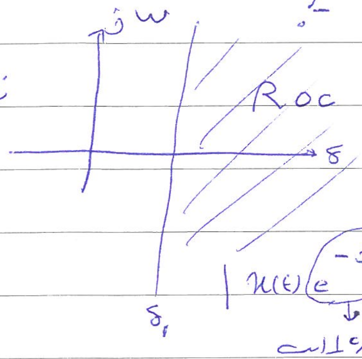
لاپلاس یک طرفه :

$x(t) \longrightarrow X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$

s متغیر است مختلط

ناحیه صفحه مختلط



صفحه s

ناحیه همگرایی : ناحیه‌ای که در آن جا این انتگرال مقدار محدود دارد.

مرز ناحیه همگرایی توسط خطوط عمودی مشخص می‌شود

ناحیه همگرایی فقط به σ بستگی دارد زیرا : $|x(t) e^{-j\omega t} e^{-\sigma t}| = |x(t) e^{-\sigma t}|$

اندازه ۱ است

قسمت موهومی s

$s = j\omega + \sigma$

$\sigma_1 \not> \sigma_2 \qquad \sigma_2 > \sigma_1$

نکته : می‌دانیم $e^{-\alpha t} u(t)$ همگرااست و تبدیل لاپلاس دارد. به کمک این قضیه مرز همگرایی را به دست می‌آوریم.

قسمت حقیقی s

$e^{-\alpha t} u(t) \longrightarrow X(s) = \frac{1}{s+\alpha}$ ناحیه همگرایی : $\sigma > -Real\{\alpha\}$

توابع کسری گویا : $X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ ریشه‌های صورت صفرها و ریشه‌های مخرج قطب‌ها

قطب جایی است که مقدار تابع ∞ می‌شود ← ناحیه همگرایی شامل قطب نمی‌باشد.

پس سمت راست‌ترین قطب را پیدا کنی و خطی به آن عمود کنی آن طرف می‌شود ناحیه همگرایی.

ناحیه همگرایی connected است.

اثبات $\sigma_1 >$ ناحیه همگرایی

$\rightarrow \sigma_1 + \sigma_2 >$ ناحیه همگرایی

جلسه ۲۱ :

خواص لاپلاس :

$\boxed{1}$ خطی بودن : $z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t) \xrightarrow[\text{لاپلاس داشته باشند}]{\text{اگر x و y تبدیل}} Z(s) = \alpha X(s) + \beta Y(s)$ الف)

ب) ناحیه همگرایی‌اش هم حداقل اشتراک ناحیه همگرایی آن دو است

$\boxed{2}$ مشتق : $y(t) = \frac{d}{dt} x(t) \longrightarrow Y(s) = sX(s) - x(0^-)$

اولاً ناحیه همگرایی $x(t)$ = ناحیه همگرایی

مشتق n ام : $y(t) = \frac{d^n}{dt^n}(x(t)) \longrightarrow Y(s) = s^n X(s) - s^{n-1} x(0^-) - s^{n-2} x'(0^-) - s^{n-3} x''(0^-) \dots$

جمع توان‌های s و x ← n-1

$\boxed{3}$ انتگرال : $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\lambda) d\lambda \longrightarrow Y(s) = \frac{1}{s} X(s) + \frac{1}{s} y(0^-)$

$x^{-1}(0^-) = \int_{-\infty}^{0^-} x(\lambda) d\lambda$

$x(t) = y'(t) \rightarrow X(s) = sY(s) - y(0^-)$

در فوریه دیدیم نمی‌توانستیم این کار را کنیم مع الشرایطی بود. ولی اینجا راحت. چرا؟

LearnElement.ir

سیگنال

$\frac{1}{s}\left(\frac{1}{(s+1)^2+1}\right) - \frac{1}{s}\left[\int \sin t\, e^{-st} dt\right]$

$L\{\sin t\, e^{-st}\} = \frac{\omega}{(s+1)^2+\omega^2}$

عکس تبدیل لاپلاس: $x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int X(s) e^{st} ds$

مثال) $e^{-\alpha t} \longrightarrow \frac{1}{s+\alpha}$

$\int \sin t\, e^{-st} dt$

$\sin t \longrightarrow \frac{1}{s^2+1}$

تمرین) $\int e^{-\alpha t} t\, dt \longrightarrow ?$

$t e^{-\alpha t} \to \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+\alpha}\right) = \frac{-1}{(s+\alpha)^2}$ پس $\int t e^{-\alpha t} = \frac{1}{s}\left[\frac{-1}{(s+\alpha)^2} + y(0^-)\right]$

۴) شیفت: $y(t) = x(t-t_0)u(t-t_0)$

در لاپلاس یکطرفه اطلاعات قبل از صفر در دسترس نیست $\leftarrow$ $y(t) = x(t-t_0)u(t-t_0)$

$\longrightarrow Y(s) = e^{-st_0}X(s)$

۵) scaling $\quad y(t) = x(\alpha t) \longrightarrow Y(s) = \frac{1}{|\alpha|}X\left(\frac{s}{\alpha}\right)$

۶) شیفت فرکانسی $\quad y(t) = e^{-\alpha t}x(t) \longrightarrow Y(s) = X(s+\alpha)$

$y(t) = x(t)\cos(\omega_0 t) \to \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right) \xrightarrow{L} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega_0} + \frac{1}{s+j\omega_0}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2s}{s^2+\omega_0^2}$

$y(t) = x(t)\sin(\omega_0 t) \to \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right) = \frac{1}{2j}\cdot\frac{2j\omega_0}{s^2+\omega_0^2} = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$

$y(t) = e^{-\alpha t}\sin(\omega t) \to \frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$

شیفت فرکانسی

۷) ضرب زمانی $\quad y(t) = t\,x(t) \longrightarrow Y(s) = -\frac{dX(s)}{ds}$

۸) تقسیم زمانی $\quad \frac{x(t)}{t} = y(t) \longrightarrow Y(s) = \int_s^{\infty} X(\xi)\, d\xi$

سوال: از کجا اومد؟!

$x(t) = t\,y(t) \longrightarrow X(s) = -\frac{dY(s)}{ds}$

از دو طرف انتگرال بگیرین، با این روش بنویسید.

۹) کانولوشن: $Z(t) = x(t) * y(t) \longrightarrow Z(s) = X(s)\,Y(s)$

سوال: در لاپلاس چگونه تبدیل یک تابع پریودیک را پیدا کنیم؟

۱۰) توابع پریودیک: $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_1(t-kT_0)$

$X(s) = \int_{0^-}^{T_0^-} x_1(t) e^{-st} dt + \underbrace{\int_{T_0^-}^{2T_0^-} x_1(t-T_0) e^{-st} dt}_{} + \int_{2T_0^-}^{3T_0^-} x_1(t-2T_0) e^{-st} dt + \dots$

تغییر متغیر: $t - T_0 = t_1$ پس $e^{-sT_0}\int x_1(t_1) e^{-st_1} dt + e^{-s2T_0}\int x_1(t_2) e^{-st_2} dt + \dots$

$t_2 = t - 2T_0$

$\longrightarrow X(s) = \left[1 + e^{-sT_0} + e^{-2sT_0} + \dots\right]\int_{0^-}^{T_0^-} x_1(t) e^{-st} dt$

$|e^{-st}| < 1 \quad \text{if } \underbrace{s>0}_{\text{Real}\{s\}} \longrightarrow \boxed{X(s) = \frac{\int_{0^-}^{T_0^-} x_1(t) e^{-st} dt}{1 - e^{-sT_0}}}$

مثال) برای یک موج مربعی: (سوال به صورت پایه بنویسید و از هم کم کنید)

LearnElement.ir

دو قضیه ویژه لاپلاس هم داریم که در حوزه s نبود : قضیه شرط اولیه و مقدار نهایی :

$$L\left(\frac{d}{dt}x(t)\right) = sX(s) - x(0^-)$$

اثبات: $sX(s) - x(0^-) = \int_{0^-}^{\infty} \frac{d}{dt}x(t)\, e^{-st}\, dt$

قضیه مقدار اولیه: $\lim_{s\to\infty} sX(s) = x(0^+)$

قضیه مقدار نهایی: $\lim_{s\to 0} sX(s) = \lim_{t\to\infty} x(t)$

برای اثبات بازه انتگرال را بشکنیم.

