Subject:
Year. ۹۲ Month. ۷ Date. ۱۰ ( ) ص ۱

مکانیک سیالات

میان ترم ۲۰
پایان ترم ۲۰
حضور در کلاس ۱۰
فعالیت کلاسی ۲۰
تحویل تکالیف ۱۰

فصل اول: مفاهیم و کلیات

دوم: مبانی حرکت سیالات (خطوط جریان)

سوم: معادلات اساسی حاکم بر سیال

چهارم: حل دقیق معادلات ناویر استوکس

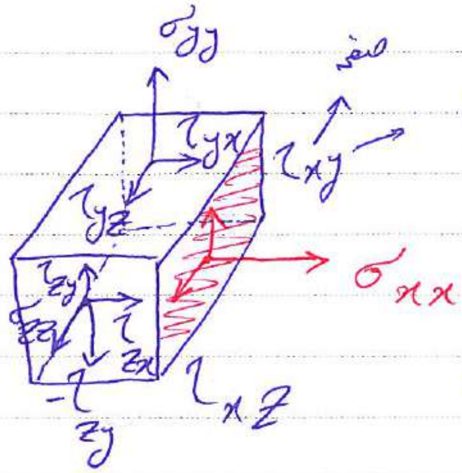
پنجم: جریان پتانسیل (جریان غیر لزج)

ششم: جریان با رینولدز پایین (جریان خزشی)

* کتاب مکانیک سیالات پیشرفته
دکتر وحید اصفهانیان
انتشارات دانشگاه تهران

P4PCO

میدان تنش:

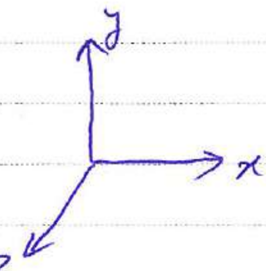


تنش نرمال
دارد بر این سطح

τ

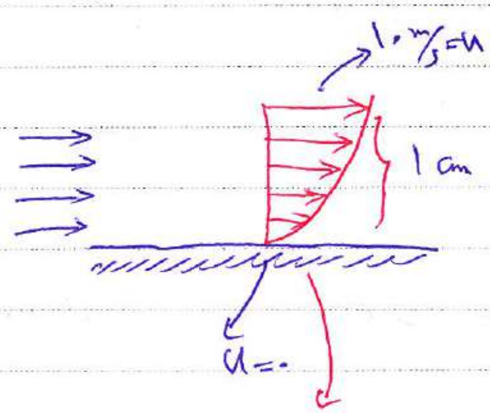
صفحه جهت

اندیس اول اندیس دوم



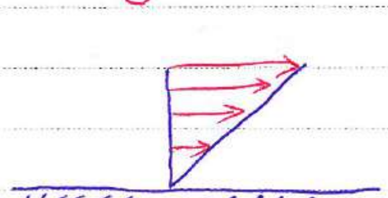
سیال نیوتنی:

$$\tau \propto \frac{\partial u}{\partial y}$$



گرادیان = اختلاف

$$\frac{du}{dy} \times \frac{10-0}{0.1}$$



$$\frac{du}{dy} = \frac{u_2 - u_1}{\Delta h}$$

سیال نیوتنی = به سیالاتی که بتوان پروفیل آن‌ها را خطی فرض کرد.

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{du}{dy} \qquad \boxed{\tau = \mu \frac{\Delta u}{\Delta y}}$$

سیالاتی هستند که در آن‌ها رابطه تنش برشی و گرادیان سرعت خطی می‌باشد.

در این سیالات به خاطر فرض خطی بودن پروفیل سرعت، گرادیان سرعت را می‌توان به صورت تقسیم اختلاف سرعت‌ها بر فاصله بدست آورد

یعنی: $\frac{du}{dy} = \frac{u_2 - u_1}{\Delta h}$

τ : N/m^2 (Pa)	$\frac{kg}{m s^2}$
u : m/s	m/s
y : m	m
μ : $\frac{N s}{m^2}$ (Pa.s)	$\frac{kg}{m . s}$
FLTθ	MLTθ
N	kg

$F = ma$

$N = kg \ m/s^2 \rightarrow kg = \frac{N s^2}{m}$

تنش $= F/A$

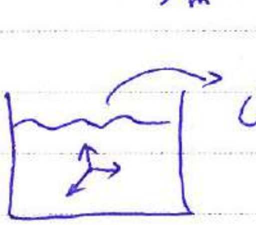
وزن مخصوص $\gamma = \frac{mg}{V} = \rho g$

چگالی (جرم مخصوص) $\rho = \frac{m}{V}$ (kg/m^3)

چگالی نسبی $S_i = \frac{\rho_i}{\rho_{آب}}$

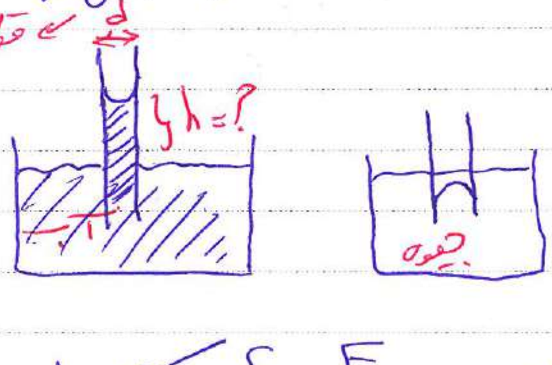
$\gamma_{آب} = ۹۸۰۶\ N/m^3$

$\rho_{آب} = ۹۹۹\ kg/m^3$



کشش سطحی: نیروی بین مولکول یک سیال.

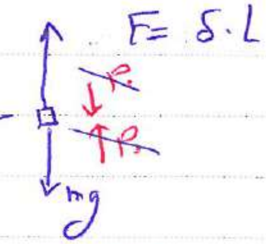
مویینگی، بالا رفتن آب از داخل لوله بسیار نازک به دلیل بالاتر بودن نیروی چسبندگی بین مولکول های آب و جداره نسبت به نیروی پیوستگی بین مولکول های سیال گویند.
(آب)



کشش سطحی $\sigma = \frac{F}{L}$ (N/m)

P_0 ، P_1

P_0 حذف شده چون در دو طرف خنثی می‌شود ← حلول

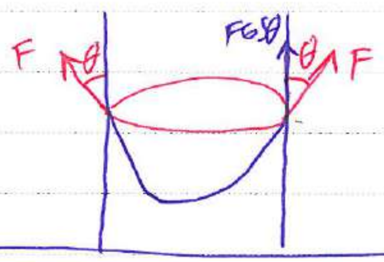


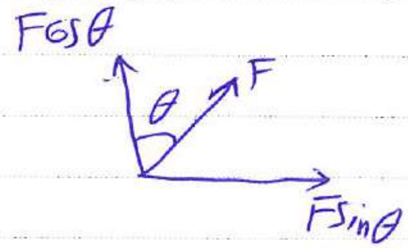
$$\Sigma F_y = 0 \qquad F_y = F\cos\theta$$

$$F_y - mg = 0 \rightarrow F_y = mg$$

$$\sigma \times \pi d = \rho \forall g \rightarrow \boxed{h = \frac{4\sigma\cos\theta}{\cancel{\rho g}\, d}}$$

$$\forall = \frac{\pi d^2}{4} \times h \qquad \rho g = \gamma$$





* سیال غیر نیوتنی: سیالی که اگر مدت زمان خصلت خود را از دست بدهد و به جامد تبدیل شود

$\forall$: حجم کل

حجم مخصوص : $v = \frac{1}{\rho}$

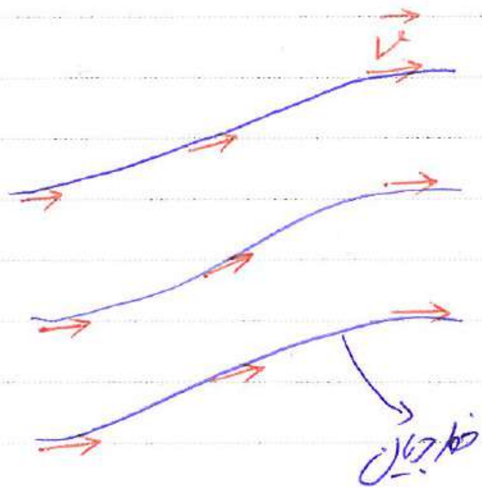
$$v = \frac{\forall}{m}$$

جریان تراکم ناپذیر:

در سیالی که تغییرات فشار به حدی نیست که باعث تغییر چگالی ρ گردد: $\rho = cte$

فصل دوم:

مبانی حرکت سیالات (خطوط جریان):



$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}$$

u: مولفه سرعت در راستای x
v: مولفه سرعت در راستای y
w: مولفه سرعت در راستای z

خط جریان: خطی است که در هر نقطه در هر زمان بر بردار سرعت مماس است.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

معادله پیوستگی برای جریان تراکم ناپذیر

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0$$

معادله پیوستگی در حالت کلی

مثال: اگر بردار سرعت یک سیال تراکم ناپذیر به صورت $\vec{V}=\underbrace{(2x+1)}_{u}\hat{i}+v\hat{j}$ باشد، پارامتر v و خطوط جریان را برای این سیال محاسبه کنید؟

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad 2+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad v=-2y+\underset{0}{C}$$

$$\boxed{v=-2y}$$

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \rightarrow \frac{dx}{2x+1} = \frac{dy}{-2y} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\ln(2x+1) = -\frac{1}{2}\ln y \rightarrow 2x+1 = y^{-1} \quad \boxed{y = \frac{1}{2x+1}}$$

معادله خط جریان

جریان تراکم پذیر است.

زمان مطرح نشده، جریان پایا می‌باشد. $t=0$

---

* نحوه محاسبه خطوط جریان برای میدان غیر دائم (غیر پایا):

اگر خطوط جریان را برای یک میدان نا پایا از نقطه عبوری (x_0, y_0, z_0)

در زمان t بخواهند از معادله زیر با شرط اولیه $x = x_0$ و $y = y_0$

و $z = z_0$ و $S = 0$ انتگرال می‌گیریم.

$$\frac{dx_i}{u_i} = dS$$

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = dS$$

پارامتر مرجع که در نقطه (x_0, y_0, z_0) صفر است.

با انتگرال گیری از رابطه فوق و جایگذاری شرایط اولیه ثوابت انتگرال

را محاسبه نموده و بعد از آن با جایگذاری زمان داده شده اقدام به

Subject:
Year. Month. Date. ( ) ص ۵

حذف پارامتر S می‌نماییم، رابطه‌ی بدست آمده خطوط جریان برکیب میدان نیز دائم را بدست می‌دهد.

مثال:
خطوط جریان بر میدان جریان در بعدی زیر را محاسبه کنید؟

$$\begin{cases} u = x(1+2t) \\ v = 2y \\ \omega = 0 \end{cases}$$

شرط اولیه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} (1,1) = (x_0, y_0) & \text{مکان} \\ t = 1\ sec & \text{زمان} \end{cases}$$

چون زمان مطرح شده؛ معادله غیر پایا است.

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = dS$$

$$\frac{dx}{x(1+2t)} = dS \longrightarrow \ln x = (1+2t)S + C_1$$

$$\frac{dy}{2y} = dS \longrightarrow \ln y = 2S + C_2$$

اعمال شرط اولیه $\rightarrow$
$$\begin{cases} \ln 1 = (1\times 2)\times 0 + C_1 \longrightarrow \boxed{C_1 = 0} \\ \ln 1 = 2\times 0 + C_2 \longrightarrow \boxed{C_2 = 0} \end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\frac{\ln y}{\ln x} = \frac{2s}{3s} \rightarrow \ln y = \frac{2}{3}\ln x \rightarrow \ln y = \ln x^{2/3} \rightarrow \boxed{y = x^{2/3}}$$

$$\begin{cases} x = e^{(1+2t)s} \\ y = e^{2s} \end{cases} \xrightarrow{\text{جای‌گذاری } t \text{ در معادله}} \begin{cases} \ln x = 3s \rightarrow x = e^{3s} \\ \ln y = 2s \rightarrow y = e^{2s} \end{cases} \xrightarrow{\ln \text{ گیری دوباره}} \boxed{y = x^{2/3}}$$

معادله خطوط جریان

← رابطه بین معادل ؟ (با حذف کردن s ؟).

* معادله تعریف شده حالت : پایا رانیز پوشش می‌دهد به عنوان مثال اگر بخواهیم خطوط جریان را برای میدان سرعت $V = bx\hat{i} - by\hat{j}$ محاسبه نماییم خواهیم داشت:

$$\begin{cases} (x_0, y_0) = (1,1) \\ t = 0 \text{ sec} \end{cases}$$

خطوط جریان: $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = ds$

معادله پایا (دائم)

$u = bx$

$v = -by$

$$\frac{dx}{bx} = ds \rightarrow \frac{1}{b}\ln x = s + C_1 \rightarrow \boxed{C_1 = 0}$$

$$\frac{dy}{-by} = ds \rightarrow -\frac{1}{b}\ln y = s + C_2 \rightarrow \boxed{C_2 = 0}$$

$$\frac{1}{b}\ln x = s \rightarrow \cancel{\frac{1}{b}}\ln x = -\cancel{\frac{1}{b}}\ln y \rightarrow$$

$$\to \ln x = -\ln y \to \ln x = \ln y^{-1} \to x = y^{-1} \to \boxed{x=\frac{1}{y}}$$

$$\ln x + \ln y = 0 \qquad \ln xy = \ln 1 \to xy = 1 \quad \boxed{y=\frac{1}{x}}$$

اگر بخواهیم خطوط جریان حاکم برای میدان جریان را بدست آوریم خواهیم داشت:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \to \frac{dx}{bx} = \frac{dy}{-by} \to \frac{1}{b}\ln x = -\frac{1}{b}\ln y + C$$

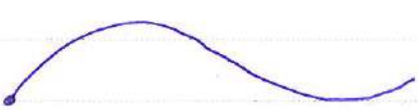
با اعمال شرایط مرزی (شرایط اولیه) داریم:

$$\begin{cases} \text{مکان } (1,1) \\ t=0\ sec \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اعمال شرایط مرزی}} C=0 \to \frac{1}{b}\ln x = -\frac{1}{b}\ln y \to$$

$$\to x = y^{-1} \to \boxed{y=\frac{1}{x}}$$

* خط مسیر:



خطی که مسیر هر ذره را مشخص می‌کند.

