



دانشگاه صنعتی سهند
دانشکده مهندسی مکانیک

جزوه درس

مکانیک محیط‌های پیوسته

دکتر مجتبی یزدانی

پاییز ۸۹

تانسورها

تمام قوانین در مکانیک محیط‌های پیوسته باید از کمیت‌هایی که مستقل از محورهای مختصات هستند بیان شوند.

نمادگذاری شاخصی (*Indicial Notation*)

تبدیلات خطی (*Linear Transformation*)

حساب تانسورها (*Tensor Calculus*)

سیستم‌های مختصات استوانه‌ای و کروی

بخش اول: نمادگذاری شاخصی (*Indicial Notation*)

۴-۱- جمع (*Summation*)

اگر چند جمله‌ای زیر مفروض باشد

$$s = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n. \quad (1-1)$$

معادله فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$s = \sum_{i=1}^n a_i x_i. \quad (2-1)$$

و یا

$$s = \sum_{j=1}^n a_j x_j, \quad s = \sum_{m=1}^n a_m x_m, \quad s = \sum_{k=1}^n a_k x_k. \quad (3-1)$$

اندیسهای i ، j و k در معادله (۳-۱)، اندیسهای آزاد (*dummy index*) هستند و نشان می‌دهند که جمع مستقل از اندیس مشخص است.

تبصره: اگر در جایی اندیسی حداکثر یک بار به شکل فوق تکرار گردد آن اندیس یک اندیس آزاد بوده و بیانگر جمع است که به تعداد اعداد حد اندیس جمله خواهد داشت. $1, 2, 3, \dots, n$

$$s = a_i x_i \quad \text{OR} \quad s = a_j x_j \quad \text{OR} \quad s = a_m x_m, \quad \text{etc.} \quad (4-1)$$

شایان ذکر است که جملاتی نظیر $a_i b_i x_i$ و $a_m b_m x_m$ بیانگر جمع نبوده زیرا که یک اندیس هرگز نباید بیش از یکبار در جمع تکرار گردد. بنابراین

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i x_i,$$

بیانگر جمع نمی‌باشد.

برای جمع‌های دوگانه می‌توان به صورت زیر عمل کرد

$$\alpha = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_i x_j \quad (5-1)$$

$$\alpha = a_{ij} x_i x_j.$$

که اگر بسط داده شود معادل است با

$$\alpha = a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1 x_1 + a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 + a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2 x_2 + a_{23} x_2 x_3 + a_{31} x_3 x_1 + a_{32} x_3 x_2 + a_{33} x_3 x_3.$$

و برای جمع‌های سه‌گانه به همین ترتیب می‌توان اقدام کرد.

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{ijk} x_i x_j x_k = a_{ijk} x_i x_j x_k \quad (6-1)$$

۵-۱- اندیسهای آزاد (*Free Indices*)

سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned}x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3.\end{aligned}\tag{۷-۱}$$

با توجه به روش نگارش جمع تانسوری معادله فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}x_1' &= a_{1m}x_m, \\x_2' &= a_{2m}x_m, \\x_3' &= a_{3m}x_m,\end{aligned}\tag{۸-۱}$$

که به صورت ساده شده عبارت است از:

$$x_i' = a_{im} x_m, \quad i = 1, 2, 3\tag{۹-۱}$$

اندیسی که فقط یکبار در معادله فوق به کار رفته است را اندیس آزاد گویند و همانطور که قبلاً اشاره شد تکرار یک اندیس بیانگر جمع است. مثال دیگر از اندیس آزاد، ضرب داخلی (*dot product*) است که تصاویر یک بردار بر روی محورهای مختصات را به صورت زیر ارائه می‌کند.

$$a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i.\tag{۱۰-۱}$$

واضح است که بردار \mathbf{a} می‌تواند با تصاویر آن بر روی محورهای مختصات توصیف گردد.

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i\tag{۱۱-۱}$$

و به عنوان مثالی دیگر

$$\mathbf{e}_i' = Q_{mi} \mathbf{e}_m.\tag{۱۲-۱}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1' &= Q_{11}\mathbf{e}_1 + Q_{21}\mathbf{e}_2 + Q_{31}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' &= Q_{12}\mathbf{e}_1 + Q_{22}\mathbf{e}_2 + Q_{32}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3' &= Q_{13}\mathbf{e}_1 + Q_{23}\mathbf{e}_2 + Q_{33}\mathbf{e}_3.\end{aligned}\tag{۱۳-۱}$$

اندیس‌های آزاد که در تمام جملات معادله ظاهر می‌شوند باید یکسان باشند بنابراین می‌توان نوشت:

$$a_i + k_i = c_i \quad \text{or} \quad a_i + b_i c_j d_j = f_i.$$

اگر دو اندیس آزاد در یک معادله ظاهر شوند نتیجه عبارت است از:

$$T_{ij} = A_{im}A_{jm}, \quad (14-1)$$

بنابراین معادله فوق خلاصه شده نه معادله زیر است

$$\begin{aligned} T_{11} &= A_{1m}A_{1m} = A_{11}A_{11} + A_{12}A_{12} + A_{13}A_{13}, \\ T_{12} &= A_{1m}A_{2m} = A_{11}A_{21} + A_{12}A_{22} + A_{13}A_{23}, \\ T_{13} &= A_{1m}A_{3m} = A_{11}A_{31} + A_{12}A_{32} + A_{13}A_{33}, \\ T_{21} &= A_{2m}A_{1m} = A_{21}A_{11} + A_{22}A_{12} + A_{23}A_{13}, \\ &\dots\dots\dots \\ T_{33} &= A_{3m}A_{3m} = A_{31}A_{31} + A_{32}A_{32} + A_{33}A_{33}. \end{aligned}$$

۱-۶- دلتای کرونیکر (Kronecker Delta)

دلتای کرونیکر به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j, \\ 0 & \text{if } i \neq j. \end{cases} \quad (15-1)$$

بنابراین

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1, \quad \delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{31} = \delta_{32} = 0. \quad (16-1)$$

به عبارت دیگر ماتریس دلتای کرونیکر معادل است با

$$[\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17-1)$$

عبارات زیر از ماتریس دلتای کرونیکر به دست می‌آیند

$$(a) \quad \delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1, \quad (18-1)$$

that is,

$$\delta_{ii} = 3.$$

$$(b) \quad \delta_{1m}a_m = \delta_{11}a_1 + \delta_{12}a_2 + \delta_{13}a_3 = \delta_{11}a_1 = a_1, \quad (19-1)$$

$$\delta_{2m}a_m = \delta_{21}a_1 + \delta_{22}a_2 + \delta_{23}a_3 = \delta_{22}a_2 = a_2,$$

$$\delta_{3m}a_m = \delta_{31}a_1 + \delta_{32}a_2 + \delta_{33}a_3 = \delta_{33}a_3 = a_3,$$

that is,

$$\delta_{im}a_m = a_i.$$

$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad \delta_{1m}T_{mj} &= \delta_{11}T_{1j} + \delta_{12}T_{2j} + \delta_{13}T_{3j} = T_{1j}, \\
 \delta_{2m}T_{mj} &= \delta_{21}T_{1j} + \delta_{22}T_{2j} + \delta_{23}T_{3j} = T_{2j}, \\
 \delta_{3m}T_{mj} &= \delta_{31}T_{1j} + \delta_{32}T_{2j} + \delta_{33}T_{3j} = T_{3j},
 \end{aligned}
 \tag{۲۰-۱}$$

that is,

$$\delta_{im}T_{mj} = T_{ij}.$$

و به ویژه

$$\delta_{im}\delta_{mj} = \delta_{ij}, \quad \delta_{im}\delta_{mn}\delta_{nj} = \delta_{ij}, \quad \text{etc.} \tag{۲۱-۱}$$

اگر $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ و \mathbf{e}_3 بردار یک‌های متعامد باشند آنگاه

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}. \tag{۲۲-۱}$$

۷-۱- نماد جایگشت (*Permutation Symbol*)

نماد جایگشت به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ 0 \end{cases} \equiv \text{according to whether } i, j, k \begin{cases} \text{form an even} \\ \text{form an odd} \\ \text{do not form} \end{cases} \text{ permutation of } 1, 2, 3, \tag{۲۳-۱}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{123} &= \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = +1, \\
 \varepsilon_{213} &= \varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = -1, \\
 \varepsilon_{111} &= \varepsilon_{112} = \varepsilon_{222} = \dots = 0.
 \end{aligned}
 \tag{۲۴-۱}$$