اثبات: $sX(s) - x(0^-) = \int_{0^-}^{\infty} \frac{d}{dt}x(t)\, e^{-st}\, dt$

$t\to 0 \Rightarrow e^{-st}\to 1$

$$= \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \frac{d}{dt}x(t)\, e^{-st}\, dt}_{x(0^+)-x(0^-)} + \int_{0^+}^{\infty} \frac{d}{dt}x(t)\, e^{-st}\, dt$$

$s\to\infty \Rightarrow x(0^+) - x(0^-) + 0 = sX(s) - x(0^-)$

if $s\to\infty$ → انتگرال دوم صفر → از دو طرف $x(0^-)$ حذف شود → $\lim_{s\to\infty} sX(s) = x(0^+)$

if $s\to 0$: $sX(s) - x(0^-) = x(t\to\infty) - x(0)$ → $sX(s) = x(t\to\infty)$

$\int_{0^-}^{\infty} \frac{d}{dt}x(t)\, e^{0}\, dt = x(t\to\infty) - x(0^-) = sX(s) - x(0^-)$

عکس تبدیل لاپلاس:

حالت اول ریشه ها ساده و حقیقی باشند : $X(s) = \frac{10}{s^2+10s+16} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+8}$

روش مناسب برای به دست آوردن A و B → روش هویساید : $A = \frac{5}{3}$ $B = -\frac{5}{3}$

$\times(s+8)(s+2)$

حالت دوم وقتی ریشه ها مختلط باشند :

جلسه ۲۲

(مثال از رسم) $\frac{s^4+5s^3+12s^2+7s+15}{(s+2)(s^2+1)^2} = \frac{A_1}{s+2} + \frac{B_1s+C_1}{(s^2+1)} + \frac{B_2s+C_2}{(s^2+1)^2}$

گام اول: محاسبه ضرایب مربوط به قطب های ساده : $\boxed{A=1}$ با هویساید

گام دوم : در $(s^2+1)^2$ ضرب می‌کنیم و به جای $s^2 = -1$ می‌گذاریم. $\rightarrow \frac{1-5s-12+7s+15}{s+2} = B_2s+C_2$

$\rightarrow \frac{2s+4}{s+2} = B_2s + C_2 \rightarrow \boxed{C_2=2}$ $\boxed{B_2=0}$

اگر مثلا اینجا ساده نمی‌شد مثلا می‌شد $\frac{s+1}{s+2}$ چکار می‌کردیم؟ صورت و مخرج را در $s-2$ ضرب می‌کنیم به مخرج s^2 می‌رسیم

به جای s^2 های صورت هم -1 می‌گذاریم به یک عدد حقیقی مرتبه ۱ می‌رسیم که معادل ضرایب B_2s+C_2 می‌شود.

گام سوم : راه اول : از تعمیم هویساید استفاده کنیم (مشتق دادن) راه دوم: $s=0$ مثلا → B_1, C_1 حساب می‌شود.

$\boxed{B_1=0}$ $\boxed{C_1=5}$

LearnElement.ir

نهال NAHAL

Subject: ۲۵

Year .... Month .... Day ....

کانولوشن: $\int_0^t \sin\lambda \sin(t-\lambda)\,d\lambda = \int_0^t \frac{1}{2}[\cos(2\lambda-t) - \cos(t)]\,d\lambda$
$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\sin t + \sin t) - t\cos t\right]$
$= \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$

حالا که تجزیه‌اش را نوشتیم: $\xrightarrow{L^{-1}} 2e^{-2t}u(t) + 5\sin t\, u(t) + 2\left(\sin t\, u(t) * \sin(t)\, u(t)\right)$

این یک ایرادی دارد: سراغ لاپلاس رفتیم که کارمان راحت شود. که اون کانولوشن را نخواستیم انجام بدهیم و دوباره از اول زمانی حساب کردیم.

خب پس چگونه عکس لاپلاس عبارت آخر را حساب کنیم؟ ① اینکه به توان نگاه کنیم، ریشه لاپلاس های که با این مخرج هستند را بنویسیم:

$\frac{1}{s^2+1} \to \sin t\, u(t)$

$\frac{s}{s^2+1} \to \cos t\, u(t)$

حاصل $\to y(t) = (e^{-2t} + 5\sin t + \sin t - t\cos t)\,u(t)$

② سراغ قضیه مشتق می‌رویم تا به آن توان برسیم:

$t\sin t\, u(t) \to -\left(\frac{-2s}{(s^2+1)^2}\right)$

$t\cos t\, u(t) \to -\left(\frac{s^2+1 - s(2s)}{(s^2+1)^2}\right) = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$ توضیح می‌شد بعد ۱۵

لاپلاس دوطرفه:

سؤال: کدام لاپلاس بیشتر مورد نیاز ما است؟ یک طرفه یا دوطرفه؟

$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt$

یک طرفه، زیرا ما به لاپلاس رفتیم تا شرایط گذرا را هم ببینیم.

همگرایی: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-st}|\,dt$

می‌توانیم یک کاری کنیم. لاپلاس دوطرفه را به یک طرفه ربط دهیم.

$X(s) = \int_{-\infty}^{0} x_2(t)e^{-st}\,dt + \int_{0}^{\infty} x_1(t)e^{-st}\,dt$

$x_2(t) = x(t)u(-t) \qquad x_1(t) = x(t)u(t)$

ناحیه همگرایی: $\boxed{s > s_1}$

تغییر متغیر: $t_1 = -t$ $\quad \int_{\infty}^{0} x_2(-t_1)e^{st_1}(-dt_1)$

$\to \underbrace{\int_0^{\infty} x_2(-t_1)e^{st_1}\,dt_1}_{X_2(-s)}$ ناحیه همگرایی: $-s > -s_2 \to \boxed{s < s_2}$

باید هم پوشانی داشته باشند

مثال) تبدیل لاپلاس دو عبارت زیر را پیدا کنید.

$x_1(t) = e^{-\alpha t}u(t) \to X_1(s) = \frac{1}{s+\alpha} \qquad s > -\alpha$

$x_2(t) = -e^{-\alpha t}u(-t) \to X_2(s) = \frac{1}{s+\alpha} \qquad s < -\alpha$

$\int_{-\infty}^{0} -e^{-\alpha t}e^{-st}\,dt = -\frac{-1}{s+\alpha} e^{-(s+\alpha)t}\Big|$

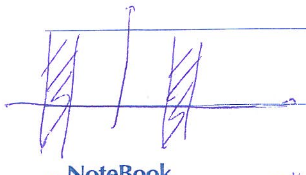
$s+\alpha < 0$

سؤال) پاسخ غیرعلی سیگنال زیر را پیدا کنید.

$RC\dot{y}(t) + y(t) = x(t)$ $\qquad$ پاسخ علی: $\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)$

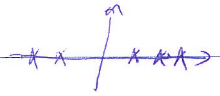
به قرینه طبیعی دست می‌زنیم: $\begin{cases} u(t) \to u(-t) \\ \frac{1}{RC}e^{\square} \to \frac{-1}{RC}e^{\square} \end{cases}$ $\quad -\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}u(-t) \to$ پاسخ غیرعلی

مثال) خب عکس زمانی ممکن برای سیگنالی که لاپلاس آن مطابق شکل زیر باشد وجود دارد؟



این سؤال غلط است زیرا ناحیه همگرایی باید هم پیوند باشد.

