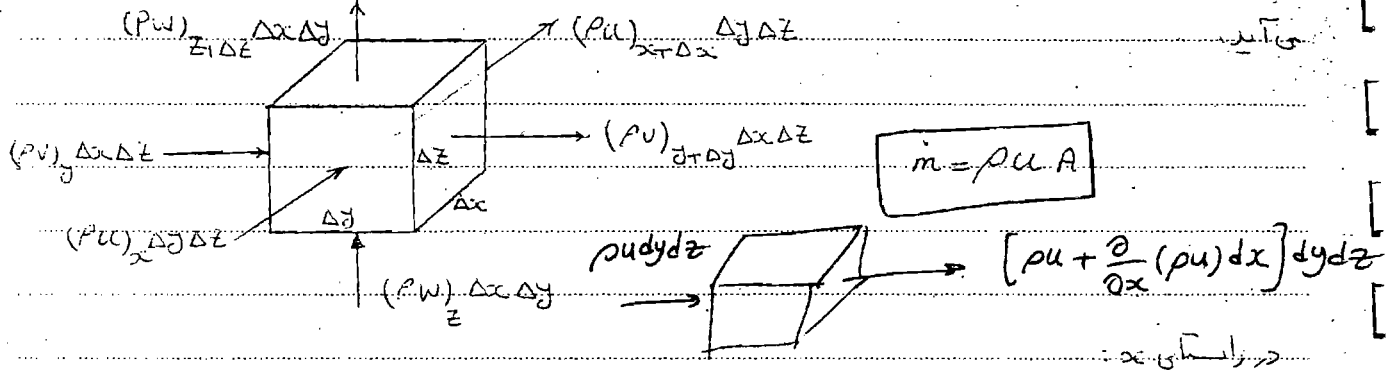


معادله پیوستگی Continuity

با یکارگیری اصل بقا جرم در سیستم مضطرب کارتزین (x, y, z) در سه راستای x, y, z این معادله بدست می آید



(1-6) $(\rho u_x)_x \Delta y \Delta z$ جرم جری ورودی

(1-7) $(\rho u_x)_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$ جرم جری خروجی

(1-8) $(\rho u_x) \Delta y \Delta z |_{x+\Delta x} - (\rho u_x) \Delta y \Delta z |_x$ تغییرات

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

در راستای z نیز معادلات و روابط مشابه وجود دارند.

$\text{div}(\rho \vec{v}) = \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ و $\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$

$\text{div} \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ (مجموع تغییرات جرم در حجم کنترل)

(1-15) $(\rho \Delta x \Delta y \Delta z) |_t$ جرم حجم کنترل در زمان t

(1-16) $(\rho \Delta x \Delta y \Delta z) |_{t+\Delta t}$ جرم حجم کنترل در زمان $t+\Delta t$

(1-17) $(\rho \Delta x \Delta y \Delta z) |_{t+\Delta t} - (\rho \Delta x \Delta y \Delta z) |_t$ تغییرات

با ترکیب نمودن ایجاد حجم کنترل و اصل بقا جرم، معادله پیوستگی (بقا جرم) بدست می آید.

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_x \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

(مستثنای توانید به عنوان تکلیف بدست آورید)

(1-18) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w_z) = 0$ \rightarrow اصل بقا جرم

(1-19) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + w_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right] = 0$

$$\frac{D\rho}{Dt}$$

معادله فوق تغییرات سرعت و چگالی را در بر می گیرد.

subject:

Year. 87 Month. 6 Date. 26/12

$$\nabla: \text{del. (Gradient)} \quad \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \quad (1-20)$$

$$\nabla \cdot U = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \quad (1-21)$$

$$(1-19) \rightarrow \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot U = 0 \quad (1-22)$$

حرکت سیال تراکم پذیر باشد: $\rho = \text{cte} \Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot U = 0$
 با استفاده از معادله پیوستگی می توان معادله حرکت را ساده تر کرد.

$$\rightarrow \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0$$

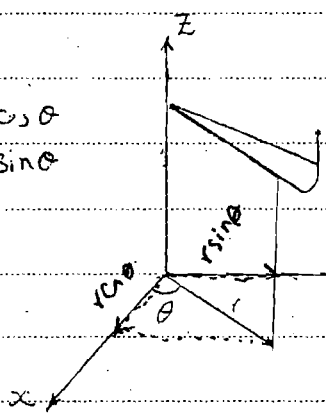
معادله پیوستگی در سیستم استوانه ای و کروی:

با انرژی ارائه شده در مختصات کارتزین می توان معادله پیوستگی را در مختصات استوانه ای و کروی نیز

در دست آورد

در شبکه مختصات استوانه ای - $\Delta Z, r \Delta \theta, r \Delta r$ (الانی بناماد)

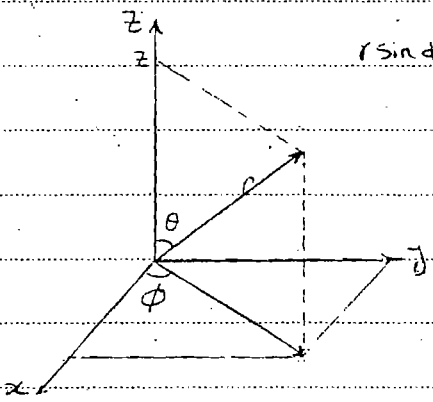
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0$$

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta & r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ y &= r \sin \theta & \theta &= \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{aligned}$$

در شبکه مختصات کروی - $r \sin \theta \Delta \phi, r \Delta \theta, r \Delta r$ (الانی بناماد)



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho v_\phi) = 0 \quad (1-25)$$

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}; \quad \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

مکان حرکت

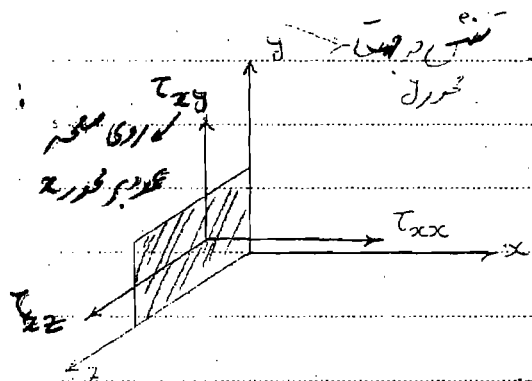
* تنش برشی در جهت زیر بر روی سطح عمود

بر محور نشان می دهد

تنش نیروی از برای واحد سطح است

اگر نیروی وارد شده به سطح عمود بر آن باشد، تنش نرمال است

اگر نیروی وارد شده به سطح مماس بر آن باشد، تنش برشی است



τ_{xy} و τ_{yx} : Shear stress

τ_{xx} : Normal stress

نکته: جهت Normal stress برخلاف جهت فشاری باشد

جهت Shear stress موجب تغییر شکل زاویه ای می شود

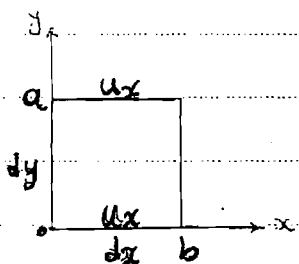
در حالت کلی می توان نوشت: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ و $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ و $\tau_{yz} = \tau_{zy}$

تغییر شکل زاویه ای

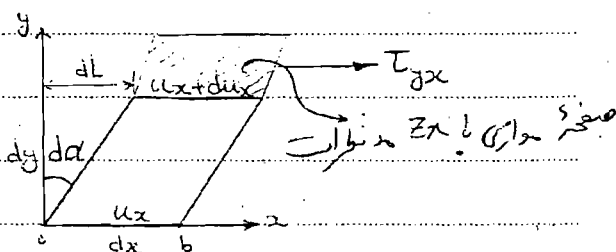
هنگامی که تنش برشی به سیال وارد شود، لایه های آن در راستای تنش قرار شده، متر و ربع به حرکت می آیند

و منظور از تغییر شکل زاویه ای، تغییرات سرعت لایه های سیال در راستای عمود بر جهت تنش برشی وارد شده بدان می باشد.

اگر اختلاف سرعت در راستای آن باشد:



دارد آنرا پس برکتی در راستای x



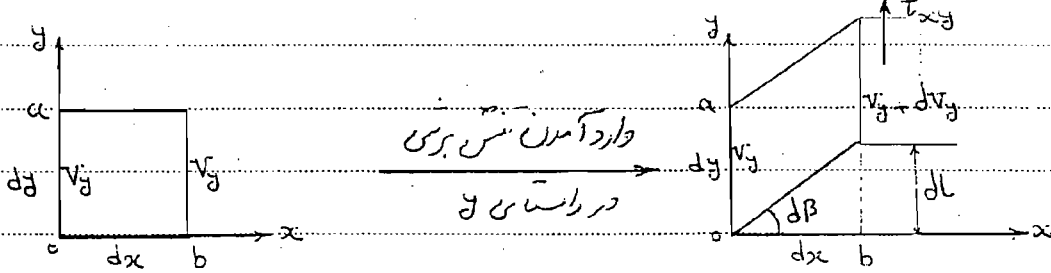
تغییر شکل زاویه ای: $\frac{du_x}{dy}$

با توجه به تغییرات مکان زاویه‌ای ایجاد شده بر اثر اعمال تنش برشی می‌توان نوشت:

$$dL = du_x \cdot dt = dy \cdot \text{tg}(\alpha) \quad \& \quad \text{tg}(\alpha) \cong d\alpha$$

$$\Rightarrow du_x \cdot dt = dy \cdot d\alpha \Rightarrow \frac{d\alpha}{dt} = \frac{du_x}{dy} \Rightarrow \tau_{xy} \frac{d\alpha}{dt} \Rightarrow \tau_{xy} \frac{du_x}{dy} \quad (1-26)$$

اگر اختلاف سرعت در راستای y باشد:



تغییر شکل زاویه‌ای: $\frac{d\tau_{xy}}{dx}$

با توجه به تغییر شکل زاویه‌ای ایجاد شده بر اثر وارد آمدن تنش برشی می‌توان نوشت:

$$dL = d\tau_{xy} \cdot dt = dx \cdot \text{tg}(\beta) \quad \& \quad \text{tg}(\beta) \cong d\beta$$

$$\Rightarrow d\tau_{xy} \cdot dt = dx \cdot d\beta \Rightarrow \frac{d\beta}{dt} = \frac{d\tau_{xy}}{dx} \Rightarrow \tau_{xy} \frac{d\beta}{dt} \Rightarrow \tau_{xy} \frac{d\tau_{xy}}{dx} \quad (1-27)$$

در هر دو حالت (وجود تغییرات برشی در راستای x و راستای y) مشاهده می‌شود که تنش مناسب با تغییرات زاویه‌ای سرعت است و این تغییرات نسبت به هر دو راستای x و y متقارن است.

* شکل برعکس، معادله حرکت فقط برای سیالیت نیوتونی است (لاکسپلنتیسیته) معادله حرکت برای تمام سیالیت کاربرد دارد.

11 Subject:
 Year: 87 Month: 6 Date: 31 (3)

مکانیک سیالیت پیشرفته

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \sum F$$

ثابت این معادلات با شکل داد قانون هم نیوتن بگای قابل فهم می باشد:

با استفاده از روابط مربوط به تنش های نرمال و برشی برای سیال های نیوتونی می توان شکل برعکس معادله حرکت را

$$\rho \left[\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right] + \rho g_x \quad (1-35)$$

همچنین با استفاده از معادله تنش می توان معادله حرکت در راستای y را نیز بصورت زیر نوشت:

$$\rho \frac{Dv_y}{Dt} = \frac{dp}{dy} - \rho g_y + \mu \left[\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right] + \frac{1}{3} \mu \frac{d}{dy} \left[\frac{du_x}{dx} + \frac{dv_y}{dy} + \frac{dw_z}{dz} \right] \quad (1-36)$$

توجه آخر است راست برای سیال توکام آئیزر صفری می باشد:

$$\rho \frac{Dv_y}{Dt} = \frac{dp}{dy} - \rho g_y + \mu \nabla^2 v_y \quad (1-37)$$

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \nabla^2 v_x$$

بطور کلی می توان معادلات Navier-Stokes را بدین شکل زیر نوشت:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = - \left[\frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k} \right] + \nabla \cdot \tau + \rho \mathbf{g}$$

در راستای x: $\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx}$ نرخ افزایش اندازه حرکت در واحد حجم

$\nabla \cdot \rho v v$: نرخ ورود مومنتم با جریان حرکت در واحد حجم

$\nabla \cdot p$: نیروی فشاری وارد شده در واحد حجم

$\nabla \cdot \tau$: نرخ ورود مومنتم با جریان ویسکوز در واحد حجم

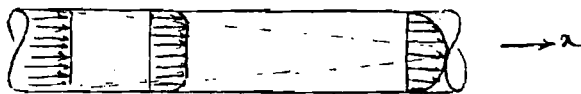
$\rho \mathbf{g}$: نیروی گرانشی وارد شده در واحد حجم

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_x) = - \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_x v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_x w_z) \right] - \frac{\partial p}{\partial x}$$

یازدهم معادله ناویر استوکس در راستای x را می توان به صورت زیر نوشت:

Fully developed Flow

جریان توسعه یافته یا مبرهنه کاملاً مبرهنه
توزیع سرعت در این نوع جریان تغییر نمی کند



Subject:

7 Year: 87 Month: 6 Date: 26/2

از اینجا به بعد توزیع سرعت به همین شکل خواهد بود

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$$

رابطه تنش برشی و تنش برشی

با در نظر گرفتن ویسکوزیته نیل به عنوان ضریب تناسب در معادلات (1-26) و (1-27) آنها در مورد

نیل های نیوتنی در مورد تنش برشی می توان نوشت:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu \left[\frac{du_x}{dy} + \frac{dv_y}{dx} \right] \quad (1-28)$$

در مورد تنش برشی می توان نوشت

$$\tau_{xx} = \mu \left[2 \frac{du_x}{dx} + \frac{2}{3} \left(\frac{du_x}{dx} + \frac{dv_y}{dy} + \frac{dw_z}{dz} \right) \right] \quad (1-29)$$

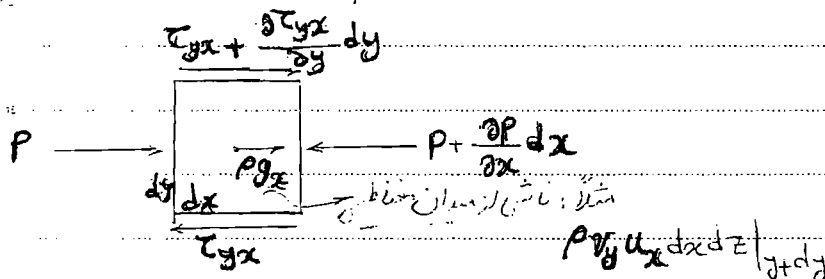
ترم اول در جریان توسعه یافته (Fully Developed) صفر است. ترم دوم برای نیل تراکم نا پذیر

صفر است. بنابراین معمولاً Normal Stress صفر است. $\rho = \text{cte}$ $\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$ $\nabla u = 0$

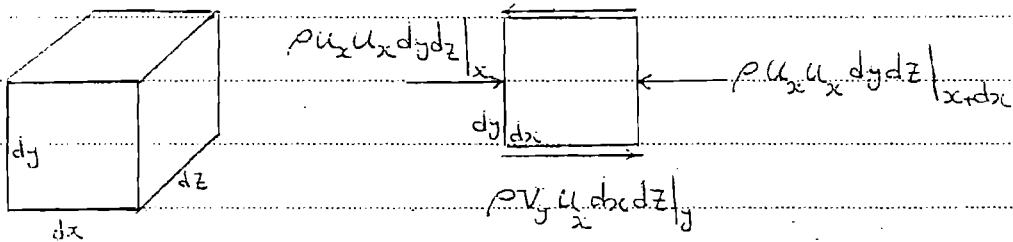
معادله حرکت

در مختصات کارتزین، نیروها و اندازه حرکت های وارد شده بیک انسان کوچک در راستای x به ترتیب زیر

نوشتنی شوند:



* سن در راستای x است



مستقیم

در حتم $\rho u_x u_x$ جهت حرکت

$$\rho U_x U_x dy dz |_x \longrightarrow \rho U_x U_x dy dz |_{x+dx}$$

$$\rho V_y U_x dx dz |_y \longrightarrow \rho V_y U_x dx dz |_{y+dy}$$

$$\rho W_z U_x dx dy |_z \longrightarrow \rho W_z U_x dx dy |_{z+dz}$$

$$\tau_{xx} dy dz |_x \longrightarrow \tau_{xx} + \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\right) dx$$

$$\tau_{yx} dx dz |_y \longrightarrow \tau_{yx} + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right) dy$$

$$\tau_{zx} dx dy |_z \longrightarrow \tau_{zx} + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) dz$$

$$P \longrightarrow P + \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) dx$$

$$\rho g_x$$

$$\text{Accumulation: } \frac{\partial (\rho U_x dx dy dz)}{\partial t}$$

موازنه اندازه حرکت بصورت زیر نوشته می شود:

جمع دینروهای وارد شده بر سیستم + نرخ خروج - نرخ ورود = نرخ انباشتن

اندازه حرکت اندازه حرکت اندازه حرکت

acc

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho U_x dx dy dz)}{\partial t} &= \rho U_x U_x dy dz |_x + \rho V_y U_x dx dz |_y + \rho W_z U_x dx dy |_z \\ &+ \tau_{xx} dy dz |_x + \tau_{yx} dx dz |_y + \tau_{zx} dx dy |_z \\ &- \rho U_x U_x dy dz |_{x+dx} - \rho V_y U_x dx dz |_{y+dy} - \rho W_z U_x dx dy |_{z+dz} \\ &- \left(\tau_{xx} + \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\right) dx\right) dy dz |_{x+dx} - \left(\tau_{yx} + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right) dy\right) dx dz |_{y+dy} - \left(\tau_{zx} + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) dz\right) dx dy |_{z+dz} \\ &+ P dx dy dz - \left(P + \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) dx\right) dy dz + \rho g_x dx dy dz \end{aligned}$$

مطابق موازنه بصورت زیر می آید:

$$\frac{\partial (\rho U_x)}{\partial t} = - \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho U_x U_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho V_y U_x) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho W_z U_x) \right]$$

$$- \left[\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx} \right] - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x \quad (1-2a)$$

9

Subject:

Year: 27 Month: 6 Date: 2012

اگر دانه میل ثابت باشد $\rho = c$

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} + \rho \left[\frac{\partial (u_x u_x)}{\partial x} + \frac{\partial (v_y u_x)}{\partial y} + \frac{\partial (w_z u_x)}{\partial z} \right]$$

$$= \rho \frac{D u_x}{D t} = \left[\frac{\partial \tau}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \tau_{yx} + \frac{\partial \tau}{\partial z} \tau_{zx} \right] - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \quad (1-31)$$

بهمین ترتیب در جهت Z و J نیز می توان اندازه حرکت را نوشت:

$$\frac{\partial (\rho v_y)}{\partial t} = \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x v_y) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w_z v_y) \right]$$

$$= \left[\frac{\partial \tau}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \tau_{yy} + \frac{\partial \tau}{\partial z} \tau_{zy} \right] - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \quad (1-32)$$

$$\frac{\partial (\rho w_z)}{\partial t} = \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x w_z) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y w_z) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w_z w_z) \right]$$

$$= \left[\frac{\partial \tau}{\partial x} \tau_{xz} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \tau_{yz} + \frac{\partial \tau}{\partial z} \tau_{zz} \right] - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \quad (1-33)$$

ناشن عمومی معادله حرکت با استفاده از مشتق گیری اجزا بصورت زیر در می آید:

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla P + \rho G - \nabla T \quad (1-39)$$

مجموع شتابها

اگر سیال نیوتنی باشد می توان نوشت:

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla P + \rho G + \mu \nabla^2 V \quad (1-40)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

معادله اویلر Euler: سیال نیوتنی، چگالی ثابت، و سلزویته صفر

هرگاه از تأثیر ویسکوزیته صرف نظر شود، در سیال ایده آل می توان نوشت:

$$\rho \frac{DV_y}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial y} - \rho g \quad (1-41) \quad \leftarrow \rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla P + \rho g$$

3.5 $\frac{\partial u_y}{\partial t} = 0$

در حالت پایا معادله حرکت بصورت زیر در می آید: $(1-42) \quad \rho \left[U_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + W_z \frac{\partial V_y}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P}{\partial y} - \rho g$

برای سیال ایده آل می توان نوشت: $\frac{\partial U_x}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial x} ; \frac{\partial V_y}{\partial z} = \frac{\partial W_z}{\partial y} ; \frac{\partial U_x}{\partial z} = \frac{\partial W_z}{\partial x}$

این روابط برای سیال غیر چرخشی (سیال ایده آل) صادق می باشند و در بخش 3 اثبات می شوند.

انتگرال گیری $u^2 \rightarrow \rho u du$ $(1-43) \quad \rho \left[U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + W_z \frac{\partial W_z}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} - \rho g$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \rho [U_x^2 + V_y^2 + W_z^2] + P + \rho g y = cte \Rightarrow \frac{1}{2} \rho u^2 + P + \rho g y = cte$

معادله برنولی $(1-44) \quad \frac{u^2}{2g} + \frac{P}{\rho g} + y = \frac{U_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + y_1$

شرایط معادله برنولی:

۱) سیال ایده آل و سلزویته صفر (نیوتنی و چگالی ثابت)

۲) steady state

۳) بردار سطح و سرعت بر هم عمود باشند

مخادلات حرکت در مختصات استوانه‌ای و کروی:

معادلات حرکت در راستای z و θ (مختصات استوانه‌ای) و r و ϕ (مختصات کروی) در پیوسته B کتاب مرجع آمده است.

نکته: وقتی بیان غیر بیضی باشد، باید از شکل کشی آن استفاده کرد.

تذکره: منظور حل مسائل مربوط به دینامیک سیالات، لزوم است معادلات پیوسته حرکت Navier - Stokes حل شوند.

- با حل این معادلات، توزیع سرعت تعیین می‌شود.
- تشخیص جهت (جهات)، اصلی حرکت، مطابق جهت جریان و مرزهای اصلی (غیر صغیر) سرعت، بسیار اهمیت دارد.

تمرین: توزیع سرعت سیالی را که میان دو صفحه استی موازی حرکت می‌کند، تعیین کنید.

برضایات: جریان یک بعدی فرض می‌شود. ($v_y = 0$) • جریان توسعه یافته فرض می‌شود. ($U_x \neq 0$)

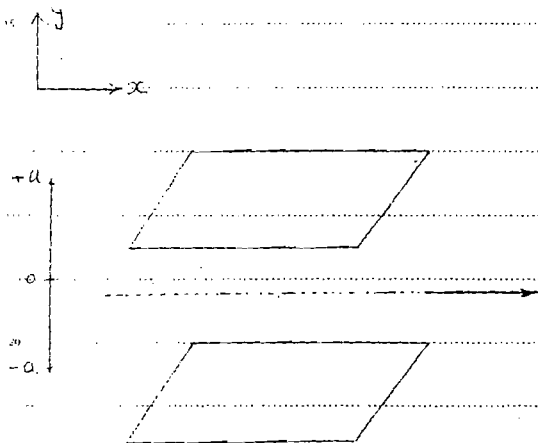


Fig. 1-9

$$\rho \frac{\partial U_x}{\partial t} = -\frac{dp}{dx} + \rho g_{ox} + \mu \nabla^2 U_x \quad \text{حل تریجی}$$

$$\Rightarrow \rho \left[\frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_x}{\partial z} \right] = -\frac{dp}{dx} + \mu \left[\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} \right]$$

مقطع در راستای x تغییرات سرعت داریم. جریان توسعه یافته جریان توسعه یافته جریان پایا

$$\Rightarrow a = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} \quad \& \quad \frac{dp}{dx} = c \Rightarrow c = \mu \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} \quad \& \quad \text{B.C.} \begin{cases} y=+a : U_x = U_T \\ y=-a : U_x = U_B \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} = \frac{c}{\mu} \quad \text{استخوان گیری} \rightarrow \frac{\partial U_x}{\partial y} = \frac{c}{\mu} y + b_1 \quad \text{استخوان گیری} \rightarrow U_x = \frac{c}{2\mu} y^2 + b_1 y + b_2$$

$$\text{در این معادله برای ابعاد شرایط مرزی} \quad b_1 = \frac{U_T - U_B}{2a} \quad \& \quad b_2 = \frac{(U_T + U_B)}{2} - \frac{c}{2\mu} a^2$$

$$\Rightarrow U_x = \frac{c}{2\mu} \left[y^2 - a^2 \right] + \frac{U_T - U_B}{2a} y + \frac{U_T + U_B}{2}$$

در این معادله برای ابعاد شرایط مرزی و سرعت میزنیم و میبندیم.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{dP}{dx} = c \Rightarrow \text{جریان توسعه یافته است}$$

$$U_m = \frac{c}{2\mu} y^2 + b_1 y + b_2 \quad \begin{cases} y=+a & U_m = U_T \\ y=-a & U_m = U_B \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_T = \frac{c}{2\mu} (a)^2 + b_1 a + b_2 \\ U_B = \frac{c}{2\mu} (a)^2 - b_1 a + b_2 \end{cases} \quad \begin{aligned} 2b_2 &= U_T + U_B \\ b_2 &= \frac{(U_T + U_B)}{2} \end{aligned}$$

$$2b_1 a + \frac{ca}{\mu} = U_T - U_B \Rightarrow b_1 = \frac{(U_T - U_B) - \frac{ca}{\mu}}{2a}$$

$$a = \frac{U_T - U_B}{2b_1 + \frac{c}{\mu}} = \frac{\mu(U_T - U_B)}{2b_1 \mu + c}$$

$$U_m = \frac{c}{2\mu} y^2 + \frac{(U_T + U_B)}{2} y +$$

$$U_m = \frac{c}{2\mu} y^2 + \left(\frac{U_T - U_B}{2a} - \frac{c}{2\mu} \right) y + \frac{(U_T + U_B)}{2}$$

حل تقریبی جدید: (۱)

$$\rho \frac{DU_x}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \left[\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial z} \right] + \rho g_x$$

معادله در راستای x سرعت داریم

$$\frac{\tau}{zx} = -\mu \left[x \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} \right] + \left[\frac{2}{3} \mu - k \right] \left[\nabla^2 U \right] = 0 \quad \frac{\tau}{\partial x} = -\mu \left[\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} \right] \Rightarrow \tau = -\mu \frac{\partial U_x}{\partial y}$$

توسعه یافته

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} = 0 \quad \frac{\tau}{zx} = -\mu \left[\frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} \right] = 0$$

با در نظر گرفتن شرایط مرزی حل خواهد شد *

$$\frac{-\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left[-\mu \frac{\partial U_x}{\partial y} \right] = 0, \mu = \text{cte} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2}$$

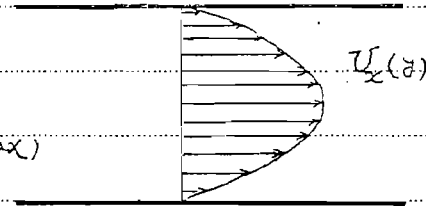
B.C.1: $y = +a \rightarrow U_x = 0$

B.C.2: $y = -a \rightarrow U_x = 0$

$$\Rightarrow U_x = \frac{a^2}{2\mu} \left[\frac{-\partial p}{\partial x} \right] \left[1 - \left(\frac{y}{a} \right)^2 \right]$$

$$\Rightarrow \bar{U}_x = \frac{2}{3} U_{x(\max)}$$

& $U_{x(\max)} = \frac{a^2}{2\mu} \left[\frac{-\partial p}{\partial x} \right] \quad (\text{at } y=0)$

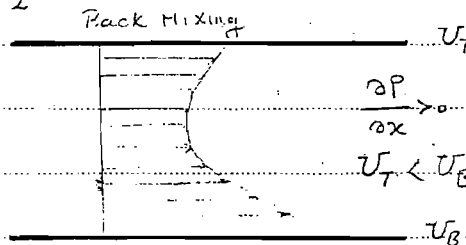
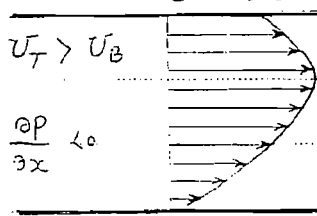


در این حالت اگر انت فشار وجود نداشته باشد، جریان برقرار خواهد شد

B.C.1: $y = +a \rightarrow U_x = U_T$

B.C.2: $y = -a \rightarrow U_x = U_B$

$$U_x = \frac{a^2}{2\mu} \left[\frac{-\partial p}{\partial x} \right] \left[1 - \left(\frac{y}{a} \right)^2 \right] + \frac{U_T - U_B}{2a} y + \frac{U_T + U_B}{2}$$

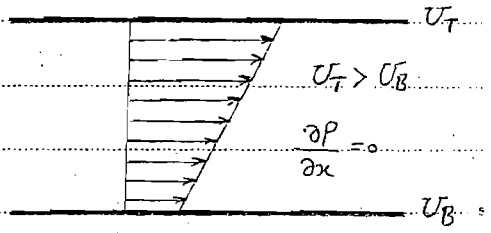


در این حالت، حتی اگر انت فشار وجود نداشته باشد، جریان برقرار خواهد بود

حرکت از در صفحه با سرعت ثابت حرکت کنند، اما لغت ثابتی وجود ندارد.

B.C.1: $y = +a \rightarrow U_x = U_T$

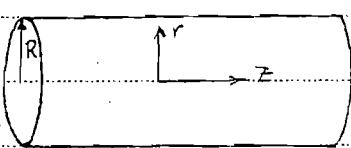
B.C.2: $y = -a \rightarrow U_x = U_B$



$$U_x = \frac{U_T - U_B}{2a} y + \frac{U_T + U_B}{2}$$

فرضیات: توزیع سرعت میان داخل یک لوله استقراری را بررسی کنید.

فرضیات: جریان یک بعدی در راستای z و توسعه یافته فرض می شود.



$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) \right] + \rho g_z$$

بعد از ساده سازی معادله: $\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) = 0$; $\tau_{rz} = -\mu \left[\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right]$

حرکت در راستای z.

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right]$$

در حالت جاری توسعه یافته، لغت ندارد.

ثابت می باشد، بنابراین:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dp}{dz} \Rightarrow \frac{dp}{dz} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right]$$

معادله ساده شده حرکت در راستای z. در صورت زیر در می آید:

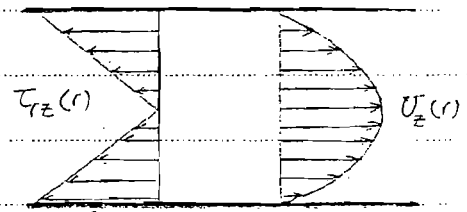
$$\frac{r^2}{2} \frac{dp}{dz} + A = \mu r \frac{\partial v_z}{\partial r} \Rightarrow \frac{r}{2\mu} \frac{dp}{dz} + \frac{A}{\mu r} = \frac{\partial v_z}{\partial r}$$

در هر دو لوله به دلیل تقارن تغییرات سرعت وجود ندارد.

B.C.1: at $r=0 \Rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0 \Rightarrow A=0 \Rightarrow v_z = \frac{r^2}{4\mu} \frac{dp}{dz} + B$

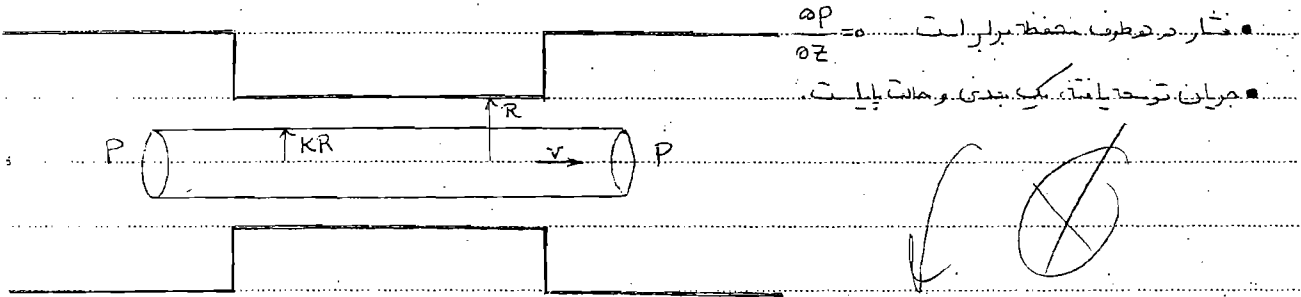
B.C.2: at $r=R \Rightarrow v_z = 0$

$$\Rightarrow v_z = \frac{R^2}{4\mu} \left[- \frac{dp}{dz} \right] \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$



$$v_{z,max} = \frac{R^2}{4\mu} \left[- \frac{\partial p}{\partial z} \right] \text{ at } r=0 \quad \& \quad \bar{v}_z = \frac{1}{2} v_{z,max} = \frac{\int_A v_z dA}{\int_A dA} \quad dA = 2\pi r dr$$

تقریباً در جبهه جریان آرام، پتانسیل تراکم ناچیز در فضای بین پیلدها و پیستون است. در صورتیکه حرکت پیستون بی انتها آید، پیستون با سرعت V بدست راست حرکت می کند.



• فشار در هر طرف حفظ می شود. $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$
 • جریان توجهدار است، یک جبهه واحد پدید می آید.

حل: با توجه به معادله حرکت در راستای z در مختصات استوانه ای، رینولدز غریب است. معادله توان نوشت: (فشار هر دو سمت یکسان می باشد، در نتیجه انتگرال برابر می شود.)

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \tau_{rz} \right) = \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{A}{r} \Rightarrow r \tau_{rz} = -A \Rightarrow \tau_{rz} = -\frac{A}{r} \Rightarrow \mu \frac{\partial v_z}{\partial r} = -\frac{A}{r}$$

$$\Rightarrow v_z = -\frac{A}{\mu} \ln r + B$$

مدرک اصلی

B.C.1: at $r=R$: $v_z=0$
 B.C.2: at $r=KR$: $v_z=V$

$$\frac{v_z}{V} = \frac{\ln(r/R)}{\ln(K)}$$

$\rho \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} + \nu_r \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \nu_\theta \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \nu_z \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial z} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) \right] \dots$

$$Q = \int_{KR}^R v_z dA = \int_{KR}^R \frac{\ln(r/R)}{\ln(K)} 2\pi r dr \Rightarrow Q = \frac{\pi R^2 V}{2} \left[\frac{1-K}{\ln(K)} - 2K \right] = \bar{v}_z A$$

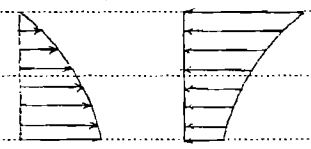
$$\frac{v_z}{V} = \frac{\ln(r/R)}{\ln(K)}$$

اگر $K \rightarrow 1$ رابطه سرعت خطی می شود. اگر $K \rightarrow \infty$ دی صغری می شود.

$$v_z = \frac{V}{\ln(K)} \ln \frac{r}{R} \quad \tau_{rz} = \frac{A}{r}$$

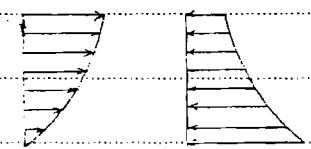
$$\int \ln x dx = x \ln x - x$$

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}$$

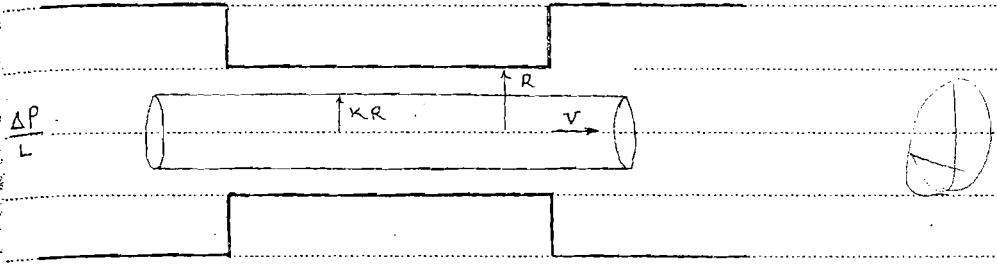


توزیع تنش τ توزیع سرعت v

Integration By Part: $\int u dv = uv - \int v du$



تمرین: دبی حجمی جریان آب را در میان تراکم نا پذیر در داخل فضای بین سیلندر و پیستون که تحت تاثیر حرکت پیستون می باشد، در چه سرعتی از پیستون (V) با وجود اختلاف فشار در دو سمت پیستون (ΔP)، صفر خواهد شد؟



$$\frac{\Delta P}{L} = C = \mu \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] \Rightarrow v_z = \frac{C r^2}{4\mu} + B \ln r + A$$

اعمال شرایط مرزی:

$$\Rightarrow v_z = \frac{C r^2}{4\mu} + \left[\frac{4\mu V}{C R^2 (K^2 - 1) \ln K} \right] \ln r + \frac{C R^4 (1 - K^2) \ln K - 16\mu^2 V}{4\mu C R^2 (K^2 - 1) \ln K}$$

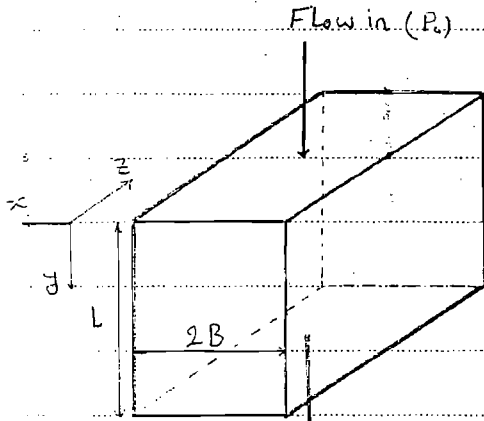
* نیروی که به پله وارد می شود همان نیروی و اسکالری است که به سطح جانبی پله وارد می شود

$$F = \tau A = \mu \frac{dv_z}{dr} A = \mu \left(\frac{r}{K R \ln K} \right) 2\pi R L$$

$$Q = \int v_z dA = \dots$$

$$r = KR \rightarrow v_z = \frac{C K^2 R^2}{4\mu} - \left(\frac{C R^2 + 4\mu A}{4\mu \ln R} \right) \ln KR + A$$

تجزیه: دی مجوی جریان را برای جریان آرام سیال تراکم ناپذیر در داخل فضای کانال مطابق شکل، کثافت ثابت است. اختلاف فشار در جاذبه تعالی سیال بدست آورید.
نarrow slit



فرضیات: 1. جریان یک جری است و عدد رینولدز $Re < 2300$ ،
بسیار کوچک است

2. اثرات انتهایی صرف نظر شود

حل: 1. با بردن معادله حرکت در راستای x می توان نوشت:

$$\rho \frac{Dv_y}{Dt} = -\frac{dp}{dy} + \rho g + \mu \nabla^2 v_y$$

در دست راست؟

$$\Rightarrow \frac{dp}{dy} - \rho g = \mu \frac{d^2 v_y}{dx^2} \Rightarrow \frac{(P_0 - P_1) + \rho g L}{L} = \mu \frac{d^2 v_y}{dx^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dv_y}{dx} = -\frac{k}{\mu} x + a \quad ; \quad v_y = -\frac{k}{2\mu} x^2 + ax + b$$

B.C.S: $x = \pm B \Rightarrow v_y = 0 \Rightarrow a = 0 \quad \& \quad b = \frac{k}{2\mu} B^2$

$$\Rightarrow v_y = \frac{k B^2}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{x}{B}\right)^2 \right]$$

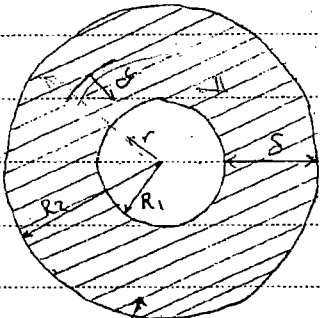
$$Q = \int v_y dA = 2 \int_0^B \frac{k B^2}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{x}{B}\right)^2 \right] w dx \Rightarrow Q = \frac{2 k B^3}{3\mu} = \frac{2 [P_0 - P_1 + \rho g L] w B^3}{3 L \mu}$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} \left[\frac{\partial z}{\partial x} x_y + \frac{\partial z}{\partial y} y_y + \frac{\partial z}{\partial z} z_y \right] + \rho g_y$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right]$$

$$\rightarrow 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - \mu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \rho g_y \rightarrow \mu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y}$$

توزیع سرعت را برای جریان آرام میان تراکم‌ناپذیر و بی‌لغزش در فضای بین دو لوله مطابق شکل بالا بکشد. آیا می‌توان لوله درونی را برد، بدست آورد. همچنین توان مورد نیاز را محاسبه کنید.



اختلاف فشار داریم.

ن بین دو لوله است. (تخمین متغیر)

این حالت برای جریان ویسکوز کارایی دارد.

با ساده کردن معادله حرکت در راستای θ می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r v_\theta) \right] = \frac{\Delta p}{4\mu L} \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r v_\theta) = A \Rightarrow v_\theta = \frac{A}{2} r^2 + \frac{B}{r}$$

B.C.I: at $r=R_1$: $v_\theta = R_1 \omega$

B.C.I: at $r=R_2$: $v_\theta = 0 \Rightarrow v_\theta = \frac{R_1^2 \omega}{R_1^2 - R_2^2} \left[r - \frac{R_2^2}{r} \right]$

اگر سیال غیر نیوتن باشد، باید از شکل تنش معادله حرکت استفاده کرد.

با علت توجه ایکنگی، سرعت در R های مختلف متفاوت است و سرعت نتایج r می‌باشد.

$$\tau_{r\theta} = -\mu \left[r \frac{d}{dr} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \right] \Rightarrow \tau_{r\theta} = \frac{-2R_1^2 \omega \mu}{R_1^2 - R_2^2} \frac{R_2^2}{r^2}$$

at $r=R_1$: $\tau_{r\theta} = \frac{2R_2^2 \omega \mu}{R_2^2 - R_1^2}$

at $r=R_2$: $\tau_{r\theta} = \frac{2R_1^2 \omega \mu}{R_2^2 - R_1^2}$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta\theta} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{z\theta} + \frac{\tau_{\theta r} - \tau_{r\theta}}{r} \right] + \rho g_\theta$$

نقطه هرگاه ضخامت سیال (در این جا فاصله بین دو لوله) بسیار کوچک باشد، سرعت با فاصله بصورت خطی تغییر می کند.

با تعریف کردن تغییر جدید بصورت زیر می توان نوشت: $R_2 - R_1 = \delta$ & $y + r = R_1 + \frac{\delta}{2}$

از آنجایی که در مقابل R_1 مقابل صرف نظر کردن می باشد. یعنی در رابطه y و r را حذف می کنیم:

$$y = R_1 - r \Rightarrow dy = -dr, \quad \frac{1}{R_1 - y} \frac{d}{dy} [(R_1 - y) V_\theta] = A$$

B.C1: at $y = +\frac{\delta}{2} \Rightarrow V_\theta = R_1 \omega$

B.C2: at $y = -\frac{\delta}{2} \Rightarrow V_\theta = 0$

$$V_\theta = \frac{R_1 \omega}{\delta} y + \frac{R_1 \omega}{2}$$

$$\tau_{r\theta} = \mu \frac{R_1 \omega}{\delta}$$

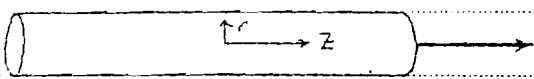
- چون سرعت خطی است، تنش برشی نیز ثابت می باشد.
- میدان سرعت با افزایش R کاهش می یابد.
- برای محاسبه تیران مورد نیاز بر واحد طول می توان نوشت:

$$P = F * V, \quad F = \tau_{r\theta} * A = \mu \frac{R_1 \omega}{\delta} * 2\pi R_1 * L \Rightarrow F = 2\pi \mu \frac{R_1^2 \omega}{\delta}$$

$$V = R_1 \omega \Rightarrow P = 2\pi \mu \frac{R_1^3 \omega^2}{\delta}$$

توزیع سرعت سیال را در لوله با جریان لغزشی (Slip Flow) بدست آورید.

