn\omega}\, d\omega =$ اینجا هم شبیه sinc می‌شود



فیلتر بالاگذر ایده‌آل:

تفاوت‌های آنالوگ و descrete:

1) آنالوگ همواره به ازای همه ωها پریودیک است ولی در descrete، ω_0 باید مضرب ۲π باشد. (گویا $\frac{\omega_0}{2\pi}$ =)

2) در آنالوگ f هرچقدر زیاد شود (T_0 کم می‌شود) در یک بازه زمانی تعداد تغییرات بیشتر می‌شود ولی در descrete، $\cos(\frac{100\ldots\pi}{n})$
تغییرات دامنه در زمان زیاد می‌شود؛
$\cos(\frac{\pi}{n})$ تغییرات صفر
تغییرات دارد

پس در descrete بزرگتر شدن عدد f لزوماً به معنای افزایش فرکانس نیست

سوال) آیا اینجا هم شبیه سری فوریه گسسته داریم؟ بله. می‌توانیم به DTFT به جای یک سیگنال آنالوگ نگاه کنیم که $e^{j\omega n}$ سیگنالش شد. حالا اگر ضرایب فوریه‌اش را بنویسیم، اگر تعداد هارمونیک‌ها را محدود کنیم ← آن وقت ریپل خواهیم داشت ← گیبس

$\boxed{\text{DFT}}$: Descrete Fourie Transform

DFT خیلی کاربرد دارد زیرا شبیه تبدیل‌ها با کامپیوتر دارد (در هر دو فضا گسسته است)

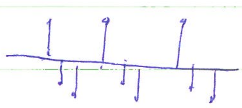
پریودیک با پریود N در

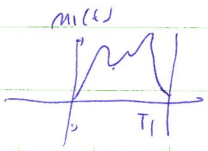
$$x[n] = \boxed{X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}}$$

$n = \langle N \rangle$ ← پریودیک است با پریود N

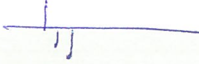
$$X[k+N] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}n(k+N)} = X[k]$$

نکته: در بعضی کتاب‌ها DFs در نظر می‌گیرند! DFs اونی که خودش پریودیکه، DFT اونی که پریودیک نیست و ما بسط دادیم





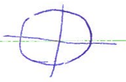
پریودیکش می‌کنیم

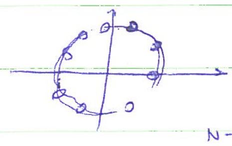


$x(t) = x_1(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_1)$

$T_2 > T_1$

نکته: تا حالا تبدیل‌ها را روی دایره به اندازه خنثی می‌بودند)





اما الان هستیم تبدیل‌ها آمده روی رئوس یک n ضلعی منتظم محاطی داخل دایره

تعریف ضرب داخلی در اینجا:

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}nk}\, e^{-j\frac{2\pi}{N}mk} = \begin{cases} N & m=n \quad \text{به سنج } N \\ 0 & m\neq n \quad \text{به سنج } N \end{cases}$$

جمع بردار بردارهای که از مرکز دایره به رئوس n ضلعی وصل می‌شوند = 0 تکرار اینکه هم‌ارز

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}nk}\, e^{-j\frac{2\pi}{N}mk} = N\,\boxed{\delta_{n,m}} \quad \begin{matrix} \to m=n & 1 \\ \to m\neq n & 0 \end{matrix}$$

دلتای کرونکر

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{j\frac{2\pi}{N}nk}}$$

حالا inverse را داشتیم.

جلسه ۲۰

مثال از کتاب (زمر): DFT ۸ نقطه‌ای ($N=8$) ؟

$$x[n] = 4 + 3\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	3	4	5	$k=6$	7
$X[k]$	$8\times4=32$	0		0		0		0

$X[k]$ مختلط است

مرحله اول: پریود را حساب کنید (اصلی بینه پریودیک هست یا نه. اگر پریودیک نبود، چون ما گفتیم ۸ تا صفر می‌گذاریم آخرش)

پریود = ٤ در اینجا

پریودی که خواسته = ۸ $\longrightarrow$ insert صفر $k-1$ می‌شود

نکته: x_2 و x_4 باید عین هم را بدهند و قرینه باشند.