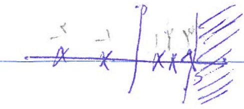
اگر فقط قطب‌ها را داشتیم ...



NoteBook Sarv

LearnElement.ir

Subject:......................
Year..................Month..................Day..........



$s>3$

حالت اول: فرض کنیم همه Right sided باشند در سمت راست دورترین قطب را می‌گیریم (RS)

حالت دوم: یکی قطب تر $2<s<3$

حالت سوم: همه شوند left sided (LS) $s<-2$

مثال) تبدیل لاپلاس سیگنال زیر را بیابید.

$$x(t) = e^{-3t}u(t) + e^{+2t}u(-t)$$

$$X(s) = \frac{1}{s+3} + ? \qquad s>-3$$

$$x_2(t) = e^{2t}u(-t) \rightarrow x_2(-t) = e^{-2t}u(t)$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s+2} \qquad s>-2$$

$$\xrightarrow{s \to -s} X_2(-s) = \frac{1}{-s+2} \qquad -s>-2 \Rightarrow s<2$$

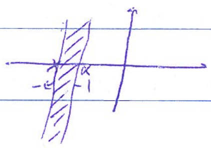
$$\Rightarrow X(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{1}{-s+2}$$

$(s>-3)$ و $(s<2)$

به دست آوردن عکس لاپلاس دوطرفه:

گام اول: تجزیه کسرها + رسم ناحیه همگرایی

$$X(s) = \frac{2s}{(s+3)(s+1)}$$



گام دوم: تشخیص می‌دهیم کدام‌ها RS (دست راستی) و کدام‌ها LS (دست چپی) هستند

$$X(s) = \frac{3}{s+3} + \frac{-1}{s+1}$$

آن ناحیه همگرایی دست راست ← RS و به عکس حالت قبل

$$\Rightarrow x(t) = 3e^{-3t}u(t) + ?$$

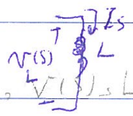
برای LS ها (دست چپی‌ها) ← $X_2(-s)$ را فرض کنیم $\frac{-1}{s+1}$ ← $X_2(s) = \frac{-1}{-s+1} = \frac{1}{s-1}$ ← $x_2(-t) = e^{t}u(t)$

$$x_2(t) = e^{-t}u(-t)$$

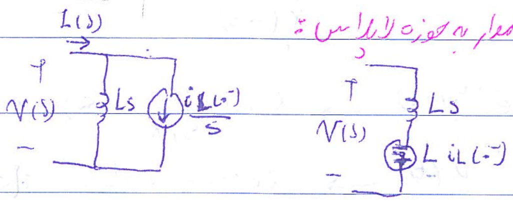
$$\Rightarrow \boxed{x(t) = 3e^{-3t}u(t) + e^{-t}u(-t)}$$

بردن عناصر مدار به حوزه لاپلاس:

$R \rightarrow R$

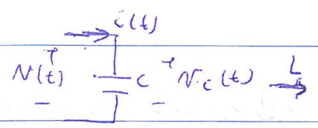


$v = L\frac{di}{dt}$ سلف ، $V(s) = Ls - i(0^-)$

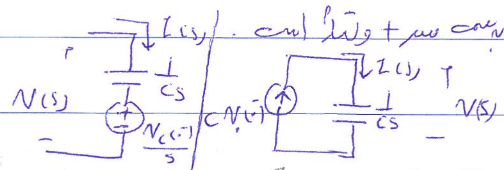


$$i = \frac{1}{L}\int v\,dt \rightarrow I(s) = \frac{1}{Ls}\left(V(s) + i(0^-)\right)$$

خازن



قرارداد: جهت جریان به سمت سر + ولتاژ است.



$$i = C\frac{dv}{dt} \rightarrow I(s) = CsV(s) - v_c(0^-) \rightarrow V(s) = \frac{1}{Cs}I(s) + \frac{1}{c}v_c(0^-)$$

یادآوری: خازن بدون بار یعنی اتصال کوتاه ← یعنی لحظه قبل از ... مانند زمانی

نکته: اگر شرایط اولیه صفر باشد ← منبع ولتاژ (ولتاژ)

غیر صفر ← منبع (جریان)

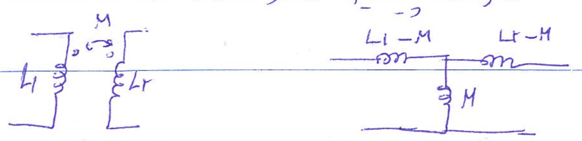
در دومی جریان منبع باید برود توی خازن تا ولتاژ بالای مثبت بیاید + بشود

نکته: دو المان سری حوزه زمان می‌شوند دو المان سری در حوزه لاپلاس

LearnElement.ir

جلسه ۲۳

مدل المان های دو سر را جلسه قبل پیدا کردیم. می‌خواهیم مدل المان های چندسر را پیدا کنیم مثل ترانسفورمر.



نکته: تمام قضایای مدار اینجا برقرار است.

قضیه تلگان: دستگاه (ماتریس) $V_1 - I_1$ و $V_2 - I_2$ در یک گراف صدق کند آنگاه:

آنالیز سیستم در حوزه لاپلاس:

$X(s) \to \boxed{H(s)} \to Y(s) = X(s)H(s)$

اگر شرایط اولیه صفر باشد $H(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)}$ تابع تبدیل

$h(t) \xrightarrow{L} H(s)$ را پاسخ ضربه می‌دانیم دست راستی هستند.

* نکته: شرایط اولیه را در تابع تبدیل صفر قرار می‌دهیم.

راه های یافتن $H(s)$: $\boxed{1}$ لاپلاس گرفتن از $h(t)$ که توصیه نمی‌شود زیرا ساده نیست.

$\boxed{2}$ تقسیم لاپلاس خروجی به لاپلاس ورودی

$\boxed{3}$ از طرفین معادله دیفرانسیل تبدیل لاپلاس بگیریم.

$\boxed{4}$ به کمک قواعد مداری رابطه بین لاپلاس خروجی و لاپلاس ورودی را پیدا کنیم.

چه اطلاعاتی از $H(s)$ قابل استخراج است؟

$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) =$

$b_m x^{(m)}(t) + b_{m-1} x^{(m-1)}(t) + \dots + b_0 x(t)$

دقت: معادله dc را نمی‌نویسیم زیرا بخش dc و Ac را جدا کرده‌ایم. بخش dc در آنالیز dc لحاظ شده است.

$\xrightarrow{L} (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots a_0)\, Y(s) = (b_m s^m + \dots + b_0)\, X(s)$

$H(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)} = \dfrac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0} = \dfrac{N(s)}{D(s)}$

ریشه‌های $N(s)$: صفرهای تابع تبدیل

ریشه‌های $D(s)$: قطب‌های تابع تبدیل

چه چیزهایی را از روی این تابع می‌فهمیم؟ ① پایداری سیستم ② علیت ($H(s)$ = right sided) ③ حافظه صفر
$(h(t) = 0 \quad \forall t < 0 \to$
چون $h(t)$ در حوزه زمان ظاهر شود که نشان دهنده علیت است.

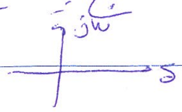
ذخیره انرژی $H(s) = $ ثابت $\to$ $(h(t) = \delta(t)$

سوال) $y' - y = 2x' - 2x$ آیا حافظه صفر است؟ خیر. گفته‌اند تنها در صورت حذف صفر و قطب باشیم.

$s - 1 = 2(s - 1) \qquad H(s) = \dfrac{2\cancel{(s-1)}}{\cancel{s-1}}$

پایداری: برای پایداری چه نکته لازم است. آیا امکان دارد درجه صورت و مخرج شرایطی تفاوت داشته باشد؟

حالت اول: محل صفرها و قطب‌ها معلوم‌اند. اگر قطب‌های سمت راست محور $j\omega$



باشد، سیستم ناپایدار است.