حل با استفاده کردن معادله حرکت در راستای Z می توان نوشت:



$$0 = \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \tau_{rz})$$

جریان توسعه یافته نهی می شود، بنابراین می توان نوشت:

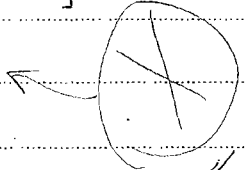
$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dp}{dz}$$

بررسی با توجه به لغزشی بودن جریان می توان نوشت:

چون لغزشی است در دیواره توزیع سرعت داریم.

$$\tau_{rz} = \left[\frac{dp}{dz} \right] \frac{r}{2} + \frac{A}{r}, \quad \text{at } r=0 \Rightarrow \tau_{rz} = 0 \Rightarrow A=0 \quad \& \quad \tau_{rz} = \left[\frac{dp}{dz} \right] \frac{r}{2} = \mu \frac{d\tau_{rz}}{dr}$$

$$U_z = \left[\frac{dp}{dz} \right] * \frac{-r^2}{4\mu} + B \Rightarrow U_z = \frac{R^2}{4\mu} \left[\frac{dp}{dz} \right] \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \frac{2\mu}{\beta R} \right]$$

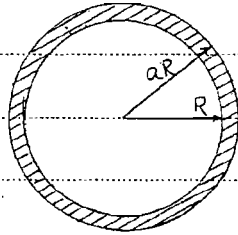
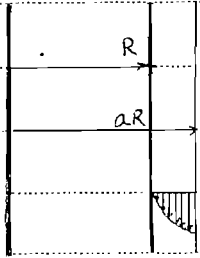


هرگاه $\beta \rightarrow \infty$ شرط مرزی بر شرط No-Slip Flow تبدیل می شود.

$$\tau_{rz} = -\mu \left[\frac{du_z}{dr} + \frac{d\tau_{rz}}{dz} \right]$$

* در سطح سیال آزاد باشد تنش منفرست
* در سطح آزاد، فشار متساوی ندارد

توزیع سرعت را برای جریان آرام سیال تراکم ناپذیر سقوط کننده در پیرن لوله عمودی، مطابق شکل که تصدیق آن نیز جاذبه مقصود باشد، بدست آورید. (falling film)



حل: با استفاده از معادله حرکت در راستای Z

$$\rho \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU_z}{dr} \right) + \rho g = 0$$

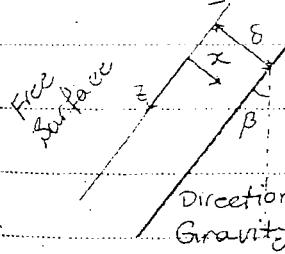
$$\frac{dP}{dz} = 0 \rightarrow \text{در عرض لوله تغییر ندارد}$$

$$\Rightarrow \tau_{rz} = \frac{-\rho g r}{2} + \frac{A}{r} \quad \text{B.C.1: at } r=aR \Rightarrow \tau_{rz} = 0 \Rightarrow \tau_{rz} = \frac{-\rho g a R}{2} \left[\frac{r}{aR} - \frac{aR}{r} \right]$$

$$\tau_{rz} = \mu \frac{dU_z}{dr} \Rightarrow U_z = -\frac{\rho g a R}{2\mu} \left[\frac{r^2}{2aR} - aR \ln r \right] + B$$

$$\text{B.C.2: at } r=R \Rightarrow U_z = 0 \Rightarrow U_z = \frac{\rho g a^2 R^2}{4\mu} \left[\frac{1}{a^2} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] + 2 \ln \frac{r}{R} \right]$$

در حالت پایا، دبی جری سیال، میروی وارد شده از طرف سیال و میانگین سرعت را برای جریان آرام سیال تراکم ناپذیر سقوط کننده مطابق شکل بدست آورید.

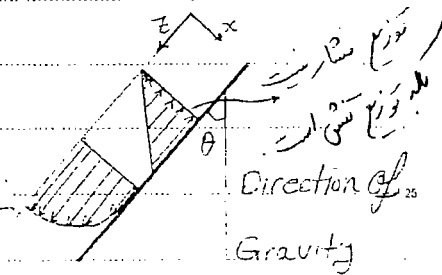


$$\frac{dP}{dz} - \rho g \cos \beta = \mu \frac{d^2 U_z}{dx^2} \quad \frac{dP}{dz} = -\rho g \cos \beta = \mu \frac{d^2 U_z}{dx^2} \Rightarrow \frac{\rho g \cos \beta}{\mu} x + A = \frac{dU_z}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{\rho g \cos \beta}{2\mu} x^2 + Ax + B = U_z \quad \text{B.C.1: } \left[\frac{dU_z}{dx} \right]_{x=0} = 0 \quad \text{B.C.2: } (U_z)_{x=\delta} = 0$$

$$\Rightarrow U_z = \frac{\delta^2 \rho g \cos \beta}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right] \Rightarrow \dot{m} = \dot{w} = \int_0^\delta \rho U_z dA = \int_0^\delta \rho \frac{\delta^2 \rho g \cos \beta}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right] w dx$$

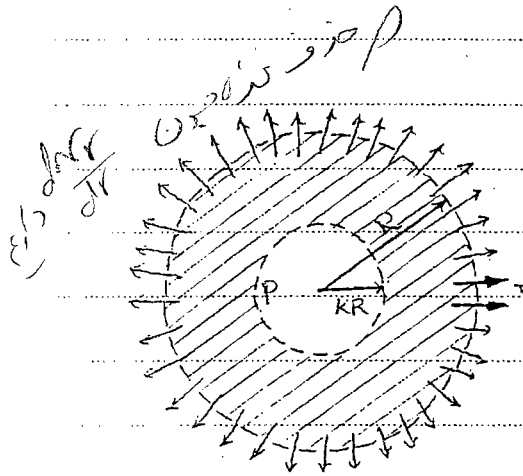
$$\Rightarrow \dot{w} = \frac{\rho^2 g \cos \beta \delta^3 w}{2\mu} \quad ; \quad w \text{ is the plate width.}$$



فان لوری که در شکل دیده می شود x زیاد آید سرعت آن بیشتر می شود در جهت جریان مثبت است
اگر x بیشتر می شود از این نکته در نظر بگیرید
استعداد می شود

(8)

تقریباً: جریان از سیال تراکم ناپذیر در حالت هیدرواستاتیسیته در اثر اختلاف فشار بین دو استوانه هم محور متفاصل مطابق شکل وجود دارد. جریان سیال را با توجه به وجود سرعت در سطح جامد و صرف نظر از طول استوانه بررسی و توزیع فشار و سرعت را در شعاع R بدست آورید.



حل: معادله بیرونی در سیستم مختصات استوانه‌ای بصورت زیر نوشته می‌شود: ماکسویت v_r تغییر نمی‌کند.

$$\frac{1}{r} \left[\frac{d(rv_r)}{dr} \right] + \frac{1}{r} \left[\frac{d(v_\theta)}{d\theta} \right] + \left[\frac{d(v_z)}{dz} \right] = 0$$

با توجه به فیزیک سیالی توان نوشت: $v_\theta = 0$ و $v_z = 0$

$$rv_r = f(\theta, z) \Rightarrow rv_r = C \Rightarrow \rho(2\pi r L) = W$$

$$\Rightarrow C = \frac{W}{2\pi L \rho}$$

توجه: v_r تابع θ و z نیز نمی‌باشد. ثابت است. ρ هم ثابت است.

$$\rho v_r \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot v_r) \right) \right]$$

$$\rho \cdot P \left[v_r \frac{d(v_r)}{dr} \right] = - \frac{dp}{dr} \Rightarrow \rho \left[\frac{C}{r} \left(\frac{d(C)}{dr} \right) \right] = - \frac{dp}{dr}$$

$$v_r = \frac{C}{r} = \frac{W}{2\pi L \rho r} \Rightarrow \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{C^2}{r^3} \right) \right] = - \frac{dp}{dr} \Rightarrow P = P_0 + \mu \left[\frac{C^2}{2r^2} \right] + D$$

• اگر دانستیم که پتانسیل توان از ρg هم نظر کرد

• اگر چنانچه را هم نظر کنیم تغییرات درجهت θ نیز وجود دارد.

BCs: $P = P_R$ and $v_r = v_R$ at $r = R$

$$\frac{d(rv_r)}{dr} = 0 \text{ تانس از } r$$

$$\Rightarrow D = P_R + \frac{\rho C^2}{2R^2} \text{ و } C = R v_R$$

نیست و تانس از θ است اگر دانسته سیال

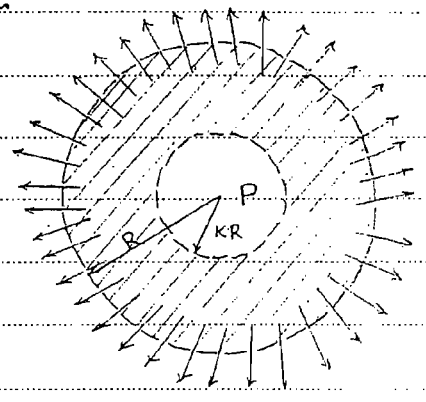
زاد باشد و با دوران دامنه با هم θ اثرش ندارد.

$$\Rightarrow P = P_R + \frac{1}{2} \rho v_R^2 \left[1 - \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right]$$

تجزیه جریانی از سیال تراکم ناپذیر در حالت همدا با دانسیته در اثر اختلاف فشار بین دو کره هم مرکز متخلخل مطابق شکل موجود دارد. جریان سیال را با توجه به وجود سرعت در سطح جامد و جریان آرام بر روی نماینده و توزیع فشار و سرعت را بدست آورید:

معادله پیوستگی در سیستم مختصات کروی بصورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{1}{r^2} \left[\frac{d(r^2 v_r)}{dr} \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{d(v_\theta \sin \theta)}{d\theta} \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{d(v_\phi)}{d\phi} \right] = 0$$



با توجه به نسیزگی و اثری توان نوشت: $v_\theta = 0$ and $v_\phi = 0$

$r^2 v_r = f(\theta, \phi)$; $r^2 v_r = c$; $\rho [4\pi r^2 v_r] = W$

$\Rightarrow c = \frac{W}{4\pi\rho}$

با استفاده از معادله حرکت در راستای r می توان نوشت:

$\rho \left[v_r \frac{d(v_r)}{dr} \right] = - \frac{dp}{dr}$; $v_r = \frac{c}{r^2} = \frac{W}{4\pi\rho r^2}$

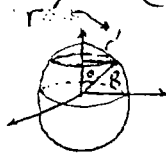
$\Rightarrow \rho \left[\frac{c^2}{r^5} \right] = - \frac{dp}{dr} \Rightarrow p = \frac{1}{2} \rho \left[\frac{c^2}{r^4} \right] + D$

B.C.s: $p = p_R$ and $v_r = v_R$ at $r = R$

$D = p_R - \frac{\rho c^2}{2R^4}$; $c = R^2 v_R \Rightarrow p = p_R - \frac{\rho v_R^2}{2} \left[1 - \left(\frac{R}{r}\right)^4 \right]$

اگر می استوانه (کره) در آن دماسته باشد + نیرو وارد می شود. اگر دماسته سیال زیاد دماسته + نیرو وارد می شود.

سرعت زاویه‌ای \times شعاع حلقه‌ای از بره در سیال \Rightarrow سرعت زاویه‌ای سیال

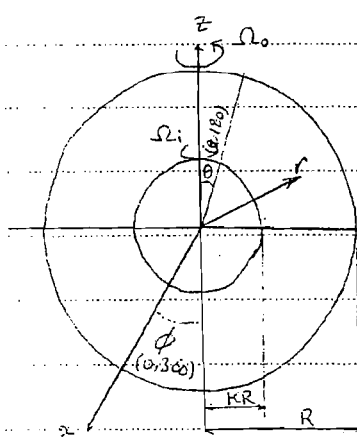


$$r' = R \sin \theta$$

2 Subject:

Year: 87 Month: 7 Date: 16/7

(15) جریان از سیال تراکم‌ناپذیر در حالت هم‌دم و آرام بین دو کره هم‌مرکز با سطح در حال چرخش مطابق شکل قرار دارد. توزیع سرعت سیال را در حالت پایا با فرض کوچک بودن مقادیر سرعت چرخش (جریان خزشی) بدست آورید.



$$\text{حفاظت پیوستگی: } \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (V_\phi) = 0$$

با توجه به اینکه ما برای توان سرعت $V_r = 0$ و $V_\theta = 0 \Rightarrow V_\phi = V_\phi(r, \theta)$

$$r\text{-Component: } 0 = -\frac{\partial p}{\partial r}$$

$$\theta\text{-Component: } 0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}$$

ϕ -Component:

$$0 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial V_\phi}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial (V_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} \right]$$

B.C.1: at $r = KR$; $V_\phi = \Omega_i KR \sin \theta$

B.C.2: at $r = R$; $V_\phi = \Omega_o R \sin \theta$

$$\Rightarrow V_\phi(r, \theta) = f(r) g(\theta) = f(r) \sin \theta$$

با در نظر گرفتن $r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + 2r \frac{df}{dr} - 2f = 0$; Suppose that: $f(r) = r^n$

$$n^2 + n - 2 = 0 \Rightarrow n = 1, -2$$

$$\Rightarrow f(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r^2} \text{ and } V_\phi(r, \theta) = \left[C_1 r + \frac{C_2}{r^2} \right] \sin \theta$$

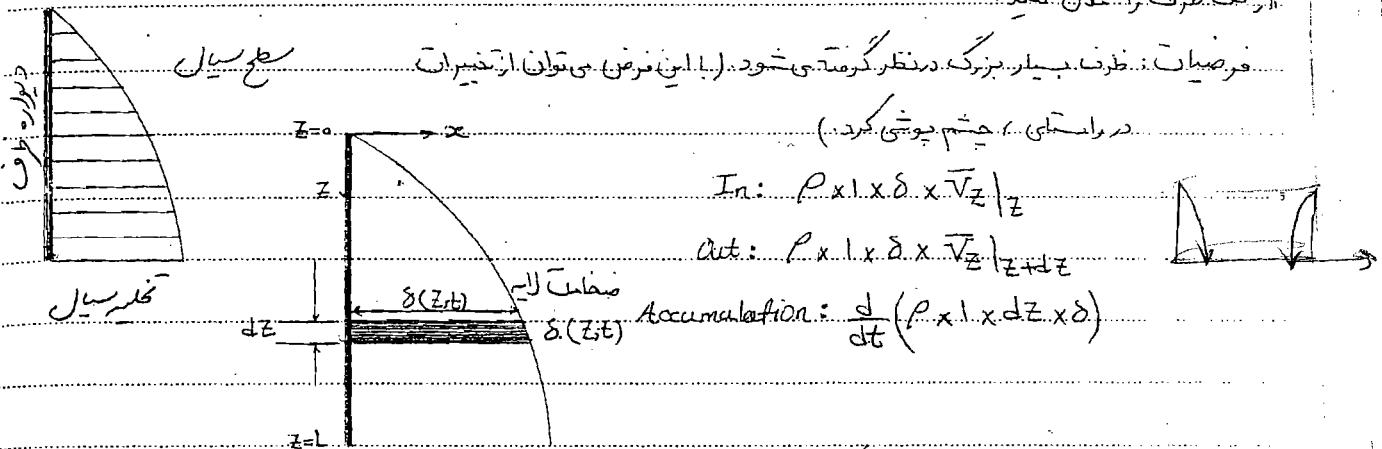
$$\Rightarrow \Omega_i KR = C_1 KR + \frac{C_2}{K^2 R^2} \text{ and } \Omega_o R = C_1 R + \frac{C_2}{R^2}$$

$$C_1 = \frac{\Omega_o - \Omega_i K^3}{1 - K^3} \text{ and } C_2 = (\Omega_i - \Omega_o) \frac{K^3 R^3}{1 - K^3}$$

$$V_\phi = \left[\frac{\Omega_o - \Omega_i K^3}{1 - K^3} r + (\Omega_i - \Omega_o) \frac{K^3 R^3}{1 - K^3} \frac{1}{r^2} \right] \sin \theta = \frac{KR}{1 - K^3} \left[(\Omega_o - \Omega_i K^3) \left(\frac{r}{KR} \right) + (\Omega_i - \Omega_o) \left(\frac{KR}{r} \right)^2 \right] \sin \theta$$

$$\Rightarrow V_\phi = \left[\frac{\Omega_o KR}{1 - K^3} \left(\frac{r}{KR} - \frac{K^2 R^2}{r^2} \right) + \Omega_i \frac{K^3 R^3}{1 - K^3} \left(\frac{R^2}{r^2} - \frac{r}{R} \right) \right] \sin \theta$$

تجزیه: طرف بسیار بزرگی را در نظر بگیریم. در یک لحظه کف طرف به یکباره برداشته می شود. خالی شدن آب از کف طرف را مدل کنید.



فرضیات: طرف بسیار بزرگ در نظر گرفته می شود. (با این فرض می توان از تغییرات در راستای x چشم پوشی کرد.)

In: $\rho \cdot x \cdot \delta \cdot x \cdot \bar{V}_z \Big|_z$

Out: $\rho \cdot x \cdot \delta \cdot x \cdot \bar{V}_z \Big|_{z+\delta z}$

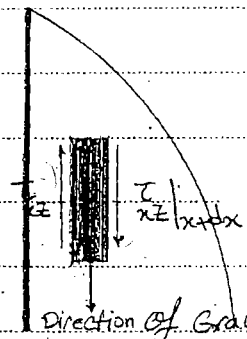
Accumulation: $\frac{d}{dt} (\rho \cdot x \cdot \delta \cdot dz \cdot x \cdot \delta)$



Input - Output = Accumulation

$\frac{d}{dz} [\delta \bar{V}_z] = - \frac{d\delta}{dt}$

باتوجه اصل بقا جرم (معادله پیوستگی) می توان نوشت:
 • ریزش تقریباً شیبینیم است و فشار داخل آن متغیرگ می باشد.
 * تنش در جهت حرکت سیال مثبت



$\tau_{xz} * dz * 1 \Big|_x$

$\tau_{xz} * dz * 1 \Big|_{x+dx}$

$\rho g dx * dz * 1$

$\sum F_z = 0 \Rightarrow \frac{d\tau_{xz}}{dx} = -\rho g \Rightarrow \tau_{xz} = -\rho g x + A$

باعاض کردن شرایط مرزی می توان نوشت:

B.C.1: at $x = \delta \Rightarrow \tau_{xz} = 0 \Rightarrow \tau_{xz} = \rho g (\delta - x)$

$\tau_{xz} = \mu \frac{dv_z}{dx}$; $\mu \frac{dv_z}{dx} = \rho g (\delta - x) \Rightarrow v_z = \frac{\rho g}{\mu} \left[\delta x - \frac{x^2}{2} \right] + B$

B.C.2: at $x = 0 \Rightarrow v_z = 0 \Rightarrow B = 0$ $\therefore v_z = \frac{\rho g}{\mu} \left[\delta x - \frac{x^2}{2} \right]$

$\bar{v}_z = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \frac{\rho g}{\mu} \left[\delta x - \frac{x^2}{2} \right] dx = \frac{\rho g \delta^2}{3\mu}$

$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z$

$\mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \rho g = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} = - \frac{\rho g}{\mu} x + B$

$x = \delta \rightarrow c = - \frac{\rho g}{\mu} \delta + B \rightarrow B = \frac{\rho g}{\mu} \delta$

$v_z = - \frac{\rho g}{2\mu} x^2 + \frac{\rho g}{\mu} \delta x + C_1$

$= \frac{\rho g}{\mu} \left(\delta x - \frac{x^2}{2} \right)$

با جایگزینی سرعت مایکین فرم دیفرانسیلی مدل این تیرین بدگلی زیر در می آید:

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{\rho g \delta^3}{3\mu} \right] = -\frac{d\delta}{dt} \Rightarrow \frac{d\delta}{dt} + \frac{\rho g}{\mu} \delta^2 \frac{d\delta}{dz} = 0$$

با توجه به فرم حادلا دیفرانسیلی برت آمده و نیز امکان استفاده از روش جدایی متغیرها Separation of variables می توان نوشت:

$$\delta(z,t) = Z(z) T(t)$$

$$\Rightarrow Z \frac{dT}{dt} + \frac{\rho g}{\mu} Z^2 T^2 \frac{dZ}{dz} = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{\rho g}{\mu} Z T^2 \frac{dZ}{dz} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T^3} \frac{dT}{dt} + \frac{\rho g}{\mu} Z \frac{dZ}{dz} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{B.C: } z=0 \Rightarrow \delta=0 \Rightarrow Z=0 \\ \text{I.C: } t=0 \Rightarrow \delta=\infty \Rightarrow T=\infty \end{array} \right.$$

زمانی که هنوز در سوال
بدانته شده است.

$$\frac{1}{T^3} \frac{dT}{dt} = -\frac{\rho g}{\mu} Z \frac{dZ}{dz} = \beta \quad ; \quad \beta = \pm \lambda^2, \quad \lambda: \text{eigen value}$$

β می تواند صفر مثبت یا منفی باشد که تنها علامت منفی آن پذیرفتنی است در حالت β < 0 می توان نوشت:

$$\frac{dT}{dt} + \lambda^2 T^3 = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dt} = -\lambda^2 T^3 \xrightarrow{\frac{dT}{T^3} = dt} \frac{1}{2} T^{-2} = \lambda^2 t + A$$

$$\text{I.C: } t=0 \Rightarrow T=\infty \Rightarrow e^A=0 \Rightarrow T = \sqrt{\frac{1}{2\lambda^2 t}}$$

اگر λ مثبت شود باید با استفاده از
شرایط مرزی باید تعیین شود.

$$\frac{\rho g}{\mu} Z \frac{dZ}{dz} = \lambda^2 \Rightarrow \frac{\rho g}{\mu} Z dZ = \lambda^2 dz \Rightarrow \frac{\rho g}{\mu} Z^2 = \lambda^2 z + B$$

$$\text{B.C: } z=0 \Rightarrow Z=0 \Rightarrow B=0 \Rightarrow Z = \sqrt{\frac{2\mu\lambda^2 z}{\rho g}}$$

$$\Rightarrow \delta = Z(z) T(t) = \sqrt{\frac{\mu z}{\rho g t}}$$

می توان بدون در دست داشتن λ² = β = ... را در هر جوابی جایگزین کرد.

Subject:

Year:

Month:

Date:

()

$$W = \rho \bar{v} A$$

سرعت متوسط

$$dW = \rho v dA$$

سرعت

$$dW = \rho v r dr d\theta \rightarrow W = \int_0^{2\pi} \int_R^{aR} \rho v r dr d\theta = 2\pi \rho \int_a^{aR} v r dr$$

$$\epsilon = \frac{r}{R} \rightarrow d\epsilon = \frac{dr}{R} \quad \frac{\epsilon}{R} \quad \frac{1}{R} \quad a \quad aR$$

$$W = 2\pi R \rho \int_1^a \frac{\rho g R^2}{4\mu} [1 - \epsilon^2 + 2a^2 \ln \epsilon] \epsilon d\epsilon$$

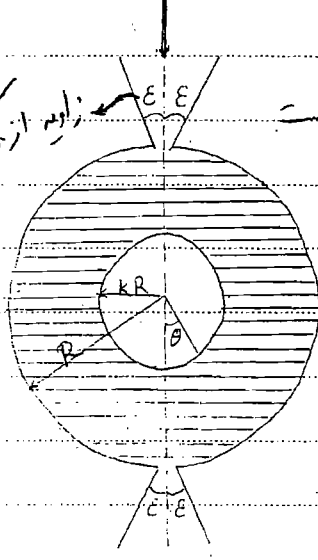
$$W = \frac{\pi \rho^2 g R^4}{2\mu} \left(\frac{1}{2} \epsilon^2 - \frac{1}{4} \epsilon^4 + 2a^2 \left[-\frac{1}{4} \epsilon^2 + \frac{1}{2} \epsilon \ln \epsilon \right] \right) \Big|_1^a$$

$$W = \frac{\pi \rho^2 g R^4}{8\mu} (4a^2 - 3a^4 + 4a^2 \ln a - 1)$$

چرا در حل این مایل از پیوستگی استفاده کردیم؟

(۱۲) جریان عرضی سیال تراکم ناپذیر (در اثر اختلاف فشار) بین دو کره هم مرکز مطابق شکل موجود دارد. دبی حجمی سیال را بدست آورید.

Fluid Flow, in



• در جریان عرضی، سرعت سیال به یکدیگر است. رهی توان

از نرم $\frac{1}{r^2}$ فرض می‌کنیم. عدد رینولدز او همگی دارد. جریان منلی و سلولوز است. حل: با نوشتن معادله پیوستگی نتیجه می‌شود: بنابراین $\rho g \theta$ وجود ندارد.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial v}{\partial r}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (r v \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (r v \frac{\partial v}{\partial \phi}) = 0$$

$$\Rightarrow \rho v \sin \theta = c t e \Rightarrow v \theta = f(r) \neq g(\theta)$$

دلیل تار تاج \neq م نه باشد $\rightarrow v \theta \sin \theta = c t e = f(r) \neq g(\theta)$

با در نظر گرفتن معادله حرکت در راستای θ می‌توان نوشت:

Fluid Flow, out

$v \theta$ تابع θ است

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r} (v \theta \sin \theta)) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin \theta \frac{\partial v \theta}{\partial \theta}] - \frac{v \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right]$$

برای حذف کردن از معادله پیوستگی کمک می‌گیریم. با توجه به اینکه $v \theta$ تنها تابع r می‌باشد، می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{f(r)}{\sin \theta} \right) \right] = \frac{f(r)}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \left[\frac{1}{\sin \theta} \right] \right] = \frac{f(r)}{r^2 \sin^2 \theta} = \frac{v \theta}{r^2 \sin^2 \theta}$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial v \theta \sin \theta}{\partial r} \right] \right] \Rightarrow \sin \theta \frac{\partial p}{\partial \theta} = \mu \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right] = B$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{B}{\sin \theta} \Rightarrow dp = B \ln \tan \frac{\theta}{2} + c \Rightarrow dp = B \ln \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} + c$$

$$\cos \theta = \cos(-\theta) \quad \& \quad \cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta)$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta p = -B \ln \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} = -B E(\theta)$$

$v \theta$ و $\frac{\partial v \theta}{\partial r}$ این است. $\frac{\partial v \theta}{\partial r}$ این است. $\frac{\partial v \theta}{\partial r}$ این است.

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right) = \frac{B r}{\mu} \Rightarrow \frac{\partial f(r)}{\partial r} = \frac{B}{2\mu} + \frac{A}{r^2}$$

$$\theta = \pm \epsilon \quad \Delta p = 0 \\ \theta = R \pm \epsilon \quad \Delta p = \Delta p$$

$v_r = 0$ و $v_z = 0$

حل تمرین 13:

معادله پیوستگی: $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$

از روی تناظر همی تراستیم: این دو معادله را نسبت به θ میگیریم

معادله حرکت در راستای θ : $0 = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right] + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}$

B.C.1: at $z=0$ and any r : $v_\theta = 0$

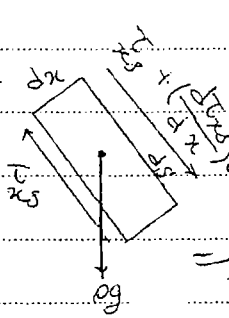
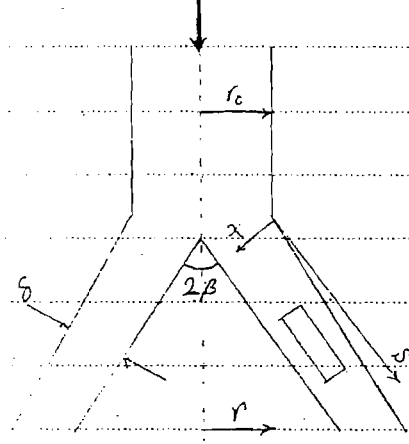
B.C.2: at $z=l$ and any r : $v_\theta = r\omega \rightarrow v_\theta = r\omega \frac{z}{l}$

از این شرایط می توانیم حدس بزنیم که جواب v_θ به صورت $v_\theta = r f(z)$ خواهد بود.

Based on B.C.2: $v_\theta(r, z) = r f(z)$
 $\Rightarrow \frac{d^2 f}{dz^2} = 0 \Rightarrow \frac{df}{dz} = C_1 \Rightarrow f(z) = C_1 z + C_2 \Rightarrow v_\theta = \frac{r\omega z}{l}$

تمرین (14): حتی از سیال بر روی یک مخروط (برای شکل) جاری می شود. ضخامت لایه فیلم بر روی مخروط را تعیین نمایید.

Fluid Flow (V_0)



لا به موازات مخروط در راستای x که برای فیلم متوسط کشنده نوشته می شود.
 سرعت در راستای x که V_s فرض می شود.
 وقتی x زیاد می شود سرعت کم می شود پس یکسره نسبی منجر خواهد بود.

حجم جری نیروهای روی لایه سیال: $0 = \rho g \delta \cos \beta \frac{d}{dx} \left(\frac{\tau}{\cos \beta} \right)$

$\Rightarrow \tau_{xs} = \rho g x \cos \beta + A$ B.C.1: at $x=0 \Rightarrow \tau_{xs} = 0 \Rightarrow \tau_{xs} = \mu \frac{dV_s}{dx} = \rho g x \cos \beta$

$\Rightarrow V_s = -\frac{\rho g x^2 \cos \beta}{2\mu} + B$ B.C.2: at $x=\delta \Rightarrow V_s = 0 \Rightarrow V_s = \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right]$

$\Rightarrow \bar{V}_s = \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{3\mu}$ در هر مقطع از طول سیال پیش از برخورد آن با مخروط نوشته می شود.

دبی جری سیال پس از برخورد آن با مخروط: $\dot{m} = \rho V_0 \pi r_0^2$

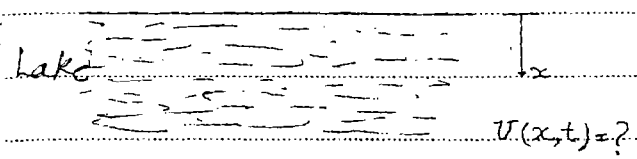
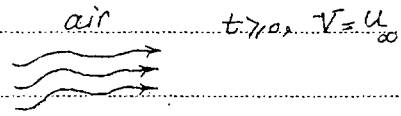
دبی جری سیال پس از برخورد آن با مخروط: $\dot{m} = \rho \bar{V}_s \cdot 2\pi r \delta$

$\rho V_0 \pi r_0^2 = \rho \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{3\mu} 2\pi r \delta \sin \beta \Rightarrow \delta = \sqrt[3]{\frac{3\mu r_0^2 V_0^2}{\rho g \delta \sin 2\beta}}$

Subject:

Year. 87 Month. 7 Date. 28/10

یک سوال در زمینه

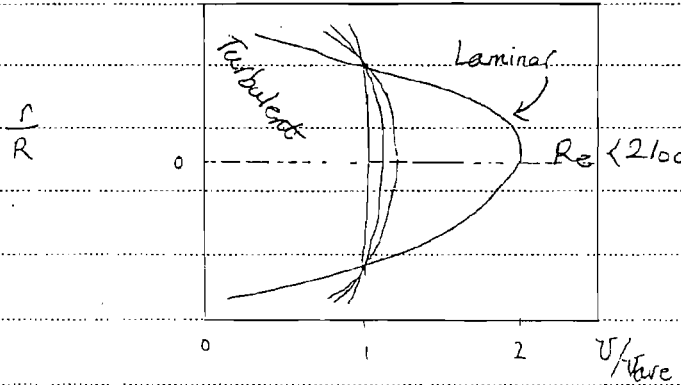


quiz

Scale up or Dimensional Analysis

با برقراری تعادلهای و برابری اعداد بدون بعد حاکم، توزیع سرعت، فشار و دما برای نمونه اصلی و مدل یکسان خواهد شد و می توان Scale up انجام داد.

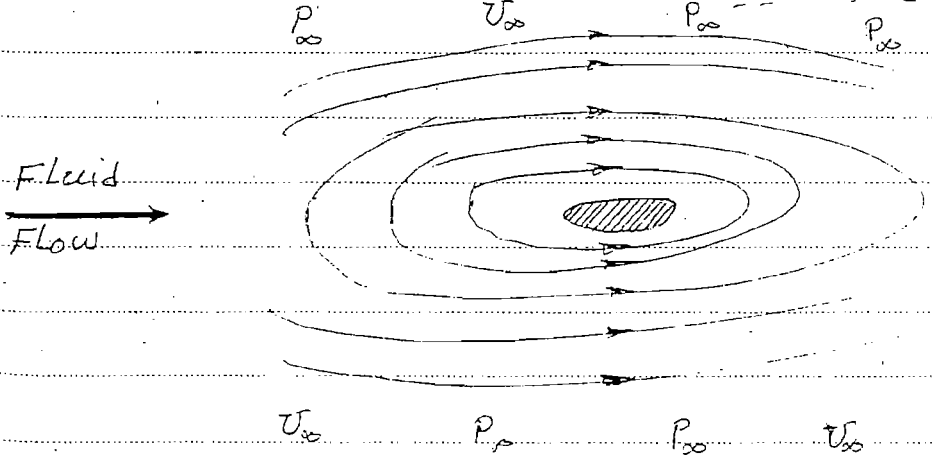
به عنوان مثال، برای جریان در یک لوله افقی که در آن طول مشخص، قطر لوله و سرعت مشخص است می گوییم می باشد، با بدون بعد کردن فاصله از مرکز لوله $(\frac{r}{R})$ ، توزیع سرعت $\frac{u}{U_{ave}}$ مستقل از قطر لوله می شود.



معادلات حرکت Navier-Stokes برای سیستم فرجیدی و در راستای x بصورت ذیل می توان نوشت:

$$\rho \left[\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right]$$

در حرکت نی سیال و جسی به طول مشخص با (نسبت به سیستم می تواند طرازی پیدا، بلندی، قطر و ... باشد) می توان گفت های سیستم را که از جنس درازا باشند بدون بعد شود. همچنین از مقادیر مشخص سرعت و فشار و ... می توان برای بدون بعد سازی سایر کمیت های فیزیکی استفاده کرد.



همگنی‌های موجودی توانمند بصورت بدون بعد نوشته شوند.

$$u'_x = \frac{u_x}{U_\infty} ; v'_y = \frac{v_y}{U_\infty} ; \rho' = \frac{\rho}{\rho_\infty}$$

$$x' = \frac{x}{L} ; y' = \frac{y}{L} ; t' = \frac{t}{\tau}$$

در این روابط ρ_∞ و U_∞ به ترتیب فشار و سرعت سیال در نقاط بیار دور از جسم و سرعت سیال بی‌انداختن در این زمان صفحه سیستم باشد.

ا ضربه بدون معادله Navier-Stokes در عبارت $\frac{L}{\rho U_\infty^2}$ می توان نوشت:

$$\frac{L}{\rho U_\infty^2} \left[\frac{\partial u'_x}{\partial t'} + u'_x \frac{\partial u'_x}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial u'_x}{\partial y'} \right] = \frac{Eu}{\rho U_\infty^2} \frac{\partial \rho'}{\partial x'} + \frac{1}{Fr} \frac{Lg}{U_\infty^2} \frac{\partial \rho'}{\partial x'} + \frac{1}{Re} \frac{\mu}{\rho L U_\infty} \left[\frac{\partial^2 u'_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'_x}{\partial y'^2} \right]$$

ضرایب بدون آینه در این شکل از معادله اعداد بدون بعد می آیند و هر یک است در بررسی خاص را بیان

$\frac{L}{\rho U_\infty^2}$ Strouhal Number: St Euler Number: NE $\frac{P}{\rho U_\infty^2}$	حرکت سیال هم‌رسان unsteady امپلفشار	$\frac{U_\infty^2}{gL}$ Froude Number: N_F $\frac{\rho L U_\infty}{\mu}$ Reynold Number: NR	ناپایداری و سطح آزاد سیال اثری سیال اثری ویلزورته
---	---	--	---

هر یک از این اعداد بدون بعد به یکی در تغییر جریان سیال نقش ایفا می کنند.

بعضی از این اعداد خاص ارباب شکل های دیگر استفاده می شوند اما از آنجایی که ما اینجا برای در سیستم مورد نظر است این تفاوت کلن بر ما بیخوری در حسابات ندارد مثلا

$$Fr = \frac{U_\infty}{\sqrt{gL}} ; Eu = \frac{\sqrt{1/2 \rho U_\infty^2}}{\rho}$$

تجزیه (1) یک مدل هواپیما در داخل تونل هوا مورد آزمایش قرار گرفته است. نمونه پیکار Prototype (آنتن) ستار

مدل (Pm) را حساب کنید $P_p = 14.7 \text{ Psia}$ و $T_m = T_p = 60 \text{ F}$ و $\frac{L_p}{L_m} = 20$ و $U_m = U_p = 100 \text{ mph}$

زفون: ویلزورته نقطه شایع ما بیشتر چون نیروی دارد شش به مدل، نیروی درون است و سیال وصل را در پیکار است. جایی برای فرود با این هم باشد.

$$\frac{NR_m}{NR_p} = \frac{\rho_m L_m U_m}{\mu_m} = \frac{\rho_p L_p U_p}{\mu_p} \Rightarrow \rho_m L_m = \rho_p L_p$$

$$\frac{P}{\rho} = RT = cte \Rightarrow \frac{P_m}{\rho_m} = \frac{P_p}{\rho_p} \Rightarrow \frac{P_m}{P_p} = \frac{L_p}{L_m} \Rightarrow P_m = P_p * \frac{L_p}{L_m} = 14.7 * 20$$

$$\Rightarrow P_m = 294 \text{ Psia}$$

Subject:

Year. 87 Month. 7 Date. 23 (9)

تمرین ۱۳: اگر در ترمین ۱ بجای هوا در داخل ترمین ۲ Fecon = 12 در دما ۱۵۵ F استفاده شود، در آن صورت فشار

نمود (Pm) را حساب کنید.

$$\mu_m = 2.5 \times 10^{-7} \text{ lbps} \quad \mu_p = 3.75 \times 10^{-7} \text{ lbps}$$

$$R_m = 12.8 \text{ and } R_p = 53.3 \text{ Psia } \frac{\text{ft}^3}{\text{lbm} \cdot \text{R}}$$

حل: در این حالت برای برقراری شباهت و بکارگیری اصول افزایش مقیاس، باید برای دو عدد بدون بعد بسیار ظریف
هرگز در ترمین ۱ اعداد لویز مثل و prototype یکسان است و برابر آنرا لکن هر چقدر با هم می کنند اگر در ترمین ۱

از حالت استقرایی هر دو در هر دو ترمین گاز ایده آل در بریم.

$$N_{Eu}^m = N_{Eu}^p \Rightarrow \left[\frac{P}{\rho U^2} \right]_m = \left[\frac{P}{\rho U^2} \right]_p \Rightarrow \left[\frac{RT}{U^2} \right]_m = \left[\frac{RT}{U^2} \right]_p$$

$$\Rightarrow U_m = U_p \sqrt{\frac{R_m T_m}{R_p T_p}} = 100 + \sqrt{\frac{12.8 \times 560}{53.3 \times 520}} = 51 \text{ mph}$$

$$N_{Re}^m = N_{Re}^p \Rightarrow \left[\frac{\rho U L}{\mu} \right]_m = \left[\frac{\rho U L}{\mu} \right]_p \Rightarrow \left[\frac{P U L}{\mu R T} \right]_m = \left[\frac{P U L}{\mu R T} \right]_p$$

$$P_m = P_p \frac{R_m T_m \mu_m U_p L_p}{R_p T_p \mu_p U_m L_m} = 102 \text{ Psia}$$

هدف بخش: دانشجو باید بتواند:

- (۱) نیروهای وارده بر جسم سختی را که در سیر جریان مایع قرار دارد بشناسد.
- (۲) تأثیر متقابل جسم سخت و مایع ناشی از حرکت نسبی جسم و مایع را تعیین دهد.
- (۳) نیروهای درگ، لیفت و تأثیر حرکت را بر نیروی اجسام بشناسد.

▣ حرکت مایع بر روی اجسام:

آزمایش‌های تجربی نشان داده است که در حرکت مایع از روی اجسام نیروهای فشار و ویسکوزیته تعیین کننده می باشند. ویسکوزیته جاذبه تأثیر بیشتری بر نیروی حرکت مایع دارد. بدین معنی عدت اعداد رینولدز و اولفر در سواری که مایع به صورت کامل اطراف جسم را احاطه کرده باشد (حرکت خرابی مانند هواپیما و حرکت آتومبیل و راکت) حائز اهمیت می باشند.

$$N_R = \frac{\text{Inertia}}{\text{Viscous}} \quad N_E = \frac{\text{Pressure}}{\text{Inertia}}$$

در حالت عمود نوردید معمولاً در سواری که سطح آن زاویه مایل محدود نمی باشد (کمان‌های باز، همین‌ها و حرکت تانک‌ها و کشتی‌ها) تعیین کننده است.

$$N_F = \frac{\text{Inertia}}{\text{Gravity}}$$

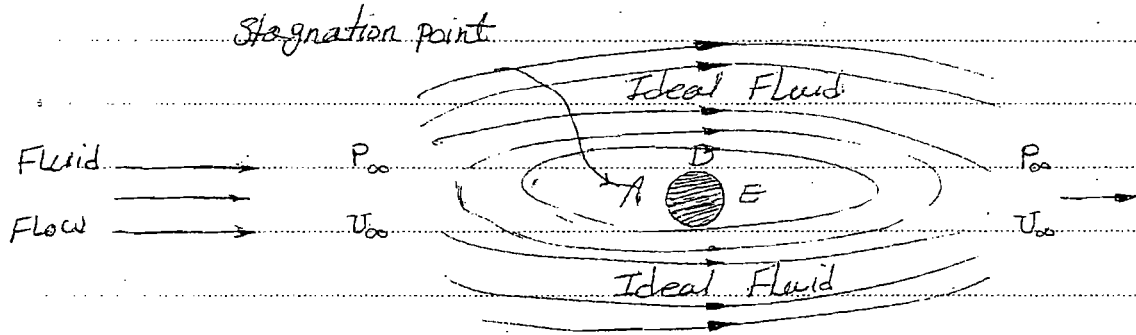
در حالت جهت حرکت مس

نیروی درآگ: نیروی وارد شده از طرف سیال واقعی به جسم در راستای حرکت نمی چم و سیال را نیروی درآگ می نامند.

$$F_{drag} = F_D + F_B \quad ; \quad F_D = \frac{1}{2} C_D \rho U_{\infty}^2 A$$

Friction Pressure

ضریب درآگ (C_D) تابعی از Re و نسبت عدد اولری باشد.



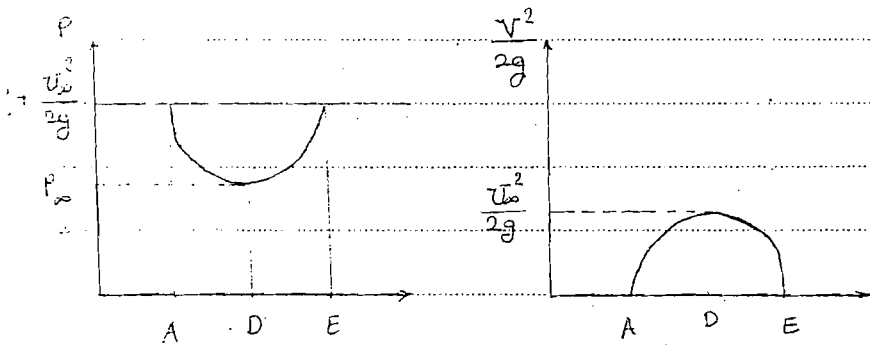
* از آنجا که سرعت در نقطه A صفر است، فشار به بیشینه میزان خود می رسد. در این حالت با حرکت سیال در امتداد جسم (به سمت بالا یا پایین) انرژی فشاری به انرژی جنبشی تبدیل می شود.

* خطوط جریان، خطوط فشار روی جسم متعام هستند (چون انرژی تلف نمی شود).

* در نقطه D فشار کمینه در سرعت بیشینه می شود. در این حالت، سیال در پشت جسم شروع به حرکت می کند. در امتداد عمقی جسم، جریان می یابد. هرچه سیال به نقطه E نزدیک تر باشد، سرعت کمتر و فشار بیشتر می شود.

* در نقطه E دوباره سرعت صفر و فشار بیشینه می شود.

نکته: مطابق تئوری برای سیال ایده آل ($\mu = 0$) صادق می باشد.
 توزیع انرژی های فشاری و جنبشی



* در حالت سیال ایده آل (غیر چسبناک) اتلاف انرژی وجود ندارد. جابجاری دیگر تمام انرژی فشاری در نقطه A به انرژی جنبشی در نقطه D تبدیل می شود. بنابراین در نقطه D سرعت سیالی باشد.

با ترتیب تمام لیزری هتشی در نقطه D به لیزری فشاری در نقطه E تبدیل می شود و سرعت در نقطه E صفر می شود. در این توزیع فشار و سرعت در هر طرف جسم تقریباً است (خطوط جریان) تقریباً می باشد) بد علت نبود نیروی تنش (A=0) حالت تنها نیروی عمل کننده نیروی فشاری می باشد که آن هم بصورت متقارن بر جسم وارد می شود. در این حالت نیروی درآگ وجود ندارد. بد عبارت دیگر برای سیال غیر ویسکوز (غیر لزج) نیروی درآگ منفی باشد و عمل چسبندگی بریده ای رخ نمی دهد. (A ≠ 0).

روی لایه: هرگاه جسمی درون یک سیال واتی قرار گیرد، در صورت وجود حرکت نسبی بین جسم و سیال، از طرف نیروی درآگ بر جسم در خلاف جهت حرکت نسبی وارد می شود. در این صورت توزیع فشار و سرعت در دو طرف جسم نمی باشد.

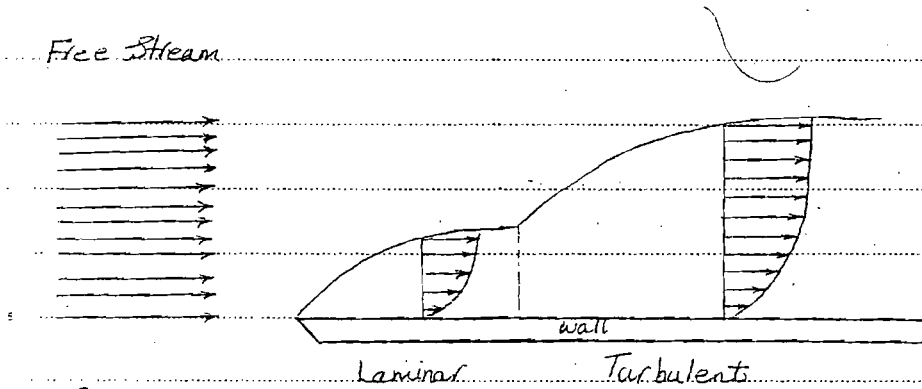
روی وارد شده بر جسم در جهت عمود بر راستای حرکت نسبی جسم و سیال و نیروی لیفت می باشد:

$$F_L = \frac{1}{2} C_L \rho U_{\infty}^2 A$$

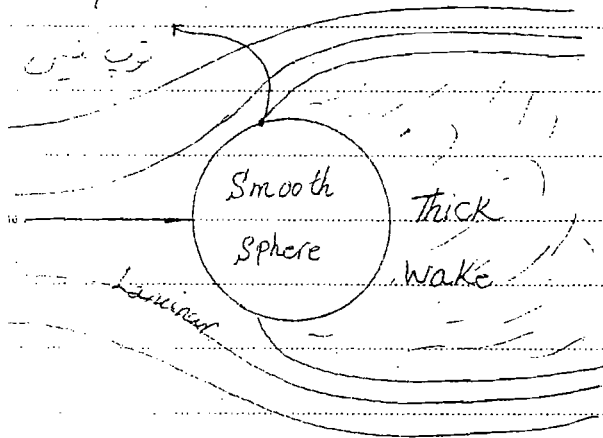
معمولاً C_L بصورت تابعی از Re در منحنیهای Lift & Drag Coefficient ارائه می شود. گمانه های رویاروی زمانیکه سرعت نسبی در حدود سرعت صوت باشد، ضرایب مربوطه تابعی از اعداد فرود (N_F) ماخ (M) نیز می باشد.

