

به نام خالق یکتا
دانشگاه صنعتی اصفهان - دانشکده علوم ریاضی

امتحان پایان ترم درس ریاضی مهندسی دی ماه ۹۵ مدت ۱۳۵ دقیقه

۱. (۲۵ نمره) تصویر ناحیه محصور به مثلث D با رئوس $A(2, 0)$, $B(0, 2)$ و $O(0, 0)$ را تحت نگاشت $T(z) = \frac{z-i}{z+i}$ با ذکر جزئیات بدست آورده و آن را رسم کنید.

۲. (۱۵ نمره) فرض کنید f در تمام صفحه تحلیلی باشد، $f(2\pi i) = 2$ و به ازای هر $z \in \mathbb{C}$ ، $|f(z)| \leq e^{2x}$ در این صورت

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{f'(z) dz}{(z-1)(z+\frac{1}{2})}$$

را با ذکر دلیل و جزئیات محاسبه کنید.

۳. الف) (۲۰ نمره) مقدار انتگرال زیر را با استدلال کامل بدست آورید:

$$\oint_{|z|=1} \frac{\text{Log}\left(\frac{1-z}{1+z}\right) dz}{z(z+\frac{1}{2})(z^2+z+1)}$$

که در آن شاخه اصلی لگاریتم است.

ب) (۱۵ نمره) سه جمله اول ناصفر بسط لوران $f(z) = \frac{1-e^z}{\sin^2 z}$ را حول $z=0$ بدست آورده و به کمک آن $\oint_{|z|=1} f(z) dz$ را محاسبه کنید.

۴. (۲۵ نمره) انتگرال نامتناهی زیر را با استدلال کامل و ذکر جزئیات محاسبه کنید:

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin ax dx}{(x^2+1)^2}, \quad a > 0$$

موفق باشید