باید توجه داشت

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{ikj}. \tag{۲۵-۱}$$

اگر $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ بردارهای یک‌ه راستگرد باشند آنگاه

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1, \quad \text{etc.}, \tag{۲۶-۱}$$

که به صورت کوتاه شده به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_k = \varepsilon_{jki}\mathbf{e}_k = \varepsilon_{kij}\mathbf{e}_k. \tag{۲۷-۱}$$

اگر $\mathbf{a} = a_i\mathbf{e}_i$ و $\mathbf{b} = b_i\mathbf{e}_i$ با در نظر گرفتن مطالب ارائه شده

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_i \mathbf{e}_i) \times (b_j \mathbf{e}_j) = a_i b_j (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) = a_i b_j \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k. \quad (28-1)$$

و در نهایت می‌توان نتیجه گرفت که (اثبات گردد)

$$\varepsilon_{ijm} \varepsilon_{klm} = \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk} \quad (29-1)$$

۸-۱- مهارت‌های نمادگذاری اندیسی

(a) جایگذاری

$$a_i = U_{im} b_m, \quad (i)$$

$$b_i = V_{im} c_m, \quad (ii)$$

برای جاگذاری b_i در معادله (ii) به جای b_m در معادله (i) باید ابتدا اندیس در معادله (ii) از i به m تغییر کند و اندیس آزاد m به هر نماد دیگری باید تغییر داده شود.

$$b_m = V_{mn} c_n. \quad (iii)$$

$$a_i = U_{im} V_{mn} c_n. \quad (iv)$$

معادله (iv) بیانگر سه معادله است که هر کدام دارای نُه جمله است.

(b) ضرب

اگر

$$p = a_m b_m \quad \text{and} \quad q = c_m d_m,$$

$$pq = a_m b_m c_n d_n.$$

باید توجه شود که $pq \neq a_m b_m c_m d_m$ البته باید در نظر داشت که سمت راست این معادله اصلاً در حالت

جمع وجود ندارد و بنابراین

$$pq \neq \sum_{m=1}^3 a_m b_m c_m d_m.$$

با توجه به ضرب داخلی اگر $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$ و $\mathbf{b} = b_i \mathbf{e}_i$ بنابراین

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_i \mathbf{e}_i) \cdot (b_j \mathbf{e}_j) = a_i b_j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j).$$

در حالت ویژه اگر $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ و \mathbf{e}_3 بردار یکه‌های متعامد باشند آنگاه

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

(c) فاکتورگیری

اگر

$$T_{ij} n_j - \lambda n_i = 0,$$

با استفاده از دلتای کرونیکر می‌توان نوشت

$$n_i = \delta_{ij} n_j,$$

$$T_{ij} n_j - \lambda \delta_{ij} n_j = 0.$$

و در نهایت

$$(T_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_j = 0.$$

(d) تجمیع (Contraction)

تجمیع اندیسها جمع بر روی یک اندیس است. به عنوان مثال \mathbf{T}_{ii} تجمیع \mathbf{T}_{ij} است.

$$T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}.$$

اگر

$$T_{ij} = \lambda \Delta \delta_{ij} + 2\mu E_{ij},$$

آنگاه

$$T_{ii} = \lambda \Delta \delta_{ii} + 2\mu E_{ii} = 3\lambda \Delta + 2\mu E_{ii}.$$

مسائل بخش اول حل گردند

بخش دوم: تانسورها (*Tensors*)

۹-۱- تبدیلات خطی

اگر T تبدیلی باشد که برداری را به برداری دیگر تبدیل کند اگر T ، a را به c و b را به d تبدیل کند می توان نوشت که $Ta=c$ و $Tb=d$.

اگر T دارای خصوصیات خطی زیر باشد

$$T(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = T\mathbf{a} + T\mathbf{b}, \quad (30-1)$$

$$T(\alpha\mathbf{a}) = \alpha T\mathbf{a},$$

که در آن \mathbf{a} و \mathbf{b} بردارهای اختیاری و α یک کمیت اسکالر هستند، پس می توان گفت تبدیل T یک تبدیل خطی است که به آن تانسور مرتبه دو و یا به اختصار تانسور گویند. رابطه دیگری که بیانگر تبدیل خطی است به صورت زیر بیان می گردد.

$$T(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha T\mathbf{a} + \beta T\mathbf{b}, \quad (31-1)$$

که در آن \mathbf{a} و \mathbf{b} بردارهای اختیاری و α و β کمیت های اسکالر هستند.

مثالها ۶-۱

۱۰-۱- اجزای تانسورها

اگر $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ و \mathbf{e}_3 به ترتیب بردار یکه ها در راستاهای x_1, x_2 و x_3 در مختصات متعامد کارتزین باشند. تحت تبدیل T بردارهای $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ و \mathbf{e}_3 به بردارهای $T\mathbf{e}_1, T\mathbf{e}_2$ و $T\mathbf{e}_3$ تبدیل می گردند.

$$T\mathbf{e}_1 = T_{11}\mathbf{e}_1 + T_{21}\mathbf{e}_2 + T_{31}\mathbf{e}_3, \quad (32-1)$$

$$T\mathbf{e}_2 = T_{12}\mathbf{e}_1 + T_{22}\mathbf{e}_2 + T_{32}\mathbf{e}_3,$$

$$T\mathbf{e}_3 = T_{13}\mathbf{e}_1 + T_{23}\mathbf{e}_2 + T_{33}\mathbf{e}_3,$$

و یا

$$T\mathbf{e}_i = T_{ji}\mathbf{e}_j. \quad (33-1)$$

و به صورت ماتریسی

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}. \quad (34-1)$$

مثال: ماتریس تبدیل \mathbf{T} به نحوی بیابید که بردارهای یکه را به صورت زیر تبدیل کند.

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\mathbf{e}_1 &= 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{T}\mathbf{e}_2 &= 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{T}\mathbf{e}_3 &= -\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (35-1)$$

جواب

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}. \quad (36-1)$$

ادامه مثال‌ها

از آنجاییکه $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = 0$ به راحتی معلوم است که

$$\begin{aligned} T_{11} &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_1, & T_{12} &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_2, & T_{13} &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_3, \\ T_{21} &= \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_1, & T_{22} &= \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_2, & T_{23} &= \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_3, \\ T_{31} &= \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_1, & T_{32} &= \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_2, & T_{33} &= \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (37-1)$$

و یا

$$T_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_j. \quad (38-1)$$

۱۱-۱ اجزاء بردارهای تبدیل شده

بردار \mathbf{a} و تانسور \mathbf{T} که \mathbf{a} را به \mathbf{b} تبدیل می‌کند مفروض است. $(\mathbf{b}=\mathbf{T}\mathbf{a})$ هدف از این بخش مقایسه اجزای \mathbf{T} ، \mathbf{a} و \mathbf{b} است. بردار \mathbf{a} عبارت است از:

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3, \quad (39-1)$$

از طرف دیگر بردار \mathbf{b} عبارت است از:

$$\mathbf{b} = \mathbf{T}\mathbf{a} = \mathbf{T}(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3) = a_1\mathbf{T}\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{T}\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{T}\mathbf{e}_3, \quad (40-1)$$

پس:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T}(a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3) = a_1(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_1) + a_2(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_2) + a_3(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_3), \\
 b_2 &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{T}(a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3) = a_1(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_1) + a_2(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_2) + a_3(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_3), \\
 b_3 &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T}(a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3) = a_1(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_1) + a_2(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_2) + a_3(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_3).
 \end{aligned} \tag{۴۱-۱}$$

با توجه به ضرب‌های داخلی

$$\begin{aligned}
 b_1 &= T_{11}a_1 + T_{12}a_2 + T_{13}a_3, \\
 b_2 &= T_{21}a_1 + T_{22}a_2 + T_{23}a_3, \\
 b_3 &= T_{31}a_1 + T_{32}a_2 + T_{33}a_3.
 \end{aligned} \tag{۴۲-۱}$$

و به صورت ماتریسی

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \tag{۴۳-۱}$$

و

$$[\mathbf{b}] = [\mathbf{T}][\mathbf{a}]. \tag{۴۴-۱}$$

اگر مطلب فوق به صورت نمادگذاری شاخصی نوشته شود.