خطی است که به وسیله‌ی یک ذره از سیال در جریان طی می‌شود در واقع این
خط معادله مسیر حرکت یک ذره را نشان می‌دهد. نحوه بدست آوردن این

خط به این صورت می‌باشد که ابتدا باید از معادله زیر انتگرال گیری شود و سپس با اعمال شرایط مرزی ثوابت انتگرال را بدست آورد و در نهایت با حذف پارامتر t به معادله خط مسیر رسید.

$$\frac{dx_i}{u} = dt \rightarrow \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = dt \rightarrow$$ معادله خط مسیر

شرط اولیه $\begin{cases} (x_0, y_0) \\ t = t_0 \end{cases}$

حذف t

مثال:

$$\begin{cases} u = x(1+2t) \\ v = 2y \\ w = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x_0, y_0) = (1,1) \\ t = 0 \ \text{Sec} \end{cases}$$

$$\frac{dx}{x(1+2t)} = dt \rightarrow \frac{dx}{x} = (1+2t)\,dt \rightarrow$$

$$\ln x = t + t^2 + C_1 \xrightarrow[\text{شرط مرزی}]{B.C.} \ln 1 = 0 + 0 + C_1 \rightarrow \boxed{C_1 = 0}$$

$$\frac{dy}{2y} = dt \rightarrow \frac{dy}{y} = 2\,dt \rightarrow \ln y = 2t + C_2 \xrightarrow[\text{شرط مرزی}]{B.C.}$$

$$\ln 1 = 0 + C_2 \rightarrow \boxed{C_2 = 0}$$

$\ln x = t + t^2$

$\ln y = 2t \rightarrow t = \dfrac{\ln y}{2}$

$\rightarrow \ln x = \frac{1}{2}\ln y + \frac{1}{4}(\ln y)^2$

$\rightarrow \ln x = \frac{1}{2}\ln y\left(1+\frac{1}{2}\ln y\right)$

$x = \frac{1}{2} y \left(1+\frac{1}{2}\ln y\right)$

$2x = y\left(1+\frac{1}{2}\ln y\right)$

$$\boxed{y = \frac{2x}{1+\frac{1}{2}\ln y}}$$

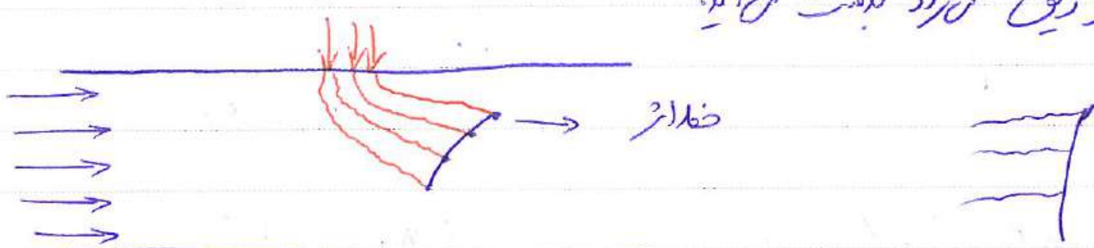
رابطه بین x و y ؟ با حذف t .

$\dfrac{\ln y}{\ln x} = \dfrac{2t}{t+t^2} = \dfrac{2\cancel{t}}{\cancel{t}(1+t)} \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{\ln y}{\ln x} = \dfrac{2}{1+t} \xrightarrow[t=0]{if} \ln y = 2\ln x \rightarrow \boxed{y = x^2}$

* خط اثر:

خطی است که از بهم متصل نمودن انتهای خطوطی که توسط یک ماده‌ی آشکارساز مانند دود یا جوهر رنگی که بطور مداوم به داخل میدان سیال تزریق می‌گردد بدست می‌آید.



مثلاً اگر در لحظه $t=5s$ عکس گرفته شود خط اثر به این صورت می‌باشد

یک ذره از سیال که در لحظه t در موقعیت (x,y,z) واقع است ابتدا از نقطه تزریق در لحظه زودتری مانند τ عبور نماید . $t \geq \tau \geq 0$

نحوه بدست آوردن خطوط اثر به این صورت می باشد که از معادله زیر
انتگرال گیری نموده و سپس با جای گذاری شرایط اولیه ثوابت انتگرال را
محاسبه نموده و در پایان با حذف τ از معادلات به معادله ی خط اثر
می رسیم
معادله خط مسیر:

$$\frac{dx_i}{u_i} = dt \longrightarrow \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = dt$$

شرط اولیه $\begin{cases} (x_0, y_0) \\ t=\tau \end{cases}$ $\qquad t=t$ و حذف τ

مثال:
معادله خط اثر حاکم بر میدان سیال زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{cases} u = x(1+2t) \\ v = y \\ w = 0 \end{cases} \qquad \text{شرط اولیه} \begin{cases} (x_0, y_0) = (1,1) \\ t = 0 \text{ sec} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln x = t + t^2 + C_1 \\ \ln y = t + C_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x_0, y_0) = (1,1) \\ t = \tau \end{cases}$$

$$\boxed{C_1 = -\tau - \tau^2}$$

$$\boxed{C_2 = -\tau}$$

$$\begin{cases} \ln x = t + t^2 - (\tau + \tau^2) \\ \ln y = t - \tau \end{cases}$$

با جاگذاری t و حذف τ معادله خط اثر بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \ln x = -\tau - \tau^2 \longrightarrow \\ \ln y = -\tau \longrightarrow \tau = -\ln y \longrightarrow \quad y = e^{-\tau} \end{cases}$$

$$\ln x = \ln y + (\ln y)^2 \longrightarrow \ln x = \ln y\,(1 + \ln y)$$

$$\boxed{x = y\,(1 + \ln y)}$$

رابطه بین y, x

$$\frac{\ln x}{\ln y} = \frac{1 - \ln y}{-\ln y} \longrightarrow \ln x = -1 + \ln y \longrightarrow \ln y - \ln x = 1$$

$$\longrightarrow \ln\left(\frac{y}{x}\right) = 1$$

$$\left.\begin{cases} x = e^{-\tau - \tau^2} = e^{-\tau(1+\tau)} \\ y = e^{-\tau} \end{cases}\right\} \Rightarrow x = \left[e^{-\tau}\right]^{(1+\tau)}$$

$$y = e^{-\tau}$$

$$\frac{\ln y}{\ln x} = \frac{-\cancel{\tau}}{-(\tau + \tau^2)} \qquad \boxed{x = (y)^{1 - \ln y}}$$

$$\frac{\ln y}{\ln x} = \frac{-\cancel{\tau}}{-\cancel{\tau}(1+\tau)} \longrightarrow \ln x = (1+\tau)\ln y \longrightarrow x = y^{1+\tau} \longrightarrow$$

می‌دانیم $y = e^{-\tau} \longrightarrow$ می‌دانیم $\tau = -\ln y \longrightarrow \boxed{x = y^{1 - \ln y}}$ ✓

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* quiz 1:

برای میدان سرعت داده شده با فرض شرایط اولیه به صورت معادله خط مسیر را در زمان $t=1\,sec$ بدست آورید و آن را بر روی مختصات x,y رسم نمایید.

$$V = \underbrace{xt}_{u}\,\hat{i} - \overbrace{\frac{y}{t}}^{v}\,\hat{j}$$

* در خط مسیر داریم:

$$\left\{\begin{array}{l}(x_0, y_0) = (1,1)\\ t = 1\ sec\end{array}\right\}$$

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i$$

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = dt$$

حذف t

حل:

$$\frac{dx}{dt} = u \qquad \frac{dy}{dt} = v$$

$$\left\{\begin{array}{l}u = xt\\ v = \dfrac{-y}{t}\end{array}\right.$$

$\frac{dx}{u} = dt$

$$\frac{dx}{dt} = xt \rightarrow \frac{dx}{x} = t\,dt \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}}$$

$$\ln x = \frac{t^2}{2} + C_1 \longrightarrow \cancel{\ln 1} = \frac{1}{2} + C_1 \quad \boxed{C_1 = -\frac{1}{2}}$$

$\frac{dy}{v} = dt$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-y}{t} \rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dt}{t} \rightarrow \cancel{\ln y} = -\ln t + C_2 \rightarrow$$

$$\boxed{C_2 = 0}$$

$$\left.\begin{array}{l}\ln x = \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{1}{2}\\ \ln y = -\ln t\end{array}\right\} \Longrightarrow y = \frac{1}{t}$$

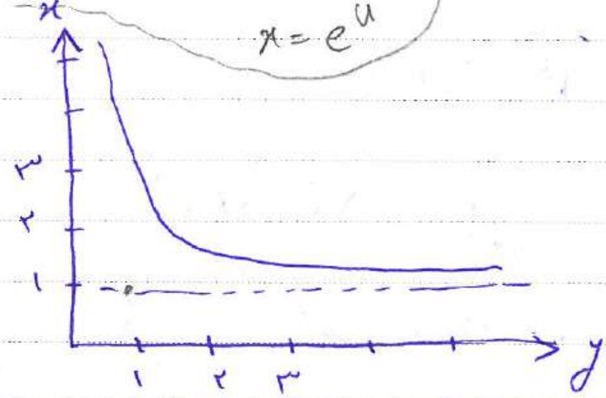
$$\boxed{t = \frac{1}{y}}$$

$$\ln x = \frac{\left(\frac{1}{y}\right)^{2}}{2} - \frac{1}{2} \longrightarrow \ln x = \frac{1}{2y^{2}} - \frac{1}{2} \longrightarrow$$

$$\frac{1-y^{2}}{2y^{2}} = \ln x \longrightarrow x = e^{\frac{1-y^{2}}{2y^{2}}}$$

x	1	∞
y	1	0

میدانیم از لگ[illegible]: $\ln x = u$
$x = e^{u}$

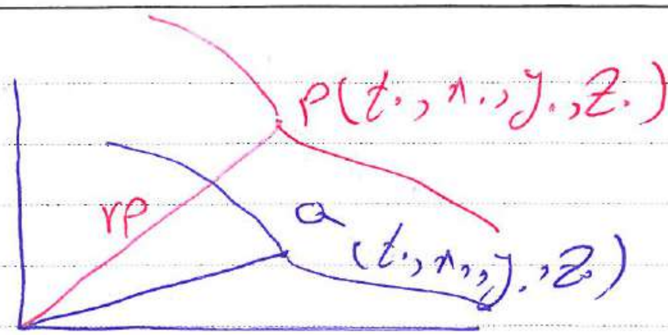


* دیدگاه لاگرانژی: «L»

در این دیدگاه ناظر یک ذره مادی را با گذشت زمان دنبال می‌نماید. این ذره مادی از موقعیت اولیه (x_0, y_0, z_0) شروع به حرکت نموده و این موقعیت مانند برچسبی است که ناظر بر روی ذره می‌زند که تا بتواند آن را دنبال نماید. بنابراین متغیر مستقل متغیر زمان است.

$$T = T(\underbrace{t}_{\text{متغیر مستقل}}, x_0, y_0, z_0)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )



$$\begin{cases} \vec{V} = \dfrac{dr}{dt} = \vec{V}(t, r_0) \\ \vec{a} = \dfrac{d\vec{V}}{dt} = \dfrac{d^2 r}{dt^2} = a(t, r_0) \end{cases}$$

بنابراین در این دیدگاه همه کمیت ها مانند فشار، چگالی، سرعت، شتاب، دما و ... تابعی از زمان و پارامتری لزوماً r_0 می باشند. این تحلیل بسیار دشوار و زمان بر می باشد.

* دیدگاه اویلری: « E »

در نگرش اویلری ناظر معمولاً علاقه ندارد تا بداند هر ذره خاص چه مسیری را طی می کند و به کجا می رود. بلکه ناظر به یک نقطه ثابت با موقعیت (x, y, z) در زمان t توجه می نماید. در این دیدگاه، تمام خواص تابعی از موقعیت و زمان می باشند. $T = T(t, x, y, z)$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( ) ص ۱۰

$$\frac{dF}{dt}=\frac{dF_L}{dt}=\underbrace{\frac{\partial F_E}{\partial t}}_{\text{ترم زمانی}}+\underbrace{\frac{\partial F_E}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial x}{\partial t}}_{u}+\frac{\partial F_E}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial y}{\partial t}}_{v}+\frac{\partial F_E}{\partial z}\underbrace{\frac{\partial z}{\partial t}}_{w}}_{\text{ترم مکانی}}$$

$$\frac{dF_E}{dt}=\frac{\partial F_E}{\partial t}+(u\hat{i}+v\hat{j}+w\hat{k})\cdot\left(\frac{\partial F_E}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial F_E}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial F_E}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial t}+\underbrace{(u\hat{i}+v\hat{j}+w\hat{k})}_{\vec{V}}\cdot\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)}_{\nabla\ \text{نابلا}}\right]F_E$$

$$=\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla\right)}_{\frac{D}{Dt}}F_E=\frac{DF_E}{Dt}$$

* $\frac{d}{dt}$

* $\frac{D}{Dt}$ مشتق مادی

$\begin{cases} i\cdot i=1 \\ i\cdot j=0 \end{cases}$

مثال:

اگر بردار موقعیت یک ذره با $r = x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ نشان داده شود

با استفاده از دیدگاه اویلری بردار سرعت را که به صورت $\vec{V}=u\hat{i}+v\hat{j}+w\hat{k}$

می‌باشد را بدست آورید. چون گفته (x, y, z) پس اویلری است.

چون r با x و y و z بوده و x_0 و y_0 و z_0 نبوده، پس اینطوری ادامه بده.

$$V = \frac{Dr}{Dt} = \left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}\cdot\vec{\nabla}\right] r$$ ← بسیار مهم

$$V = \cancel{\frac{\partial r}{\partial t}}^{\,0} + \vec{V}\cdot\vec{\nabla} r \Rightarrow (u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k})\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

∇, r, v

$\left.\begin{array}{l} \hat{i}\cdot\hat{i} = 1 \\ \hat{i}\cdot\hat{j} = 0 \end{array}\right\}$

ادامه

ادامه $\Rightarrow \left(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}\right)(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \Rightarrow$

$$\rightarrow \left[u\frac{\partial x\hat{i}}{\partial x} + \cancel{v\frac{\partial x\hat{i}}{\partial y}}^{\,0} + \cancel{w\frac{\partial x\hat{i}}{\partial z}}^{\,0}\right] +$$

$u\hat{i}\times 1$

$$\left[\cancel{u\frac{\partial y\hat{j}}{\partial x}}^{\,0} + v\frac{\partial y\hat{j}}{\partial y}^{\,1} + \cancel{w\frac{\partial y\hat{j}}{\partial z}}^{\,0}\right] +$$

$$\left[\cancel{u\frac{\partial z\hat{k}}{\partial x}}^{\,0} + \cancel{v\frac{\partial z\hat{k}}{\partial y}}^{\,0} + w\frac{\partial z\hat{k}}{\partial z}^{\,1}\right] = \boxed{u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}}$$

مثال:
اگر موقعیت یک میدان سیال به صورت $\vec{r} = x_0 e^{bt}\hat{i} + y_0 e^{-bt}\hat{j}$

Subject:
Year. Month. Date. ( ) ص۱۱

(b عدد ثابت بودن) باشد در ارتباط بین پارامترهای لاگرانژی و اویلری

ابتدا تعیین کنید:
$$\begin{cases} x = x_0 e^{bt} \\ y = y_0 e^{-bt} \end{cases}$$

الف) معادله بردار سرعت در دیدگاه لاگرانژی ؟ (مشتق بر حسب زمان بگیریم)

ب) محاسبه شتاب در دیدگاه لاگرانژی ؟

ج) محاسبه شتاب در دیدگاه اویلری ؟ (ابتدا V به صورت اویلری و بعد مشتق گیری)

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = V_L = \frac{d\vec{r}}{dt} = b x_0 e^{bt}\,\hat{i} - b y_0 e^{-bt}\,\hat{j} \qquad V_E = bx\hat{i} - by\hat{j}$$

$$a_L = \frac{dV_L}{dt} = b^2 x_0 e^{bt}\,\hat{i} + b^2 y_0 e^{-bt}\,\hat{j}$$

$$= a_E = ? \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\right] V_E = \frac{DV_E}{Dt}$$

$$\frac{\partial V_E}{\partial t} + (V\cdot\nabla) V_E = 0 + \left[\underbrace{(bx\hat{i} - by\hat{j})}_{V}\cdot\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)}_{\nabla}\right]$$

ادامه

ادامه

$$\to \cdot \underbrace{(bx\hat{i} - by\hat{j})}_{V_E} =$$

$$\to \left[bx\frac{\partial}{\partial x} - by\frac{\partial}{\partial y}\right](bx\hat{i} - by\hat{j}) \longrightarrow$$

Subject :

Year . Month . Date . ( )

$$= \left(b_x \frac{\partial \cancel{b_x i}}{\cancel{\partial x}} - b_x \frac{\partial \cancel{b_y j}}{\partial x} \right) + \left(- b_y \frac{\partial \cancel{b_x i}}{\partial y} + b_y \frac{\partial \cancel{b_y j}}{\cancel{\partial y}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow = \boxed{b^2 x_i + b^2 y_j}$$

باید جواب آخر هر دو دیدگاه، گرادیان و لاپلاس برابر باشه.