اتحاد و رابطه:

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}nk}\, e^{-j\frac{2\pi}{N}mk} = N\,\delta_{m,n}$$

$$x[n] = 4 + 3\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 4 - j\frac{3}{2}e^{j\frac{n\pi}{2}} + j\frac{3}{2}e^{-j\frac{n\pi}{2}} = 4 - j\frac{3}{2}e^{j\frac{2\pi}{8}2n} + j\frac{3}{2}e^{-j\frac{2\pi}{8}2n}$$

جایگذاری $x[n]$ در فرمول مستقیم DFT

$$X[k] = \sum_{n=0}^{7} \underbrace{4\, e^{-j\frac{2\pi}{8}nk}}_{n=0 \quad m=k} - j\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{7} \underbrace{e^{j\frac{2\pi}{8}2n}\, e^{-j\frac{2\pi}{8}nk}}_{n=2 \quad m=k} + j\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{7} \underbrace{e^{-j\frac{2\pi}{8}2n}\, e^{-j\frac{2\pi}{8}nk}}_{n=-2 \quad m=k}$$

$$X[k] = 32\,\delta_{0,k} - 12j\,\delta_{2,k} + 12j\,\delta_{6,k}$$

اینجا که هر دو منفی هستند چه کنیم؟

چون پریودیک است $\delta_{6,k} \xleftarrow{N=8}$ یک پریود اضافه می‌کنیم

$$\delta_{m,n} \begin{cases} 1 & m=n \\ 0 & m\neq n \end{cases}$$

$X[0] = 32 + 0 + 0 = 32$

$X[2] = -12j$

$X[4] = 0$

$X[3] = 0$

$X[5] = 0$

$X[6] = 12j$

$X[7] = 0$

DFT · FFT (fast fourier)

DFT → N^2 ; FFT → $N\log_2^N$

نکته: $N=2^{20}$ ، FFT → ۱ ثانیه

یک عدد زیاد: 10×2^{20} ، DFT → $\frac{N}{\log_2^N} = \frac{10\times 2^{20}}{\log_2^{2^{20}}} =$

کانولوشن خطی: linear convolution

$x_1[n] * x_2[n] = y[n]$

$N_1 \quad N_2 \quad N_1+N_2-1$?

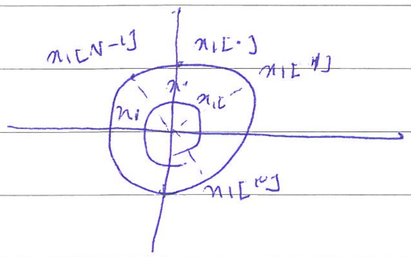
کانولوشن circular (حلقوی):

$$\boxed{y[n] = x_1[n] \circledast x_2[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x_1[k]\,x_2[n-k]}$$

$$y[0] = \sum_{k=0}^{N-1} x_1[k]\,x_2[-k] = x_1[0]\,x_2[0] + x_1[1]\,x_2[N-1] + x_2[2]\,x_2[N-2] + \dots x_1[N-1]\,x_2[1]$$

یعنی نمونه فقط ∑ روی یک پریود است.

$$y[1] = \sum_{k=0}^{N-1} x_1[k]\,x_2[1-k] = x_1[0]\,x_2[1] + x_1[1]\,x_2[0] + x_1[2]\,x_2[N-1] + \dots + x_1[N-1]\,x_2[2]$$



اگر آنهایی را که در یک امتدادند ... ضرب کنیم.

به راحتی می‌توان نشان داد در DFT: $Y[k] = X_1[k]\,X_2[k]$

تبدیل لاپلاس:

سؤال: تفاوت اساسی بین تبدیل لاپلاس و تبدیل فوریه چیست؟ توان سیگنال‌ها فوریه در لاپلاس هم پیدا می‌شود. تفاوت‌ها چیست؟ در فوریه پاسخ ماندگار بعد از آن که گذراها صفر شدند (فوریه) ولی در لاپلاس گذرا و ماندگار را با هم به دست می‌آوریم.

در معادله دیفرانسیل و مدار، از روی ولتاژ خازن‌ها و جریان سلف‌ها شرایط اولیه معادله دیفرانسیل را با KVL و KCL و اینها به دست می‌آوریم

ولی لاپلاس خودش شرایط اولیه مدار را به شرایط اولیه معادله تبدیل می‌کند.

پس لاپلاس ۳ کار را برای ما انجام می‌دهد: ① پاسخ ماندگار (به شرطی که ناحیه همگرایی محور سای ها را در بر بگیرد)

② تبدیل شرایط اولیه مدار به شرایط اولیه، حل معادله به صورت اتوماتیک ③ کلاس سیگنال‌های بیشتری دارد.