$t \to \infty \Rightarrow h(t) \to \infty \Rightarrow$ ناپایدار

LearnElement.ir

NoteBook Sarv

Subject:......

Year......Month......Day......

اگر قطب های روی محور $j\omega$ داشته باشیم باز هم سیستم ناپایدار است - دیگر مکرر هم ساده

ناپایدار ← $=\infty$ انتگرال اول ← سینوس و کسینوس ← ساده

ناپایدار ← باز هم ∞ ← سطح زیر در اول می‌شود ← $t\sin t$ ← مکرر

اولی ← ترامت زیرا دامنه آن کراندار است فقط سطح زیر آن ناکراندار است.

نکته: در فرکانس تشدید کمی ولتاژ و ورودی سهم متفاوت می‌شود. زاویه بین ولتاژ و جریان صفر می‌شود. ولتاژ دو سر خازن و ولتاژ دو سر سلف

Q برابر ولتاژ ورودی اند (Q ضریب کیفیت)

حالت سوم: تمام قطب ها سمت چپ محور $j\omega$ باشند آنگاه سیستم پایدار است.

نکته: اگر درجه صورت از مخرج بیشتر باشد سیستم قطعاً ناپایدار است. زیرا: $H(s) = \dots + k_i s^i$ ، $i \geq 1$

ناپایدار ← ناکراندار ← خروجی ضربه مشتقات آن ← ورودی پله ی واحد محدود

$H(s) = s$ در صورت بیشتر

$H(s) = \frac{1}{s}$ ← ناپایدار نه — قطب در مبدأ روی

اگر قطب ها تجزیه شده بود در صورت از مخرج بیشتر بود $j\omega$

کار راحت است. ⟸ شرط پایداری این است که ناحیه همگرایی محور $j\omega$ را در بر بگیرد.

حالا اگر ریشه های مخرج تجزیه شده نبود:

صفحه ۳۴ : حالت اول: در مخرج ریشه صفر یا منفی داریم ← سیستم قطعاً ناپایدار (مثلاً $s^3+s+1=0$)

ضریب

ناپایدار ← $s^3 - s^2 + s + 1 = 0$

زمانی سراغ راث - هرویتس می‌رویم که تمام ضرایب مخرج موجود اند و همه + اند. درجه صورت از مخرج کمتر است و تجزیه شده هم نیست.

$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0$

روش راث - هرویتس:

$s^n : a_n \quad a_{n-2} \quad a_{n-4}$

$s^{n-1} : a_{n-1} \quad a_{n-3} \quad a_{n-5}$ اگر در این ضرایب منفی یا صفر داریم ← ناپایدار

$s^{n-2} : \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} = b_1$ برای تشکیل المان جدول: $b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$

[تعداد تغییر علامت ریشه ها برابر تعداد تغییر علامت های ستون اول است.]

$s^{n-3} : c_1 \quad \frac{b_1 a_{n-3} - b_2 a_{n-1}}{b_1}$

مثال: $s^4 + 5s^3 + s^2 + 10s + 1$

$s^4 : 1 \quad 1 \quad 1$

$s^3 : 5 \; + \quad 10 \quad \emptyset$

$s^2 : -1 \; -$ ← منفی شده ناپایدار

$s^1 : 15 \; +$ ← دو تغییر علامت ← دو ریشه سمت راست

$s^0 : 1 \; -$

LearnElement.ir

NoteBook Sarv

حالت های خاص در جدول راث - هرویتس:

در آن سطر موجود است

ولی دست کم یک عنصر غیرصفر

① یک صفر در ستون اول ظاهر شود. ← اپسیلون ϵ قرار می‌دهیم. زیرا عدد ۰ ایجاد مشکل می‌کند چون سطر بعدی که با صفر شروع می‌شود باید بر آن تقسیم شود

یک عدد + کوچک

سپس وقتی رشته کامل شد ϵ را به صفر میل می‌دهیم

مثال) $s^4 + s^3 + s^2 + s + 3$

s^4 : 1 1 ~~3~~

s^3 : 1 1 $\varnothing$

s^2 : ϵ 3

s^1 : $\frac{\epsilon - 3}{\epsilon}$

s^0 : 3

یک عدد منفی بزرگ $\frac{-3}{\epsilon}$ پس $\epsilon \to 0$

دو ریشه سمت راست ناپایدار — دو تغییر علامت پس

نکته: ناپایدار زیرا: $(s^2+1)(s+1)$ →
① قطبی در s وجود ندارد
② دو قطب روی محور $j\omega$

اگر با ϵ به ناپایدار برسیم ← باید قسمت رسم قطبی را با محور $j\omega$ ببینیم

$s^3 + s^2 + s + 1$

$= (j\omega)^3 + (j\omega)^2 + j\omega + 1 = 0 \to -j\omega^3 - \omega^2 + j\omega + 1 = 0$

وجود ندارد

اما اگر با ϵ به ناپایدار نرسیم ← کاری لازم نیست کنیم.

② حالت دوم: یک سطر تمام صفر ظاهر شود. ← از سطر بالایی مشتق می‌گیریم و جایگزین می‌کنیم — سیستم ناپایدار است.

ضرایب مشتق را در سطر تمام صفر جایگزین می‌کنیم

مثال) $s^7 + 3s^6 + 3s^5 + s^4 + s^3 + 3s^2 + 3s + 1$

s^7 : 1 3 1 3

s^6 : 3 1 3 1

s^5 : $\frac{8}{3}$ 0 $\frac{8}{3}$

s^4 : 1 0 1 → $s^2+1 \xrightarrow{\text{مشتق}} 4s^3$

s^3 : 4 0

s^2 : ϵ 1

s^1 : $-\frac{4}{\epsilon}$

s^0 : 1

فاکتورگیری ها $(s^4+1)(s+1)^3$

↓

این سیستم ناپایدار است (s^4+1)

اما اگر جدول را کامل کنیم ← از آن مشتق می‌گیریم و ادامه می‌دهیم

دو ریشه سمت راست پیدا می‌شود

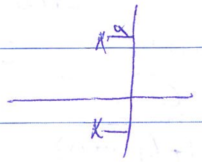
استفاده متفاوت از جدول راث:

پایداری نسبی: همه ریشه‌ها به محور $j\omega$ نزدیک نباشند.

تبدیل می‌کنیم

$s \to s - \alpha$

مقداری از α را پیدا می‌کنیم که اولین صفر را در ستون اول ایجاد کند



کاربردهای دیاگرام بلاک:

دیاگرام بود: رسم مشخصه فرکانسی برحسب ~~[illegible]~~ لگاریتمی db ($20 \log$) آنجا که ممکن است ناحیه وسیعی از فرکانس مورد نظر

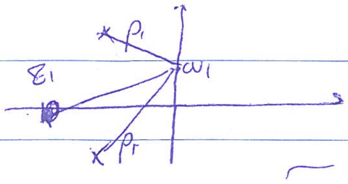
مقیاس های لگاریتمی می‌توانند به نشر سازی اطلاعات کمک کنند.

در سیستم های پایدار همواره حق داریم مشخصه فرکانسی را از روی تابع تبدیل پیدا کنیم.