فصل سوم:

معادلات اساسی جریان سیال:

معادله پیوستگی
معادله مومنتم
معادله انرژی

$$\frac{DM}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{C.V} \eta \rho \, d\forall + \int_{C.S} \eta \rho V \, dA$$

? مقدار شار گذرنده از سطح

$$\eta = \frac{M}{m}$$ جرم

خاصیت سیستم مثل جرم، تکانه، انرژی، آنتروپی ...... :M

$$if \quad M = m \rightarrow \eta = 1$$

* معادله پیوستگی:

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho \, d\forall + \iint \rho V \, dA$$

$$0 = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho \, d\forall}_{\text{نرخ تغییرات جرم در داخل حجم کنترل}} + \underbrace{\iint \rho V \, dA}_{\text{دبی جرمی گذرنده از سطح کنترل}}$$

یادآوری:

دبی حجمی $\quad Q = VA \quad (m^3/s)$

دبی جرمی $\quad \dot{m} = \rho Q = \rho V A \quad (kg/s)$

سرعت جرمی $\quad G = \rho V \quad (kg/m^2 s)$

حالات خاص:

$\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \Leftarrow \forall = cte$

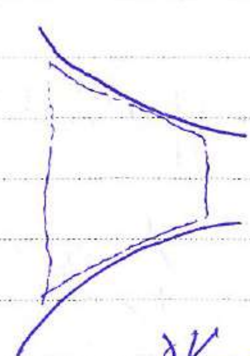
۱- جریان تراکم ناپذیر: $(\rho = cte)$

$$\underbrace{\cancel{\rho \frac{\partial}{\partial t}\iiint d\forall}}_{\text{صفر}} + \rho \iint V dA = 0$$

با فرض حجم کنترل ثابت $\quad \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \Leftarrow \forall = cte$

$$\rightarrow \iint V dA = 0$$

$$\boxed{\begin{gathered} \text{ما پیوستگی} \quad \Sigma (VA)_{out} - \Sigma (VA)_{in} = 0 \\ \Sigma Q_{out} = \Sigma Q_{in} \end{gathered}}$$



حجم کنترل

?

$\frac{\partial V}{\partial t} = 0$

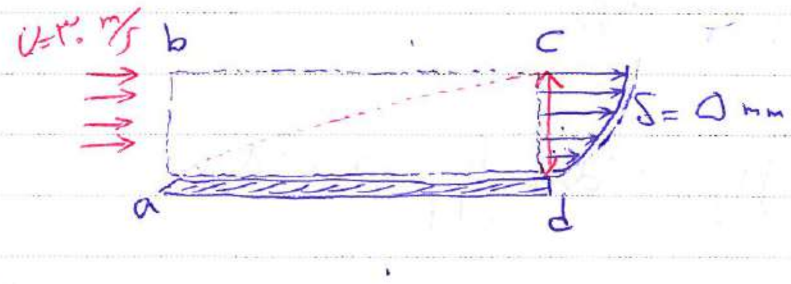
۲- جریان دائمی: $\left(\frac{\partial}{\partial t}=0\right)$

$$\underbrace{\cancel{\frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho\, d\forall}}_{0} + \iint \rho V\, dA = 0 \rightarrow \iint \rho V\, dA = 0$$

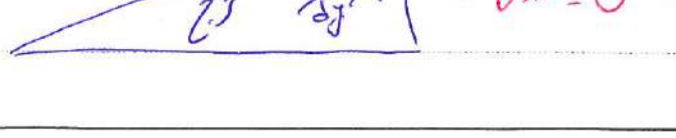
$$\boxed{\begin{gathered}\Sigma(\rho V A)_{out} - \Sigma(\rho V A)_{in} = 0 \\ \Sigma \dot{m}_{out} = \Sigma \dot{m}_{in}\end{gathered}}$$

مثال:

جریان هوا با سرعت V به طور یکنواخت بر روی یک صفحه تخت وزیده می‌شود.
به علت عدم لغزش جریان بر روی صفحه یک لایه مرزی تشکیل می‌گردد. اگر توزیع
سرعت در داخل لایه مرزی $\frac{u}{V}=2\left(\frac{y}{\delta}\right)-\left(\frac{y}{\delta}\right)^2$ تخمین زده شود
نرخ جریان جرمی گذرنده از مقطع BC را محاسبه نمایید؟



$\dot{m}_{bc}=?$



پهنای عمقی $=0.6\,m$

ورودی ab
خروجی cd
— ad
خروجی bc

$\rho = 1.24 \ kg/m^3$

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho\, d\forall} + \iint \rho V dA = 0 \rightarrow \iint \rho V dA = 0 \rightarrow$$

چون مقدار $\dot m_{bc}$ مثبت شده پس ورودی و خروجی را درست گرفتیم.　　? = ۰/۰۳۴۴

$$\sum \dot m_{out} = \sum \dot m_{in} \rightarrow \dot m_{ab} = \dot m_{cd} + \dot m_{bc} \rightarrow$$

$$\dot m_{ab} = \rho V A = 1.24 \times 30 \times (0.6 \times 5 \times 10^{-3}) = \rightarrow 0.111 \ kg/s \quad A$$

$$\dot m_{cd} = \rho \int (u)\, 0.6\, dy = \rho \int_0^{0.005} 30 \left[2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right] \times 0.6\, dy =$$

$$\rightarrow = \frac{30 \times 0.6 \times \rho}{\delta}\left[y^2 - \frac{y^3}{3\delta}\right]_0^{0.005} = \left(\frac{30 \times 0.6 \times 1.24}{0.005}\right)\left((5\times10^{-3})^2 - \frac{(5\times10^{-3})^3}{3\times 5\times10^{-3}}\right) =$$

$$\dot m_{cd} = 0.0744 \ kg/s$$

* معادله مومنتم خطی:

$$\frac{DM}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\iiint \eta \rho\, d\forall + \iint \eta \rho V dA$$

$\eta = V \leftarrow M = mV$ کلی　　$\eta = \frac{M}{m}$

$$\frac{D(mV)}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\iiint V\rho\, d\forall + \iint V\rho\, V dA$$

کلی‌ترین حالت معادله مومنتم خطی

$$\cancel{V\frac{Dm}{Dt}} + m\frac{DV}{Dt} = F$$

0 ، a

$$\boxed{\sum F = \frac{\partial}{\partial t}\iiint V\rho\, d\forall + \iint V\rho\, V dA}$$

از آن جایی که نیروها به دو دسته‌ی سطحی و حجمی دسته بندی می‌گردند در معادله مومنتم از عبارت ساییش F ($\sum F$) استفاده نمودیم و داریم:

$$\sum F = F_S + F_B$$

سطحی ، حجمی

نیروهای حجمی مانند وزن و الکترومغناطیس بر کل میدان جسم تأثیر گذارند. اما نیروهای سطحی مثل نیروی حاصل از تنش و یا نیروهای فشاری بر روی سطح اجسام اعمال اثر می‌نمایند.

* شرایط پایا:

$$F_S + F_B = \iint V\rho\, V dA \qquad A_1$$

جهت x:

$$F_{S_x} + F_{B_x} = \iint u\, \overbrace{\rho V dA}^{\dot m} \qquad A_2$$

در راستا مورد نظر x ، حالت کلی

$$F_{S_y} + F_{B_y} = \iint v\, \rho V dA \qquad A_3$$

سرعت در راستای y ، حالت کلی

Subject: $\frac{Du}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + V \cdot \nabla\right) u$ شتاب

Year. Month. Date. ( )

نیروی حاصل از شتاب در واحد حجم

ناویر استوکس: جهت x:

$$x: \rho\left[\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right] =$$

$$\underbrace{-\frac{\partial P}{\partial x}}_{F_S} + \underbrace{\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)}_{F_S} + \underbrace{\rho g_x}_{F_B}$$

F_S: نیروی فشاری در واحد حجم

F_S نیروی تنش لزجی در واحد حجم

F_B: نیروی وزن در واحد حجم

$$\Sigma F = F_S + F_B$$

$$\rho a = \underbrace{\text{نیروی فشاری} + \text{نیروی لزجی}} + \text{نیروی وزن}$$

$$\begin{cases} \Sigma F = (\dot m V)_{out} - \Sigma(\dot m V)_{in} & A_1 \text{ ساده شده} \\ \Sigma F_x = \Sigma(\dot m u)_{out} - \Sigma(\dot m u)_{in} & A_2 \text{ "} \\ \Sigma F_y = \Sigma(\dot m V)_{out} - \Sigma(\dot m V)_{in} & A_3 \text{ "} \end{cases}$$

معادله حالات ساده A_1 و A_2 و A_3

معادلات اساسی حرکت سیال (ادامه فصل سوم):

$$\frac{dM}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{C.V} \eta \rho \, d\forall + \int_{C.S} \eta \rho \vec{V} \cdot \hat{n} \, dA$$

$M = m$ دیفرانسیلی

$M = mV$ مومنتم خطی

$$\eta = \frac{M}{m}$$

* قانون بقای انرژی:

$M = U \rightarrow$ انرژی کل یک سیستم

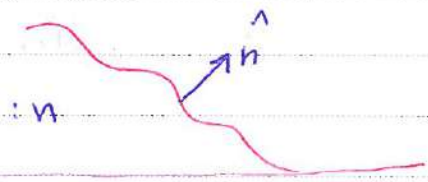
$Q - W = U \leftarrow$ قانون اول ترمودینامیک

$$U = mgZ + \frac{1}{2} m V^2 + m u$$

انرژی پتانسیل — انرژی جنبشی — انرژی داخلی

$$\eta = \frac{M}{m} \Rightarrow \eta = u + \frac{V^2}{2} + gZ = E$$

$$\Rightarrow \frac{dU}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint E \rho \, d\forall + \iint E \, \rho \vec{V} \cdot \hat{n} \, dA$$



n: بردار نرمال

*

$$\boxed{\dot{Q} - \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint \left(u + \frac{V^2}{2} + gZ\right) \rho \, d\forall + \iint \left(u + \frac{V^2}{2} + gZ\right) \rho \vec{V} \cdot \hat{n} \, dA}$$

معادله فوق قانون بقای انرژی می‌باشد که در آن $\dot{W}$ نرخ کار انجام شده (توان) بوده که به ۲ نوع تقسیم می‌گردد:

۱- توان محوری

۲- توان انجام شده توسط تنش‌ها

۳- توان انجام شده توسط تنش برشی

۴- دیگر توان های انجام شده بر روی حجم کنترل نظیر انرژی الکتریکی، انرژی الکترومغناطیسی، اشعه های لیزر و ......

توضیح ۱: کار انجام شده توسط یک محور که به خارج از سطح کنترل منتقل می گردد.

$\dot{W}_s = T\omega$ → توان محوری

$\dot{W}_{normal} = ?$

توضیح ۲ =

$$dW = F \cdot dS$$

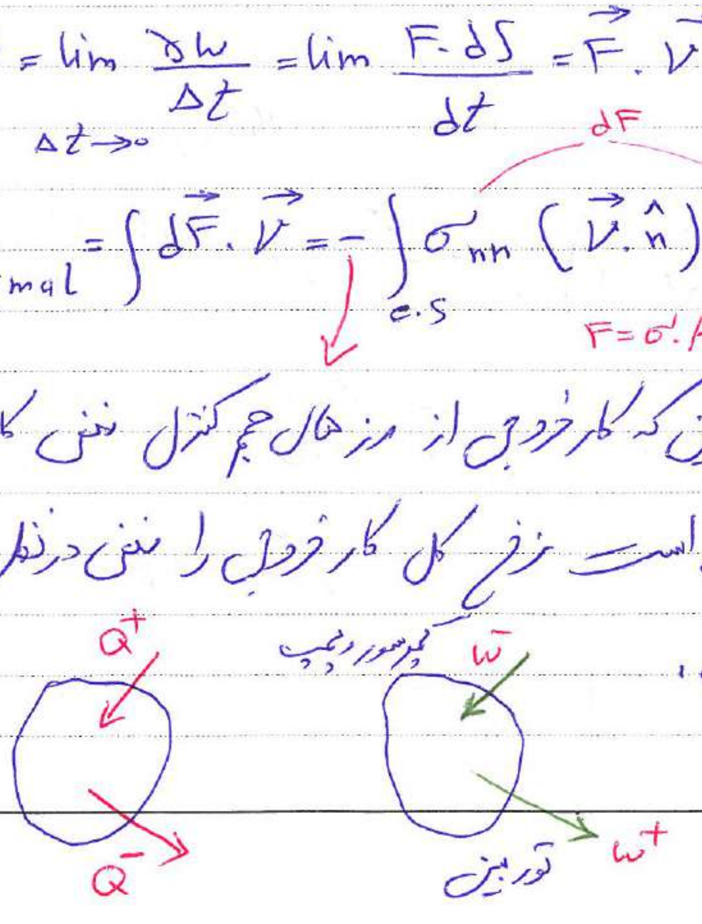
$$\dot{W} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\delta W}{\Delta t} = \lim \frac{F \cdot dS}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V}$$

$$\dot{W}_{normal} = \int d\vec{F} \cdot \vec{V} = -\int_{c.s} \overbrace{\sigma_{nn} (\vec{V} \cdot \hat{n}) \, dA}^{dF}$$

$F = \sigma \cdot A$

به دلیل این که کار خروجی از مرزهای حجم کنترل منفی کار انجام شده بر روی حجم کنترل است منفی کل کار خروجی را منفی در نظر می گیرند.