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i. \tag{۴۵-۱}$$

$$\mathbf{T}\mathbf{a} = \mathbf{T}(a_i \mathbf{e}_i) = a_i \mathbf{T}\mathbf{e}_i.$$

$$\mathbf{T}\mathbf{e}_i = T_{ji} \mathbf{e}_j$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{T}\mathbf{a} = a_i T_{ji} \mathbf{e}_j$$

بنابراین

$$b_m = \mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_m = a_i T_{ji} \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_m = a_i T_{ji} \delta_{jm} = a_i T_{mi}. \tag{۴۶-۱}$$

و

$$b_m = a_i T_{mi} = T_{mi} a_i. \tag{۴۷-۱}$$

۱۲-۱ جمع تانسورها

برای جمع تانسورها المانهای متناظر با هم جمع می‌گردند

$$W_{ij} = T_{ij} + S_{ij}. \tag{۴۸-۱}$$

۱-۱۳- ضرب دو تانسور

اگر \mathbf{T} و \mathbf{S} دو تانسور و \mathbf{a} یک بردار اختیاری باشند

$$(\mathbf{TS})\mathbf{a} = \mathbf{T}(\mathbf{S}\mathbf{a}), \quad (49-1)$$

و

$$(\mathbf{ST})\mathbf{a} = \mathbf{S}(\mathbf{T}\mathbf{a}). \quad (50-1)$$

اجزای TS عبارتند از

$$(\mathbf{TS})_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{TS})\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}(\mathbf{S}\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}S_{mj}\mathbf{e}_m = S_{mj}\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_m = S_{mj}T_{im}, \quad (51-1)$$

و در نتیجه

$$(\mathbf{TS})_{ij} = T_{im}S_{mj}. \quad (52-1)$$

و به صورت مشابه

$$(\mathbf{ST})_{ij} = S_{im}T_{mj}. \quad (53-1)$$

معادلات (۵۲-۱) و (۵۳-۱) به ترتیب به صورت ماتریسی با معادلات زیر برابرند

$$[\mathbf{TS}] = [\mathbf{T}][\mathbf{S}], \quad (54-1)$$

$$[\mathbf{ST}] = [\mathbf{S}][\mathbf{T}]. \quad (55-1)$$

و همانند حساب ماتریسی در حالت عمومی $\mathbf{TS} \neq \mathbf{ST}$

برای تانسورهای \mathbf{T} ، \mathbf{S} و \mathbf{V}

$$(\mathbf{T}(\mathbf{SV}))\mathbf{a} \equiv \mathbf{T}((\mathbf{SV})\mathbf{a}) \equiv \mathbf{T}(\mathbf{S}(\mathbf{V}\mathbf{a})) \quad \text{and} \quad (\mathbf{TS})(\mathbf{V}\mathbf{a}) \equiv \mathbf{T}(\mathbf{S}(\mathbf{V}\mathbf{a})), \quad (56-1)$$

بنابراین

$$\mathbf{T}(\mathbf{SV}) = (\mathbf{TS})\mathbf{V} = \mathbf{T}\mathbf{S}\mathbf{V}. \quad (57-1)$$

بنابراین عملگر ضرب شرکت پذیر می باشد. برای ضرب تانسور در خود نیز می توان نوشت

$$\mathbf{T}^2 = \mathbf{T}\mathbf{T}, \quad \mathbf{T}^3 = \mathbf{T}\mathbf{T}\mathbf{T}, \dots \quad (58-1)$$

مثالها حل گردند

۱۴-۱ - ترانپوذه یک تانسور (*TRANSPOSE OF A TENSOR*)

ترانپوذه تانسور \mathbf{T} با \mathbf{T}^T نشان داده می‌شود که برای هر دو بردار اختیاری \mathbf{a} و \mathbf{b} دارای رابطه زیر است.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{T}\mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{T}^T\mathbf{a}. \quad (۵۹-۱)$$

با توجه به مطالبی که در قبل اشاره گردید.

$$\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}^T\mathbf{e}_j. \quad (۶۰-۱)$$

بنابراین

$$T_{ji} = T_{ij}^T, \quad (۶۱-۱)$$

از طرف دیگر

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{T}^T\mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{T}^T)^T\mathbf{a}. \quad (۶۲-۱)$$

با توجه به معادله (۵۹-۱) می‌توان نتیجه گرفت

$$(\mathbf{T}^T)^T = \mathbf{T}. \quad (۶۳-۱)$$

می‌توان اثبات کرد که (اثبات شود)

$$(\mathbf{TS})^T = \mathbf{S}^T\mathbf{T}^T. \quad (۶۴-۱)$$

و در صورتی که تعداد تانسورهای که در هم ضرب شده باشند بیشتر باشد

$$(\mathbf{ABC} \dots \mathbf{D})^T = \mathbf{D}^T \dots \mathbf{C}^T\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T. \quad (۶۵-۱)$$

۱۵-۱ - ضرب دوتایی دو بردار (*Dyadic Product of vectors*)

ضرب دوتایی بردارهای \mathbf{a} و \mathbf{b} که با \mathbf{ab} نشان داده می‌شود به تبدیلی گفته می‌شود که بردار \mathbf{c} را به صورت زیر تبدیل می‌کند.

$$(\mathbf{ab})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}). \quad (۶۶-۱)$$

حال برای تمام بردارهای \mathbf{c} و \mathbf{d} و تمام اسکالرهای α و β می‌توان نوشت

$$(\mathbf{ab})(\alpha\mathbf{c} + \beta\mathbf{d}) = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot (\alpha\mathbf{c} + \beta\mathbf{d})) = \mathbf{a}((\alpha\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) + (\beta\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})) = \alpha\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) + \beta\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) \quad (67-1)$$

$$= \alpha(\mathbf{ab})\mathbf{c} + \beta(\mathbf{ab})\mathbf{d}.$$

پس تبدیل \mathbf{ab} یک تبدیل خطی است. اگر $\mathbf{W}=\mathbf{ab}$ باشد المانهای این تبدیل خطی عبارتند از:

$$W_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{W}\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{ab})\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_j) = a_i b_j, \quad (68-1)$$

در نتیجه

$$W_{ij} = a_i b_j, \quad (69-1)$$

و یا در صورت ماتریسی

$$[\mathbf{W}] = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} [b_1 \quad b_2 \quad b_3]. \quad (70-1)$$

و در حالت خاص برای ضرب برداری دوتایی \mathbf{e}_i

$$[\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots \quad (71-1)$$

بنابراین هر تانسور \mathbf{T} را می توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{T} = T_{11}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + T_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + T_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + T_{21}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + \dots = T_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j. \quad (72-1)$$

۱۶-۱ اثر یا نشان ماتریس (*Trace of a tensor*)

اثر یا نشان یک ماتریس یک کمیت اسکالر است. برای تانسورهای \mathbf{T} و \mathbf{S} و بردارهای \mathbf{a} و \mathbf{b}

$$\text{tr}(\mathbf{T} + \mathbf{S}) = \text{tr} \mathbf{T} + \text{tr} \mathbf{S}, \quad (73-1)$$

$$\text{tr}(\alpha \mathbf{T}) = \alpha \text{tr} \mathbf{T},$$

$$\text{tr}(\mathbf{ab}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

به صورت شکل تانسوری برای اثر یا نشان ماتریس می توان نوشت

$$\text{tr} \mathbf{T} = T_{ii} \quad (74-1)$$

و به عبارت دیگر

$$\text{tr } \mathbf{T} = T_{11} + T_{22} + T_{33} = \text{sum of diagonal elements.} \quad (75-1)$$

با توجه به روابط بخش ترانهاده به سادگی معلوم می‌گردد که

$$\text{tr } \mathbf{T}^T = \text{tr } \mathbf{T}. \quad (76-1)$$

۱۷-۱- تانسور همانی و معکوس تانسور (*Identity tensor and Tensor inverse*)

تبدیل خطی که هر بردار را به همان بردار تبدیل کند تانسور همانی گفته می‌شود.

$$\mathbf{I}\mathbf{a} = \mathbf{a}. \quad (77-1)$$

و برای حالت خاص

$$\mathbf{I}\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{I}\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{I}\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3. \quad (78-1)$$

برای سیستم مختصات کارتزین المانهای تانسور همانی عبارتند از:

$$I_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{I}\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}; \quad (79-1)$$

وبه صورت ماتریسی

$$[\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (80-1)$$

اگر تانسور \mathbf{T} موجود باشد و بتوان تانسور دیگری نظیر \mathbf{S} یافت که

$$\mathbf{S}\mathbf{T} = \mathbf{I}, \quad (81-1)$$

در این صورت گفته می‌شود که تانسور \mathbf{S} معکوس تانسور \mathbf{T} است. معکوس یک تانسور فقط و فقط

زمانی موجود است که $\det(\mathbf{T}) \neq 0$ باشد (\mathbf{T} غیر تکین باشد).