دیاگرام صفر و قطب: از روی صفر و قطب تابع تبدیل سیستم را پیدا کنیم

LearnElement.ir

NoteBook Sarv



محاسبه پاسخ فرکانسی از دیاگرام صفر و قطب:

$$|H(j\omega_1)| = \frac{z_1}{p_1 p_2}$$

یافتن پاسخ کامل: هر چیزی به عنوان ورودی هم $H(s)$ و هم معادله دیفرانسیل را می‌توان به دست آورد

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + \dots + b_0 x(t)$$

$$a_n\left(s^n Y(s) - s^{n-1} y(0^-) - s^{n-2} y'(0^-) \dots - y^{(n-1)}(0^-)\right) + a_{n-1}\left(s^{n-1} Y(s) - s^{n-2} y(0^-) \dots - y^{(n-2)}(0^-)\right)$$

$$+ \dots + a_1\left(s Y(s) - y(0^-)\right) + a_0 Y(s) = b_m\left(s^m X(s) + \dots + b_0 X(s)\right)$$

$$\underbrace{D(s)}_{\text{چندجمله‌ای مشخصه}} Y(s) - \underbrace{C(s)}_{\text{هر آنچه که باقی می‌ماند}} = \underbrace{N(s)}_{\text{چندجمله‌ای صورت}} X(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{C(s)}{D(s)}}_{\text{ورودی صفر}} + \underbrace{H(s) X(s)}_{\text{حالت صفر}} \qquad H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$\xrightarrow{L^{-1}} y(t) = L^{-1}\left[\frac{C(s)}{D(s)}\right] + L^{-1}\left(H(s) X(s)\right)$$

اگر شرایط اولیه صفر باشد ← صفر است — پاسخ ورودی صفر

اگر ورودی صفر باشد صفر است — پاسخ حالت صفر

$$\boxed{y(t) = y_{zir}(t) + y_{zsr}(t)}$$

پاسخ ورودی صفر (زمانی که ورودی صفر است)
Zero input response

پاسخ حالت صفر (اگر شرایط اولیه صفر باشد)

اگر راجع به شرایط اولیه چیزی گفته نشد ← شرایط اولیه یکسان است

$x_1 \to y_1$
$x_2 \to y_2$

در شرایط یکسان دو تست انجام می‌دهیم

$$H(s) = \frac{Y_2(s) - Y_1(s)}{X_2(s) - X_1(s)}$$

پاسخ حالت صفر → $L^{-1}\left[H(s) X_1(s)\right] = y_1(t)$ حالت صفر

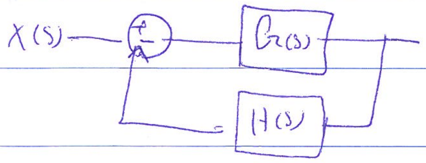
$y(t) - y_1(t)$ → پاسخ ورودی صفر

آخرین بحث در لاپلاس: بلوک دیاگرام:

حالت اول: دو بلوک سری در هم ضرب می‌شوند

حالت دوم: دو بلوک موازی با هم جمع می‌شوند

قاعده: به تعداد جمع‌کننده‌ها معادله بنویسید.



یک جمع‌کننده → $X(s) - H(s)Y(s) = \frac{Y(s)}{G(s)}$

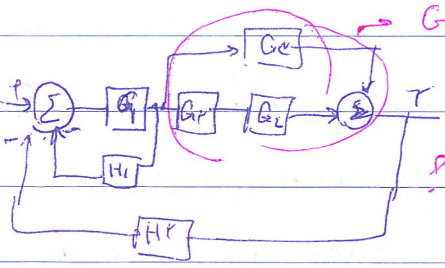
$GX - GHY = Y$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

گین مسیر رفت

گین حلقه

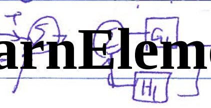
مثال)



$G_3 + G_2 G_4$

روش‌های ساده‌سازی چگونه بلوک دیاگرام‌ها ... کنیم؟

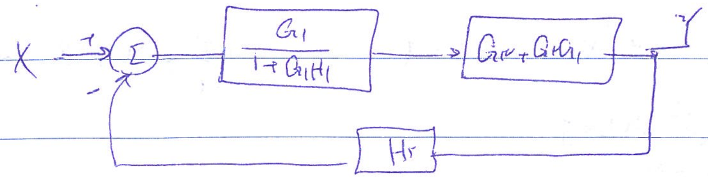
① استفاده از قاعده معادله نویسی ② از داخل به سمت خارج



از قاعده مشترک‌گیری

LearnElement.ir

سیگنال



از ۶۰ نمره پایان ترم، حدود ۲۵ نمره از درسنامه امروز است.

جلسه ۲۵

راجع به پاسخ حالت صفر و پاسخ ورودی صفر صحبت کردیم. پاسخ ماندگار و گذرا را چگونه به تبدیل لاپلاس ببرم؟

(۱) از پایداری سیستم مطمئن شویم. اگر ناپایدار بود، سیستم پاسخ حالت ماندگار ندارد. (۲) قطب های ساده روی محور $j\omega$ وجود دارند به شرطی که هیچ قطب دیگری سمت راست نباشد و قطب تکراری هم ندارد (روی $j\omega$). (۳) دسته قطب ساده روی $j\omega$ داریم ← پاسخ دارای $A_1\sin(\omega_1+\theta_1)+A_2\sin(\omega_2+\theta_2)$ (۳) هیچ قطبی روی محور $j\omega$ نداریم ← سیستم پاسخ ماندگارش صفر است.

تبدیل Z:

$$X(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]Z^{-n} = x[0]+x[1]Z^{-1}+\cdots$$

تابع پیوسته

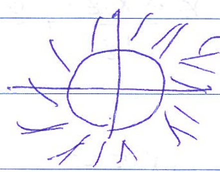
هر سیگنال گسسته دارای ۳ دسته اطلاعات است: [۱] دامنه sample ها ← ضریب Z را داریم [۲] فاصله sample ها [۳] شماره sample ها ← توان منفی Z

تبدیل Z پله واحد: $X(Z) = 1+Z^{-1}+Z^{-2}+\cdots = \frac{1}{1-Z^{-1}}$ $|Z^{-1}|<1$ پس $|Z|>1$

ناحیه همگرایی

ناحیه همگرایی

بیرون دایره ای به شعاع واحد



اسمش را از حوزه زمانی به عاریت می گیرد ← right sided

تبدیل Z و ناحیه همگرایی سیستم زیر را حساب کنید.

(۱) $X(Z)=?$ $x[n]=\alpha^n u[n]$

$$X(Z)=\frac{1}{1-\alpha Z^{-1}} \qquad |Z|>|\alpha|$$

(۲) $x[n]=10\delta[n]+0.1\delta[n-100] \rightarrow X(Z)=10Z^0+0.1Z^{-100}$

ناحیه همگرایی ⇓ کل صفحه Z بدون دایره ای با شعاع ∞

خواص تبدیل Z:

[۱] خطی بودن $w[n]=\alpha x[n]+\beta y[n] \rightarrow W(Z)=\alpha X(Z)+\beta Y(Z)$ ناحیه همگرایی: اشتراک همگرایی x و y طبق تعریف جمع

(۲) شیفت $y[n]=x[n-n_0]u[n-n_0] \rightarrow Y(Z)=Z^{-n_0}X(Z)$

وقتی سیگنالی را شیفت می دهیم شماره توان ها هم شیفت پیدا می کند.

[۳] backward $y[n]=x[n]-x[n-1] = (1-Z^{-1})X(Z) - x[-1]$

درست است؟!

$x[n] \rightarrow X(Z)$

$x[n-1]u[n-1] \rightarrow Z^{-1}X(Z)$

$n=0$ در سمت چپ: $x[-1]$ سمت راست: 0 $+x[-1]$ ✓

$x[n-1]u[n] = x[n-1]u[n-1]+x[-1]\delta[n]$

LearnElement.ir

NoteBook Sarv

Subject:

Year.......Month.......Day.......