* یادآوری:



توضیح ۳ =

$$\dot{w}_{shear} = -\int \tau\,(\vec{V}\cdot n)\,dA$$

توضیح ۴ =

$$\dot{w}_{other}$$

$$\boxed{\sigma_{nn} = -P}$$

پس ۴ حالت گفته شده را در فرمول جایگذاری می‌کنیم:

$$\dot{Q} - \underbrace{(\dot{W}_s + \dot{W}_{shear} + \dot{W}_{other})}_{\dot{W}} + \int_{C.S} \underbrace{\sigma_{nn}}_{-P}\,\vec{V}\cdot n\,dA =$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint E\,\rho\,d\forall + \iint E\,\rho\,(\vec{V}\cdot\hat{n})\,dA$$

$$\dot{Q} - \dot{W} + \sum \dot{m}_i\left(h_i + \frac{V_i^2}{2} + gZ_i\right) - \sum \dot{m}_{out}\left(h_{out} + \frac{V_{out}^2}{2} + gZ_{out}\right) = 0$$

قانون اول ترمودینامیک برای حجم کنترل

$$\boxed{h = u + PV}$$

$V = \frac{1}{\rho}$ حجم درجه

آنتالپی

$$h = u + PV \rightarrow h = u + \frac{P}{\rho}$$

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t}\iiint E\rho\,d\forall + \underbrace{\iint \left(E + \frac{P}{\rho}\right)\rho\,\vec{V}\cdot\hat{n}\,dA}$$

$$\iint E\rho V\cdot n\,dA + \iint P\,\vec{V}\cdot n\,dA$$

$$= (E\rho + P)\,\vec{V}\cdot n\,dA$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$E + \frac{P}{\rho} = u + \frac{V^2}{2} + gz + PV = h + \frac{V^2}{2} + gz$$

$$\dot{Q} - \dot{W} = 0 + \iint \left(h + \frac{V^2}{2} + gz\right) \underbrace{\rho \vec{V}\cdot n\, dA}_{\dot{m}}$$ → جریان
> SSSF

$$\dot{Q} - \dot{W} + \sum \dot{m}_{in}\left(h_i + \frac{V_i^2}{2} + gz_i\right) - \sum \dot{m}_{out}\left(h_o + \frac{V_o^2}{2} + gz_o\right) = 0$$

SSSF: steady state جریان پایدار

$\frac{\partial}{\partial t} = 0$ معادله در فرم انتگرال بوده است.

$$\dot{Q} - \dot{W} + \sum \dot{m}_i (h_i + \dots) - \sum \dot{m}_{out}(h_{out} + \dots) = 0$$ معادله بر فرم جبری: (تعادل انرژی)

معادلات دیفرانسیل حاکم بر جریان سیال:

(بیان جرم (پیوستگی))

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{C.V} \rho\, dV + \int_{C.S} \rho \vec{V}\cdot n\, dA$$ → داریم

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$ میدانیم

$$\int_{C.S} \vec{F}\cdot n\, dA = \int_{C.V} \nabla\cdot F\, d\forall$$ ← استرس برداری

گرادیان φ

دیورژانس F

$$\int_{C.S} \varphi\, n\, dA = \int_{C.V} \nabla\varphi\, d\forall$$ ← اسکالر استرس

نابلا

$$\underline{\dot{Q}-\dot{W}}+\int_{cs}\underset{-P}{\sigma_{nn}}\,\vec{V}\cdot n\,dA=\underbrace{\cancel{\frac{\partial}{\partial t}\iiint\underbrace{\left(u+\frac{V^2}{2}+gz\right)}_{E}\rho\,d\forall}}_{\text{صفر}}+$$

$$\iint\underbrace{\left(u+\frac{V^2}{2}+gz\right)}_{E}\rho\,\vec{V}\cdot n\,dA$$

انتگرال $\iiint$ صفر می‌شود چون SSSF (steady state) بوده یعنی

$\frac{\partial}{\partial t}=0$ بوده چون جریان پایدار (پایا) می‌باشد.

$$\dot{Q}-\dot{W}-\iint P\,v\,dA=\iint\overbrace{\left(u+\frac{V^2}{2}+gz\right)}^{E}\rho\,v\,dA$$

$$\dot{Q}-\dot{W}=\iint P\,v\,dA+\iint\left(u+\frac{V^2}{2}+gz\right)\rho\,v\,dA$$

می‌دانیم $\rho=\frac{1}{v}$ $\Leftarrow$ $\boxed{\rho v=1}$ با بالا ρv اضافه می‌کنیم

$$\dot{Q}-\dot{W}=\iint P\,v\,\rho\,v\,dA+\iint\overbrace{\left(u+\frac{V^2}{2}+gz\right)}^{E=U}\rho\,v\,dA$$

در طرف راست تساوی داریم: $P\,v\,\rho\,v\,dA+U\rho\,v\,dA=\cancel{\underbrace{(Pv+U)}_{h\ \text{آنتالپی}}\rho\,v}\,dA$

$$\left[(Pv+U)\rho\,v\,dA=\left(\underbrace{Pv+u}_{h\ \text{آنتالپی}}+\frac{V^2}{2}+gz\right)\rho\,v\,dA\right]_1^2$$

ادامه

۱: کران پایین ۲: کران بالا

$$\left(h + \frac{V^2}{2} + gz\right) \rho V dA \Big]_1^2 =$$ ادامه

$$\dot{Q} - \dot{W} = \iint \left(h + \frac{V^2}{2} + gz\right) \underbrace{\rho \vec{V} \cdot n \, dA}_{\dot{m} \text{ دبی جرمی}} =$$

$$\dot{Q} - \dot{W} = \sum \dot{m}_{out} \left(h + \frac{V^2}{2} + gz\right) - \sum \dot{m}_{in} \left(h + \frac{V^2}{2} + gz\right)$$

$$\dot{Q} - \dot{W} + \sum \dot{m}_{in} \left(h + \frac{V^2}{2} + gz\right) - \sum \dot{m}_{out} \left(h + \frac{V^2}{2} + gz\right) = 0$$

روش دوم:

$$\iint \sigma_{nn} \, V \cdot n \, dA$$

$\sigma_{nn} \times \frac{v}{v}$ حجم مخصوص $\rightarrow v = \frac{1}{\rho} \rightarrow$ پس $\rho = \frac{1}{v}$

پس می‌آییم جای $\frac{1}{\rho} \leftarrow \frac{v}{v}$ در صورت $v\rho$ ظاهر می‌شود، که

$$\iint \underbrace{\sigma_{nn}}_{-P} \underbrace{\rho v}_{1} \cdot V \cdot n \, dA$$

$$\iint E \rho (V \cdot n) dA + \iint P \rho v \, V \cdot n \, dA = \iint (E + \overset{\text{در}}{P} v)(\rho V \cdot n \, dA)$$

$$u + gz + \frac{V^2}{2} + Pv \Rightarrow \underbrace{u + Pv = h}_{\text{می‌دانیم}} \rightarrow h + gz + \frac{V^2}{2}$$

$$0=\frac{\partial}{\partial t}\int_{C.V}\rho\, d\forall+\int_{C.V}\nabla\cdot(\rho\vec{V})\, d\forall$$

داریم

با استفاده از برداری استوکس:

با فرض تراکم پذیر بودن سیال:

ρ متغیر بوده.

$$0=\int_{C.V}\frac{\partial\rho}{\partial t}\, d\forall+\int_{C.V}\nabla\cdot(\rho\vec{V})\, d\forall \Longrightarrow$$

$$0=\int_{C.V}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{V})\right]d\forall$$

معادله پیوستگی در حالت دیفرانسیل $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho V)=0 \Longrightarrow$

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w)=0}$$ حالت کلی:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad \rho=cte$$

در جهت — V کل

$$F_B+F_S=\frac{\partial}{\partial t}\int_{C.V}\rho\vec{V}\, d\forall+\int_{C.S}\vec{V}\,\rho\,\vec{V}\cdot n\, dA$$

سرعت در جهت x — V کل

حالت انتگرالی: $\int_{C.V}\rho g_x\, d\forall-\int_{C.S}P\, dA=\int_{C.V}\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{u})\, d\forall+\int_{C.S}u\,\rho\vec{V}\cdot n\, dA$

سو شتم در جهت x — در جهت x — بردار سطح

Subject:
Year. Month. Date. ( )

استوکس اسکالر :

$$\int_{C.V} \rho g_x \, d\forall - \int_{C.V} \nabla P \, d\forall = \int_{C.V} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) \, d\forall + \int_{C.V} \nabla\cdot(\rho u \vec{V}) \, d\forall$$

حجم

فرم دیفرانسیل معادله مومنتم

$$\boxed{\rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \cancel{\mu \nabla^2 V} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \nabla\cdot(\rho u \vec{V})}$$

لزجت صفر

معادله اویلر ← حالت خاص استوکس

چون لزجت صفر در نظر می‌باشد

معادلات اویلر حالت خاص از معادلات ناویر استوکس است که در آن از لزجت صرف نظر می‌گردد.

$$y: \quad \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial (\rho v)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho v \vec{V})$$

$$\dot{Q} - \dot{W} - \int \vec{P} \, \vec{V}\cdot\hat{n} \, dA = \frac{\partial}{\partial t}\int_{C.V} E\rho \, d\forall + \int_{C.S} E\rho \vec{V}\cdot n \, dA$$

فرم دیفرانسیل معادله‌های انرژی

$$\int_{C.V} \rho \dot{q} \, d\forall - \int_{C.S} P\vec{V}\cdot n \, dA = \frac{\partial}{\partial t}\int_{C.V} E\rho \, d\forall + \int_{C.S} E\rho \vec{V}\cdot n \, dA$$

PAPCO

* فرض $\dot{W} = 0$ باشد.

$$\int_{C.V}\left[\rho \dot{q} - \vec{\nabla}(\rho \vec{V})\right] d\forall = \int_{C.V}\left[\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(E\rho\vec{V})\right] d\forall$$

$$\rho \dot{q} - \nabla\cdot(\rho\vec{V}) = \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(E\rho\vec{V})$$

فصل دوم تا صفحه ۱۱۱ تا ابتدای معادلات در فرم ناپایستار خوانده شود.

فصل چهارم و فصل یکم سوال داده می شود.

فصل ۵: حل دقیق معادلات ناویر استوکس:

راستای x:

$$\overbrace{\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)}^{\text{نیروی اینرسی}}=$$

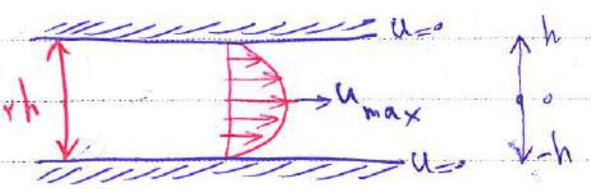
$$-\frac{\partial p}{\partial x}+\underbrace{\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)}_{\text{نیروی لزج}}+\rho g_x$$

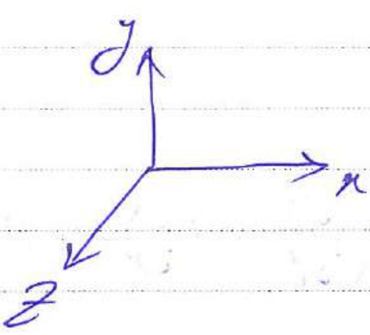
دلیل اصلی مشکل بودن حل معادلات ناویر استوکس غیر خطی بودن ترم های جابجایی شتاب است یعنی $u\frac{\partial u}{\partial x}$ و $v\frac{\partial u}{\partial y}$ و ... می باشد.
ولی اگر بتوان به گونه ای از جملات شتاب جابجایی صرف نظر کرد می توان حل تحلیلی برای این معادلات ایجاد نمود. یکی از فرض های اساسی برای حل تحلیلی معادلات دائمی بودن جریان می باشد. $\frac{\partial u}{\partial t}=0$ ← زمان

از جمله مثال های برای این معادلات، جریان آرام دائمی بین صفحات تخت موازی می.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

هدف: پیدا کردن توزیع سرعت:





مرکز مختصات در وسط صفحه در نظر گرفتیم.

z عمود بر صفحه بوده.

فرضیات:

۱- دائم بودن $\frac{\partial}{\partial t}=0$

۲- $w=0$ $v=0$ سرعت در راستای y و z صفر می‌باشد.

از $v=0$ داریم $\frac{\partial u}{\partial x}=0$?

$$\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}+\cancel{\frac{\partial v}{\partial y}}+\cancel{\frac{\partial w}{\partial z}}=0$$

۳- فرض کاملاً توسعه یافته $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$

پروفیل سرعت پس از مدتی هم چنان ثابت و یک شکل می‌باشد.

پس $g_x=0$

$$0=-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}+u\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}+v\cancel{\frac{\partial u}{\partial y}}+w\cancel{\frac{\partial u}{\partial z}}\right)=-\frac{\partial P}{\partial y}$$ ادامه →

ادامه $\rightarrow + \mu\left(\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)+\rho g_y$

$$0=-\frac{\partial P}{\partial y}+\rho g_y \xrightarrow[\frac{\partial P}{\partial y}=\rho g]{} \boxed{P=\rho g_y + f(x)}$$

پس: $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}$

حل با انتگرال گیری:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)y+C_1$$

$$\boxed{u=\frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}y^2+C_1 y+C_2}$$

برای بدست آوردن C_1 و C_2 شرط مرزی را می‌نویسیم:

B.C:

$$\left\{\begin{array}{ll} y=-h & u=0 \\ y=h & u=0 \end{array}\right\}$$

بعد ثابت‌ها را پایین گفتیم

$$\boxed{u=\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)(y^2-h^2)}$$

* محاسبه سرعت max :

$u\Big|_{y=0}$

$$u\Big|_{y=0} = u_{max} = -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}h^2$$

مشتق برحسب y

* محاسبه دبی جریان :

دبی در واحد عمق صفحه

$$Q = \int_{-h}^{+h} u\,dy = \int_{-h}^{+h}\frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}(y^2-h^2)\,dy \rightarrow$$

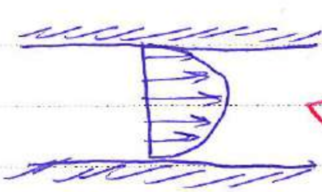
$$= \frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\left(\frac{y^3}{3}-h^2y\right)\Big|_{-h}^{h} = \frac{-4}{6\mu}\frac{\partial P}{\partial x}h^3 \rightarrow$$

$$Q = \frac{-2}{3\mu}\frac{\partial P}{\partial x}h^3$$

* محاسبه سرعت متوسط :

$$Q = \int u\,dA = \bar{V}A \qquad \bar{u} = \frac{Q}{A}$$

$$\bar{V} = \frac{-\frac{2}{3\mu}\frac{\partial P}{\partial x}h^3}{2h\times 1} = -\frac{1}{3\mu}\frac{\partial P}{\partial x}h^2$$



⇐ پروفیل سرعت به صورت سهمی شکل است

$$\boxed{u_{max} = \frac{3}{2}\bar{V}}$$

* تمرین 1 : مثال 5-1 صفحه 161 کتاب حل و تحویل داده شود.

