جزوه مکانک محیط پیوسته

ارشد مهندسی مکانیک- طراحی کاربردی

نویسنده : **امین آزادی**

استاد مربوطه : دکتر تاج بخش نوید

دانشگاه تبریز

پاییز 91

تست Fatigue & Fracture

مکانیک محیط پیوسته (جلسه اول ۱/۲۰/۹۱)

References:

* 1) Continuum Mechanics for Engineers

    C. Thomas Mase

    George E. Mase

2) Introduction to the mechanics of a continuum media

    Malvern

3) Continuum mechanics

    Daniel Frederick

    Tien Sun chang

4) مکانیک محیط‌های پیوسته

    دکتر محمد رحیمیان

    مهندس مرتضی اسکندری قادی

بارم

حضور در کلاس ۱ نمره

تمرینات ۳ نمره (سمینار، پلاتو، تمرینات روز امتحان آورده شود)

نمره تمرین فصل هفتم ۱ نمره

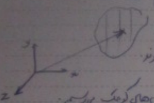
سمینار ۱ نمره دو مقاله در زمینه ... ISI (1) sci net (2) knowledge.com مطالعه و برداشت ...

کوئیز ۳ نمره

۱۱ نمره

فصل اول - محیط پیوسته

در محیط پیوسته بایستی تناظر یک به یک بین نقاط فضا و ذرات جسم وجود داشته باشد



و ذرات جسم به یکدیگر نیرو وارد می کنند!

البته این محیط به صورت قراردادی با شرایط بالا در نظر گرفته می شوند.

▲ تفاوت: از معادلات نوشته شده برای محیط کلی به معادلات برای المان های کوچک می رسیم.

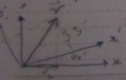
قوانین کلی : معادل و مومنتوم و ... (Balance law)
قوانین ساختاری : (law)

★ یکی از مزایای مکانیک محیط پیوسته: نوشتن معادلات به فرم های بسیار کوتاه

* Basic Concepts *

تانسور یک مفهوم اولیه می باشد و تعریف خاصی ندارد.

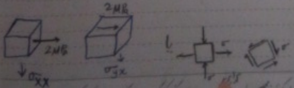
کمیت های فیزیکی هستند که مقادیر آن ها در مختصات مختلف یکی ولی مولفه های آن ممکن است متفاوت باشند. $\sqrt{v_{x'}^2+v_{y'}^2}=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$



تانسور مرتبه صفر : عدد [جرم - زمان -

تانسور مرتبه یک : بردار [سرعت

تانسور مرتبه دو : تنش



91/7/3

فصل دوم:

2.1) Scalars, Vectors and Cartesian Tensors

2.2) Tensor Algebra in Symbolic notations Summation Convention

2.3) Indicial notation

2.4) Matrices and determinants

2.5) Transformation of cartesian tensors

2.6) Principal values and principal directions of symmetric Second Order Tensor

2.7) Tensor field, tensor Calculus

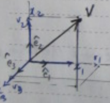
2.8) Integral theorems of Gauss and Stoke

(2.1) از حروف یونانی کوچک (به جز δ و ε) برای نمایش اعداد (کمیت‌های عددی) استفاده می‌شود:

Cartesian Tensors: تانسورهایی که نسبت به مختصات Cartesian بیان شوند را Cartesian Tensors نامند.

در کتاب برای بردارها از حروف کوچک انگلیسی و (Bold) استفاده می‌شود (برای نوشتن از $\vec{a}$ یا $\bar{a}$)

و برای تانسورها (از مرتبه ۲ به بالا) از حروف بزرگ انگلیسی و Bold استفاده می‌کنیم (A ، B)



(2.2) روابط جبری برای تانسورها:

$\hat{e}_1$ و $\hat{e}_2$ و $\hat{e}_3$ بردارهای یکه هستند.

$$\vec{V} = v_1\hat{e}_1 + v_2\hat{e}_2 + v_3\hat{e}_3$$

$$= \sum_{i=1}^{3} v_i\hat{e}_i$$

$$\vec{V} = v_i\hat{e}_i$$ در مکانیک محیط پیوسته

i: مقادیر کل دامنه را می‌گیرد (به تعداد n بعدی بودن فضای موجود که ما ۳ در نظر می‌گیریم)

کرنکر

$A_{ii} + B_{ii} + \beta k_{jj} \cdots$ $\quad [\underbrace{A_{ij} B_j M_{sn} + \cdots + \cdots}]$

اندیس ترم $\qquad$ (یک ترم + ۲ کرنکر)

* در هر ترمی اگر اندیسی دو بار تکرار شود، به این معنی است که آن اندیس بایستی تمامی مقادیر دامنه را بگیرد و با هم جمع شود. (dummy index) و مقادیر بستگی به بعد فضایی مورد بحث دارد.

* (Free Index) اندیسی است در یک ترم فقط یک بار نوشته شده باشد.

$A_{ij} B_j M_{sn}$ $\begin{cases} \text{dummy Index}: j \\ \text{Free Index}: i, s, n \end{cases}$ و مقادیر ۱ یا ۲ یا ۳ را می‌گیرد (بستگی دارد به بعد)

* در هیچ ترمی اندیسی سه بار تکرار نمی‌شود مگر آن که توضیحش داده شده باشد.

$n=4$

○ $A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33} + A_{44}$

• Free Index را نمی‌توانیم عوض کنیم ولی dummy Index اندیس را می‌توانیم عوض کنیم

$A_{ij} B_j = A_{ik} B_k = A_{im} B_m$ $\quad \cancel{A_{ii} B_i}$

پس $\quad \vec{V} = v_i \hat{e}_i = v_j \hat{e}_j = v_k \hat{e}_k$

• Example: without regarding their physical meaning, expand the following expressions according the summation convention

a) $T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$

b) $v_k v_k = v_1 v_1 + v_2 v_2 + v_3 v_3$

$$T_{ij}T_{ij}$$

c) $T_{ij}T_{ij}$ Free: x
dummy: 2

$$= T_{1j}T_{1j} + T_{2j}T_{2j} + T_{3j}T_{3j}$$
$$= T_{11}T_{11} + T_{12}T_{12} + T_{13}T_{13} + T_{21}T_{21} + T_{22}T_{22} + T_{23}T_{23}$$
$$+ T_{31}T_{31} + T_{32}T_{32} + T_{33}T_{33}$$

در هر تنسوری تعداد Free Index ها به منزله مرتبه تانسور می‌باشد ($\hat{e}$ ها را در نظر می‌گیریم)

تانسور مرتبه دوم : $w_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j$

d) $T_{ii}T_{jj}$

e) $T_{ii}w_k\hat{e}_k = (T_{11}+T_{22}+T_{33})w_k\hat{e}_k = (T_{11}+T_{22}+T_{33})(w_1\hat{e}_1+w_2\hat{e}_2+w_3\hat{e}_3)$

f) $u_iv_iw_j\hat{e}_j$

1) addition of Vectors $\boxed{(2.2)}$

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} =$$

$$\rightarrow w_i\hat{e}_i = u_i\hat{e}_i + v_i\hat{e}_i = (u_i+v_i)\hat{e}_i$$

$$* \; w_i = u_i + v_i \rightarrow \begin{cases} w_1 = u_1+v_1 \\ w_2 = u_2+v_2 \\ w_3 = u_3+v_3 \end{cases}$$

توجه Free Index

2) Multiplication

a) of a vector by a scalar : $\lambda\vec{v} = \lambda v_i\hat{e}_i \; (= \lambda v_j\hat{e}_j)$

b) dot (scalar) product of two vectors :

$$: \vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u} = |\vec{v}||\vec{u}|\cos\theta$$

$\longrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = u_i\hat{e}_i \cdot v_j\hat{e}_j = u_i v_j\, \hat{e}_i\cdot\hat{e}_j$

$\hat{e}_i\cdot\hat{e}_j = \begin{cases} 1 & i=j \Rightarrow \text{(if numerical value of } i = \text{the numerical of } j) \\ 0 & i\neq j \Rightarrow (\ \text{"} \quad \neq \quad \text{"}\ ) \end{cases}$ ★ تعریف دلتای کرونکر

$\boxed{\hat{e}_i\cdot\hat{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases}1\\0\end{cases}}$ (Kronecker delta) $\delta_{11}=1\quad \delta_{12}=0$

- $\delta_{ii} = \delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33} = 1+1+1 = 3$

★ $\delta_{i2}A_i = A_2$ نقطه‌ای تواند مقدار بگیرد

- $\delta_{ij}B_j = B_i \qquad = \delta_{i1}B_1 + \delta_{i2}B_2 + \delta_{i3}b_3 \Rightarrow \delta_{ij}B_j = B_i$

$\hookrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = u_i\hat{e}_i\cdot v_j\hat{e}_j = u_i v_j\,\hat{e}_i\cdot\hat{e}_j = u_i v_j\,\delta_{ij} = \begin{cases} u_i v_i \\ u_j v_j\end{cases}$

جلسه سوم 91/7/8

(3) Cross (Vector) product of two vectors

$\vec{u}\times\vec{v} = -\vec{v}\times\vec{u} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\sin\theta\ \hat{e}$

★ permutation Symbol : $\boxed{\hat{e}_i\times\hat{e}_j = \varepsilon_{ijk}\,\hat{e}_k}$ (ترتیب)

$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{if the numerical values of } ijk \text{ appears as in the sequence } 123,\ 231 \\ -1 & \text{" " " " } 321,\ 213 \\ 0 & 112,\ 122 \end{cases}$

$\rightarrow \vec{u}\times\vec{v} = u_i\hat{e}_i\times v_j\hat{e}_j = u_i v_j\,\hat{e}_i\times\hat{e}_j = u_i v_j\,\varepsilon_{ijk}\hat{e}_k = \varepsilon_{ijk}u_i v_j\,\hat{e}_k$

(d) triple Scalar product [box product] ضرب جعبه‌ای

$\vec{u}\cdot\vec{v}\times\vec{w} = \vec{v}\times\vec{w}\cdot\vec{u} = [\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$

ز روی دوست دل دشمنان چه دریابد / چراغ مرده کجا شمع آفتاب کجا
چو کحل بینش ما خاک آستان شماست / کجا رویم بفرما از این جناب کجا

$$\rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}\times\vec{w} = u_i\hat{e}_i \cdot v_j\hat{e}_j \times w_k\hat{e}_k = u_i v_j w_k\, \hat{e}_i\cdot\hat{e}_j\times\hat{e}_k =$$

$$= u_i v_j w_k\, \hat{e}_i\cdot(\varepsilon_{jkm}\hat{e}_m) = \varepsilon_{jkm} u_i v_j w_k\, (\hat{e}_i\cdot\hat{e}_m)$$

$$= \varepsilon_{jkm}\, u_i v_j w_k\, \delta_{im} = \varepsilon_{jki}\, u_i v_j w_k$$

$$\star\ \varepsilon_{jki} = +\varepsilon_{ijk}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}\times\vec{w} = \varepsilon_{ijk}\, u_i v_j w_k}$$

اگر جای دو اندیس در ε_{ijk} را عوض کنیم
حاصل ضرب منفی می‌شود

$$\varepsilon_{jki} = -\varepsilon_{ikj} = -(-\varepsilon_{ijk}) = \varepsilon_{ijk}$$

e) triple cross product

$$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = u_i\hat{e}_i \times (v_j\hat{e}_j \times w_k\hat{e}_k) = u_i v_j w_k\, \hat{e}_i\times(\underbrace{\hat{e}_j\times\hat{e}_k}_{\varepsilon_{jkm}\hat{e}_m})$$

$$= \varepsilon_{jkm} u_i v_j w_k\, \underbrace{\hat{e}_i\times\hat{e}_m}_{\varepsilon_{imn}\hat{e}_n} = \varepsilon_{jkm}\varepsilon_{imn}\, u_i v_j w_k \hat{e}_n$$

دو ε که دو حرف مشترک داشته باشند

((تساوی $\varepsilon-\delta$))
$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$$

4 Free Index

$$\rightarrow u\times(\vec{v}\times\vec{w}) = -\varepsilon_{jkm}\varepsilon_{inm}\, u_i v_j w_k \hat{e}_n = -(\delta_{ji}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{ki})\, u_i v_j w_k \hat{e}_n$$

$$= -\delta_{ji}\delta_{kn} u_i v_j w_k \hat{e}_n + \delta_{jn}\delta_{ki} u_i v_j w_k \hat{e}_n$$

$$= -u_j v_j w_n \hat{e}_n + u_i v_n w_i \hat{e}_n$$

$$= u_i w_i v_n \hat{e}_n - u_j v_j w_n \hat{e}_n = (u\cdot w)v - (u\cdot v)w$$

ببین به سیب زنخدان که چاه در راه است
کجا همی روی ای دل بدین شتاب کجا
بشد که یاد خوشش باد روزگار وصال
خود آن کرشمه کجا رفت و آن عتاب کجا

f) tensor product of two Vectors (dyad) — ضرب تانسوری

$(u \otimes v)$ $\quad \vec{u}\vec{v} = u_i \hat{e}_i v_j \hat{e}_j = \underbrace{u_i v_j}_{\text{Free Index}} \hat{e}_i \hat{e}_j$

[تانسورهای مرتبه ۲ در فضای ۳ بعدی ۹ مولفه دارند]

ابتدا بسط روی i : $\vec{u}\vec{v} = u_1 v_j \hat{e}_1 \hat{e}_j + u_2 v_j e_2 \hat{e}_j + u_3 v_j \hat{e}_3 \hat{e}_j$

سپس بسط روی j $= u_1 v_1 \hat{e}_1 \hat{e}_1 + u_1 v_2 \hat{e}_1 \hat{e}_2 + \cdots\cdots + u_3 v_3 \hat{e}_3 \hat{e}_3$ (dyad)

dyadic A $\quad \vec{u}_1\vec{v}_1 + \vec{u}_2\vec{v}_2 + \cdots + \vec{u}_N\vec{v}_n$ (مجموع دایادها را دایادیک گویند)

g) Vector-dyad product — ضرب بردار - دایاد

1) $\vec{u} \cdot (\vec{v}\vec{w}) = u_i \hat{e}_i \cdot (v_j \hat{e}_j w_k \hat{e}_k) = u_i v_j w_k \hat{e}_i \cdot (\hat{e}_j \hat{e}_k) = u_i v_j w_k \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j \hat{e}_k$
$= u_i v_j w_k \delta_{ij} \hat{e}_k = u_j v_j w_k \hat{e}_k$

2) $(\vec{u}\vec{v}) \cdot \vec{w}$

3) $\vec{u} \times (\vec{v}\vec{w})$

4) $(\vec{u}\vec{v}) \times \vec{w} = u_i v_j \hat{e}_i \underbrace{\hat{e}_j \times w_k \hat{e}_k} = u_i v_j w_k \hat{e}_i e_j \times \hat{e}_k$
$= u_i v_j w_k \hat{e}_i \varepsilon_{jkm} \hat{e}_m = \underbrace{\varepsilon_{jkm} u_i v_j w_k}_{\text{2 Free Index}} \hat{e}_i \hat{e}_m$

h) dyad-dyad Product

$(\vec{u}\vec{v}) \cdot (\vec{w}\vec{s}) = u_i v_j \hat{e}_i \hat{e}_j \cdot w_k s_n \hat{e}_k \hat{e}_n$
$= u_i v_j w_k s_n \hat{e}_i \underbrace{\hat{e}_j \cdot \hat{e}_k}_{\delta_{jk}} e_n = \delta_{jk} u_i v_j w_k s_n \hat{e}_i \hat{e}_n$
$= \underline{u_i w_k w_k s_n} \; \underline{\hat{e}_i \hat{e}_n}$

تانسور مرتبه ۲ ← 2 Free Index

تانسور از هر مرتبه ای می تواند باشد
در این جا مرتبه دو و بالاتر مورد نظر می باشد

(i) Vector – Tensor Product

1) $\vec{V}\cdot\vec{\vec{T}} = v_i\hat{e}_i \cdot T_{jk}\hat{e}_j\hat{e}_k = v_i T_{jk}\,\underbrace{\hat{e}_i\cdot\hat{e}_j}_{\delta_{ij}}\,\hat{e}_k \qquad \vec{\vec{T}} = T_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j$

$= v_i T_{jk}\delta_{ij}\hat{e}_k = v_i T_{ik}\hat{e}_k$ ۱ تانسور مرتبه یک

2) $\vec{\vec{T}}\cdot\vec{V} = T_{ik}v_k\hat{e}_i \qquad (T_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j)\cdot(v_k\hat{e}_k) = T_{ij}v_k\hat{e}_i(\hat{e}_j\cdot\hat{e}_k) = T_{ij}v_k\delta_{jk}\hat{e}_i$

$= T_{ik}v_k\hat{e}_i$

(j) Tensor – Tensor Product

ضرب تانسور دو مرتبه بالا

$\vec{\vec{T}}\cdot\vec{\vec{S}} = T_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j \cdot S_{km}\hat{e}_k\hat{e}_m = T_{ij}S_{km}\,\hat{e}_i\hat{e}_j\cdot\hat{e}_k\hat{e}_m$

$= T_{ij}S_{km}\delta_{jk}\hat{e}_i\hat{e}_m = T_{ij}S_{jm}\hat{e}_i\hat{e}_m$

جلسه چهار ۹۱/۷/۱۰

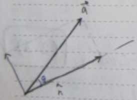
مثال: $\vec{V} = \overbrace{(\hat{a}\cdot\hat{n})\hat{n}}^{\text{تصویر روی } \hat{n}} + \hat{n}\times(\hat{a}\times\hat{n})$

$\vec{a}$ is arbitary vector

$\hat{n}$ is unit vector

Express $\vec{V}$ in formet the base vectors $\hat{e}_i$ and expand and Simplify

$\vec{a}\times\vec{n} = \varepsilon_{ijk}a_i n_j \hat{e}_k$



$\rightarrow \vec{V} = a_i n_i n_j \hat{e}_j + n_m\hat{e}_m \times \varepsilon_{ijk}a_i n_j\hat{e}_k$

$= a_i n_i n_j\hat{e}_j + \varepsilon_{ijk}a_i n_j n_m \hat{e}_m\times\hat{e}_k$

$= a_i n_i n_j\hat{e}_j + \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mkp}a_i n_j n_m\hat{e}_p$

$= a_i n_i n_j\hat{e}_j - \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mpk}a_i n_j n_m\hat{e}_p$

$= a_i n_i n_j\hat{e}_j - (\delta_{im}\delta_{jp} - \delta_{ip}\delta_{jm})a_i n_j n_m\hat{e}_p$

A ... Free Index

$n_j n_j = n_1 n_1 + n_2 n_2 + n_3 n_3 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$