$x[-1]\delta[n]$

$\rightarrow x[n-1]u_{-1}[n] \xrightarrow{Z} Z^{-1}X(Z) + x[-1]$ تبدیل Z $\delta[n] \rightarrow 1 \times Z^0 = 1$

$\boxed{4}$ accumulator $\quad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ $\quad x[n] = y[n] - y[n-1]$

$$Y(Z) = \frac{X(Z)}{1-Z^{-1}} + \frac{\overbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} x[k]}^{y[-1]}}{1-Z^{-1}}$$

$X(Z) = Y(Z) - Y(Z)Z^{-1} - y[-1]$

$Y(Z)(1-Z^{-1}) = X(Z) + y[-1]$

$\boxed{5}$ $y[n] = \alpha^n x[n] \rightarrow Y(Z) = X(\frac{Z}{\alpha})$

$\boxed{6}$ $w[n] = y[n] * x[n] \rightarrow W(Z) = Y(Z)X(Z)$

$\boxed{7}$ $y[n] = n\,x[n] \rightarrow Y(Z) = -Z\frac{dX(Z)}{dZ}$ $\quad$ اثبات: $Y(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]Z^{-n}$

$y[n] = n^2 x[n] \rightarrow Y(Z) = ?$ $\quad \frac{d}{dZ}Y(Z) = \sum x[n] \times -n \times Z^{-n-1}$

$\rightarrow -Z\frac{d}{dZ}Y(Z) = \sum (n\,x[n]) Z^{-n}$

$y[n] = n\,x_1[n] \rightarrow Y(Z) = -Z\frac{dX_1(Z)}{dZ}$

$x_1[n] = n\,x[n] \rightarrow X_1(Z) = -Z\frac{dX(Z)}{dZ}$

$-Z\left(-\frac{dX(Z)}{dZ} + -Z\frac{d^2X(Z)}{dZ^2}\right)$

مشتق اولی در اولی $\quad$ مشتق دومی در اولی

$$\rightarrow \boxed{y[n] = n^2 x[n] \rightarrow Y(Z) = Z\frac{dX(Z)}{dZ} + Z^2\frac{d^2X(Z)}{dZ^2}}$$

مثال) تبدیل Z سیگنال زیر را حساب کنید.

$x[n] = r^n \cos(\omega_0 n) u[n] \rightarrow X(Z) = ?$

$\cos\omega_0 n = \frac{e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}}{2} \xrightarrow{Z}$

راه دوم $r^n \cos\omega_0 n \xrightarrow{Z} ?$

راه دوم) معادله تفاضلی را پیدا کنیم که این در آن صدق کند و از طرفین تبدیل Z بگیریم.

$\boxed{8}$ Scaling $\quad y[n] = x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{k}] & \text{اگر n مضرب k} \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$ $\quad$ قضیه scaling در حوزه گسسته در مدل است.

مثلاً زوج ها را بچپاند به جای فردها صفر بگذارد

$k=2$ $\quad y[2] = x[\frac{2}{2}] = x[1]$

$y[3] = x[\frac{3}{2}] = 0$

$y[4] = x[\frac{4}{2}] = x[2]$

$y[n] = x_{(k)}[n] \rightarrow Y(Z) = X(Z^k)$

مثال) $\delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2]$ $\quad$ * کانولوشن

$\delta[n] + 4\delta[n-1] + 3\delta[n-2]$

1 2 3

1 4 3

چی شد اولش؟!

اثبات $X(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]Z^{-n} = x[0] + \sum_{n=1}^{\infty} x[n]Z^{-n}$

$Z \to \infty$ $\quad Z \to \infty$

قضیه مقدار اولیه و مقدار نهایی:

$$\boxed{x[0] = \lim_{|Z| \to \infty} X(Z)}$$

از این جهت مهم است که بدون احتیاج به داشتن ... در سری ها از ... ما ... می دهند.

NoteBook Sarv

LearnElement.ir

Subject: ۲۹
Year Month Day

سیگنال

$$(1 - Z^{-1}) X(Z) = x[n \to \infty] \quad |Z| \to 1$$

اگر قطبی از $X(Z)$ بیرون دایره واحد باشد ← تابع ناپایدار $x(\infty)=\infty$
اگر تعداد قطب‌های $X(Z)$ درون واحد ← x بازی میرا می‌شود $x(\infty)=0$
اگر $X(Z)$ قطب ساده روی دایره واحد ← با نوسان نوسانات $x(\infty)$ تعیین نشده

برای اثبات قضیه مقدار نهایی شرح قضیه accumulator را داریم:
خواهیم دید که به شرط همگرایی پایداری رابطه برقرار می‌شود.

نکات درس به Z: رسیدن به Z از لاپلاس:

ضرب پیوسته ← کانولوشن یک سیگنال پیوسته در قطار ضربه

نمونه‌برداری ← ضرب یک سیگنال پیوسته در قطار ضربه

$$x_s(t) = x(t) \cdot \delta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_1(t - kT_0) \qquad X_s(s) = \int_0^{\infty} x_s(t) e^{-st} dt = \int \sum_{k=0}^{\infty} x_1(t-kT_0) e^{-st} dt$$

sampling

$$\delta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT_0)$$

اگر x_s را اینگونه هم می‌توان نوشت: $x_s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(t)\, \delta(t - nT_0) = \sum x(nT_0)\, \delta(t - nT_0)$

$$X_s(s) = \int \sum_{n=0}^{\infty} \left(x(nT_0)\, \delta(t - nT_0) \right) e^{-st} dt \;\underset{\int \text{و} \Sigma}{\overset{\text{تعویض جای}}{=}}\; \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_0) \int_0^{\infty} e^{-st}\, \delta(t - nT_0)\, dt$$

$$\to e^{-nT_0 s}$$

$$X_s(S) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_0)\, e^{-nT_0 s} \qquad \text{قرارداد}: e^{T_0 s} = Z$$

$e^{-T_0 s}$ تابع تبدیل شیفت است، تأخیر

$$\Rightarrow X_s(S) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] Z^{-n} \quad \text{تبدیل } Z$$

از نگاشت: $Z^{-1} = e^{-T_0 s}$, $|Z| = e^{\sigma T}$

نگاشت → درون دایره واحد

پایداری در لاپلاس: هیچ قطبی سمت راست محور $j\omega$ نباشد

بیرون دایره $|Z| > 1$ ← نیمه راست صفحه s ($\sigma > 0$)
درون دایره $|Z| < 1$ ← نیمه چپ صفحه s ($\sigma < 0$)

⇐ پایداری در Z: هیچ قطبی بیرون یا روی دایره واحد در صفحه Z نباشد

| جلسه ۲۶ |

اشاره‌ای به Z دو طرفه:

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] Z^{-n}$$

double side

مثال) $x_1[n] = \alpha^n u[n]$

$$\Downarrow$$

$$X_1(Z) = \frac{1}{1 - \alpha Z^{-1}} \qquad |Z| > |\alpha|$$

آیا می‌توان یک $x[n]$ پیدا کرد با $|Z| < |\alpha|$ و همان عبارت $X(Z)$؟

$$\boxed{x_2[n] = -\alpha^n u[-n-1]}$$

پس هر قطبی می‌تواند نماینده out sided باشد و هم نماینده in sided

LearnElement.ir

Sarv NoteBook

Subject:..........

Year.......... Month.......... Day..........

عکس تبدیل Z : روش اول: انتگرال موهومی و قضیه مانده‌ها. ولی ما آن را ترجیح نمی‌دهیم زیرا راه ساده‌تری خواهیم

روش دوم: تجزیه انجام می‌دهیم.

مثال) $X(Z)=\frac{1}{1-1.2Z^{-1}+0.2Z^{-2}}$, $|Z|>1$

سوال] ناحیه همگرایی، قطب‌ها را باید از بزرگترین قطب بزرگتر باشد. 1 ، 0.2 ریشه‌ها

روش اول: تقسیم

$$
\begin{array}{l|l}
1 & 1-1.2Z^{-1}+0.2Z^{-2} \\
\hline
 & \underset{x(0)}{1}+\underset{x(1)}{(1.2)Z^{-1}}+\underset{x(2)}{(1.24)Z^{-2}}+\underset{x(3)}{(1.248)Z^{-3}} \\
1.2Z^{-1}-0.2Z^{-2} & \\
-\left(1.2Z^{-1}-1.44Z^{-2}+0.24Z^{-3}\right) & \\
\hline
1.24Z^{-2}-0.24Z^{-3} & \\
\vdots &
\end{array}
$$

این روش خوب است اما جواب عمومی را نمی‌دهد.