معادلات ناویر استوکس برای r و θ و Z :

r) $\rho\left(\frac{\partial V_r}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}-\frac{V_\theta^2}{r}+V_z\frac{\partial V_r}{\partial z}\right)$

$=-\frac{\partial P}{\partial r}+\rho g_r+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_r}{\partial r}\right)-\frac{V_r}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2}-\right.$

$\left.\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2}\right]$

θ) $\rho\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_\theta}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}+\frac{V_\theta V_r}{r}+V_z\frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right)$

$=\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}+\rho g_\theta+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_\theta}{\partial r}\right)-\frac{V_\theta}{r^2}+\right.$

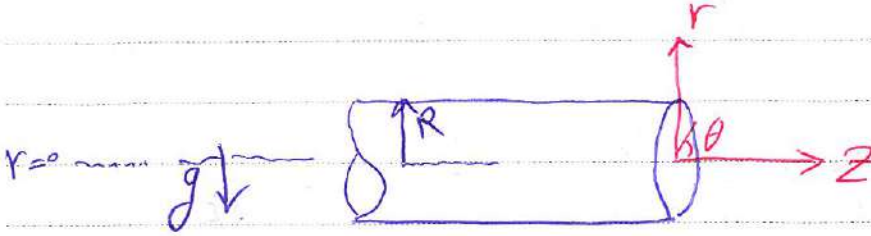
$\left.\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2}\right]$

Z) $\rho\left(\frac{\partial V_z}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_z}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)=$

$-\frac{\partial P}{\partial z}+\rho g_z+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right]$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: پروفیل سرعت؟



جریان پایا $\frac{\partial}{\partial t}=0$

فرضیات: $V_r = V_\theta = 0$

$$g_r = -g\sin\theta$$
$$g_\theta = g\cos\theta$$
$$g_z = 0$$

پیوستگی $\frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$

به علت تقارن ← $? \quad \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = 0 , \ \frac{\partial}{\partial \theta} = 0$

کاملاً توسعه یافته $\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} = 0$

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial V_z}{\partial t}} + \cancel{V_r \frac{\partial V_z}{\partial r}} + \cancel{\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta}} + \cancel{V_z \frac{\partial V_z}{\partial z}}\right) =$$

$$-\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_z}{\partial r}\right) + \cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}}\right]$$

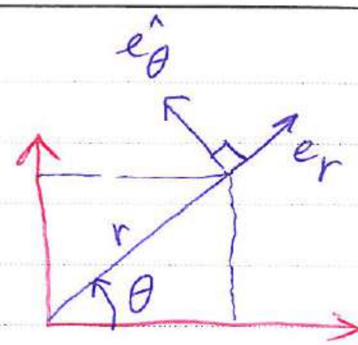
$$z: \quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)$$

ضرب در r

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_z}{\partial r}\right) = \frac{r}{\mu}\frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\int \longrightarrow r\frac{\partial V_z}{\partial r} = \frac{r^2}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial z} + C_1 \quad \xrightarrow{\text{تقسیم بر } r}$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial r} = \frac{r}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{C_1}{r} \xrightarrow[r]{\int \text{نسبت به}}$$



$$V_z = \frac{r^2}{4\mu}\frac{\partial P}{\partial z} + C_1 \ln r + C_2$$

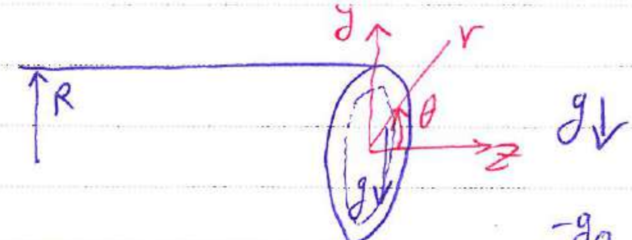
شرط مرزی 1: $r=R \longrightarrow V_z = 0$

$$0 = \frac{R^2}{4\mu}\frac{\partial P}{\partial z} + C_1 \ln r + C_2$$

شرط مرزی 2: در $r=0$ مقدار سرعت باید محدود باشد لذا $C_1 = 0$ $(\ln 0 = -\infty)$

$$\longrightarrow C_2 = \frac{-R^2}{4\mu}\frac{\partial P}{\partial z}$$

$$V_z = \frac{r^2}{4\mu}\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{R^2}{4\mu}\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{4\mu}\frac{\partial P}{\partial z}\left[r^2 - R^2\right]$$



تمرین ۲:

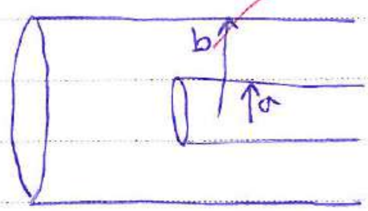
با استفاده از معادلات ناویر استوکس در راستای θ و r نشان دهید عبارت (شار) $\frac{\partial P}{\partial z}$ تابعی از چه بوده و نسبت به r ثابت است؟

(R_{in} صرفنظر کرده)

تمرین ۳:

مقادیر سرعت متوسط ، سرعت ماکزیمم و دبی حجمی گذرنده از لوله را با توجه به پارامترهای داده شده بیابید؟

$r=b , r=a \quad v_z=0$



نکته:

دو لوله توخالی داخل هم:

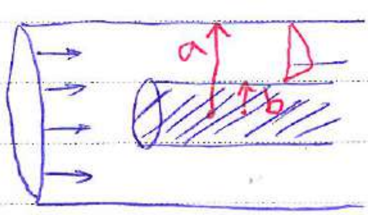
$r=0 \quad v_z =$ محدود

$r=a \quad v_z=0$

نکته: تنش برشی در سطح آزاد سیال برابر صفر است (مثال ۵-۱)

نکته:

یک میله در داخل یک لوله:



$r=a \Rightarrow v_z=0$

$r=b \rightarrow v_z=0$

$\tau=0 \ \left(\frac{\partial u}{\partial y}=0\right)$

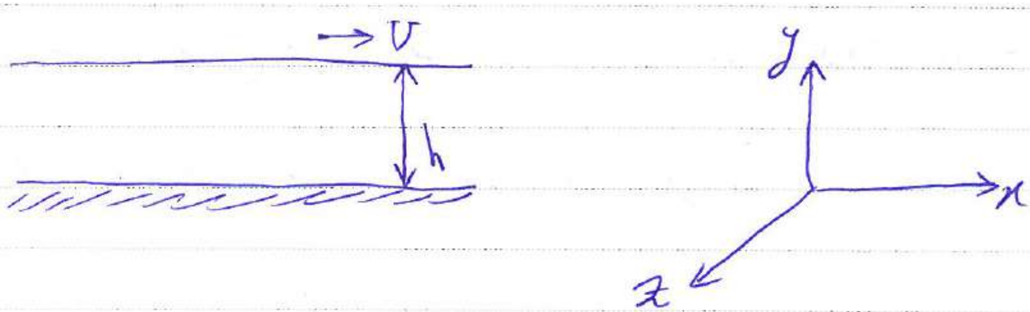
تمرین ۴:

تحقیق نمائید با افزایش شعاع میله (a) مکان سرعت ماکزیمم چه تغییری می‌نماید؟

quiz 2:

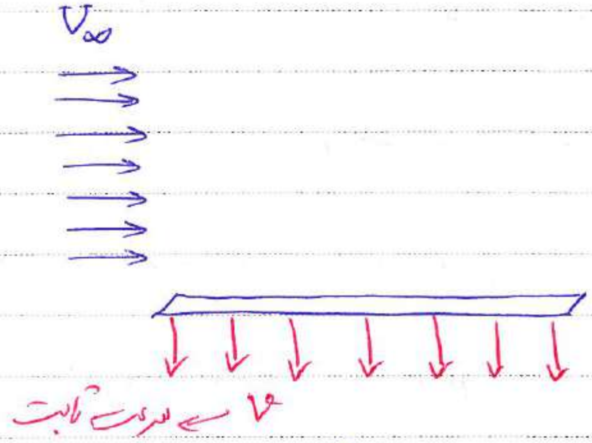
جریان کوئت جریانی است بین صفحات موازی که با ثابت نگه داشتن یکی از صفحات و حرکت دادن صفحه دیگر با سرعت U ایجاد می‌گردد. مطلوبست توزیع سرعت بین صفحات و رسم پروفیل با توجه به تغییرات $\frac{\partial P}{\partial x}$.

(برای $\frac{\partial P}{\partial x}$ های مثبت، صفر، منفی).



Subject:
Year. ۹۲ Month. ۹ Date. ۶

* جریان سیال روی یک صفحه با مکش یکنواخت:



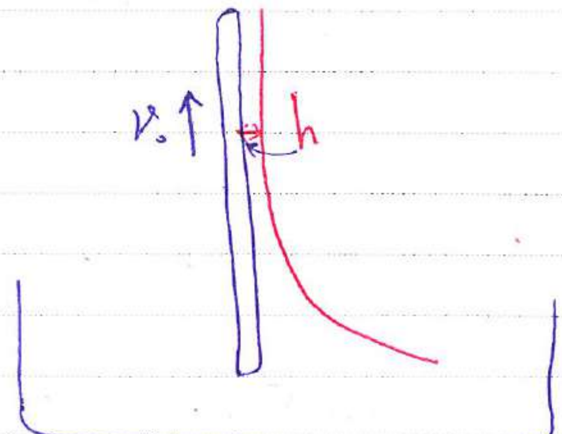
هدف محاسبه‌ی پروفیل سرعت از روی یک صفحه با طول بی‌نهایت که تحت مکش یکنواخت با سرعت V قرار دارد می‌باشد.

فرضیات:

- پایا
- $\frac{\partial u}{\partial x}=0$: به دلیل طول بی‌نهایت صفحه.
- $v=-V$ ← سرعت در راستای y
- $P=cte$ $\left(\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=0\right)$

quiz 3:

یک تسمه ی عریض متحرک از داخل مخزن ذخیره ی سیال عبور می کند، حرکت تسمه به سمت بالا و با سرعت V_0 می باشد. عبارتی برای توزیع سرعت و دبی حجمی جریان سیال که همراه تسمه به سمت بالا کشیده می شود را بیابید؟



$u, q = ?$

جریان دائم

$$\rho\left(\cancel{u\frac{\partial u}{\partial x}}_{0} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \cancel{w\frac{\partial u}{\partial z}}_{0} + \cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}_{0}\right) =$$

$$-\cancel{\frac{\partial P}{\partial x}}_{0} + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{0} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}_{0}\right) + \cancel{\rho g_x}_{0} \Rightarrow$$

$$\rho\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v\rho\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{v\rho}{\mu}\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$u'' + \underbrace{\frac{V\rho}{\mu}}_{m} u' = 0$$

$$D^2 + mD = 0$$
$$D(D+m) = 0 \qquad D = 0 \qquad D = -m$$

? $\quad u = C_1 + C_2 e^{-my}$

شرط مرزی:

$y = 0 \quad u = 0 \;\rightarrow\; 0 = C_1 + C_2$

$y = \infty \rightarrow u = V_\infty \;\rightarrow\; V_\infty = C_1 + 0$

$$\boxed{C_1 = V_\infty \qquad C_2 = -V_\infty}$$

$m = +\frac{V\rho}{\mu}$

$$u = V_\infty \left(1 - e^{\left(-\frac{V\rho}{\mu} y\right)}\right)$$

مکش میتواند سبب تأخیر در جدایش لایه مرزی می‌شود و از افزایش درگ (اصطکاک پوسته‌ای) جلوگیری می‌کند.

$$\tau_w = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}$$

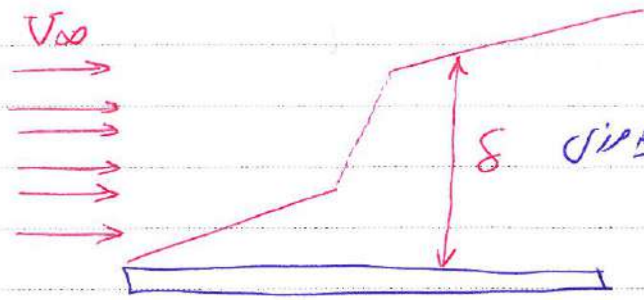
$$\tau_w = \mu V_\infty \left(0 + \frac{V\rho}{\mu} \underbrace{e^{-\frac{V\rho}{\mu} y}}_{1}\right) \Rightarrow \tau_w = \rho V V_\infty$$

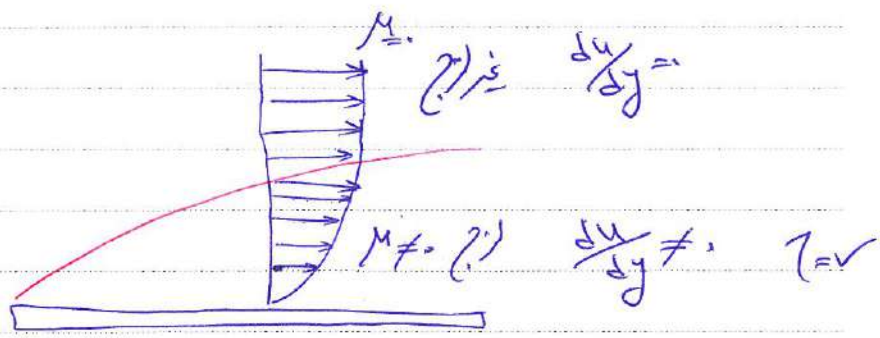
با توجه به دالهایی تنش برش افزایش R سبب ازدیاد تنش برشی دیواره می‌گردد لذا باید مصالحه‌ای برای انتخاب R صورت بگیرد.

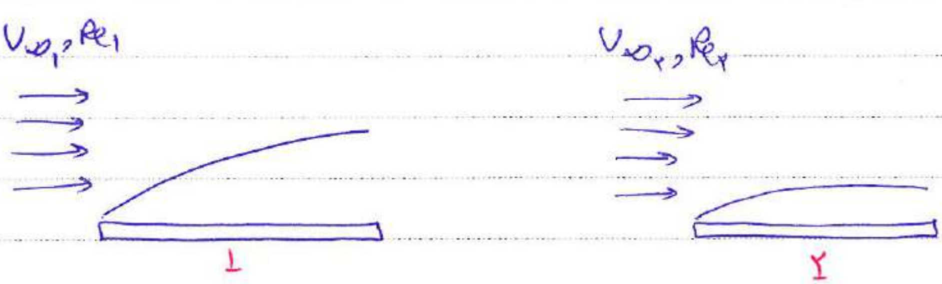
* از صفحه ۱۷۱ تا ۱۷۲ (مطالعه به عهده دانشجو) ← (امتحان می‌آید)
مسأله اول و دوم استوکس

* فصل هفتم :

جریان غیر لزج :







$$Re_1 < Re_2$$

$$\downarrow \delta = \frac{5x}{\sqrt{Re}\uparrow}$$

وقتی Re زیاد شود لایه مرزی تخت‌تر و کمتر می‌شود.

وقتی $Re \gg 1$ ← لایه مرزی به صفحه می‌چسبد و قسمت لزج بسیار ناچیز و می‌توان کل ناحیه را غیر لزج فرض کرد.

جریان سیال در عبور از روی یک صفحه تخت به دو ناحیه لزج (ناحیه داخل لایه مرزی) و غیر لزج (ناحیه خارج لایه مرزی) تقسیم می‌گردد. در اعداد Re بالا ضخامت لایه مرزی بسیار کوچک بوده لذا می‌توان فرض کرد که جریان سیال روی جسم سر می‌خورد. لذا کل میدان جریان را می‌توان غیر لزج تصور نمود و در معادلات ناویر استوکس از ترم لزجت صرف نظر کرد. بنابراین به یک جریان غیر لزج غیر چرخشی، جریان پتانسیل می‌گویند که معمولاً آن را تراکم ناپذیر فرض می‌کنند.

$\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0 \rightarrow$ غیر چرخشی

$\rho = cte$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \hat{i}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) - \hat{j}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

چرخش در راستای x

$$+\hat{k}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

چرخش در راستای z

Subject:
Year. Month. Date. ( )

برای دو بُعدی چرخش در راستای z حذف شده.