برای تانسور \mathbf{T}

$$(\mathbf{T}^T)^{-1} = (\mathbf{T}^{-1})^T, \quad (82-1)$$

$$(\mathbf{T}\mathbf{S})^{-1} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{T}^{-1}. \quad (83-1)$$

و برای حالت کلی و برای دو بردار دلخواه

$$\mathbf{T}\mathbf{a} = \mathbf{b} \quad \text{and} \quad \mathbf{a} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b}. \quad (84-1)$$

معادله (84-1) نشان می‌دهد که وقتی تانسوری وارون‌پذیر باشد آنگه یک نگاشت یک به یک بین بردارهای \mathbf{a} و \mathbf{b} وجود خواهد داشت. در غیر این صورت و عدم وارون‌پذیری تانسور \mathbf{T} برای بردار داده شده \mathbf{b} در حالت کلی بیش از یک بردار \mathbf{a} وجود دارد که بر روی \mathbf{b} نگاشته می‌گردد.

۱۸-۱ - تانسورهای متعامد (Orthogonal tensors)

یک تانسور متعامد تبدیل خطی است که تحت اثر آن جهت و طول بردارها حفظ می‌گردند. اگر \mathbf{Q} بیانگر یک تانسور متعامد باشد با توجه به تعریف $|\mathbf{Q}\mathbf{a}|=|\mathbf{a}|$ ، $|\mathbf{Q}\mathbf{b}|=|\mathbf{b}|$ و $\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})=\cos(\mathbf{Q}\mathbf{a},\mathbf{Q}\mathbf{b})$ بنابراین

$$\mathbf{Q}\mathbf{a} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (85-1)$$

با توجه به تعریف ترانزاده

$$(\mathbf{Q}\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{Q}\mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{Q}^T(\mathbf{Q}\mathbf{a})$$

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{Q}^T\mathbf{Q})\mathbf{a} \quad \text{or} \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{I}\mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{a}.$$

پس برای هر بردار دلخواه \mathbf{a} و \mathbf{b}

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}. \quad (86-1)$$

که این امر نشان می‌دهد که برای یک تانسور متعامد، ترانزاده و معکوس مشابه هم هستند.

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T. \quad (87-1)$$

در روش نگارش ماتریسی

$$[\mathbf{Q}]^T[\mathbf{Q}] = [\mathbf{Q}][\mathbf{Q}]^T = [\mathbf{I}], \quad (88-1)$$

و به صورت نگارش اندیسی

$$Q_{mi}Q_{mj} = Q_{im}Q_{jm} = \delta_{ij} \quad (89-1)$$

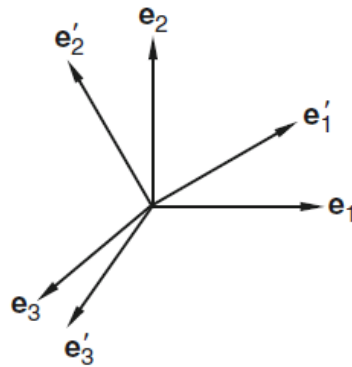
واضح است که دترمینان یک تانسور متعامد همواره +۱ و یا -۱ است.

$$|[\mathbf{Q}][\mathbf{Q}]^T| = |\mathbf{Q}||\mathbf{Q}^T| = |\mathbf{I}|.$$

حال $|Q|=|Q^T|$ و $|I|=1$ ، پس $|Q|^2=1$ در نتیجه

$$|Q| = \pm 1 \quad (90-1)$$

۱۹-۱- ماتریس تبدیل بین دو سیستم مختصات متعامد کارتیزین



شکل (۲-۱)

بردارهای یکه $\{e_1, e_2, e_3\}$ و $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ برای دو سیستم مختصات کارتیزین نشان داده شده در شکل (۲-۱) مفروض می‌باشند. معلوم است که بردارهای $\{e_1, e_2, e_3\}$ با یک چرخش جسم صلب (در صورتی که دو مرکز بر هم منطبق باشند) می‌توان بر $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ منطبق گردد. اگر مراکز بر هم منطبق نباشند با یک چرخش بعد از تصویر کردن این اتفاق می‌افتد. در هر صورت، $\{e_i\}$ و $\{e'_i\}$ با یک تانسور متعامد Q با هم مرتبط هستند.

$$e'_i = Qe_i = Q_{mi}e_m, \quad (91-1)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} e'_1 &= Q_{11}e_1 + Q_{21}e_2 + Q_{31}e_3, \\ e'_2 &= Q_{12}e_1 + Q_{22}e_2 + Q_{32}e_3, \\ e'_3 &= Q_{13}e_1 + Q_{23}e_2 + Q_{33}e_3, \end{aligned} \quad (92-1)$$

از طرف دیگر

$$Q_{im}Q_{jm} = Q_{mi}Q_{mj} = \delta_{ij}, \quad (93-1)$$

و یا

$$QQ^T = Q^TQ = I. \quad (94-1)$$

با توجه به مطالب گذشته

$$Q_{11} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{Qe}_1 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_1 = \text{cosine of the angle between } \mathbf{e}_1 \text{ and } \mathbf{e}'_1,$$

$$Q_{12} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{Qe}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_2 = \text{cosine of the angle between } \mathbf{e}_1 \text{ and } \mathbf{e}'_2, \text{ etc.}$$

که به معنی آنست که Q_{ij} برابر با کسینوس زاویه بین دو بردار \mathbf{e}_i و \mathbf{e}'_j است.

$$Q_{ij} = \cos(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}'_j). \quad (95-1)$$

به عبارت دیگر ماتریس تبدیل برابر است با

$$[\mathbf{Q}] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \quad (96-1)$$

۲۰-۱- قانون تبدیل برای المانهای یک بردار در سیستم کارتیزین

بردار اختیاری \mathbf{a} مفروض است. المانهای کارتیزین این بردار در راستاهای $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ برابر است با

$$a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i, \quad (97-1)$$

و المانهای آن متناسب با $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ برابر است با

$$a'_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}'_i. \quad (98-1)$$

حال با توجه به معادله (۹۱-۱) می توان نوشت:

$$a'_i = \mathbf{a} \cdot Q_{mi} \mathbf{e}_m = Q_{mi} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_m), \quad (99-1)$$

و بنابراین

$$a'_i = Q_{mi} a_m. \quad (100-1)$$

و در حالت ماتریسی

$$\begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad (101-1)$$

و

$$[\mathbf{a}]' = [\mathbf{Q}]^T [\mathbf{a}]. \quad (102-1)$$

معادلات (۱۰۰-۱)، (۱۰۱-۱) و (۱۰۲-۱) بیانگر تبدیل المانهای بردار دلخواه در یک سیستم مختصات به بردار دیگر در سیستم مختصات کارتزین هم مرکز دیگر. عکس این نتایج نیز صادق است

$$[\mathbf{a}] = [\mathbf{Q}][\mathbf{a}'] \quad (103-1)$$

و

$$a_i = Q_{im} a'_m \quad (104-1)$$

۲۱-۱- قانون تبدیلات برای المانهای یک تانسور در سیستم کارتزین

تانسور \mathbf{T} مفروض است. المانهای \mathbf{T} در سیستم با بردارهای یکه $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ عبارتند از:

$$T_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T} \mathbf{e}_j \quad (105-1)$$

مشابه روش فوق برای سیستم با بردارهای یکه $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ می‌توان نوشت:

$$T'_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{T} \mathbf{e}'_j \quad (106-1)$$

که با توجه به تبدیل بردارهای یکه به صورت زیر

$$\mathbf{e}'_i = Q_{mi} \mathbf{e}_m$$

و با جاگذاری در معادله (۱۰۶-۱)

$$T'_{ij} = Q_{mi} \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{T} Q_{nj} \mathbf{e}_n = Q_{mi} Q_{nj} \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{T} \mathbf{e}_n \quad (107-1)$$

و به صورت خلاصه

$$T'_{ij} = Q_{mi} Q_{nj} T_{mn} \quad (108-1)$$

در صورت ماتریسی

$$\begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} & T'_{13} \\ T'_{21} & T'_{22} & T'_{23} \\ T'_{31} & T'_{32} & T'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{21} & Q_{31} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{32} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \quad (109-1)$$