$= a_i n_j n_i \hat{e}_j - a_i n_p n_i \hat{n}_p + a_p \overbrace{n_j n_j}^{1} \hat{e}_p = a_p \hat{e}_p = \vec{a}$

Using ε-δ identify, show that: مثال

a) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mjk} = 2\delta_{mi}$ b) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$

a $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mjk} = \delta_{im}\underbrace{\delta_{jj}}_{3} - \underbrace{\delta_{ij}\delta_{mj}}_{\delta_{mi}} = 3\delta_{im} - \delta_{im} = 2\delta_{mi}$

b) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 2\delta_{ii} = 2(3) = 6$

Ex: Double dot products for dyads are defined by: مثال (تمرین)

a) $(\vec{u}\vec{v})\cdot\cdot(\vec{w}\vec{s}) = (\vec{v}\cdot\vec{w})(\vec{u}\cdot\vec{s})$

b) $(\vec{u}\vec{v}):(\vec{w}\vec{s}) = (\vec{u}\cdot\vec{w})(\vec{v}\cdot\vec{s})$

در (a) دو مرتبه ... را ...

a) $= v_i w_i u_j s_j$ $\bar{\bar{T}}\cdot\cdot\bar{\bar{S}} = T_{ij} S_{ji}$

b) $= u_i w_i v_j s_j$ $\bar{\bar{T}}:\bar{\bar{S}} = T_{ij} S_{ij}$

Indicial Notation نمادگذاری شاخصی (2.3)

λ = Scalar (Zeroth order Tensor)

v_i = Vector (First " ") : 3 Compinents

$u_i v_j$ = dyad (Second " ") : $3^2 = 9$ "

T_{ij} = dyadic (" " ") : $3^2 = 9$ "

Q_{ijk} = triadic (third Order Tensor) : $3^3 = 27$ Components

C_{ijkl} = tetradic (fourth 〃 〃) : $3^4 = 81$ 〃

تانسور از مرتبه n تعداد 3^n مولفه در فضای سه بعدی دارد

از این پس با مولفه‌ها کار خواهیم کرد

Free Index

$\vec{U} + \vec{V} = \vec{W} \longrightarrow \underbrace{u_i}_{\text{Free Index}} + \underbrace{V_i}_{\text{Free Index}} = \underbrace{W_i}_{\text{Free Index}}$

$\bar{\bar{T}} + \bar{\bar{Q}} - \bar{\bar{S}} = \bar{\bar{W}} \longrightarrow T_{ij} + Q_{ij} - S_{ij} = W_{ij}$

$\bar{\bar{T}} \cdot \vec{V} \rightarrow T_{ik} V_k$, $\bar{\bar{T}} \cdot \bar{\bar{Q}} \rightarrow T_{ij} Q_{jn}$

$\vec{V} \cdot \bar{\bar{T}} \rightarrow V_i T_{ik}$ $(\bar{\bar{T}}\bar{\bar{Q}}) \rightarrow T_{ij} Q_{mn}$

Contraction

$\vec{u} \cdot \vec{V} = u_i V_i$

$\vec{a} \times \vec{b} \rightarrow \underbrace{\varepsilon_{ijk} a_i b_j}$

Free Index : k

$\vec{V} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \longrightarrow \varepsilon_{ijk} V_k a_j b_j$

$V_m \quad \varepsilon_{ijk} a_i b_j$

Free Index ها باید یکسان سازی شوند

Contraction باید روی Free Index ها عمل کند

Symmetric Tensor

if $T_{ij} = T_{ji} \rightarrow$ نسبت به i و j تانسور T متقارن است

if $Q_{ijkl} = Q_{jikl} \rightarrow$ نسبت به i و j تانسور Q متقارن است

if $Q_{ijkl} = Q_{ijlk}$ 〃 〃 〃 〃 k و l 〃 〃

در مدل‌های هایپرالاستیک

↓

$C_{ijkl} = C_{klij}$ (major Symmetric)

دو اندیس دوتایی جاشان با هم عوض می‌شود

$\delta_{ij} = \delta_{ji}$ (دلتای کرونکر یک تانسور مرتبهٔ دو متقارن است)

Skew Symmetric ~ anti-Symmetric

تانسوری را آنتی‌سیمتریک گویند هرگاه جای دو اندیس عوض شود، قرینهٔ آن حاصل شود

$(\varepsilon_{ijk}) = -(\varepsilon_{ikj})$ $\qquad S_{ij} = -S_{ji}$

$S_{ii} = 0$ ← قطر تانسور آنتی‌سیمتریک $= 0$

مثال: **Example:** if A_{ij} assumed to be an anti-Symmetric Tensor show that: $A_{ij}\delta_{ij} = 0$

$A_{ij}\delta_{ij} = A_{ii} = 0$

$$\begin{cases} A_{ij} = -A_{ji} \\ B_{ij} = B_{ji} \end{cases} \rightarrow A_{ij}B_{ij} = 0$$

$$\rightarrow A_{ij}B_{ij} = -A_{ji}B_{ji} = -A_{mn}B_{mn} = -A_{ij}B_{ij}$$

چون دامی هستند می‌توانیم اندیس‌ها را عوض کنیم

$$\rightarrow 2A_{ij}B_{ij} = 0 \rightarrow \boxed{A_{ij}B_{ij} = 0}$$

ساده سازی مسائل با استفاده از نمادگذاری اندیسی:

مسئله:

$A = T_{ij}T_{ij} - T_{ii}T_{jj}$ یک معادله

$T_i = \sigma_{ij} n_j$ سه معادله

$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}$ نه معادله

مثال: **Example:** Show the indicial notation of $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}$ then find the component of vector $\vec{v}$ by expanding the indicial notation directly

$\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b} \longrightarrow v_k = \varepsilon_{ijk}\, a_i b_j$

جلسه سوم: 91/7/15

Matrices and determinants (2.4)

★ Zero or null matrix

★ diagonal 〃 ماتریسی که غیر از قطر اصلی تمام اعضایش صفر است

★ Unit or identical ماتریس واحد (یا همانی)

★ Transpose of matrix ماتریس ترانهاده: جای سطر و ستون ماتریس A عوض شده است

$$A^T_{ij} = A_{ji}$$

★ Symmetric Matrix ماتریسی که خودش و ترانهاده اش با هم برابر باشند

$$A_{ij} = A_{ji}$$

و یک ماتریس مربعی است

★ Skew symmetric Matrix ماتریس مربعی که

$$A_{ij} = -A_{ji}$$

★ برابری دو ماتریس: دو ماتریس هم مرتبه که درایه‌های نظیر با هم برابر باشند

Identity of two Matrices

Addition or Substraction of two or more matrices

★ جمع یا تفریق دو ماتریس: بایستی دو ماتریس هم مرتبه باشند

$$C = A + B = B + A$$

$$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij} = B_{ij} + A_{ij}$$

$A+(B+C)=(A+B)+C$

Example: Show that the matrix A can be expressed as the sum of a symmetric and anti-symmetric Matrix by the following decomposition

$$A=\frac{A+A^T}{2}+\frac{A-A^T}{2}$$

$B=\frac{A+A^T}{2} \longrightarrow B_{ij}=\frac{A_{ij}+A_{ij}^T}{2}=\frac{A_{ij}+A_{ji}}{2}$

$B_{ji}=\frac{A_{ji}+A_{ji}^T}{2}=\frac{A_{ji}+A_{ij}}{2}$ } $B_{ij}=B_{ji}$ Symmetric متقارن است B_{ij}

$C=\frac{A-A^T}{2} \longrightarrow C_{ij}=\frac{A_{ij}-A_{ij}^T}{2}=\frac{A_{ij}-A_{ji}}{2}$

$C_{ji}=\frac{A_{ji}-A_{ji}^T}{2}=\frac{A_{ji}-A_{ij}}{2}=-\frac{A_{ij}-A_{ji}}{2}$

$\longrightarrow C_{ji}=-C_{ij} \longrightarrow$ anti-Symmetric پادمتقارن C_{ij}

* Multiplation of a matrix by a Sector $\quad [A_{ij}]=A$

$\longrightarrow \lambda A=\lambda[A_{ij}]=[\lambda A_{ij}]$ تمامی درایه‌های A در λ ضرب می‌شوند

* Product of two matrices:

$C=AB$ هنگامی دو ماتریس قابل ضرب هستند که Conformable باشند

pre factor ← → Post Factor

$C_{mk}=A_{m\times n}\,B_{n\times k}$

$C_{ij} = A_{ik} B_{kj}$

$C_{ij} = A_{kj} B_{ik}$ (?)

از لحاظ نوشتاری مشکل ندارد ولی برای محاسبه بهتر است با روابط کلی عوض.

اولین اندیس C بایستی از عضو اول (مولفه) Prefactor

دومین اندیس C بایستی از عضو دوم (مولفه) Postfactor باشد

$\rightarrow AB \neq BA$ (در حالت کلی)

$A(BC) = (AB)C$

$AA = A^2$

$AAA = A^3$

$A^m A^n = A^{m+n}$

$BB = A$?

$B^2 = A \rightarrow B = \sqrt{A} = A^{\frac{1}{2}} \longrightarrow$ جواب یکتایی ندارد (صفحه ۱۴ و ۱۵)

ماتریس هایی که مقادیر ویژه‌اش مثبت باشد

★ Example: Show the following properties for matrices A and B which are arbitrary:

a) $(A+B)^T = A^T + B^T$

b) $(AB)^T = B^T A^T$

c) $IA = AI = A$

$I_{ik} \; a_{kj} =$

a) $C = A + B \rightarrow C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$

$C_{ij}^T = C_{ji} = A_{ji} + B_{ji} \rightarrow C_{ij}^T = A_{ij}^T + B_{ij}^T$

$\rightarrow (A+B)^T = A^T + B^T$

b) $C_{ij} = A_{ik} B_{kj} = A^T_{ki} B^T_{jk} = B^T_{jk} A^T_{ki} = C^T_{ji}$

$\longrightarrow (AB)^T = B^T A^T$

$\rightarrow C^T = B^T A^T$

* Determinant

$$\det A = |A_{ij}| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

minor of det A $|M_{ij}| =$

Cofactor of the element A_{ij} or signed minor

$$A_{ij}^{(c)} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

$$\det A = \varepsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3} = \varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$$

$$\varepsilon_{mnp} \det A = \varepsilon_{ijk} A_{im} A_{jn} A_{kp}$$

* Example: Assuming that matrices A and B are arbitrary

Show that: $\det(AB) = (\det A)(\det B)$

$C = AB \qquad C_{ij} = A_{ik} B_{kj}$

$\det C = \varepsilon_{ijk} C_{i1} C_{j2} C_{k3} = \varepsilon_{ijk} A_{im} B_{m1} A_{jn} B_{n2} A_{kq} B_{q3}$

$= \varepsilon_{ijk} A_{im} A_{jn} A_{kq} \quad B_{m1} B_{n2} B_{q3}$

$\varepsilon_{mnq} \det A \quad B_{m1} B_{n2} B_{q3} = (\det A)(\det B)$

ماتریس وارون (Inverse Matrix) : A^{-1}

$A^{-1}A = AA^{-1} = I$ $\quad\quad$ $AB = I \rightarrow \begin{cases} B = A^{-1} \\ A = B^{-1} \end{cases}$

ماتریس الحاقی (Adjeint matrix) ماتریس الحاقی

$A^{*} = \left[A^{(c)}\right]^{T}$, $A^{-1} = \dfrac{A^{*}}{\det A}$

$\det A = 0 \longrightarrow A$: Singular Matrix

Inverse Matrix: $\quad$ جلسه ششم ۹۱/۷/۱۷

Example: Using the definition of inverse matrix show that:

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ $\quad\quad$ $(AB)B^{-1}A^{-1} = A\underbrace{(BB^{-1})}_{I}A^{-1} = A(I)A^{-1} = AA^{-1} = I$

$(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$

$AAB = I \begin{cases} B = A^{-1} \\ A = B^{-1} \end{cases}$ با توجه به تعریف $\boxed{B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}}$

$AA^{-1} = I \longrightarrow (AA^{-1})^{T} = I^{T} = I$

$\Rightarrow (AA^{-1})^{T} = I \longrightarrow (A^{-1})^{T}A^{T} = I \longrightarrow \boxed{(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}}$

* An orthogonal matrix:

$Q^{-1} = Q^{T}$ $\quad$ Q یک ماتریس اورتوگونال است در صورتی که

$\longrightarrow QQ^{-1} = I$ or $QQ^{T} = I \longrightarrow \det QQ^{T} = \det I$

$\longrightarrow \det Q \det Q^{T} = I$

$\rightarrow \det Q = \det Q^T \rightarrow (\det Q)^2 = 1 \longrightarrow \det Q = \pm 1$

* Representation of a vector and a second order matrix by a column/row and a square matrix

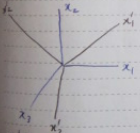
$$\overset{=}{T} \quad [T_{ij}] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ & & \\ T_{31} & \cdot & T_{33} \end{bmatrix} \quad , \quad \{v_i\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

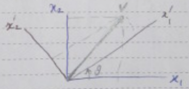
$$\overset{=}{T} \cdot \bar{v} \Rightarrow T_{ij} v_j \,,\; \{u_i\} = [T_{ij}]\{v_j\} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

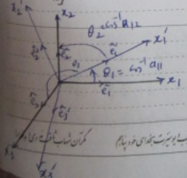
افزایش سرعت محاسبات با استفاده از روش بالا.

(2-5) Transformation of Cartesian Tensors انتقال تانسورهای کارتزین

اگر تانسوری نسبت به $x_1 x_2 x_3$ بیان شود را می‌خواهیم نسبت به $x_1' x_2' x_3'$ بیان نماییم.







معمولاً ارتباط بین سیستم‌های مختصات را می‌دانیم.

$x_1 x_2 x_3$ ، Base vector : $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$

$x_1' x_2' x_3'$ ، " : $\hat{e}_1', \hat{e}_2', \hat{e}_3'$

$a_{11} = \cos\theta_1$

$a_{12} = \cos\theta_2$

$a_{13} = \cos\theta_3$

ارتباط بین Base Vector ها و زوایا :

$$\left.\begin{aligned}
\hat{e}_1' &= a_{11}\hat{e}_1 + a_{12}\hat{e}_2 + a_{13}\hat{e}_3 \longrightarrow \hat{e}_1' = a_{1j}\hat{e}_j \\
\hat{e}_2' &= a_{21}\hat{e}_1 + a_{22}\hat{e}_2 + a_{23}\hat{e}_3 \longrightarrow \hat{e}_2' = a_{2j}\hat{e}_j \\
\hat{e}_3' &= a_{31}\hat{e}_1 + a_{32}\hat{e}_2 + a_{33}\hat{e}_3 \longrightarrow \hat{e}_3' = a_{3j}\hat{e}_j
\end{aligned}\right\} \hat{e}_i' = a_{ij}\hat{e}_j$$

$$\rightarrow \begin{Bmatrix} \hat{e}_1' \\ \hat{e}_2' \\ \hat{e}_3' \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس انتقال}} \begin{Bmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{Bmatrix} \qquad A = [a_{ij}]$$

" Transformation Matrix "

ماتریس های انتقال خواص ماتریس های اورتوگونال را دارند. چرا ؟

$\hat{e}_i' \cdot \hat{e}_j' = \delta_{ij} \rightarrow a_{ip}\hat{e}_p \cdot a_{jq}\hat{e}_q = \delta_{ij}$

$\rightarrow a_{ip}a_{jq}\ \hat{e}_p \cdot \hat{e}_q = \delta_{ij}$

$\rightarrow a_{ip}a_{jq}\delta_{pq} = \delta_{ij} \longrightarrow a_{ip}a_{jp} = \delta_{ij} \rightarrow a_{ip}a^T_{pj} = \delta_{ij}$

$\rightarrow AA^T = I \longrightarrow A^{-1} = A^T$ (Orthogonal)

a_p^T

و برعکس :

$a_{ip}\,\hat{e}_i' = a_{ip}\,a_{ij}\,\hat{e}_j$

$\rightarrow a_{ip}\,\hat{e}_i' = \delta_{pj}\,\hat{e}_j$

$a_{ip}\,\hat{e}_i' = \hat{e}_p \longrightarrow \hat{e}_p = a_{ip}\,\hat{e}_i' \xrightarrow{\text{تعویض}} \hat{e}_i = a_{ji}\,\hat{e}_j'$

$$\boxed{\hat{e}_i = a_{ji}\,\hat{e}_j'}$$

$$\{\hat{e}_i'\}\ \{A_{ij}\}\ \{\hat{e}_j\}$$

به شیوه ماتریسی

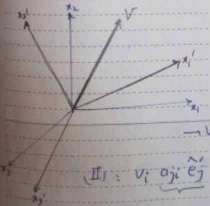
$\hat{e}' = A\,\hat{e} \rightarrow A^T\hat{e}' = A^T A\,\hat{e} \longrightarrow A^T\hat{e}' = \hat{e}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \hat{e}_i' = a_{ij}\,\hat{e}_j & \text{(I)} \\ \hat{e}_i = a_{ji}\,\hat{e}_j' & \text{(II)} \end{array}}$$

A^T

انتقال تانسورها :

۱) بردارها :



$(123)\ \ \vec{V} = v_i\,\hat{e}_i$

$(123)'\ \ \vec{V} = v_i'\,\hat{e}_i'$

$\rightarrow v_i\,\hat{e}_i = v_i'\,\hat{e}_i'$

$\text{(II)}:\ v_i\,\underbrace{a_{ji}\,\hat{e}_j'}_{} = \underbrace{v_i'\,\hat{e}_i'}_{\text{Dummy}}\qquad (\ i \to j:\ v_j'\,\hat{e}_j')$

$(2)\ (\ \cdot e_k \qquad \cdot e_k')$

$\rightarrow v_i a_{ji} \hat{e}'_j = v'_j \hat{e}'_j \rightarrow v'_j = v_i a_{ji}$

$$\boxed{v'_j = a_{ji} v_i}$$

$\bar{v} = v_i \hat{e}_i = v'_j \hat{e}'_j = v'_j a_{ji} e_i$

تمرین: نشان دهید $\boxed{v_i = a_{ji} v'_j}$

$\rightarrow v_i = v'_j a_{ji}$

2) تانسور مرتبه دو (دادیک)

$\bar{U}\bar{V} = \bar{U}\bar{V}$ $\rightarrow u_i v_j \hat{e}_i \hat{e}_j = u'_i v'_j \hat{e}'_i \hat{e}'_j$

$(123) \quad (123)'$

$\rightarrow u'_i v'_j = a_{ip} v_p \, a_{jq} v_q$

$$\boxed{\begin{aligned} u'_i v'_j &= a_{ip} a_{jq} v_p v_q \\ u_i v_j &= a_{pi} a_{jq} v'_p v'_q \end{aligned}}$$

3) تانسور مرتبه دو $\bar{\bar{T}}$

$\bar{\bar{T}} = \bar{\bar{T}}$ $\rightarrow T_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j = T'_{ij} \hat{e}'_i \hat{e}'_j$

$(123) \quad (123)'$

$$\boxed{\begin{aligned} \rightarrow T'_{ij} &= a_{ip} a_{jq} T_{pq} \\ T_{ij} &= a_{pi} a_{qj} T'_{pq} \end{aligned}}$$

$= a_{ip} T_{pq} a_{qj} = A T A^T$

از جمله تانسورهای مرتبه دو تنش و کرنش بوده که خوانده‌ایم:

$\sigma'_{ij} = a_{ip} a_{jq} \sigma_{pq}$

$\sigma'_{ij} = a_{ip} \sigma_{pq} a_{jq}$

$= a_{ip} \sigma_{pq} a^T_{qj} \rightarrow \boxed{\sigma' = A \sigma A^T}$

مرتبه * فضا
برای دو فضایی
(B ...)