برای جریان ۲ بعدی غیر چرخشی ← $\vec{\nabla}\times\vec{V}=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$

* تابع جریان : ψ : ←

$$\begin{cases} u=\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v=-\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

* تابع پتانسیل : φ ←

$$\begin{cases} u=\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v=\frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{cases}$$

از این دو، کوشی ریمان حاصل می‌شود

کوشی ریمان :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}=-\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

$V=\nabla\varphi$

* تمرین ۵ :

حاصل عبارت های زیر را بدست آورید؟

PAPCO

$\nabla\varphi \cdot \nabla\psi = ?$

$\nabla^2\varphi = ?$

$\nabla^2\psi = ?$

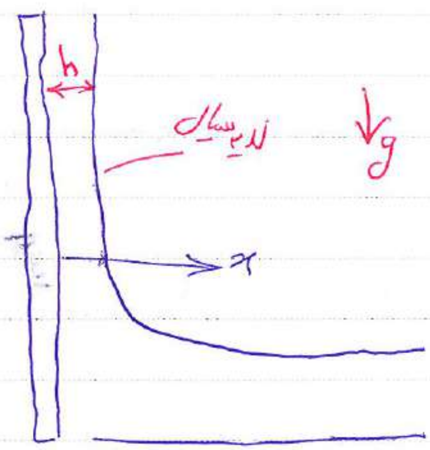
با محاسبه‌ی موارد فوق می‌توان به این نتیجه رسید که توابع جریان و پتانسیل
سرعت همساز باشند یعنی $\nabla^2\varphi = \nabla^2\psi = 0$ که برای تابع جریان و
پتانسیل صدق می‌کند.

* حل تمرین ۱ جزوه :

(مثال ۵-۱ کتاب)

یک تسمه عریض داخل مخزن یک سیال لزج عبور می‌کند. نیروی

سیال روی تسمه که سرعت میانگین سیال ایجاد می‌کند؟



فرض جریان

دائم $\frac{\partial v}{\partial t}=0$

آرام

یکنواخت $\rightarrow u=w=0$

معادله پیوستگی $\frac{\partial u}{\partial x}=0 \rightarrow \frac{\partial v}{\partial y}=0$

فرض توسعه یافتگی نداریم $\rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\neq 0$

$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}=0$ $\quad \frac{\partial P}{\partial y}=0$ چون فشار در همه جا برابر فشار جو باشد

روی سطح آزاد سیال و در روی خط $x=h$

$$\rho\left(\cancelto{0}{\frac{\partial v}{\partial t}}+\cancelto{0}{u\frac{\partial v}{\partial x}}+\cancelto{0}{v\frac{\partial v}{\partial y}}+\cancelto{0}{w\frac{\partial v}{\partial z}}\right)=-\cancelto{0}{\frac{\partial P}{\partial y}}+$$

$$\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\cancelto{0}{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}+\cancelto{0}{\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}}\right)+\rho g_y$$

$$0 = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \rho \underset{-g}{g_y} \rightarrow \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \underbrace{\rho g}_{\gamma} \rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\gamma}{\mu} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\gamma}{\mu} x + C_1 \rightarrow v = \frac{\gamma}{2\mu} x^2 + C_1 x + C_2$$

شرط مرزی $\xrightarrow{x=h}$ تنش برشی $= 0 \rightarrow \tau = \mu \frac{dv}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dv}{dx} = 0$
?

$$\rightarrow 0 = \frac{\gamma}{\mu} x + C_1 \Big|_{x=h} \rightarrow C_1 = \frac{-\gamma h}{\mu}$$

$$x=0 \rightarrow v = v_0 \rightarrow v_0 = C_2 \rightarrow v = \frac{\gamma x^2}{2\mu} - \frac{\gamma h}{\mu} x + v_0$$

دبی حجمی در واحد عمق $\quad q = \int_0^h v\,dx = \int_0^h \left(\frac{\gamma}{2\mu} - \frac{\gamma h}{\mu} + v_0\right) dx$

$$q = \frac{\gamma}{6\mu} x^3 - \frac{\gamma h}{2\mu} x^2 + v_0 x \Big]_0^h =$$

$$\rightarrow \frac{\gamma}{6\mu} h^3 - \frac{\gamma h^3}{2\mu} + v_0 h - 0$$

سرعت میانگین $\rightarrow q = \bar{v} A \rightarrow \bar{v} = v_0 - \frac{\gamma h^2}{3\mu}$

$A \hookrightarrow 1 \times h$
در واحد عرض

PAPCO

جریان سیال رو به بالا $\quad v_0 > \gamma h^2\, 3\mu$

حل تمرین ۲ جزوه:

فرضیات $V_r = V_\theta = 0$

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial \theta} = 0$$

در راستای r:

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial V_r}{\partial t}} + \cancel{V_r}\frac{\partial V_r}{\partial r} + \cancel{\frac{V_\theta}{r}}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \cancel{\frac{V_\theta^2}{r}} + V_z\cancel{\frac{\partial V_r}{\partial z}}\right) =$$

$$\rightarrow -\frac{\partial P}{\partial r} + \rho g_r + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cancel{\frac{\partial V_r}{\partial r}}\right) - \cancel{\frac{V_r}{r^2}} + \frac{1}{r^2}\cancel{\frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2}} - \frac{2}{r^2}\cancel{\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}} + \cancel{\frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2}}\right.$$

$$\Longrightarrow 0 = -\frac{\partial P}{\partial r} + \rho g_r \rightarrow \frac{\partial P}{\partial r} = \rho g_r \rightarrow P = g r \rho + f(z,\theta)$$

$$\rightarrow \frac{\partial P}{\partial z} = 0 + f'(z,\theta) \longrightarrow$$ به r بستگی ندارد

در راستای θ:

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial V_\theta}{\partial t}} + V_r\cancel{\frac{\partial V_\theta}{\partial r}} + V_\theta\cancel{\frac{V_r}{r}} + V_z\cancel{\frac{\partial V_\theta}{\partial z}}\right) =$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cancel{\frac{\partial V_\theta}{\partial r}}\right) - \cancel{\frac{V_\theta}{r^2}} + \frac{1}{r^2}\cancel{\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2}} + \frac{2}{r^2}\cancel{\frac{\partial V_r}{\partial \theta}} + \cancel{\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2}}\right]$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$0 = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} + \rho g_\theta \Rightarrow P = r\rho g_\theta \theta + f(z, r)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = f'(r, z) + 0 \longrightarrow$$ به θ هم بستگی ندارد.

*حل تمرین ۳ جزوه:

پروفیل سرعت $V_z = \frac{1}{4\mu}\frac{\partial P}{\partial z}(r^2 - R^2)$

max سرعت $\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } r}$ $\frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial z} r = 0 \longrightarrow r = 0$

*در لوله در نقطه $r=0$ سرعت max است.

V_{max} در مرکز لوله است.

$$V_{max} = V_z\Big|_{r=0} = \frac{-R^2}{4\mu}\frac{\partial P}{\partial z}$$

دبی جریان: $Q = \int_0^R V_z \, dA = \int_0^R V_z \, 2\pi r \, dr$

$$Q = \frac{\pi}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial z}\int_0^R (r^2 - R^2) r \, dr = \frac{\pi}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial z}\left[\frac{r^4}{4} - \frac{R^2 r^2}{2}\right]_0^R$$

$$\longrightarrow Q = \frac{-\pi R^4}{8\mu}\frac{\partial P}{\partial z}$$

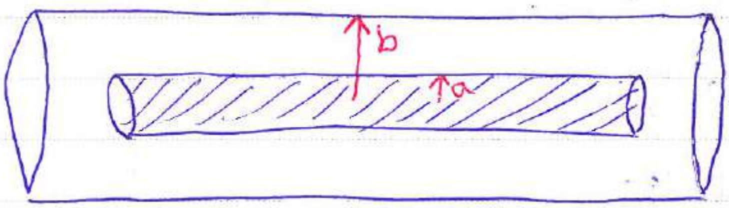
?

سرعت متوسط $Q = \bar{V} A$ $\quad A \to \pi R^2$ $\longrightarrow \bar{V} = \frac{-R^2}{8\mu}\frac{\partial P}{\partial z}$

$$\frac{\bar{V}_z}{V_{max}} = \frac{\frac{-R^2}{8\mu}\frac{\partial P}{\partial z}}{\frac{-R^2}{4\mu}\frac{\partial P}{\partial z}} = \frac{1}{2}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( ) ص ۳۰

* حل تمرین ۴ جزوه:



در مرحله قبل سرعت مثل حالت بدون میله است : $V_z = \frac{r^2}{4\mu}\frac{\partial P}{\partial z} + C_1 \ln r + C_2$

شرایط مرزی : $\begin{cases} r=a \rightarrow V_z = 0 \\ r=b \rightarrow V_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \frac{a^2}{4\mu}\frac{\partial P}{\partial z} + C_1 \ln a + C_2 \\ 0 = \frac{b^2}{4\mu}\frac{\partial P}{\partial z} + C_1 \ln a + C_2 \quad (*) \end{cases}$

از هم کم می‌کنیم

$$0 = \frac{b^2 - a^2}{4\mu}\frac{\partial P}{\partial z} + C_1(\ln b - \ln a)$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{a^2 - b^2}{4\mu}\frac{\partial P}{\partial z} \times \frac{1}{\ln b/a}$$

(*) در معادله $\quad 0 = \frac{b^2}{4\mu}\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{a^2 - b^2}{4\mu \ln b/a}\frac{\partial P}{\partial z} \ln b + C_2$

$$\rightarrow C_2 = \frac{\frac{\partial P}{\partial z}}{4\mu}\left(-b^2 - \frac{a^2 - b^2}{\ln b/a} \ln b\right)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$V_z = \frac{r^2}{4\mu}\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{a^2-b^2}{4\mu \cdot \ln \frac{b}{a}}\frac{\partial P}{\partial z}\ln r - \frac{\frac{\partial P}{\partial z}}{4\mu}\left(a^2 + \frac{a^2-b^2}{\ln \frac{b}{a}}\ln b\right)$$

$$V_z = \frac{\frac{\partial P}{\partial z}}{4\mu}\left[r^2 + \frac{a^2-b^2}{\ln \frac{b}{a}}(\ln r - \ln b) - a^2\right]$$

$$V_z = \frac{1}{4\mu}\frac{\partial P}{\partial z}\left(r^2 - a^2 + \frac{(a^2-b^2)}{\ln \frac{b}{a}}\ln \frac{r}{b}\right)$$

$$V_{max} : \frac{\frac{\partial P}{\partial z}}{4\mu}\left(2r + \frac{(a^2-b^2)}{\ln \frac{b}{a}}\frac{1}{r}\right) = 0$$

$$2r = \frac{b^2-a^2}{\ln \frac{b}{a}}\frac{1}{r} \rightarrow r^2 = \frac{b^2-a^2}{2\ln \frac{b}{a}} \rightarrow r = \pm\left(\frac{b^2-a^2}{2\ln \frac{b}{a}}\right)^{1/2}$$

?

* جریان های غیر چرخشی:

$$F=\frac{\sigma}{2\pi}\ln z$$

چاه و چشمه

پتانسیل مختلط

$$F=\varphi+i\psi \Rightarrow \begin{cases} u=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=\dfrac{\partial\psi}{\partial y} \\ v=\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=-\dfrac{\partial\psi}{\partial x} \end{cases}$$

پتانسیل سرعت — تابع جریان

$$\begin{cases} u_r=\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta} \\ u_\theta=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}=-\dfrac{\partial\psi}{\partial r} \end{cases}$$

$$F=\frac{\sigma}{2\pi}\ln z \Rightarrow F=\frac{\sigma}{2\pi}\ln(re^{i\theta})$$

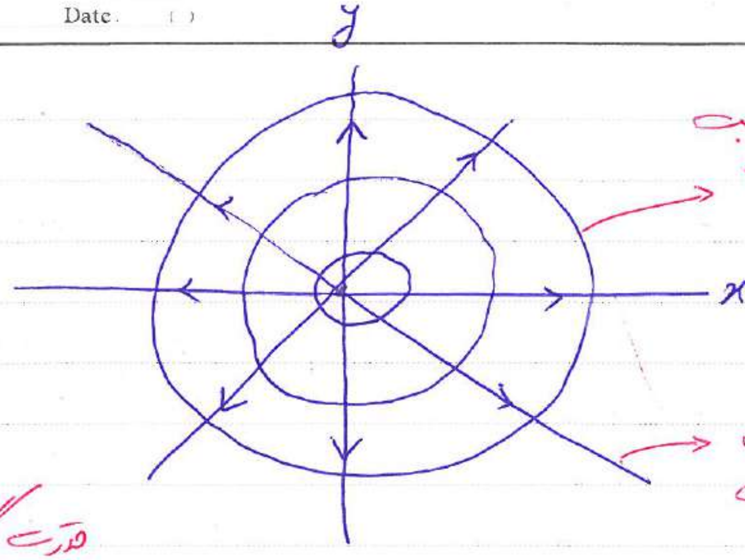
$$F=\frac{\sigma}{2\pi}(\ln r+i\theta)=\underbrace{\frac{\sigma}{2\pi}\ln r}_{\varphi}+i\underbrace{\frac{\sigma}{2\pi}\theta}_{\psi}$$

$$\begin{cases} \varphi=\dfrac{\sigma}{2\pi}\ln r \\ \psi=\dfrac{\sigma}{2\pi}\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_r=\dfrac{\sigma}{2\pi}\dfrac{1}{r} \\ u_\theta=0 \end{cases}$$

سرعت شعاعی

سرعت محیطی

Subject:
Year. Month. Date. ( )



ثابت φ

ψ ثابت

قدرت گردابه (گاما)

$$F=-\frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z \Rightarrow F=-\frac{i\Gamma}{2\pi}(\ln r+i\theta)$$

θ ثابت $\Rightarrow$ متغیر φ ?

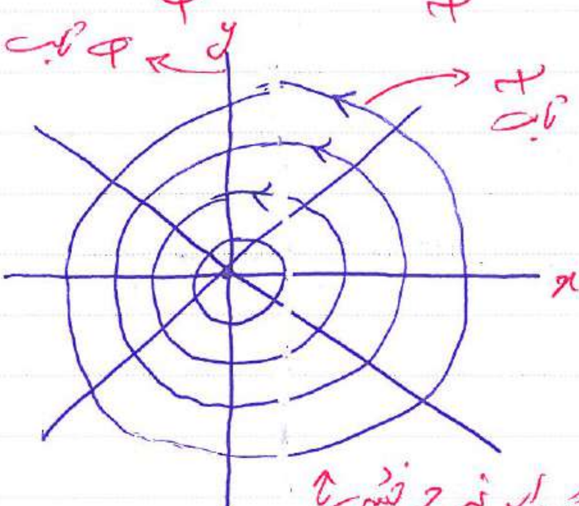
$$F=\underbrace{\frac{\Gamma}{2\pi}\theta}_{\varphi}-i\underbrace{\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r}_{\psi} \Rightarrow \begin{cases} \varphi=\dfrac{\Gamma}{2\pi}\theta \\ \psi=\dfrac{-\Gamma}{2\pi}\ln r \end{cases}$$

ثابت $\Rightarrow$

$\psi \rightarrow$ متغیر θ ?