طراحی اجسام متحرک توجه به مقادیر نیروهای درآگ و لیفت از اهمیت زیادی برخوردار است. بت های این نیروها برای Model و Prototype با استفاده از نسبت مشابه و برابری اعداد بدون بعد قابل مقایسه می باشد.

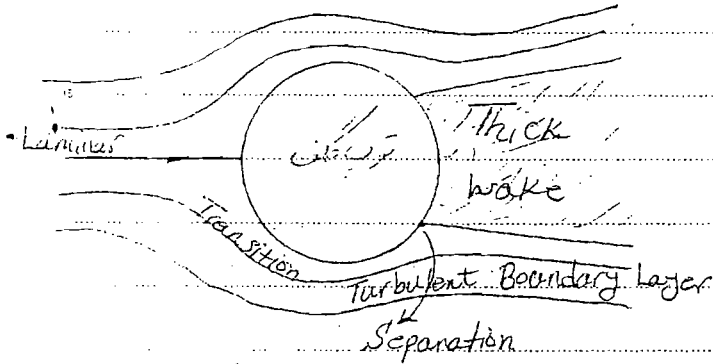
Free Stream



Separation

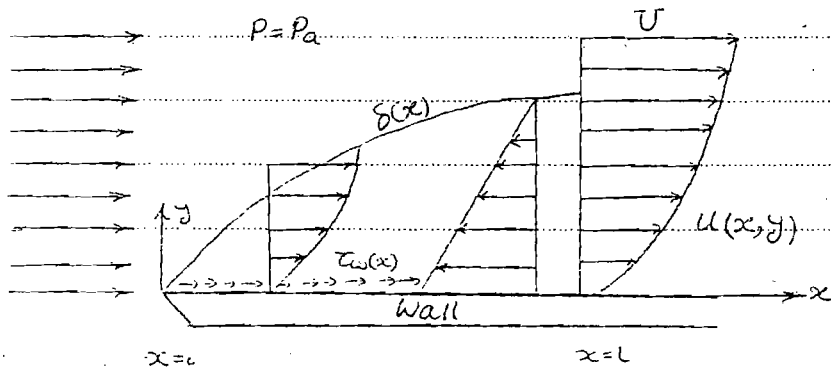


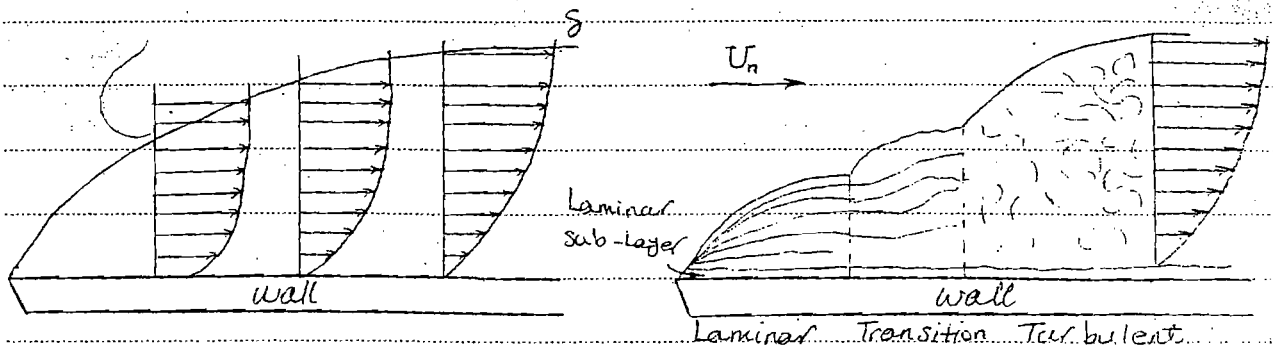
* در این حالت خطوط جریان به هم می‌رسند.
* توربین



* در این حالت به هم نمی‌رسند.
* توربین

لايه مرزى: همانطورى كه در بخش هاى پيشين نيز گفته شد، در اثر مقاومت سيال (ويكونيت) در ناحيه اى نزديك جسم سخت در داخل سيال، كمانه با لام لايه مرزى شالته مى شود و توزيع سرعت بوجود مى آيد.

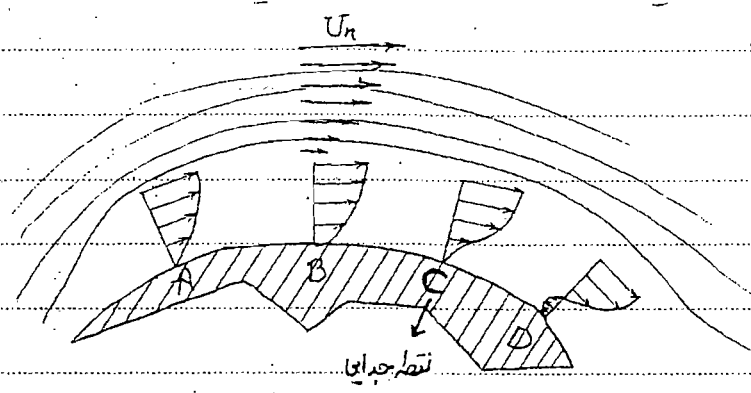




* در لایه مرزی تأثیر نیروی تنش قابل ملاحظه است و توزیع سرعت مشاهده شده نیز به همین علت می باشد اما در خارج از این لایه نیروی تنش تأثیر قابل توجهی بر جریان سیال ندارد لذا میزان سرعت در این ناحیه حاصل میزان سرعت قبل از گن گیری لایه مرزی می باشد.

- ✓ ضخامت لایه مرزی در امتداد صفحه افزایش می یابد.
- ✓ در امتداد صفحه لایه مرزی از حالت آرام به حالت آشفتگی انتقال می یابد.
- ✓ سرعت در امتداد صفحه تأیج می شود.
- ✓ سیستم در جری است.

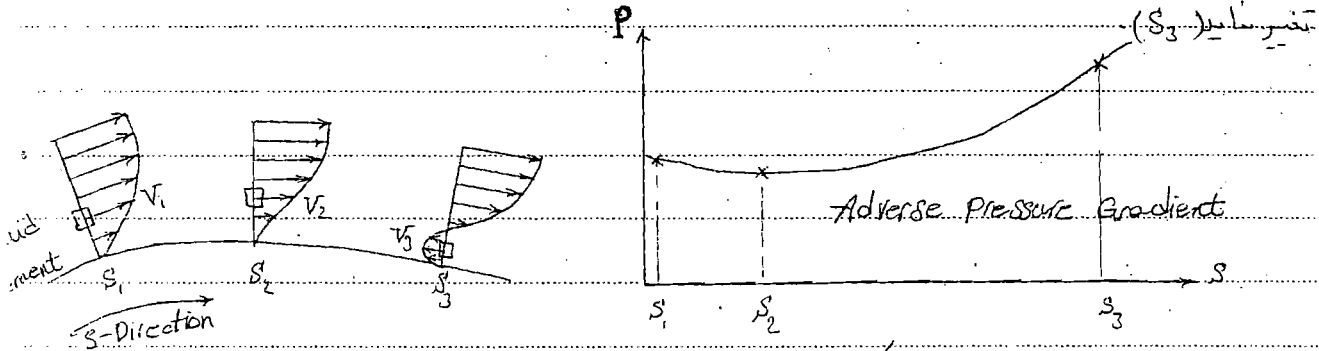
* حرکت سیال بر روی جسم سخت از نقطه A تقریباً بدون اصطکاک است اما در ادامه مسیر لایه مرزی شکل می گیرد.
 * با علت وجود نیروی تنش (اصطکاک) بخشی از انرژی سیال در طول مسیر طی A-B و C-B تحلیل می رود در نتیجه انرژی سیال برای رسیدن به نقطه D کافی نمی باشد و به همین علت سیال در نقطه ای در طول مسیر حرکت A-D نقطه C را از جسم عبور می شود این نقطه را نقطه جدایی می نامند.



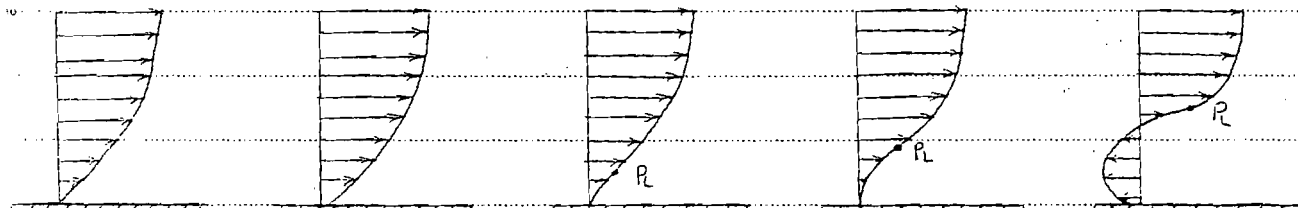
Subject :

Year: 87 Month: 7 Date: 30/11/11

هناك نظريه ان شامه ن شود، كاهش از رشي جيتن ميل در جهت حركت بد علت بيروي، تنشي و افزايش ميزان فشار و در جهت مخالف حركت بد علت انحنا سطح (كه از بيرون لايه مرزي وارد مي شود) موجب مي شود كه بعد از نقطه جدي (R) جهت جريان



در لايه مرزي بر علت تنفات، از رشي كه كم مي شود



گردايان مطلوب	گردايان مضر	گردايان ناهمگون	گردايان همگون جبراني	گردايان همگون افلاني
$\frac{du}{dx} > 0$	$\frac{du}{dx} = 0$	$\frac{du}{dx} < 0$	ضعيف	جريان بزرگي در كنار
$\frac{dp}{dx} < 0$	$\frac{dp}{dx} = 0$	$\frac{dp}{dx} > 0$	آغاز جرابي	بيطوره

نقطه جريان وجود دارد نقطه جريان وجود ندارد نقطه جريان وجود ندارد جريان بارزيم جبرانه

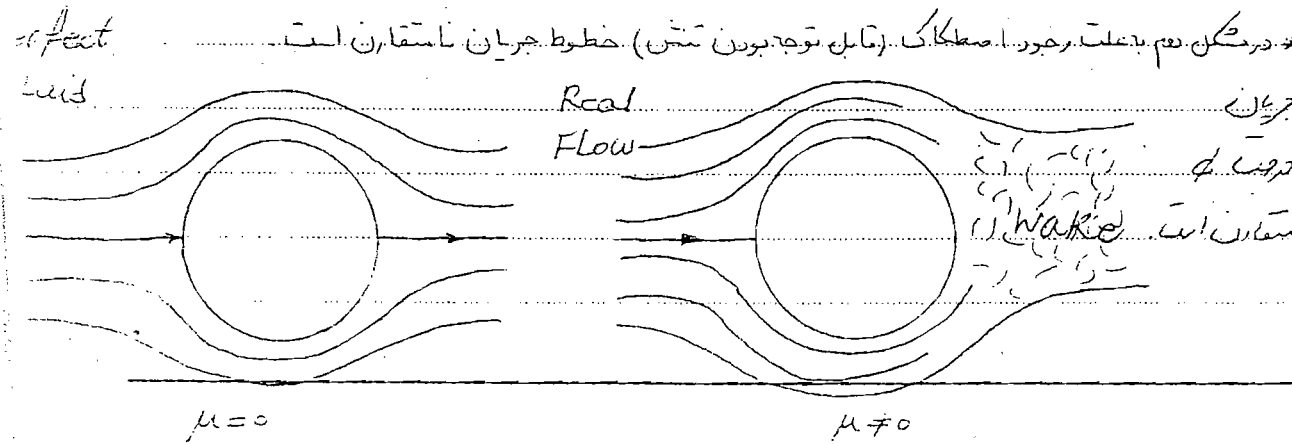
نقطه عطف درون نقطه عطف روي ديواره نقطه عطف در جريان نقطه عطف روي ديواره

Point of inflection

در دو شكل زير، تقابل ميل ايده آل و ميل واقعي نشان داده شده است.

در شكل اول، به علت تراشيدن اصطكاك (با همزبون شدن) خطوط جريان متقارن مي باشند.

در شكل دوم، به علت وجود اصطكاك (قابل توجه بودن تنشي) خطوط جريان نامتقارن است.



Subject:

Year: 87 Month: 7 Date: 30 (11)

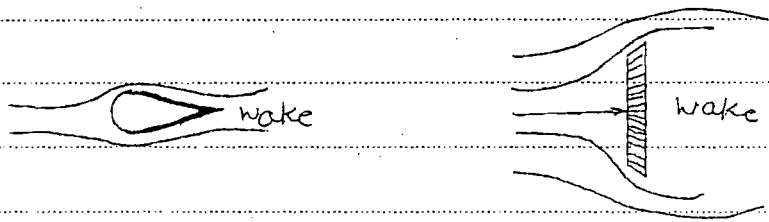
نیروی دراز: به علت وجود نیروی تنش، تقارن توزیع های فشار و سرعت در اطراف جسم بر هم می خورد و گاه در نتیجه آن بر جسم نیرویی در راستای حرکت نبی جسم و سیال وارد می شود. بخشی از این نیرو که به علت نامتوازن بودن توزیع فشار بر جسم وارد می شود Pressure Drag نامیده می شود.

* از سوی دیگر به علت وجود نیروی تنش (و توزیع سرعت) بخش دیگری از این نیرو بر جسم وارد می شود که

$$\text{Friction Drag} \text{ نامیده می شود. } \text{Drag} = \text{Friction Drag} + \text{Pressure Drag}$$

* راستای این نیرو به گونه ای است که با حرکت نبی جسم و سیال مقابله می کند، در این حالت در نقاط عقبی جسم

چرخه هایی از سیال به وجود می آید که Wake نامیده می شوند.



مانند پوری که اشاره شد، در بررسی حرکت نبی جسم و سیال اعداد N_E و N_R اهمیت دارند.

$$N_E = \frac{P}{\rho U^2} ; P = \frac{F_D}{A}$$

در این روابط A مساحت تصویری شده در راستای عمود بر جریان است که برای استوانه و کره عبارت است از:

Cylinder: $A = L * D$ & Sphere: $A = \frac{\pi}{4} D^2$; $N_E = \frac{F_D}{\rho U^2 A} = \frac{1}{2} C_D$

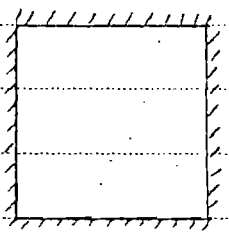
$C_D = \text{Drag Coefficient}$, $C_D = f(N_R)$

یونید تغییرات C_D بر حسب N_R برای یک کره و زنجاری نزدیک است.

یونید تغییرات C_D بر حسب N_R برای یک استوانه نیز به همین شکل می باشد و تنها تفاوت در این است که مقدار C_D برای

استوانه تقریباً نصف مقدار آن برای کره می باشد.

کمترین توزیع سرعت بیرون بعد از در یک کانال مستطیل شکل بدین آید:



* No Slip Flow

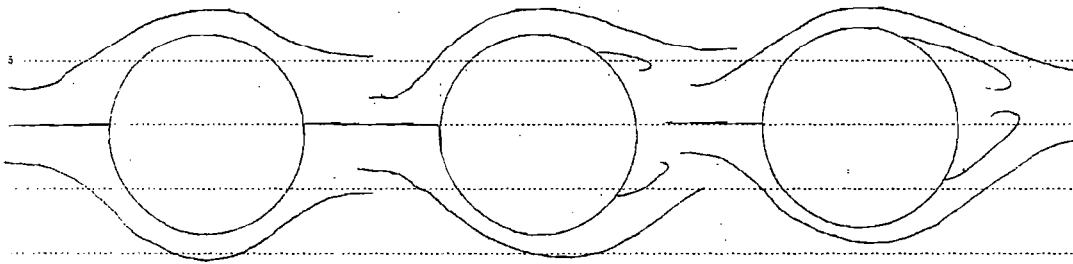
* Fully Developed

PAPCO

نسبت نیروهای اینت و در در نسبت ابعاد بهتر نه شکل دارد $\frac{F_D}{F_L} = \frac{C_D}{C_L}$

تغییرات نیروی درآگ با N_{Re}

تغییرات نیروی درآگ و میزان Wake شکل شده در پشت جسم با عدد رینولدز ارتباط دارد.
در انتقال آرام بدنه با افزایش عدد رینولدز، Wake کم می شود و کاهش C_D



$Re < 10.5$

$Re: 2 \text{ to } 30$

$Re: 40 \text{ to } 70$

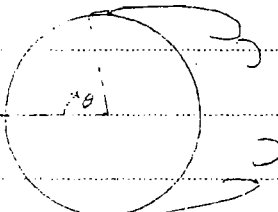
در این دکل تغییر انتقال از حالت آرام بحالت آشفته می شود.

$\theta = 22^\circ$

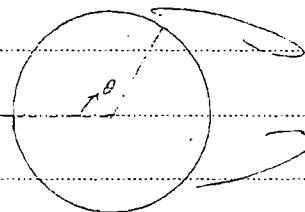
Separation

$\theta = 120^\circ$

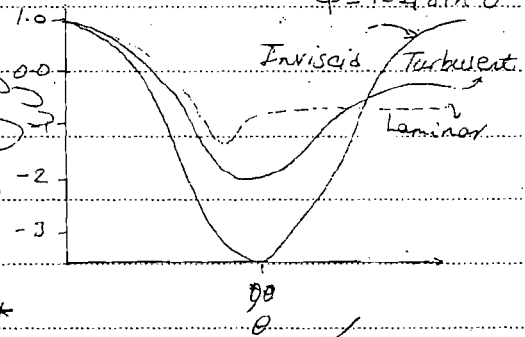
$C_p = 1 - 4.8 \sin^2 \theta$



$C_D = 1.2$

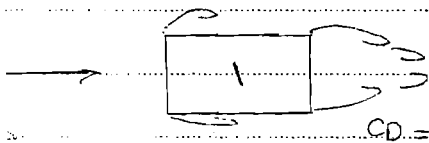


$C_D = 0.3$

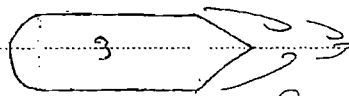


* هر چه C_p کمتر، نقطه جدایی دیرتر اتفاق می افتد

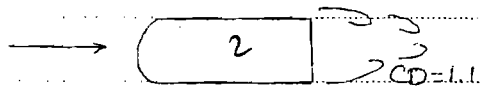
تغییرات نیروی درآگ با شکل هندسی اجسام، اجسام با شکل های مختلف، ضرایب درآگ متفاوت دارند.



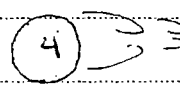
$C_D = 2.0$



$C_D = 0.15$



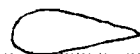
$C_D = 1.1$



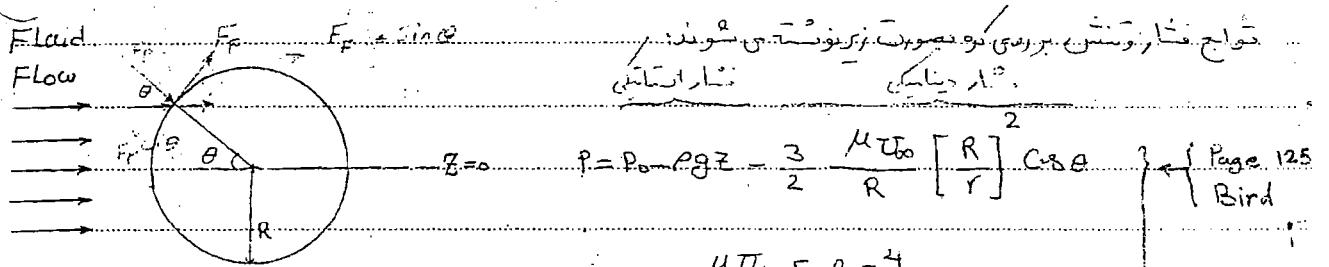
$C_D = 0.58$

با ایجاد نیم دایره در انتها، C_p تقریباً نصف

* کمتر C_p مربوط به شکل زیر است (در آزمون C_p اندازه گیری است)



جریان خزشی - در صورت سیال کم باشد به نحوی که سیال در جسم را لمس کند آن گاه جریان خزشی است
قانون استاکس (Stokes Law) حرکت خزشی سیال بر روی گویها ($Re < 0.1$) را بیان می کند



تغییرات تنش

$$\tau_{\theta} = \frac{3}{2} \frac{\mu U_{\infty}}{R} \left[\frac{R}{r} \right]^4 \sin \theta$$

* عبارت $(p_0 - \rho g z)$ در دو سمت گوی در حالی که جریان نمی آید، برابر است.

* در سطح گوی ($r=R$) می توان نوشت: $F_D = F_p$ \Rightarrow $F_D = F_p$

$$F_D = \frac{3}{2} \frac{\mu U_{\infty}}{R} C_D \theta$$

* در سطح گوی $(r=R)$ می توان نوشت: $F_D = F_p$ \Rightarrow $F_D = F_p$

$$\tau_{\theta} = \frac{3}{2} \frac{\mu U_{\infty}}{R} \sin \theta$$

* برای آن سطح گوی $dA = R^2 \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\phi$ \Rightarrow $dA = R^2 \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\phi$

$F_D = F_p + F_p$

$$\Rightarrow F_p = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[\left(-\frac{3}{2} \frac{\mu U_{\infty}}{R} \cos \theta \right) \cos \theta \right] R^2 \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\phi$$

بردار سطح بر سمت بیرون و بردار فشار بر سمت داخل است
علایق منفی به علت اختلاف راستای بردار سطح و بردار فشاری باشد \Rightarrow چرا؟

$F_p = \pi A C_D U_{\infty}^2$ \Rightarrow $F_p = \pi A C_D U_{\infty}^2$

$F_p = 2\pi \mu R U_{\infty}$

$$F_p = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[\left(\frac{3}{2} \frac{\mu U_{\infty}}{R} \sin \theta \right) \sin \theta \right] R^2 \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\phi$$

$F_p = 4\pi \mu R U_{\infty} \Rightarrow F_D = 6\pi \mu R U_{\infty} = 3\pi \mu D U_{\infty}$

$F_D = \frac{1}{2} C_D \rho U_{\infty}^2 \cdot \pi R^2 \Rightarrow C_D = \frac{24}{Re}$ in which $Re = \frac{\rho U_{\infty} D}{\mu}$

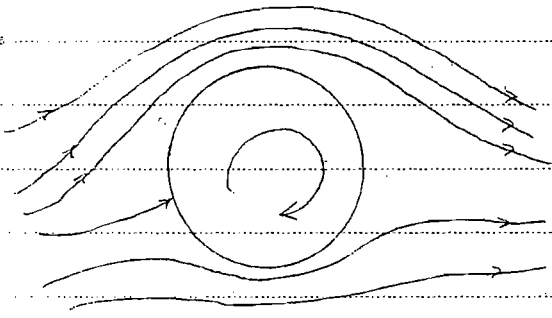
* مختصات بیضی \Rightarrow $x = a r \sin \theta \cos \phi$
 $y = b r \sin \theta \sin \phi$
 $z = c r \cos \theta$

$dA = abc r^2 \sin \theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\phi$

PAPCO $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = r^2$

نیروی لیفت

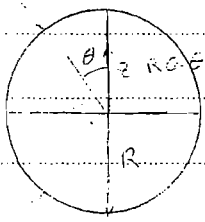
به علت استقرار بودن توزیع های فشار و سرعت در اطراف جسم و اعمال فشار بیشتر است پایین بر جسم نیروی در راستای عمود بر حرکت نمی چم و نیال واروی شود این نیرو در حقیقت است که با پایین آسین جسم قابلی کند



* حرکت نسبی جسم و سیال منفرست
پای جسم سیال

$$P = P_0 - \rho g z \quad , \quad P = P_0 - \rho g R \cos \theta$$

where: Gravity force is $\rho g R \cos \theta$



$$F_L = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (P_0 - \rho g R \cos \theta) \cos \theta R^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

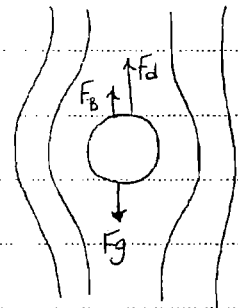
$$\Rightarrow F_L = P_0 \pi R^2 + \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g$$

سیال

نکته: همانطور که مشاهده می کنید در حالتی که جسم در سیال دارای حرکت نسبی باشند، نیروی Lift همان نیروی دریایی می باشد

* تکلیف: نیروی لیفت را در شرایط جریان معاند بنویسید

حرکت نسی جسم در سیال و نیروی وارده بر جسم از طرف سیال
 ترمینال یا پایدار گیری اصول مکانیک سیالات و کوزینت سیالی را که در کولود در درون آن با سرعت ثابت در سطح
 می کند تعیین کند



حل: زمین می شود که بگوید با سرعت ثابت (\$V_t\$; Terminal Velocity) است
 این حرکت کند در سرعت ثابت موازنه نیروها بصورت زیر در می آید:

$$\text{Weight} = \text{Buoyant} + \text{Drag}$$

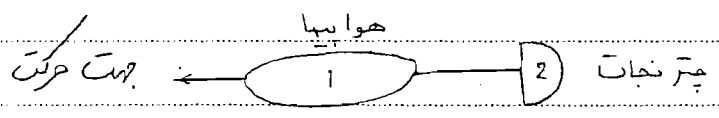
$$\sum F = 0 \Rightarrow \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_{\text{solid}} g = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g + 6 \pi \mu R V_t \Rightarrow \mu = \frac{2R^2(\rho - \rho)g}{2V_t}$$

$$Re = \frac{\rho V_t (2R)}{\mu} < 0.1$$

در نظر لطیفان از بررسی ترمینال شرط جریان غریبی استخوان شود

ترمینال: هواپیمایی به منظور توقف سریع در حرکت بر روی سطح افقی، از سیستم چتری استفاده می کند. آن نصب شده است.
 استفاده می کند تا توجه به شرایط داده شده، مدت زمانی که طول می کشد تا هواپیمایی از سرعت 1.05 به 5% برسد، محاسب
 کنید

$C_{D1} = 0.5$ $A_1 = 20 \text{ m}^2$ $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$ $V_0 = 100 \text{ m/s}$
 $C_{D2} = 2.25$ $A_2 = 40 \text{ m}^2$ $V = 50 \text{ m/s}$ $M_1 = 4000 \text{ kg}$



$$F_D = \frac{1}{2} \rho V^2 (C_{D1} A_1 + C_{D2} A_2) = 60 V^2$$

$$\Rightarrow -M \frac{dV}{dt} = F = 60 V^2 \Rightarrow \frac{1}{V} = \frac{1}{V_0} + 0.01 t \Rightarrow t = 1.5$$

$$t = 1.5 \text{ s}$$

• هر چه چتر نجات حرفه شود، مدت زمان چتر فرود می آید؟
 • برای مدت زمان لازم جهت توقف، می توان از معادله بسیار بزرگی (0.01) به جای V استفاده کرد

$$F_D = \frac{1}{2} \rho C_D V^2 A = 4 V^2$$

Subject:

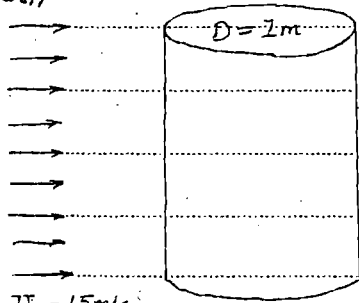
Year: 67 Month: 8 Date: 7 (13)

تمرین ۳: بر روی یک شکل استوانه با ارتفاع 25 m و قطر 1 m در معرض باد با سرعت 15 m/s قرار می‌گیرد. میزان

$$P = \rho R T$$

گتاور مقام مرج را حساب بنمایید.

حل:



$$T = 15^\circ\text{C} \quad \& \quad P = 101.0 \text{ kPa}$$

$$\Rightarrow \rho = 1.23 \text{ kg/m}^3 \quad \& \quad \mu = 1.78 \times 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}$$

$$\Rightarrow N_{Re} = \frac{\rho U_{\infty} D}{\mu} = 1.04 \times 10^6$$

با استفاده از نمودارهای مربوطه می‌توان مقدار C_D و ضریب زود C_D را تعیین کرد.

$$F_D = \frac{1}{2} C_D \rho U_{\infty}^2 A \quad \& \quad A = L \cdot D \Rightarrow F_D = 1.21 \text{ kN}$$

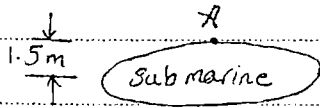
$$U_{\infty} = 15 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow M_o = F_D \cdot \frac{L}{2} = 15.1 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

ممان حول مرکز ثقل

تمرین ۱۰: اختلاف فشار کل و اختلاف فشار دینامیکی بین نقاط A و N روی یک زیردریایی را حساب کنید.

فرضیات: ۱. کل انرژی ثابت فرض می‌شود.



P_{∞} نمی‌آید و صفر فرض می‌شود (چون بر مبنای اختلاف سطح هستیم).

$$U_{\infty} = 10 \text{ m/s} \quad \& \quad V_A = 15 \text{ m/s}, \quad V_N = 0 \text{ (stagnation point)}$$

$$E = \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2g}$$

$$\& \quad E_{\infty} = \frac{P_{\infty}}{\rho} + \frac{U_{\infty}^2}{2}, \quad P_{\infty} = 0$$

$$\Rightarrow E_{\infty} = 50 \text{ J/kg}; \quad E_N = E_{\infty} = \frac{P_N}{\rho} \Rightarrow P_N = 50 \cdot 1000 = 50 \text{ kPa}$$

لایه فشار در نقطه A خالص است در واقع $P_A = E_{\infty} \Rightarrow \frac{P_A}{\rho} = 50 - \frac{15^2}{2} \Rightarrow P_A = 62.5 \text{ kPa}$

نیست و این فشار نسبی است. $P_A - P_N = 62.5 - 50 = 12.5 \text{ kPa}$

Total Dynamic Pressure Difference = 12.5 kPa

$$g z_A + \frac{P_A}{\rho} + \frac{V_A^2}{2} = g z_N + \frac{P_N}{\rho} + \frac{V_N^2}{2}$$

$$\Rightarrow P_A - P_N = 1000 \left[1.5 \cdot 9.8 - \frac{15^2}{2} \right] = -127.2 \text{ kPa}$$

Total Pressure Difference = -127.2 kPa

$$\text{Total Pressure Difference} = gh + \text{Dynamic pressure Diff.}$$

۵. برای خواهم با توجه به اطلاعات داده شده سرعت نسبت حرکت یک هواپیمای جنگ را محاسب نمایم.
 نکته: در موتورهای جنگ، نیروی جلو برنده (Thrust) متناسب با المتراتاق سوخت می باشد. لذا برای یک Thrust صحن بهترین شرایط درین سرعت می باشد. در شرایط Steady State ر Horizontal می توان نوشت:

$$Prag = Thrust \quad \& \quad weight = Lift$$

مختصاتی که عدد مانع کوچک باشد (0.6) (M_1) اثر تراکم پذیری ناچیزی می باشد و می توان از این رابطه زیر و یا نمودارهای

$$C_D = C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi A_r} \quad ; \quad A_r: \text{Aspect Ratio} \quad \text{مربوطه استفاده کرد}$$

$$A: \text{Platform Area} = 1600 \text{ ft}^2 \quad , \quad A_r = 0.5$$

$$V_1 = 250 \text{ ft/s} \quad , \quad V_2 = 650 \text{ ft/s} \quad ; \quad C_{D_0} = 0.018 \quad ; \quad W = 150,000 \text{ lbf}$$

$$\rho = 24 \times 10^{-4} \frac{\text{slug}}{\text{ft}^3} \quad ; \quad 1 \text{ slug} = 32.174 \text{ lbfms}$$

* سرعت یعنی باید نیروی باسنده در حواله بالاترین سرعت را داشته باشد به نحوی که کمترین F_D را داشته باشد.
 بنابراین باید کمترین F_D را محاسب کنیم

معادلات حرکت یا پیراستوکس Navier-Stokes

در منظور برونسبی دقیق تر حرکت سیال بر روی سطح مختلف و محل محاطات حرکت لایمات ما هم خط جریان

Stream Line، آج جریان، Stream Function، پتانسیل سرعت، Velocity Potential، جزئی شوند

همه حرکت سیال و جزئی جزئی می شود

مثالین ذکر است. یک کار دیگری چنین پاراسترهای حل محاطات حرکت را آسان بر می کند

یادآوری

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

$$i \times i = 0 \quad j \times j = 0 \quad k \times k = 0$$

حاصل جبری است عمود بر صفحه جهت اول

$$i \times j = k \quad j \times k = i \quad k \times i = j$$

$$i \times k = -j \quad j \times i = -k \quad k \times j = -i$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) i - (a_x b_z - a_z b_x) j + (a_x b_y - a_y b_x) k$$

خط جریان، خط فرضی، راسته در هر نقطه بر بردار سرعت در خطه محور دقت نظر ملحق باشد خط جریان می نویسد لازم یادآوری است

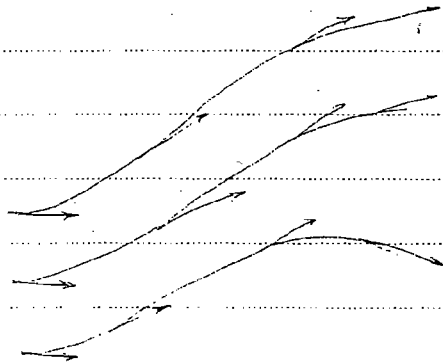
که Euler حرکت سیال را در راستای خط جریان بررسی کرده است

$$\vec{v} \cdot d\vec{v} = 0$$

$$\Rightarrow [u_x i + v_y j] \cdot [dx i + dy j] = 0$$

$$\Rightarrow (u_x dy - v_y dx) \cdot k = 0 \Rightarrow \frac{u_x}{dx} = \frac{v_y}{dy}$$

باینرلس می توان نوشت:



$$\frac{u_x}{dx} = \frac{v_y}{dy}$$

معادله خط جریان

تاج جریان: با استفاده از تاج جریان معادله پیوستگی از بین می رود و معادله حرکت آمدن بر حل می شود بد عبارت دیگر تاج جریان بد شکلی تعریف می شود که در معادله پیوستگی صادق باشد.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho \mathbf{V}) = 0 \quad (\nabla \cdot \rho \mathbf{V}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0$$

$$\rho \frac{\partial \psi}{\partial x} + \rho \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

$$V_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad ; \quad V_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

هرگاه $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$ در آن صورت می توان گفت که ψ یک دیرانسیل کامل است. این شرط را رابطه پیوستگی می باشد برای خط جریان می توان نوشت:

$$V_x dy - V_y dx = 0 \quad ; \quad -\frac{\partial \psi}{\partial y} dy - \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = 0 \Rightarrow d\psi = 0 \Rightarrow \psi = c$$

در طول خط جریان، مقدار تاج جریان ثابت است.

$$\mathbf{U} = -a\vec{i} + a\vec{j}$$

تجزیه آن برای جریان با سرعت داده شده تاج جریان را مطابق کنید:

دیرانسیل کامل است $\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 + 0 = 0$

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \quad ; \quad \psi = \int v_y dx + f(y) = \int a dx + f(y)$$

$$\Rightarrow \psi = \frac{ax^2}{2} + f(y) \quad ; \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = f'(y) = -v_x = -a \Rightarrow f'(y) = -a \Rightarrow f(y) = -ay + c$$

$$\Rightarrow \psi = \frac{a}{2}(x^2 - y^2) + c$$

با حل بخش این مثال باید u رسم

c برای جابجایی بین خطوط جریان مایه مختلف است.

تاج جریان برای سیستم استوانه ای:

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad ; \quad V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

برای سیستم استوانه ای، تاج جریان بد شکلی بر تعریف می شود:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_r) = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0$$

تائیل سریت: استفاده از پتانسیل سریت برای شرط جریان غیر چرخشی (Irrrotational Flow) به کار می رود.
 بعد از آن ثابت می شود که جریان غیر چرخشی همان جریان ایرتال است.

سریت پتانسیل است: $\psi = \psi(x, y)$;
$$\vec{U}_x = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \vec{V}_y = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

در دو بار هم حالت با هم می آید.

حاصل ضرب بردار برداری (Cross) میان ∇ و بردار سریت \vec{U} را $\text{Curl } \vec{U}$ می نامند.

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad ; \quad \nabla \times \vec{U} = \text{Curl } \vec{U}$$

$$\nabla \times \vec{U} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ U_x & V_y & W_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial W_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \end{bmatrix} \vec{i} + \begin{bmatrix} \frac{\partial W_z}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial z} \\ \frac{\partial U_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial y} \end{bmatrix} \vec{j} + \begin{bmatrix} \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \\ \frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial x} \\ \frac{\partial W_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \end{bmatrix} \vec{k}$$

هرگاه $\text{Curl } \vec{U} = 0$ داریم:

$$\frac{\partial W_z}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial z} \quad ; \quad \frac{\partial U_x}{\partial z} = \frac{\partial W_z}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial V_y}{\partial x} = \frac{\partial U_x}{\partial y}$$

این روابط همان طور که قبلاً اشاره شد، مربوط به بیان ایرتال (جریان غیر چرخشی) می باشد.

تمرین 2: حاصل $\nabla \times \nabla \psi$ را بیابید.

$$\nabla \times \nabla \psi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \end{bmatrix} \vec{i} + \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y} \end{bmatrix} \vec{j} + \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y} \end{bmatrix} \vec{k} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla \times \nabla \psi = \nabla^2 \psi = 0$$

شرط برقراری جریان غیر چرخشی:

کتابت جهت برقراری شرط جریان غیر چرخشی لازم است $\nabla \psi = \vec{U}$ حاصل برقرار سریت می شود:

$$\vec{U} = \nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \vec{k} = U_x \vec{i} + V_y \vec{j} + W_z \vec{k}$$

$$\Rightarrow U_x = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad ; \quad V_y = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad ; \quad W_z = \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

در سیستم استوانه ای روابط بدین شکل زیر استفاده می شود:

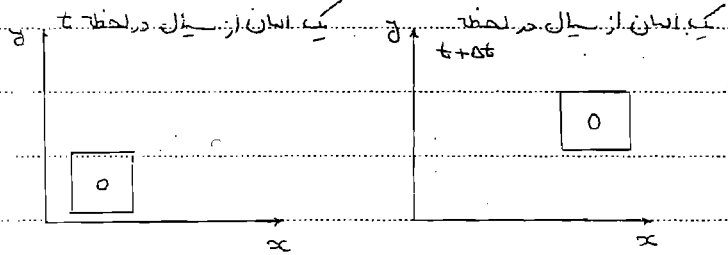
$$U_r = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad ; \quad V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

Irrotational Flow : بررسی جریان غیر چرخشی

حرکت سیال می تواند به شکل های گوناگونی انجام پذیرد

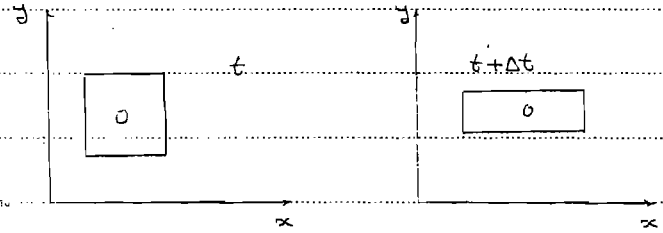
1- انتقال Translation

ثابت transient

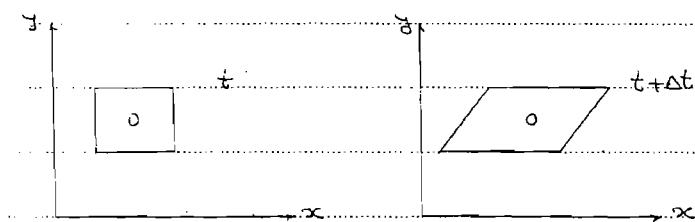


2- تغییر شکل Deformation

خطی Linear

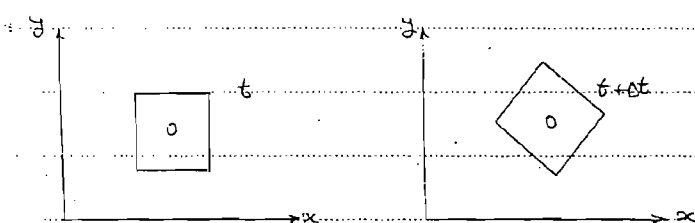


3- زاویه Angular



4- چرخش Rotation

نکته : چرخش تنها در اثر اعمال تنش برج می دهد



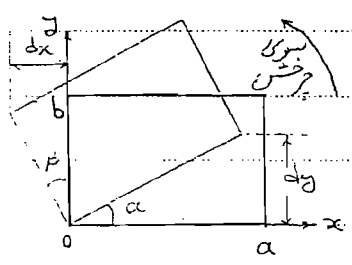
5- بررسی چرخش سیال :

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

چرخش (ω) گیت برداری است که بصورت زیر تعریف می شود :

و عبارت از سرعت زاویه ای متوسط دو خط عمود بر یکدیگر در یک جزء سیال

به منظور آسانی تحلیل ، چرخش سیال در صفحه xy در نظر گرفته می شود



معمولی که سرعت در نقاط a و b سرعت در نقطه 0 متطابق باشد، ایوان شروع بد چرخش می کند
در مورد چرخش در راستای 0 می توان نوشت:

V_{y0} : مولفه سرعت در راستای y در نقطه 0

Taylor Series: $V_{y\alpha} = V_{y0} + \frac{\partial V_y}{\partial x} dx + \dots$ $V_{y\alpha}$: مولفه سرعت در راستای y در نقطه α

$\frac{\partial V_y}{\partial x} dx$

$dy = \frac{\partial V_y}{\partial x} dx + dt$

$\omega_{\alpha} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{d\alpha}{dt}$; $d\alpha \approx \tan \alpha d\alpha = \frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \omega_{\alpha} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{dy/dx}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{[(\partial V_y / \partial x) dx dt]}{dx} \Rightarrow \omega_{\alpha} = \frac{\partial V_y}{\partial x}$

در مورد چرخش در راستای 0 می توان نوشت:

V_{x0} : مولفه سرعت در راستای x در نقطه 0

Taylor Series: $U_{x\beta} = U_{x0} + \frac{\partial U_x}{\partial y} dy + \dots$ $U_{x\beta}$: مولفه سرعت در راستای x در نقطه β

$\frac{\partial U_x}{\partial y} dy$

$dx = \frac{\partial U_x}{\partial y} dy + dt$

$\omega_{\beta} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{d\beta}{dt}$; $d\beta \approx \tan \beta d\beta = -\frac{dx}{dy}$

$\Rightarrow \omega_{\beta} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{[-(\partial U_x / \partial y) dy dt]}{dx} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{-\frac{dx}{dy}}{dt} \Rightarrow \omega_{\beta} = -\frac{\partial U_x}{\partial y}$

توران در صفحه xy (حول محور Z) برابر است با سرعت زاویه ای متوسط در راستای عمود بر هم $(\alpha\beta, \alpha\alpha)$

$\omega_z = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \right]$

در سطح کلی بردار $\vec{\omega}$ برابر است با :

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \vec{k} \right]$$

بنابراین : $\vec{\omega} = \frac{1}{2} (\nabla \times \vec{U}) = \frac{1}{2} \text{Curl } \vec{U}$

$\text{Vorticity} = 2\vec{\omega} = \text{Curl } \vec{U}$

همچنین می توان نوشت :

در سیستم استوانه ای رابطه بدین شکل زیر استفاده می شود :

$$\text{Vorticity} = \text{Curl } \vec{U} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] \vec{i} + \left[\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} \right] \vec{j} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \vec{k}$$

چونکه در این جريان غير چرخشی چیست و پتانسیل سرعت کدام است ؟

• جریانی که هیچ گونه دوران نداشته باشد (در واقع اثرش در آن مشاهده نمی شود)

$$\vec{\omega} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad \& \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial w_z}{\partial x} \quad \& \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial w_z}{\partial y}$$

• پتانسیل سرعت رابطه ای است که در محلهای شرط جريان غير چرخشی متن می کند :

$$\vec{\omega} = 0 \Rightarrow \text{Curl } \vec{U} = 0 \Rightarrow \nabla \times \vec{U} = 0 ; \quad \nabla \phi = \vec{U} \Rightarrow \nabla \times \nabla \phi = 0$$

در نتیجه رابطه Velocity Potential (ϕ) در محلهای جريان غير چرخشی متن می کند

نکته : سیال تحت تأثیر نیروی گرانشی (Gravity)، فشار (Pressure) نمی تواند دوران (چرخشی) کند. لایه چرخشی، وجود

شش برشی (Shear stress) می باشد.