$A^T \sigma' A = A^T A \sigma A^T A \longrightarrow \boxed{\sigma = A^T \sigma' A}$

$R'_{ij} = a_{ip}\, a_{jq} \cdots a_{km} \quad R_{pq \cdots m}$

$R_{ij} = a_{pi}\, a_{qj} \cdots a_{mk} \quad R'_{pq \cdots m}$

جلسه هفتم 91/7/22

★ ماتریس های انتقال

Reflection (آینه)

$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

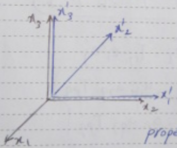
ماتریس transformation

$\det A = -1$

Improper Orthogonal Transformation

Rotation

90 حول محور x_3 ccw



$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

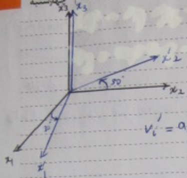
$\det A = 1$

proper orthogonal transformation

$V'_i = \det A\; a_{ij}\, V_j$

$V_i = \det A\; a_{ji}\, V'_j$

Example: Let the primed axes be given a rotation of 30° ccw about x_3 axis. Determine the primed Components of vector V whose Components are $\{v_i\} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$ in Unprimed axes.



$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt3}{2} & \frac12 & 0 \\ -\frac12 & \frac{\sqrt3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det A = 1$

$$v'_i = a_{ij} v_j$$

$$\rightarrow v'_i = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt3}{2} & \frac12 & 0 \\ -\frac12 & \frac{\sqrt3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow v'_i = \begin{Bmatrix} \frac{3+2\sqrt3}{2} \\ \frac{3\sqrt3-2}{2} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Example: Determine the components of the second-order tensor $\bar{\bar{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ for the rotation which expressed in the above example.

Symmetric Matrix

$$T'_{ij} = a_{ip} a_{jq} T_{pq} = a_{ip} T_{pq} a^T_{qj}$$

$$\bar{\bar{T}}' = [T'_{ij}] = A\bar{\bar{T}}A^T \rightarrow [T'_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt3}{2} & \frac12 & 0 \\ -\frac12 & \frac{\sqrt3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt3}{2} & -\frac12 & 0 \\ \frac12 & \frac{\sqrt3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow [T'_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{7+6\sqrt3}{4} & \frac{3\sqrt3+6}{4} & \frac12 \\ \frac{3\sqrt3+6}{4} & \frac{13-6\sqrt3}{4} & \frac{\sqrt3}{2} \\ \frac12 & \frac{\sqrt3}{2} & 5 \end{bmatrix}$$

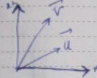
Symmetric Matrix

مقدارهای اصلی و جهت‌های اصلی تانسورهای مرتبه دوم متقارن

Principal Values and principal directions of Symmetric Second-Order tensors

$\bar{\bar{T}} \cdot \vec{u} = \vec{v}$ $\left(\underbrace{v_i = T_{ij} u_j}_{\text{انتقال خطی}} \right)$ عمل خطی ← (بردار را به بردار دیگر می‌برد)

* تانسورهای مرتبه دوم به عنوان عملگرهای خطی در نظر گرفته می‌شوند



در حالتی که [illegible]

if $\vec{u} = \hat{n}$ $\longrightarrow \bar{\bar{T}} \cdot \hat{n} = \lambda \hat{n}$

آنگاه بردار $\vec{n}$ جهت‌های اصلی تانسور مرتبه دوم $\bar{\bar{T}}$ گویند

و به λ نیز مقدار اصلی تانسور مرتبه دوم $\bar{\bar{T}}$ گویند
(یا مقدار ویژه)

Contraction یکسان‌سازی (j)

$\rightarrow \underbrace{T_{ij} n_j}_{\text{Free Index}} = \lambda \underset{\text{free Index}}{n_i} = \lambda \delta_{ij} n_j$

n_j و λ مجهول مسئله هستند.

$\rightarrow T_{ij} n_j - \lambda \delta_{ij} n_j = 0 \rightarrow \underbrace{(T_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_j = 0}_{\text{یک دستگاه معادلات همگن}}$

* $\hat{n}$ بردار یکه است و نمی‌تواند صفر باشد

$n_j \neq 0$

$\rightarrow |T_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

معادله‌ای درجه ۳ از λ
(معادله مشخصه)

در عیش نقد کوش که چون آبخور نماند · آدم بهشت روضه دارالسلام را · ما را بر آستان تو بس حق خدمت است · ای خواجه باز بین به ترحم غلام را

اگر λها نسبت به هم برابر نشوند ← ۳ [illegible] T خواهیم داشت.

مشخصه‌های تانسور → $I_T \quad II_T \quad III_T$

درآیند. $\left\{ \begin{matrix} I_\sigma & II_\sigma & III_\sigma \\ I_\varepsilon & II_\varepsilon & III_\varepsilon \end{matrix} \right.$

تغییرناپذیرهای تانسور T (اسکالرها)

$$\boxed{\lambda^3 - I_T \lambda^2 + II_T \lambda - III_T = 0}$$

$$* \boxed{I_T = T_{ii}} = tr\, \bar{\bar{T}}$$

$$* \boxed{II_T = \frac{1}{2}\left(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji}\right)} = \frac{1}{2}\left[(\text{trace}\, \bar{\bar{T}})^2 - \text{trace}(\bar{\bar{T}}^2)\right]$$

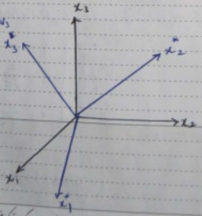
$$* \boxed{III_T = \varepsilon_{ijk} T_{1i} T_{2j} T_{3k}} = \det \bar{\bar{T}}$$

معادله گفته شده حداقل یک ریشه حقیقی (در حالت کلی) دارد ولی چون T متقارن است معادله گفته شده ۳ ریشه حقیقی خواهد داشت. و به ازای هر λ یک جهت اصلی (n) خواهیم داشت

$$T_{ij} n_j^{(q)} = \lambda_{(q)} n_i^{(q)} \qquad n_i^{(q)} n_i^{(q)} = 1$$

* سه راستا برای n بدست می‌آید. و این راستاها بر هم عمود هستند و هر راستا می‌تواند دو بردار یکه ± داشته باشد

به شرطی که سه بردار n یک دستگاه متعامد راستگرد ایجاد کنند



$\hat{n}^{(1)}, n^{(2)}, n^{(3)}$ خود بردارهای یکه

$n_1^{(1)}$ مولفه اول بردار یکه

$$n_j^{(q)} = a_{qj}$$

کسینوس‌های هادی

$$* \quad T^*_{ij} = a_{ip} a_{jq} T_{pq}$$

$$\boxed{\bar{\bar{T}}^* = A \bar{\bar{T}} A^T}$$

$T^{*}_{ij} - ?$

Example: Determine the principal values and directions of the second-tensor $\bar{\bar{T}}$

$\lambda = 4, 5, -1$

$$\bar{\bar{T}} = [T_{ij}] = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

جلسه هشتم 91/1/24

جواب شکل

$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = T_{ii})$

$\lambda_{(1)} = 5$

$\lambda_{(2)} = 4$

$\lambda_{(3)} = -1$

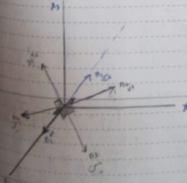
$$\hat{n}^{(1)} = \begin{Bmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\hat{n}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \end{Bmatrix}$$

$$\hat{n}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \mp \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \end{Bmatrix}$$

باید جواب ها طوری انتخاب شوند که سیستم راستگرد باشد

انتخاب دوتای اولی مشکلی ندارد ولی در انتخاب سومی بایستی از قانون دست راست تبعیت کرد



$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

(کنترل ضرب داخلی هر دو سطر و هر دو ستون)

$T^{*}_{ij} = a_{ip}\, a_{jq}\, T_{pq} \rightarrow [T^{*}_{ij}] = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

* خواص تانسور مرتبه دو متقارن (Symmetric)

$\bar{\bar{T}}^{-1}$ (λها معکوس می‌شوند اما nها بدون تغییری مانند)

TQ و QT (مقادیر ویژه و جهت ویژه یکسان دارند)

positive (negative) definite :

اگر تمام λها مثبت باشند positive

" " λ " منفی " negative

اگر یکی از λها صفر و بقیه دیگر مثبت باشند Semi Positive (negative) definite

" " " " " " منفی باشند

Tensor field , Tensor Calculus (2-7)

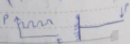
تانسوری که تابع مکان و زمان باشد را Tensor field گوییم.

$\underbrace{T_{ij\cdots k}}_{\text{هر مرتبه ای می تواند باشد}} (\vec{x}, t)$

$\begin{cases} T_{ijk\cdots n}(x_1, x_2, x_3, t) \\ T_{ij\cdots k}(x_i, t) \end{cases}$

(جریان پایدار یا غیر پایدار آب داخل لوله)

(اعمال یک ارتعاش / بارگذاری متناوب)



* مشتق گیری از Tensor field

$\frac{\partial}{\partial t} T_{ij\cdots k}(\vec{x}, t)$ نسبت به زمان

$\frac{\partial T_{ij\cdots k}(\vec{x}, t)}{\partial x_q}$ نسبت به مکان ، $\partial_q T_{ij\cdots k}(\vec{x}, t)$

شیوه نگارش اندیسی نیز هست

$\partial_q = \frac{\partial}{\partial x_q}$

$\partial_{mn} = \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_n}$

نمادگذاری دیگر $T_{ij\cdots k}(\vec{x},t)_{,q}$ ($,q$)

$,qq \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x_q^2}$ ، $,qp \left(\frac{\partial^2}{\partial x_q \partial x_p}\right)$

φ (مرتبه صفر) $\varphi_{,i} = \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial x_i}}_{\text{مرتبه یک}}$

(مرتبه یک) v_i $\quad v_{i,j} = \underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial x_j}}$

تانسور مرتبه دوم (دو تا Free Index دارد)

(مرتبه دو) T_{ij} $\quad \partial T_{ij,k} = \underbrace{\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}}$

تانسور مرتبه سوم

(مرتبه یک) $x_i \longrightarrow x_{i,j} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_1}\hat{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\hat{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\hat{e}_3 =$$

$$= \partial_i \hat{e}_i = \hat{e}_{,i}$$

$\vec{\nabla}\phi = \text{grad}\,\phi \qquad \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \text{ or } \partial_i \phi \text{ or } \phi_{,i}\right)$

$\vec{\nabla}\vec{V} \rightarrow V_{j,i}$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = V_{i,i}$ $\qquad \nabla^2 \rightarrow ,_{ii}$

$= \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}) - \nabla^2\vec{V}$

$\vec{\nabla}_i \times \vec{V}_j \rightarrow \varepsilon_{ijk} V_{k,j}$

Using Indicial notation show the following identities: مثال

a) $\operatorname{div}(\operatorname{curl}\vec{V}) = 0$

b) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}) - \nabla^2 \vec{V}$

a) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{V}) = 0$

$\vec{\nabla}\times\vec{V} \Rightarrow \underbrace{\varepsilon_{ijk} V_{k,j}}_{i:\ \text{free index}} \rightarrow \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{V}) = (\varepsilon_{ijk} V_{k,j})_{,i}$

[illegible]

$= \partial_i \, \varepsilon_{ijk} V_{k,j}$

$= \dfrac{\partial}{\partial x_i} \varepsilon_{ijk} V_{k,j}$

$= \varepsilon_{ijk} V_{k,ji}$

★ Tensor filed را پیوسته و دارای مشتق پیوسته در نظر بگیریم.

$\rightarrow V_{k,ji} = V_{k,ij}$ (Symmetric)

ε_{ijk} (anti Symmetric)

ضرب $= 0$

[illegible]

b) $\vec{\nabla}\times(\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{V}}_{\varepsilon_{ijk} V_{k,j}}) = \varepsilon_{mni}(\varepsilon_{ijk} V_{k,j})_{,n} = \varepsilon_{mni}\varepsilon_{ijk} V_{k,jn}$

$= \varepsilon_{mni}\varepsilon_{jki} V_{k,jn} = (\delta_{mj}\delta_{nk} - \delta_{mk}\delta_{nj}) V_{k,jn}$

$= \delta_{mj}\delta_{nk} V_{k,jn} - \delta_{mk}\delta_{nj} V_{k,jn} = \delta_{mj} V_{k,jk} - \delta_{mk} V_{k,jj}$

$= V_{k,mk} - V_{m,jj} = V_{k,km} - V_{m,jj}$

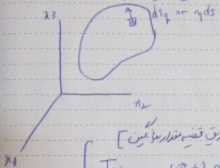
Integral theorem of Gauss and Stokes

قضایای گوس و استوکس (2-8)

dS_q or

حجم پوشیده شده توسط یک سطح:

تبدیل انتگرال گیری از یک تانسور روی حجم به روی سطح و برعکس (قضیه گوس)



جلسه نهم

تبدیل انتگرال روی سطح به انتگرال روی حجم: [اثبات از طریق قضیه مقدار میانگین]

$$\int_S T_{ij\cdots k}(\vec{x},t)\, dS_q = \int_V T_{ij\cdots k}(\vec{x},t)_{,q}\, dV$$

$$\int_S T_{ij\cdots k}(\vec{x},t)\, n_q\, dS =$$

λ: تانسور مرتبه صفر باشد. [دما، انرژی و ...]

$$\int_S \lambda n_q\, ds = \int_S \lambda_{,q}\, dv \quad , \quad \int_S \lambda \hat{n}\, ds = \int_V \overrightarrow{\text{grad}}\,\lambda\, dv$$

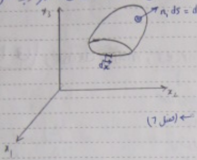
$$\int_S v_q n_q\, ds = \int_V v_{q,q}\, dv \quad , \quad \int_S \vec{v}\cdot\hat{n}\, ds = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{v}\, dv$$

$$\int_S \varepsilon_{ijk} v_k n_j\, ds = \int \varepsilon_{ijk} v_{k,j}\, dv \quad , \quad \int \hat{n}\times\vec{v}\, ds = \int_V \vec{\nabla}\times\vec{v}\, dv$$

رونق عهد شباب است دگر بستان را　می‌رسد مژده گل بلبل خوش الحان را　ای صبا گر به جوانان چمن بازرسی　خدمت ما برسان سرو و گل و ریحان را

۷ بدون ادرنین بیاد عمر است.

★ قضیه استوکس : انتگرال روی یک سطح را به روی یک منحنی بسته انتقال می دهد (و برعکس)



$$\int_S \hat{n}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{v})\,ds = \int_C \vec{v}\cdot d\vec{x}$$

(فصل ۲) ← $$\int_S n_i\,\varepsilon_{ijk}\,v_{k,j}\,ds = \int_C v_k\,dx_k$$

جلسه دهم ۹۱/۸/۱

«فصل سوم»

stress Priciples

3.1) Body and Surface Forces , mase density

3.2) Cauchy stress principle

3-3) The stress Tensor

3-4) Force and moment equilibrium , stress Tensor symmetry

3-5) Stress Transformation Law

3.6) principal stresses, principal stress directions

3.7) Maximus and minimum stress value

3.8) Mohr's Circles for stress

3-9) planes stress

3.10) Deviator and spherical stress state

3.11) octahedral shear stress

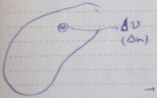
Body and Surface forces, mass density $\boxed{(3.1)}$

Body: نیروی که به تمام ذرات جسم وارد می‌شود و معمولاً در حجم وارد می‌شوند (نیروهای وزن ـ مغناطیسی) (b_i یا P_i)

Surface forces: معمولاً در سطح تماس در جسم ایجاد می‌شود. " f_i "

b نیروی وارد بر واحد جرم است.

P_i . . . . . حجم است.



$$\rho_{ave} = \frac{\Delta m}{\Delta v}$$

$$\rho(\bar{x}, t) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta v} = \frac{dm}{dv}$$

تغییر با مکان و زمان

مانند: حرکت بار در نازل

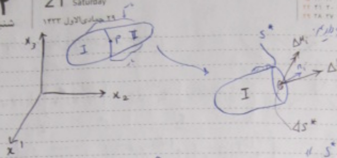
$$\boxed{\rho b_i = P_i}$$

(در این درس از بارهای گسترده و گسترده و رهای گسترده استفاده می‌کنیم (بار متمرکز و گشتاور متمرکز نداریم)

Cauchy stress Principle $\boxed{(3.2)}$

از نقطه P بی‌نهایت صفحه می‌توانیم عبور دهیم. صفحه‌ای عبور می‌دهیم که حجم مورد نظر را به دو قسمت I و II تقسیم می‌کند

نیروهای که صفحه قطع شده داریم



n_i بردار یکه عمود بر S^*

$$\lim_{\Delta s^* \to 0} \frac{\Delta f_i}{\Delta s^*} = \frac{df_i}{ds^*} = t_i^{(\hat{n})}$$

t_i → Traction (or Stress Vector - برداری)

i: جهت را نشان می دهد

$\hat{n}$: صفحه‌ای را که بردار Traction وارد می‌شود را نشان می دهد.

t_i در هر راستایی می تواند باشد (الزاماً هم جهت با $\hat{n}$ نخواهد بود)

$$\lim_{\Delta s^* \to 0} \frac{\Delta M_i}{\Delta s^*} = 0$$

★ در مواد Polar این مقدار صفر نخواهد بود.