روش دوم: تجزیه: آن را بشکنیم و بر اساس جدول به طور ... بنویسیم.

$$X(Z)=\frac{1}{1-1.2Z^{-1}+0.2Z^{-2}}=\frac{Z^2}{\underbrace{Z^2-1.2Z+0.2}_{(Z-1)(Z-0.2)}}$$

به جای اینکه $X(Z)$ را تجزیه کنیم $\frac{X(Z)}{Z}$ را تجزیه می‌کنیم.

$$\frac{X(Z)}{Z}=\frac{Z}{(Z-1)(Z-0.2)}=\frac{1.25}{Z-1}+\frac{-0.25}{Z-0.2}$$

$$\rightarrow X(Z)=\frac{1.25}{1-Z^{-1}}+\frac{-0.25}{1-0.2Z^{-1}} \rightarrow x[n]=1.25\,u[n]-0.25\,(0.2)^n\,u[n]$$

اگر به صورت سری بنویسیم چه کنیم؟

$$X(Z)=\sum_{n=0}^{\infty}x[n]Z^{-n} \qquad Z^{-1}=\rho$$

$$X(\rho^{-1})=\sum_{n=0}^{\infty}x[n]\rho^{n}$$

مثلاً: $X(Z)=Sh(Z^{-1})$, $Z^{-1}=\rho$ $\rightarrow X(\rho^{-1})=Sh(\rho)$ بسط تیلور $=\begin{cases}0 & n \text{ زوج} \\ \frac{1}{n!} & n \text{ فرد}\end{cases}$

این روش بسط تیلور بود. در سیستم‌ها معمولاً به صورت کسری است.

برگردیم به Z دوطرفه:

روش اول) خودت را خیلی درگیر نکن. ... هر قطبی قرار گرفتی، دو تا تبدیل اینورس وجود دارد. یکی از آنجا به بیرون

حالت دوم: ناحیه همگرایی به سمت داخل باشد.

روش دوم) مثل بالایی آن را به دو تا بشکنیم.

مثال) $x[n]=x_1[n]\,u_{-1}[n]+x_2[n]\,u_{-1}[-n]$

با این شرط که sample صورت قسمت x1 ... x2 ... با لاپلاس اشتباه نگیرید.

LearnElement.ir

NoteBook Sarv

Subject: ۳۰/

Year ...... Month ...... Day ......

سیگنال

$X_d(z) = X_1(z)$ + ...

double side $\quad |z|>|a|$

عنی کار برعکس: $x_r[n]u[n] \xrightarrow{n\to -n} x_r[-n]u[n] \to ?$

لاپلاس انجام دادیم

مثال) $x[n]=(\frac{1}{2})^n u[n] + 3^n u[-n]$ ①

سوال) این عبارت چه باید باشد؟

$3^n u[-n-1] + ?$ ②

چه عبارتی باید باشد

روش اول

آن نقطه که جای دو عبارت برابر است $n=0$ که باید $3^n u[n]$ و باقی بماند

$\Rightarrow$ در نتیجه $3^n u[-n] = 3^n u[-n-1] + 1\,\delta[n]$

$\delta[n]$ سیگنالی است که فقط در نقطه صفر مقدار دارد.

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{-1}{1-3z^{-1}} + 1 \qquad \frac{1}{2}<|z|<3$$

$|z|>\frac{1}{2} \qquad |z|<3$

$$\frac{-1+1-3z^{-1}}{1-3z^{-1}} = \frac{-3}{z-3} = \frac{1}{1-\frac{z}{3}}$$

روش دوم:

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + ? \qquad |z|>\frac{1}{2}$$

$x_r[n] = 3^n u[-n] \to x_r[-n] = 3^{-n} u[n]$ $\quad (\frac{1}{3})^n$

$$X_r(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \qquad |z|>\frac{1}{3}$$

$$\xrightarrow{z\to\frac{1}{z}} X_r(\tfrac{1}{z}) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z}$$

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}z}$$ جواب‌ها

$|z^{-1}|>\frac{1}{3} \to |z|<3$

آنالیز سیستم LTI به وسیله تبدیل Z:

گام اول) آوردن روابط در حوزه Z

گام دوم) به دست آوردن $H(z)$ که در سیستم های LTI فشرده همه اطلاعات را می‌دهد.

- علّی بودن از روی $H(z)$ ← outsided باشد.
- راه های به دست آوردن $H(z)$: ① مستقیم ② به دست آوردن ~~لاپلاس~~ Z خروجی و Z ورودی و شرایط اولیه هم صفر ③ از معادله دیفرانسیل تبدیل Z بگیریم.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m] \qquad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

$x(t) \to \boxed{} \to x(t-t_0)$

$X(s) \qquad X(s)e^{-st_0} \Rightarrow H(s)=e^{-st_0}$

$e^{st_0} = z$

Sarv NoteBook

LearnElement.ir

■ حافظه صفر بودن از روی H(Z) ← H(Z) مقدار ثابت باشد

یک تعریف اضافه تر: سیستم های FIR و IIR :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m]$$

Finite impulse response

تعداد پاسخ های ضربه اش محدود است

شرط لازم و کافی برای FIR بودن $\longrightarrow N=0$

$$N=0 \rightarrow a_0 y[n] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m] \longrightarrow a_0 h[n] = \sum_{m=0}^{M} b_m \delta[n-m]$$

$$h[n] = \sum_{m=0}^{M} b_m \delta[n-m] \rightarrow y[n] = \left(\sum_{m=0}^{M} b_m \delta[n-m]\right) * x[n]$$

$$= \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m]$$

$\Rightarrow N=0$ پس شرط لازم و کافی برای اینکه سیستم FIR باشد.

■ پایداری: اگر ریشه ها را دارند: شرط پایداری: $\sum |h[n]| \, |z^{-n}|$ محدود باشد ← شرط تقاطع دایره واحد

در لاپلاس شد محور $j\omega$ باید داخل ناحیه همگرایی، اینجا دایره واحد باید در ناحیه همگرایی قرار بگیرد.

اگر ریشه ها را ندارند: روش های بدردمان نمی خورد. یک نگاشت می زنیم تا صفحه را به صفحه قبلی برگردانیم.

جلسه ۲۷

- بدست آوردن پاسخ حالت صفر و پاسخ ورودی صفر در تبدیل Z :

در قدم اول معادله تفاضلی را از n=… تبدیل یک طرفه بگیریم $\quad y[n] - \alpha y[n-1] = x[n]$

گام بعدی: از دو طرف تبدیل Z می گیریم.

$$Y(Z) - \alpha\left(Z^{-1}Y(Z) + y[-1]\right) = X(Z)$$

$$Y(Z)(1-\alpha Z^{-1}) - \alpha y[-1] = X(Z)$$

$$Y(Z) = \underbrace{\overbrace{\frac{1}{1-\alpha Z^{-1}}}^{H(Z)} X(Z)}_{\text{پاسخ حالت صفر}} + \underbrace{\frac{\alpha y[-1]}{1-\alpha Z^{-1}}}_{\text{پاسخ ورودی صفر}} \Rightarrow y[n] = \underbrace{Z^{-1}\left[H(Z)X(Z)\right]}_{\text{پاسخ حالت صفر}} + \underbrace{Z^{-1}\left[\frac{\alpha y[-1]}{1-\alpha Z^{-1}}\right]}_{\text{پاسخ ورودی صفر}}$$

$$= y_{zsr}[n] + y_{zir}[n]$$

بحث پایداری سیگنال های گسسته تجزیه شده.