• فرض جريان غير چرخشی برای تعیین از سیال که در آن می توان از نیروی مقاومت (تأثیر رگوزیتی) چشم پوشید، کار می رود

مثلاً در خارج از لایه مرزی در جریان حرکت سیال بر روی یک جسم جامد و یا در شرایطی که سیال ایده آل باشد ($\mu = 0$) جریان غير چرخشی

فرض می شود.

سیال ایده آل $\Leftrightarrow \mu = 0 \Leftrightarrow$ سیال غير چرخشی

$$\vec{V} = (x^2 - y^2) \vec{i} - 2xy \vec{j}$$

تمرین: برای توزیع سرعت زیر، پتانسیل سرعت را بدست آورید.

• ابتدا باید مشخص کرد که جریان غیر چرخشی است یا نه. چون فقط جریان غیر چرخشی می توان پتانسیل سرعت را تعریف کرد.

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - y^2 & -2xy & 0 \end{vmatrix} = (-2y + 2y) \vec{k} = 0 \rightarrow \text{جریان غیر چرخشی}$$

$$\Rightarrow u_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \Rightarrow d\phi = -u_x dx \Rightarrow \phi = y^2 x - \frac{1}{3} x^3 + f(y)$$

$$v_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \Rightarrow -2xy = -2xy - f'(y) \Rightarrow f'(y) = 0 \Rightarrow f(y) = C = \text{const}$$

$$\Rightarrow \phi = y^2 x - \frac{1}{3} x^3 + C$$

معادلات لا پلاس $\nabla^2 \phi = 0$

در معادلات بیوستکس صدق می کند

در معادلات جریان غیر چرخشی صدق می باشد

معادلات فوق بران جریان هو بادی استفاده می شوند

با حل معادلات فوق، تابع جریان و پتانسیل سرعت و در نتیجه تابع توزیع سرعت بدست می آید

با استفاده از آن و همچنین با استفاده از معادلات حرکت، تابع توزیع فشار قابل محاسب می باشد

یکی از روش های حل معادلات فوق، روش جداسازی متغیرها Separation of variables می باشد

خودکامیابی: رابطه میان تابع جریان و پتانسیل سرعت را تعیین کنید

در سیستم هو بادی و برای جریان غیر چرخشی، در شرایط پایا، ψ و ϕ تعریف پذیری باشند

هر دو هم ثابت است اما ψ ثابت و ϕ متغیر است

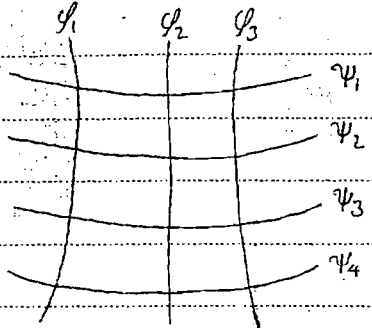
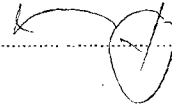
$$u_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad ; \quad v_y = +\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad ; \quad d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = v_y dx - u_x dy$$

$$u_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad ; \quad v_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad ; \quad d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = -u_x dx - v_y dy$$

• توابع ψ و ϕ برهم عمودند، مانند خطوط دما ثابت و آریاتیک در انتقال حرارت

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{\psi=c} = \frac{V_y}{U_x}$$

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{\psi=c} = -\frac{U_x}{V_y}$$

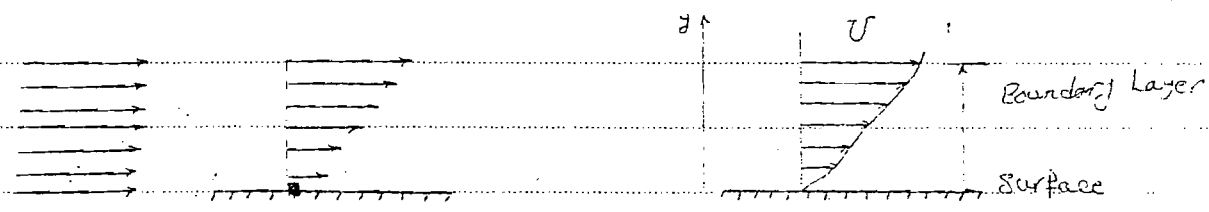


حاصل ضرب این دو سبب معادله "ا" می باشد. بنابراین خطوط بر یکدیگر عمودی باشند این خطوط در تمامی نقاط به غیر از نقطه ایستایی (Stagnation) بر یکدیگر عمودند.
 های که سرعت منفی شود. (در محل برخورد با سطح)
 داخل معادلات لاپلاس، نتایج توزیع سرعت بدست می آید.

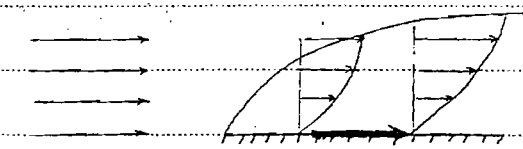
مانند انتقال حرارت در خطوط آدیاباتیک $q = 0 \rightarrow \frac{\partial T}{\partial n} = 0$

بررسی حرکت سیال بر روی سطح تخت:

1. حرکت سیال بر روی یک صفحه تخت (Flat). موازی با جریان سیال: **Friction Drag**
 در این حالت خطوط جریان ندرتاً تخت تا شیب سخت رانج می شوند و معمولاً موازی سطح می باشد.



• فشار کمواخت خارج از لایه مرزی تا شیری بر روی جریان داخل لایه مرزی ندارد و در نتیجه تغییر فشار قابل توجهی در داخل لایه مرزی مشاهده نمی شود.
 نتیجه: نیروی دراز (Drag) منبسطی از وجود اصطکاک (Friction) می باشد.



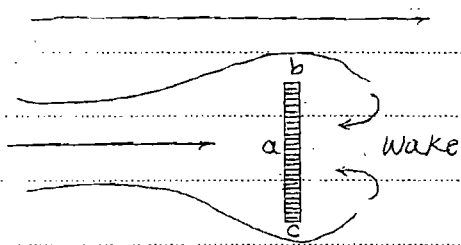
نت (نیروی واردی صفحه از طرف سیال)

$$F_D = \int T_w dA$$

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 A} = f(Re)$$

A در این روابط سطح صفحه می باشد.

۱۲) حرکت سیال بر روی یک صفحه تخت (Flat) عمود بر جریان سیال Pressure Drag. در حالت قبل، در این حالت، تنها نیروی وارده شده بر سطح، نیروی فشار است. بدین عبارت دیگر نیروی Drag حاصل می‌شود. در حالت بعد، در این حالت، علاوه بر نیروی فشار، نیروی حاصل از اصطکاک یا تنش برشی (Friction, shear stress) که بر صفحه اعمال می‌شود، در جهت عمود بر حرکت سیال است. بنابراین، نیروی Drag وارده بر صفحه ندارد.



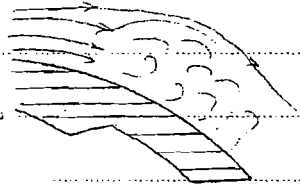
نقطه 'a'، نقطه ایستایی (Stagnation) می‌باشد. در نقطه 'a'، فشار بیشینه می‌باشد. سیال تا جایی که می‌گردد، و فشار کاهش می‌یابد و سیال بدین جهت نقاط 'b, c' حرکت می‌کند. در طول مسیر، جریان separation وجود ندارد.

- * در بخش جریان آشفته، اختلاف p_1 و p_2 وجود می‌آید. در این حالت، C_D با C_f متفاوت است و در این حالت، C_D با C_f متفاوت است.
- * در این حالت، جریان فشار در لایه مرزی به اندازه ای زیاد است (چه در حالت جریان آرام و چه در حالت جریان آشفته) که منجر به وجود آردن Wake در پشت صفحه می‌شود.
- * به همین علت جریان بدین نوع جریان بگنی ندارد. در نتیجه C_D بگنی دارد و ایجاد صفحه بگنی دارد و تابع N_R می‌باشد ($N_R > 1000$).

$$F_D = \int P dA \Rightarrow C_D \neq f(N_R) \quad ; \quad C_D = \frac{F_D}{\left(\frac{1}{2}\right) \rho U_\infty^2 A}$$

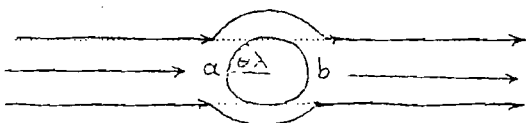
A در این رابطه سطح صفحه می‌باشد.

۱۳) حرکت سیال بر روی سطح غیر سطح (Curved) Friction & pressure Drag

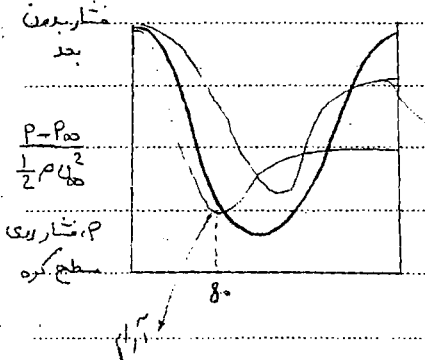


تفاوت بین جریان بر روی یک صفحه غیر سطح و تغییرات فشاری که بدین علت آنها در سطح وجود می‌آید مربوط می‌شود. بر روی حرکت سیال.

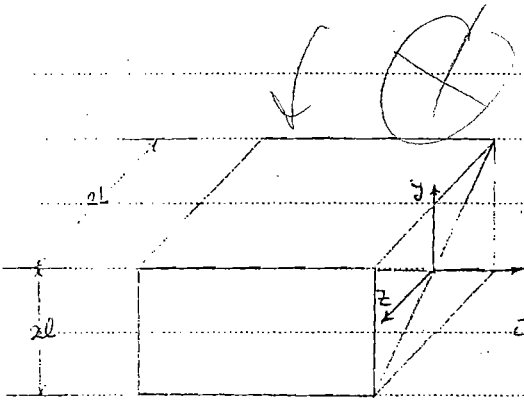
در حرکت سیال غیر ویسکوز (جریان ایده آل)، خطوط جریان در دو طرف کره یا استوانه قریباً می‌باشند. در این حالت لایه مرزی که موجب جابجایی این خطوط می‌شود، تشکیل می‌شود. در این حالت، نقاط 'a, b' نقاط ایستایی (Stagnation) می‌باشند و سرعت سیال در این نقاط صفر می‌باشد.



تیسرا
 در حالی که برای جریان ایده آل توزیع فشار متقارن است، توزیع فشار در عمل در میان سیال واقعی متقارن نمی باشد.
 اگر منحنی تغییرات فشار بر روی سطح کره بصورت تجربی ترسیم شود، در جریان های آرام و آنسخت منحنی های خط چین
 (در شکل) بدست می آیند.



نتایج تجربی در جریان آنسخت تطابق بهتری با جریان ایده آل دارد.
 تا وقتی از زاویه 80، اتلاف انرژی کم است.



توزیع سرعت بدون چرخش
 (1) تنش در مرکز صفر است
 (2) میان میزنی و غیر قابل تراکم است
 $(V_x = U; V_y = V; V_z = W)$
 $u = u(y, z)$

Continuity $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

ملاحظات: $M_x: 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$

$M_y: 0 = \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g \rightarrow P = \rho g y + f(x)$

$M_z: 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} \rightarrow P = P(x, z)$

$P = \rho g y + f(x) \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = 0 + \frac{df(x)}{dx}$

طول چکان، در طرف راست چکان (y, z) می اندازیم بنابراین هر دو طرف با هم برابر است

$\frac{df}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{\Delta P}{\Delta x} \Rightarrow$ BCs: $u(l, z) = 0$ & $\frac{\partial u(0, z)}{\partial y} = 0$ & $u(z, h) = 0$ & $\frac{\partial u(z, 0)}{\partial z} = 0$

مقادیر پیرامون $\phi = \frac{u}{(-\Delta P) \frac{l^2}{\mu}}; \bar{z} = \frac{z}{l}; h = \frac{z}{l} \Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{z}^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial h^2} = -1$

BCs: $\left\{ \begin{array}{l} \phi(l, h) = 0 \quad \& \quad \frac{\partial \phi(0, h)}{\partial \bar{z}} = 0 \\ \phi(\bar{z}, \frac{l}{2}) = 0 \quad \& \quad \frac{\partial \phi(\bar{z}, 0)}{\partial h} = 0 \end{array} \right.$ هر دو بر حسب یک طول بی بند شده اند

حاده دیگر اینست را برین صورت می کشیم
 برای امکان پذیر کردن

$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{z}^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial h^2} + \frac{d^2 \theta}{dz^2} = -1 \Rightarrow$ BCs & Eq. ① $\frac{d^2 \theta}{dz^2} = -1$ & $\theta(1) = 0, \frac{d\theta(0)}{dz} = 0$

حل با غیر صفر کردن می از شرایط میزنی همون کردن معادله

③ $\nabla^2 \psi = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \psi(l, h) = 0 \quad \& \quad \frac{\partial \psi(0, h)}{\partial \bar{z}} = 0 \\ \psi(\bar{z}, \frac{l}{2}) = -\theta(\bar{z}) \quad \& \quad \frac{\partial \psi(\bar{z}, 0)}{\partial h} = 0 \end{array} \right.$

Boundary Conditions $\left\{ \begin{array}{l} \phi(l, h) = \psi(l, h) + \theta(1) = 0 \\ \phi(\bar{z}, \frac{l}{2}) = \psi(\bar{z}, \frac{l}{2}) + \theta(\bar{z}) = 0 \end{array} \right.$ Checking

sep of var $\left\{ \begin{array}{l} \psi_1 = A_1 \sin \lambda \bar{z} + A_2 \cos \lambda \bar{z} \\ \psi_2 = B_1 \sinh \lambda h + B_2 \cosh \lambda h \end{array} \right. \Rightarrow \psi = \psi_1 \psi_2$

BCs: $\left\{ \begin{array}{l} A_1 = 0 \Rightarrow \psi_1 = A_2 \cos \lambda \bar{z} \\ B_1 = 0 \Rightarrow \psi_2 = B_2 \cosh \lambda h \end{array} \right. \Rightarrow \psi = \psi_1 \psi_2 = A_2 B_2 \cos \lambda \bar{z} \cosh \lambda h$

$\Rightarrow \psi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \lambda_n \bar{z} \cosh \lambda_n h$

Subject:

Year 87 Month 3 Date 21/7

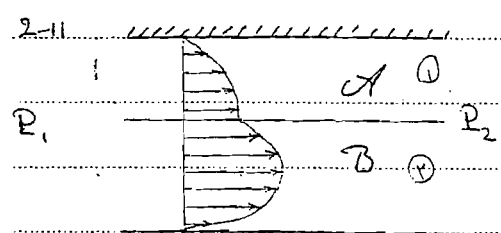
درجه اول: $\frac{\partial \psi(z, 0)}{\partial h} = 0 \Rightarrow \lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2}, n=0, 1, 2, \dots$

$\Rightarrow \psi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{(2n+1)\pi}{2} z \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2} h$

$\psi(z, \frac{h}{2}) = -\phi(z) = -\frac{1}{2} (1 - z^2) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{(2n+1)\pi}{2} z \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2} h = \frac{1}{2} (z^2 - 1)$

$\Rightarrow \int_{-1}^1 a_n \cos \frac{(2n+1)\pi}{2} z \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2} h dz = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (z^2 - 1) \cos \frac{(2n+1)\pi}{2} z dz$

$\Rightarrow a_n = \frac{-n \sin \lambda_n}{\lambda_n \cosh \lambda_n \frac{h}{2}} \Rightarrow \phi = \frac{1}{2} (1 - z^2) - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n^3} \frac{\cosh \lambda_n h}{\cosh \lambda_n \frac{h}{2}} \cos \lambda_n z, \lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2}$

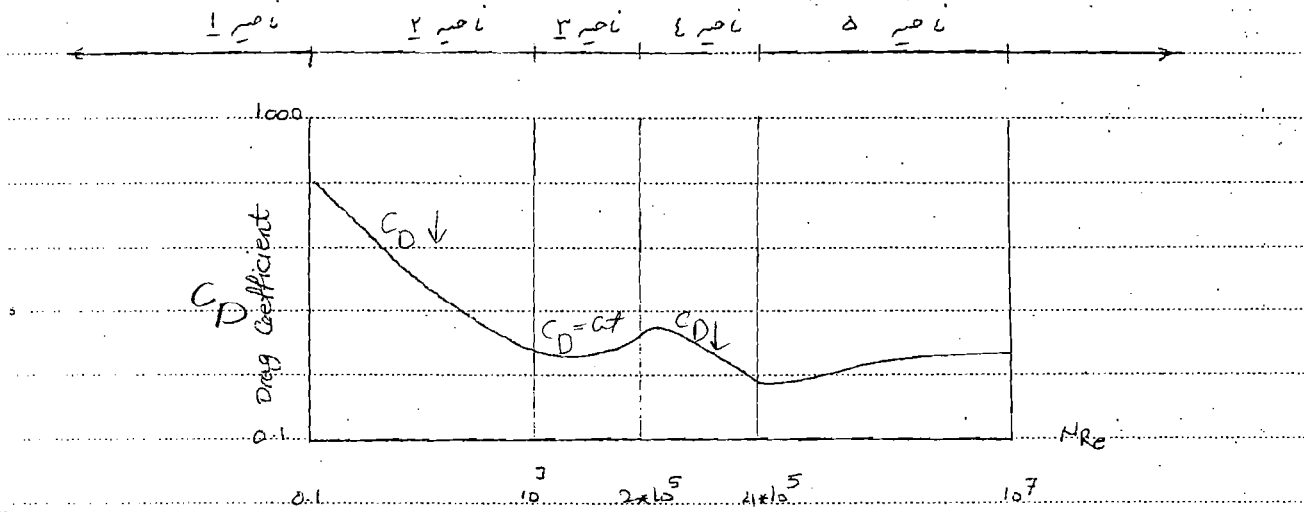


حصولاً سیالات منبسط می‌شوند و یکوزتری باشند.
 سوال: با چگالی و ویسکوزیته کمتر، رانندگی جریان می‌آید و ما کمترین
 سرعت در میان چگالی کمتر اتفاق می‌افتد. بنابراین جریان صحیح نیست.

$(\frac{dp}{dx})_1 = \mu_1 \frac{d^2 u_1}{dx^2} \quad \& \quad (\frac{dp}{dx})_2 = \mu_2 \frac{d^2 u_2}{dx^2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dp}{dx} = \mu_1 \frac{d^2 u_1}{dx^2} \\ \frac{dp}{dx} = \mu_2 \frac{d^2 u_2}{dx^2} \end{cases}$

BCs: $\begin{cases} \text{at } y=0: u_{2,x}(0) = 0 \\ \text{at } y=h: v_{1,y}(0) = 0 \end{cases} \quad \text{at interface: } \begin{cases} u_1 = u_2 \\ \frac{du_1}{dy} = \frac{du_2}{dy} \end{cases}$

$\psi_1(z, y) = a_n \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2} y = \frac{\sin \lambda_n z}{2L} = \frac{\sin(\lambda_n z)}{2L} = \frac{\cos \lambda_n z}{L^2} = \frac{\sin \lambda_n z}{L^3}$
 $= \frac{\sin \lambda}{2L} - \frac{\sin \lambda}{2L} + \frac{\cos \lambda}{L^2} = \frac{\sin \lambda}{L^3} = \frac{1}{L^3}$
 $a_n = \frac{1}{L^3} \frac{1}{\cosh \frac{(2n+1)\pi}{2} h}$



$$C_D = \frac{24}{Re}$$

امید است: در این ناحیه $Re < 10^3$ سیال با بدنه جریان سیال، جریان خزشی (Creeping Flow) می باشد. در این حالت کل Drag بصورت Friction می باشد. با افزایش Re ، نقش Pressure بیشتری شود، مقدار C_D کاهش می یابد.

$$C_D = \frac{12.5}{Re^2}$$

امید است: در این ناحیه $10^3 < Re < 10^5$ سیال با بدنه. [85% Friction, 15% Pressure]

امید است: در این ناحیه $10^5 < Re < 10^7$ سیال با بدنه، جریان آرام (Laminar Boundary Layer)، C_D تقریباً ثابت است.

$$C_D \approx 0.4 - 0.6$$

جدایی (Separation Point) در زاویه ای حاد 90° اتفاق می افتد. میزان Wake در پشت جسم در این اختلاف زاویه های عقب جلوی کوره نیز قابل توجه می باشد. در نتیجه Pressure Drag قابل ملاحظه می باشد.

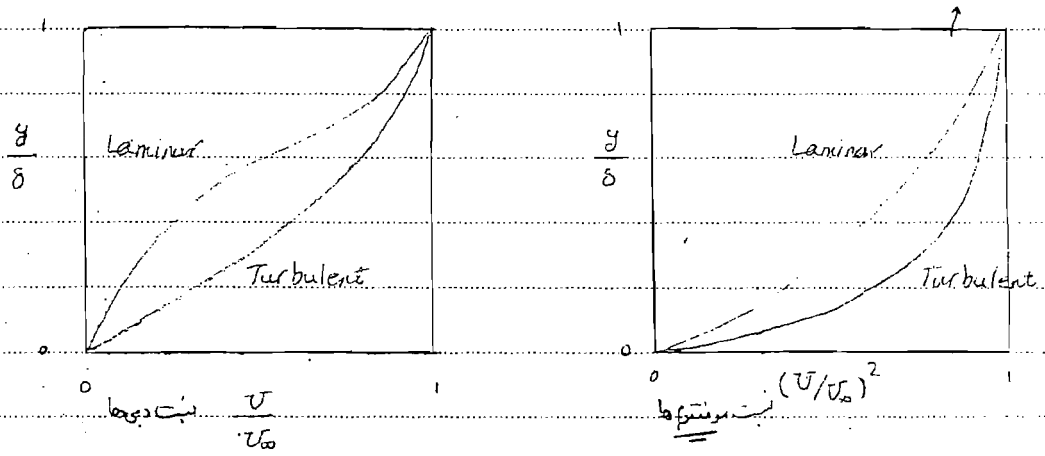
امید است: در این ناحیه $10^7 < Re < 10^8$ سیال با بدنه، جریان انتقال (Transition) است.

این ناحیه مربوط به انتقال از جریان آرام به جریان آشفته است. در این حالت جدایی کمی با تاخیر اتفاق می افتد و زاویه ای بزرگتر از 90° متعلق می شود. در این حالت میزان Wake کاهش می یابد. بنا بر این فشار بر روی کوره نیز کم می شود. در میزان C_D بطور قابل ملاحظه ای کاهش می یابد. زوایای نقطه جدایی از زاویه کوچکتر از 90° به زاویه ای بزرگتر از 90° متعلق می شود.

نقطه ۵: در این ناحیه $Re > 4 \times 10^5$ می باشد و جریان آشفته Turbulent Boundary layer می باشد.
 در این حالت، به علت بیشتر بودن اندازه حرکت Flamenter سیال لایه مرزی در مقابل اختلاف فشار، چابکتر
 می شود و از خود نشان می دهد. لذا نقطه جدایی بیشتر به آخر می افتد و در زاویه ای معادل 120° رخ می دهد.
 در نتیجه میزان Wake کاهش می یابد. لذا میزان C_D نیز بسیار کمتر از مقدار مربوط به جریان آرام می باشد زیرا
 گردبادی نشان کاهش می یابد.
 نکته: در هوای Re بحرانی (2×10^5) میزان C_D برای جریان آشفته پنج برابر کوچکتر از مقدار آن برای جریان آرام
 می باشد.

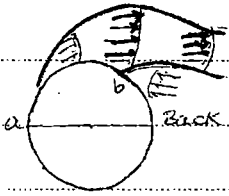
این جمله ایراد ندارد.
 برداشتی حرکت سیال بر روی سطح غیر منطبق

در جریان آشفته با افزایش Re میزان C_D افزایش می یابد. علت آن نیز افزایش اندازه حرکت سیال و بیشتر بودن آن در
 جریان آشفته در مقایسه با جریان آرام می باشد. این در حالی است که نقطه جدایی تغییر نمی کند.
 در آرام حتماً نیروی C_D از نیروی C_L می شود.



نکته: تغییرات C_D بر حسب Re برای جریان سیال بر روی استوانه تقریباً مانند کره است. فقط مقدار C_D برای کره در هر
 مقدار Re تقریباً تغییرات استوانه است.
 مانترا هیچ من درم نه در جریان آشفته باقیم چون C_D کاهش می یابد اما C_L بیشتر است.
 مورد سطوح جریان غیر منظم کننده و نیروی دارد. ناشی از تنگی می باشد. در حالی که در مورد سطوح مورد خطوط
 جریان به سمت آبی می کشد و نیروی دارد و ناشی از فشار می باشد.
 آرامه آشفته موجب کاهش نیروی مزب نیروی دریا می شود.

بررسی لایه مرزی بر روی یک استوانه



لایه مرزی از نقطه a شروع می شود و به تدریج براسر استوانه را فرا می گیرد.

نشار در جهت جریان کاهش می یابد. $(\frac{dp}{dx} < 0)$

در خارج از لایه مرزی نیز سیال متاب می گیرد. (بر اساس رابطه برنولی) متاب

$$\frac{dp}{dx} < 0 \quad \frac{du}{dy} \Big|_{y=0} = 0 \quad \frac{dp}{dx} > 0$$

سیال در داخل لایه مرزی که باعث کاهش فشار سیال می باشد. باعث ورود

تشن (اصطلاحاً) کمتر از متاب سیال در داخل و خارج از لایه مرزی می باشد.

در قسمت عمیق استوانه... فشار در جهت جریان افزایش می یابد. $(\frac{dp}{dx} > 0)$ این امر موجب کنده شدن سیال در داخل و خارج از لایه مرزی

می شود. اما سیال داخل لایه مرزی به علت از دست دادن اندازه حرکت بهاشی از وجود نیروی تشن می باشد. فشار نسبت بر روی

نشار سیال خارج از لایه مرزی غلبه می یابد. بنابراین در نقطه ای بر روی استوانه پدیده جدایی **Separation** رخ می دهد. تا این معنی

مرزی از حرکت باز می ایستد و فشار خارج از لایه مرزی موجب می شود که سیال لایه مرزی در حالت گون متعصبیت دهد

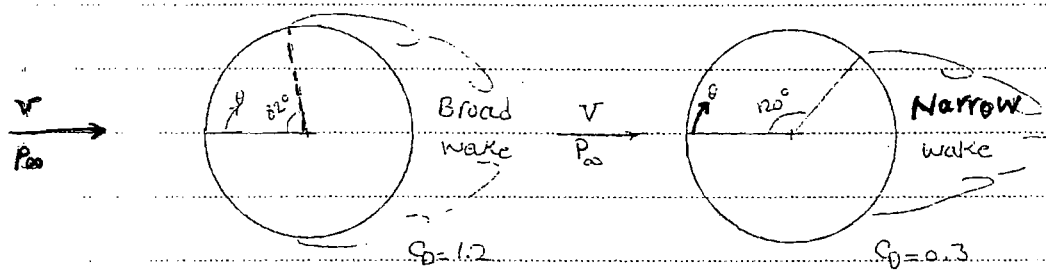
و حالت Back Flow رخ دهد.

در این حالت در عقب استوانه wake تشکیل می شود که این موجب جابجایی خطوط جریان و تغییر توزیع فشار می گردد.

حداصلی که تپلا اشاره شده در جریان آشفته باعث ایجاد حالت اندازه حرکت می شود. داده نقطه حدایی تا آخر می ایستد و این امر موجب

کاهش wake و کاهش گرافیک فشار در خطوط استوانه می شود. در نتیجه نیروی Drag وارد شده بر استوانه در جریان آشفته

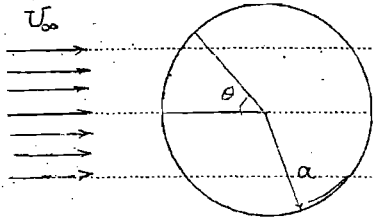
کوچکتر از نیروی وارد شده در جریان آرام می باشد.



Subject:

Year: 87 Month: 8 Date: 26 (18)

توزیع سرعت و فشار سیال اطراف یک استوانه را بدست آورید.



سیال ایده آل Inviscid Flow در نظر گرفته می شود.

معادلات برنولی قابل استفاده می باشد.

$$v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad v_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

$$v_r = \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad v_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

$$\psi(x, y) = f(x) \cdot g(y)$$

$$\nabla^2 \psi = 0 \Rightarrow f''(x)g(y) + f(x)g''(y) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g''(y)}{g(y)} = -\lambda^2$$

ψ با ϕ تفاوتی ندارد

$$\begin{cases} f''(x) + \lambda^2 f(x) = 0 \\ g''(y) - \lambda^2 g(y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x \\ g(y) = C \exp(\lambda y) + D \exp(-\lambda y) \end{cases}$$

مقادیر A, B, C, D, λ با توجه به شرایط مرزی تعیین می شوند.

حل: معادلات لاپلاس ($\nabla^2 \psi = 0$) برای سیستم استوانه ای نوشته می شود. نتایج جریان ψ در حادله بیرون استوانه است.

بسیار سرعت در سطح سیال غیر چسبناک است.

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0$$

$$\psi = \psi(r, \theta) = F(r) + G(\theta) \Rightarrow G(\theta)F''(r) + \frac{1}{r} G(\theta)F'(r) + \frac{1}{r^2} F(r)G''(\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{r^2 F''(r) + r F'(r)}{F(r)} = -\frac{G''(\theta)}{G(\theta)} = \lambda^2$$

$$\Rightarrow G(\theta) = A \sin \lambda \theta + B \cos \lambda \theta \quad ; \quad F(r) = C r^\lambda + D r^{-\lambda}$$

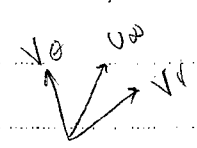
$$\Rightarrow \psi(r, \theta) = (C r^\lambda + D r^{-\lambda}) (A \sin \lambda \theta + B \cos \lambda \theta)$$

BC1: at $r=a$: $v_r = 0 \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \Rightarrow C a^\lambda + D a^{-\lambda} = 0 \Rightarrow D = -C a^{2\lambda}$

BC2: at $\theta=0$: $v_\theta = 0 \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow B = 0$

BC3: at $r \rightarrow \infty$: $v_r^2 + v_\theta^2 = U_\infty^2 \Rightarrow U_\infty^2 = \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right]^2 + \left[\frac{\partial \psi}{\partial r} \right]^2 \Rightarrow \lambda = 1$

BC4: at $r \rightarrow \infty$: $U = U_\infty \Rightarrow A C = U_\infty$



در آن ψ با ϕ تفاوتی ندارد

Subject:

Year 87 Month 8 Date 26/11/8

$$\Rightarrow \psi(r, \theta) = U_{\infty} r \sin \theta \left[1 - \frac{a^2}{r^2} \right] \Rightarrow V_r = -U_{\infty} \cos \theta \left[1 - \frac{a^2}{r^2} \right] \quad \& \quad V_{\theta} = U_{\infty} \sin \theta \left[1 + \frac{a^2}{r^2} \right]$$

at $r = a$: $V_r = 0$ & $V_{\theta} = 2U_{\infty} \sin \theta$

Stagnation points: $\theta = 0$ & $\pi \Rightarrow U_{\infty} = 0$

432

در استوانه در هم

$$P + \rho \frac{V^2}{2} = \text{cte} \Rightarrow P_{\infty} + \rho \frac{U_{\infty}^2}{2} = P + \rho \frac{V^2}{2}$$

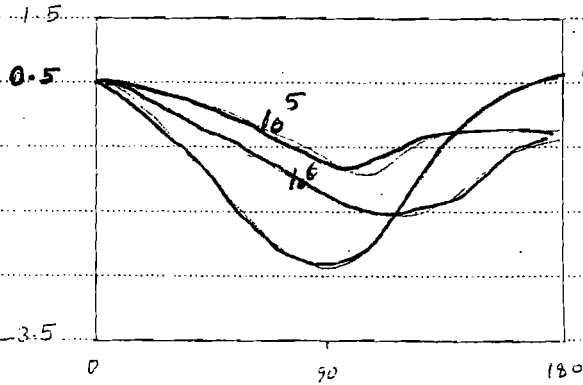
با توجه به رابطه برابری می توان نوشت:

$$P_{\infty} + \rho \frac{U_{\infty}^2}{2} = P + \frac{1}{2} \rho * 4 U_{\infty}^2 \sin^2 \theta$$

U, P بر ترتیب فشار و سرعت بر روی استوانه می باشد.

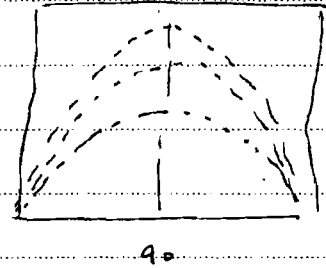
$$\Rightarrow \frac{P - P_{\infty}}{\rho U_{\infty}^2 / 2} = 1 - 4 \sin^2 \theta$$

(اختلاف فشار بدون بعد)



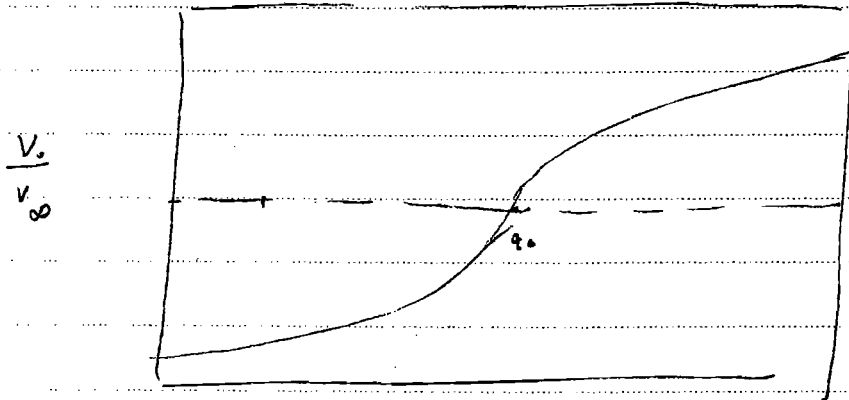
inviscid Flow

شکل بدون بعد در استوانه



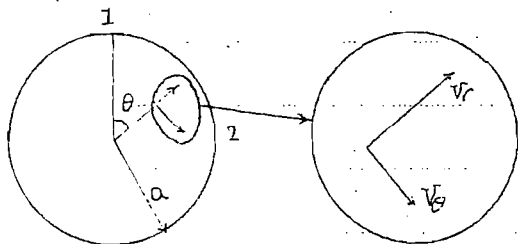
at $\theta = 30^\circ$ & $150^\circ \Rightarrow P = P_{\infty}$

شکل بدون بعد



theta

تمرین ۲: توزیع سرعت و فشار سیال در اطراف یک کره را تعیین کنید.
فرض باد: جریان غیر چرخشی (Irrotational Flow) در نظر گرفته می شود.



جادو نیروی مایل استفاده می باشد.

$$V_r = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad V_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

حل:

معادله لاپلاس: $(\nabla^2 \psi = 0)$ برای سیستم کوئسی نوته می شود:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right] + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right] = 0$$

شرایط مرزی:

BC.1: at $r=a$: $V_r=0$, $\frac{\partial \psi}{\partial r}=0$ بر روی سطح نبود دماغ به داخل سطح

BC.2: at $r \rightarrow \infty$: $V_r = -U_\infty \cos \theta$, $V_\theta = U_\infty \sin \theta$

BC.3: at $\theta=0$: $V_\theta=0$, $\frac{\partial \psi}{\partial \theta}=0$, $V_\theta=0$

$$\psi = \psi(r, \theta) = U_\infty F(r) \cos \theta \Rightarrow V_r = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U_\infty F'(r) \cos \theta \quad \& \quad V_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U_\infty \frac{F(r)}{r} \sin \theta$$

$\Rightarrow \nabla^2 \psi = r^2 F''(r) + 2r F'(r) - 2F(r) = 0$; Euler or Cauchy Equation

$$F(r) = r^t \Rightarrow r^2 + (t-1)r^{t-2} + 2tr^{t-1} - 2r^t = 0 \Rightarrow t(t-1) + 2t - 2 = 0 \Rightarrow t^2 + t - 2 = 0$$

$$t_1 = 1 \quad \& \quad t_2 = -2 \Rightarrow F(r) = Ar + \frac{B}{r^2} \Rightarrow \psi = U_\infty \left[Ar + \frac{B}{r^2} \right] \cos \theta$$

BC.1: $r=a$: $A = \frac{2B}{a^3}$

BC.2: $r \rightarrow \infty$: $B = \frac{a^3}{2} \Rightarrow \psi = U_\infty \left[r + \frac{a^3}{2r^2} \right] \cos \theta$

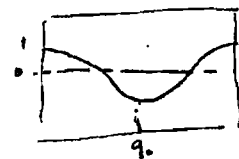
$$\Rightarrow V_r = -U_\infty \left[1 - \frac{a^3}{r^3} \right] \cos \theta \quad \& \quad V_\theta = U_\infty \left[1 + \frac{a^3}{2r^3} \right] \sin \theta$$

همی کره داریم.

$$r=a: V_r=0 \quad ; \quad V_\theta = \frac{3}{2} U_\infty \sin \theta \quad ; \quad P_\infty + \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 = P_1 + \frac{1}{2} \rho U_1^2$$

$$\Rightarrow \frac{P - P_\infty}{\rho U_\infty^2 / 2} = 1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta \quad ; \quad P_1 + \frac{1}{2} \rho U_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho U_2^2$$

$$U_1 = 0 \quad \& \quad U_2 = \frac{3}{2} U_\infty \Rightarrow P_1 - P_2 = \frac{9}{8} \rho U_\infty^2$$



اختلاف فشارین نقاط A و B

۴. یا حل حالات لایس را استفاده از محاسبه برنولی. توزیع سرعت و فشار سیال ایده آل در اطراف استوانه
برگرفته به دست آمد.

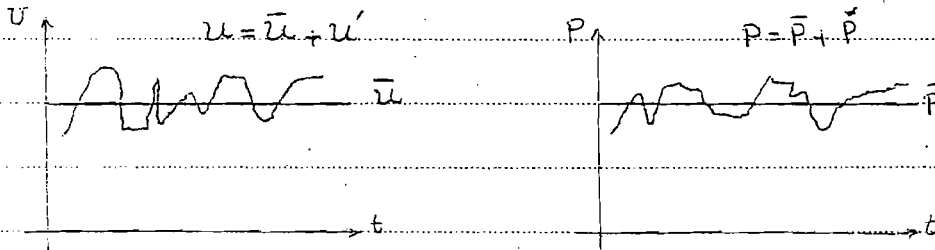
جرای زمانه از آرام به آشفته می رود \Rightarrow کتری شود. \Rightarrow v^2 منبسطی بیشتر می شود. به نحوی که F_D برای
جرای آشفته منبسطی بیشتر از جرای آرام است. اما در سه تلفات انرژی برای جرای آرام بیشتر خواهد بود. اما خود
تلفات بیشتر خواهد بود.

جریان آشفتگی

در جریان آشفتگی تلفات کمتری است، اما شکل در پیچیدگی آن است.

در بیشتر موارد منحنی جریان، شکل بصورت آشفتگی است.

استفاده از مفهوم Time Average در بسیاری از مدل سازی ها مانند مدل سازی جریان آشفتگی کاربرد دارد.



میان جریان آشفتگی

همانگونه که بیشتر نیز اشاره شد، در جریان آرام، انتقال اندازه حرکت در اندازه کوچکتری صورت می گیرد، در حالی که در جریان

آشفتگی در عمل بیشتر رخ می دهد. انتقال اندازه حرکت بصورت خودهای (Macroscale) انتقال می آید و گوناگونی (Eddy)

از سیال از نقطه ای به نقطه دیگر منتقل می شوند.

برای نخستین بار Reynolds با تجربی ماده رنگی در جریان آب در یک لوله ای کشیدنی، پدیده ای جریان آرام را آشفتگی را

بررسی کرد. برای عدد بدون بعدی را تعریف کرد که با آن می توان نوع جریان سیال را مشخص نمود (مکلا). روی همین نشان

داد که سیال در گذر از حالت آرام به حالت آشفتگی از حالت انتقالی Transition می گذرد.

در جریان آرام یک سیال نیوتنی، قانون ویسکوزیته نیوتنی حکم فرم است $\tau = \mu \frac{du}{dy}$

بر اساس این معادله حد لای برای جریان آشفتگی نیز در نظر گرفته شد است $\tau = -(\mu + \eta) \frac{du}{dy}$

که در این حد لای μ مربوط به جریان آرام η ویسکوزیته گردابها (Eddy Viscosity) مربوط به جریان آشفتگی

می باشد که بسته به میزان آرامش یا آشفتگی جریان سیال η می تواند از این قوت چسبندگی باشد.

در جریان آشفتگی داریم $\epsilon = \frac{1}{\rho} \frac{d\tau}{dy}$ و $\eta \gg \mu$

ϵ (Eddy Kinematic Viscosity) نیاز به جریان آرام است. این معادله نیست

همانگونه که اشاره شد در عمل بیشتر جریان ها آشفتگی می باشد (بعلت کمتر بودن ضریب اصطکاک و در آن در جریان

آشفتگی با جریان آرام) در این حالت نیوان جای غیر منظم گردابها بطور پیوسته در جریان اصلی وجود دارد.

در جریان های آشفتگی همواره یک انتقال پیوسته انرژی میان جریان اصلی و جریان گردابها می وجود دارد.

اگرچه آشفته و تصادفی بودن حرکت گرماها و اختلاط آنها (Mixing Eddy) در حباب بزرگ مثل تابلو شکر و ریاضی را بسیار دشوار می کند اما از سوی دیگر کمتر بودن ضرایب مقاومت در این جریان میزان انتقال انرژی و کاهش می دهد (کاهش f و C_D و N_{Re})

Prandtl Mixing - Length theory

تئوری طول اختلاط برانسل

یکی از بهترین تئوری ها ارائه شده برای بررسی جریان آشفته Mixing - Length theory می باشد که توسط Prandtl طرح شده است

در این تئوری، جریان آشفته بصورت میانگین زمانی (Time Average) بررسی شده است. با بررسی های بعمل آمده مشخص شده است که در جریان آشفته مقادیر فشار و سرعت در یک نقطه نسبت به میانگین نوسان می کند و نوسان های (Fluctuation) غیر منظم با فرکانس بالا می باشد

مدل ریاضی جریان های آشفته نیز باید در نظر گرفتن این نوسان ها گسترش یابد است

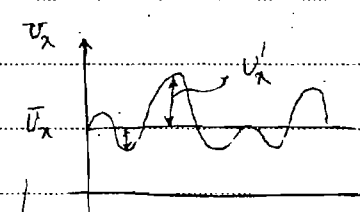
$$U_x = \bar{U}_x + u'_x \quad V_y = \bar{V}_y + v'_y \quad W_z = \bar{W}_z + w'_z \quad P = \bar{P} + p'$$

بدین ترتیب مرتبه اول نوسان ها در اندازه های درناگون بوده ای Macroscopic و بصورت گرماها (Eddy) و نوسان در اندازه های درناگون موجود می آیند که اندازه این گرماها را میزان نوسان آنها مشخصه ای از آشفتگی جریان می باشد

مقادیر \bar{P} , \bar{U}_x , \bar{V}_y و \bar{W}_z بصورت میانگین زمانی بیان می شوند و مقادیر p' , u'_x , v'_y و w'_z نوسان ها را مشخص می کند

در شرایط پایا State **steady** تمام میانگین وابسته به زمان نمی باشند ← ok ?

$$\bar{u}_x = \frac{1}{t} \int_b^{b+t} u_x dt$$



\bar{u}_x : time average velocity
 u'_x : instantaneous

Subject: _____
 Year 37 Month 9 Date 3 20

در این رابطه ثابت زمان طولانی تر از سرعت زمان نوبان ها می باشد

\bar{U}_x : Time Averaged Velocity U'_x : Instantaneous Velocity

تقریباً همان مقدار که میانگین سرعت نوبان جریان در راستای x (در راستای دیر و راستای) برابر صفر است: ($\bar{U}_x = 0$)

$$\bar{U}_x = \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t_0+t} \bar{u}_x dt + \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t_0+t} u'_x dt \Rightarrow \bar{U}_x = \bar{u}_x + \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t_0+t} u'_x dt = \bar{u}_x + \bar{u}'_x$$

$\Rightarrow \bar{u}'_x = 0$ & $\bar{U}_x = \bar{V}_y = \bar{W}_z$ * برآیند نوبان زمانات باید صفر باشد

$$f = \bar{f} + f' \quad \& \quad g = \bar{g} + g'$$

هرگاه ثابت باشیم
 یکنواختی

1) $\overline{f+g} = \bar{f} + \bar{g}$

2) $\overline{f' + g'} = 0$ زمان نوبان

ی توان نوشت

3) $\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}$

4) $\bar{f} = \bar{f}$ Arrange

در جریان آشفته، نیرو مقابله نوبان سرعت بر مقدار میانگین سرعت به گونه ای است که سبب افزایش تغییر شکل می شود

بنابراین دیگر وجود نوبان ها سبب افزایش ویسکوزیته ظاهری α Apparent Viscosity می شود

$$F = -(\mu + \mu_a) \frac{du}{dy}$$

استفاده از رابطه دلخواه

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$\overline{f \times g'} = \overline{f} \times \overline{g'}$$

$$\overline{f' \times g'} = ? \quad ?$$

بررسی محادله پیوستگی برای سیال تراکم ناپذیر در جریان آشفته.

$$\nabla u = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} = -\nabla \cdot p v$$

$$\frac{\partial(\bar{u}_x + u'_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}_y + v'_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{w}_z + w'_z)}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial u'_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial v'_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}_z}{\partial z} + \frac{\partial w'_z}{\partial z} = 0$$

هرگاه از رابطه فوق Time Average گرفته شود، می توان نوشت:

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial u'_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial v'_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}_z}{\partial z} + \frac{\partial w'_z}{\partial z} = 0 \quad (I)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}'_x}{\partial x} \Rightarrow \bar{u}'_x = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x}$$

پس می توان گفت محادله پیوستگی هم برای سرعت متوسط و هم برای Fluctuation برقرار است:

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}_z}{\partial z} = 0 \quad (II) \quad \text{I-II} \quad \& \quad \frac{\partial u'_x}{\partial x} + \frac{\partial v'_y}{\partial y} + \frac{\partial w'_z}{\partial z} = 0 \quad (III)$$

سرعت های متوسط و نوسان هر دو در محادله پیوستگی صدق می کنند.