یا

$$[\mathbf{T}]' = [\mathbf{Q}]^T [\mathbf{T}] [\mathbf{Q}] \quad (110-1)$$

می‌توان المانهای تانسور ثانویه را بر مبنای المانهای تانسور اولیه محاسبه نمود و برعکس

$$[\mathbf{Q}] [\mathbf{Q}]^T = [\mathbf{Q}]^T [\mathbf{Q}] = [\mathbf{I}] \quad (111-1)$$

$$[\mathbf{T}] = [\mathbf{Q}] [\mathbf{T}]' [\mathbf{Q}]^T \quad (112-1)$$

و در شکل تانسوری

$$T_{ij} = Q_{im} Q_{jn} T'_{mn} \quad (113-1)$$

۱-۲۲- معین کردن یک تانسور با استفاده از قوانین تبدیل

با در نظر گرفتن سیستم مختصات کارتیزین متعامد و بردارهای یکه در راستاهای مثبت محورهای مختصات، می‌توان عناصر کارتیزین تانسورها از مرتبه‌های مختلف را با استفاده از قوانین تبدیل به دست آورد. اگر کمیت‌های اولیه به بردارهای پایه $\{e_1', e_2', e_3'\}$ و غیر اولیه به بردارهای پایه $\{e_1, e_2, e_3\}$ مرتبط باشند و بردارهای پایه با رابطه $e_i' = Q_{ij} e_j$ به هم مرتبط باشند و \mathbf{Q} یک تانسور متعامد باشد

$\alpha' = \alpha$	zeroth-order tensor (or scalar),	(114-1)
$a_i' = Q_{mi} a_m$	first-order tensor (or vector),	
$T_{ij}' = Q_{mi} Q_{nj} T_{mn}$	second-order tensor (or tensor),	
$S_{ijk}' = Q_{mi} Q_{nj} Q_{rk} S_{mnr}$	third-order tensor,	
$C_{ijkl}' = Q_{mi} Q_{nj} Q_{rk} Q_{sl} C_{mnrsl}$	fourth-order tensor,	
.....		

با توجه به قوانین تبدیلات، قواعد زیر برای عناصر ماتریس حاکم هستند.

قاعده جمع (addition rule)

قاعده ضرب (multiplication rule)

قاعده کسر (خارج قسمت) (quotient rule)

(۱) قاعده جمع

اگر T_{ij} و S_{ij} عناصر هر تانسور دلخواه مرتبه دو باشند، آنگاه $T_{ij} + S_{ij}$ عناصر یک تانسور مرتبه دو می‌باشند و مشابه آن اگر T_{ijk} و S_{ijk} عناصر هر تانسور دلخواه مرتبه سه باشند، آنگاه $T_{ijk} + S_{ijk}$ عناصر یک تانسور مرتبه سه می‌باشند.

۲) قاعده ضرب

اگر a_i عناصر یک بردار دلخواه و T_{ij} عناصر یک تانسور دلخواه باشند تنوع بسیاری برای ضرب این دو وجود خواهد داشت به عنوان مثال $a_i a_j$, $a_i a_j a_k$, $T_{ij} T_{kl}$, $T_{ij} T_{jk}$ و غیره برای تمام موارد ذکر شده و ذکر نشده، نتیجه، عناصر یک تانسور می‌باشد که مرتبه آن برابر با تعداد اندسپه‌های آزاد است. به عنوان مثال $a_i a_j$ المانهای یک تانسور مرتبه دو می‌باشد و $a_i a_j a_k$ المانهای یک تانسور مرتبه سه و $T_{ij} T_{kl}$ المانهای یک تانسور مرتبه چهار و $T_{ij} T_{jk}$ المانهای یک تانسور مرتبه دو می‌باشند.

۳) قاعده کسر

اگر a_i المانهای یک بردار اختیاری و T_{ij} عناصر یک تانسور اختیاری باشند و برای تمام سیستم‌های مختصات رابطه $a_i = T_{ij} b_j$ صادق باشد آنگاه b_i المانهای یک بردار می‌باشد. همین قضیه برای یک تانسور مرتبه دو T_{ij} و یک تانسور مرتبه چهار C_{ijkl} با رابطه $T_{ij} = C_{ijkl} E_{kl}$ صادق است و نتیجه نهایی تانسور مرتبه دو C_{kl} است.

۱-۲۳- تانسورهای متقارن و پادمتقارن (Symmetric and Antisymmetric Tensors)

تانسوری متقارن است که در آن $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$ بنابراین عناصر یک تانسور متقارن دارای خاصیت زیر می‌باشند.

$$T_{ij} = T_{ji} \quad (1-115)$$

که برای المانیها تانسور مرتبه دو

$$T_{12} = T_{21}, \quad T_{13} = T_{31}, \quad T_{23} = T_{32} \quad (1-116)$$

تانسوری پادمتقارن نامیده می‌شود که در آن $\mathbf{T} = -\mathbf{T}^T$ بنابراین المانهای تانسور پادمتقارن دارای خاصیت زیر می‌باشند.

$$T_{ij} = -T_{ji}, \quad (1-117)$$

که در نتیجه

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0, \quad T_{12} = -T_{21}, \quad T_{13} = -T_{31}, \quad T_{23} = -T_{32} \quad (118-1)$$

هر تانسور پادمتقارن عملاً دارای سه مؤلفه می‌باشد (شبيه به یک بردار)

تمام تانسورها را می‌توان به صورت جمع دو تانسور متقارن و پادمتقارن نوشت

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^S + \mathbf{T}^A, \quad (119-1)$$

که در آن

$$\mathbf{T}^S = \frac{\mathbf{T} + \mathbf{T}^T}{2} \text{ is symmetric and } \mathbf{T}^A = \frac{\mathbf{T} - \mathbf{T}^T}{2} \text{ is anti-symmetric.} \quad (120-1)$$

۱-۲۴ - بردار دوگان یک تانسور پادمتقارن (*The dual vector of an antisymmetric tensor*)
برای هر تانسور پادمتقارن \mathbf{T} بردار متناظر \mathbf{t}^A برای هر بردار \mathbf{a} وجود دارد که بردار تبدیل \mathbf{a} تحت \mathbf{T} برابر با \mathbf{Ta} است که به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\mathbf{Ta} = \mathbf{t}^A \times \mathbf{a} \quad (121-1)$$

به بردار \mathbf{t}^A بردار دوگان تانسور پادمتقارن گویند. با توجه به معادلاتی که در قبل اشاره شده بود مؤلفه‌های تانسور \mathbf{T} عبارتند از:

$$\begin{aligned} T_{12} &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{t}^A \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{t}^A \cdot \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{t}^A \cdot \mathbf{e}_3 = -t_3^A, \\ T_{31} &= \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{t}^A \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{t}^A \cdot \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{t}^A \cdot \mathbf{e}_2 = -t_2^A, \\ T_{23} &= \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{t}^A \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{t}^A \cdot \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{t}^A \cdot \mathbf{e}_1 = -t_1^A. \end{aligned} \quad (122-1)$$

مشابه معادلات فوق نتیجه می‌شود که

$$T_{21} = t_3^A, T_{13} = t_2^A, T_{32} = t_1^A \text{ and } T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0. \quad (123-1)$$

پس بردار دوگان اختصاص به تانسورهای پادمتقارن دارد و این بردار عبارت است از:

$$\mathbf{t}^A = -(T_{23}\mathbf{e}_1 + T_{31}\mathbf{e}_2 + T_{12}\mathbf{e}_3) = T_{32}\mathbf{e}_1 + T_{13}\mathbf{e}_2 + T_{21}\mathbf{e}_3 \quad (124-1)$$

و یا به صورت نگارش تانسوری

$$2\mathbf{t}^A = -\varepsilon_{ijk}T_{jk}\mathbf{e}_i \quad (125-1)$$

۱-۲۵- مقادیر ویژه و بردارهای ویژه یک تانسور (*Eigenvalues and eigenvectors of a tensor*) تانسور \mathbf{T} مفروض است، اگر \mathbf{a} برداری باشد که تحت تبدیل \mathbf{T} به برداری موازی با خود تبدیل گردد.

$$\mathbf{T}\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}, \quad (126-1)$$

در نتیجه \mathbf{a} یک بردار ویژه و λ یک مقدار ویژه می‌باشد. اگر \mathbf{a} یک بردار ویژه برای مقدار ویژه متناظر λ برای تبدیل خطی \mathbf{T} باشد، هر بردار موازی \mathbf{a} نیز یک بردار ویژه با همان مقدار ویژه λ است.

$$\mathbf{T}(\alpha\mathbf{a}) = \alpha\mathbf{T}\mathbf{a} = \alpha(\lambda\mathbf{a}) = \lambda(\alpha\mathbf{a}). \quad (127-1)$$

بنابراین بردار ویژه به دست آمده دارای طول دلخواه می‌باشد برای پرهیز از این امر باید بردارهای ویژه با طول واحد به دست آیند.