گام اول: $\quad r = \frac{Z-1}{Z+1} \longrightarrow Z = \frac{1+r}{1-r}$ نگاشت دوخطی

$Z = e^{j\theta}$ Z روی دایره واحد در صفحه $\xrightarrow{\text{در صفحه جدید}}$ $r = \frac{e^{j\theta}-1}{e^{j\theta}+1} = \frac{e^{j\theta/2} - e^{-j\theta/2}}{e^{j\theta/2}+e^{-j\theta/2}} = \tanh j\frac{\theta}{2} = j\tan\frac{\theta}{2} = j\omega_r$

ω_r نامحدود

می توانیم نشان دهیم که داخل دایره واحد به نیم صفحه چپ (خارج ... نیم صفحه راست) است.

LearnElement.ir

Subject: ۳۱

Year ... Month ... Day ...

سیگنال

$$a_n\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{n-1} + \dots + a_1\left(\frac{1+r}{1-r}\right) + a_0 = 0$$

مثال: پایداری سیستمی که مخرج آن به صورت زیر است را بررسی کنید.

$$Z^3 - 1.5Z^2 + 0.749Z - 0.196 = 0$$

به جای Z می‌نویسیم →

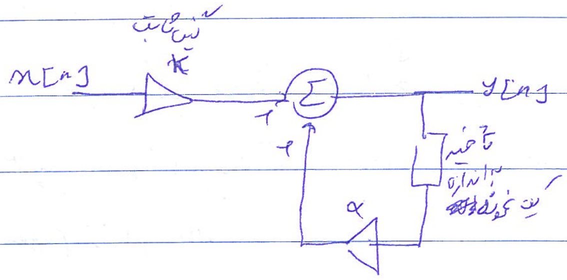
$$\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^3 - 1.5\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2 + 0.749\left(\frac{1+r}{1-r}\right) - 0.196 = 0$$

$$3.5r^3 - 2.5r^2 + 1.5r + 2.5 = 0$$

سیستمی که قطبی در سمت راست دارد (چون ضریب منفی دارد)

در صفحه Z هم قطبی داریم که ناپایداری را ایجاد می‌کند.

روش Z تبدیل زیاد حل کند



مثال) سیستمی مانند شکل زیر مفروض است

۱) رابطه ورودی و خروجی سیستم ← حتماً حوزه زمان

۲) تابع تبدیل

۳) پایداری را بررسی کنید.

۴) پاسخ فرکانسی و رسم آن

۵) رابطه بین K و α چه؟ تا بهره DC سیستم فوق برابر ۱ باشد.

$$K x[n] + \alpha y[n-1] = y[n]$$

۱) $\frac{1}{K}\left(y[n] - \alpha y[n-1]\right) = x[n]$

۲) $\frac{1}{K}\left(Y(Z) - \alpha Z^{-1}Y(Z) - \alpha y[-1]\right) = X(Z) \rightarrow \frac{1}{K}Y(Z)\left(1 - \alpha Z^{-1}\right) = X(Z) + \alpha y[-1]$

$$\boxed{H(Z) = \frac{K}{1-\alpha Z^{-1}}}$$

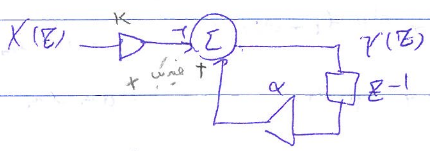
نکته: رابطه DTFT و تبدیل Z:

$$H(Z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] Z^{-n}$$

اگر سیستم پایدار بود ← اگر $Z = e^{j\omega}$ قرار دهیم ⇒ $\boxed{H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jn\omega}}$ تعریف DTFT

پس فقط حالاتی از Z که به $e^{j\omega}$ تبدیل گردند Z تبدیل به DTFT شود.

حل سوال بالا (به روش حوزه Z):

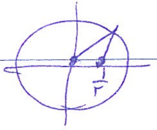


۲) سادگی در بلوک ...: $H(Z) = \frac{K}{1-\alpha Z^{-1}}$ ناحیه همگرایی $|Z| > |\alpha|$

۱) حل رابطه ورودی خروجی: $Y(Z) - \alpha Z^{-1}Y(Z) = KX(Z) \rightarrow y[n] - \alpha y[n-1] = Kx[n]$

۴) پاسخ فرکانسی: $H(e^{j\omega}) = \frac{K}{1-\alpha e^{-j\omega}}$ — ۳) شرط پایداری: $|\alpha| < 1$

ω ها را در برگیرد



از هر نقطه تا مبدا رسم می‌کنیم

LearnElement.ir

Sarv NoteBook

Subject:.................................

Year.............................Month....................Day............

در لاپلاس برای گین DC داریم s=0 ولی در گسسته $|H(e^{j\omega})| = \dfrac{|k|}{\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha\cos\omega}}$

$|1-\alpha e^{-j\omega}|$

$|1-\alpha(\cos\omega - j\sin\omega)|$

مانند صورت صورت قبلی که در زمان بی‌نهایت ها صفر است

(در تبدیل Z) باید Z را یک بگذاریم. ($Z=e^{j0}=1$)

$\Rightarrow |H(Z=1)| = 1 \rightarrow \dfrac{|k|}{|1-\alpha|} = 1 \rightarrow \boxed{|k| = 1-\alpha}$

$|\alpha|<1$ سیستم پایدار > 0

$\begin{cases} k>0 \rightarrow k = 1-\alpha \\ k<0 \rightarrow -k = 1-\alpha \end{cases}$

تبدیل Z همانند لاپلاس ← ٪۶۰ پایان ترم

فضای حالت:

چرا تکنیک را عوض کنیم؟ ① برای چند ورودی و چند خروجی ها تا بتوانیم اثر تک تک ورودی ها را ببینیم.

② پیاده سازی کامپیوتری آن راحت تر است... ③ امکان آنالیز رفتار درونی سیستم (برای کنترلی ها)

مفهوم فضای حالت:

بردار حالت: ملتاژ خازن های مستقل و جریان سلف های مستقل تعریف دقیق ← مجموعه اطلاعاتی که باید از یک سیستم در لحظه t_0 بشناسیم تا بتوانیم برای هر $t > t_0$ با معلوم بودن ورودی ها خروجی ها را محاسبه کنیم.

تشکیل معادلات حالت: در مدارهای الکتریکی یاد گرفتیم. ولی ما با KVL و KCL کار می‌کنیم. ورودی ها را با u نشان می‌دهیم

سیستم با n المان مستقل ذخیره کننده انرژی و m ورودی

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \cdots b_{1m}u_m \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \cdots b_{2m}u_m \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \cdots b_{nm}u_m \end{cases}$$

به صورت برداری ← $\underset{n\times 1}{\dot{X}} = \underset{n\times n}{A}\,\underset{n\times 1}{X} + \underset{n\times m}{B}\,\underset{m\times 1}{U}$

معادله خروجی

$$\begin{cases} y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + d_{12}u_2 + \cdots d_{1m}u_m \\ y_p = c_{p1}x_1 + \cdots c_{pn}x_n + d_{p1}u_1 + \cdots d_{pm}u_m \end{cases}$$

$\underset{p\times 1}{Y} = \underset{p\times n}{C}\,\underset{n\times 1}{X} + \underset{p\times m}{D}\,\underset{m\times 1}{U}$

چگونه تغییرات حالت ها تابع حالت فعلی است

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX + DU \\ X_{t_0} = X_0 \end{cases}$$

چگونه ورودی مستقلا روی خروجی

۴ ماتریس A، B، C و D را لازم داریم. از همه مهم‌تر ماتریس A است

LearnElement.ir