مثال: محادله پیوستگی را برای جریان درهم و تراکم پذیر محاسبه کنید. (جریان یک بعدی فرض می شود)

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} = 0 \quad (st. st) \\ \Rightarrow (\bar{\rho} + \rho') \frac{\partial(\bar{u}_x + u'_x)}{\partial x} + (\bar{u}_x + u'_x) \frac{\partial(\bar{\rho} + \rho')}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \bar{\rho} \frac{\partial u'_x}{\partial x} + \rho' \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \rho' \frac{\partial u'_x}{\partial x} + \bar{u}_x \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} + \bar{u}_x \frac{\partial \rho'}{\partial x} + u'_x \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} + u'_x \frac{\partial \rho'}{\partial x} = 0$$

هرگاه از این رابطه Time Average گرفته شود، می توان نوشت:

$$\bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \bar{\rho} \frac{\partial u'_x}{\partial x} + \rho' \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \rho' \frac{\partial u'_x}{\partial x} + \bar{u}_x \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} + \bar{u}_x \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \bar{u}_x \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} + \bar{u}_x \frac{\partial \rho'}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \bar{u}_x) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho' u'_x) = 0$$

سرعت متوسط جریان \rightarrow مرتبه اول \rightarrow جریان ظاهری

بررسی معادله حرکت برای بیان تراکم ایندین (p. cte)

Navier-Stokes:

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g_x + \nu \left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right]$$

Time Average میگیریم

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} = (\bar{u}_x + u'_x) \frac{\partial (\bar{u}_x + u'_x)}{\partial x} = \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \bar{u}_x \frac{\partial u'_x}{\partial x} + u'_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + u'_x \frac{\partial u'_x}{\partial x} = 0$$

ok ... آنگاه مقادیر صفر است ← ok.

تا می‌توانیم برای استراتژی صورت متوسط بیان می‌شود. لیکن هر کدام از ترم‌های سمت چپ تبدیل به درترم می‌شوند. در نتیجه در هر جهت، ستارم به معادله اصلی اضافه می‌شود. هرگاه این ترم‌ها به سمت راست منتقل شوند، خواهیم داشت:

$$\bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} + \bar{w}_z \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \bar{g}_x + \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial z^2} \right]$$

$$- \underbrace{u'_x \frac{\partial u'_x}{\partial x} - v'_y \frac{\partial u'_x}{\partial y} - w'_z \frac{\partial u'_x}{\partial z}}_{\text{Shear Stress Fluctuation}}$$

Shear Stress Fluctuation

به آسانی نشان داده می‌شود که ستارم فرق می‌تواند بصورت تنش بیان شوند.

نکته: تنها تفاوت جریان آرام و درهم در این ستارم اضافی می‌باشد.

$$u'_x \frac{\partial u'_x}{\partial x} + v'_y \frac{\partial u'_x}{\partial y} + w'_z \frac{\partial u'_x}{\partial z} = \frac{\partial u'^2_x}{\partial x} + \frac{\partial u'_x v'_y}{\partial y} + \frac{\partial w'_z u'_x}{\partial z} - u'_x \left[\frac{\partial u'_x}{\partial x} + \frac{\partial v'_y}{\partial y} + \frac{\partial w'_z}{\partial z} \right]$$

$$\bar{u}'_x \frac{\partial \bar{u}'_x}{\partial x} + \bar{v}'_y \frac{\partial \bar{u}'_x}{\partial y} + \bar{w}'_z \frac{\partial \bar{u}'_x}{\partial z} = \frac{\partial \bar{u}'^2_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}'_x \bar{v}'_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}'_x \bar{w}'_z}{\partial z}$$

با توجه به معادله می‌توانی صفت

با جایگزینی این رابطه در معادله حرکت می توان نوشت: $(\rho = cte) \rightarrow$ غیر تراکم پذیر.

$$\bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} + \bar{w}_z \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \bar{g}_x + \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial z^2} \right] + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} (-\rho \overline{u_x'^2}) + \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \overline{u_x' v_y'}) + \frac{\partial}{\partial z} (-\rho \overline{u_x' w_z'}) \right]$$

همچنین می توان معادلات مشابهی در جهات y و z برای حالت حرکت بدست آورد. لذا، اگر تمام اصابی که بیان کننده تنش می باشد در حالت حرکت جریان در هم ظاهر و با عنوان **Turbulent stress** دیده می شوند.

Turbulent ; Reynolds ; Apparent stress.

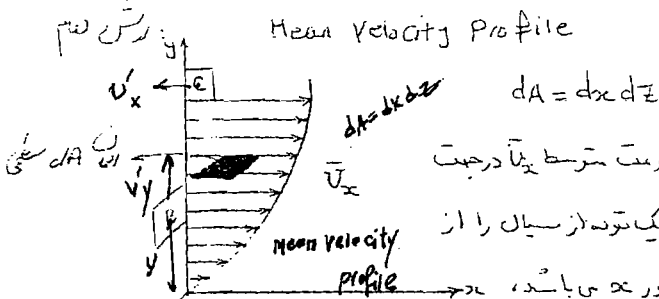
Additional stress

تنش اضافی $(\rho u_x' v_y')$

جهت نشان دادن ادعای مذکور از بحث Momentum Transfer استفاده می شود.

در این مدل:

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_{C.V} v_x \rho dV + \int_{C.S} v_x \rho v_y dA \right] \quad \text{و} \quad \frac{F}{A} = \rho v_x' v_y' = \tau_{xy}$$



این dA عمود بر محور z در نظر گرفته می شود و دارای سرعت متوسط \bar{v}_y در جهت

محور x می باشد. مولفه نوسانی سرعت در جهت z ، v_y' می تواند یک توده از سیال را از

نقطه B به نقطه C که دارای سرعت متوسط بیشتری در جهت محور x می باشد،

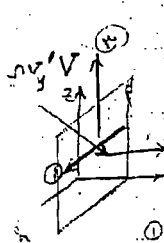
انتقال می دهد. مقدار سیال انتقال یافته در اثر حرکت این توده، از سطح مقطع dA عبور

می باشد. در اثر انتقال این مقدار سیال به نقطه C ، یک انتقال اندازه حرکت رخ می دهد، که با وجود آمدن یک

مولفه نوسانی سرعت در جهت محور x (u_x') در نقطه C می شود.

نکته: این انتقال سیال می تواند موجب به وجود آمدن مولفه های نوسانی سرعت در سایر جهات (v_y' و w_z') نیز شود.

میزان انتقال اندازه حرکت در جهات مختلف برابر است با: $\rho u_x' \cdot \text{Volume Flow rate } V_y \cdot dA \text{ m}^3/s$



$\rho V_y dA u_x'$; $\rho V_y dA v_y'$; $\rho V_y dA w_z'$
 میزان تغییرات اندازه حرکت معادل نیرویی است که موجب تغییرات شده است. در نتیجه محادل تنش (Stress) می باشد، لذا می توان نوشت: $dF' = \rho V_y' v_y' dA$ $\frac{dF'}{dA} = \rho V_y' v_y'$ $\tau_{xy} = -\rho V_y' v_y'$
 $\tau_{yx} = -\rho u_x' v_y'$; $\tau_{yy} = -\rho v_y'^2$; $\tau_{yz} = -\rho w_z' v_y'$

مانظری که مشاهده می شود، در تمام امانی در معادلات حرکت دیگرانین، Stress می باشد. نکته: علامت منفی با این علت ظاهری شود که هرگاه علامت v_y' مثبت باشد، سیال در نقطه ای که دارای سرعت متوسط بیشتری می باشد منتقل می شود. و این امر سبب بوجود آمدن مولفه های نوسانی سرعت با علامت منفی می شود. لذا عبارت $u_x' v_y'$ همواره منفی می باشد، به عبارت دیگر در این حرکت، این انتقال اندازه حرکت سبب کاهش اندازه حرکت در نقطه C می

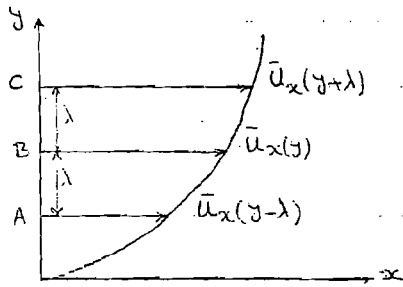
نظریه پراتل دوفرض دارد: مقدار متوسط سرعت نوسانی بصورت قدر مطلق، در یک نقطه مضمین درون سیال متناسب با فاصله متوسط است که یک توده سیال در حال نوسان بین دو برخورد متوالی طی می کند. عبارت دیگر مقدار متوسط سرعت نوسانی بصورت قدر مطلق محادل متوسط تغییرات سرعت متوسط سیال می باشد.

۲- مؤلفه های نوسانی سرعت که بر یکدیگر عمودند، از یک درجه بزرگی و ناهمبندی متناسب می باشند: (یعنی وقتی در یک جهت در حین داریم؛ حتماً در سایر جهات نیز داریم، البته می توانند در یک جهت کمتر از سایر جهات داشته باشند)

در فرض نمود توده ای از سیال از نقطه ۱ دارای سرعت (u, v) در حال نوسان به نقطه دیگر $(u + \lambda, v)$ دارای سرعت $(u + \lambda, v)$ منتقل شود. فاصله طول مترسبی است که توده سیال بین دو برخورد متوالی بدون از دست دادن هرگونه اندازه حرکت طی می کند.

Prandtl mixing length

This is the path on which the Fluid element loses its individuality by turbulent mixing with the surrounding liquid.



اختلاف سرعت بین دو نقطه $(y+\lambda)$ و y برابر است با $\lambda \frac{d(u_x(y))}{dy}$ (تفاوت در سرعت از آنجا که در این فاصله λ تغییر در سرعت رخ می‌دهد)

سرعت در نقطه C

$$\left[\bar{u}_x(y) + \frac{d\bar{u}_x(y)}{dy} \cdot \lambda \right] - \bar{u}_x(y) = \frac{d(\bar{u}_x(y))}{dy} \cdot \lambda$$

سرعت در نقطه A

بین دو نقطه $(y-\lambda)$ و y داریم:

$$\bar{u}_x(y) - \left[\bar{u}_x(y) - \frac{d\bar{u}_x(y)}{dy} \cdot \lambda \right] = \frac{d(\bar{u}_x(y))}{dy} \cdot \lambda$$

فرض اول:

$$|\bar{u}'_x| = \frac{1}{2} \left(\frac{d(\bar{u}_x(y))}{dy} \cdot \lambda + \frac{d(\bar{u}_x(y))}{dy} \cdot \lambda \right) \Rightarrow |\bar{u}'_x| = \lambda \left| \frac{d\bar{u}_x}{dy} \right|$$

فرض دوم:

$$|\bar{v}'_y| = A \lambda \left| \frac{d\bar{u}_x}{dy} \right|$$

A : برآوردی از $|\bar{u}'_x|$ و $|\bar{v}'_y|$ را به هم ربط می‌دهد.

$$\Rightarrow |\bar{u}'_x| \cdot |\bar{v}'_y| = A^2 \lambda^2 \left(\frac{d\bar{u}_x}{dy} \right)^2$$

حرفه‌ای

$$\bar{u}'_x \cdot \bar{v}'_y = -\frac{B}{\rho} \frac{|\bar{u}'_x| |\bar{v}'_y|}{|\bar{u}'_x| |\bar{v}'_y|} ; \bar{u}'_x \cdot \bar{v}'_y = -BA \lambda^2 \left(\frac{d\bar{u}_x}{dy} \right)^2$$

طول اختلاط برآورد

$$\frac{\tau_{xy}}{\rho} = -\rho \bar{u}'_x \bar{v}'_y = AB \rho \lambda^2 \left(\frac{d\bar{u}_x}{dy} \right)^2 ; L = \sqrt{AB} \lambda ; L: \text{Mixing Length}$$

با سیال است

$$\left(\frac{\tau_{xy}}{\rho} = \rho L^2 \left(\frac{d\bar{u}_x}{dy} \right)^2 \right) \rightarrow \frac{\tau_{xy}}{\rho} = \eta \frac{d\bar{u}_x}{dy} \rightarrow \eta = \rho L^2 \frac{d\bar{u}_x}{dy}$$

Eddy viscosity η برای جریان سیال است. ϵ kinematic Eddy viscosity فقط برای جریان است.

$$\epsilon = \eta / \rho$$

$$\eta = \rho L^2 \frac{d\bar{u}_x}{dy} \leftarrow \text{Eddy Viscosity}$$

$$\epsilon = \frac{\eta}{\rho} = L^2 \frac{d\bar{u}_x}{dy} \leftarrow \text{Kinematic Eddy Viscosity}$$

$$\epsilon = \frac{\eta}{\rho} = L^2 \left(\frac{d\bar{u}_x}{dy} \right)$$

شکل جریان \rightarrow \leftarrow نوع جریان

- پیرایش برای مطالباتش در جریان در هم فرض نمود. بصورت خطی با y تغییر کند. هرچه از صفحه برتر

نوع Fluctuation بیشتر می شود. K : Essential or Universal Constant $L = K y$ \rightarrow فرض باشد

τ_w : Shear Stress at wall = cte \rightarrow همین فرض نمود، نیروی تنش در نزدیکی دیواره ثابت باشد

$$\tau_w = \rho k^2 y^2 \left(\frac{d\bar{u}_x}{dy} \right)^2 \rightarrow \frac{d\bar{u}_x}{dy} = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \frac{1}{ky}$$

سرعت متوسط در جریان در هم: $\bar{u}_x = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \int \frac{dy}{ky}$
فاصله از سطح یا دیواره y \rightarrow تغییر می

$$\Rightarrow \bar{u}_x = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \ln y + C$$

$u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$: Shear Stress Velocity or Friction Velocity

$$\Rightarrow \bar{u}_x = u^* \left(\frac{1}{k} \ln y + \frac{C}{u^*} \right) \quad \text{B.C. 1 @ } y = y_0 \approx 0 : \bar{u}_x = 0$$

$$\rightarrow C = -\frac{u^*}{k} \ln y_0$$

at $y = y_0 \approx 0 \rightarrow \bar{u}_x = 0$ ~~(تعیین نوع نیروی تنش در نزدیکی دیواره)~~

فرض No-Slip در روی دیواره. در این جا جواب می دهد چون y با y_0 ازای $y = y_0$ جواب می دهد پس فرض

$$\bar{u}_x = 0 \quad @ \quad y \rightarrow y_0 \quad y_0 \approx 0$$

داریم No-Slip داریم $(y = y_0 = 0)$ جریان

$$\frac{\bar{u}_x}{u^*} = \frac{1}{k} \ln \frac{y}{y_0} = \frac{1}{k} (\ln y - \ln y_0)$$

$$u^+ = \frac{1}{k} \left[\ln y \cdot \frac{u^*}{v} - \ln y_0 \cdot \frac{u^*}{v} \right] \quad ; \quad \frac{y}{v/u^*} = \left(\frac{v}{u^*} \cdot \frac{m^2/s}{m/s} \right)$$

$$u^+ = \frac{1}{k} \ln y^+ + D \quad ; \quad y^+ = \frac{y}{v/u^*}$$

سرعت بدون بعد \rightarrow بدون بعد

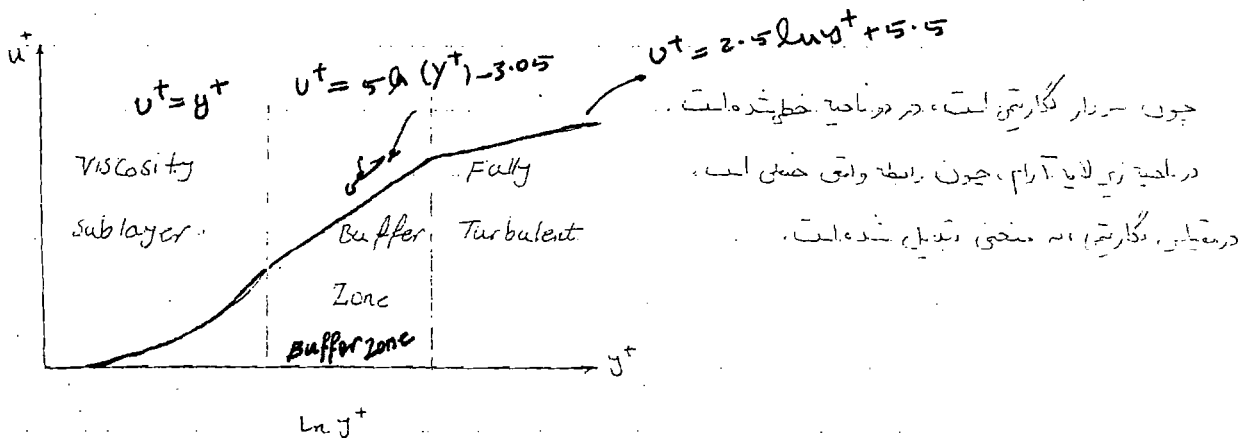
$$u^+ = \frac{1}{K} \ln y^+ + D \quad y^+ = \frac{y}{\delta^+}$$

ضرایب معادله فوق که بصورت تجربی بدست آمده اند. برای جریان سیال روی صفحه صاف عبارتند از:

$$u^+ = 2.54 \ln y^+ + 5.56$$

همچنین ضرایب معادله فوق بصورت تجربی توسط Nikuradse برای لوله های نرم تعیین شده اند:
 $4 \times 10^3 < Re < 3.2 \times 10^6$

$y^+ < 5$	$u^+ = y^+$	→	حالی نزدیک دیواره
$5 < y^+ < 30$	$u^+ = 5 \ln y^+ - 3.05$	→	حالت میانی
$y^+ > 30$	$u^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.5$	→	بهرین لوله رسیده ام



ماده میزبانی
 ۱- در نزدیکی دیواره ($y^+ < 5$) نوسانات کمتری است، در این حالت نوسانات در راستای لوله بیشتر از نوسانات در جهت عمودی هستند و نوسانات در سطح دیواره مغزری شوند. در این ناحیه میکروتی حاصل تعیین کننده جریان سیال است و رابطه بدست آمده معادله جریان آرام است.

$$\frac{\bar{u}_x}{u^+} = \frac{y u^+}{\nu} = y^+ \Rightarrow \bar{u}_x = y \cdot \frac{\tau_0}{\nu} = y \frac{\tau_0}{\mu}$$

$$\Rightarrow \tau_0 = \mu \frac{\bar{u}_x}{y}$$

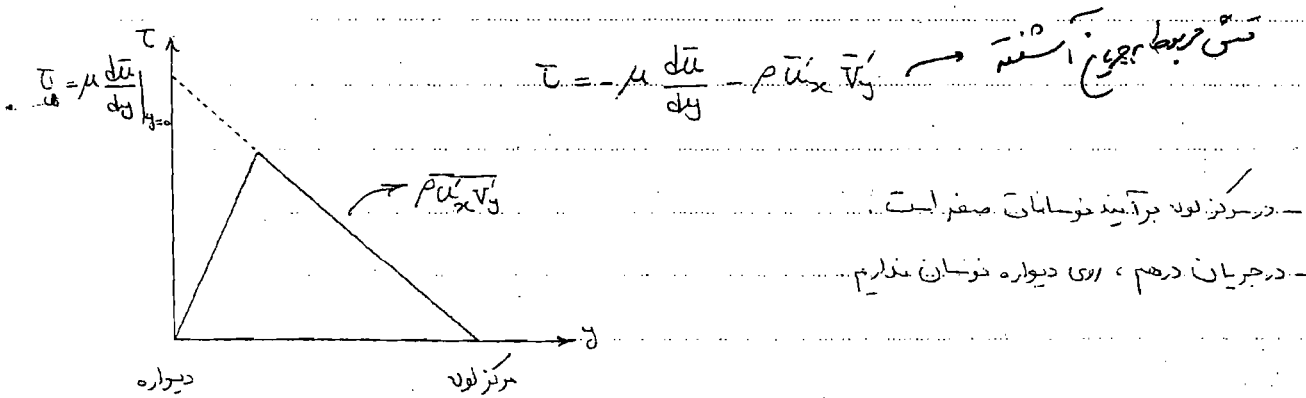
$$\tau = -(\mu + \mu') \frac{du}{dy} \rightarrow \tau = -\mu \frac{du}{dy} - \mu' \frac{du}{dy} \Rightarrow \tau = -\mu \frac{du}{dy} - \mu' \frac{du}{dy}$$

$$\tau = -\mu \frac{du}{dy} - \mu' \frac{du}{dy}$$

$$\tau = \frac{\tau_0}{y} = \mu \frac{u^+}{y} = \mu \frac{u^+}{\delta^+}$$

۲- در حالت میان ($30 < y^+ < 5$) تأثیرات جریان آرام و جریان درهم همزمان مشاهده می شوند.

۳- در مرکز لوله ($y^+ > 30$) میزان نوسانات بسیار قابل توجهی باشد و جریان درهم نقش اساسی خواهد داشت.



با توجه به مطالب ذکر شده و مکن معلوم می شود که انتقال اندازه حرکت در ناحیه وسیعی ناشی از جریان درهم می باشد و فقط در ناحیه همجوار دیواره انتقال اندازه حرکت در سطح مولکولی انجام می گیرد.

Nikuradse همچنین برای لوله های زبر رابطه تجربی زیر را پیشنهاد داده است:

$$u^+ = 2.5 \left(\ln y^+ - \ln \frac{\epsilon u^*}{\nu} \right) + 8.5$$

$$\frac{\epsilon u^*}{\nu} > 80$$

زبری بدون بعد

در شرایطی که $\frac{\epsilon u^*}{\nu} < 4$ باشد، رفتار لوله های زبر شبیه لوله های نرم می شود.

تا جایی که توزیع سرعت داریم، بهشت انتقال مومتم و نوسان می شود. اگر هر جایی توزیع سرعت نداشته باشیم، مانند مرکز لوله، در این صورت حتی اگر سیال منتقل شود، تأثیری ندارد و نوسان ایجاد نمی کند.

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = 2.5 \ln \frac{y}{\epsilon} + 8.5$$

مهم: هر جا توزیع سرعت نداشتهسیم؛ مثلاً مرکز لوله ←

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$

Subject

Date 37.9.10 (22)

مسئله: بررسی جریان آب داخل لوله

$v = 1.1 \times 10^{-5} \frac{ft^2}{s}$ $\rho = 1.94 \frac{slugs}{ft^3}$ $Q = 15 \text{ cfs}$

$D = 8'$ $\epsilon = 0.00085'$ $T_0 = 9.5 \frac{lb}{ft^2}$

(a) مطابق کتاب در مرکز لوله (b) مطابق حداکثر ماصلاهی که در آن ناحیه سرعت صفر می باشد.

(c) تکرار قسمت a با فرض لوله نرم.

a) $r = 0$; $y = (\frac{R}{12})' = (\frac{4}{12})' \rightarrow \frac{ft}{12}$

$U^* = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{9.5}{1.94}} = 2.2 \frac{ft}{s}$; $\frac{\epsilon U^*}{\nu} = \frac{0.00085 \times 2.2}{1.1 \times 10^{-5}} = 170 > 30 \Rightarrow$

$\bar{U} = U^* [2.5 \ln \frac{y}{\epsilon} + 3.5] = 2.2 [2.5 \ln \frac{1/3}{0.00085} + 3.5] \Rightarrow \bar{U} = 51.6 \frac{ft}{s}$

جدا؟
یکمونه

b) $\bar{U} = 0 = 2.2 [2.5 \ln \frac{y}{0.00085} + 3.5] \rightarrow y = 2.2 \times 10^{-5} \text{ ft}$

جواب چهارم یابین صفحه 87

همی سرعت آب در ناحیه $y = 2.2 \times 10^{-5}$ صفر می باشد.

c) $y^* = \frac{y U^*}{\nu} = 66666 > 30$

$\bar{u} = U^* [2.5 \ln y^* + 5.5] = 73.2 \frac{ft}{s}$



لایه مرزی

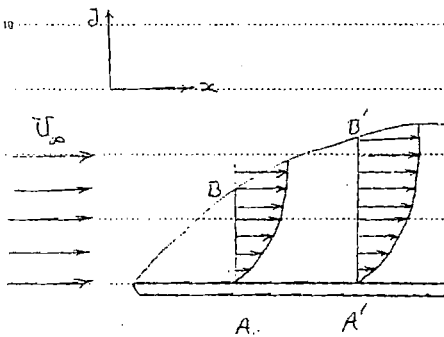
برای اولین بار Prandtl نشان داد که در اکثر جریان های ویسکوز دو نلیمیت متناهی وجود دارد:

- ۱- ناحیه ای نزدیک به سطح جامد که در آن اثرات ویسکوزیته شاهده می شود
- ۲- ناحیه ای که در آن اثرات ویسکوزیته دیده نمی شود

سیال در ناحیه اول (لایه مرزی) ویسکوز در نظر گرفته می شود در حالی که در ناحیه دوم غیر ویسکوز فرض می شود.

نکته: در ناحیه ای که نردبان سرعت زیاد باشد، از اثرات ویسکوزیته نمی توان صرف نظر کرد.

ابتدا باید مقدار $\frac{dP}{dx}$ با فرض جریان غیر چرخشی (در خارج از لایه مرزی) محاسبه شود، سپس توزیع سرعت در داخل لایه مرزی قابل محاسب می باشد.



شکل لایه مرزی روی اجسام صاف: $\frac{dP}{dx} = 0$

B.C.1: at $x, x', y=0$: $U=0$ (No-Slip)

B.C.2: at B $y=\delta_1$: $U=U_\infty$ یا $0.99 U_\infty$

B.C.3: at B' $y=\delta_2$: $U=U_\infty$

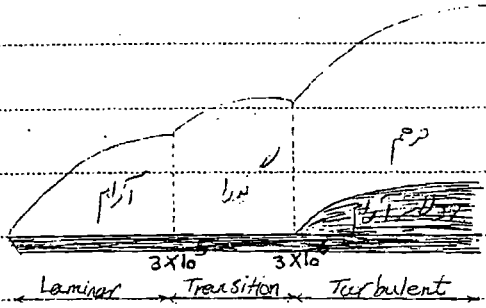
هدف: مطالعه ضخامت لایه مرزی است

از صفحه سطح این است که سرعت سیال را در نقطه تماس (شرط No-Slip) صفر می کند. لیکن با افزایش فاصله در راستای آن سرعت افزایش می یابد و در نقطه ای (مرز لایه مرزی) به حداکثر میزان خود (U_∞) می رسد.

هرچه فاصله از ابتدای صفحه بیشتر می شود، ضخامت لایه مرزی نیز افزایش می یابد: $\delta_2 > \delta_1$ $\delta = \delta(x)$

پیرایش: $Re > CD$
Laminar Turbulent

علت: با توجه به تعریف عدد رینولدز $(\frac{U_\infty x}{\nu})$ ، با افزایش فاصله x ، مقدار Re افزایش یافته و مقدار Re کاهش می یابد در نتیجه نیروی دگن (بلندارنده) کاهش می یابد، این امر موجب کاهش گرادیان سرعت و افزایش ضخامت لایه مرزی می شود. این استدلال برای احتمال از جریان آرام به درهم نیز صادق می باشد. عبارت دیگر با افزایش فاصله انتقال از لایه مرزی آرام به لایه مرزی درهم نیز صورت می گیرد. در نتیجه ضخامت لایه مرزی درهم بیشتر از ضخامت لایه مرزی آرام است.



در مقایسه بین جریان روی صفت تخت و داخل لوله، اثر جاذبه ایستاده طولی روی صفت از لوله بسیار بزرگتر است، بنابراین در Re بزرگتری جریان تبدیل می شود.

حل معادلات حرکت (سیستم دو بعدی)

Prandtl - Blasius روش

معادله زیر را در لایه مرزی، در نظر می گیریم.

معادله پیوستگی:
$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

همیشه باید معادله پیوستگی را در نظر بگیریم، اما در بعضی موارد به نتایج بدیسی می ریم.

معادله حرکت در جهت x:
$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right]$$

این معادله را حذف می کنیم.

معادله حرکت در جهت y:
$$u_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left[\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right]$$

برای ارزیابی از روش Order of Magnitude استفاده کرده ایم.

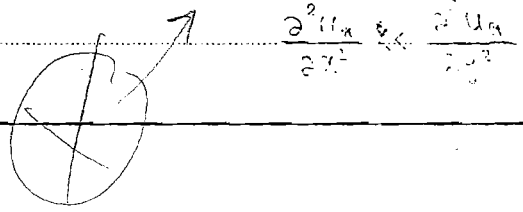
نسبت ها را در کنار هم مقایسه می کنیم و آنکه کوچکتر است را نادیده می گذاریم. $u_x \gg v_y$ و $x \gg y$ نسبت بزرگتر را هم نادیده می گذاریم و آنکه کوچکتر است را نادیده می گذاریم. $u_x \gg x$ و $v_y \gg y$ و $\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \gg \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$ و $\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} \gg \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

می توان یکی از آن ها را حذف کرد: $(\frac{1}{\rho} + 0)$

معادله حرکت در جهت x، چون ρ کم است، از اختلاف فشار استاتیکی صرف نظر می کنیم. $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$

معادله حرکت در جهت x:
$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = \nu \left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right]$$



Subject:

Year. 87 Month. 9 Date. 12 23

$$H(z) = \frac{df(z)}{dz}$$

تعريف من كتاب: ρ دالة هولومورف في منطقة D تعريف $f(z)$

$$dz = \left(\frac{U_0}{\sqrt{x}}\right)^{0.5} dy \rightarrow dy = \left[\frac{\sqrt{x}}{U_0}\right]^{0.5} dz$$

$$\Rightarrow \psi = \int U_0 \frac{df(z)}{dz} \left[\frac{\sqrt{x}}{U_0}\right]^{0.5} dz = \left(\frac{U_0 \sqrt{x}}{U_0}\right)^{0.5} f(z)$$

معامل U_0 ثابت \Rightarrow $\frac{\partial \psi}{\partial x} = \dots$

$$\textcircled{1} \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{U_0 \sqrt{x}}{U_0}\right)^{0.5} f'(z) \left(\frac{U_0}{\sqrt{x}}\right)^{0.5} = U_0 f'(z)$$

$$\textcircled{2} \frac{\partial z}{\partial x} = y \left(\frac{U_0}{\sqrt{x}}\right)^{-1.5} (-0.5x^{-1.5}) = -0.5y \frac{1}{x} \left(\frac{U_0}{\sqrt{x}}\right)^{0.5} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -0.5 \frac{z}{x}$$

$$\textcircled{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[U_0 f'(z) \right] = U_0 \frac{\partial f'(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = U_0 f''(z) \left(-0.5 \frac{z}{x}\right) = -0.5 U_0 \frac{z}{x} f''(z)$$

$$\textcircled{3} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{U_0 \sqrt{x}}{U_0}\right)^{0.5} f(z) \right] = \left(\frac{U_0 \sqrt{x}}{U_0}\right)^{-0.5} (-0.5x^{-0.5}) f(z) - \left(\frac{U_0 \sqrt{x}}{U_0}\right)^{0.5} \frac{\partial f(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$= -0.5 \left[\frac{U_0 \sqrt{x}}{U_0}\right]^{-0.5} f(z) + 0.5 \frac{z}{x} \left(\frac{U_0 \sqrt{x}}{U_0}\right)^{0.5} f'(z) = 0.5 \left[\frac{U_0 \sqrt{x}}{U_0}\right]^{-0.5} \left(\frac{z}{x} f'(z) - f(z) \right)$$

$$\textcircled{4} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[U_0 f'(z) \right] = U_0 \frac{\partial f'(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = U_0 f''(z) \left[\frac{U_0}{\sqrt{x}}\right]^{0.5}$$

$$\textcircled{5} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[U_0 f''(z) \left(\frac{U_0}{\sqrt{x}}\right)^{0.5} \right] = U_0 \left[\frac{U_0}{\sqrt{x}}\right]^{0.5} f'''(z) \frac{\partial z}{\partial y} = U_0 \left(\frac{U_0}{\sqrt{x}}\right)^{0.5} f'''(z) \left(\frac{U_0}{\sqrt{x}}\right)^{0.5}$$

$$= U_0 \left(\frac{U_0}{\sqrt{x}}\right) f'''(z)$$

در حالت حرکت است x
 $0.5 U_{\infty} \frac{f' U_{\infty} z}{x} f'' - 0.5 \left(\frac{U_{\infty} U}{x} \right)^{0.5} (zf' - f) U_{\infty} f'' \left(\frac{U_{\infty}}{U_{\infty}} \right)^{0.5} = - \frac{U_{\infty}^2}{x} f'''$

$\Rightarrow 0.5 \frac{U_{\infty}^2 z}{x} f' f'' - 0.5 \frac{U_{\infty}^2 z}{x} f' f'' + 0.5 \frac{U_{\infty}^2}{x} f f'' - \frac{U_{\infty}^2}{x} f'''$

$\Rightarrow 0.5 \frac{U_{\infty}^2}{x} f f'' + \frac{U_{\infty}^2}{x} f''' = 0 \Rightarrow 0.5 f f'' + f''' = 0$

شرایط مرزی

$y=0 \rightarrow z=0: \begin{cases} u_x=0 \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \rightarrow f' = 0 \\ v_y=0 \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \rightarrow f = 0 \end{cases}$

$z=5 \rightarrow z = \frac{\delta}{x} Re^{0.5} = U_{\infty} \rightarrow f' = 1$

در این حالت $\begin{cases} u_x = - \frac{\partial \psi}{\partial y} = U_{\infty} f' \\ v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0.5 \left(\frac{U_{\infty} U}{x} \right)^{0.5} (zf' - f) \end{cases}$

جواب حالات فوق بصورت زیر ارائه شده است: $f = A_0 + A_1 z + \frac{A_2}{2!} z^2 + \dots + \frac{A_n}{n!} z^n$

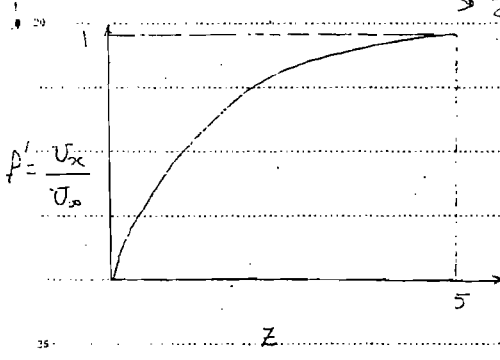
پس با استفاده از شرایط مرزی داریم، بنابراین از این شرایط می توان نوشت:

چرا این بر توان 8.5.2 ؟

$f = (0.166603) z^2 - (4.59 \times 10^{-4}) z^5 + (2.42 \times 10^{-6}) z^8 + \dots$ (از بقیه جمله های اولی نادیده)

$\frac{U_x}{U_{\infty}} = f' = 0.333206 z - 2.295 \times 10^{-3} z^4 + 1.992 \times 10^{-5} z^7 \Rightarrow f'' \Big|_{z=0} = 0.333206$

شکل نموداری مولفه سرعت در راستای x بصورت زیر می باشد:
 (در این z می توان f' را استخراج کرد)



$z = 5 = \frac{y}{x} Re^{0.5} \quad \frac{U_x}{U_{\infty}} = 1 \Rightarrow y = 8$

$\frac{8}{x} = \frac{5}{Re^{0.5}}$

مکان z در x

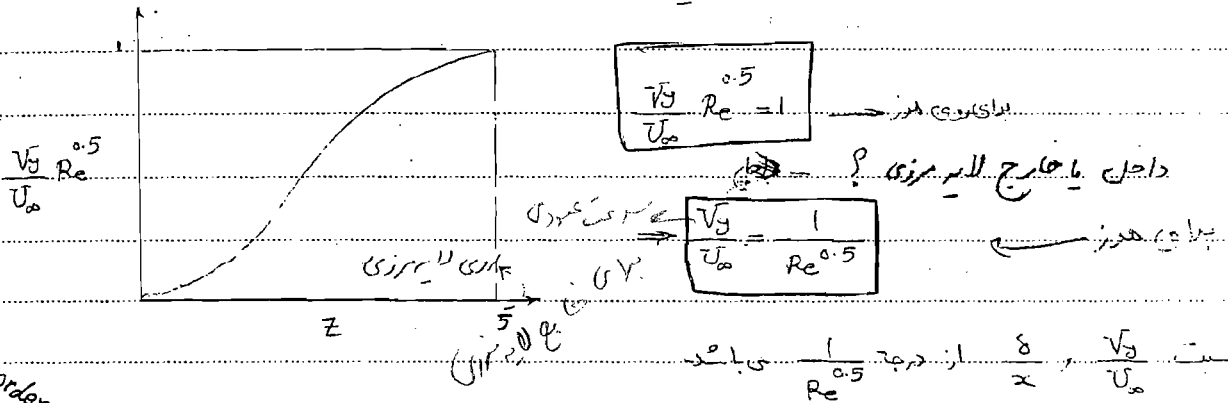
تقریباً $z = 5$ در $Re^{0.5}$
 برای z می توان f' را استخراج کرد

Subject:

Year: 67 Month: 9 Date: 12/23

$$V_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \left(\frac{U_\infty x}{\nu} \right)^{0.5} \cdot 0.5 [Z P' - P] \Rightarrow \frac{V_y}{U_\infty} Re^{0.5} = 0.5 (Z P' - P)$$

شکل نموداری مؤلفه سرعت در راستای Z بصورت زیر می باشد.



نسبت $\frac{\delta}{x}$ از درجه $\frac{1}{Re^{0.5}}$ می باشد.

Order of magnitude

تقریباً (مطلوب است) محاسبه C_D و C_F برای یک صفحه تخت.

$$C_F = \mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right] = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial y} \right)$$

$$C_F = \mu \frac{\partial}{\partial Z} \left(U_\infty P' \right) \left(\frac{U_\infty}{\nu x} \right)^{0.5} = \mu U_\infty \left(\frac{U_\infty}{\nu x} \right)^{0.5} P''$$

برای P از P برت 0.5 یا 0.5 در 0.5 تا 0.5

$$C_F = C_F \Big|_{y=0} = \mu U_\infty \left(\frac{U_\infty}{\nu x} \right)^{0.5} P'' \Big|_{Z=0} \Rightarrow C_F = 0.333206 \mu U_\infty \left(\frac{U_\infty}{\nu x} \right)^{0.5}$$

ضریب درگ محلی

$$C_D = \frac{C_F}{0.5 \rho U_\infty^2} = \frac{0.666}{Re^{0.5}}$$

نسبت رابطه $\frac{\delta}{x}$ است

ضریب درگ بر واحد عرض صفحه

$$F_D = \int_0^L C_D dx = \int_0^L 0.333 \mu U_\infty \left(\frac{U_\infty}{\nu x} \right)^{0.5} dx \quad (\text{کلی})$$

$$F_D = 0.666 (\rho \mu U_\infty L)$$

$$\bar{C}_D = \frac{F_D}{0.5 \rho U_\infty^2 L} = \frac{1.332}{\left(\frac{U_\infty L}{\nu} \right)^{0.5}} = \frac{1.332}{Re^{0.5}}$$

$$\bar{C}_D = \frac{1}{L} \int_0^L C_D dx$$

\bar{C}_D : یک ضریب درگ کلی برای تمام صفحه به سبب می دهد

نسبت $\frac{\delta}{x}$ یا $\frac{\delta}{L}$

تعیین ضخامت لایه مرزی جریان اشفت:

برای تعیین ضخامت لایه مرزی در جریان اشفت و از معادله Von Karman استفاده می شود.

در این حالت می توان از معادله توزیع سرعت سیال در داخل لایه مرزی استفاده کرد.

$$\left(\frac{u_x}{u_\infty}\right) = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}$$

اشکال معادله برآورد این است که فقط برای رژیم آرام صحیح است.

$$\frac{du_x}{dy} = \frac{u_\infty}{7 \delta^{1/7} y^{6/7}}$$

$$\left. \frac{du_x}{dy} \right|_{y=0} \approx \text{نامعین}$$

این رابطه نیز این معنی در رابطه تعیین با سطح جامد را به ما می دهد.

چون y در مخرج است امکان تعیین τ_0 وجود ندارد بنابراین جهت محاسبه τ_0 از روابط تجربی استفاده می

$$\tau_0 = \frac{1}{8} f \rho \bar{u}_x^2 \quad ; \quad f = \frac{0.316}{N_{Re}^{0.25}} \quad ; \quad N_{Re} = \frac{D \bar{u}_x \rho}{\mu} = \frac{2\delta \cdot \bar{u}_x \cdot \rho}{\mu}$$

$$\bar{u}_x = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta u_x dy = 0.817 u_\infty$$

$$N_{Re} = \frac{2\delta \cdot 0.817 u_\infty \cdot \rho}{\mu} = \frac{1.634 \delta \rho u_\infty}{\mu}$$

$$\tau_0 = 0.0225 \rho u_\infty^2 \left(\frac{\nu}{u_\infty \delta}\right)^{0.25}$$

$$\text{درج: } \tau_0 = \rho u_\infty^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^\delta \frac{u_x}{u_\infty} \left(1 - \frac{u_x}{u_\infty}\right) dy \right]$$

Von Karman

$$\rightarrow 0.0225 \rho u_\infty^2 \left(\frac{\nu}{u_\infty \delta}\right)^{0.25} = \rho u_\infty^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \left(1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\right) dy \right]$$

$$\rightarrow 0.0225 \left(\frac{\nu}{u_\infty \delta}\right)^{0.25} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{7}{72} \delta\right) = \frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx}$$

$$\rightarrow \delta^{0.25} \times d\delta = 0.231 \left(\frac{\nu}{u_\infty}\right)^{0.25} dx$$

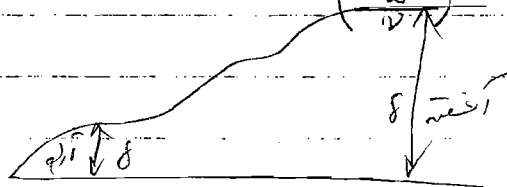
$$\rightarrow 0.8 \delta^{1.25} = 0.231 \left(\frac{\nu}{u_\infty} \right)^{0.25} x + A$$

BC: @ $x=0$; $\delta=0 \rightarrow A=0$

نکته: این شرط مرزی صحیح نیست. متعاقباً در مورد آن صحبت می‌شود.

$$\rightarrow \delta = 0.37 \left(\frac{\nu}{u_\infty} \right)^{0.2} x^{0.8} \rightarrow \frac{\delta}{x} = \frac{0.37}{(u_\infty x)^{0.2}}$$

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0.37}{N_{Re}^{0.2}}$$



نکته: این رابطه با رابطه جریان آرام، مشاهده می‌شود. ضخامت لایه مرزی در جریان آشفته بیشتر است.