[illegible]

ثابت φ



ثابت ψ

$$\begin{cases} u_r=0 \\ u_\theta=\dfrac{\Gamma}{2\pi} \end{cases}$$

گردابه غیر چرخشی

می‌دانیم $Z=re^{i\theta}=x+iy$

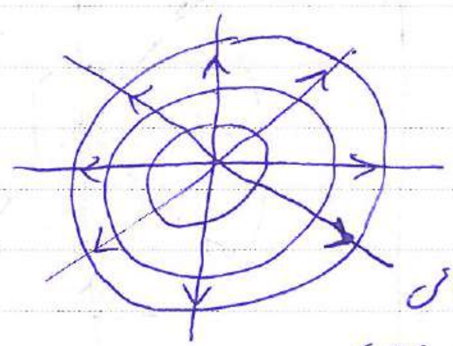
$$\begin{cases} \ln e=1 \\ \ln d^c=c\ln d \\ \ln(a\cdot b)=\ln a+\ln b \end{cases}$$

جریان گردشی

(چرخشی =)

$\ln z = \ln(re^{i\theta})$

$= \ln r + \ln e^{i\theta} = \ln r + i\theta \ln e = (\ln r + i\theta)$



چشمه ←

جریان در راستای شعاعی وجود دارد. (در چشمه)

$\int V\,dS$ = همه ذرات حول یک محور خاص حرکت کنند = گردش

$\vec{\nabla}\times\vec{V}$ همه ذرات به دور خود حرکت کنند = چرخش

$\varphi = f(r)$ زمانی φ ثابت است که برای r ثابت باشد

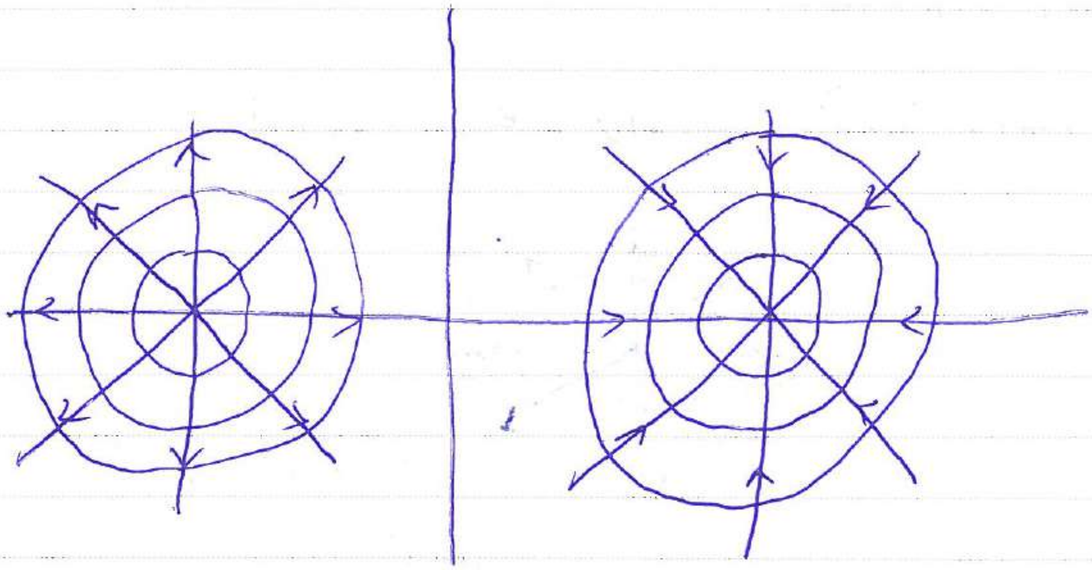
$\varphi = f(\theta)$ زمانی φ ثابت است که برای θ ثابت باشد

* مزدوج (دوقطبی یا دابلت): فاصله از مبدأ که ناچیز می‌باشد $\varepsilon \ll 1$.

$$F = \underbrace{\frac{\sigma}{2\pi}\ln(z+\varepsilon)}_{\text{یک چشمه در } z=-\varepsilon} - \underbrace{\frac{\sigma}{2\pi}\ln(z-\varepsilon)}_{\text{یک چاه در } z=+\varepsilon}$$

منفی است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )



$$F = \frac{\sigma}{۲\pi} L_n\left(\frac{z+\varepsilon}{z-\varepsilon}\right) = \frac{\sigma}{۲\pi} L_n\left(\frac{z-\varepsilon+۲\varepsilon}{z-\varepsilon}\right)$$

$$\underset{x \to ۰}{L_n}(1+x) \simeq x$$ تقریباً

$$L_n(۱+۰/۰۱) = L_n\, ۱/۰۱ \simeq ۰/۰۱$$

$$F = \frac{\sigma}{۲\pi} L_n\left(1+\frac{۲\varepsilon}{z}\right) = \frac{\sigma}{\cancel{۲}\pi} \frac{\cancel{۲}\varepsilon}{z} = \frac{\sigma\varepsilon}{\pi z}$$

$$z = re^{i\theta}$$

$$F = \frac{\sigma\varepsilon}{\pi} \frac{1}{re^{i\theta}} \longrightarrow F = \frac{\sigma\varepsilon}{\pi} \frac{1}{r} e^{-i\theta}$$

$$F = \underbrace{\frac{\sigma\varepsilon}{\pi r} \cos\theta}_{\varphi} - i \underbrace{\frac{\sigma\varepsilon}{\pi r} \sin\theta}_{\psi} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \overset{\mu}{\frac{\sigma\varepsilon}{\pi}} \frac{1}{r}\cos\theta = \xrightarrow{\text{ادامه}} \\ \psi = -\frac{\sigma\varepsilon}{\pi r} \sin\theta = \text{ادامه} \end{cases}$$

PAPCO

ادامه $\longrightarrow$ $\begin{cases} \varphi = \dfrac{\mu}{r}\cos\theta \\ \psi = -\dfrac{\mu}{r}\sin\theta \end{cases}$ $\xrightarrow[\text{دکارتی}]{\text{به صورت}}$ $\begin{cases} \varphi = \dfrac{\mu}{x^2+y^2}\,x \\ \psi = \dfrac{-\mu}{x^2+y^2}\,y \end{cases}$

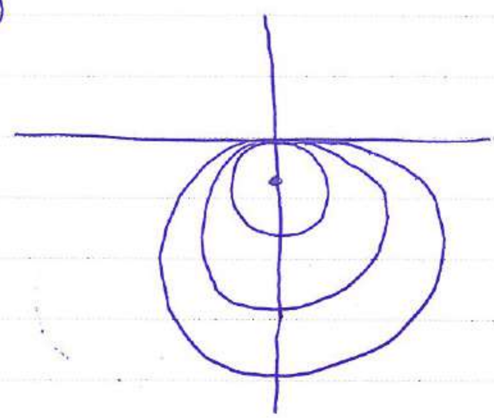
در مختصات قطبی داریم: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $: r = \sqrt{x^2+y^2}$

$$x^2+y^2+\frac{\mu y}{\psi}=0$$

$$\underbrace{x^2+y^2+\frac{\mu y}{\psi}+\left(\frac{\mu}{2\psi}\right)^2}-\left(\frac{\mu}{2\psi}\right)^2=0$$

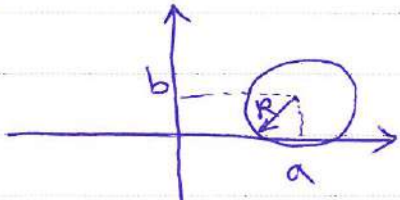
$$x^2+\left(y+\frac{\mu}{2\psi}\right)^2=\left(\frac{\mu}{2\psi}\right)^2$$

فاصله از مبدأ ↙ شعاع



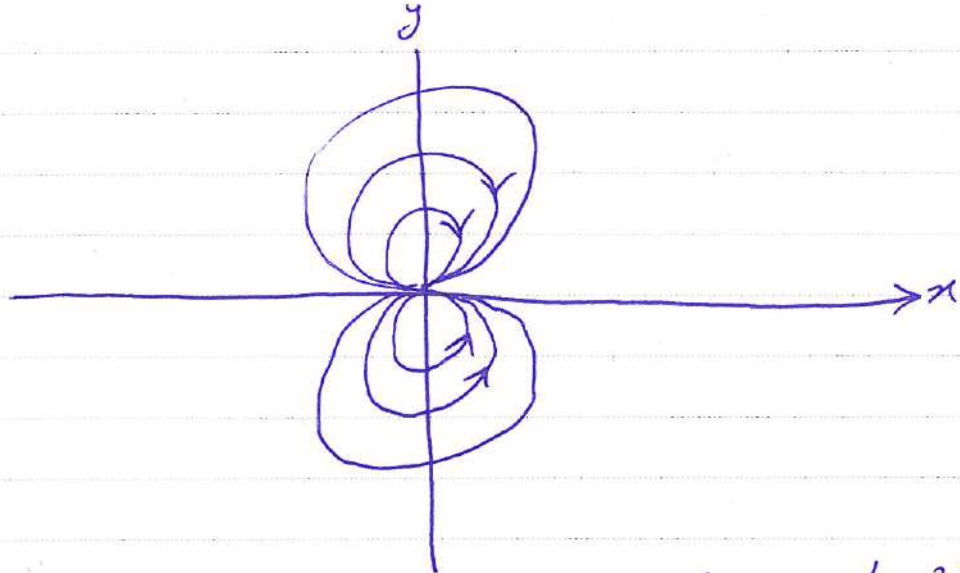
یادآوری:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$



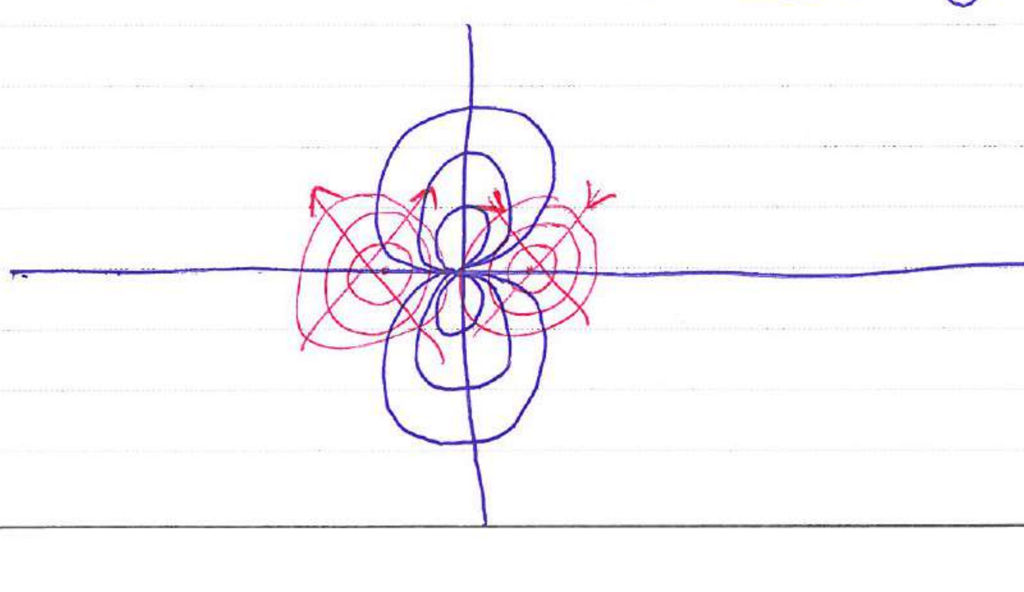
Subject:

Year. Month. Date. ( )



چشمه و چاه روی محور x بوده.

یعنی می‌توان نشان داد که جریان مزدوج را می‌توان با برهم‌نهی یک گرداب در جهت عقربه‌های ساعت با قدرت Γ- گاما در نقطهٔ $z=\varepsilon$ و یک گرداب در خلاف عقربه‌های ساعت با قدرت گاما در $z=-\varepsilon$ تعریف نمود.



اگر بخواهیم با استفاده از جریان های اساسی ذکر شده (چشمه، چاه، گردابه نیز چرخش و دابلت) جریان حول یک استوانه بدون گردش و جریان روی یک استوانه با گردش و جریان نیم جسم و ...... را بدست آوریم باید از گام های زیر کمک بگیریم:

۱- تابع پتانسیل F را برای هر یک از اجزای سازنده می نویسیم.

$F = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots$

مثال: $F = \frac{\sigma}{2\pi} \ln z + V_\infty z$

$I = \frac{-\sigma}{2\pi} \ln z + \frac{\sigma \varepsilon}{\pi z}$

۲- با مشتق گیری از توابع جریان و پتانسیل سرعت مولفه های سرعت را محاسبه می نماییم.

$F = \frac{\sigma}{2\pi} \ln z = \qquad \begin{cases} u_r = \cdots \\ u_\theta = \cdots \end{cases}$

۳- در این گام باید نقطه سکون را با صفر قرار دادن مولفه های سرعت بدست بیاوریم.

۴- مقدار تابع ψ در نقطه سکون را محاسبه نماییم. (ψ_0)

۵- معادله ψ را مساوی مقدار تابع جریان نقطه سکون (ψ_0) قرار دهیم تا با حل آن مختصات جسم (r) بدست بیاید. حال می‌توانیم با مقدار r بدست آمده ضریب فشار را برای میدان جریان حول روی جسم محاسبه نماییم.

$$P+\frac{1}{2}\rho V^2=P_\infty+\frac{1}{2}\rho V_\infty^2$$

$$\rightarrow P-P_\infty=\frac{1}{2}\rho\left(V_\infty^2-V^2\right)\Rightarrow$$

$$P-P_\infty=\frac{1}{2}\rho V_\infty^2\left(1-\left(\frac{V}{V_\infty}\right)^2\right)$$

ضریب فشار $\quad C_p=\dfrac{P-P_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2}=1-\left(\dfrac{V}{V_\infty}\right)^2$

سرعت جریان روی نقطه مورد نظر

$$V=\sqrt{u_r^2\big|_r+u_\theta^2\big|_r}$$

سرعت جریان آزاد

$$\psi=\psi_0\Rightarrow r=?$$

$\psi\big|_{r,\theta}$ در نقطه r و θ

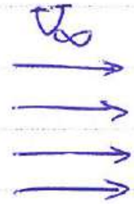
*مثال:

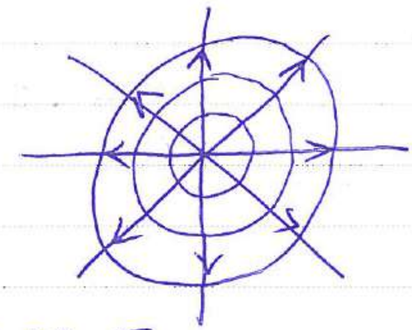
می‌خواهیم جریان حاصل از برهم نهی یک چشمه و یک جریان یکنواخت را

منبع آوردیم؟

یادآوری: می‌دانیم پتانسیل مختلط یک جریان یکنواخت برابر زیر می‌باشد:

$F = V_\infty Z$





$F = F_1 + F_2 \rightarrow F = \frac{\sigma}{2\pi} \ln Z + V_\infty Z =$

$= \frac{\sigma}{2\pi}(\ln r + i\theta) + V_\infty r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$\begin{cases} \varphi = \frac{\sigma}{2\pi}\ln r + V_\infty r\cos\theta \\ \psi = \frac{\sigma}{2\pi}\theta + V_\infty r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_r = \frac{\sigma}{2\pi}\frac{1}{r} + V_\infty\cos\theta \\ V_\theta = -V_\infty\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_r = \frac{\sigma}{2\pi r} + V_\infty\cos\theta = 0 \\ V_\theta = -V_\infty\sin\theta \rightarrow \theta = \cancel{0}, \pi, 2\pi, \ldots \end{cases}$$