اگر \mathbf{n} یک بردار ویژه به طول واحد باشد. آنگاه

$$\mathbf{T}\mathbf{n} = \lambda\mathbf{n} = \lambda\mathbf{I}\mathbf{n}, \quad (128-1)$$

بنابراین

$$(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{with} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1. \quad (129-1)$$

اگر $\mathbf{n} = \alpha_i \mathbf{e}_i$ در نظر گرفته شود.

$$(T_{ij} - \lambda\delta_{ij})\alpha_j = 0 \quad \text{with} \quad \alpha_j\alpha_j = 1. \quad (130-1)$$

و به صورت بسط داده شده

$$\begin{aligned} (T_{11} - \lambda)\alpha_1 + T_{12}\alpha_2 + T_{13}\alpha_3 &= 0, \\ T_{21}\alpha_1 + (T_{22} - \lambda)\alpha_2 + T_{23}\alpha_3 &= 0, \\ T_{31}\alpha_1 + T_{32}\alpha_2 + (T_{33} - \lambda)\alpha_3 &= 0. \end{aligned} \quad (131-1)$$

باید توجه داشت که $\mathbf{n} \neq 0$ در نتیجه

$$|\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}| = 0, \quad (132-1)$$

که اگر به صورت ماتریسی نگاشته شود

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (133-1)$$

با بسط دترمینان فوق یک معادله مرتبه سه که معادله توصیفی تانسور \mathbf{T} نامیده می‌شود به دست می‌آید. حل معادله مرتبه سه فوق مقادیر ویژه تبدیل \mathbf{T} را به دست می‌دهد. از معادله (133-1) می‌توان بردارهای ویژه با طول واحد متناظر برای مقادیر ویژه به دست آمده را محاسبه نمود.

مثالها

توجه: اگر تانسوری دارای مؤلفه‌های حقیقی بوده و متقارن باشد در نتیجه تمام مقادیر ویژه آن نیز حقیقی خواهند بود. اما اگر تانسور حقیقی باشد ولی عدم تقارن در آن وجود داشته باشد، آنگاه از مجموع سه مقدار ویژه آن، دو مقدار ویژه می‌توانند غیر حقیقی باشند.

۱-۲۶- مقادیر و جهت‌های اصلی برای تانسورهای متقارن

این مبحث بیشترین کاربرد را در محاسبه مقادیر و جهت‌های اصلی تانسورهای تنش و کرنش خواهد داشت. برای یک تانسور مرتبه دو در حالت کلی سه مقدار و سه جهت اصلی عمود برهم وجود خواهد داشت. اگر \mathbf{n}_1 و \mathbf{n}_2 دو بردار ویژه متناظر با دو مقدار ویژه λ_1 و λ_2 باشند

$$\mathbf{T}\mathbf{n}_1 = \lambda_1\mathbf{n}_1, \quad (134-1)$$

و

$$\mathbf{T}\mathbf{n}_2 = \lambda_2\mathbf{n}_2. \quad (135-1)$$

در نتیجه

$$\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{T}\mathbf{n}_1 = \lambda_1\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_1, \quad (136-1)$$

و

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{T}\mathbf{n}_2 = \lambda_2\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2. \quad (137-1)$$

برای یک تانسور متقارن $\mathbf{T}=\mathbf{T}^T$

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{T} \mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{T}^T \mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{T} \mathbf{n}_1. \quad (138-1)$$

در نتیجه

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) = 0. \quad (139-1)$$

اگر λ_1 و λ_2 با هم برابر نباشند، آنگاه $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$ که نشان می‌دهد راستاهای اصلی بر هم عمودند. در مورد تانسور متقارن حقیقی سه راستای متعامد وجود خواهد داشت.

۱-۲۷- ثوابت اسکالر اصلی یک تانسور (Principal scalar invariant of a tensor)

معادله توصیفی یک تانسور \mathbf{T} ، $|T_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0$ است که به صورت زیر نیز بیان می‌گردد.

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0, \quad (140-1)$$

که در آن

$$I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33} = T_{ii} = \text{tr} \mathbf{T}, \quad (141-1)$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (T_{ii} T_{jj} - T_{ij} T_{ji}) = \frac{1}{2} [(\text{tr} \mathbf{T})^2 - \text{tr}(\mathbf{T}^2)], \quad (142-1)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = \det [\mathbf{T}]. \quad (143-1)$$

با توجه به معادلات فوق مشخص است که مقادیر ویژه تانسور \mathbf{T} به بردارهای پایه انتخابی وابستگی ندارد و به همین دلیل به آنها ثوابت اسکالر اصلی \mathbf{T} گویند. بر مبنای مقادیر ویژه تانسور معادلات فوق را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad (144-1)$$

$$I_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1,$$

$$I_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3.$$

بخش سوم: حساب تانسوری (Tensor Calculus)

۱-۲۸- مقادیر تانسور تابعی از یک اسکالر باشند

$\mathbf{T} = \mathbf{T}(t)$ تانسوری است که مقادیر آن تابعی از اسکالر t می‌باشند. مشتق \mathbf{T} نسبت به t به صورت زیر

است:

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{T}(t + \Delta t) - \mathbf{T}(t)}{\Delta t} \quad (145-1)$$

معادلات زیر به راحتی با توجه به تعریف مشتق به دست می‌آیند.

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{T} + \mathbf{S}) = \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \frac{d\mathbf{S}}{dt}, \quad (146-1)$$

$$\frac{d}{dt}(\alpha(t)\mathbf{T}) = \frac{d\alpha}{dt}\mathbf{T} + \alpha \frac{d\mathbf{T}}{dt}, \quad (147-1)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{T}\mathbf{S}) = \frac{d\mathbf{T}}{dt}\mathbf{S} + \mathbf{T} \frac{d\mathbf{S}}{dt}, \quad (148-1)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{T}\mathbf{a}) = \frac{d\mathbf{T}}{dt}\mathbf{a} + \mathbf{T} \frac{d\mathbf{a}}{dt}, \quad (149-1)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{T}^T) = \left(\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right)^T. \quad (150-1)$$

به عنوان مثال اشاره‌ای به معادله (149-1) می‌شود. با توجه به تعریف اشاره شده در معادله (145-1)

(151-1)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{T}\mathbf{a}) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{T}(t + \Delta t)\mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{T}(t)\mathbf{a}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{T}(t + \Delta t)\mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{T}(t)\mathbf{a}(t) - \mathbf{T}(t)\mathbf{a}(t + \Delta t) + \mathbf{T}(t)\mathbf{a}(t + \Delta t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{T}(t + \Delta t)\mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{T}(t)\mathbf{a}(t + \Delta t) + \mathbf{T}(t)\mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{T}(t)\mathbf{a}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{T}(t + \Delta t) - \mathbf{T}(t)}{\Delta t} \mathbf{a}(t + \Delta t) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{T}(t) \frac{\mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t)}{\Delta t}. \\ \frac{d(\mathbf{T}\mathbf{a})}{dt} &= \frac{d\mathbf{T}}{dt} \mathbf{a} + \mathbf{T} \frac{d\mathbf{a}}{dt}. \end{aligned}$$

مثال: نشان دهید که در سیستم مختصات کارتزین، مؤلفه‌های $d\mathbf{T}/dt$ را به دست آورید:

$$T_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T} \mathbf{e}_j,$$

$$\frac{dT_{ij}}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_i}{dt} \cdot \mathbf{T} \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T} \frac{d\mathbf{e}_j}{dt}.$$

با توجه به طول ثابت بردارهای پایه مشتق آنها برابر با صفر است.

$$\frac{dT_{ij}}{dt} = \mathbf{e}_j \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} \mathbf{e}_i = \left(\frac{d\mathbf{T}}{dt} \right)_{ij}$$

ادامه مثالها:

۱-۲۹- میدان اسکالر و گرادیان یک تابع اسکالر

اگر $\Phi(\mathbf{r})$ یک تابع اسکالر از بردار موقعیت \mathbf{r} باشد یعنی با ازای هر \mathbf{r} ، $\Phi(\mathbf{r})$ یک مقدار اسکالر را به عنوان نتیجه اعلام دارد نظیر دانسیته، دما و یا پتانسیل الکتریکی در یک نقطه. به عبارت دیگر $\Phi(\mathbf{r})$ یک میدان اسکالر است. اشتراک یک میدان اسکالر با یک میدان برداری گرادیان Φ نامیده می‌شود. گرادیان Φ در هر نقطه یک بردار است و با $\text{grad } \Phi$ و یا $\nabla\Phi$ نشان داده می‌شود که اگر با $d\mathbf{r}$ ضرب داخلی شود بیانگر تفاضل مقادیر اسکالر \mathbf{r} و $\mathbf{r}+d\mathbf{r}$ است.