تقریباً f: مطلوب است محاسبی F_D , \bar{C}_D , C_D در جریان آشفته روی یک صفحه تخت.

$$F_D = \int_0^L \tau_0 dx = \int_0^L 0.0225 \rho u_\infty^2 \left(\frac{\nu}{u_\infty \delta} \right)^{0.25} dx = 0.0225 \rho u_\infty^2 \left(\frac{\nu}{u_\infty} \right)^{0.25} \int_0^L \left(\frac{N_{Re}^{0.2}}{0.37 x} \right) dx$$

$$= 0.0288 \rho u_\infty^2 \left(\frac{\nu}{u_\infty} \right)^{0.25} \left(\frac{u_\infty}{\nu} \right)^{0.05} \int_0^L x^{-0.2} dx$$

$$= 0.0288 \rho u_\infty^2 \left(\frac{\nu}{u_\infty} \right)^{0.2} (1.25 L^{0.8}) = 0.036 \rho u_\infty^2 \left(\frac{\nu}{u_\infty L} \right)^{0.2} L$$

$$\rightarrow F_D = \frac{0.036 \rho u_\infty^2 L}{N_{Re}^{0.2}}$$

$$\bar{C}_D = \frac{0.072}{N_{Re}^{0.2}}$$

$$\bar{C}_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2 L}$$

$$C_D = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2} \rightarrow \boxed{C_D = \frac{0.057}{N_{Re}^{0.2}}}$$

همچنین می‌توان مقدار \bar{C}_D را از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$\bar{C}_D = \frac{1}{L} \int_0^L C_D dx$$

Schlichting برای جریان آشفته رابطه تجربی زیر را پیشنهاد کرده است

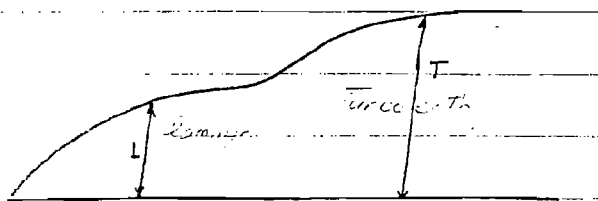
$$\overline{C_D} = \frac{0.074}{N_R^{0.2}}$$

دقت بیشتری دارد

نکته: همانطور که اشاره شد، فرض تشکیل لایه مرزی آشفته از ابتدای صفحه درست نیست و در عمل لایه مرزی آرام ابتدا تشکیل می‌گردد و سپس به لایه مرزی آشفته تبدیل می‌شود. انتقال از لایه مرزی آرام به

لایه مرزی آشفته به N_R بستگی دارد

* انتقال (Transition) برای صفحه مسطح در محدوده $3 \times 10^5 < N_{R,L}^* < 3 \times 10^6$ (روی می‌دهد)



نظر: برای محاسبه $\overline{C_D}$ واقعی چون در ابتدای صفحه جریان آرام است ولی ما متلام گرفتیم. به اندازه آرام اضافه و متلام کم می‌کنیم

$$\overline{C_D} = \frac{0.074}{N_{R,L}^{0.2}} + \frac{0.074}{N_{R,L}^{0.2}} + \frac{1.332}{N_{R,L}^{0.5}}$$

عمل تغییر دسیم

$C_D > \overline{C_D}$ آرام

$$\overline{C_D} = \frac{0.074}{N_{R,L}^{0.2}} \left[\frac{0.074}{N_{R,L}^{0.2}} + \frac{1.332}{N_{R,L}^{0.5}} \right]$$

کسر متلام کم

وجود لایه مرزی آرام در ابتدای صفحه سبب افزایش نیروی دراز می‌شود زیرا

$$C_{D,Laminar} > C_{D,Turbulent}$$

به منظور اصلاح رابطه ابتدا باید نیروی دراز از ابتدای صفحه تا نقطه L^* (نقطه بحرانی) را از کل نیروی دراز کم و

پس مقدار معادل آن (حاصل از لایه مرزی آرام) را به کل نیروی دراز اضافه کنیم

$$\overline{C_D} = \frac{0.074}{N_{R,L}^{0.2}} - \frac{A}{N_{R,L}}$$

تقریب: نشان دهید

فردی کل سرعت را با هم با هم اشتباه

A	1050	1700	3300	8700
$N_{R,L}^*$	3×10^5	5×10^5	10^6	3×10^6

$$\checkmark \text{ حل: } \overline{C_D} = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2 L} = \frac{1}{\rho u_\infty^2 L} \left[\frac{0.074 \rho u_\infty^2 L}{N_{R,L}^{0.2}} - \frac{0.074 \rho u_\infty^2 L^*}{N_{R,L}^{0.2}} + \frac{1.332 \rho u_\infty^2 L}{N_{R,L}^{0.5}} \right]$$

$$\rightarrow \overline{C_D} = \frac{0.074}{N_{R,L}^{0.2}} - \left[\frac{0.074}{N_{R,L}^{0.2}} - \frac{1.332}{N_{R,L}^{0.5}} \right] \frac{L^*}{L}$$

$$\frac{L^*}{L} = \frac{N_{R,L}^*}{N_{R,L}} \rightarrow \overline{C_D} = \frac{0.074}{N_{R,L}^{0.2}} - \frac{1}{N_{R,L}} \left(0.074 N_{R,L}^{0.8} - 1.332 N_{R,L}^{0.5} \right)$$

$$\rightarrow \boxed{\overline{C_D} = \frac{0.074}{N_{R,L}^{0.2}} - \frac{A}{N_{R,L}}}$$

این رابطه در محدوده‌ای می‌تواند صحیح می‌گردد. $\star 5 \times 10^5 < N_{R,L} < 10^7 \star$

Schlichting رابطه تجربی زیر را برای محاسبه نیروی دراز در محدوده $10^7 < N_{R,L}$

$$\boxed{\overline{C_D} = \frac{0.455}{(\log N_{R,L})^{2.58}}}$$

محدوده منظور در نظر گرفتن تشکیل لایه مرزی آرام در ابتدای صفحه باید رابطه Prandtl - Schlichting مورد استفاده قرار

$$\boxed{\overline{C_D} = \frac{0.455}{[\log N_{R,L}]^{2.58}} - \frac{A}{N_{R,L}}}$$

Where $\star N_{R,L} < 10^9 \star$

تقریب 5: بررسی جریان آب بر روی یک صفحه صاف در جریان آشفته و تعیین ضریب نیروی دراز

$$A = 1 \times 1 \text{ ft}^2, \quad u_\infty = 50 \frac{\text{ft}}{\text{s}}, \quad \nu = 10^{-5} \frac{\text{ft}^2}{\text{s}}, \quad \rho = 1.94 \frac{\text{slug}}{\text{ft}^3}, \quad N_{R,L}^* = 5 \times 10^5$$

\bar{C}_D , $F_{D \text{ Laminar}}$, F_D , L^* ↓
 (تقریباً) \leftarrow (تقریباً) \leftarrow (تقریباً) \leftarrow (تقریباً) \leftarrow

$$\checkmark \text{ حل: } N_{R,L} = \frac{u_\infty \cdot L}{\nu} = \frac{50 \times 1}{10^{-5}} = 5 \times 10^6$$

$$\bar{C}_D = \frac{0.074}{N_{R,L}^{0.2}} \cdot \frac{1700}{N_{R,L}} = 0.003$$

$$F_D = \frac{1}{2} \bar{C}_D \rho u_\infty^2 A = 7.4 \text{ lbf}$$

$$L^* = \frac{N_{R,L}^* \times \nu}{u_\infty} \rightarrow L^* = 0.1'$$

$$\bar{C}_{D \text{ Laminar}} = \frac{1.332}{N_{R,L}^{*0.5}} \rightarrow \bar{C}_{D \text{ Laminar}} = 0.0019$$

$$F_{D \text{ Laminar}} = \frac{1}{2} \bar{C}_D \rho u_\infty^2 A^* \rightarrow F_{D \text{ Lam}} = 0.46 \text{ lbf}$$

A^* و $L^*/10$ از طول است

A. 1700

تقریباً 4: بررسی حرکت هواپیما در جریان آشفتگی و تعیین توان مورد نیاز آن (با توجه به اطلاعات داده شده)

$$L = 785'$$

$$\rho = 0.0017 \frac{\text{slug}}{\text{ft}^3}$$

$$D = 123'$$

$$\mu = 3.7 \times 10^{-7} \frac{\text{lb} \cdot \text{s}}{\text{ft}^2}$$

$$u_{\infty} = 123 \frac{\text{ft}}{\text{s}}$$

حل: $N_{R,L} = \frac{\rho \cdot D \cdot u_{\infty}}{\mu} = \frac{0.0017 \times 123 \times 785}{3.7 \times 10^{-7}} = 4.4 \times 10^8$ محدوده مع

$$\overline{C_D} = \frac{0.455}{(\log N_{R,L})^{2.58}} \frac{1700}{N_{R,L}} = 0.0017$$

در طول این مسیر با 1700

$$F_D = \frac{1}{2} \rho u_{\infty}^2 \overline{C_D} (\pi D L)$$

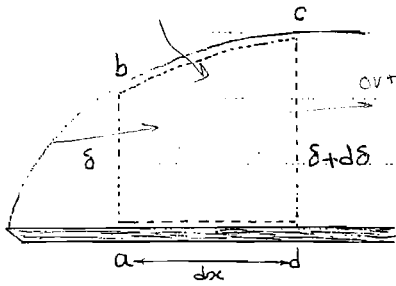
$$F_D = \frac{1}{2} \times 0.0017 \times 0.0017 \times 123^2 \times \pi \times 123 \times 785 = 7500 \text{ lb}$$

سطح در تماس با مایع هواپیما

$$P = \frac{F_D}{D} \times V = 1677 \text{ hp}$$

Page No. Name

اوجس دن کارمن



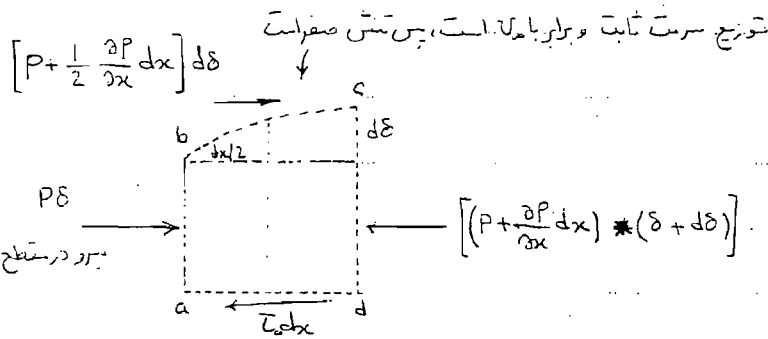
یک تکه از لایه مری و یک تکه از سطح را در نظر می گیریم و جمع جبری جرم در صورتی را روی این المان می نویسیم: موازنه لحاظ مختلف را در این المان + عرض صفحه و واحد در نظر گرفته می شود. انجام کار

جرم ورودی به المان: $m_{ab} = \int_a^{\delta} \rho u_x dy$

جرم خروجی از المان: $m_{cd} = \int_a^{\delta} \rho u_x dy + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_a^{\delta} \rho u_x dy \right) dx$

جمع جبری جرم ها: $m_{bc} = m_{cd} - m_{ab} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_a^{\delta} \rho u_x dy \right) dx$

موازنه جرم



حال جمع جبری نیروها را می نویسیم:

$$\sum f_x = P\delta + P d\delta + \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x} dx d\delta - P\delta - P d\delta - \frac{\partial P}{\partial x} dx \delta - \frac{\partial P}{\partial x} dx d\delta - \tau_0 dx$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x} dx d\delta - \frac{\partial P}{\partial x} dx \delta - \tau_0 dx$$

$dx d\delta \ll dx \delta \Rightarrow \sum f_x = -\left(\frac{\partial P}{\partial x} \delta + \tau_0\right) dx$

موازنه نیرو

مومنم ورودی از ab: $F_{m_{ab}} = \int_a^{\delta} \rho u_x^2 dy$

مومنم خروجی از cd: $F_{m_{cd}} = \int_a^{\delta} \rho u_x^2 dy + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_a^{\delta} \rho u_x^2 dy \right) dx$

مومنم ورودی از bc: $F_{m_{bc}} = \rho u_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_a^{\delta} \rho u_x dy \right) dx$

موازنه نیرو

Subject

Date

$\Sigma F = \text{Momentum out} - \text{Momentum in}$

منفی های طرفین حذف شد

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} \delta + \tau_w\right) dx = \left[u_\infty \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta \rho u_x dy \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta \rho u_x^2 dy \right) \right] dx$$

بسیار ساده از معادله برنولی

$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \rightarrow u_\infty = \text{const.}$

δ : Momentum thickness

$$\Rightarrow \tau_w = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho u_x u_y dy - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho u_x^2 dy \Rightarrow \tau_w = \rho u_\infty^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \frac{u_x}{u_\infty} \left[1 - \frac{u_x}{u_\infty} \right] dy$$

* معادله وین کاربن در حالت کلی:

زمانی است که $\frac{\partial p}{\partial x}$ را حذف نکنیم و با استفاده از رابطه برنولی جوی $\frac{\partial p}{\partial x}$ را جاگذاری می کنیم. در صفحه سطح

$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u_\infty}{\partial x} \neq 0$ عدم جزئی

$\frac{\partial u_\infty}{\partial x} = 0$ بوده و مثل معادله قبل می شود.

$$\tau_w = \rho \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u_\infty^2 \int_0^\delta \frac{u}{u_\infty} \left(1 - \frac{u}{u_\infty} \right) dy \right) + u_\infty \left(\frac{\partial u_\infty}{\partial x} \right) \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_\infty} \right) dy \right]$$

δ^* : Displacement thickness

momentum thickness

* سطحی است که تا اثر کم شدن دبی جری را بیان می کند. وجود صفحه باعث ایجاد تلاطمی می شود که منجر به کاهش

دبی می شود. یک فضای فرضی است که دبی ای که در آن ضخامت متغیر می شود برابر با میزان کم شدن دبی به علت وجود

صفحه می باشد. اگر صفحه پهن باشد δ^* دبی بیشتر می شود

⑤ ضخامت فرضی است که کاهش مومنتم در اثر وجود صفحه را نشان می دهد، مومنتم که در آن جابجا می شود، برابر با افتادن

بین مومنتم عرقی صفحه وجود دارد و وقتی صفحه وجود ندارد.

II *

$$\int_0^{\delta} \rho u_{\infty} dy = \rho u_{\infty} \delta$$

در جری سیال در حالتی که جسم جامد نداریم

$$\int_0^{\delta} \rho u dy$$

در حالتی که جسم جامد داریم

اختلاف دبی جری

$$\int_0^{\delta} \rho (u_{\infty} - u) dy$$

گاهش دبی

میزان کاهش دبی جری سیال باعث وجود جسم جامد

الرحیم خواهد بود این دبی با سرعت u_{∞} بیاید

δ^* حرف ضخامت از لایه مرزی است که معروف این کاهش دبی می باشد. وقتی صفحه نداریم با ضخامت δ^*

یعنی وجود صفحه باعث شده که اندازه δ^* از لایه مرزی کمتر شود

$$\rho u_{\infty} \delta^* = \int_0^{\delta} \rho (u_{\infty} - u) dy \rightarrow \delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{u_{\infty}}\right) dy$$

اختلاف دبی وجود صفحه در عدم وجود آن

وقتی دبی جری سیال در اثر حضور جسم جامد کاهش می یابد گوی سیال از ضخامت کمتری برابر با $(\delta - \delta^*)$ عبور می کند.

II *

وجود جسم جامد تأثیراتی در کاهش اندازه حرکت سیال عبوری از روی جسم جامد دارد. هرگاه کاهش دبی جری سیال معادل

$$\int_0^{\delta} \rho (u_{\infty} - u) dy$$

باشد میزان کاهش اندازه حرکت معادل $\int_0^{\delta} \rho u (u_{\infty} - u) dy$ خواهد بود.

معادل ضخامت از لایه مرزی است که در آن مقدار اندازه حرکت سیال معادل مقدار کاهش یافته اندازه حرکت می باشد.

$$\rho u_{\infty}^2 \delta^* = \int_0^{\delta} \rho u (u_{\infty} - u) dy \Rightarrow \delta^* = \int_0^{\delta} \frac{u}{u_{\infty}} \left(1 - \frac{u}{u_{\infty}}\right) dy$$

بمعادلات دیگر اگر جسم جامد بر دانه شود باید بداند اندازه δ^* از لایه مرزی کم کنیم تا مقدار اندازه حرکت بدون تغییر باقی بماند.

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left[\frac{u}{u_{\infty}} \left(1 - \frac{u}{u_{\infty}}\right) \right] dy$$

عدم توجه به این

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \frac{du}{dx}$$

اجسام مسطح : $\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \frac{du}{dx}$

در داخل لوله پیرا سیال $\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \frac{du}{dx}$

جهت حل باید δ^* را دانسته باشیم و همچنین توزیع سرعت را دانسته باشیم، تا در نهایت تابع δ بدست آید.

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -\frac{u_{\infty}}{g} \frac{du}{dx}$$

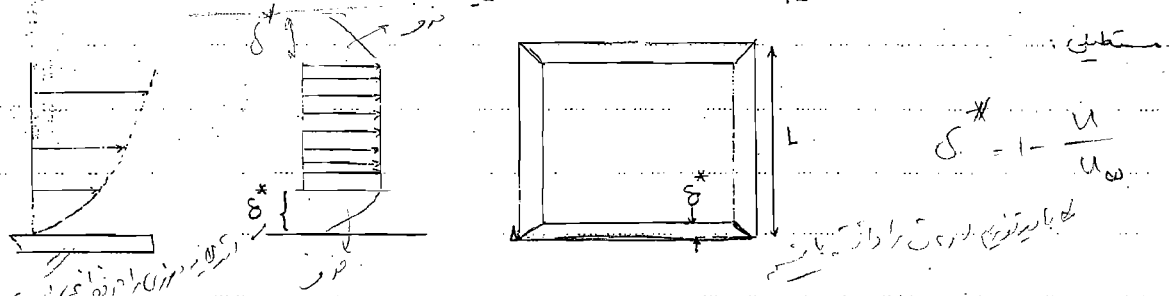
با استفاده از رابطه برابری

در کلاس نسبت به گذر سیال از لایه مرزی در برابر استقامت از آن تابع باید توزیع سرعت را بداند

Subject

Date

مسئله: کانال مربع شکلی داریم، مطلوب است محاسبه تغییرات فشار (بدون بجز) در داخل تورنل هوا با مقطع



$A = L \times L = (305)^2 \text{ mm}^2$; $u_{\infty 1} = 26 \text{ m/s}$; $\delta_1^* = 1.5 \text{ mm}$; $\delta_2^* = 2.1 \text{ mm}$; $u_{\infty 2} = ?$

$A_1 = (L - 2\delta_1^*)^2 = 302 \times 302$; $A_2 = (L - 2\delta_2^*)^2 = 300.8 \times 300.8$

$C_1 = A_1 u_{\infty 1} = A_2 u_{\infty 2} \implies u_{\infty 2} = 26.2 \text{ m/s}$

بروزی: $\frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2g} \implies \text{افت فشار بر} = \frac{P_1 - P_2}{\frac{1}{2}\rho u_{\infty 1}^2} = \left(\frac{u_{\infty 2}}{u_{\infty 1}}\right)^2 - 1 = 0.016$

16% کاهش یافته است، نسبت به سرعت در سطح مقطع 1.

برای پویای نسبی به 3 مرکز استرس میزنند.

حل معادله ون-کارمن

با منظور حل معادله ون-کارمن یا از یک معادله توزیع سرعت سیال می باشد. ابتدا توزیع سرعت بصورت چندجمله ای

$u_x = a + by + cy^2$ درجه یک در نظر گرفته می شود. این نسبت کردن به دردی بعدی می خورد.

حالا، یاز به سه شرط مرزی داریم: $\begin{cases} y=0 \rightarrow u_x=0 \rightarrow a=0 \\ y=\delta \rightarrow u_x=u_{\infty} \\ \frac{du_x}{dy} \Big|_{y=\delta} = 0 \end{cases} \implies \frac{u_x}{u_{\infty}} = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$

این رابطه را می توان در اوتنوال معادله قبل قرار می دهیم: $\tau_0 = \mu \frac{du_x}{dy} \Big|_{y=0} = 2\mu \frac{u_{\infty}}{\delta}$ فرض سیال نیوی

در ون-کارمن τ_0 رابطه داشت چرا این

باید از این معادله استخراج باید معادله حرکت حل شود دوبدی page 848

$\implies \frac{u_{\infty}}{u_{\infty}} = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$

Subject

Date 87.09.26

الروت بر روی صفحه باشد نه در صورت $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial u_\infty}{\partial x} = 0$

$$2\mu \frac{u_\infty}{\delta} = \rho u_\infty^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta \left[2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \right] \left(1 - 2\left(\frac{y}{\delta}\right) + \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \right) dy \right) \quad \left(\frac{y^2}{\delta} - \frac{5y^3}{3\delta^2} + \frac{y^4}{\delta^3} - \frac{y^5}{5\delta^4} \right)$$

$$\Rightarrow 2\mu \frac{u_\infty}{\delta} = \rho u_\infty^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\delta - \frac{5}{3}\delta + \delta - \frac{1}{5}\delta \right) = \rho u_\infty^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{15}\delta \right) \rightarrow 2\mu \frac{u_\infty}{\delta} = \rho u_\infty^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{15}\delta \right)$$

OK از جواب؟

$$\rightarrow \frac{15\mu}{\delta} = \rho u_\infty \frac{d\delta}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{15\mu}{\rho u_\infty} dx = \delta d\delta \rightarrow \frac{15\mu}{\rho u_\infty} x = \frac{1}{2}\delta^2 + A \quad \text{at } x=0: \delta=0 \Rightarrow A=0$$

$$\Rightarrow \frac{\delta^2}{x^2} = \frac{30}{\frac{\rho u_\infty x}{\mu}} \Rightarrow \frac{\delta}{x} = \frac{5.5}{Re^{0.5}}$$

این مقدار ۵۰ درصد از مقدار بدست آمده قبلی (پراوند - بلانویس)

مستقر است

$$C_D = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2} = \frac{2\mu \frac{u_\infty}{\delta}}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2} = \frac{4\mu}{\rho u_\infty \delta} = \frac{4\mu}{\rho u_\infty x} \frac{x}{\delta}$$

$$\Rightarrow C_D = \frac{4}{Re} \frac{Re^{0.5}}{5.5} \Rightarrow \boxed{C_D = \frac{0.73}{Re^{0.5}}}$$

در این مرحله توزیع سرعت را بصورت چند جمله‌ای درجه ۳ در نظر گرفته می‌شود. در این حالت باز یک شرط برتری

BC4: $\delta=0 \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$$u_x = a + by + cy^2 + dy^3$$

دیگر داریم:

$$\frac{u_x}{u_\infty} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$$

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4.6}{Re^{0.5}}$$

$$C_D = \frac{0.65}{Re^{0.5}}$$

$$\frac{1}{\delta} = a + b\delta + c\delta^2 + d\delta^3 \quad \text{at } \delta=0 \rightarrow a\delta^3 + b\delta^2 + c\delta = 1$$

$$3a\delta^2 + 2b\delta + c = 1 \rightarrow c = 1 - 3a\delta^2$$

$$6a\delta + 2b = 0 \quad \text{at } \delta=0 \rightarrow \boxed{b=0}$$

$$\rightarrow a\delta^3 = 1 + 3a\delta^3 \rightarrow \boxed{a = \frac{-1}{2\delta^3}}$$

$$\rightarrow \boxed{c = \frac{3}{2} \frac{1}{\delta^3}}$$

Subject _____

Date _____

مسئله: مطلوب است محاسبه ضرایب لایه مرزی و نیروی دراز وارد بر صفحه:

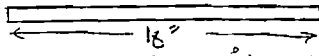
$$\rho/\rho_w = 0.925 \frac{lb}{ft^3} \quad ; \quad w = 6'' \quad ; \quad \nu = 0.001 \frac{ft^2}{s}$$

$$u_\infty = 2 \frac{ft}{s}$$



oil

$$Re = \frac{u_\infty L}{\nu} = \frac{2 \times 1.5}{0.001} = 3000$$



چون رینولدز در انتهای صفحه 3000 بدست آمده پس جریان در کل صفحه آرام می باشد.
 پس ابتدا رینولدز در انتها محاسبه می شود. براس \bar{C}_D

$$\bar{C}_D = \frac{1.332}{Re^{0.5}} = 0.00243$$

$$F_D = \frac{1}{2} \bar{C}_D \rho u_\infty^2 A = \frac{1}{2} \times 0.00243 \times 0.925 \times 1.94 \times 2^2 \times 0.5 \times 1.5 = 0.0654 \text{ lbf}$$

$$F_D = \frac{1}{2} \bar{C}_D \rho u_\infty^2 A$$

$$F_D = \tau_0 \cdot A$$

$$\tau_0 = \frac{F_D}{A} = 0.0873 \frac{lbf}{ft^2}$$

$$\text{از مدل Blasius} \rightarrow \frac{\delta}{x} = \frac{5}{Re^{0.5}} \rightarrow \delta = 1.5 \times \frac{5}{3000^{0.5}} = 1.64''$$

ضرایب ν

$$\text{از مدل Blasius} \quad x=1'' \rightarrow Re_x = \frac{2 \times 1/2}{0.001} = 166.67$$

رینولدز را با عدد همان رقم جایگزین

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{1.6667 \times 10^2}} \Rightarrow \delta = 0.39''$$

$$\Rightarrow C_D = \frac{0.666}{\sqrt{Re}} = 0.0516$$

محلی

$$u_{\infty} = \frac{1}{2} \frac{U}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{2} \right)^3$$

$$\tau_0 = \mu \frac{du}{dy} \Big|_{y=0} = \mu \frac{3U_0}{2\delta} =$$

$$\tau_0 = \frac{\rho}{2} \int_0^{\delta} \left(\frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{9}{2} \frac{y^3}{\delta^3} \right) \left(1 - \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right) dy$$

$$= \frac{\rho U_{\infty}^2}{2} \int_0^{\delta} \left(\frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{9}{4} \frac{y^2}{\delta^2} - \frac{1}{2} \frac{y^3}{\delta^3} + \frac{3}{2} \frac{y^4}{\delta^4} - \frac{y^6}{4\delta^6} \right)$$

$$= \frac{\rho U_{\infty}^2}{2} \left(\frac{3}{2} \frac{y^2}{2} - \frac{9}{4} \frac{y^3}{3} - \frac{1}{2} \frac{y^4}{4} + \frac{3}{10} \frac{y^5}{5} - \frac{1}{22} \frac{y^7}{7} \right) \Big|_0^{\delta}$$

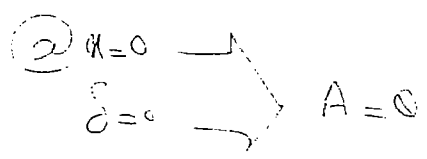
$$\frac{\tau_0}{\rho U_{\infty}^2} = \frac{\rho}{2} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial x} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{8} + \frac{3}{10} - \frac{1}{28} \right) = \delta$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu u_{\infty}^2 \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} \left(\frac{39}{280} \right)$$

$$\frac{1}{2} \frac{U^2}{\delta} = \nu \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2}$$

$$\frac{1}{2} \frac{U^2}{\delta} dx = \nu d\delta$$

$$\frac{1}{2} \frac{U^2}{\delta} = \nu \frac{d^2 \delta}{dx^2} \quad \text{or} \quad \delta = \frac{1}{2} \frac{U^2}{\nu} x^2 + A$$



$$\frac{1}{2} \frac{U^2}{\delta} = \nu \frac{d^2 \delta}{dx^2} \quad \frac{U^2}{\delta} = \frac{2\nu}{x^2} \frac{d^2 \delta}{dx^2}$$

$$\frac{U^2}{\delta} = \frac{2\nu}{x^2} \frac{d^2 \delta}{dx^2} \Rightarrow \frac{U^2}{\delta} = \frac{4.64}{Re} \frac{U^2}{x^2}$$

$$\delta = \frac{3}{2} \frac{\mu U_{\infty}}{\rho U_{\infty}^2} = 3 \frac{\nu}{U_{\infty}} = 3 \frac{U_{\infty}}{Re} = \frac{3}{Re} \frac{U_{\infty}}{U_{\infty}}$$

$$\frac{0.646}{Re}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0$$

$$u_x = \frac{3}{2} \frac{y}{z} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{z} \right)^3$$

$$\varepsilon = \frac{4.6 x}{\left(\frac{\rho u x}{\mu} \right)^{0.5}} = \frac{4.6}{\left(\frac{\rho u x}{\mu} \right)^{0.5}} \sqrt{x} \Rightarrow u_x = \frac{3}{2} u_{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{z} \right)^3$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{3}{2} u_{\infty} y \frac{1}{k} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) x^{-3/2} - \frac{1}{2} y^3 u_{\infty} \frac{1}{k^3} \cdot \frac{-3}{2} \cdot x^{-5/2}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{3}{4} \frac{u_{\infty}}{k} y x^{-3/2} + \frac{3}{4} \frac{u_{\infty}}{k^3} y^3 x^{-5/2}$$

$$\rightarrow \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{\partial u_x}{\partial x} \Rightarrow u_y = \left[\frac{3}{8} \frac{u_{\infty}}{k} y^{-3/2} z^2 - \frac{3}{6} \frac{u_{\infty}}{k^3} y^3 z^2 \right]$$

$$\left[\frac{3}{8} \frac{\left(\frac{\rho u x}{\mu} \right)^{0.5}}{4.6} u_{\infty} \frac{y^{-3/2}}{x^{0.5}} z^2 - \frac{3}{16} \frac{\left(\frac{\rho u x}{\mu} \right)^{1.5}}{(4.6)^3} u_{\infty} \frac{y^3}{x^{1.5}} z^2 \right]$$

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4.6} \text{Re}^{0.5} \frac{y^2}{x^2} - \frac{3}{16} \frac{1}{(4.6)^3} \text{Re}^{1.5} \frac{y^4}{x^4}$$

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4.6} \left(\frac{0.5 \cdot (4.6)^2}{\text{Re}^{0.5}} \right)^2 - \frac{3}{16} \frac{1}{(4.6)^3} \text{Re}^{1.5} \left(\frac{4.6^4}{\text{Re}^{1.5}} \right)$$

$$\text{Re}^{-0.5} \left[\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4.6} (4.6)^2 - \frac{3}{16} \frac{1}{(4.6)^3} (4.6)^4 \right]$$

$$\text{Re}^{-0.5} \left[\frac{3}{8} \cdot \frac{1236}{4.6} - \frac{3}{16} \sqrt{\frac{1236}{4.6}} \right] =$$

$$0.87017 \text{Re}^{-0.5}$$

سیال های غیر نوسانی :

در غین هاگ بیش با قانون ویسکوزیته نیوتن آگنا شدم :

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{du_x}{dy}$$

چینی سیال نیوتن خوانده می شود :

- برای گازها با افزایش دما (A) ویسکوزیته هم افزایش را میگیرد اما جرات کاهش می یابد.
- نیوتن سیال هاگ غیر نیوتن جینی از دانش جریان دینامیک کسین ماده $\tau = \mu \frac{du}{dy}$ را بویند

به بیان ساده می توان گفت در گازها که مولکول ها بین دو برخورد پیاپی شان فاصله های طولانی تر می
را می بینند

دایستل هم به دمایرلی گازها :

$$\tau = \frac{F}{A} = \mu \frac{du}{dy}$$

برای یک ذره گازی با جرم m ، میانگین پیاپی آزاد می باشد λ ، تعداد در واحد N سرعت پیاپی ذره
برابر C می باشد.

$$C = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

k ثابت بولتزمن

با در نظر گرفتن سرعت میانگین ذره C ، می توان نوشت :

$$\frac{1}{2} N C \alpha m \times \lambda \times \frac{du}{dy} = \mu \frac{du}{dy}$$

BC: $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho v} \frac{dU}{dy} \right) = \mu \frac{d^2 U}{dy^2}$ ~~BC~~

$$\text{@ } y=0: U_x=0 \Rightarrow 0 = \left[\frac{\mu}{\rho v} \right]^2 \exp(C_1) + C_2$$

$$\text{@ } y=B: U_x=0 \Rightarrow 0 = \left[\frac{\mu}{\rho v} \right]^2 \exp \left[\frac{\rho v}{\mu} B + C_1 \right] + \frac{\mu}{\rho v} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} B + C_2$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\mu}{\rho v} \right]^2 \exp(C_1) = \frac{\frac{\mu}{\rho v} \frac{P_0 - P_L}{\mu L} B}{\left[\exp \left(\frac{\rho v}{\mu} B \right) - 1 \right]} \Rightarrow C_2 = \frac{\frac{\mu}{\rho v} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} B}{\left[\exp \left(\frac{\rho v}{\mu} B \right) - 1 \right]}$$

$$\Rightarrow U_x = - \frac{\frac{\mu}{\rho v} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} B}{\left[\exp \left(\frac{\rho v}{\mu} B \right) - 1 \right]} \exp \left[\frac{\rho v}{\mu} y \right] + \frac{\mu}{\rho v} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} y + \frac{\frac{\mu}{\rho v} \frac{P_0 - P_L}{\mu L} B}{\left[\exp \left(\frac{\rho v}{\mu} B \right) - 1 \right]}$$

$$\Rightarrow U_x = \frac{\frac{\mu}{\rho v} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} B}{\left[\exp \left(\frac{\rho v}{\mu} B \right) - 1 \right]} \left[- \exp \left(\frac{\rho v}{\mu} \frac{y}{B} \right) + 1 \right] + \frac{B \mu}{\rho v} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} y$$

$$A = \frac{\rho v \cdot \rho}{\mu} \Rightarrow U_x = \frac{\frac{1}{A} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} B^2}{(\exp(A) - 1)} \left[- \exp \left(A \frac{y}{B} \right) + 1 \right] + \frac{B}{A} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} y$$

$$\Rightarrow U_x = \frac{P_0 - P_L}{\mu L} B^2 \frac{1}{A} \left[\frac{- \exp(A y / B) + 1}{\exp A - 1} \right] + \frac{B^2}{A} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} \frac{y}{B}$$

$$\Rightarrow U_x = \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} B^2 \frac{1}{A} \left[\frac{y}{B} - \frac{\exp(A y / B) - 1}{\exp A - 1} \right]$$

$$b) w = \int_0^B \rho U_x w dy = \int_0^B \rho \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} B^2 \frac{1}{A} \left[\frac{y}{B} - \frac{\exp(A y / B) - 1}{\exp(A) - 1} \right] w dy =$$

$$= \rho \frac{(P_0 - P_L) B^2}{\mu L} \frac{1}{A} \int_0^B \left[\frac{y}{B} - \frac{\exp(A y / B) - 1}{\exp A - 1} \right] w dy$$

$$= \rho \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} B^2 \frac{1}{A} \left[\frac{y^2}{2B} - \frac{\frac{B}{A} \exp(A y / B) - y}{\exp A - 1} \right] \Big|_0^B$$

$$= \rho \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} \frac{1}{A} \left[\frac{B}{2} - \frac{B}{A} \frac{(\exp(A) - 1) - B}{\exp(A) - 1} \right]$$

تعداد ذرات $\frac{Nc}{2}$ ، $m\lambda \frac{d\mu}{d\lambda}$ به ترتیب در هر پهنای شعاعی، ذراتی که با یکدیگر در تماس
 زمان دوام در سطح

$$\mu = \frac{1}{2} (N m \lambda)$$

$$\mu = \frac{1}{2} N m \lambda \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

میانگین مسافت پیمایش آزادانه را می توانیم بنویسیم:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 N}$$

بنابراین می توان نوشت:

$$\Rightarrow \mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{m k T}{\pi^3}}$$

تفسیر و معنی عبارت بالا

$$\mu = \frac{N h}{V} \exp\left(\frac{3.8 T_B}{T_0}\right)$$

N تعداد ذرات در حجم

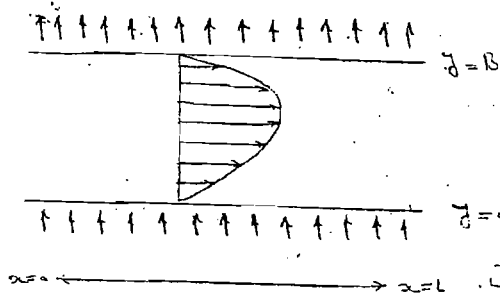
h ثابت پلانک

V حجم سونی

T_B دمای برنج

برای تعیین زلزله "کاهش دمای سونی" می توانیم
 با افزایش دما تغییرات شود

problem 38.16



Part a):

$$0 = \frac{\partial p}{\partial t} + v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y} + w_z \frac{\partial p}{\partial z} + \rho \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right]$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

این جریان ریزی و خردی همی در مقابل جریان همی مایل همی یونی است. $x=0$ $x=L$

$$\textcircled{1} \text{ For } \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow v_y = v_0$$

steady state liquids motion: $\frac{\partial u_x}{\partial t} = 0$

one dimensional: $v_y = v_0, w_z = 0$

Fully developed $\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$ & $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx} = \frac{(P_0 - P_L)}{L}$

no motion in z direction: $\frac{\partial u_x}{\partial z} = 0$ & $\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = 0$ & $\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = 0$

There is no gravity field acceleration in x direction. $g_x = 0$

$$\Rightarrow \rho \left[v_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right] \Rightarrow v_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = v_0 \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{(P_0 - P_L)}{L} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = \frac{d^2 u_x}{dy^2}; \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{du_x}{dy} \Rightarrow v_0 \frac{du_x}{dy} = \frac{(P_0 - P_L)}{L} + \frac{\mu}{\rho} \frac{d^2 u_x}{dy^2}$$

$$\text{suppose: } H = \frac{du_x}{dy}; v_0 H = \frac{(P_0 - P_L)}{L} + \frac{\mu}{\rho} \frac{dH}{dy} \Rightarrow \frac{dH}{dy} = \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} + \frac{\rho v_0}{\mu} H$$

$$\text{if } P = \frac{P_0 - P_L}{\mu L} + \frac{\rho v_0}{\mu} H \Rightarrow \frac{dP}{dy} = \frac{\rho v_0}{\mu} \frac{dH}{dy} \Rightarrow \frac{dH}{dy} = \frac{\mu}{\rho v_0} \frac{dP}{dy}$$

$$\Rightarrow \frac{\mu}{\rho v_0} \frac{dP}{dy} = P \Rightarrow \ln P = \frac{\rho v_0}{\mu} y + C_1 \Rightarrow P = \exp \left[\frac{\rho v_0}{\mu} y + C_1 \right] = \frac{\rho v_0}{\mu} H + \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L}$$

$$\Rightarrow H = \frac{du_x}{dy} = \frac{\mu}{\rho v_0} \exp \left[\frac{\rho v_0}{\mu} y + C_1 \right] - \frac{\mu}{\rho v_0} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L}$$

$$\Rightarrow u_x = \left[\frac{\mu}{\rho v_0} \right]^2 \exp \left[\frac{\rho v_0}{\mu} y + C_1 \right] + \frac{\mu}{\rho v_0} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} + C_2$$

برای بیشتر سیالات نمی توان نوشت

$$\tau_{ym} = -\eta \frac{dU_m}{dy}$$

η تابعی از τ_{ym} یا $\frac{dU_m}{dy}$ است

اگر η با افزایش نرخ تنش برشی ($\frac{dU_m}{dy}$, Shear Rate) کاهش یابد

سیال پلاستیک است
اگر افزایش یافته میان دلبستگی است

اگر η تابعی از تنش برشی باشد، سیال نیوتن است

$$\eta = \mu$$

در این رابطه، μ سیال نیوتن است (نیوتن برشی) یا $\tau = -\mu \frac{dU_m}{dy}$ (نرخ تنش برشی)

$$\tau_{ym} = -\mu \frac{d}{dy} \frac{dU_m}{dt} = -\mu \frac{d}{dt} \frac{dU_m}{dy} = -\mu \frac{d}{dt} \gamma$$

$$\tau_{ym} = -\mu \dot{\gamma}$$

$$\frac{\tau}{\mu} = \text{Fluidity} = \dot{\gamma}$$

$\psi = 0$ _____

$\psi = 0$ _____

$\psi = 0$ _____

دو طرفی

دو طرفی : \sin و \cos

$$\sin h_n = \frac{e^{\tilde{m}} - e^{-\tilde{m}}}{2}$$

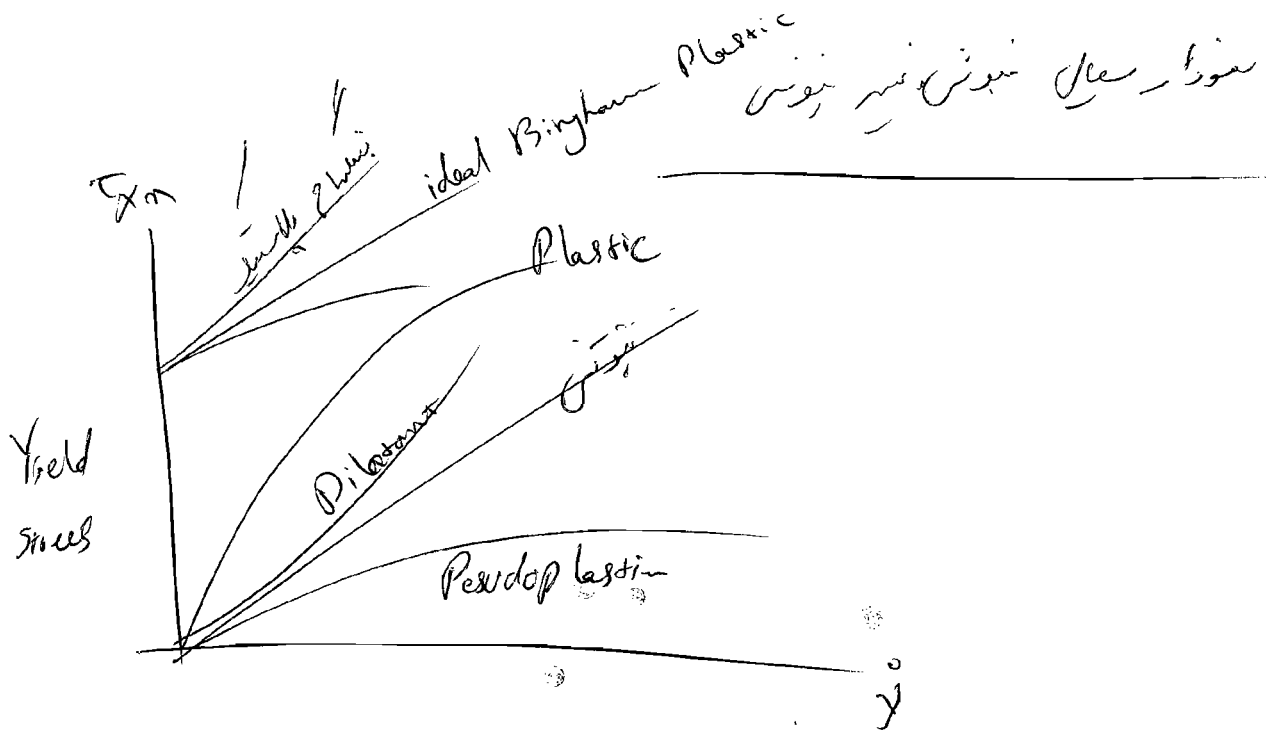
$$\cos h_n = \frac{e^{\tilde{m}} + e^{-\tilde{m}}}{2}$$

$$\psi = 0 \rightarrow u_n = 0 \rightarrow 0 = \left(\frac{H}{A_0}\right)^2 \exp\left(-\frac{A_0}{H} b + C_1\right) - \frac{H}{A_0}$$

دسته بندی سیال غیر نیوتن

بنابر طبق رفتار سیال در برابر کاربرد تنش برشی می توان دسته های درناگونی درناگرگفت بنونه های از این گونه است

- ① polymeric liquid
- ② Emulsions
- ③ Paints
- ④ Blood
- ⑤ suspension
- ⑥ Food sus-



$$U_m = \frac{\frac{\mu}{AV_0} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} B}{\left(\exp\left(\frac{\mu}{\mu} B\right) - 1\right)} \left(-\exp\left(\frac{\mu}{\mu} y\right) + 1\right) + \frac{\mu}{AV_0} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} y$$

If $A = B V_0 \mu / \mu$, then it can be written:

$$U_m = \frac{\frac{\mu}{B V_0} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} B^2}{\left(\exp\left(\frac{B V_0}{\mu}\right) - 1\right)} \left(-\exp\left(\frac{B V_0}{\mu} \cdot \frac{y}{B}\right) + 1\right) + \frac{B \mu}{C V_0} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} y$$

$$U_m = \frac{\frac{1}{A} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} B^2}{\left(\exp(A) - 1\right)} \left(-\exp\left(A \frac{y}{B}\right) + 1\right) + \frac{B}{A} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} y$$

$$\Rightarrow U_m = \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} B^2 \frac{1}{A} \left(\frac{-\exp(A y / B) + 1}{\exp(A) - 1} \right) + \frac{B}{A} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} y$$

$$U_m = \frac{(P_0 - P_L) B^2}{\mu L} \frac{1}{A} \left(\frac{y}{B} - \frac{\exp(A y / B) - 1}{\exp(A) - 1} \right)$$

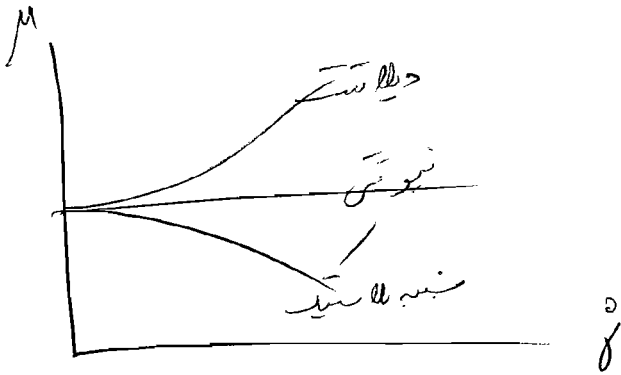
part b:

$$W = \int_0^B P U_m W dy \Rightarrow W = P \frac{(P_0 - P) B^2}{\mu L} \frac{1}{A} \left(\frac{B}{2} - \frac{\frac{1}{A} (\exp(A) - 1) B}{\exp(A) - 1} \right)$$

تجزیه و تحلیل: $A \rightarrow \dots$

$$U_m = - \frac{(P_0 - P_L)}{2 \mu L} y^2 + C_1 y + C_2$$

سیکویتم میان پلاستید سا بالفزایش تنش برشی دارد اما من کاهش می یابد (Shear Thinning)
 و سیکویتم میان دلا نت بالفزایش تنش برشی افزایش می یابد



عایات پلاستید

در این عایات بیشتر مولکول های بزرگ (Macrom) در حالت آنتی استیجی (در صورت معادله های
 کوپلاسیسیته Random قرار دارند به همین علت در آغاز حرکت در اثر وارفتن تنش برشی
 استیجی زیادی در برابر خود دارند و سیکویتم بالا) اما پس از جریان یافتن سیال و بیشتر شدن
 نرخ تنش برشی مولکول ها همگرا می شوند در سوی جریان آرایش می یابند و استیجی کمتری در برابر

عایات دلا نت

این گونه سیال ها معمولاً در برگیرنده ذره های جامد کوچک یا سوس ... Rigid
 در shear های کوچک میگویم به عنوان روان ساز (lubricant) میان ذره های معلق عمل می کنند
 اما در shear های بزرگ تأثیر روان ساز کاهش یافته و در نتیجه اصطکاک میان ذره های معلق
 بیشتر

$$\frac{w}{(P_1 - P_2) B^3 W^3}$$

$$\frac{1}{A} \left(\frac{1}{2} - A + \frac{1}{2} A^2 \right)$$

$$\frac{1}{(1 - A + \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{2} A^3 - \dots) - 1} \quad A^2 - \frac{1}{2} A^3$$

$$= \frac{1}{A} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{A} + \frac{1}{2} A - \frac{1}{2} A^2 \right]$$