در این جا در مورد مواد غیر Polar بحث می کنیم و مقدار بالا صفر خواهد بود

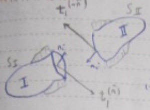
★ حال کل محیط پیوسته فوق را در نظر می گیریم

بارهای گسترده سطحی همان Traction هستند

برآیند نیروهای سطحی

$$\boxed{\int_S t_i^{(\hat{n})}\, ds + \underbrace{\int_V \rho b_i\, dv}_{\text{برآیند کل نیروهای حجمی}} = \underbrace{\frac{d}{dt}\int_V \rho\, v_i\, dv}_{\text{تغییر مومنتوم خطی}}}$$

برای جسم در حال تعادل طرف سمت راست صفر خواهد بود.



* جسم را دو پاره در حال Cutting در نظر می‌گیریم

برای جسم I: $\int_{S_I} t_i^{(\hat n)} ds + \int_{S^*} t_i^{(\hat n)} ds^* + \int_{V_I} \rho b_i dv = \frac{d}{dt}\int_{V_I} \rho v_i dv$

برای جسم II: $\int_{S_{II}} t_i^{(\hat n)} ds + \int_{S^*} t_i^{(-\hat n)} ds^* + \int_{V_{II}} \rho b_i dv = \frac{d}{dt}\int_{V_{II}} \rho v_i dv$

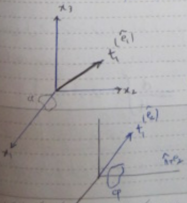
$$\int_{S^*} t_i^{(\hat n)} ds + \int_{S^*} t_i^{(-\hat n)} ds = 0 \to \int (t_i^{(\hat n)} + t_i^{(-\hat n)}) ds = 0$$

$$\to dt_i^{(\hat n)} + dt_i^{(-\hat n)} = 0 \to \boxed{t_i^{\hat n} = -t_i^{(-\hat n)}}$$

The Stress Tensor (3.3)

اگر Cutting Plane را در جهت‌های خاص در نظر بگیریم داریم:

ابتدا اگر این صفحه را عمود بر محور x_1 در نظر بگیریم:



در حالت کلی: $t^{(\hat e_1)} = t_1^{(\hat e_1)} \hat e_1 + t_2^{(\hat e_1)} \hat e_2 + t_3^{(\hat e_1)} \hat e_3$

$$t^{(\hat e_2)} = t_1^{(\hat e_2)} \hat e_1 + t_2^{(\hat e_2)} \hat e_2 + t_3^{(\hat e_2)} \hat e_3$$

$$t^{(\hat e_3)} = t_1^{(\hat e_3)} \hat e_1 + t_2^{(\hat e_3)} \hat e_2 + t_3^{(\hat e_3)} \hat e_3$$

$$\longrightarrow t^{(\hat{e}_1)} = t_j^{(\hat{e}_1)} \hat{e}_j$$

$$\longrightarrow t^{(\hat{e}_2)} = t_j^{(\hat{e}_2)} e_j$$

$$t^{(\hat{e}_3)} = t_j^{(\hat{e}_3)} \hat{e}_j$$

$$\longrightarrow t^{(\hat{e}_i)} = t_j^{(\hat{e}_i)} e_j$$

$t_j^{(\hat{e}_i)} \longrightarrow$ تانسور تنش $\longrightarrow \boxed{t_j^{(\hat{e}_i)} = \sigma_{ij}}$

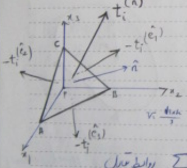
(j) جهت (i) سطح وارده

$t_i^{(\hat{e}_j)} = \sigma_{ji}$

$i = j$ تنش های عمود

$i \neq j$ تنش های برشی

★ صفحه را طوری قطع می دهیم که هرم ایجاد کند. دنبال روابط بین Traction موجود روی سطح مایل هرم و تنش های وارده بر سطوح دیگر هستیم.



$\hat{n}$ بردار سطح ABC است.

مقدار مجهول $t_i^{(\hat{n})} = ?$

مقادیر معلوم $t_i^{(\hat{e}_1)}, t_i^{(\hat{e}_2)}, t_i^{(\hat{e}_3)}, \hat{n}$

هرم در حال تعادل است.

روابط تعادل $\sum f_i = 0$

$$\frac{ds_i}{ds} = n_i \qquad t_i^{(\hat{n})} ds + (-t_i^{(\hat{e}_1)} ds_1) + (-t_i^{(\hat{e}_2)} ds_2) + (-t_i^{(\hat{e}_3)} ds_3) + \rho b_i \frac{h}{3} ds = 0$$

$$\xrightarrow{\div ds} t_i^{(\hat{n})} = + t_i^{(e_1)} n_1 + t_i^{(e_2)} n_2 + t_i^{(e_3)} n_3$$

$$\rightarrow t_i^{(\hat{n})} = t_i^{(\hat{e}_j)} n_j$$

Cauchy Stress Formula

$$\boxed{t_i^{(\hat{n})} = \sigma_{ji} n_j}$$

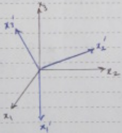
روابط تنش کوشی

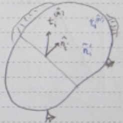
$$\rightarrow \boxed{\vec{t}^{(\hat{n})} = \hat{n} \cdot \overline{\overline{\sigma}}}$$

جلسه یازدهم ۹۱/۲/۴

Example: Using stress Vector and Cauchy Stress Formula, show that $\sigma_{sr} = a_{js} a_{ir} \sigma'_{ji}$ where σ_{sr} are Components of stress in unprimed Cordinates and σ'_{ji} are Components of stress in primed Cordinates.

دو بردار در دستگاه‌های
متفاوت هیچ تفاوتی با هم ندارند
معادل





$$\vec{t}^{(\hat{n})} = \vec{t}'^{(\hat{n}')}$$

$$\Rightarrow t_i^{(\hat{n})} \hat{e}_i = t_j'^{(\hat{n}')} \hat{e}_j'$$

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j' = a_{ji}$$

(primed :اندیس اول
unprimed :اندیس دوم)

طرفین را در $\hat{e}_q$ ضرب داد

$$t_i^{(\hat{n})} \hat{e}_i \cdot \hat{e}_q = t_j'^{(\hat{n}')} \hat{e}_j' \cdot \hat{e}_q$$

$$\rightarrow t_i^{(\hat{n})} \delta_{iq} = t_j'^{(\hat{n}')} a_{jq} \rightarrow t_q^{(\hat{n})} = t_j'^{(\hat{n}')} a_{jq}$$

$\rightarrow \sigma_{pq} n_p = \sigma'_{rj} n'_r a_{jq}$

$\star\ n'_r = a_{rp} n_p$

به جای p از هر اندیس دیگری می‌توانستیم استفاده کنیم
ولی استفاده از p یک مرحله کار ما را ساده می‌کند

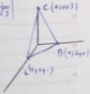
$\rightarrow \sigma_{pq} n_p = \sigma'_{rj} a_{rp} a_{jq} n_p$

$\rightarrow (\sigma_{pq} - \sigma'_{rj} a_{rp} a_{jq}) n_p = 0 \rightarrow \boxed{\sigma_{pq} = \sigma'_{rj} a_{rp} a_{jq}}$

Example: If the components of stress of point P given in matrix form $[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 8 \end{bmatrix}$ (MPa), Calculate:
σ_{ji}

1) The stress vector on octahedral plane. $\hat{n} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt3} \\ \frac{1}{\sqrt3} \\ \frac{1}{\sqrt3} \end{Bmatrix}$ صفحه‌ای که زوایای برابر دارد

2) " " " " plane ABC



$t_i^{(\hat n)} = \sigma_{ji} n_j = n_j \sigma_{ji} = \hat{n} \cdot \bar{\bar{\sigma}}$

$\rightarrow \{t_i^{(\hat n)}\} = \frac{1}{\sqrt3} [1\ \ 1\ \ 1] \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt3} [12\ \ 5\ \ 10]$

★ اگر نقطه P جهت مختلف بدهیم آیا تانسور تنش یکسان خواهد بود؟ از نظر عددی خیر / اگر برای تنش‌های اصلی و جهات (اصلی)

2) اگر $\hat{n}$ را به دست آوریم:

$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = D$

$x_1 + B'x_2 + C'x_3 = D'$

(سه نقطه)

$\begin{cases} D' = +1 \\ B' = \frac{1}{2} \\ C' = \frac{1}{3} \end{cases}$

$N \Rightarrow \vec{v} = \hat{e}_1 + \frac{1}{2}\hat{e}_2 + \frac{1}{3}\hat{e}_3$

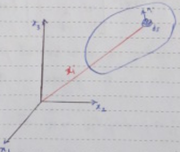
$\longrightarrow \hat{n} = \dfrac{6\hat{e}_1 + 3\hat{e}_2 + 2\hat{e}_3}{7}$

$\Rightarrow t_i^{(\hat{n})} = n_j \sigma_{ji} \Rightarrow \begin{bmatrix} t_1^{(\hat{n})} & t_2^{(\hat{n})} & t_3^{(\hat{n})} \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 8 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 48 & 28 & 31 \end{bmatrix}$

$\left[\dfrac{\sqrt{48^2+28^2+31^2}}{7} = 9.09 \;,\; \dfrac{\sqrt{12^2+3^2+10^2}}{\sqrt{3}} \right]$ اندازه‌ها در حالت کلی نباید با هم برابر باشند

Force and moment equilibrium, stress tensor symmetry. $\boxed{(3.4)}$



or. $n_i\, ds = ds_i$

$\star\ \Sigma f = 0$

کلی تعادل داریم:

$\int_S t_i^{(\hat{n})}\, ds + \int_V \rho b_i\, dv = 0$

$\rightarrow \int_S \sigma_{ji} n_j\, ds + \int_V \rho b_i\, dv = 0$

$\int_S \sigma_{ji} n_j\, ds = \int_V \sigma_{ji,j}\, dv$

$dv =$

$$-\int_v \sigma_{ji,j}\, dv + \int_v \rho b_i\, dv = 0 \to \int_v (\sigma_{ji,j} + \rho b_i)\, dv = 0$$

در فضای سه بعدی ۳ معادله دارد (Free i)

$$\boxed{\sigma_{ji,j} + \rho b_i = 0}$$

$$\Sigma M_i = 0 \to \Sigma \vec{M} = 0$$

گشتاور نیروهای سطحی و حجمی باید محاسبه شود

$$\int_s \bar{x} \times \bar{t}^{(n)}\, ds = \int_s \varepsilon_{ijk} x_j t_k^{(n)}\, ds =$$

$$\int_v \bar{x} \times \rho \bar{b}\, dv = \int_v \varepsilon_{ijk} x_j \rho b_k\, dv$$

$$\to \int_s \varepsilon_{ijk} x_j t_k^{(n)}\, ds + \int_v \varepsilon_{ijk} x_j \rho b_k\, dv = 0$$

$$\to \int_s \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{pk} n_p\, ds + \int_v \varepsilon_{ijk} x_j \rho b_k\, dv = 0$$

$$\to \int_v (\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{pk})_{,p}\, dv + \int_v \varepsilon_{ijk} x_j \rho b_k\, dv = 0$$

$$\to \int_v \varepsilon_{ijk} x_{j,p} \sigma_{pk}\, dv + \int_v \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{pk,p}\, dv + \int_v \varepsilon_{ijk} x_j \rho b_k\, dv = 0$$

$$\int_v \varepsilon_{ijk} x_{j,p} \sigma_{pk}\, dv + \int_v \varepsilon_{ijk} x_j (\sigma_{pk,p} + \rho b_k)\, dv = 0$$

$$\Rightarrow \int_V \varepsilon_{ijk}\,\delta_{jp}\,\underbrace{\sigma_{pk}}_{\sigma_{jk}}\,dV = 0 \rightarrow \varepsilon_{ijk}\sigma_{jk} = 0 \rightarrow \underbrace{\sigma_{jk} = \sigma_{kj}}$$

تانسور تنش سیمتریک (متقارن) است.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \longrightarrow t_i^{(\hat{n})} = \sigma_{ji} n_j = \sigma_{ij} n_j$$

$$\longrightarrow \boxed{\vec{t}^{(n)} = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \hat{n}}$$

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = 0 \rightarrow \vec{\nabla}\cdot\bar{\bar{\sigma}} + \rho\vec{b} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\sigma_{ij,j} + \rho b_i = 0} \longrightarrow \boxed{\bar{\bar{\sigma}}\cdot\vec{\nabla} + \rho\vec{b} = 0}$$

Stress Transformation Law (3.5)

در نقطه P المان مکعبی داریم ابتدا در امتدادات $x_1x_2x_3$ و می‌خواهیم در امتدادات $x_1'x_2'x_3'$ تنش‌ها را بنویسیم

$$\sigma'_{ij} = a_{ip}a_{jq}\sigma_{pq} \rightarrow \sigma'_{ij} = a_{ip}\sigma_{pq}a^T_{qj}$$

$$\sigma_{ij} = a_{pi}a_{qj}\sigma'_{pq} = a^T_{ip}\sigma'_{pq}a_{qj}$$

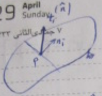
$$\Rightarrow \boxed{\bar{\bar{\sigma}}' = A\sigma A^T}$$

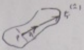
$$\boxed{\bar{\bar{\sigma}} = A^T\sigma' A}$$

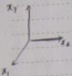
Example: The stress components in unprimed axes are given by

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix} (\text{MPa})$$

If the primed axes obtained by a rotation 30° cw about x_1, find the stress components σ'_{ij}







جلسه دوازدهم

جهت هایی از برش زدن وجود دارد که $\hat{n}_i$ و $t_i^{(\hat{n})}$ هم جهت می‌شوند

$$\Rightarrow t_i^{(\hat{n})} = \sigma \hat{n}_i$$

σ: مقدار ویژه (مجهول)

n_i: بردار ویژه (مجهول)

از فرمول کوشی داریم $\longrightarrow \sigma_{ij} n_j = \sigma n_i = \delta_{ij} \sigma n_j$

$$\rightarrow \sigma_{ij} n_j - \sigma \delta_{ij} n_j \longrightarrow (\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_j = 0$$

$$\rightarrow |\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} \sigma_{11}-\sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}-\sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow \sigma^3 - I_\sigma \sigma^2 + II_\sigma \sigma - III_\sigma = 0 \quad (*)$$

تغییرناپذیرها (اعداد حقیقی)

$$\left\{ \begin{array}{l} I_\sigma = \sigma_{ii} = \text{trace}\, \bar{\bar{\sigma}} \\ II_\sigma = \frac{1}{2}[\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}] = \frac{1}{2}\left[(\text{trace}\, \bar{\bar{\sigma}})^2 - \text{trace}\, \bar{\bar{\sigma}}^2\right] \\ III_\sigma = \epsilon_{ijk}\sigma_{i1}\sigma_{j2}\sigma_{k3} = \det \bar{\bar{\sigma}} \end{array} \right.$$

معادله (*) حتما یک جواب حقیقی دارد

می‌خواهیم نشان دهیم اگر $\bar{\bar{\sigma}}$ متقارن باشد حتما سه ریشه حقیقی دارد

روش: $\sigma_{(1)}$ جواب حقیقی معادله بالا خواهد بود و $\hat{n}_{(1)}$ نیز جهت اصلی مربوطه آن می‌باشد

$$\begin{vmatrix} \sigma'_{11}-\sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_{22}-\sigma & \sigma'_{33} \\ 0 & \sigma'_{32} & \sigma'_{33}-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

از تقارن $\bar{\bar{\sigma}}$ داریم $\leftarrow \sigma'_{23} = \sigma'_{32}$

$$\rightarrow \underbrace{(\sigma_{(1)}-\sigma)}_{\text{یکی از جواب‌ها}}\left[(\sigma'_{22}-\sigma)(\sigma'_{33}-\sigma)-(\sigma'_{23})^2\right]$$

$$\longrightarrow (\sigma'_{22}-\sigma)(\sigma'_{33}-\sigma)-\sigma'^{2}_{23}=0$$

$$\longrightarrow \sigma^2-(\sigma'_{22}+\sigma'_{33})\sigma+\sigma'_{22}\sigma'_{33}-\sigma'^{2}_{23}=0$$

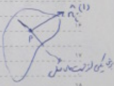
$$\rightarrow \Delta=(\sigma'_{22}+\sigma'_{33})^2-4(1)(\sigma'_{22}\sigma'_{33}-\sigma'^{2}_{23})=0$$

$$=(\sigma'_{22}-\sigma'_{33})^2+4\sigma'^{2}_{23}\geqslant 0 \longrightarrow$$

مقادیر ویژه حقیقی خواهند بود

* اگر این ریشه‌ها حقیقی و متفاوت باشند می‌خواهیم نشان دهیم جهت‌های اصلی مربوط به آنها نیز بر هم عمود هستند.

جواب‌ها $\begin{cases}\sigma_{(1)}\\ \sigma_{(2)}\\ \sigma_{(3)}\end{cases}$ $(\sigma_{(1)}\neq\sigma_{(2)}\neq\sigma_{(3)})$



$$\begin{cases} t_i^{(\hat{n}^{(1)})}=\sigma_{(1)}n_i^{(1)} \\ \sigma_{ji}n_j^{(1)}=\sigma_{(1)}n_i^{(1)} \quad \times \mathrm{I} \end{cases} \qquad \begin{cases} t_i^{(\hat{n}^{(2)})}=\sigma_{(2)}n_i^{(2)} \\ \sigma_{ji}n_j^{(2)}=\sigma_{(2)}n_i^{(2)} \quad \times \mathrm{I} \end{cases}$$

ضرب داخلی

$$\begin{cases} \mathrm{I}\times n_i^{(2)}: & \sigma_{ji}n_i^{(2)}n_j^{(1)}=\sigma_{(1)}n_i^{(2)}n_i^{(1)} \\ \mathrm{I}\times n_i^{(1)}: & \sigma_{ji}n_i^{(1)}n_j^{(2)}=\sigma_{(2)}n_i^{(1)}n_i^{(2)} \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{تعویض اندیس}}$

تعویض اندیس $\begin{cases} \sigma_{ij}n_i^{(1)}n_j^{(2)}=\sigma_{(1)}n_l^{(1)}n_l^{(2)} \\ \sigma_{ji}n_j^{(1)}n_i^{(2)}=\sigma_{(2)}n_l^{(1)}n_l^{(2)} \end{cases}$

طرف‌های دوم هم برابر هستند → $\sigma_{(1)} n_i^{(1)} n_i^{(2)} = \sigma_{(2)} n_i^{(1)} n_i^{(2)}$

$\to [\sigma_{(1)} - \sigma_{(2)}] n_i^{(1)} n_i^{(2)} = 0 \to n_i^{(1)} n_i^{(2)} = 0 \to n_i^{(2)}, n_i^{(1)}$ بر هم عمود هستند

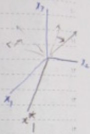
حالت‌های خاص:

می‌خواهیم وضعیت جهت‌های اصلی را تعیین کنیم.