$$d\phi = \phi(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}) = \nabla\phi \cdot d\mathbf{r}. \quad (152-1)$$

اگر dr بیانگر مقدار بردار $d\mathbf{r}$ و \mathbf{e} یک بردار یکه در $d\mathbf{r}$ راستای باشد. ($\mathbf{e}=d\mathbf{r}/dr$) پس با توجه به رابطه (۱۵۲-۱) می‌توان نوشت

$$\frac{d\phi}{dr} = \nabla\phi \cdot \mathbf{e}. \quad (153-1)$$

می‌توان نتیجه گرفت، مؤلفه‌های $\nabla\Phi$ در راستای بردار \mathbf{e} تغییرات تابع Φ را در این راستا به دست می‌دهند (مشتق در راستا). در حالت ویژه، مؤلفه‌های $\nabla\Phi$ در راستاهای سیستم مختصات \mathbf{e}_i عبارتند از:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = \left(\frac{d\phi}{dr} \right)_{\mathbf{e}_i\text{-dir}} = \nabla\phi \cdot \mathbf{e}_i. \quad (154-1)$$

مؤلفه‌های کارترین $\nabla\Phi$ عبارتند از $\partial\Phi/\partial x_i$ و در نتیجه

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 = \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \mathbf{e}_i. \quad (155-1)$$

بردار گرادیان می‌تولند تفسیر هندسی داشته باشد. اگر $\Phi(\mathbf{r})$ بیانگر یک میدان دما باشد آنگاه در یک سطح همدمما $\Phi = a$ (constant). فرض کنید \mathbf{r} بیانگر نقطه‌ای در روی سطح همدمما باشد. در نتیجه برای هر $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ بر روی همان سطح همدمما، $d\Phi = 0$. بنابراین $\nabla\Phi \cdot d\mathbf{r} = 0$. به عبارت دیگر $\nabla\Phi$ یک بردار عمود بر سطح در نقطه \mathbf{r} است. به عبارت دیگر مقدار $\nabla\Phi \cdot d\mathbf{r}$ ماکزیمم است اگر $d\mathbf{r}$ در راستای $\nabla\Phi$ باشد. به عبارت دیگر $\nabla\Phi$ بیشترین است اگر $d\mathbf{r}$ عمود بر سطح با مقدار ثابت Φ باشد و در این صورت $d\Phi = |\nabla\Phi|dr$ و یا

$$\left(\frac{d\phi}{dr}\right)_{\max} = |\nabla\phi| \quad (156-1)$$

۳۰-۱- میدان برداری و گرادیان یک تابع برداری

فرض کنید $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ یک تابع برداری برای توصیف موقعیت باشد. به عنوان مثال میدان جابجایی و یا میدان سرعت. اشتراک $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ با میدان تانسوری گرادیان ∇ گفته می‌شود. گرادیان \mathbf{v} با یک تانسور مرتبه دو بیان می‌گردد.

$$d\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{r}) = (\nabla\mathbf{v})d\mathbf{r}. \quad (157-1)$$

اگر dr برابر با $d\mathbf{r}$ و \mathbf{e} برابر با $d\mathbf{r}/dr$ باشد.

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{dr}\right)_{\text{in } \mathbf{e}\text{-direction}} = (\nabla\mathbf{v})\mathbf{e}. \quad (158-1)$$

بنابراین ماتریس مرتبه دو $\nabla\mathbf{v}$ بردار یکه \mathbf{e} به بردار نرخ تغییرات \mathbf{v} در همان راستا تبدیل می‌کند. در مختصات کارتزین

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{dr}\right)_{\text{in } \mathbf{e}_j\text{-direction}} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_j} = (\nabla\mathbf{v})\mathbf{e}_j, \quad (159-1)$$

بنابراین مؤلفه‌های $\nabla\mathbf{v}$ در نمادگذاری اندیسی عبارتند از

$$(\nabla\mathbf{v})_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot (\nabla\mathbf{v})\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_j} = \frac{\partial(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad (160-1)$$

$$[\nabla \mathbf{v}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (161-1)$$

توصیف هندسی این گرادیان در بخش بعدی ارائه خواهد شد.

۱-۳۱- واگرایی (دیورژانس *Divergence*) یک میدان برداری و واگرایی یک میدان تانسوری فرض کنید $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ یک میدان برداری است. واگرایی $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ با میدان اسکالر تریس (*trace*) گرادیان \mathbf{v} بیان می‌گردد.

$$\operatorname{div} \mathbf{v} \equiv \operatorname{tr}(\nabla \mathbf{v}). \quad (162-1)$$

در سیستم مختصات کارتزین

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}. \quad (163-1)$$

فرض کنید $\mathbf{T}(\mathbf{r})$ یک میدان تانسوری است. واگرایی $\mathbf{T}(\mathbf{r})$ یک میدان برداری است به صورت $\operatorname{div} \mathbf{T}$ ، به صورتی که برای هر بردار \mathbf{a}

$$(\operatorname{div} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{a} \equiv \operatorname{div}(\mathbf{T}^T \mathbf{a}) - \operatorname{tr}(\mathbf{T}^T \nabla \mathbf{a}). \quad (164-1)$$

در مختصات کارتزین

$$b_i = \mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_i = \operatorname{div}(\mathbf{T}^T \mathbf{e}_i) - \operatorname{tr}(\mathbf{T}^T \nabla \mathbf{e}_i) = \operatorname{div}(T_{ij} \mathbf{e}_j) - 0 = \partial T_{ij} / \partial x_j. \quad (165-1)$$

و به عبارت دیگر

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = (\partial T_{ij} / \partial x_j) \mathbf{e}_i. \quad (166-1)$$

۱-۳۲- چرخش (*Curl*) یک میدان برداری

فرض کنید $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ یک میدان برداری است. چرخش $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ یک میدان برداری است که به دو برابر بردار دوگان قسمت غیر متقارن $\nabla \mathbf{v}$ برابر است.

$$\text{curl } \mathbf{v} \equiv 2\mathbf{t}^A, \quad (167-1)$$

که در آن \mathbf{t}^A بردار دوگان $(\nabla \mathbf{v})^A$ است. در کارترین

$$[\nabla \mathbf{v}]^A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (168-1)$$

بنابراین چرخش $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ با معادله (1-124) بیان می‌گردد.

$$(169-1)$$

$$\text{curl } \mathbf{v} = 2\mathbf{t}^A = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_3.$$

و به صورت نگارش اندیسی

$$\text{curl } \mathbf{v} = -\varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \mathbf{e}_i. \quad (170-1)$$

۱-۳۳- لاپلاسیان (Laplacian) یک میدان اسکالر

اگر $f(\mathbf{r})$ تابع اسکالر از بردار موقعیت \mathbf{r} باشد. لاپلاسیان میدان اسکالر عبارت است از

$$\nabla^2 f = \text{div} (\nabla f) = \text{tr}(\nabla(\nabla f)). \quad (171-1)$$

در مختصات متعامد

$$\nabla^2 f = \text{tr}(\nabla(\nabla f)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}. \quad (172-1)$$

۱-۳۴- لاپلاسیان (Laplacian) یک میدان برداری

اگر $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ یک میدان برداری باشد. لاپلاسیان میدان برداری عبارت است از

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla (\text{div } \mathbf{v}) - \text{curl} (\text{curl } \mathbf{v}). \quad (173-1)$$

در مختصات متعامد

$$\nabla(\operatorname{div} \mathbf{v}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \mathbf{e}_i, \quad \operatorname{curl} \mathbf{v} = -\varepsilon_{\alpha j k} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right) \mathbf{e}_\alpha, \quad (174-1)$$

با جاگذاری معادلات فوق در معادله لاپلاسیان میدان برداری و ساده سازی لاپلاسیان میدان برداری در مختصات متعامد عبارت است از:

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_\beta \partial x_\beta} \mathbf{e}_i = \nabla^2 v_i \mathbf{e}_i. \quad (175-1)$$

و در حالت باز شده

$$(176-1)$$

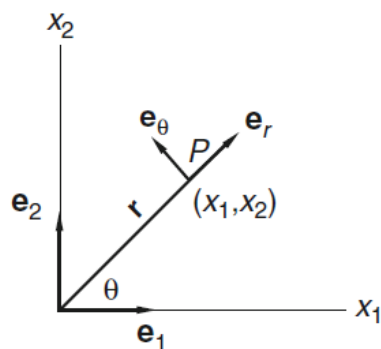
$$\nabla^2 \mathbf{v} = \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} \right) \mathbf{e}_3.$$

برای سایر سیستمهای مختصات این لاپلاسیان در بخشهای بعدی به دست خواهد آمد.