$\frac{\sigma}{2\pi r} + V_\infty\cos 0 = 0 \rightarrow \frac{\sigma}{2\pi r} = -V_\infty \rightarrow \boxed{r = \frac{-\sigma}{2\times V_\infty}}$ *.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\frac{\sigma}{2\pi r} - V_\infty = 0 \rightarrow \boxed{r = \frac{\sigma}{2\pi V_\infty}} \rightarrow \left(\frac{\sigma}{2\pi V_\infty}, \pi\right)$$

نقطه سکون

$$\psi_0 = \psi \Big|_{r_0, \theta_0} = \frac{\sigma}{2\pi} \times \pi + V_\infty \frac{\sigma}{2\pi V_\infty} \cancel{\sin \pi}$$

$$\boxed{\psi_0 = \frac{\sigma}{2}}$$

رابطه بین خط جریان و دبی گسی برقرار می کند: تابع جریان

تابع جریان روی هر خط جریان ثابت است. $Q = \psi_2 - \psi_1$

ثابت است چون $\rightarrow \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \rightarrow v\,dx = u\,dy \rightarrow -\frac{\partial \psi}{\partial x} dx = \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$

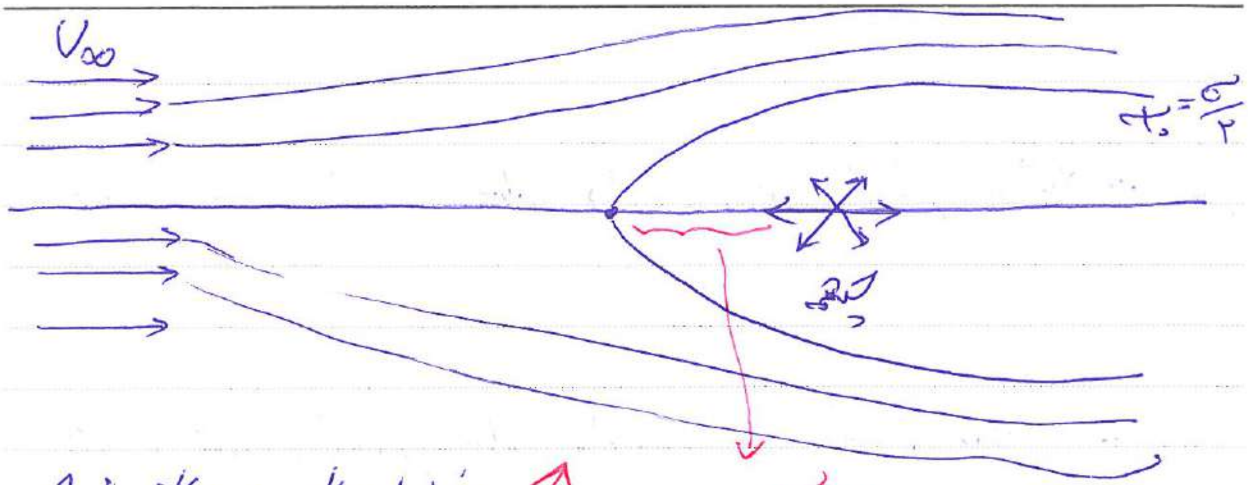
ادامه حل مثال:

$$\underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = 0}_{d\psi = 0}$$

$$\psi = cte$$

$$\frac{\sigma}{2\pi} \theta + V_\infty r \sin\theta = \frac{\sigma}{2}$$

$$r = \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma}{2\pi}\theta\right) / V_\infty \sin\theta \Longrightarrow \boxed{r = \frac{\sigma}{2V_\infty} \frac{\left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right)}{\sin\theta}}$$



خطوط جریان در جریان نیم جسم

$\frac{\sigma}{2\pi V_\infty}$

نقطه سکون

$$c_p = 1 - \left(\frac{V}{V_\infty}\right)^2$$

$$c_p = 1 - \frac{v_r^2|_r + v_\theta^2|_r}{V_\infty^2} = f(r,\theta) = f(\theta)$$

۲ نقطه سکون را داریم.

تمرین :

جریان عبوری از روی سیلندر دایروی بدون گردش . ص ۲۵۹ جزوه (کتاب).

تمرین :

جریان عبوری از روی سیلندر دایروی با گردش . ص ۳۰۰ کتاب .

φ $\quad \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases} \quad \psi\Big|_{r_0,\theta_0} = \psi_0 \quad \psi = \psi_0$

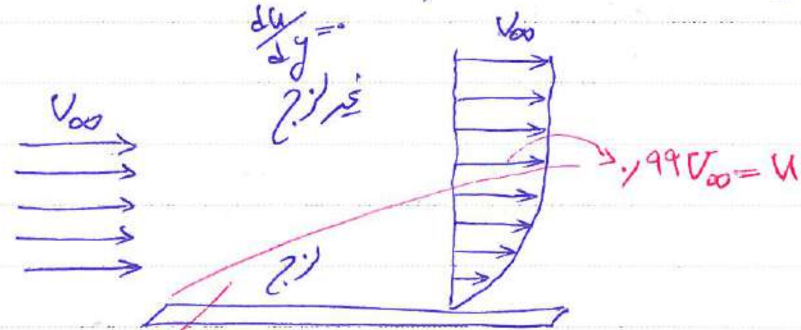
ψ

$$C_p = 1 - \frac{u_r^2 + u_\theta^2}{V_\infty^2}$$

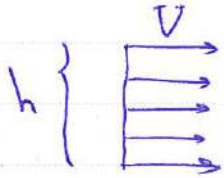
* دو تمرین باید برای تحویل من باشد . مطالعه شود برای امتحان .

* فصل هشتم :

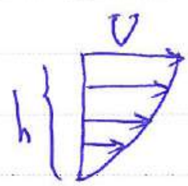
جریان های برشی تراکم ناپذیر :   « لایه مرزی »



$\frac{du}{dy} \neq 0$ اثرات لزجت هم می باشد.



$V_\infty \times h = Q_1$

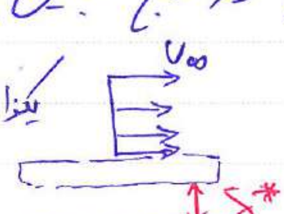


$Q_1 > Q_2$ $Q_2 = \int_0^h u\,dy$

پروفیل سرعت

ضخامت جابجایی فاصله ای است که باید مرز جامد را به طور مجازی به طرف خارج شیفت برد تا در یک جریان غیر لزج جریان جرم با جریان واقعی برابر باشد.

یکنواخت و یکسان V_∞



Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$Q=\int_0^{\delta} u\,dy = V_\infty \times (h-\delta^*)$$

$$\int_0^{\delta} u\,dy = V_\infty h - V_\infty \delta^*$$

$$\Rightarrow \int_0^{\delta} (u-V_\infty)\,dy = -V_\infty \delta^*$$

$$\int_0^{\delta} \left(\frac{u}{u_\infty}-1\right) dy = -\delta^* \longrightarrow \boxed{\delta^* = \int_0^{\delta}\left(1-\frac{u}{V_\infty}\right)dy}$$

$$\int_0^{\delta} (u-u_\infty)\,dy = \int_0^{\delta} u\,dy - \underbrace{\int V_\infty\,dy}_{V_\infty y\big|_0^{\cancel{\delta} h} = V_\infty h}$$

---

* مثال:

اگر پروفیل سرعت در داخل لایه مرزی به شکل زیر تعریف شود ارتباط بین δ و δ^* را بدست آورید؟

$$u = \Delta x\left(1-e^{-4y}\right)$$

می‌دانیم: همیشه δ^* از δ کوچکتر است.

$$\frac{\delta^*}{\delta} = ?$$

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{ax(1-e^{-4y})}{\cancel{U_\infty}}\right) dy$$

ax

$$u_\infty = u\Big|_{y=\infty} = ax(1-e^{-4\infty}) = ax - ax\left(\cancel{\frac{1}{e^{4\infty}}}\right) = \boxed{ax}$$

0

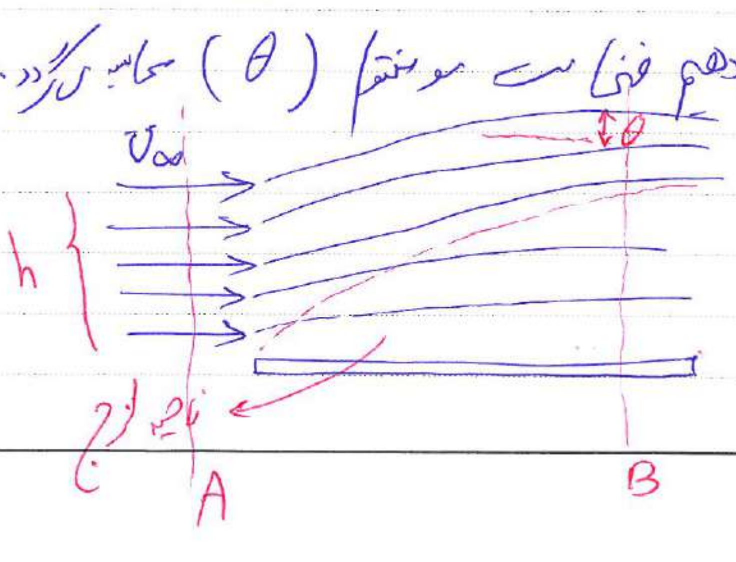
$$\delta^* = \int_0^{\delta} 1-(1-e^{-4y})\,dy = \int_0^{\delta} e^{-4y}\,dy =$$

$$\rightarrow \frac{1}{-4} e^{-4y}\Big]_0^{\delta} = \frac{1}{-4}\left(e^{-4(\delta)} - 1\right) = \frac{1}{4}$$

$\delta \to \infty$

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) dy$$

ضخامت مومنتوم: به علت وجود لایه مرزی مقداری از مومنتوم تلف می‌گردد. اگر تلفات مومنتوم ناشی از وجود لایه مرزی را برابر با اختلاف مومنتوم در دو مقطع a و b قرار دهیم ضخامت مومنتوم (θ) محاسبه می‌گردد.



$\dot{m}u = \rho u A u = \rho u^2 A$ مومنتم

اتلاف مومنتم به خاطر وجود لایه مرزی = مومنتم B − مومنتم A

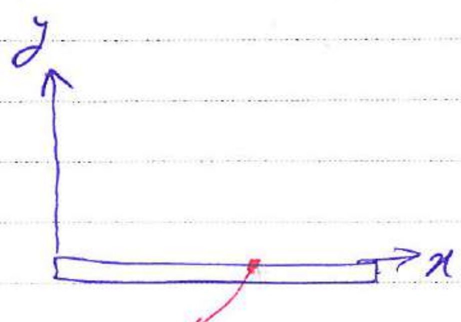
$$\rho V_\infty^2 h - \int_0^\delta \rho u^2 \, dy = \rho V_\infty^2 \theta$$

ضخامت مومنتم (تتا)

$$\boxed{\theta = \int_0^\delta \frac{u}{u_\infty}\left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) dy}$$

$$\frac{\delta^*}{\delta} \simeq \frac{1}{3} \qquad \frac{\theta}{\delta} \simeq \frac{1}{9}$$

شرایط مرزی حاکم بر صفحه تخت:



$$\begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases}$$

۱- $y=0$ $\qquad u=0$

۲- $y=0$ $\qquad \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ برای پروفیل درجه ۳ باید اعمال شود.

۳- $y=\delta$ $\qquad u=V_\infty$

۴- $y=\delta$ $\qquad \dfrac{\partial u}{\partial y}=0$

مثال:

فرض کنید پروفیل سرعت به صورت $u=a_0+a_1y+a_2y^2$

مطلوبست محاسبه مقادیر a_0 و a_1 ، $a_2=?$

شرط ۱ $\Rightarrow a_0=0$

$$\begin{cases} V_\infty = a_1\delta + a_2\delta^2 \\ 0 = a_1 + 2a_2(\delta) \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} a_1 = \\ a_2 = \end{matrix}$$

$$\boxed{\frac{u}{u_\infty} = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2}$$ پروفیل درجه ۲

$u=a_0+a_1y+a_2y^2+a_3y^3$ پروفیل درجه ۳

$$\frac{u}{u_\infty} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$$ درجه ۳

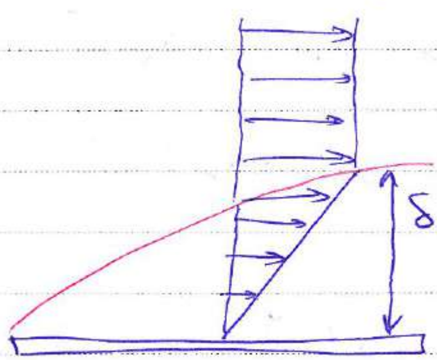
$$\frac{u}{u_\infty} = \frac{y}{\delta}$$ پروفیل سرعت درجه ۱

* معادله انتگرال - مومنتم لایه مرزی : (فون - کارمن)

$\delta = ۲$

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\delta} \frac{u}{u_\infty}\left(1 - \frac{u}{V_\infty}\right) dy = \frac{\tau_w}{\rho V_\infty^2}$$

تنش برشی روی دیواره $$\tau_w = \mu \left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0}$$



پروفیل درجه ۱

$$\frac{u}{u_\infty} = \frac{y}{\delta} \qquad \frac{du}{dy} = \frac{V_\infty}{\delta}$$

$$\tau_w = \mu \left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0} \qquad \boxed{\tau_w = \mu \frac{V_\infty}{\delta}}$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\delta}\left(1-\frac{y}{\delta}\right)dy=\frac{\mu\frac{V_\infty}{\delta}}{\rho V_\infty^2}$$

$$\frac{\delta}{6}$$

$$\left(\frac{y^2}{2\delta}-\frac{y^3}{3\delta^2}\right)\Big|_0^{\delta}=\frac{3\delta}{6}-\frac{\delta^2}{3\delta}=\frac{\delta}{6}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{\delta}{6}\right)=\frac{\mu}{\delta\rho V_\infty}$$

$$\rightarrow \delta\frac{d\delta}{dx}=\frac{6\mu}{\rho V_\infty}\rightarrow\int\delta\, d\delta=\int\frac{6\mu}{\rho V_\infty}dx$$

$$\frac{\delta^2}{2}=\frac{6\mu}{\rho V_\infty}x\longrightarrow \boxed{\delta=\sqrt{\frac{12\mu x}{\rho V_\infty}}=\frac{\sqrt{12}\,x}{\sqrt{Re_x}}}$$

تمرین:

با استفاده از معادله انتگرال مومنتم لایه مرزی ضخامت لایه مرزی را برای پروفیل سرعت درجه ۲ محاسبه نموده و مقدار آن را برای فاصله ای معادل ۲۰ cm سانتی متر محاسبه نمائید؟ سرعت جریان آزاد را ۰.۱ m/s و لزجت سیال را $\mu = 2\times10^{-6}\ kg/m.s$ درنظر بگیرید.

۱- اعمال شرایط مرزی ها و بدست آوردن ۸

۲- حل معادله انتگرال برای بدست آوردن δ . (δ برحسب Re)

۳- محاسبه Re = ✓ و جایگذاری در δ