اگر $\begin{cases} \sigma_{(1)} \to \hat{n}^{*}_1 \text{ مشخص است} \\ \sigma_{(2)} = \sigma_{(3)} \end{cases}$

→ هر جهت عمود بر x_1^* نشان‌دهنده جهت‌های اصلی

متناظرا $\sigma_{(2)}$ و $\sigma_{(3)}$ خواهند بود (بی‌شمار جهت بدست می‌آید)



اگر $\{ \sigma_{(1)} = \sigma_{(2)} = \sigma_{(3)}$ → بی‌شمار جواب دارد (فشار هیدرواستاتیک)

هر صفحه‌ای در نقطه P زده شود جهت‌های اصلی را نشان خواهد داد (تفاوتی ندارد)

می‌خواهیم نشان دهیم

$\sigma^*_{ij} = a_{ip} a_{jq} \sigma_{pq} \qquad \sigma^*_{pq} = a_{pi} a_{qj} \sigma_{ij}$

صفحاتی داریم که یکی از جهت‌های اصلی عمود باشد

$t_i^{(\hat{n})} = \sigma_{ij} n_j$

یکی از جهت‌های اصلی

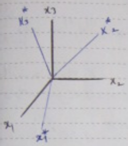
$\to t_i^{(\hat{n}^{(q)})} = \sigma_{ji} \underbrace{n_j^{(q)}}_{a_{qj}} = \sigma_{(q)} \underbrace{n_i^{(q)}}_{a_{qi}}$

$\to \sigma_{ji} a_{qj} = \sigma_{(q)} a_{qi}$

$\xrightarrow{\times a_{pi}} \sigma_{ji} a_{pi} a_{qj} = \sigma_{(q)} a_{qi} a_{pi} = \sigma_{(q)} \delta_{pq}$

$\to \sigma^*_{pq} = \sigma_{(q)} \delta_{pq}$

ماتریس σ^*_{pq} قطری است



$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$$[\sigma_{ij}^*] = \begin{bmatrix} \sigma_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{I} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} I_\sigma = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} \\ II_\sigma = \sigma_I \sigma_{II} + \sigma_I \sigma_{III} + \sigma_{II} \sigma_{III} \\ III_\sigma = \sigma_I \sigma_{II} \sigma_{III} \end{cases}$$

Example: The stress tensor of a point p given by

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 40 & 25 & 0 \\ 25 & 90 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix} (MPa)$$

Find principal values and principal directions and stress invariants.

$$|\sigma_{ij} - \delta_{ij}\lambda| = \begin{vmatrix} 40-\lambda & 25 & 0 \\ 25 & 90-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 50-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow (50-\lambda)\left[(40-\lambda)(90-\lambda) - 25^2\right] = 0 \quad \begin{cases} \lambda = 50 \\ \lambda_{(2)}^{(1)} = 100.35 \\ \lambda_{(3)} = 29.65 \end{cases}$$

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{(9)}\delta_{ij})\, n_j^{(9)} = 0 \;\rightarrow\; \begin{bmatrix} 40-100.35 & 25 & 0 \\ 25 & 90-100.35 & 0 \\ 0 & 0 & 50-100.35 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1^{(2)} \\ n_2^{(2)} \\ n_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\bigstar\; n_1^{(2)^2} + n_2^{(2)^2} + n_3^{(2)^2} = 1$$

$$\longrightarrow \hat{n}^{(2)} = [\pm 0.38 \,,\, \pm 0.92 \,,\, 0]$$

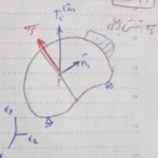
$n_1^{(1)}, n^{(2)}, n^{(3)}$ ← به جای استفاده ← σ_{ij} ← σ'_{ij} (تبدیل؟)

جلسه سیزدهم 91/8/15

Maximums and Minimum stress Values (3.7)

$$\sigma_N = t_i^{(\hat{n})} n_i = \sigma_{ij} n_j n_i$$

$$\sigma_S^2 = |t^{(\hat{n})}|^2 - \sigma_N^2$$



شرط $\bigstar\; n_i n_i = 1$

ضرایب لاگرانژ $\quad f(n_i) = \sigma_{ij} n_j n_i - \lambda(n_i n_i - 1)$

$$\rightarrow \frac{\partial f(n_i)}{\partial n_k} = \sigma_{ij}\frac{\partial n_i}{\partial n_k} n_j + \sigma_{ij} n_i \frac{\partial n_j}{\partial n_k} - 2\lambda \frac{\partial n_i}{\partial n_k} n_i = 0$$

$$= \sigma_{ij}\delta_{ik} n_j + \sigma_{ij} n_i \delta_{jk} - 2\lambda \delta_{ik}$$

Fnt

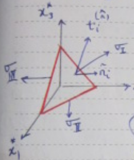
$$= 2\sigma_{ij}\delta_{jk} n_i - 2\lambda n_i \delta_{ik} = 2\sigma_{ik} n_i - 2\lambda n_i \delta_{ik}$$

$$\longrightarrow (\sigma_{ik} - \lambda\delta_{ik})\, n_i = 0$$

حال می‌خواهیم ببینیم تنش برشی حداقل و حداکثر در کدام صفحه اتفاق می‌افتد.

ابتدا تنش‌های اصلی را در فضای (*) با سیستم مختصات unprime انتقال می‌دهیم

چون در فضای (*) ما مولفه تنش برشی نداریم (ماتریس تنش قطری است) $\sigma_I , \sigma_{II} , \sigma_{III}$



(*) فضای

① $\sigma_N = t_i^{(\hat n)} n_i = \sigma_{ij} n_j n_i = n_i \sigma_{ij} n_j$

$$= [n_1 \ n_2 \ n_3] \begin{bmatrix} \sigma_I & \cdot & \cdot \\ \cdot & \sigma_{II} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \sigma_{III} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2$$

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \Rightarrow \begin{Bmatrix} t_1^{(\hat n)} \\ t_2^{(\hat n)} \\ t_3^{(\hat n)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_I & \cdot & \cdot \\ \cdot & \sigma_{II} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \sigma_{III} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_1 \sigma_I \\ n_2 \sigma_{II} \\ n_3 \sigma_{III} \end{Bmatrix}$$

② $\sigma_S^2 = |t^{(\hat n)}|^2 - \sigma_N^2$

$$\rightarrow \sigma_S^2 = \sigma_I^2 n_1^2 + \sigma_{II}^2 n_2^2 + \sigma_{III}^2 n_3^2 - (\sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2)^2$$

(n ها)

$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ ③

دو متغیر مستقل بیشتر نداریم

$n_3^2 = 1 - n_1^2 - n_2^2$ از حذف n_3 داریم

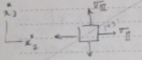
$$\rightarrow \sigma_S^2 = (\sigma_I^2 - \sigma_{III}^2) n_1^2 + (\sigma_{II}^2 - \sigma_{III}^2) n_2^2 + \sigma_{III}^2 - [(\sigma_I - \sigma_{III}) n_1^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III}) n_2^2 + \sigma_{III}]^2$$

$$\frac{\partial \sigma_S^2}{\partial n_1} = n_1 (\sigma_I - \sigma_{III}) \{ \sigma_I - \sigma_{III} - 2[(\sigma_I - \sigma_{III}) n_1^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III}) n_2^2] \} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_s^2}{\partial n_2} = n_2(\sigma_I - \sigma_{III})\left\{\sigma_I - \sigma_{III} - 2\left[(\sigma_I - \sigma_{III})n_1^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})n_2^2\right]\right\}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} n_1 = n_2 = 0 \\ n_3 = \pm 1 \end{cases} \longrightarrow$$

یکی از این جواب‌ها حاصل صفحات اصلی می‌باشند.



$$\begin{cases} n_1 = 0 \\ n_2 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ n_3 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \qquad \sigma_s = \pm \frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2}$$

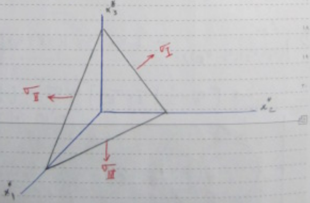
$(n_3, n_2, n_1$
های بدست آمده
با پیش به صفحات
مستقل unprime

$$\begin{cases} n_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ n_2 = 0 \\ n_3 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \qquad \sigma_s = \pm \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}$$

$$\begin{cases} n_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ n_2 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ n_3 = 0 \end{cases} \qquad \sigma_s = \pm \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}$$

$\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$

$(\sigma_s)_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{III})$



روابط در مختصات *

Mohr's cricles for stress

(3-8)

$$\begin{cases} \sigma_N = \sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2 \\ \sigma_S^2 = \sigma_I^2 n_1^2 + \sigma_{II}^2 n_2^2 + \sigma_{III}^2 n_3^2 - (\sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2)^2 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \end{cases} \qquad (\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III})$$

اگر به صورت هندسی بخواهیم به مسئله نگاه کنیم به کمک دایره مور داریم:

از حل معادلات بالا برای n_1^2 و n_2^2 و n_3^2 داریم:

$$n_1^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_{II})(\sigma_N - \sigma_{III}) + \sigma_S^2}{(\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{III})} \quad (1)$$

σ_I و σ_{II} و σ_3 معلوم

$$n_2^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_{III})(\sigma_N - \sigma_I) + \sigma_S^2}{(\sigma_{II} - \sigma_{III})(\sigma_{II} - \sigma_I)}$$

σ_N و σ_S توابعی از n ها هستند

$$n_3^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_I)(\sigma_N - \sigma_{II}) + \sigma_S^2}{(\sigma_{III} - \sigma_I)(\sigma_{III} - \sigma_{II})}$$

فرض! $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$

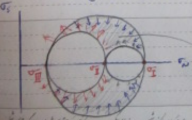
$$(1) \begin{cases} n_1^2 \geq 0 \\ (\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{III}) > 0 \end{cases} \rightarrow (\sigma_N - \sigma_{II})(\sigma_N - \sigma_{III}) + \sigma_S^2 \geq 0 \quad (*)$$

$$\rightarrow \left[\sigma_N - \tfrac{1}{2}(\sigma_{II} + \sigma_{III})\right]^2 + \sigma_S^2 = \left[\tfrac{1}{2}(\sigma_{II} - \sigma_{III})\right]^2$$

$+n_1^2(\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{III})$

معادله دایره اول

در کل سه دایره داریم.

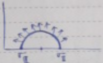


جواب‌ها روی مرزهای دوایر و درون سطح هاشور خورده خواهند بود

جلسه چهاردهم 91/8/20

$$\begin{cases} \sigma_N = \sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2 \\ \sigma_N^2 + \sigma_S^2 = \sigma_I^2 n_1^2 + \sigma_{II}^2 n_2^2 + \sigma_{III}^2 n_3^2 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \end{cases}$$

$$(*) \xrightarrow{n_1^2=0} \left(\sigma_N - \frac{\sigma_{II}+\sigma_{III}}{2}\right)^2 + \sigma_S^2 = \left(\frac{\sigma_{II}-\sigma_{III}}{2}\right)^2 \qquad (x-a)^2 + y^2 = R^2$$

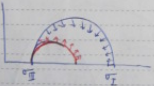


$$n_1^2 > 0 \rightarrow \left(\sigma_N - \frac{\sigma_{II}+\sigma_{III}}{2}\right)^2 + \sigma_S^2 = \left(\frac{\sigma_{II}-\sigma_{III}}{2}\right)^2 + \underbrace{n_1^2(\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{III})}$$

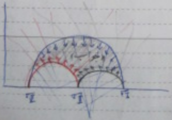
جمله‌ای که شعاع را افزایش می‌دهد (بستگی به مقدار n دایره‌های بیشماری داریم.

σ_S مثبت و σ_S منفی در طراحی علامت شان مهم نیست. از حال فقط نصف دایره‌ها را در نظر می‌گیریم.

$n_2=0 \rightarrow$
$n_2>0$



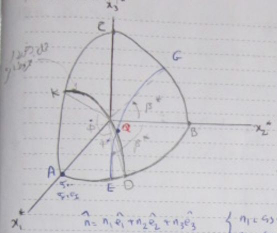
$n_3=0$
$n_3>0$

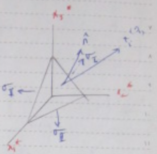


* تو در تو شود بی‌شمار دایره داریم

هر صفحه‌ای زده شود جواب در محدوده جواب شکل زیر است و در محدوده هاشور خورده قرار می‌گیرد

①





$\hat{n} = n_1\hat{e}_1 + n_2\hat{e}_2 + n_3\hat{e}_3$

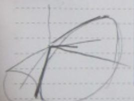
$$\begin{cases} n_1 = \cos\phi^* \\ n_2 = \cos\beta^* \\ n_3 = \cos\gamma^* \end{cases}$$

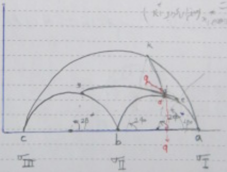
مکان هندسی

می‌خواهیم نقطه مورد نظر (جواب) را روی قسمت هاشور خورده پیدا کنیم

$A \to B\ (90^\circ)$
$a \to b\ (90^\circ)$

$A \longrightarrow a$
$B \longrightarrow b$
$C \longrightarrow c$





تمام صفحاتی که روی این کمان هستند n_1 مشخصی دارند

مجموعه صفحاتی که n_1 مشخص دارند / مجموعه‌ای که با ϕ^* زاویه
محل برخورد با کره ← کمان KD

روی کره $A \xrightarrow{\phi^*} D \longrightarrow B$

روی دایره $a \xrightarrow{2\phi^*} D \longrightarrow B$

اگر به مرکز bc و شبیه آن d دارای نرم h را هم حل خواهد کرد

• حل مجموعه صفحی که n_2 مشخص دارند [مانند n_1] ← کمان EG ایجاد می‌شود.

$B \xrightarrow{\beta^*} G \longrightarrow C$

$b \xrightarrow{2\beta^*} g \longrightarrow c$

$B \xrightarrow{\beta^*} E \longrightarrow A$

$b \xrightarrow{2\beta^*} e \longrightarrow a$

حل چند صفحه داریم که n_1 مشخص و n_2 مشخص دارند ← یک صفحه داریم.

Q: حل تقاطع

Example: The stress tensor for a point is given by

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 40 & 25 & 0 \\ 25 & 90 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}$$

a) Determine the stress vector on a plane whose unit normal vector is $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_3)$

b) Determine the normal component, σ_N and shear component, σ_S of the stress vector

c) Verify the validity of results obtained in (b) by mohr's circle construction.

a) $t_i = \sigma_{ij} n_j$

$$\begin{Bmatrix} t_1^{(\hat{n})} \\ t_2^{(\hat{n})} \\ t_3^{(\hat{n})} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 25 & 0 \\ 25 & 90 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{65}{\sqrt{3}} \\ \frac{115}{\sqrt{3}} \\ \frac{50}{\sqrt{3}} \end{Bmatrix}$$

b) $\sigma_N = \sigma_{ij} n_j n_i$ or $= t_i^{(\hat{n})} n_i = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 65 & 115 & 50 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 76.67\,MPa$

$\sigma_S^2 = |\vec{t}^{(\hat{n})}|^2 - \sigma_N^2 \Rightarrow \sigma_S = \pm 27.78$

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma_I = 100.35 \\ \sigma_{II} = 50 \\ \sigma_{III} = 29.65 \end{array}\right. \xrightarrow{\text{تنش‌های اصلی}} \text{جهت‌های اصلی} \longrightarrow \text{جهت‌های اصلی در } {}^*$$

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 0.38 & 0.92 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.92 & -0.38 & 0 \end{bmatrix}$$

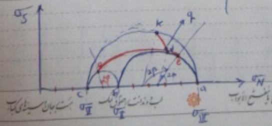
$$\rightarrow n_i^* = a_{ij} n_j \qquad \begin{Bmatrix} n_1^* \\ n_2^* \\ n_3^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.38 & 0.92 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.92 & -0.38 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

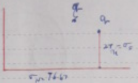
$$\begin{Bmatrix} n_1^* \\ n_2^* \\ n_3^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1.3}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{0.54}{\sqrt{3}} \end{Bmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow \cos\phi^* \\ \longleftarrow \cos\beta^* \\ \longleftarrow \cos\alpha^* \end{array}$$

$$\hat{n}^* = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1.3\hat{e}_1^* + \hat{e}_2^* + 0.54\hat{e}_3^*\right)$$

$\frac{1.3}{\sqrt{3}} = \cos\phi$

$$\left\{\begin{array}{l} \phi = 41.36^\circ \\ \beta = 54.73^\circ \end{array}\right.$$



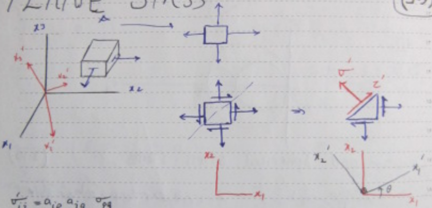


جلسه پانزدهم 91/8/22

وقتی یکی از تنش های اصلی صفر باشد حالت تنش صفحه‌ای داریم (روی سطح جسم معمولاً تنش صفحه‌ای داریم)

PLANE Stress

(3.9)



$$\sigma'_{ij} = a_{ip}\, a_{jq}\, \sigma_{pq}$$

$$[\sigma'_{ij}] = [a_{ip}][\sigma_{pq}][a_{jq}]^T$$

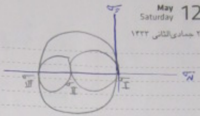
فرض $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$

در صفحه
$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تنش صفحه‌ای
$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_I = 0 \\ \sigma_{II} = 0 \\ \sigma_{III} = 0 \end{array} \right.$$

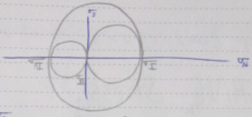
$\sigma_{I} = 0$ →

$\Rightarrow \sigma_{II}, \sigma_{III} < 0$



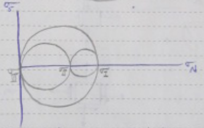
$\sigma_{II} = 0$

$\sigma_{I} > 0 , \sigma_{III} < 0$ →



$\sigma_{III} = 0$

$\sigma_{I}, \sigma_{II} > 0$ →

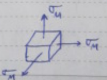


Deviator and Spherical stress state (3-10)

انحراف

★ انواع تنش هایی که روی جسم وجود دارد می توانند سبب تغییر شکل و تغییر حجم شوند.