بخش چهارم: مختصات منحنی الخط

۳۵-۱ - مختصات قطبی (Polar Coordinate)

مختصات قطبی زیر را در نظر بگیرید (r, θ)

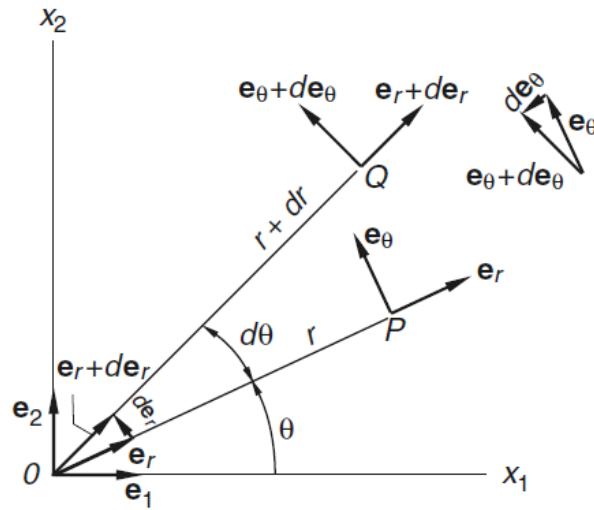


شکل (۳-۱)

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad \text{and} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{x_2}{x_1}. \quad (177-1)$$

بردارهای یکه \mathbf{e}_r و \mathbf{e}_θ بر مبنای بردارهای یکه کارترین \mathbf{e}_1 و \mathbf{e}_2 به صورت زیر تعریف می شوند.

$$\mathbf{e}_r = \cos\theta \mathbf{e}_1 + \sin\theta \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_\theta = -\sin\theta \mathbf{e}_1 + \cos\theta \mathbf{e}_2. \quad (178-1)$$



شکل (۴-۱)

بردارهای یکه پایه با تغییرات θ تغییر می‌کنند با توجه به معادله (۱۷۸-۱)

$$d\mathbf{e}_r = (-\sin\theta \mathbf{e}_1 + \cos\theta \mathbf{e}_2)d\theta = d\theta \mathbf{e}_\theta, \quad d\mathbf{e}_\theta = (-\cos\theta \mathbf{e}_1 - \sin\theta \mathbf{e}_2)d\theta = -d\theta \mathbf{e}_r. \quad (179-1)$$

توضیح هندسی این امر به $d\mathbf{e}_r$ و $d\mathbf{e}_\theta$ در شکل (۴-۱) بر می‌گردد. توجه شود بردار $\mathbf{e}_r(P)$ به اندازه بسیار کوچک $d\theta$ دوران می‌کند تا به $\mathbf{e}_r(Q) = \mathbf{e}_r(P) + d\mathbf{e}_r$ گردد. $d\mathbf{e}_r$ عمود است بر $\mathbf{e}_r(P)$ با مقدار $|d\mathbf{e}_r| = (1)d\theta = d\theta$ و مشابه به آن $d\mathbf{e}_\theta$ عمود است بر $\mathbf{e}_\theta(P)$ و ...

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r, \quad (180-1)$$

$$d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}_r + r d\mathbf{e}_r. \quad (181-1)$$

$$d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}_r + rd\theta \mathbf{e}_\theta. \quad (182-1)$$

و در ادامه می‌توان مقادیر ∇f , $\nabla \cdot \mathbf{v}$, $\text{curl } \mathbf{v}$, $\text{div } \mathbf{T}$ و $\nabla^2 f$ و $\nabla^2 \mathbf{v}$ را برای مختصات قطبی محاسبه کرد. (بسیار مهم: اثبات گردد)

۳۶-۱ - مختصات استوانه‌ای (Cylindrical Coordinates)

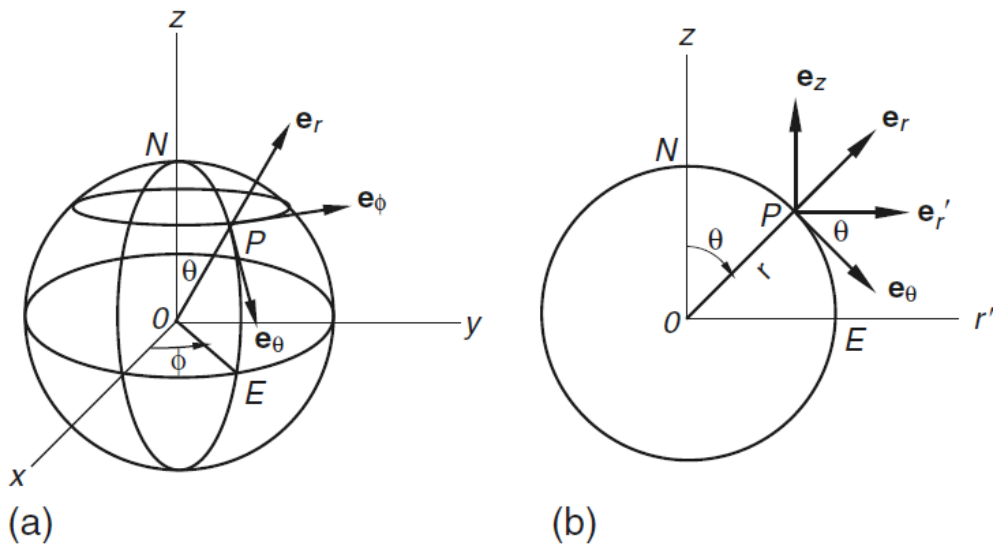
در مختصات استوانه‌ای موقعیت یک نقطه در فضا با سه مؤلفه بیان می‌گردد (r, θ, z) .

$$\mathbf{R} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z, \quad (183-1)$$

$$d\mathbf{R} = dr\mathbf{e}_r + r d\theta\mathbf{e}_\theta + dz\mathbf{e}_z. \quad (184-1)$$

و در ادامه می‌توان مقادیر ∇f , $\nabla \cdot \mathbf{v}$, $\text{curl } \mathbf{v}$, $\text{div } \mathbf{T}$, $\nabla^2 f$ و $\nabla^2 \mathbf{v}$ را برای مختصات استوانه‌ای محاسبه کرد. (بسیار مهم: اثبات گردد)

۱-۳۷- مختصات کروی (Spherical Coordinates)



شکل (۵-۱)

با توجه به شکل (۵-۱) مختصات یک نقطه عمومی نظیر P در سیستم مختصات کروی با مؤلفه‌های (r, θ, Φ) نشان داده می‌شوند. در این شکل \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ و \mathbf{e}_ϕ به ترتیب به عنوان بردار یک‌جه‌های راستای r , θ و Φ می‌باشند. بردار مکان P عبارت است از:

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r, \quad (185-1)$$

$$d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}_r + r d\mathbf{e}_r. \quad (186-1)$$

با توجه به شکل (۵-۱)

$$\mathbf{e}_r = \cos\theta\mathbf{e}_z + \sin\theta\mathbf{e}'_r, \quad \mathbf{e}_\theta = \cos\theta\mathbf{e}'_r - \sin\theta\mathbf{e}_z, \quad (187-1)$$

$$d\mathbf{e}_r = d\theta\mathbf{e}_\theta + \sin\theta d\phi\mathbf{e}_\phi. \quad (188-1)$$

$$d\mathbf{e}_\theta = -\mathbf{e}_r d\theta + \cos\theta d\phi\mathbf{e}_\phi. \quad (189-1)$$

$$d\mathbf{e}_\phi = -\sin\theta d\phi\mathbf{e}_r - \cos\theta d\phi\mathbf{e}_\theta. \quad (190-1)$$

و در نهایت

$$d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}_r + rd\theta\mathbf{e}_\theta + r \sin\theta d\phi\mathbf{e}_\phi. \quad (1-191)$$

و در ادامه می‌توان مقادیر $\nabla\mathbf{v}$ ، ∇f ، $\text{div } \mathbf{v}$ ، $\text{curl } \mathbf{v}$ ، $\text{div } \mathbf{T}$ ، $\nabla^2 f$ و $\nabla^2 \mathbf{v}$ را برای مختصات کروی نیز

محاسبه کرد. (بسیار مهم: اثبات گردد)