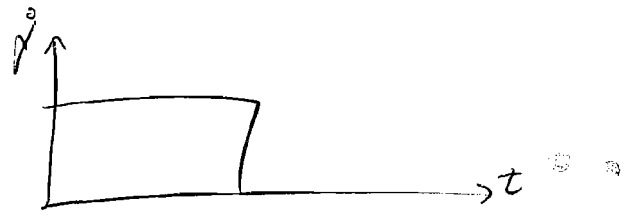
△

جابجایی در سیال الاستیک

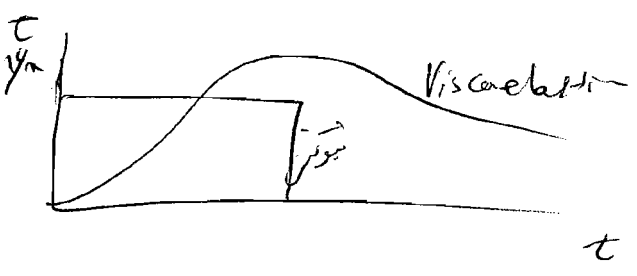
جابجایی سیوه الاستیک

در این گونه میان ماده الاستیک (Elastic) با ویژگی ویسکوزیته همراه است همه جابجایی
 بیلبسی در این ماده قرار میگیرند. این جابجایی نه گونه های متفاوتی در برابر داده این
 تنش پیش جریان میمانند که این به ویژگی

پدیده گونه های سیال غیر نیوتنی



در میان های نیوتنی و غیر نیوتنی تفاوت
 هسته انادریال های نیوتنی
 این دو اختلاف نامزد دارند



$$P = (P_0 - P_L) / \mu L + \frac{\rho V_0}{\mu} H \Rightarrow \frac{dP}{dy} = \frac{\rho V_0}{\mu} \frac{dH}{dy} \Rightarrow \frac{dH}{dy} = \frac{\mu}{\rho V_0} \frac{dP}{dy}$$

$$\Rightarrow \frac{\mu}{\rho V_0} \frac{dP}{dy} = P \Rightarrow \ln P = \frac{\rho V_0}{\mu} y + C_1 \Rightarrow P = \exp\left(\frac{\rho V_0}{\mu} y + C_1\right) = \frac{\rho V_0}{\mu} H + P_0$$

$$\Rightarrow H = \frac{dU_m}{dy} = \frac{\mu}{\rho V_0} \exp\left(\frac{\rho V_0}{\mu} y + C_1\right) - \frac{\mu}{\rho V_0} (P_0 - P_L) / \mu L$$

$$\Rightarrow U_m = \left(\frac{\mu}{\rho V_0}\right)^2 \exp\left(\frac{\rho V_0}{\mu} y + C_1\right) + \frac{\mu}{\rho V_0} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} y + C_2$$

B.C.:

$$y=0 : U_m=0 \Rightarrow 0 = \left(\frac{\mu}{\rho V_0}\right)^2 \exp(C_1) + C_2$$

$$y=B : U_m=0 \Rightarrow 0 = \left(\frac{\mu}{\rho V_0}\right)^2 \exp\left(\frac{\rho V_0}{\mu} B + C_1\right) + \frac{\mu}{\rho V_0} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} B + C_2$$

$$\Rightarrow 0 = \left(\frac{\mu}{\rho V_0}\right)^2 \exp\left(\frac{\rho V_0}{\mu} B + C_1\right) + \frac{\mu}{\rho V_0} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} B - \left(\frac{\mu}{\rho V_0}\right)^2 \exp(C_1)$$

$$\Rightarrow 0 = \left(\frac{\mu}{\rho V_0}\right)^2 \exp(C_1) \left[\exp\left(\frac{\rho V_0}{\mu} B\right) - 1 \right] + \frac{\mu}{\rho V_0} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} B$$

$$= \left(\frac{\mu}{\rho V_0}\right)^2 \exp(C_1) = \frac{\frac{\mu}{\rho V_0} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} B}{\left(\exp\left(\frac{\rho V_0}{\mu} B\right) - 1 \right)}$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{\frac{\mu}{\rho V_0} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} B}{\left(\exp\left(\frac{\rho V_0}{\mu} B\right) - 1 \right)}$$

$$\Rightarrow U_m = - \frac{\frac{\mu}{\rho V_0} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} B}{\left(\exp\left(\frac{\rho V_0}{\mu} B\right) - 1 \right)} \exp\left(\frac{\rho V_0}{\mu} y\right) + \frac{\mu}{\rho V_0} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} y + \frac{\frac{\mu}{\rho V_0} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} B}{\left(\exp\left(\frac{\rho V_0}{\mu} B\right) - 1 \right)}$$

① نوش چمن آب، هوا، روغن، مگنتیک مایعات و پلیمرها

② پلاستیک چمن پلیمرها مگنتیک مایعات

③ دلائیته چمن ابرو، موم، مایعات

④ پلاستیک Bingham چمن مایعات مایعتره، خمیر دندان

⑤ $\tau = \tau_0 + \mu \dot{\gamma}$

تفاوت مایعات نیوتن و غیر نیوتن

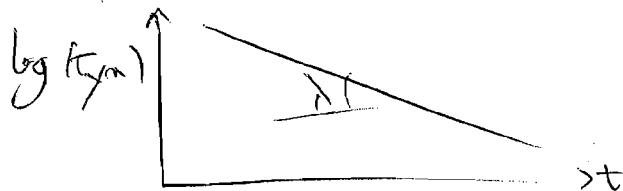
① ویسکوزیته میان مایعات نیوتن ثابت است اما ویسکوزیته مایعات غیر نیوتن تغییر میکند

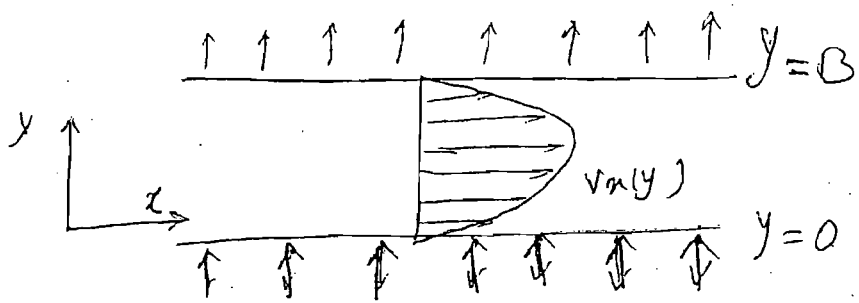
② زمان استرخش τ_{relax} و τ_{max} برای مایعات نیوتن وجود ندارد
برابر است

$$\tau_{yx} - \tau_{xy} = 0 \quad \tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = -P$$

تفاوت مایعات نیوتن و غیر نیوتن:

سرعت آن شتاب مایعات نیوتن از آن \times Relaxit τ_{relax}





a) show that the velocity profile for the system

solution:

$$0 = \frac{\partial p}{\partial t} + u_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y} + w_z \frac{\partial p}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow \underline{v_y = v_0}$$

$$\rho \left[\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$$

$$\rho \left[v_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) \Rightarrow v_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = v_0 \frac{\partial u_x}{\partial y} = (p_0 - p_L) / L + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = \frac{d^2 u_x}{dy^2} \Rightarrow v_0 \frac{du_x}{dy} = (p_0 - p_L) / L + \frac{\mu}{\rho} \frac{d^2 u_x}{dy^2}$$

• suppose $H = du_x/dy$ then it can be write

$$v_0 H = (p_0 - p_L) / L + \mu dH$$

کاهش نیامده نیاز کاربرد باسی مقایسه ای در استخوان در نحوه تغییر دادیم بتوان

مدل تانگول

مقاومت حصر، جریان و غیره در حالت بیان می کنند

قانون هور

Viscous, Elastic, و غیره در صورتی که در تغییرات

$$\tau_E = E \gamma_E \text{ (Young Model)}$$

$$\tau_V = \mu \dot{\gamma}_V$$

مدل تانگول

فرض شده است

$$A) \tau_E = \tau_V = \tau$$

$$B) \gamma_E + \gamma_V = \gamma$$

$$Fr_1 = \left(\frac{y_c}{y_1} \right)^{3/2} = 0.4$$

$$2 + \frac{u_1^2}{2g} = 0.3 + y_2 + \frac{u_2^2}{2g} = H + h \rightarrow 0.3$$

$$Q = 27 = 4 \times 2 \times u_1 = 4 \times y_2 \times u_2$$

$$\Rightarrow u_1 = 3.4 \frac{\text{ft}}{\text{s}} \quad u_2 = 4.2 \frac{\text{ft}}{\text{s}} \quad y_2 = 1.6 \text{ ft}$$

$$Fr_2 = 0.57$$

ارتفاع با 0.1 ft (تفاوت)

$$2 + \frac{u_2^2}{2g} = h_c + 1.1 + \frac{u_2^2}{2g}$$

$$u_2 = \frac{Q}{4 \times 1.1} = 6.2 \frac{\text{ft}}{\text{s}} \rightarrow h_c = 0.5 \text{ ft}, Fr_2 = 1$$

$$u|_{y=y_c} = \frac{Q}{y_c w}$$

$$H_{\infty} = H + h$$

ارتفاع با 0.1 ft (تفاوت) ارتفاع با 0.1 ft (تفاوت)

$$H = y + \frac{(Q/w)^2}{2g y^3}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma_E}{dt} + \frac{d\gamma_V}{dt}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\tau}{dt} + \frac{\tau}{M}$$

$$\Rightarrow \tau + \frac{M}{E} \frac{d\tau}{dt} = \mu \frac{d\gamma}{dt}$$

$$\frac{M}{E} = \lambda \quad \text{زمان آرامی}$$

$$\lambda \dot{\tau} + \tau = \mu \dot{\gamma} \quad \text{معادله مانکول}$$

نقشه
Shear
stress

هرگاه میان مدت تأثیر بدین تغییر شکل ثابت (Shear Rate) $\dot{\gamma}$ قرار بدهد

$$\dot{\gamma} = \text{cte} \Rightarrow \dot{\tau} + \frac{1}{\lambda} \tau = \frac{\mu}{\lambda} \dot{\gamma}$$

$$\Rightarrow \tau = \mu \dot{\gamma} (1 - \exp(-t/\lambda)) \quad (I)$$

و در آن زمان تنش برش برداشته شود هر توان نوشت:

$$\lambda \dot{\tau} + \tau = 0, \quad \text{at } t=0 \quad \tau = \tau_0 \quad \dot{\gamma} = 0$$

$$\Rightarrow \tau = \tau_0$$

$$u_1 = \frac{(Q/w)}{y_1} = \frac{1.49}{n} \left[\frac{wy_1}{w+2y_1} \right]^{2/3} S_1^{1/2}$$

$$\Rightarrow y_1 = 2.2 \text{ ft}$$

$$y_2 = 4.8 \text{ ft}$$

در هر جایی از کانال که عدد فر

یک عدد (یا) $F_1 < F_2$ و $F_1 > F_2$

می باشد (sub - sup) متناهی بین میسرولی

$$y_c = \left(\frac{(Q/w)^2}{g} \right)^{1/3} = 3.7 \text{ ft}$$

← تابع دی جریان

طریق

$$Fr_1 = \left(\frac{y_c}{y_1} \right)^{3/2} = 2.18$$

$$Fr_2 = \left(\frac{y_c}{y_2} \right)^{3/2} = 0.68$$

در تصدیف میهن هیدرولیکی رخ داد است

$$\frac{y_0}{y_1} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8 Fr_1^2} - 1 \right) \rightarrow y_0 = 5.8 \text{ ft}$$

$$y_2 < y_0 \rightarrow \text{عز قابل قبول}$$

عز قابل قبول است زیرا از y_2 بستی باشد.

$$\frac{Fr_0}{Fr_2} = \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8 Fr_0^2} - 1 \right) \right]^{3/2}$$

$$Fr_2 = 0.68 \rightarrow \boxed{Fr_0 = 1.53}$$

$$Fr_0 = \left(\frac{y_c}{y_0} \right)^{3/2} \rightarrow y_0 = 2.8 \text{ ft}$$

جواب قابل قبول است

مثال: مطلوب است به طرز ارتفاع هر ای مانع ریخته سطح آب است ارتفاع رودی مانع

$$Q = 27 \text{ cfs}$$

$$h = 0.3 \text{ ft}$$

$$w = 4 \text{ ft} \quad y_1 = 2 \text{ ft} \quad y_c = \left[\frac{(Q/w)^2}{g} \right]^{1/3} = 1.1 \text{ ft}$$



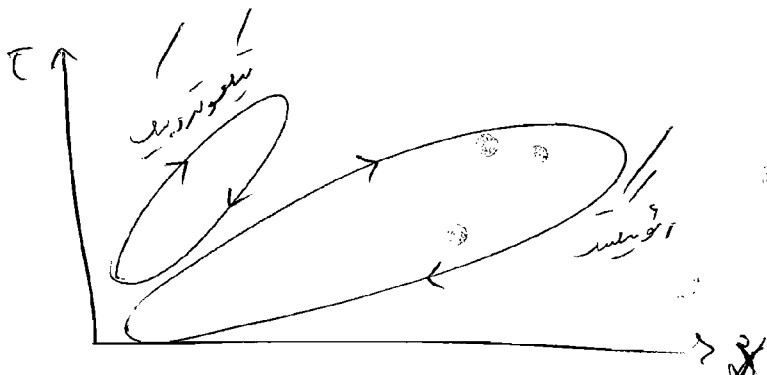
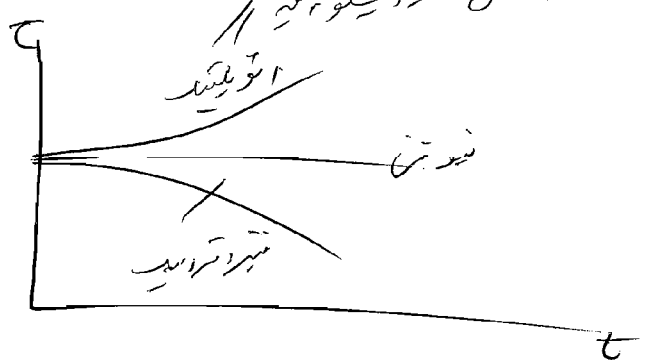
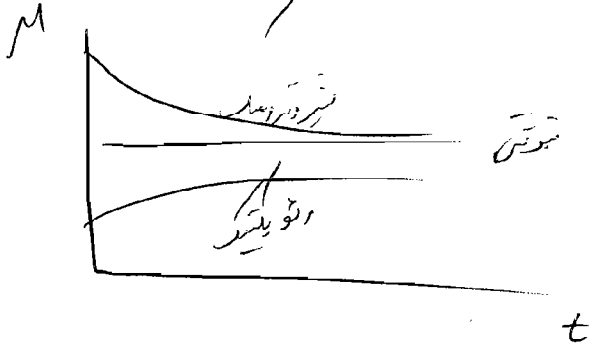
تفسیر دیکوتومی با زمان

در برخی سیاه چاه دیکوتومی با زمان تغییر می کند

هرگاه دیکوتومی با زمان کاهش یابد سیاه چاه بسیار رانند.

Thixotropic نامتجان گونه سیاه چاه

در حالتی که دیکوتومی با زمان



از دسته سیاه چاه دیکوتومی با زمان گرین ها، مارگارین، گل حفاری، زانگه، پودر آس، بنتونیت
 و ادوات آموغی برخی از سوسپانسیونها در دسته سیاه چاه Repeat برای آن است

نکته: در هر مداره مقدار g معادل 32 در نظر برده شده است.

معادله Manning

روابطی که برای معادله C بیان شده اند کلی از روابط تجربی برای معادله f در داخل لوله ها مشتق شده اند.

مقدار C برای اولین بار Manning رابطه ای را به منظور تعیین C در داخل کانال های بزرگ در رودخانه ها ارائه داده است:

$$C = \frac{R_h^{1/6}}{n} \rightarrow R_h : m$$

$$C = 1.49 \frac{R_h^{1/6}}{n} \rightarrow R_h : ft$$

$$u = \sqrt{\frac{8f}{g}} \sqrt{R_h S}$$

$$u = \frac{1}{n} R_h^{2/3} S^{1/2}$$

$$u = C \sqrt{R_h S}$$

$$\frac{Q}{w} = u = \frac{1.49}{n} R_h^{2/3} S^{1/2}$$

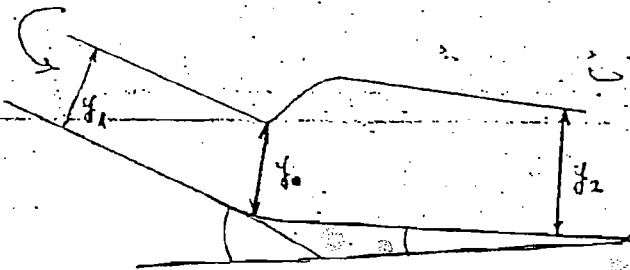
$$u = \sqrt{\frac{8f}{g}} \sqrt{R_h S}$$

n بیانگر زبری کانال می باشد

متریک $\rightarrow n = 0.11 F^{1/2} R_h^{1/6}$

English unit $\rightarrow n = 0.093 F^{1/2} R_h^{1/6}$

$n \cdot TL^{-1/3}$



مثال: منظور از C تعیین توزیع سطح آب

$$\frac{Q}{w} = 40 \frac{ft^3}{s}$$

$$n = 0.013$$

$$S_1 = 0.015$$

$$w = 10 ft$$

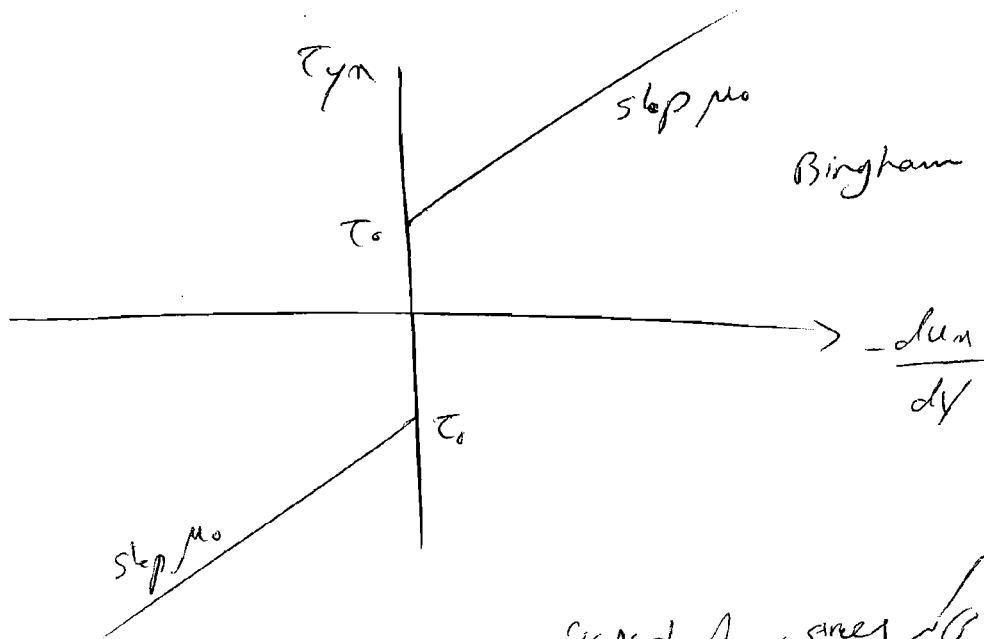
$$S_2 = 0.0016$$

$$\frac{Q}{w} = u_1 y_1 = u_2 y_2$$

1) Bingham Model

$$\tau_{ym} = -\mu_0 \frac{du_m}{dy} \pm \tau_0 \quad \text{if } |\tau_{ym}| > \tau_0$$

$$\frac{du_m}{dy} = 0 \quad \text{if } |\tau_{ym}| < \tau_0$$



دو خطوں سے بنی ہوئی ہے
جو τ_0 سے شروع ہوتی ہیں

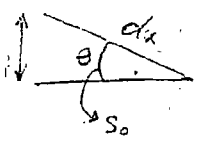
2) Oswald-de waele n

$$\tau_{ym} = -m \left| \frac{du_m}{dy} \right|^{n-1} \frac{du_m}{dy} \quad (\text{Power law})$$

if $n=1 \rightarrow m=\mu$

$n < 1 \rightarrow$ thickening

$n > 1 \rightarrow$ thinning



رابطه Chezy رای تیران به شکل نظریه ای است ^{مورد} استفاده از Darcy-Weizbach ^{رابطه}

$$h_f = S dx \quad \downarrow \text{Energy slope}$$

$$h_f = f \frac{dx}{D_h} \frac{u^2}{2g}$$

$$D_h = 4R_h = 4 \frac{A}{P}$$

$$S dx = f \frac{dx}{4R_h} \frac{u^2}{2g} \Rightarrow u = \sqrt{\frac{8g}{f} R_h S} = C \sqrt{R_h S}$$

$$C = \sqrt{\frac{8g}{f}}$$

برای مایه های نرم (Smooth) تیران f از رابطه Blasius تعیین شود:

$$f = \frac{0.316}{Re^{0.25}} \quad Re < 10^5$$

$$\Rightarrow C = 28.6 Re^{0.125} = 28.6 \left[\frac{u D_h}{\nu} \right]^{0.125} \rightarrow \frac{\mu}{\rho}$$

g = 32

کابل نرم

برای مایه های زرد (Rough) تیران f از رابطه Colebrook تعیین

مدن رابطه چون Re معنی ندارد و f هم در هر دو طرف است

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0.86 \ln \left[\frac{\left(\frac{E}{D}\right)}{3.7} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right]$$

حالتی که f در آن نرمی هم RE باشد

partially rough حالتی است که نرم درم برای

این رابطه برای ناحیه

Fully rough (Re > 10^5) قابل صرف نظر کردن است

ناحیه

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0.86 \ln \left[\frac{\left(\frac{E}{D}\right)}{3.7} \right] \rightarrow g = 32$$

در این حالت با رسم f بر حسب (E/D) و استفاده از Power Law تیران فرمت

$$f = 0.18 \left(\frac{E}{D}\right)^{1/3}$$

$$SI \leftarrow C = 26.607 \left(\frac{R_h}{E}\right)^{1/6}$$

$$D = 4R_h \rightarrow f = 0.113 \left(\frac{E}{R_h}\right)^{1/3} \Rightarrow C = 47.7 \left(\frac{R_h}{E}\right)^{1/6}$$

کابل نرم

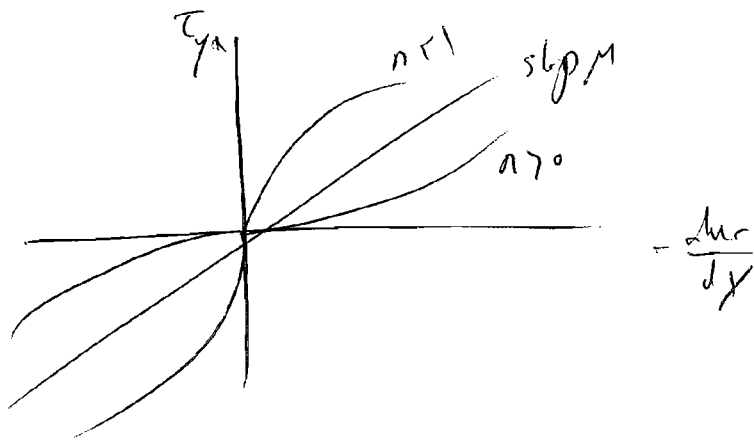
g = 32

برای Sys انگلیسی

$$g = 32 \frac{ft \cdot s^2}{s^2}$$

برای SI خودت محاسب کن

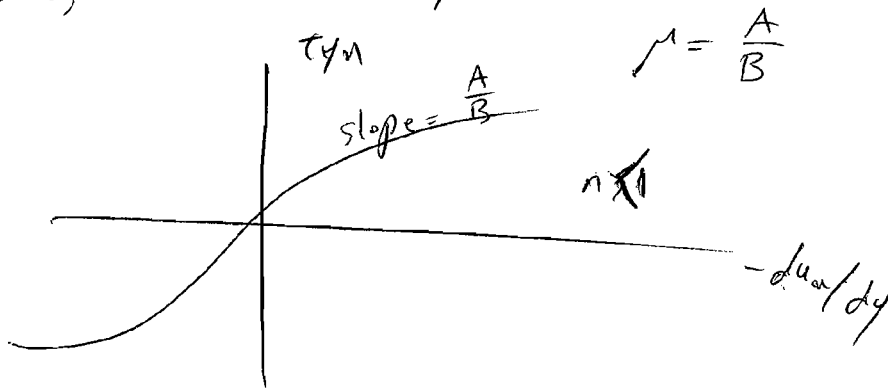
$$\frac{8}{0.1} \left(\frac{1}{10}\right)^{1/3}$$



③ Eyring Model

$$\tau_{yx} = A \sinh\left(-\frac{1}{B} \frac{du}{dy}\right)$$

بیشترین این مدل برای اندازه‌های کوچک τ_{yx} با رفتار نیوتن همخوانی دارد.



این مدل برای لایه‌های نازک کاربرد دارد زیرا نیوتن را با تقریب

④ Ellis Model

$$-\frac{du}{dy} = \left(\phi_0 + \phi_1 |\tau_{yx}|^{\alpha-1}\right) \tau_{yx}$$

اگر $\alpha > 1$ باشد و τ_{yx} کوچک باشد، این مدل نیوتن همخوانی دارد.

نوشته $\mu = \frac{1}{\phi_0}$ است که در حد $\alpha < 1$ باشد.

$$\rho g A dx \sin \theta - \tau_0 P dx = \rho \frac{d}{dx} (u^2 A) dx$$

$$\rho g A \sin \theta - \tau_0 P = \rho \left[2Au \frac{du}{dx} + u^2 \frac{dA}{dx} \right]$$

$$R_h = \frac{A}{P}$$

$$\tau_0 = \rho g R_h \sin \theta - \rho \left[2R_h u \frac{du}{dx} + \frac{u^2}{P} \frac{dA}{dx} \right]$$

$$Q = UA = \text{const} \implies A \frac{du}{dx} + u \frac{dA}{dx} = 0$$

معادله پیوستگی

$$\frac{1}{u} \frac{du}{dx} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} = 0 \implies \frac{dA}{dx} = -\frac{A}{u} \frac{du}{dx}$$

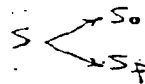
$$\tau_0 = \rho g R_h \sin \theta - \rho \left[2R_h u \frac{du}{dx} - R_h u \frac{du}{dx} \right]$$

$$\tau_0 = \rho g R_h \sin \theta - R_h u \rho \frac{du}{dx} = \rho g R_h \left[\frac{\sin \theta}{S_0} - \frac{u}{g} \frac{du}{dx} \right]$$

$$\tau_0 = \rho g R_h S_f$$

$$\tau_0 = \rho g R_h S$$

Energy Slope



معادله Chezy در کانال‌های باز با اصطکاک

در این معادله مانند جریان در خم از رابطه تجربی زیر استفاده شده است

از معادله بلاز پوس

$$\tau_0 = \frac{1}{8} f \rho u^2$$

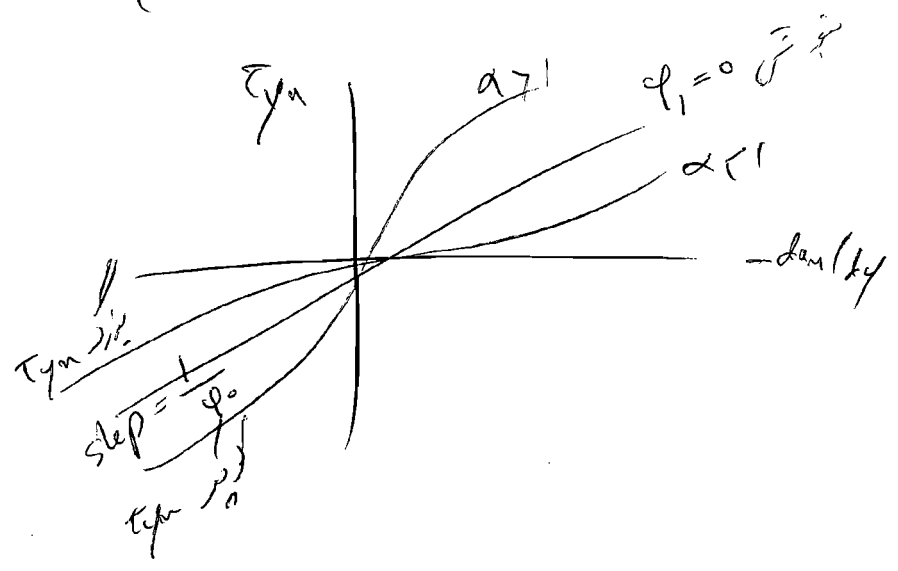
در این حالت f تابع Re ، $\frac{\epsilon}{D}$ ، شکل مقطع کانال است

$$u = \sqrt{\frac{8 \tau_0}{f}} R_h S = C \sqrt{R_h S}$$

که تابعی از Re ، $\frac{\epsilon}{D}$ ، شکل مقطع کانال است

C. Chezy Coefficient

در این مدل اگر $\phi_1 = 0$ یا نه مدل همان مدل قانون ویسکوزیته نیوتون است و اگر $\phi_0 = 0$ یا نه مدل همان قانون پاور (Power Law) است

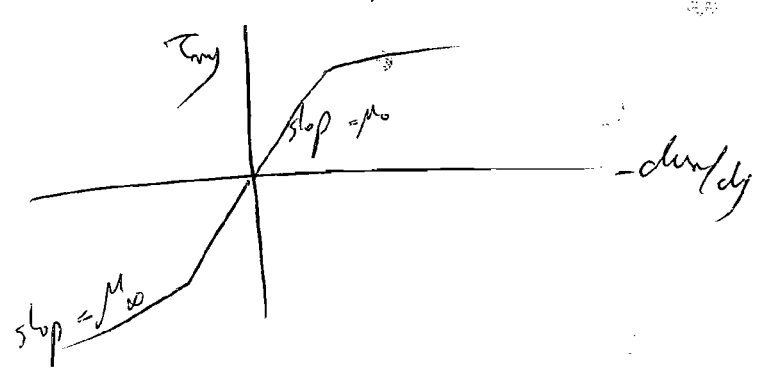


مدل پاور است

Reiner-philippoff ...

$$-\frac{du}{dy} = \left(\frac{1}{\mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + (\tau_{yx}/\tau_s)^2}} \right) \tau_{yx}, \quad \mu_\infty < \mu_0$$

این رابطه بیان می‌کند که Shear Rate در این مدل به صورت زیر بیان می‌شود



$$H_1 = 5 - h_f = 2.9 \text{ m}$$

$$H_3 = H_2 - h$$

$$F_{r3} = 0.53$$

$$H_3 = \frac{\left(\frac{Q}{w}\right)^2}{2g y_3^3} + y_3$$

$$y_3 = 2 \text{ m}$$

$$H_3 = 1.97 \rightarrow H_3 = H_{2 \min} \quad h_c = 0.93$$

$$y_3 = y_c = 1.31$$

$$H_{2 \min} = H_2 = 2.9$$

$$\Rightarrow H_3 = 2.3 \text{ m} \rightarrow h = 0.6 \text{ m}$$

$$F_{r3} = 1 \rightarrow h = h_c$$

$$y_3 = y_c = 1.31$$

$$H_3 = 1.97 \text{ m}$$

$$h_c = 2.9 - 1.97 \Rightarrow h_c = 0.93 \text{ m} \quad H_1 = H_2 + h_f \quad H_3 = H_2 - h$$

در این حالت $H_3 = H_2 - h$ و اگر $H_3 > H_2 - h$ باشد، در این صورت باید h_f را نیز در محاسبه بپذیرد.

2) جریان در کانالهای باز با اصطکاک

در کانال نسبی، تنش لایه‌ای، توزیع می‌شود و از سطحی بدون سایش از بالا به پایین در تماس است. تنش و ضرایب اصطکاک علاوه بر نیروی تابع شکل کانال هستند.

نیروی $shear$ موجب افت انرژی می‌شود. این نیرو در لوله‌ها و کانال‌های باز غیر لایه‌ای می‌باشد. علت غیر لایه‌ای بودن این نیرو در لوله‌ها می‌باشد. در کانال‌های باز برای مقطع مستطیل و مربعی می‌باشد. $shear$ ناشی از تماس سیال با اجزای بزرگ نیروی $shear$ ناشی از تماس سیال با کانال‌ها متعارف است. در این حالت ضریب اصطکاک تابعی از Re و شکل مقطع می‌باشد.



Shear Force

$\tau_0 P dx$ نیروی دارنده سیال عبارتند از

Gravity force

$\rho g A dx \sin \theta$

خط کانال که با سیال در تماس است wetted perimeter

در حالت لایه‌ای هیچ چیزی نیرو را متوازن نمی‌کند و در نهایت سیال ثابت می‌ماند.

$$\rho g A dx \sin \theta - \tau_0 P dx = 0 \rightarrow$$

$$\tau_0 = \rho g \frac{A}{P} \sin \theta = \rho g R_h S_0$$

$$S_0 = \sin \theta$$

P : wetted perimeter

R_h : Hydraulic Radius

S_0 : slope

Hydraulic radius

در حالت غیر لایه‌ای سرعت متوسط سیال تغییر می‌کند.

unsteady
steady

تغییرات در Q

① Falling sphere

چگونه که پیش از این نیز دیده شد، در این روش برای اندازه گیری دیسکوزیم یا فرقی آنکه شدایف جریان خونی برقرار است (۲۵.۱) ضریب دراز را بداند

$$\sigma_D = \frac{w}{Re} \quad \text{بین مانتو}$$

فاز استوانی $F = 6\pi\mu V_e R$

$$\sum F = 0 \Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_s g - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g$$

$$-6\pi\mu V_e R = 0 \Rightarrow \mu = \frac{2}{9} \frac{\rho R^2}{V_e} (\rho_s - \rho)$$

که در این آزمایشها V_e سرعت پتانسی (سرعت حد) شعاع گویه R شعاع گویه است که در میان ρ_s به ترتیب دانسته کرده و در میان ρ

تمرین ۱۰

یک گویه با شعاع ۵۰ cm در یک نمونه نفت با درجه API برابر 50 بسوزد. با این حرکت کند. سرعت پتانسی و شیب گویه برای محاسبه قانون استوکس را بیان کنید

حل

$$API = 141.5 / sp \cdot G_{60}^{60} - 131.5$$

$$sp \cdot G_{60}^{60} = 0.78 \Rightarrow \rho = 780 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_s = 9300$$

اگر سوال تصحیح دلی ندهد

سببش درون فایل استفاده

درون flowes low است

$$u_2 = \frac{u_1 y_1}{y_2} \rightarrow u_2 = 2.9 \frac{m}{s} \quad Fr_2 = 0.5$$

مقدار انرژی از دست داده شده بر حسب متر head

$$h_f = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4 y_1 y_2} \Rightarrow h_f = 0.63 \text{ m}$$

$$E_1 = H_1 = y_1 + \frac{u_1^2}{2g} \rightarrow H_1 = 4.5 \text{ m}$$

$$\% \text{ Loss} = \frac{h_f}{H_1} \times 100 = \% 14 \quad \text{Power} = Q \rho H$$

$$\text{Power} = \rho g Q h_f$$

توان تلف شده به ازای واحد عرض کانال

به ازای عرض $\frac{Q}{W}$

$$P = \frac{Q}{W} \rho g h_f \Rightarrow \rho = 61.3 \frac{kg}{m^3}$$

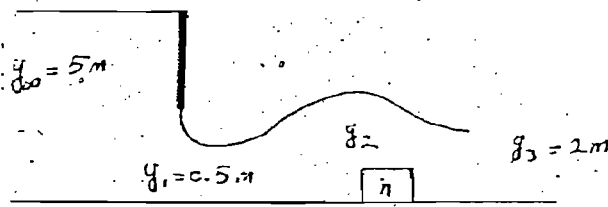
$$P = 9800 \frac{N}{m^3} \times 10 \frac{m^3}{m \cdot s} \times 0.625 \text{ m}$$

$$P = m \cdot c_p \Delta T \rightarrow P = \rho \frac{Q}{W} c_p \Delta T \Rightarrow \Delta T = 0.0015 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$m = \rho Q = 10000 \frac{kg}{m^3} \times 10 \frac{m^3}{m \cdot s} = 10000 \frac{kg}{m \cdot s}$$

$$\text{Power Dissipated: } P = m \cdot c_p \Delta T \rightarrow 61300 \frac{W}{m} = 10000 \frac{kg}{m \cdot s} \times 4200 \frac{J}{kg \cdot ^\circ\text{C}}$$

مثال: در یک کانال در یک نظر از دست داده $h_c > Fr_3$, h



$$\frac{Q}{W} = y_1 \sqrt{2g(y_2 - y_1)} \quad \frac{Q}{W} = 4.7 \frac{m^2}{s}$$

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{(Q/W)^2}{g}} \rightarrow y_c = 1.31 \text{ m}$$

$$Fr_1 = \sqrt{\left(\frac{y_c}{y_1}\right)^3} \rightarrow Fr_1 = 4.24$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8 Fr_1^2} - 1 \right) \Rightarrow y_2 = 2.76 \text{ m} \quad Fr_2 = 0.33$$

$$h_f = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4 y_1 y_2} \rightarrow h_f = 2.1 \text{ m} \quad H_1 = H_2 = 5 \text{ m}$$

$$\mu = 33.1 \text{ kg/m.s} = 33.1 \text{ N.s/m}^2$$

$$N_R = \frac{\rho V D}{\mu} = 0.4770.1$$

تقریباً بی اثر است.

کشیده شکار لوله

$$N_R = 0.1 \Rightarrow VD = 4.24 \times 10^3$$

$$33.1 = \frac{2}{9} \frac{\rho g}{V_{ED}} R^2 (\rho - \gamma) \Rightarrow R = 27.7 \text{ mm}$$

$$V_c = 0.15 \text{ m/s}$$

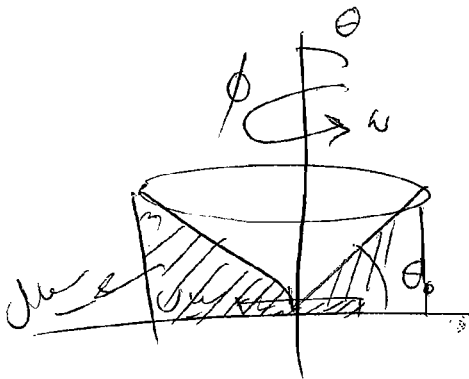
با مقدار 2 سمت صیقلی است.

② Cone and Plate Viscometer

این دستگاه در برگیرنده صفحه تخت است و یک مخروط وارونه قرار می‌دهد در بالای صفحه تخت. مایع در میان آن قرار می‌گیرد.

مخروط با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. با داشتن شعاع R و زاویه θ آن در یک نقطه

سیال را به دست آورد.



هر چه فاصله θ کوچکتر باشد بالایی داشته

یا نه آنقدر بیشتر است برای چرخش

دید لازم است

$$V_{\theta} = \frac{D^2 (\omega - \gamma)}{18 \mu}$$

$$Fr_1 = \frac{u_1}{\sqrt{g y_1}} \quad \frac{1}{2} g (y_1^2 - y_2^2) = u_2^2 y_2 - u_1^2 y_1$$

$$\Rightarrow \frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + 8 Fr_1^2} - 1)$$

است ارتفاع بعد از پرش
برای پرش باید $N_{Fr_1} > 1$

$$\frac{Q}{w} = cte = y_1 u_1 = y_2 u_2$$

معادله پرمشی

$$y_1 + \frac{u_1^2}{2g} = y_2 + \frac{u_2^2}{2g} + h_F$$

معادله انرژی

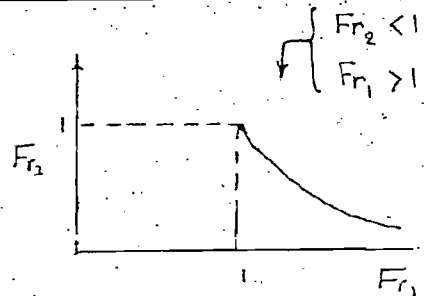
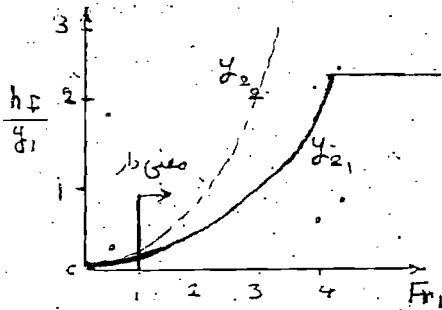
مقدار تلفات $\Rightarrow h_F = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4 y_1 y_2}$ واحد طول (m)

$$\frac{h_F}{y_1} = \frac{[(\frac{y_2}{y_1}) - 1]^3}{4 (\frac{y_2}{y_1})} \rightarrow \frac{h_F}{y_1} = f(N_{Fr_1})$$

$$\rightarrow \frac{Fr_1}{Fr_2} = \left[\frac{1}{2} (\sqrt{1 + 8 Fr_1^2} - 1) \right]^{3/2}$$

با بزرگتر شدن تلفات افزایش پیدا می کند

با افزایش y_2 شیب بالایی رود $y_{22} > y_{21}$



برای عرض کانال

مثال: مطلق است مناسبه h_F, Fr_2, u_2, y_2 در هر تلفات انرژی بدون

$$\frac{Q}{w} = 10 \frac{m^3}{s \cdot m} \left(\frac{m^2}{s} \right) y_{01} = 1.25 m$$

تلف شده؟ و افزایش بها احتمالی

$$C_p = 4200 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$$

$$u_1 = \frac{(Q/w)}{y_1} = 8 \text{ m/s}$$

$$Fr_1 = \frac{u_1}{\sqrt{g y_1}} = 2.28 > 1$$

این کانال در قعر پرش هیدرولیکی وجود دارد

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + 8 Fr_1^2} - 1) \rightarrow y_2 = 3.46 m$$

ارتفاع محدوداً برابر شده است

* به دلیل اینکه N_{Fr} همچنان بزرگ است پس در نتیجه پرش همچنان بزرگ خواهد بود

با داده کردن معادله حرکت در راستای r, θ, ϕ می توان نوشت:

$$r\text{-direction: } -\rho \frac{v_\phi^2}{r} = -\frac{dP}{dr}$$

$$\theta\text{-direction: } -\rho r \omega \frac{v_\phi^2}{r} = -\frac{1}{r} \frac{dP}{d\theta}$$

$$0 = -\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\phi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{r\phi}}{r} + 2r \omega \frac{\tau_{\theta\phi}}{r} \right)$$

در صورتی فرض می‌کنیم

$$B.C.s: v_r = v_\theta = 0 \Rightarrow v_\phi = 0$$

$$v_\phi = 0 \Rightarrow v_\phi^2 = 0$$

v_ϕ نوسان

$$\phi \text{ راسته: } v_\phi = v(r, \theta) = \omega f(\theta)$$

علت انتخاب این شکل آن

این صفر می‌شود

$$\text{at } \theta = \frac{\pi}{2} - \theta_0 \Rightarrow v_\phi = r\omega$$

$$\text{at } \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow v_\phi = 0$$

در صورتی فرض می‌کنیم

$$\frac{v_\phi}{r} = f(\theta) \neq g(r) \Rightarrow \tau_{r\phi} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\tau_{\theta\phi}}{d\theta} = -2r\omega \tau_{\theta\phi} \Rightarrow \tau_{\theta\phi} = \frac{A}{\sin^2 \theta}$$

با در نظر گرفتن w به عنوان پهنای کانال می توان حرکت را نوشت

9
شروع

سیم مقطع

معادله

$$\left(\frac{1}{2} \rho g y_1 (y_1 w) - \frac{1}{2} \rho g y_2 (y_2 w) \right) = \rho (u_2 y_2 w u_2 - u_1 y_1 w u_1)$$

خاطمی
مسار

موتور

$$\frac{1}{2} \rho [y_1^2 - y_2^2] = u_2^2 y_2 - u_1^2 y_1$$

$$N_{F,1} = \frac{u_1}{\sqrt{g y_1}}$$

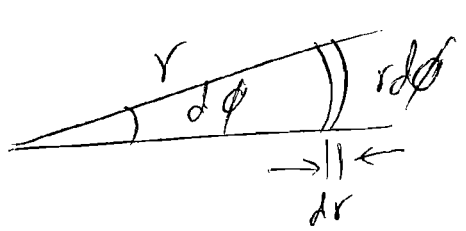
$$\frac{Q}{w} = cte = y_1 u_1 = y_2 u_2$$

معادله پیوستگی

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + 8 N_{F,1}^2} - 1 \right]$$

پس حتما باید حرکت پرسش $y_1 < y_2$; N_{Fr} حتما از یک بزرگتر باشد

برای حساب A فرض می‌کنیم که در دایره به نصف ثابت τ (تعمیرات)



$$T = \int_0^{2\pi} \int_0^R r (\tau_{\theta\phi}) r dr d\phi$$

$$\Rightarrow A = \frac{3T}{2\pi R^3} \Rightarrow \tau_{\theta\phi} = \frac{3T}{2\pi R^3 \sin^2 \theta}$$

درسته کردی :-

$$\tau_{\theta\phi} = \tau_{\phi\theta} = -\mu \left[\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{V_{\phi}}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_{\theta}}{\partial \phi} \right]$$

برای حالت کره ای

$$\left[\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{V_{\phi}}{\sin \theta} \right) \right]^{n-1}$$

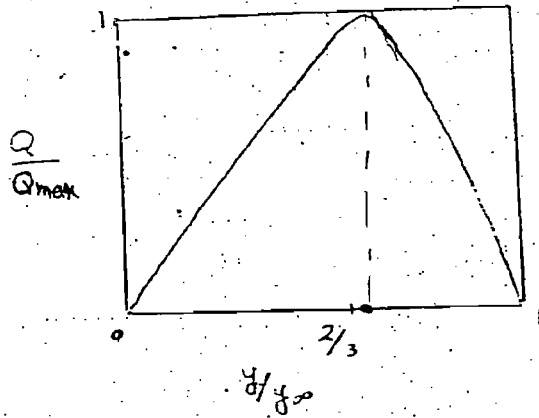
$$\Rightarrow \frac{3T}{2\pi R^3 \sin^2 \theta} = -\mu \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{V_{\phi}/r}{\sin \theta} \right) \Rightarrow \frac{3T}{2\pi R^3} = A$$

$$\frac{V_{\phi}}{r} = f(\theta) \rightarrow \frac{A}{\sin^2 \theta} = -\mu \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{f(\theta)}{\sin \theta} \right)$$

$$\Rightarrow f'(\theta) \sin \theta - f(\theta)$$

$$y = 4m \rightarrow \frac{Q}{w} = 17.7 \frac{m^2}{s} \rightarrow y_c = 3.17m \Rightarrow Fr = 0.7$$

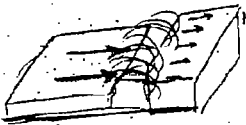
امکان حل با مستقیم گیری
از $\frac{Q}{Q_{max}}$ از یک
هم وجود داشت



Hydraulic jump

پرش هیدرولیکی

* از Fr بزرگتر Fr کم می‌رود



پرش هیدرولیکی پدیده‌ای است که بین تغییر حالت جریان
subcritical جریان می‌شود. روابط بار زیاد انرژی جریان کمتر به همین
علت کارایی ندارد
جریان مثال می‌توان از یک لایه نازک در جریان بالای سد یا بازتابی ارتفاع سطح آب

چون از یک لایه نازک
لایه نازکی صرف نظر کردیم
پس سرعت حرکت
Uniform دارن



$$Fr_1 > 1$$

$$Fr_2 < 1$$

پرش هیدرولیکی در طول مسیر کانه‌ها (معدن y_2) رخ می‌دهد. لذا مقدار افتان ناشی از shear در آن قابل توجه است.