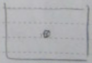
$$\sigma_M = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = \frac{\sigma_{ii}}{3}$$



$$\sigma_{ij} = \sigma_M \, \delta_{ij}$$

$$\rightarrow [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_M & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_M & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_M \end{bmatrix}$$

سیال ساکن



$\sigma_M = -P_0$ ← فقط تغییر حجم - تغییر شکل نداریم ← هر مقطع بر تنیم مقطع اصلی است

دایره مور آن فقط یک نقطه است

گفتم ای سلطان خوبان رحم کن بر این غریب ❀ گفت در دنبال دل ره گم کند مسکین غریب
گفتمش مگذر زمانی گفت معذورم بدار ❀ خانه پرورده‌ای چه تاب آرد غم چندین غریب
ولادت حضرت زهرا سلام‌الله علیها و روز زن - تولد حضرت امام خمینی (ره) رهبر کبیر انقلاب اسلامی (۱۳۲۰ هـ ق)

تنش‌های انحرافی تنش‌هایی هستند که باعث تغییر حجم المان نمی‌شوند اما باعث تغییر شکل المان می‌شوند.

$$\text{تنش‌های انحرافی} \longrightarrow S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_M = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\frac{\sigma_{KK}}{3}$$

Symmetric Sym Sym

تانسور تغییر حجم + تانسور تنش انحرافی = تانسور تنش

مجموع تنش‌های عمودی آن صفر است پس تغییر حجم ایجاد نمی‌کند $S_{ii} = 0 \longrightarrow$

پس یک تانسور تنش مرتبه دو است و دارای مقادیر اصلی و جهات اصلی می‌باشد

$$|S_{ij} - S\,\delta_{ij}| = 0 \longrightarrow S^3 + II_S\, S - III_S = 0 \qquad (I_S = S_{ii} = 0)$$

$$II_S = -\frac{1}{2} S_{ij} S_{ji} = S_I S_{II} + S_I S_{III} + S_{II}\sigma_{III}$$

$$III_S = \det S = S_I S_{II} S_{III}$$

$$\xrightarrow{\text{جهت اصلی}} (S_{ij} - S_{(q)}\delta_{ij})\, n_j^{(q)} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{به عبارتی}} \left[(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_M - S_{(q)}\delta_{ij})\, n_j^{(q)} = 0 \right]$$

جهت‌های اصلی σ_{ij} و S_{ij} یکی است
مقادیر اصلی S_{ij} را با کم کردن σ_M از
مقادیر اصلی σ_{ij} بدست می‌آید.

$$\longrightarrow \left[(\sigma_{ij} - (\sigma_M + S_{(q)})\delta_{ij})\, n_j^{(q)} = 0 \right]$$

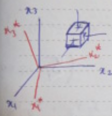
تجزیه تنسور

Example: Decompose the stress tensor, σ_{ij} to it's deviatoric and spherical portions and determine the deviatoric stress portions principals:

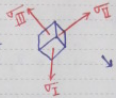
$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & -23 & 28 \\ 0 & 28 & 10 \end{bmatrix} \qquad [S_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11}-\sigma_M & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}-\sigma_m & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}-\sigma_m \end{bmatrix}$$

Octahedral Shear Stress

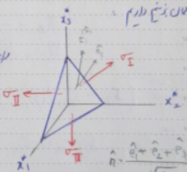
(3-11)



$\Rightarrow$



اگر صفحه‌ی Octahedral را روی این المان بزنیم داریم:



در این صفحه به دنبال σ_N و σ_S هستیم

$$\sigma_N = t_i^{(\hat{n})} n_i$$

$$\sigma_S^2 + \sigma_N^2 = |t^{(\hat{n})}|^2$$

$$t_i^{(\hat{n})} = \sigma_{ij} n_j$$

$$\hat{n} = \frac{\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_3}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{Bmatrix} t_1^{(\hat{n})} \\ t_2^{(\hat{n})} \\ t_3^{(\hat{n})} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \\ \sigma_{III} \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow \sigma_N = \frac{1}{\sqrt{3}} [\sigma_I \quad \sigma_{II} \quad \sigma_{III}] \times \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}}{3}$$

$$\sigma_s^* = \sqrt{\frac{\sigma_I^2+\sigma_{II}^2+\sigma_{III}^2}{3} - \left(\frac{\sigma_I+\sigma_{II}+\sigma_{III}}{3}\right)^2}$$

$$\rightarrow \sigma_s = \tau_{oct} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_I-\sigma_{II})^2+(\sigma_I-\sigma_{III})^2+(\sigma_{II}-\sigma_{III})^3}$$

روابط با تنش ون مایسز

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{S_I^2+S_{II}^2+S_{III}^2}{3}} = \sqrt{\frac{-2\, II_s}{3}}$$

اثبات: $(S_I+S_{II}+S_{III})^2 = 0$

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\sigma_{mn}} = \delta_{im}\delta_{jn}$$ (تانسورهای متقارن)

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$$

۱۰

$\delta\ \delta\ \delta\ \delta$

جلسه شانزدهم
91/8/27

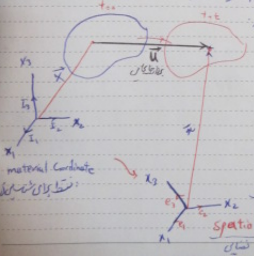
«فصل چهارم»

chapter 4: Kinematics of deformation and motion

«سینماتیک تغییر شکل و حرکت»

دیدگاه های
- لاگرانژی: روی ذره تمرکز می کند
- اویلری: روی حجم کنترل تمرکز می کند

این دو دیدگاه، روابطی نیز باهم دارند.



$\bar{x} = \bar{x}(\bar{X}, t)$

کاملاً یک ذره مشخص: $\bar{x} = \bar{x}(\bar{X}^p, t)$

x: بیان موقعیت ذرات مختلف در زمان مختلف

$\vec{u}$: بردار جابجایی (۴) جابجایی ذره در زمان های مختلف: دیدگاه لاگرانژی $\{\bar{u} = \bar{u}(\bar{X}, t)$

جابجایی ذره ای که در لحظه در موقعیت $\vec{x}$ قرار گرفته است. دیدگاه اویلری $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$

سرعت ذره در زمان های مختلف $\vec{v} = \vec{v}(\vec{X}, t)$ لاگرانژی

سرعت ذره ای که الان در موقعیت $\vec{x}$ قرار دارد $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t)$ اویلری

موقعیت های مختلف یک ذره در طول زمان $\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t)$

$\vec{X} = \vec{X}(\vec{x}, t)$ (ذره های مختلف در یک موقعیت در زمان های مختلف)

می دانیم: در این موقعیت و در این زمان کدام ذره قرار گرفته است

* ساختار یک به یک بین $\vec{x}$ و $\vec{X}$:

ژاکوبین تبدیل $J = \left|\frac{\partial x}{\partial X}\right| > 0$

فهرست

4.1) Particles, Configuration, deformation and motion

4.2) Material and Spetial Coordinates

4.3) Lagrangian and Eulerian descriptions

4.4) The displacement field

*4.5) The Material derivative

(Continuum 2) 4.5, 4.8, 4.9

4.6) Deformation gradients, finite strain tensor

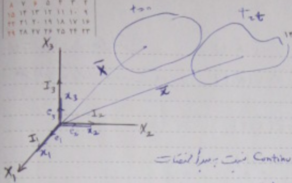
4.7) Infinite Small deformation theory

*4.8) Stretch ratio

*4.9) Rotation tensor, stretch tensor

4.10) Velocity gradients, rate of deformation, vorticity

4.11) material derivative of line elements, area and volume.



$\boxed{(4.1)}$

ذره: Particle

Configuration: موقعیت Continuum نسبت به مبدأ مختصات

deformation: جابجایی Configurationها

حرکت صلب: ذرات نسبت به هم جابجا نشوند

تغییر شکل: ذرات نسبت به هم جابجا شوند (تغییر ابعاد)

motion: توالی Configurationها در زمان‌های مختلف

(t=0): refrential Configuration

t=t₁ در لحظهٔ: current "

Material and Spetial Coordinates $\boxed{(4.2)}$

با آن ذرات را می‌شناسیم ولی نسبت به زمان تغییر نمی‌کند

$\bar{X}$

برای بیان موقعیت ذرات مختلف از آن استفاده می‌کنیم

$\vec{x}$

Lagrangian and Eulerian descriptions $\boxed{(4.3)}$

ذره را به عنوان مرجع قرار می‌دهیم.

$\left\{\begin{array}{l}\vec{v}(\bar{X},t)\\ \bar{a}(\bar{X},t)\\ \rho(\bar{X},t)\\ \bar{X}(\bar{X},t)\end{array}\right.$

موقعیت را به عنوان مرجع قرار می‌دهیم

$\left\{\begin{array}{l}\vec{v}(\vec{x},t)\\ \bar{a}(\vec{x},t)\\ \rho(\vec{x},t)\\ \bar{x}(\vec{x},t)\end{array}\right.$

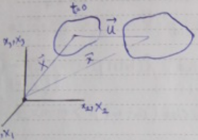
$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t)$$

$$\boxed{\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, 0) = \vec{X}} \leftarrow$$ درصورت تناظر یک به یک بین دو مختصات

همیشه باید چک کنیم

$$\boxed{J = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}} \right| = \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right| > 0}$$

باید چک شود



جلسه هجدهم - 91/8/29

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t)$$

$$\vec{x}_1 = \vec{x}_1(\vec{X}, t)$$

$$\vec{x}_1 = x_1(x_A, t)$$

$$\begin{cases} \vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t) \\ \vec{X} = \vec{X}(\vec{x}, t) \end{cases}$$

لاگرانژی: $\vec{u}(\vec{X}, t) = \vec{x}(\vec{X}, t) - \vec{X}$

اویلری: $\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{x} - \vec{X}(\vec{x}, t)$: بدست خواهد شد

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}$$

$$\vec{v}(\vec{X}, t) = \frac{d}{dt}\vec{u}(\vec{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\vec{u}(\vec{X}, t) = \frac{\partial \vec{x}(\vec{X}, t)}{\partial t}$$

$$\vec{a}(\vec{X}, t) = \frac{d\vec{v}(\vec{X}, t)}{dt} = \frac{\partial \vec{v}(\vec{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{u}(\vec{X}, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{x}(\vec{X}, t)}{\partial t^2}$$

$$\begin{cases} v_i(\vec{X}, t) = \dfrac{\partial u_i(\vec{X}, t)}{\partial t} \\ a_i(\vec{X}, t) = \dfrac{\partial v_i(\vec{X}, t)}{\partial t} \end{cases}$$

Example: The motion of a body is given by

$$\begin{cases} x_1(\vec{X},t) = X_1 \cos t \\ x_2(\vec{X},t) = X_2(\sin t + 1) \\ x_3(\vec{X},t) = X_3 \end{cases}$$

a) show that the Jacobian doesn't vanish at $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$

b) velocity and acceleration field

c) The path of the particle located $\vec{X}(1,1,1)$

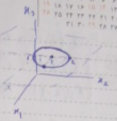
a) $$J = \frac{\partial x_i}{\partial X_A} = \begin{vmatrix} \cos t & 0 & 0 \\ 0 & \sin t + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos t(\sin t + 1) > 0$$

b) $$\begin{cases} v_1(\vec{X},t) = \dfrac{\partial x_1(\vec{X},t)}{\partial t} = -X_1 \sin t \\ v_2(\vec{X},t) = \dfrac{\partial x_2(\vec{X},t)}{\partial t} = X_2 \cos t \\ v_3(\vec{X},t) = \dfrac{\partial x_3(\vec{X},t)}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1(\vec{X},t) = \dfrac{\partial v_1(\vec{X},t)}{\partial t} = -X_1 \cos t \\ a_2(\vec{X},t) = \dfrac{\partial v_2(\vec{X},t)}{\partial t} = -X_2 \sin t \\ a_3(\vec{X},t) = \dfrac{\partial v_3(\vec{X},t)}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

c) $$\vec{X}(1,1,1) \xrightarrow[\text{spatial}]{} \begin{cases} x_1 = \cos t \\ x_2 = 1 + \sin t \\ x_3 = 1 \end{cases} \quad \rightarrow \begin{matrix} x_1^2 = \cos^2 t \\ (x_2 - 1)^2 = \sin^2 t \\ x_3 = 1 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1^2 + (x_2 - 1)^2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$



- $\vec{x} = \chi(\vec{X}, t) \rightarrow \vec{X} = \chi^{-1}(\vec{x}(\vec{X}, t), t)$

$\rightarrow \vec{v} = \vec{v}(\vec{X}, t) = \vec{v}\left(\chi^{-1}(\vec{x}(\vec{X}, t), t)\right) = \vec{v}^*(\vec{x}, t)$

Example: For a continuum body, it's motion is described by material coordinates.
Determine velocity and acceleration in both material and spatial description.

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(\vec{X}, t) = X_1 + (1 - e^t) X_3 \\ x_2 = X_2 e^t + X_3 t \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

باید چک کنیم که حرکت امکان پذیر است یا نه؟

$$t=0 \begin{cases} x_1 = X_1 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

$$J = \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_A} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 - e^t \\ 0 & e^t & t \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = e^t > 0$$

حرکت امکان پذیر است.

سرعت مادی
$$\begin{cases} V_1 = -e^t X_3 \\ V_2 = X_2 e^t + X_3 \\ V_3 = 0 \end{cases}$$

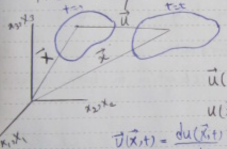
شتاب مادی
$$\begin{cases} a_1(\vec{X}, t) = -X_3 e^t \\ a_2(\vec{X}, t) = X_2 e^t \\ a_3(\vec{X}, t) = 0 \end{cases}$$

اویلری
$$\begin{cases} X_1(\vec{x},t) = x_1 - (1-e^{t})x_3 \\ X_2(\vec{x},t) = e^{-t}x_2 - x_3 t e^{-t} \\ X_3(\vec{x},t) = x_3 \end{cases}$$

تشریح: در نقطه‌ای خاص از فضا و در زمان مشخص t کدام ذره قرار گرفته است

$$\begin{cases} v_1(\vec{x},t) = -x_3 e^{t} \\ v_2(\vec{x},t) = x_2 + (1-t)x_3 \\ v_3(\vec{x},t) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1(\vec{x},t) = -e^{t}x_3 \\ a_2(\vec{x},t) = x_2 - x_3 t \\ a_3(\vec{x},t) = 0 \end{cases}$$

The displacement field : $\boxed{(4.4)}$



$$\vec{u} = \vec{x} - \vec{X}$$

$$\vec{u}(\vec{X},t) = \vec{x}(\vec{X},t) - \vec{X}$$

$$u(\vec{x},t) = \vec{x} - \vec{X}(\vec{x},t)$$

$$\vec{v}(\vec{X},t) = \frac{du(\vec{X},t)}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{u}(\vec{X},t)$$

$$\vec{a}(\vec{X},t) = \frac{d\vec{v}(\vec{X},t)}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{v}(\vec{X},t)$$

Example: for the above example, obtain the displacement field in both material and spatial descriptions.

به یک کرشمه که نرگس به خودفروشی کرد فریب چشم تو صد فتنه در جهان انداخت
شراب خورده و خوی کرده می‌روی به چمن که آب روی تو آتش در ارغوان انداخت

جلسه 18 - 91/9/14

The material deriviative

(4.5)

تانسور در دو دیدگاه (لاگ، اویلر)

$$\begin{cases} P_{ij\cdots}(\vec{X},t) \\ P_{ij\cdots}(\vec{x},t) \end{cases}$$

می‌خواهیم مشتق مادی (کامل) این تانسور را بدست آوریم (Material derivative)

$$\frac{d}{dt}P_{ij\cdots}(\vec{X},t) = \frac{\partial}{\partial t}P_{ij\cdots}(\vec{X},t)$$

در ریاضیات داشتیم $F(x(t), y(t), z(t), t) \longrightarrow df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt$

$$\longrightarrow \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$P_{ij\cdots}(\vec{x}(\vec{X},t),t)$$

$$\longrightarrow \frac{d}{dt}P_{ij\cdots}(\vec{x},t) = \frac{\partial P_{ij\cdots}(\vec{x},t)}{\partial t} + \frac{\partial P_{ij\cdots}(\vec{x},t)}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial P_{ij\cdots}(\vec{x},t)}{\partial t} + \frac{\partial P_{ij\cdots}(\vec{x},t)}{\partial x_k}v_k$$

در تانسور

$$\frac{d\square}{dt} = \frac{\partial\square}{\partial t} + \frac{\partial\square}{\partial x_k}v_k = \frac{\partial\square}{\partial t} + \vec{v}_k\cdot\vec{\nabla}\square$$

در سیالات اسمش شتاب $\vec{a}(\vec{x},t) = \frac{d}{dt}v_i(\vec{x},t) = \frac{\partial v_i(\vec{x},t)}{\partial t} + v_k\frac{\partial v_i(\vec{x},t)}{\partial x_k}$

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}$$

Example: The motion of a continuum body in material description given by

$$\begin{cases} x_1(\vec{X},t) = X_1 + (1-e^{-t})X_3 \\ x_2 = X_2 e^{t} + X_3 t \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

Determine velocity components in spatial coordinates by using displacement field which is expressed in terms of spatial coordinates.

$$\begin{cases} u_1(\vec{x},t) = (1-e^{-t})x_3 \\ u_2 = -x_2(e^{-t}-1) + x_3 t e^{-t} \\ u_3 = 0 \end{cases}$$

$$v_i(x,t) = \frac{d}{dt} u_i(\vec{x},t) + v_k \frac{\partial u_i(\vec{x},t)}{\partial x_k}$$

$i=1$ $\quad v_1 = -e^{t}x_3 + (v_1 \times 0 + v_2 \times 0 + v_3(1-e^{-t}))$

$i=2$ $\quad v_2 = x_2 e^{-t} + x_3 e^{-t} - x_3 t e^{-t} + (v_1 \times 0 + v_2(1-e^{-t}) + v_3 t e^{-t})$

$i=3$ $\quad v_3 = 0$

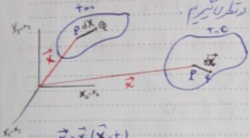
$$\rightarrow \begin{cases} v_1(x,t) = -x_3 e^{t} \\ v_2 = x_2 + x_3(1-t) \\ v_3 = 0 \end{cases}$$

Deformation gradient, finite strain tensor $\boxed{(4.6)}$

کرنش گرین $\varepsilon_G = \dfrac{L^2 - L_0^2}{2L_0^2}$ $\qquad$ $\varepsilon_A = \dfrac{L^2 - L_0^2}{2L^2}$

با کرنش‌هایی مواجه می‌شویم که قبلاً با آنها سروکار نداشته‌ایم.

دو وضعیت اولیه و ثانویه را برای یک محیط پیوسته در نظر می‌گیریم.



المان خطی dX را در وضعیت اولیه در نظر می‌گیریم

(Q انتهای المان خطی است)

$\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t)$

$\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, c) = \vec{x}(\vec{X})$

$d\vec{x} = \dfrac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}} d\vec{X}$ $\qquad$ $dx_i = \underbrace{\dfrac{\partial x_i}{\partial X_A}} dX_A$

deformation gradient : F_{iA}

تانسور مرتبه دو : تانسور گرادیان تغییر شکل

(بحث ماتریسی در تکرار نیست) $\Rightarrow$ $\boxed{dx_i = F_{iA}\, dX_A}$ $\qquad$ $\boxed{d\vec{x} = \bar{\bar{F}} \cdot d\vec{X}}$ Symbolic

$\left|\dfrac{\partial x_i}{\partial X_A}\right| \neq 0$ برای امکان‌پذیر بودن حرکت

و برعکس داریم:

$d\vec{X} = \dfrac{\partial \vec{X}}{\partial \vec{x}} d\vec{x}$

$dX_A = \dfrac{\partial X_A}{\partial x_i} dx_i \quad \rightarrow dX_A = F_{Ai}^{-1} dx_i \qquad d\vec{X} = \bar{\bar{F}}^{-1} \cdot d\vec{x}$

$$dx^2 - dX^2 = dx_i\,dx_i - dX_A\,dX_A$$

داشتیم $dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_A} dX_A$

$$\rightarrow dx^2 - dX^2 = \frac{\partial x_i}{\partial X_A}\frac{\partial x_i}{\partial X_B} dX_A\,dX_B - dX_A\,dX_B\,\delta_{AB}$$

$$= dX_A(\underbrace{F_{iA}F_{iB}}_{C_{AB}} - \delta_{AB})\,dX_B$$

C_{AB} : Green's deformation tensor تانسور تغییر [illegible]

$$\begin{cases} F^T_{Ai}F_{iB} = C_{AB} \\ \bar{\bar{F}}^T\cdot\bar{\bar{F}} = C \end{cases}$$

تعریف $\boxed{\bar{\bar{E}} = \frac{\bar{\bar{C}} - \bar{\bar{I}}}{2}}$ E: Green's Strain
(Lagrange =)

$2\bar{\bar{E}} = \bar{\bar{C}} - \bar{\bar{I}}$ $\left(2E_{AB} = C_{AB} - I_{AB} = F_{iA}F_{iB} - \delta_{AB}\right)$

$$\rightarrow dx^2 - dX^2 = dX_A(2E_{AB})\,dX_B$$ (تانسور کرنش =)

$$= d\bar{X}\cdot 2\bar{\bar{E}}\cdot d\bar{X}$$

برحسب متغیرهای فضایی (spatial) داریم:

$$dX_A = \frac{\partial X_A}{\partial x_i} dx_i = F^{-1}_{Ai}\,dx_i$$

$$\rightarrow dx^2 - dX^2 = dx_i\,dx_i - dX_A\,dX_A = dx_i\,dx_j\,\delta_{ij} - \frac{\partial X_A}{\partial x_i}\frac{\partial X_A}{\partial x_j} dx_i\,dx_j$$

$$= dx_i\,(\delta_{ij} - F^{-1}_{Ai}F^{-1}_{Aj})\,dx_j$$

غیرخطی

$$\frac{\partial X_A}{\partial x_i}\frac{\partial X_A}{\partial x_j} = F^{-1}_{Ai} F^{-1}_{Aj} = c_{ij}$$: تانسور کرنش کوشی

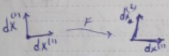
یا Cauchy deformation tensor
(تانسور مرتبه دو متقارن)

$$\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{F}}^{-1} \cdot \bar{\bar{F}}^{T}$$

تعریف: تانسور کرنش محدود اویلر $\boxed{\bar{\bar{e}} = \frac{I - \bar{\bar{c}}}{2}}$ $\rightarrow \boxed{2e_{ij} = \delta_{ij} - c_{ij}}$

$$\rightarrow dx^2 - dX^2 = dx_i \, 2e_{ij} \, dx_j$$

$$= \vec{dx} \cdot 2\bar{\bar{e}} \cdot \vec{dx}$$



★ اگر $\bar{\bar{E}} = 0$ باشد چه اتفاقی می افتد؟

$$\vec{dx}^{(1)} \cdot dx^{(2)} = \bar{\bar{F}} \cdot \vec{dX}^{(1)} \cdot \bar{\bar{F}} \cdot \vec{dX}^{(2)} = \vec{dX}^{(1)} \cdot \bar{\bar{F}}^{T} \cdot \bar{\bar{F}} \cdot \vec{dX}^{(2)}$$

$$= \vec{dX}^{(1)} (2\bar{\bar{E}} + \bar{\bar{I}}) \vec{dX}^{(2)} = \vec{dX}^{(1)} \cdot \vec{dX}^{(2)}$$

زوایای بین اجزا بدون تغییر می ماند.

$$u_i = x_i - X_i \rightarrow x_i = u_i + X_i$$

$$\rightarrow \frac{\partial x_i}{\partial X_A} = \frac{\partial u_i}{\partial X_A} + \frac{\partial X_i}{\partial X_A} = u_{i,A} + \delta_{iA}$$

$$\rightarrow 2E_{AB} = C_{AB} - \delta_{AB} = x_{i,A} x_{i,B} - \delta_{AB} = (u_{i,A} + \delta_{iA})(u_{i,B} + \delta_{iB}) - \delta_{AB}$$

$$= u_{B,A} + u_{A,B} + u_{i,A} u_{i,B}$$

$$\rightarrow 2E_{AB} = u_{A,B} + u_{B,A} + u_{i,A}u_{i,B}$$

$$= \frac{\partial u_A}{\partial X_B} + \frac{\partial u_B}{\partial X_A} + \frac{\partial u_i}{\partial X_A}\frac{\partial u_i}{\partial X_B}$$

$A=1 \rightarrow x$

$B=2 \rightarrow y \quad \rightarrow \quad 2E_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial u_x}{\partial y}$

$$+ \frac{\partial u_y}{\partial x}\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\frac{\partial u_z}{\partial y}$$

☐ جلسه نوزدهم 91/9/13

Infinite Small deformation theory

(4.77)

در مورد تغییرشکل‌های کوچک بحث خواهیم کرد. (کنترل از ۵۷۵)

در جلسات قبل داشتیم

$$2E_{AB} = u_{A,B} + u_{B,A} + u_{i,A}u_{i,B} \simeq u_{A,B} + u_{B,A}$$

$$2e_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} - u_{A,i}u_{A,j} \simeq u_{i,j} + u_{j,i}$$

$$u_i = x_i - X_i \rightarrow x_i = u_i + X_i \rightarrow \frac{\partial x_i}{\partial X_A} = \frac{\partial u_i}{\partial X_A} + \frac{\partial X_i}{\partial X_A} = \frac{\partial u_i}{\partial X_A} + \delta_{iA}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial X_A} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial X_A} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_A} + \delta_{kA}\right)$$

$$= \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial X_A} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\delta_{kA} \approx \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\delta_{kA} = \boxed{\frac{\partial u_i}{\partial x_A}}$$

در تغییرهای کوچک گرش لاگرانژی و گرش اویلر برابر می‌شوند. $\rightarrow \boxed{\frac{\partial u_i}{\partial X_A} = \frac{\partial u_i}{\partial x_A}}$

$$\rightarrow E_{AB} = e_{ij}\delta_{iA}\delta_{jB} \qquad \rightarrow E_{AB} = e_{ij}$$

آشنایی نه غریب است که دلسوز من است — چون من از خویش برفتم دل بیگانه بسوخت
خرقه زهد مرا آب خرابات ببرد — خانه عقل مرا آتش میخانه بسوخت

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}$$

$$\xrightarrow{i \rightleftharpoons j} \quad 2\varepsilon_{ji} = u_{j,i} + u_{i,j}$$

$$\Big\} \rightarrow \boxed{\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}}$$

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \rightarrow [\varepsilon_{ij}]^{*} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{I} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} \end{bmatrix}$$

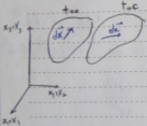
$$\rightarrow I_{\varepsilon} = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{I} + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III}$$

$$II_{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj} - \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji}\right) = \varepsilon_{I}\varepsilon_{II} + \varepsilon_{I}\varepsilon_{III} + \varepsilon_{II}\varepsilon_{III}$$

تانسور مرتبه دوم هستند

$$III_{\varepsilon} = \epsilon_{ijk}\,\varepsilon_{i1}\varepsilon_{j2}\varepsilon_{k3} = \varepsilon_{I}\varepsilon_{II}\varepsilon_{III}$$

به دنبال تغییر اعضای $[\varepsilon_{ij}]$ هستیم :



u_x u
u_y v
u_z w

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$$

$$i=j=1 \rightarrow \varepsilon_{11} = u_{1,1} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(u_{1,2} + u_{2,1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$(dx)^2 - (dX)^2 = dx_i\, 2e_{ij}\, dx_j = dX_A\, 2E_{AB}\, dX_B$$

$$\rightarrow (dx)^2 - dX^2 = dX_A\, 2E_{AB}\, dX_B$$

$dx \rightleftharpoons dX$

$$\rightarrow \left(\frac{dx - dX}{dX}\right)\left(\frac{dx + dX}{dX}\right) = \frac{dX_A}{dX}\, 2E_{AB}\, \frac{dX_B}{dX}$$

$$\hat N = \frac{d\vec X}{dX}$$

$$N_A = \frac{dX_A}{dX}$$

$$\rightarrow \left(\frac{dx - dX}{dX}\right) = N_A\, E_{AB}\, N_B = \hat N \cdot \hat E \cdot \hat N$$

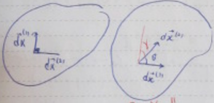
اگر $d\vec{X}$ در راستای X_1 بود داشتیم: $\hat{N}=\hat{I}_1$

$\hat{N}=\hat{I}_1 \to \frac{dx-dX}{dX} = [1\ 0\ 0]\begin{bmatrix}\varepsilon_{11} & \cdots & \\ \vdots & & \varepsilon_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix} = \varepsilon_{11} \to$ کرنش عمودی در راستای X_1

$\hat{N}=\hat{I}_2 \quad \frac{dx-dX}{dX} = [0\ 1\ 0]\begin{bmatrix} & & \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\1\\0\end{Bmatrix} = \varepsilon_{22} \to X_2 \ \cdots$

$\hat{N}=\hat{I}_3 \quad \frac{dx-dX}{dX} = [0\ 0\ 1]\begin{bmatrix} & & \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\0\\1\end{Bmatrix} = \varepsilon_{33} \to$ کرنش عمودی در راستای X_3

در مورد اعضای غیرقطری داریم:



$\theta+\gamma=\frac{\pi}{2}$

$d\vec{x}^{(1)}\cdot d\vec{x}^{(2)} = \cancel{d\vec{X}^{(1)}\cdot d\vec{X}^{(2)}} + d\vec{X}^{(1)}\cdot 2\bar{\bar{E}}\cdot d\vec{X}^{(2)}$

$= dx^{(1)}dx^{(2)}\cos\theta = d\vec{X}^{(1)}\cdot 2\bar{\bar{E}}\cdot d\vec{X}^{(2)}$

تغییر شکل های کوچک $\begin{cases} dx^{(1)}\simeq dX^{(1)} \\ dx^{(2)}\simeq dX^{(2)}\end{cases} \to \cos\theta = \frac{d\vec{X}^{(1)}}{dX^{(1)}}\cdot 2\bar{\bar{E}}\cdot\frac{d\vec{X}^{(2)}}{dX^{(2)}}$

$\begin{cases} \hat{N}^{(1)} = \frac{d\vec{X}^{(1)}}{dX^{(1)}} \\ \hat{N}^{(2)} = \frac{d\vec{X}^{(2)}}{dX^{(2)}}\end{cases} \qquad = \hat{N}^{(1)}\cdot 2\bar{\bar{E}}\cdot\hat{N}^{(2)}$

$\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right) = \sin\gamma = \hat{N}^{(1)}\cdot 2\bar{\bar{E}}\cdot\hat{N}^{(2)}$

تغییر شکل های کوچک $\quad \sin\gamma \simeq \gamma = \hat{N}^{(1)}\cdot 2\bar{\bar{E}}\cdot\hat{N}^{(2)}$

$\begin{cases}\hat{N}^{(1)}=\hat{I}_1 \\ \hat{N}^{(2)}=\hat{I}_2\end{cases} \longrightarrow \gamma = [1\ 0\ 0]\,2\begin{bmatrix}\varepsilon_{ij} & & \\ & \ddots & \\ & & \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\1\\0\end{Bmatrix} = 2\varepsilon_{12}$

کرنش برشی هندسی

↓

$$2\varepsilon_{12} = \gamma \rightarrow \varepsilon_{12} = \underbrace{\frac{\gamma}{2}}$$

اعضای غیر قطری $[\varepsilon_{ij}]$ نصف کرنش برشی هندسی هستند

* در حالت * ← چون فقط اعضای قطر اصلی غیر صفر هستند ← $\gamma = 0$

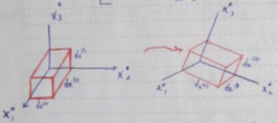
$$[\varepsilon^*_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} \end{bmatrix}$$

اگر $\begin{cases} \hat{N}^{(1)} = \hat{I}^*_1 \\ \hat{N}^{(2)} = \hat{I}^*_2 \end{cases}$

$\frac{dx - dX}{dX} = I_1 \cdot \varepsilon$

$$dx^{(1)} = (1+\varepsilon_I)\, dx^{(1)}$$

$$dx^{(2)} = (1+\varepsilon_{II})\, dx^{(2)}$$



$$\rightarrow \frac{dV}{V_0} = \frac{(1+\varepsilon_{(1)})(1+\varepsilon_{(2)})(1+\varepsilon_{(3)})\, dx^{(1)} dx^{(2)} dx^{(3)} - dx^{(1)} dx^{(2)} dx^{(3)}}{dx^{(1)} dx^{(2)} dx^{(3)}}$$

برای کرنش های کوچک $\Rightarrow \frac{dV}{V_0} = \varepsilon_{(1)} + \varepsilon_{(2)} + \varepsilon_{(3)} = I_\varepsilon$

تغییر حجم واحد حجم

cubic dilatation

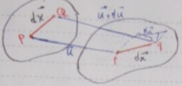
* کرنش انحرافی

کرنش نرمال $\varepsilon_M = \frac{\varepsilon_{ii}}{3} \rightarrow \eta_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\,\varepsilon_M$

← تانسور کرنش انحرافی

$$\eta_{ii} = 0$$

Material displacement gradient



$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial X_j}\Big|_P dX_j$$

$$\frac{du_i}{\quad} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} N_j$$

$$\rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$= \underbrace{\varepsilon_{ij}}_{\text{کرنش}} + \underbrace{\omega_{ij}}_{\text{چرخش}}$$

(Rotation Tensor) antisymmetric Tensor

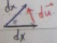
$$\rightarrow du_i = (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij})\, dx_j$$

$$\varepsilon_{ij} = 0 \longrightarrow du_i = \omega_{ij}\, dx_j$$

(Rotation Vector) $\boxed{\omega_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\,\omega_{kj}}$

$$\longrightarrow \boxed{\omega_{kj} = \varepsilon_{kji}\,\omega_k}$$

$$\rightarrow du_i = \varepsilon_{kji}\,\omega_k\, dx_j \longrightarrow \boxed{d\vec{u} = \vec{\omega} \times d\vec{x}}$$



چرخش خالص

جلسه سیزدهم ۹۱/۹/۱

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \qquad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)$$

آیا شش مولفه غیر قطری مستقل از هم هستند؟

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_2}$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_2}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 x_2}$$

⋮

به همین ترتیب برای مولفه‌های دیگر داریم:

⋮

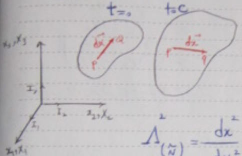
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2}\right)$$

(Compatibility Equations معادلات سازگاری)

معادلات سازگاری کرنش $\boxed{\varepsilon_{ij,km} + \varepsilon_{km,ij} - \varepsilon_{ik,jm} - \varepsilon_{jm,ik} = 0}$

$3^4 = 81$ تعداد معادلات کل

Stretch Ratio — نسبت کشیدگی (4-8)



$$\boxed{\Lambda_{(\hat N)} = \frac{dx}{dX}}$$

$$\Lambda^2_{(\hat N)} = \frac{dx^2}{dX^2} = \frac{d\vec x \cdot d\vec x}{dX\, dX}$$

$$* \; d\vec x = \bar{\bar F} \cdot d\vec X \;\rightarrow\; \Lambda^2_{(\hat N)} = \frac{\bar{\bar F}\cdot d\vec X \cdot \bar{\bar F}\cdot d\vec X}{dX \quad dX}$$

$$= \frac{d\vec X}{dX}\, \bar{\bar F}^T \bar{\bar F}\, \frac{d\vec X}{dX} \;\Rightarrow\; \boxed{\Lambda^2_{(\hat N)} = \hat N \cdot \bar{\bar C} \cdot \hat N}$$

و به صورت زیر نیز می‌توانیم تعریف کنیم

$\vec N$ بردار یکه در t=0
$\hat n$ بردار یکه t=c

$$\frac{1}{\lambda_{(\hat n)}} = \frac{dX}{dx} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda^2_{(\hat n)}} = \dfrac{dX^2}{dx^2} = \dfrac{d\vec X \cdot d\vec X}{dx\, dx} \\ d\vec X = \bar{\bar F}^{-1} \cdot d\vec x \end{cases}$$

$$= \frac{\bar{\bar F}^{-1}\cdot d\vec x \cdot \bar{\bar F}^{-1}\cdot d\vec x}{dx \quad dx} = \frac{d\vec x}{dx}\, \bar{\bar F}^{-T} \bar{\bar F}^{-1}\, \frac{d\vec x}{dx}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{1}{\lambda^2_{(\hat n)}} = \hat n \cdot \bar{\bar c} \cdot \hat n}$$

در حالت کلی $\lambda_{(\hat{n})}^{(2)}$ و $\Lambda_{(\hat{N})}^{(2)}$ باهم برابر نیستند. اما در حالتی که $\hat{n}$ و $\hat{N}$ هم جهت باشند باهم برابر می‌شوند

★ اگر $\hat{N}=\hat{I}_1$ داریم:

$$\rightarrow \Lambda^2_{(\hat{N})} = \Lambda^2_{(\hat{I}_1)} = [1 \; 0 \; 0]\begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{13} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{31} & \cdots & C_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ \vdots \\ \vdots\end{Bmatrix}$$

$$= C_{11} = 1 + 2E_{11} \qquad ; 2\bar{\bar{E}} = \bar{\bar{C}} - \bar{\bar{I}}$$

$$\frac{1}{\lambda^2_{(\hat{e}_1)}} = c_{11} = 1 - 2e_{11} \qquad (2\bar{\bar{e}} = \bar{\bar{I}} - \bar{\bar{c}})$$