نیای کابل w

$$\frac{1}{2} \rho g y_1^2 w - \frac{1}{2} \rho g y_2^2 w = \rho (u_2 y_2 w u_2 - u_1 y_1 w u_1)$$

$$f(\theta) = V(\theta) \times V(\theta)$$

$$V(\theta) = \exp \left[- \int \left(\frac{-\omega \theta}{\sin \theta} \right) d\theta \right] = \sin \theta$$

$$U(\theta) = \int \left(\frac{-A/\mu \sin \theta}{\sin \theta} \right) d\theta + B$$

$$U(\theta) = \frac{A}{\mu} \omega \theta + B \quad \rightarrow \quad f(\theta) = \sin \theta \left[\frac{A}{\mu} \omega \theta + B \right]$$

$$\frac{V_\theta}{r} = \sin \theta \left[\frac{A}{\mu} \omega \theta + B \right]$$

B.C. 1: at $\theta = \frac{\pi}{2}$; $V_\theta = 0$

B.C. 2 at $\theta = \frac{\pi}{2} - \theta_0$; $V_\theta = r\omega \Rightarrow B = 0$

$$\omega = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) \left[\frac{A}{\mu} \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) \right] \rightarrow \omega = \omega \theta_0 \left[\frac{A}{\mu} \tan \theta_0 \right] = \omega$$

$$= \frac{A}{\mu} \sin \theta_0$$

$$\Rightarrow \frac{V_\theta}{r} = \sin \theta \frac{\omega}{\sin \theta_0} \omega \theta_0 = \omega \frac{\omega \theta_0}{\sin \theta_0}$$

$$\Rightarrow \frac{V_\theta}{r} = \omega \frac{\omega \theta_0}{\sin \theta_0} \Rightarrow \mu = \frac{A \sin \theta_0}{\omega} = \frac{3I \sin \theta_0}{2\pi R^3 \omega}$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{3I \sin \theta_0}{2\pi R^3 \omega}$$

برای هر مقدار θ (کشادگی) بر حسب θ_0 و ω (سرعت زاویه‌ای) می‌توانیم μ را پیدا کنیم.

فلت : خرگاه ارتفاع مانع از h_c بیشتر باشد خیال نمی تواند از زری مانع عبور نماید به منظور
 عبور دادن خیال دائم $\frac{Q}{w}$ بر y_c افزایش یابد تا مقدار H به حداقل مقدار لازم (H_{min})

$H_{tot} = H_{min} + h_c$ برسد

عبور عبور خیال از مانع بیشتر h_c می شود

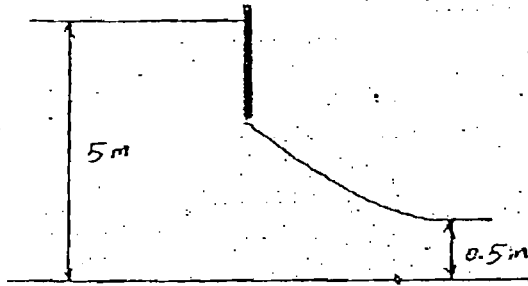
مثال : مطلوب است محاسبه $(\frac{Q}{w})_{max}$

چون مانع ندارد ، همین انرژی کم نمی شود

$H_{tot} = H + h$ قبل از مانع

← صورتی چون مانع ندارد

$\frac{Q}{w} = y \sqrt{2g(H-y)}$



درجه استمر (مانع) نریجی کاهش H نمی شود

خرگاه مقدار آب زیاد باشد می توان فرض کرد y_c ثابت است و مقدار H نیز معینی باشد

$H_{tot} = H = 5m$ ← عدم تغییر ارتفاع

$y_c = 0.5m$

$\frac{Q}{w} = y \sqrt{2g(H-y)}$

$\frac{Q}{w} = 4.7 \frac{m^2}{s}$

$y_c = \left[\frac{(\frac{Q}{w})^2}{g} \right]^{1/3} = 1.31 m$

$Fr = \left(\frac{y_c}{y} \right)^{3/2} = 4.24$

محل شدن با درجه کوچک Fr بالا
 می دهد یعنی برسد زیاد

با بار شدن درجه (افزایش y) مقدار Fr کاهش مقدار $\frac{Q}{w}$ افزایش می یابد

در سنجی 0.5 ثانیه ای - بارش
 محاسبه تحلیلی زمانی است که
 $y = \frac{2}{3} H = 3.33 m \rightarrow (\frac{Q}{w})_{max}$
 در H

محل شدن تحلیلی ، Fr برابر 1 رخ می دهد

$(\frac{Q}{w})_{max} = \sqrt{\frac{8}{27} g H^3} = 19.05 \frac{m^2}{s}$

خرگاه درجه پس از این باز شود مقدار $\frac{Q}{w}$ کاهش می یابد

$(\frac{Q}{w}) = 19.05 \frac{m^2}{s}$

$y_c = 3.33 m \rightarrow Fr = 1$

با بیشتر بار شدن درجه مثلا $y = 4$ ، $y_c = 3.17 m$ ، $N_F = 0.7$

امکان ندارد حالت الف رخ دهد یعنی Fr از یک بزرگتر شود زیرا ،

در صورت

داده های زیر را با یکدیگر مقایسه کنید (Cone & Plate)
 $\theta_0 = 0.1 \text{ rad}$
 $R = 2.5 \text{ cm}$

برای سائل بدمت (برای سائل با ویسکوزیته بالا و ویسکوزیته پایین) این دو حالت را مقایسه کنید

ω (rad/s)	T (N.m)
0.0001	0.0033
0.001	0.03
0.01	0.26
0.1	1
1	2.2
10	9.3
100	66

ط

$$\tau_{r\theta} = \frac{3T}{2\pi R^3 \sin^2 \theta}$$

$$\gamma = \frac{\tau_{r\theta}}{\mu}$$

$$\mu = \frac{3T \sin \theta_0}{2\pi R^3 \omega}$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\omega}{\sin \theta_0}$$

$\theta = 90$ $\theta_0 = 5.73^\circ$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{\omega}{\sin \theta_0}}$$

$$\frac{Q}{w} = 5 \frac{ft^2}{s} ; y_{\infty} = 2 ft$$

مثال: جریان آب در داخل کانال

$$y_c = \left[\frac{(Q/w)^2}{g} \right]^{1/3} = 0.92 ft$$

$$Fr_{\infty} = \left(\frac{y_{\infty}}{y_c} \right)^{3/2} = 0.31 < 1$$

$$H_{\infty} = \frac{(Q/w)^2}{2g y_{\infty}^2} + y_{\infty} = 2.1 ft$$

$$H_{min} = \frac{3}{2} y_c = 1.38 ft$$

$$H_{\infty} = H_{min} + h_c \Rightarrow h_c = 0.72 ft$$

$$H = H_{\infty} - h = 2.1 - 0.5 = 1.6 ft$$

ارتفاع سبیل سرریز

$$h = 0.5$$

ارتفاع مانع

$$\frac{H}{y_c} = \frac{1}{2} \left(\frac{y_c}{y} \right)^2 + \frac{y}{y_c} \rightarrow y = 1.4 ft$$

$$Fr = \left(\frac{y_c}{y} \right)^{3/2} = 0.53$$

ردی مانع



کوتاه: ارتفاع مانع معادل ارتفاع معنای (h_c) باشد در حالت ممکن ارتفاع دهد

$$h_c + y_c = 0.72 + 0.92 = 1.64 ft$$

$$\Rightarrow 2 - 1.64 = 0.36 ft$$

$$H_{\infty} = 2.1 \rightarrow \frac{H_{\infty}}{y_c} = \frac{1}{2} \left(\frac{y_c}{y} \right)^2 + \frac{y}{y_c}$$

$$y = 2 \rightarrow Fr = 0.31$$

$$y = 0.49 \rightarrow Fr = 2.56$$



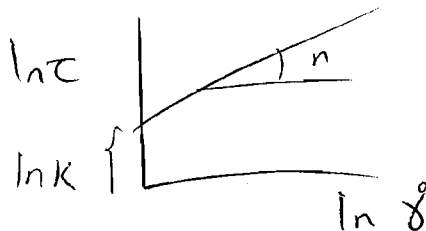
بعد از مانع به صورت $H = H_{\infty}$ در این حالت

در افتادن سبیل این رخ می دهد

δ	τ	μ
101		100680
917		91554
7945		79323
30558		30529
67227		

$$\tau = 18895.2 \delta^{0.672}$$

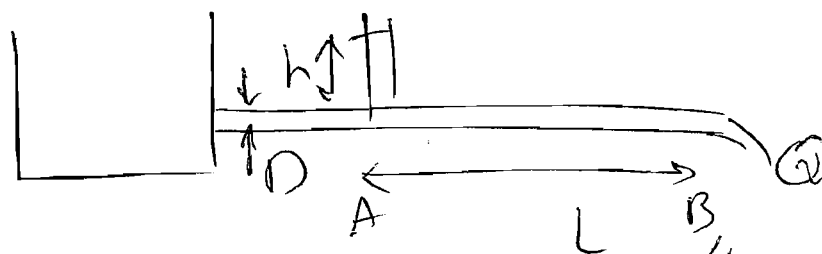
$$\tau = k \delta^{n+1}$$



بنابراین منحنی پلاستیسیته است چون $n = 0.672 < 1$

③ Capillary rheometer (Viscosimeter)

این دستگاه برای سنجش ویسکوزیته مایعات نیوتونی و غیر نیوتونی در حالت جریان پایدار است. برای سنجش ویسکوزیته مایعات نیوتونی، این دستگاه برای نوع پائالی جریان به کار می‌رود.



با توجه به فشار ثابت این دستگاه و با فرض جریان آرام می‌توان استفاده از معادله Hagen-Poiseuille، نوشت:

$$P_A = P_B = \frac{128 Q L \mu}{\pi D^4}$$

از دیدگاه تفاوت فشار در نقطه A, B می‌توان برای ارتفاع ستون مایع نوشت:

$$P_A = P_B = \rho g h$$

مثال: جریان آب در داخل کانال با مساحت داده شده صورت می گیرد. جریان سیل را بررسی کنید:

$h = 0.5$ $\frac{Q}{w} = 5 \frac{ft^2}{s}$ $y_{\infty} = 2 ft$

$y_c = \left[\frac{(Q/w)^2}{g} \right]^{1/3} = 0.92 ft$

$Fr_{\infty} = \left(\frac{y_c}{y_{\infty}} \right)^{3/2} = 0.31 < 1$

$H_{\infty} = \frac{(Q/w)^2}{2g y_{\infty}^3} + y_{\infty} = 2.1 ft$

$H_{min} = \frac{3}{2} y_c = 1.38 ft$

$H_{\infty} = H_{min} + h_c \Rightarrow h_c = 0.72 ft$

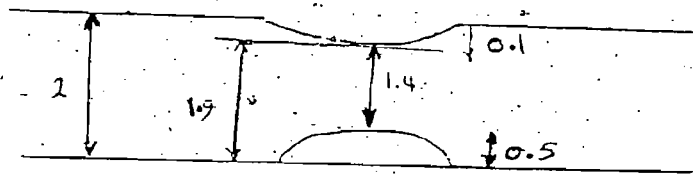
اگر h برابر h_c شود Fr برابر 1 می شود.

ارتفاع سیل $H = H_{\infty} - h = 2.1 - 0.5 = 1.6 ft$

ارتفاع مانع $h = 0.5$

$\frac{H}{y_c} = \frac{1}{2} \left(\frac{y_c}{y} \right)^2 + \frac{y}{y_c} \rightarrow y = 1.4 ft$

$Fr = \left(\frac{y_c}{y} \right)^{3/2} = 0.53$ روی مانع



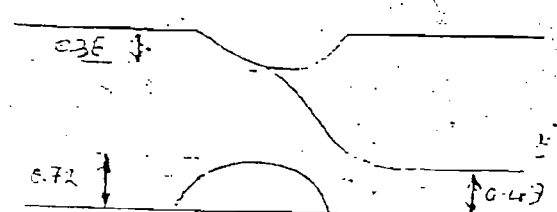
حرکت ارتفاع مانع معادل ارتفاع بحرانی (h_c) باشد دو حالت ممکن است رخ دهد

روی مانع Fr برابر 1 شود

$h_c + y_c = 0.72 + 0.92 = 1.64 ft$

$\Rightarrow 2 - 1.64 = 0.36 ft$

$H_{\infty} = 2.1 \rightarrow \frac{H_{\infty}}{y_c} = \frac{1}{2} \left(\frac{y_c}{y} \right)^2 + \frac{y}{y_c} \begin{cases} y = 2 \rightarrow Fr = 0.31 \\ y = 0.48 \rightarrow Fr = 2.56 \end{cases}$



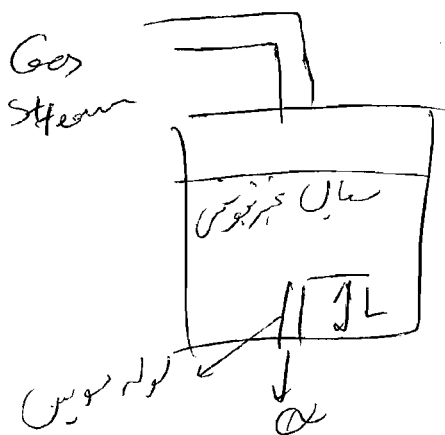
بعد از مانع مجدداً $H = H_{\infty}$ می شود در این حالت

دو امکان شدن است رخ دهد

ما برابر خواهد بود این دو را به هم می توان نوشت :

$$\mu = \frac{\pi D^4 \rho g \left(\frac{h}{L}\right)}{128 Q}$$

ضمیمه و سیکورته نموده است این نام *Oswald Viscosity* می باشد که شما می شناسید. همین دستگاه را می توان به این شکل زیر بصورت عمودی نیز ساخت.



با در نظر گرفتن قطر و بزرگی های زیر می توان جریان را می توان به هم نوشت تا به دست آوریم
 شیرها در دستگاه کوپولوموس به دست آوریم

$$\Delta P \pi \frac{d^2}{4} = \tau_0 \pi d L \Rightarrow \tau_0 = \frac{\Delta P d}{4 L}$$

در این دستگاه
 می توان نوشت

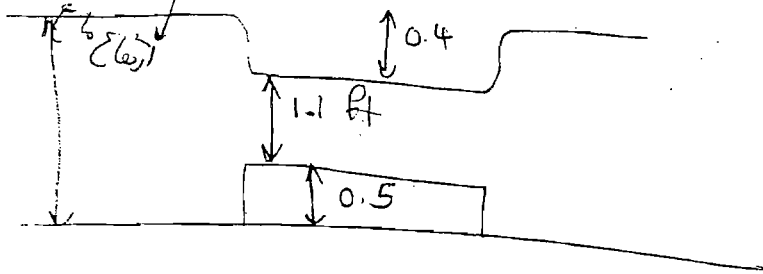
$$\tau_{in} = \frac{\Delta P r}{2 L} \Rightarrow \tau_{in} = \tau_0 \frac{r}{R}$$

$$N_{F,2} = 1 \quad y_2 = y_0 = 1.1 \text{ ft}$$

$$u_2 = \frac{Q}{4 \times 1.1} = 6.2 \text{ ft/s}$$

$$2 + \frac{u_1^2}{2g} = h_c + 1.1 + \frac{u_2^2}{2g}$$

$$\Rightarrow h_c = 0.5 \text{ ft}$$



* اگر تک ذره ارتفاع مانع بیشتر شود تده سیل ردهی شود و

در آن ایستگ سیل نب این مانع ارتفاع بالا می رود و بعد عبوری کند

$$y_2 = y_c$$

$$h_c = 0.5$$

$$y_2 = \frac{27}{4 u_2}$$

Steady state rate at wall $\Rightarrow \left(-\frac{du}{dr}\right)_{u(r=R)} = \frac{8V}{D} \left[\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \frac{d \ln \left(\frac{8V}{D} \right)}{d \ln \left(\frac{DDP}{4L} \right)} \right]$

Power law $\Rightarrow n = \frac{d \ln \left(\frac{DDP}{4L} \right)}{d \ln \left(\frac{8V}{D} \right)} \Rightarrow \left(-\frac{du}{dr}\right)_w = \frac{8(n+1)V}{4n(D)}$

نقطة $n=1$

$$\frac{DP}{L} = \frac{32\mu V}{D^2} \Rightarrow \frac{DDP}{4L} = \frac{8V}{D} \mu$$

$$\Rightarrow \ln \frac{DDP}{4L} = \ln \frac{8V}{D} + \ln \mu$$

نقطة: $\frac{d \ln \left(\frac{DDP}{4L} \right)}{d \ln \left(\frac{8V}{D} \right)} = n=1 \Rightarrow \left(-\frac{du}{dr}\right) = \frac{8V}{D}$

$$\Rightarrow n = \frac{d \ln \left(\frac{DDP}{4L} \right)}{d \ln \left(\frac{8V}{D} \right)} \Rightarrow \tau_w = \frac{DDP}{4L} = k \left(\frac{8V}{D} \right)^n$$

نقطة
Power law

$$A = \frac{DDP}{4L} \quad B = \frac{8V}{D} \Rightarrow d \ln A = n d \ln B$$

$$\ln A = n \ln B + \ln k$$

اگر ارتفاع مانع از h_c (ارتفاع بحرانی) کمتر باشد، سیال نمی تواند از روی

مانع عبور نماید. به منظور عبور دادن سیال باید $\frac{Q}{w}$ و یا y افزایش یابد تا مقدار h به کمینه مقدار لازم (H_{min}) برسد.

$$H_{\infty} = H_{min} + h_c$$

انرژی مانع

h_c حداکثر ارتفاعی که مانع می تواند داشته باشد

چون H_{∞} ثابت است و H_{min} \propto Q/w

است. پس h_c ماکزیمم است.

$Q = 27 \text{ cfs}$

$h = 0.3 \text{ ft}$

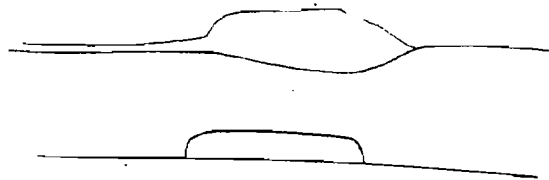
$w = 4 \text{ ft}$

ارتفاع اولی $y_1 = 2 \text{ ft}$

آب

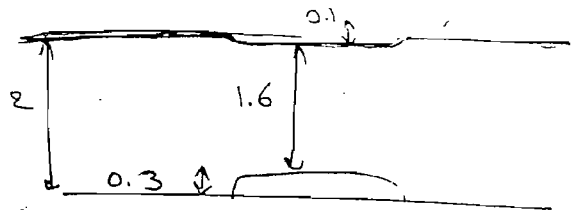
مطلوب است محاسبه ارتفاع بحرانی مانع و توزیع سطح آب در کانال

تمرین؟



$$y_c = \left(\frac{(Q/w)^2}{g} \right)^{1/3} = 1.1 \text{ ft}$$

$$N_{F1} = \left(\frac{y_c}{y_1} \right)^{3/2} = 0.4$$



$$2 + \frac{u_1^2}{2g} = 0.3 + y_2 + \frac{u_2^2}{2g}$$

بدرستی $Q = 27 = 4 \times 2 \times u_1 = 4 \times y_2 \times u_2$

$u_1 = 3.4 \text{ ft/s}$ ، $u_2 = 4.2 \text{ ft/s}$ & $y_2 = 1.6 \text{ ft}$

$N_{F2} = 0.5 \text{ ft}$

ارتفاع مانع = $2 - (1.6 + 0.3) = 0.1 \text{ ft}$

در نهایت آردن این معادله فرض سیال جریان آرام است. براساس این دستاورد فرض
 تابع آردن از عدد رینولدز کمتری است.

$$Re_g = \frac{D^n V^{2-n} \rho}{K \theta^{n-1}} < 2100 \quad \rightarrow \quad Re_g = \frac{\rho V D}{\mu_e}$$

$$\mu_e = \frac{\tau_w}{\frac{8V}{D}} \rho c$$

μ_e دینامیک ویسکوزیته

در هر سطح تقاطع اگر ظاهر سبب اختلافات به نسبتش برین



$$\mu_e = \frac{\tau}{\dot{\gamma}}$$

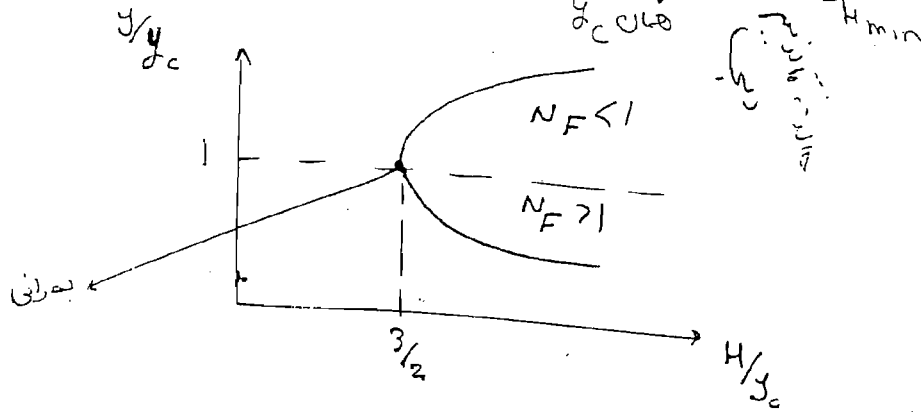
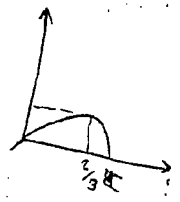
$$H = y + \frac{(Q/w)^2}{2gy^2}$$

$$\frac{H}{y_c} = \frac{y}{y_c} + \frac{(Q/w)^2}{2gy_c y^2} = \frac{y}{y_c} + \frac{y_c^3 g}{2gy_c y^2} = \frac{y}{y_c} + \frac{1}{2} \left(\frac{y_c}{y} \right)^3$$

این معادله اساسی بررسی جریان در کانال‌های باز است.

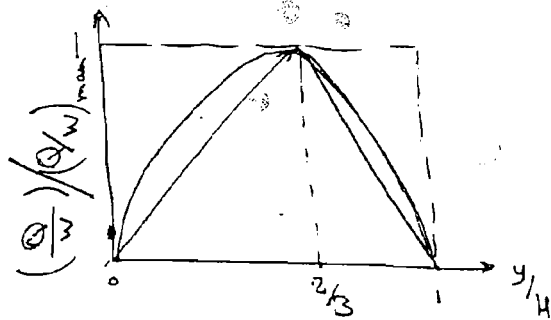
$$H_1 = H_2 = y + \frac{(Q/w)^2}{2gy^2} \Rightarrow (Q/w) = y \sqrt{2g(H-y)} \Rightarrow$$

$$\frac{d(Q/w)}{dy} = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3} H$$



$$\left(\frac{Q}{w} \right)_{\max} = \sqrt{\frac{8}{27} g H^3} \quad (N_F = 1)$$

$$\frac{Q/w}{(Q/w)_{\max}} = \frac{y \sqrt{2g(H-y)}}{\sqrt{(8/27) g H^3}} = \left[\left(\frac{27}{4} \right) \left(\frac{y}{H} \right)^2 \left(1 - \frac{y}{H} \right) \right]^{0.5}$$



داده های زیر برای بیان ماسک داده شده است 70 km/hr در دما 70°F با دستگاه اندازه گیری ویسکوزیته و شیب بدست آمده در جدول زیر است و ضرایب انتقال حرارت

psi	انتقال حرارت $\text{h/m}^2\text{K}$	طول لوله in	قطر لوله in
445	894	5	5
		5	5
		6	6
		10	10
		10	15
		6	15

حل =

$$\frac{8V}{D} = \frac{32Q}{\pi D^3} = \frac{32 \text{ m}^3}{3600 \pi D^3} (5^{-1})$$

$$\tau_w = \frac{D \Delta P}{4L} \times 144 \left(\frac{16 \mu}{\rho^2} \right)$$

$$\mu_c = \frac{\tau_w}{8V} g_c$$

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu_c}$$

در جهت ω

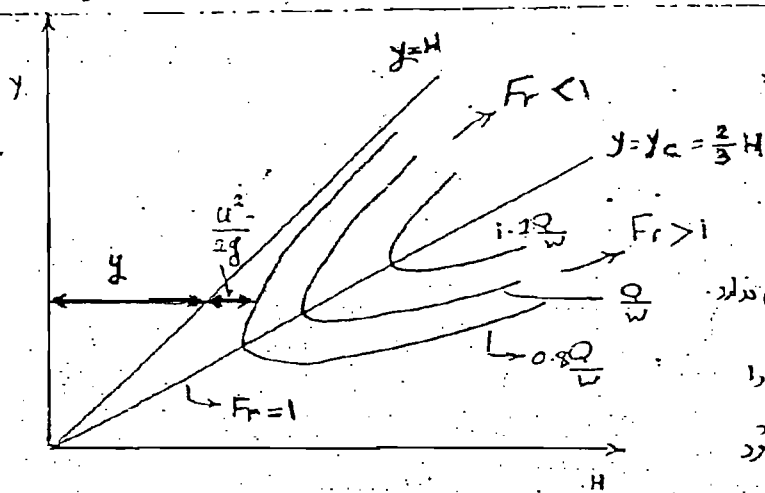
Re	μ_c	τ_w	$\frac{8V}{D}$
0.0074	3.1	100	500

نقش به عبار $\frac{8V}{D}$ و Re است. بنابراین قانون ساینر است. از همین دو مقدار $\frac{8V}{D}$ و Re

مستخرج مقدار n, K, μ یافت

اگر صورت h به μ باشد Re و μ در h به μ باشد Re و μ در h به μ باشد

* w : پهلو



بررسی تصویر H: مربعی

y_c : تابع جریان است که مانع از تغییر در y_c در ادامه آن می‌تواند Q یا Fr یا w را مشاهده کرد. اگر در سطحی $y = y_c$ سرد در آن نقطه $Fr = 1$ است.

$$y = y_c = \frac{2}{3} H$$

1 - هر سطحی دارای یک حداقل می‌باشد.

$Fr > 1$ & $Fr < 1$

2 - هر سطحی از دو بخش شکل شده است.

$$y \cdot \left(\frac{(Q/w)^2}{g} \right)^{1/3} \rightarrow g y^3 = \left(\frac{Q}{w} \right)^2 = y^2 u^2 \Rightarrow \frac{u^2}{g y} = 1 \rightarrow \frac{u}{\sqrt{g y}} = 1 \Rightarrow Fr = 1$$

نتیجه: حداقل سطحی H بر روی خط $y = \frac{2}{3} H$ قرار می‌گیرد. در این درجه است $Fr = 1$ باشد. به این حالت در $Fr = 1$ مقدار H حداقل می‌باشد.

$$y_c = \left[\frac{(Q/w)^2}{g} \right]^{1/3} \Rightarrow \frac{Q}{w} = \sqrt{g y_c^3}$$

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{g y}} = \frac{Q/w}{y \sqrt{g y}} = \frac{Q/w}{\sqrt{g y^3}} = \frac{\sqrt{g y_c^3}}{\sqrt{g y^3}} = \left(\frac{y_c}{y} \right)^{3/2}$$

$y = \frac{2}{3} H$ در صورت تازای هوا

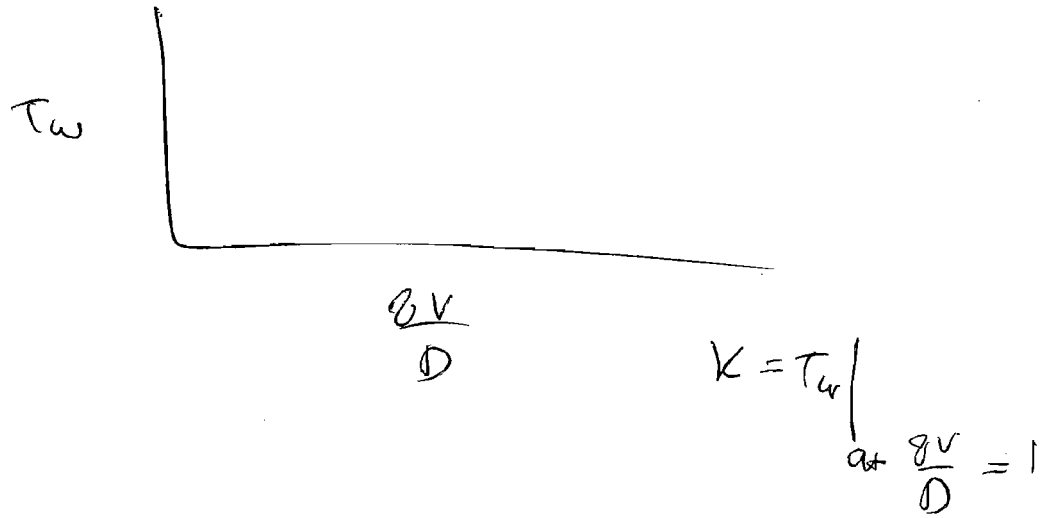
$y > y_c \Rightarrow Fr < 1$: subcritical flow

برخاست این خط $y = \frac{2}{3} H$

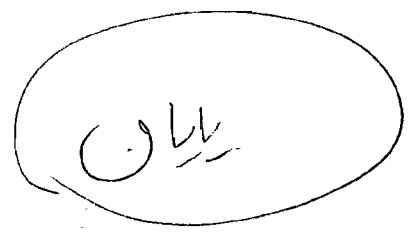
$y < y_c \Rightarrow Fr > 1$: supercritical flow

$$h_c = \frac{3}{2} y_c \text{ (معمولاً)} \quad H_c = \frac{3}{2} y_c + h_c \quad \leftarrow H_{min} = \frac{3}{2} y_c \quad H_c = H_{min} + h_c = y_c \quad \therefore H_c = H + h$$

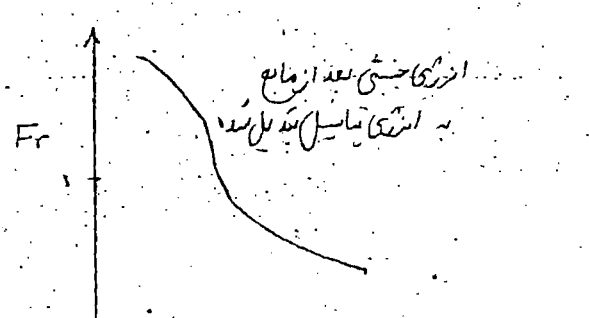
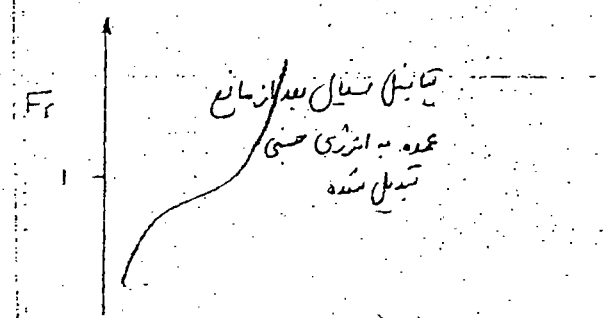
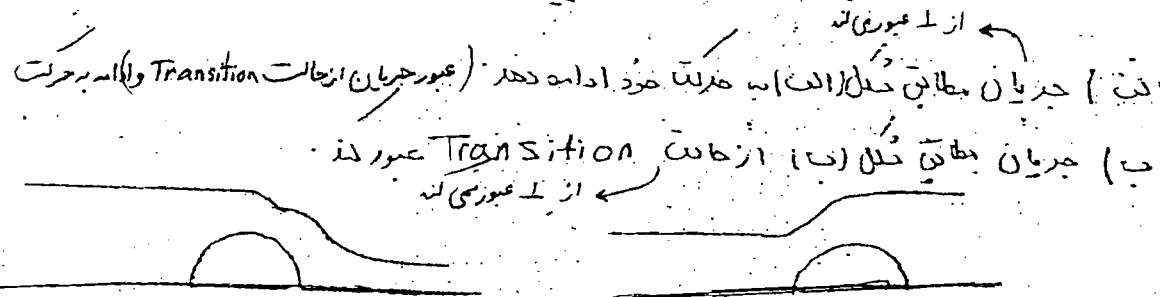
$$K=12 \quad \frac{\tau_w}{D} = 350 \text{ (s)}^{-1} \rightarrow n = \frac{\ln 200 - \ln 20}{\ln 800 - \ln 3.3} = 0.42$$



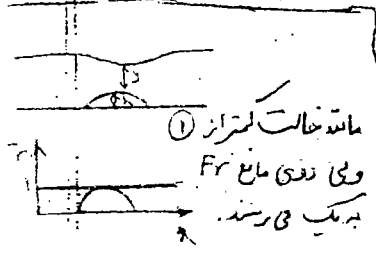
④ Concentric Cylinder Rotary Viscometer



در این حالت پدیده‌ها شرایط Down stream چو حالت شدن اختلاخ بعد
 پایین دست



at $\frac{dh}{dx} = 0 \Rightarrow Fr = 1$

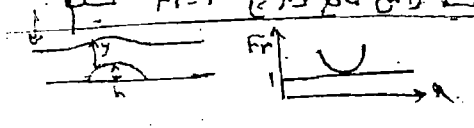


در هر دو حالت مطابق شکل Fr در ذرات مانع متحول می باشد

در هر دو حالت به $Fr = 1$ می رسیم $Fr = 1$ حتما در ذرات مانع رخ می دهد و می توانیم آن حالت را

نکته: معرکه $Fr = 1$ در این حالت است $\frac{dh}{dx} = 0$ این مطلب صحیح است

انرژی مانع در جایی $Fr = 1$ شود. حتما آن نقطه رأس مانع است وکی همیشه رأس مانع دارای $Fr = 1$ است



بررسی تغییرات h با Fr از ترتیب متداول بر روی Fr و بر روی h می توان درست

$$H = \frac{Q^2}{2g y^3} + y = y_c + h$$

$$H = y_c + \frac{Q^2}{2g y^3}$$

$H_{min} = H_c + h$

$$\frac{dH}{dy} = 0 \Rightarrow y_c = \left(\frac{Q^2}{g} \right)^{1/3}$$

حالت بحرانی

حد اقل ارتفاع سیال که می تواند به آن برسد $H_{min} = \frac{3}{2} y_c$

بر روی مانع

Equation of motion for a newtonian fluid with constant ρ and μ

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \rho \mathbf{g}$$

معادله نیوتن

1. Cartesian Coordinates (x, y, z)

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] + \rho g_x$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right] + \rho g_y$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$$

2. Cylindrical Coordinates (r, θ, z)

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] + \rho g_r$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] + \rho g_\theta$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$$

3. Spherical Coordinates (r, θ, ϕ)

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 - v_\phi^2}{r} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r}$$

$$+ \mu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} \right] + \rho g_r$$

the equation of motion in terms of τ

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p - [\nabla \cdot \tau] + \rho g$$

در سطح این قسم
استاد در دسترس

1. Cartesian Coordinates (x, y, z)

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] + \rho g_x$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right] + \rho g_y$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \left[\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right] + \rho g_z$$

2. Cylindrical Coordinates (r, θ, z)

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta r} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zr} \right] + \rho g_r$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \left[-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta\theta} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{z\theta} + \frac{\tau_{\theta r} - \tau_{r\theta}}{r} \right] + \rho g_\theta$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta z} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz} \right] + \rho g_z$$

3. Spherical Coordinates (r, θ, ϕ)

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r}$$

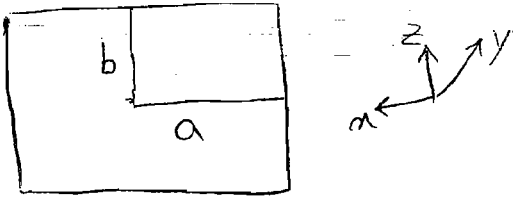
the equation of continuity

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho v_\phi) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \cdot v) \rho = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \rho = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) \right) = 0$$



معادله حرکت (مکانیک):

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + \rho g_y$$

$$\Rightarrow + \frac{\partial P}{\partial y} - \rho g_y = \mu \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta P}{L} = \mu \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} = \frac{\Delta P}{L\mu} \Rightarrow \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\Delta P}{L\mu} z + A$$

$$\Rightarrow v_y = \frac{\Delta P}{2L\mu} z^2 + Az + B$$

B.C. : $z = +b \rightarrow v_y = 0$
 $z = -b \rightarrow v_y = 0$

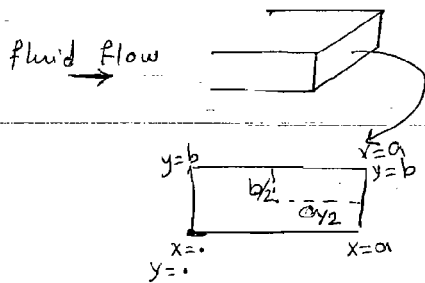
$$\Rightarrow \frac{\Delta P b^2}{2\mu L} - Ab + B = \frac{\Delta P}{2\mu L} b^2 + Ab + B$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = A \cdot 2b \rightarrow \boxed{A = 0} \\ B = -\frac{\Delta P}{2\mu L} b^2 \end{cases}$$

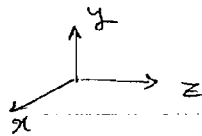
$$\Rightarrow v_y = \frac{\Delta P}{2\mu L} z^2 - \frac{\Delta P}{2\mu L} b^2 = \frac{-\Delta P b^2}{2\mu L} \left(1 - \left(\frac{z}{b} \right)^2 \right) \quad \boxed{\frac{b^2 \Delta P}{2\mu L} \left(1 - \left(\frac{z}{b} \right)^2 \right)}$$



homework: velocity distribution in triangular duct



cartesian coordinate



Equation of Motion For A Newtonian Fluid with constant ρ and μ

($v_x = 0, v_y = 0$)

Z-direction

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z}$$

Annotations: $\frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$ (For steady state), $v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0$ (assumption), $v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} = 0$ (assumption), $v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$ (fully developed)

$$\mu \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] = 0 \text{ (extended flow)}$$

linear change ($\Sigma F = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = \text{const}$)

$$\Rightarrow \frac{P_1 - P_0}{L} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \right) \Rightarrow \frac{P_1 - P_0}{\mu L} = \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}$$

$$\frac{P_1 - P_0}{\mu L} = R \Rightarrow \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} = R \quad (1) \quad \text{(PDE) poisson equation}$$

$v_z = v$

B.C: $\begin{cases} x=0 \rightarrow v(0, y) = 0 \\ x=a \rightarrow v(a, y) = 0 \\ y=0 \rightarrow v(x, 0) = 0 \\ y=b \rightarrow v(x, b) = 0 \end{cases}$

For changing poisson equation to laplace equation.

We need change of variable:

$$v(x, y) = w(x, y) + \frac{x^2 R}{2} \quad (2)$$

$$(1), (2) \quad \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} = 0$$



$$\begin{aligned}
 x=0 &\rightarrow v(x,y) = 0 \Rightarrow w(x,y) = 0 \\
 3.c \quad \left\{ \begin{array}{l} x=a \rightarrow v(a,y) = 0 \Rightarrow w(a,y) = -\frac{\alpha^2 R}{2} \\ y=0 \rightarrow v(x,0) = 0 \Rightarrow w(x,0) = -\frac{x^2 R}{2} \\ y=b \rightarrow v(x,b) = 0 \Rightarrow w(x,b) = -\frac{x^2 R}{2} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w(x,y) = 0 \\ w(a,y) = -\frac{\alpha^2 R}{2} \\ w(x,0) = 0 \\ w(x,b) = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} w(x,y) = 0 \\ w(a,y) = 0 \\ w(x,0) = -\frac{x^2 R}{2} \\ w(x,b) = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} w(x,y) = 0 \\ w(a,y) = 0 \\ w(x,0) = 0 \\ w(x,b) = -\frac{x^2 R}{2} \end{array} \right.$$

\downarrow w_1 \downarrow w_2 \downarrow w_3

$$w(x,y) = w_1(x,y) + w_2(x,y) + w_3(x,y)$$

Separation of variable

$$w_3(x,y) = X(x) Y(y)$$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\sigma \quad X(0) = X(a) = 0 \quad Y(0) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X'' + \sigma X = 0 \\ X(0) = X(a) = 0 \end{array} \right.$$

$$\sigma_n = \lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$X_n(x) = \sin \lambda_n x \quad n = 1, 2, 3$$

$$-\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2 \Rightarrow Y(y) = C_1 \cosh \lambda y + C_2 \sinh \lambda y$$

$$\text{if } Y(0) = 0 \Rightarrow Y(y) = C_2 \sinh \lambda y \Rightarrow$$

$$Y_n(y) = \sinh \lambda_n y$$

$$w_{3n}(x,y) = X_n(x) Y_n(y) = \sin \lambda_n x \sinh \lambda_n y \Rightarrow$$

$$w_3(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x \sinh \lambda_n y$$

$$\text{B.C. : } w(x,b) = -\frac{x^2 R}{2}$$

$$-\frac{x^2 R}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x \sinh \lambda_n b$$

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

15

16

17

3/

Fourier Coefficient:

$$A_n \sinh \lambda_n b = \frac{2}{b} \int_0^b \frac{-x^2 R}{2} \sin \lambda_n x \, dx \quad n=1, 2, 3, \dots$$

$$\Rightarrow A_n = \frac{2}{b \sinh \lambda_n b} \int_0^b \frac{-x^2 R}{2} \sin \lambda_n x \, dx$$

at now, we consider w_1 .

Similarly for w_1 :

$$w_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n y \sinh \lambda_n x \quad A_n = \frac{2}{b \sinh \lambda_n b} \int_0^b \frac{-x^2 R}{2} \sin \lambda_n y \, dy$$

For w_2 :

$$w_2^{(w_2)} = X(x) Y(y)$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{-Y''}{Y} = -\sigma$$

$$X(0) = X(a) = 0 \quad Y(b) = 0$$

$$\begin{cases} X'' + \sigma X = 0 \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases}$$

$$\sigma_n = \lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \quad n=1, 2, 3, \dots$$

$$X_n(x) = \sin \lambda_n x \quad n=1, 2, 3, \dots$$

$$-\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2 \Rightarrow Y(y) = C_1 \cosh \lambda y + C_2 \sinh \lambda y$$

$$\text{if } Y(b) = 0 \Rightarrow C_1 \cosh \lambda b + C_2 \sinh \lambda b = 0$$

$$C_1 = -C_2 \tanh \lambda b$$

$$Y(y) = -C_2 (\cosh \lambda y + \tanh \lambda b \sinh \lambda y)$$

10 11

12

13

14

15

16

17

$$4) \quad Y(y) = C_2 \left(\frac{\sinh \lambda (y-b)}{\cosh \lambda b} \right)$$

$$Y_n(y) = \frac{\sinh \lambda_n (y-b)}{\cosh \lambda_n b}$$

$$W_{2n}(x,y) = A_n(x) Y_n(y) = \sinh \lambda_n x \frac{\sinh \lambda_n (y-b)}{\cosh \lambda_n b}$$

$$\Rightarrow W_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \lambda_n x \frac{\sinh \lambda_n (y-b)}{\cosh \lambda_n b}$$

$$\text{if } (W_2(x,0) = -\frac{x^2 R}{2}) \Rightarrow$$

$$-\frac{x^2 R}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \lambda_n x \frac{\sinh \lambda_n (0-b)}{\cosh \lambda_n b}$$

$$A_n \sinh \lambda_n b = \frac{2}{b} \int_0^b \frac{x^2 R}{2} \sinh \lambda_n x \, dx$$

$$A_n = \frac{2}{b \sinh \lambda_n b} \int_0^b \frac{x^2 R}{2} \sinh \lambda_n x \, dx$$

$$W = W_1 + W_2 + W_3$$

$$D(x,y) = W(x,y) + \frac{x^2 R}{2}$$