وقتی $\hat{N}=\hat{I}$

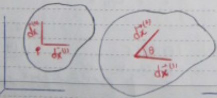
$$\bigstar \; e_{(\hat{N})} = \frac{dx - dX}{dX} = \frac{dx}{dX} - 1 = \Lambda_{(\hat{N})} - 1$$

$$\rightarrow e_{(\hat{N})} = \sqrt{\hat{N}\cdot\bar{\bar{C}}\cdot\hat{N}} - 1$$

$$\text{if } \hat{N}=\hat{I}_1 \longrightarrow e_{(\hat{I}_1)} = \sqrt{1 + 2E_{11}} - 1 = \varepsilon_{11}$$

$$\rightarrow (\varepsilon_{11}+1)^2 = 1 + 2E_{11} \quad \rightarrow \boxed{E_{11} = \varepsilon_{11} + \frac{1}{2}\varepsilon_{11}^2}$$

$E_{11} \simeq \varepsilon_{11}$ برای کرنش‌های کوچک



$$d\vec{x}^{(1)} \cdot d\vec{x}^{(2)} = dx^{(1)}\, dx^{(2)} \cos\theta$$

$$\rightarrow \cos\theta = \frac{d\vec{x}^{(1)}}{dx^{(1)}} \cdot \frac{d\vec{x}^{(2)}}{dx^{(2)}}$$

$$= \frac{\bar{\bar{F}}\cdot d\vec{X}^{(1)}}{dx^{(1)}} \cdot \frac{\bar{\bar{F}}\cdot d\vec{X}^{(2)}}{dx^{(2)}} = \frac{d\vec{X}^{(1)}}{dx^{(1)}} \cdot \bar{\bar{F}}^T\cdot\bar{\bar{F}} \cdot \frac{d\vec{X}^{(2)}}{dx^{(2)}}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\dfrac{d\vec{x}^{(1)}}{dX^{(1)}}}{\dfrac{dx^{(1)}}{dX^{(1)}}} \bar{\bar{F}}^T \cdot F \frac{\dfrac{d\vec{X}^{(2)}}{dX^{(2)}}}{\dfrac{dx^{(2)}}{dX^{(2)}}} = \frac{\hat{N}^{(1)} \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \hat{N}^{(2)}}{\Lambda_{(\hat{N}^{(1)})} \Lambda_{(\hat{N}^{(2)})}}$$

$$\text{if} \begin{cases} \hat{N}^{(1)} = \hat{I}_1 \\ \hat{N}^{(2)} = I_2 \end{cases} \longrightarrow \boxed{\cos\theta_{12} = \frac{C_{12}}{\sqrt{C_{11} C_{22}}}}$$

اگر ملکی روی جهت های اصلی در t_0 در نظر بگیریم ← در $t_0 c$ تغییر زاویه ها را نخواهیم داشت.

نسبت حجم (اصلی)

$$dx^{(i)} = \Lambda_{(i)} dX^{(i)}$$

$$\downarrow$$

$$dx^{(1)} dx^{(2)} dx^{(3)} = \Lambda_{(1)} \Lambda_{(2)} \Lambda_{(3)} dX^{(1)} dX^{(2)} dX^{(3)}$$

$$\rightarrow \frac{dv}{dV} = \Lambda_{(1)} \Lambda_{(2)} \Lambda_{3} = \sqrt{C_1 C_2 C_3} = \sqrt{\det \bar{\bar{C}}} = \sqrt{III_C} = J = |F|$$

تغییر حجم و ... F بستگی دارد

$$[C^*] = \begin{bmatrix} C_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & C_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & C_{(3)} \end{bmatrix}$$

★ جزوه (2)

Rotation and Stretch Tensors $\boxed{(4.9)}$

حرکت یک کانتینیوم را در نظر بگیریم { چرخش بدون تغییر ابعاد + انتقال تغییر ابعاد

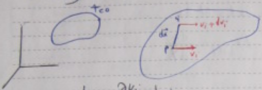
$$\bar{\bar{F}} = \underbrace{\bar{\bar{R}} \cdot \bar{\bar{U}}}_{\text{polar decomposition}}$$

کشیدگی

$$\bar{\bar{R}}^T = \bar{\bar{R}}^{-1}$$

$$UU^T = C$$

Velocity Gradient, Rate of Deformation, Vorticity (4.10)



$$dv_i = \underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial x_j}} dx_j$$

تعریف :

تانسور مرتبه دو : نقش F را در حرکت بررسی می‌کند

$$\boxed{L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad : \text{Velocity gradient}}$$

$$\rightarrow L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)}_{D_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)}_{W_{ij}}$$

Rate of deformation تانسور نرخ تغییر شکل (قسمت متقارن)

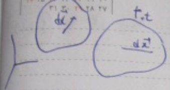
تانسور گردابی (قسمت نامتقارن)

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial X_K}\frac{\partial X_K}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial X_K}\left(\frac{d}{dt}x_i\right)\frac{\partial X_K}{\partial x_j}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_K}\right)\left(\frac{\partial X_K}{\partial x_j}\right) = \frac{d}{dt} F_{iK} F^{-1}_{Kj} = \dot{F}_{iK} F^{-1}_{Kj}$$

$$\rightarrow L_{ij} = \dot{F}_{iK} F^{-1}_{Kj} \Rightarrow \bar{\bar{L}} = \dot{\bar{\bar{F}}}\,\bar{\bar{F}}^{-1} \Rightarrow \boxed{\dot{\bar{\bar{F}}} = \bar{\bar{L}} \cdot \bar{\bar{F}}}$$

حرف: مولفه های D_{ij}



$$dx_i = n_i\,dx$$
$$dX_i = N_i\,dX$$
$$\Lambda_{(\hat N)} = \frac{dx}{dX}$$

$$dx_i = F_{iA}\,dX_A$$

$$n_i\,dx = F_{iA} N_A\,dX \rightarrow n_i \frac{dx}{dX} = F_{iA} N_A$$

$$\rightarrow n_i \Lambda_{(\hat N)} = F_{iA} N_A \rightarrow \boxed{\hat n \Lambda_{(\hat N)} = \bar{\bar F}\cdot \hat N}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به زمان}} \dot{\hat n} \Lambda_{(\hat N)} + \hat n \dot\Lambda_{(\hat N)} = \dot{\bar{\bar F}} \cdot \hat N \quad \bar{\bar L}\cdot\bar{\bar F}\cdot\hat N = \Lambda_{(\hat N)} \bar{\bar L}\cdot \hat n$$

$$\rightarrow \dot{\hat n} + \hat n \frac{\dot\Lambda_{(\hat N)}}{\Lambda_{(\hat N)}} = \bar{\bar L}\cdot\hat n$$

$$\xrightarrow{\hat n\cdot} \hat n\cdot\dot{\hat n} + \hat n\cdot\hat n \frac{\dot\Lambda}{\Lambda} = \hat n\cdot\bar{\bar L}\cdot\hat n \rightarrow \boxed{\frac{\dot\Lambda}{\Lambda} = \hat n\cdot\bar{\bar L}\cdot\hat N}$$

نرخ کشیدگی در واحد کشیدگی

$$\rightarrow \frac{\dot\Lambda}{\Lambda} = n_i L_{ij} n_j = n_i D_{ij} n_j$$

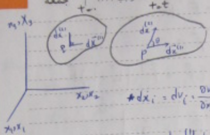
$$L_{ij} = D_{ij} + w_{ij}$$

$$n_i L_{ij} n_j = n_i D_{ij} n_j + w_{ij} n_i n_j$$

$$\text{if } \hat n \cdot \hat e_1 \rightarrow [1\ 0\ 0]\begin{bmatrix} D_{11} & \cdots \\ \vdots & \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix} = D_{11}$$

$d\vec{x}_i^{(1)}$ و $d\vec{x}_i^{(2)}$ دو بردار دیفرانسیلی اختیاری در نقطه P (در لحظه t) را باشند.

جلسه ۲۱- ۹۱/۰۹/۱۹



$$\left[dx_i^{(1)} dx_i^{(2)}\right]' = d\dot{x}_i^{(1)} dx_i^{(2)} + dx_i^{(1)} d\dot{x}_i^{(2)}$$

$$* \, d\dot{x}_i = dv_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j$$

$$= V_{i,j}\, dx_j^{(1)} dx_i^{(2)} + V_{i,j}\, dx_i^{(1)} dx_j^{(2)}$$

$$= (V_{i,j} + V_{j,i})\, dx_i^{(2)} dx_j^{(1)} = 2D_{ij}\, dx_i^{(2)} dx_j^{(1)}$$

$$d\vec{x}^{(1)} \cdot d\vec{x}^{(2)} = dx^{(1)} dx^{(2)} \cos\theta$$

$$\left[d\vec{x}^{(1)} d\vec{x}^{(2)}\right]^{\cdot} = d\dot{x}^{(1)} dx^{(2)} \cos\theta + dx^{(1)} \underbrace{d\dot{x}^{(2)}}_{\cos\theta} - dx^{(1)} dx^{(2)} \dot{\theta} \sin\theta$$

$$2D_{ij}\, dx_i^{(2)} dx_j^{(1)} = d\dot{x}^{(1)} dx^{(2)} \cos\theta + dx^{(1)} d\dot{x}^{(2)} \cos\theta - dx^{(1)} dx^{(2)} \dot{\theta} \sin\theta$$

$$2D_{ij} \frac{dx_i^{(2)}}{dx^{(2)}} \frac{dx_j^{(1)}}{dx^{(1)}} =$$

$$\rightarrow 2D_{ij}\, n_i^{(2)} n_j^{(1)} = -\dot{\theta}$$

فرض: $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\text{فرض} \begin{cases} \hat{n}^{(2)} = \hat{e}_1 \\ \hat{n}^{(1)} = \hat{e}_2 \end{cases} \longrightarrow 2 n_i^{(2)} D_{ij} n_j^{(1)} = 2D_{12} = -\dot{\theta}$$

$$\rightarrow \boxed{D_{12} = -\frac{\dot{\theta}}{2}}$$

$$2\bar{\bar{E}} = \bar{\bar{C}} - \bar{\bar{I}} \quad , C = \bar{\bar{F}}^T \bar{\bar{F}}$$

$$\longrightarrow 2\dot{\bar{\bar{E}}} = \dot{\bar{\bar{C}}} = \dot{\bar{\bar{F}}}^T \bar{\bar{F}} + \bar{\bar{F}}^T \dot{\bar{\bar{F}}}$$

$$= \bar{\bar{F}}^T \bar{\bar{L}}^T \bar{\bar{F}} + \bar{\bar{F}}^T \bar{\bar{L}} \bar{\bar{F}} = \bar{\bar{F}}^T \underbrace{(\bar{\bar{L}}^T + \bar{\bar{L}})}_{2\bar{\bar{D}}} \bar{\bar{F}}$$

$$\longrightarrow 2\dot{\bar{\bar{E}}} = \bar{\bar{F}}^T 2\bar{\bar{D}}\, \bar{\bar{F}} \longrightarrow \boxed{\dot{\bar{\bar{E}}} = \bar{\bar{F}}^T \bar{\bar{D}} \bar{\bar{F}}}$$

$$\bar{\bar{F}} \simeq \bar{\bar{I}}$$ در تغییر شکل های کوچک می توانیم بنویسیم

$$\longrightarrow \dot{\bar{\bar{\varepsilon}}} = I^T D I = D \longrightarrow \boxed{\dot{\bar{\bar{\varepsilon}}} = D}$$

★ تانسور مرتبه دو آنتی سیمتریک (نامتقارن) W_{ij} سه مولفه مستقل خواهد داشت.

$$\dot{\hat{n}} + \hat{n}\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} = \bar{\bar{L}} \cdot \hat{n}$$

$$\longrightarrow \dot{n}_i = L_{ij} n_j - n_i \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda}$$

$$\longrightarrow \dot{n}_i = (D_{ij} + W_{ij}) n_j - n_i \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda}$$

$$= D_{ij} n_j + W_{ij} n_j - n_i (n_p D_{pq} n_q)$$

★ فرض کنیم جهت های اصلی D را بدست آورده ایم و n_i یکی از جهت های اصلی بدست آمده می باشد. (n را به جهت خاصی محدود کرده ایم).

$$\rightarrow \begin{cases} \sigma_{ij} n_j^{(\alpha)} = \sigma_{(\alpha)} n_i \\ D_{pq} n_q^{(s)} = D_{(s)} n_p^{(s)} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \dot{n}_i^{(s)} = D_{(s)} n_i^{(s)} + W_{ij} n_j^{(s)} - n_i^{(s)} n_p^{(s)} D_{(s)} n_p^{(s)}$$

$$\longrightarrow \dot{n}_i^{(s)} = W_{ij} n_j^{(s)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\hat{n}}^{(s)} = \bar{\bar{W}} \cdot \hat{n}^{(s)}}$$

تانسور W_{ij} نرخ تغییرات $\hat{n}^{(s)}$ را نشان می‌دهد (تغییر جهت $\hat{n}$)

Principle vector:

$$w_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} v_{k,j}$$

$$W_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} W_{kj}$$

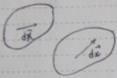
$$W_{qp} = \varepsilon_{pqi} W_i$$

$$\rightarrow \dot{n}_i^{(s)} = W_{ij} n_j^{(s)} = \varepsilon_{ikj} w_k n_j^{(s)}$$

$$\rightarrow \boxed{\dot{\hat{n}}^{(s)} = \vec{\omega} \times \hat{n}^{(s)}}$$

Material derivative of line elements, areas, volumes (4.11)

تغییر طول:



$$dx_i = F_{iA}\, dX_A$$

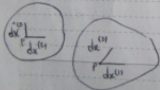
$$d\dot{x}_i = \dot{F}_{iA}\, dX_A$$

$$d\vec{x} = \bar{\bar{F}} \cdot d\vec{X}$$

$$d\dot{\vec{x}} = \dot{\bar{\bar{F}}} \cdot d\vec{X} = \bar{\bar{L}} \cdot \bar{\bar{F}} \cdot d\vec{X} = \bar{\bar{L}} \cdot d\vec{x}$$

$$d\dot{x}_i = L_{ij}\, dx_j$$

تغییر سطح:



$$d\vec{S}^{\circ} = d\vec{X}^{(1)} \times d\vec{X}^{(2)}$$

$$dS_A^{\circ} = \varepsilon_{ABC}\, dX_B^{(1)} dX_C^{(2)}$$

$$d\vec{s} = d\vec{x}^{(1)} \times d\vec{x}^{(2)}$$

$$ds_i = \varepsilon_{ijk}\, dx_j^{(1)}\, dx_k^{(2)}$$

$$ds_i = \varepsilon_{ijk}\, F_{jB}\, dx_B^{(1)}\, F_{kC}\, dx_C^{(2)}$$

$$ds_i = \varepsilon_{ijk}\, F_{jB}\, F_{kC}\, dx_B^{(1)}\, dx_C^{(2)}$$

$$\xrightarrow{\times F_{iA}} \quad ds_i\, F_{iA} = \underbrace{\varepsilon_{ijk}\, F_{iA}\, F_{jB}\, F_{kC}}\, dx_B^{(1)}\, dx_C^{(2)}$$

$$ds_i\, F_{iA} = \varepsilon_{ABC} \det F \quad dx_B^{(1)}\, dx_C^{(2)}$$

$$ds_i\, F_{iA} = J\ \varepsilon_{ABC}\, dx_B^{(1)}\, dx_C^{(2)} = J\, ds^{\circ}_A$$

$$\Rightarrow d\vec{s}\cdot\bar{\bar{F}} = J\, d\vec{s}^{\circ}$$

مشتق نسبت به زمان

$$\longrightarrow \quad d\dot{\vec{s}}\cdot\bar{\bar{F}} + d\vec{s}\cdot\dot{\bar{\bar{F}}} = \dot{J}\, d\vec{s}^{\circ}$$

$$(\det\bar{\bar{A}})^{\cdot} = tr(\dot{\bar{\bar{A}}}\cdot\bar{\bar{A}}^{-1}) \det\bar{\bar{A}}$$ A: تانسور مرتبه دوم

$$\dot{J} = (\det F)^{\cdot} = tr(\dot{\bar{\bar{F}}}\cdot\bar{\bar{F}}^{-1})\, J$$

$$\dot{J} = tr\,\bar{\bar{L}}\, J = v_{k,k}\, J$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{\bar{\bar{F}}} = \bar{\bar{L}}\cdot\bar{\bar{F}} \\ \bar{\bar{L}} = \dot{\bar{\bar{F}}}\cdot\bar{\bar{F}}^{-1} \end{array}\right.$$

$$\boxed{\dot{J} = v_{k,k}\, J}$$

$$\rightarrow d\dot{\vec{s}}\cdot\bar{\bar{F}} + d\vec{s}\cdot\bar{\bar{L}}\cdot\bar{\bar{F}} = (tr\,\bar{\bar{L}})\, d\vec{s}\cdot\bar{\bar{F}}$$

$$\xrightarrow{\times \bar{\bar{F}}^{-1}} \quad d\dot{\vec{s}} + d\vec{s}\cdot\bar{\bar{L}} = (tr\,\bar{\bar{L}})\, d\vec{s}$$

$$\rightarrow \dot{\vec{ds}} = (\mathrm{tr}\,\vec{\vec{L}})\,\vec{ds} - \vec{ds}\cdot\vec{\vec{L}}$$

$$\rightarrow \dot{ds}_i = v_{k,k}\,ds_i - ds_j \underbrace{L_{ji}}_{v_{j,i}}$$

• برای حجم داریم:

$$dV^\circ = \epsilon_{ABC}\, dX_A^{(1)}\, dX_B^{(2)}\, dX_C^{(3)}$$

$$dv = \epsilon_{ijk}\, dx_i^{(1)}\, dx_j^{(1)}\, dx_k^{(1)}$$

$$= \epsilon_{ijk}\, F_{iA}\, dX_A^{(1)}\, F_{jB}\, dX_B^{(2)}\, F_{kC}\, dX_C^{(3)}$$

$$\Rightarrow dv = \epsilon_{ABC} \det \vec{\vec{F}}\, dX_A^{(1)}\, dX_B^{(2)}\, dX_C^{(3)} = J\, dV^\circ$$

$$\boxed{dv = J\, dV^\circ}$$

$$\dot{dv} = \dot{J}\, dV^\circ = v_{k,k}\, J\, dV^\circ = v_{k,k}\, dv \qquad \boxed{\dot{dv} = v_{k,k}\, dv}$$

(Isochoric) جسمی که حجمش تغییر نکند را ایزوکوریک گویند.

"فصل پنجم"

قوانین و معادلات بنیادین Fundamental laws and equations

5.1) Balance laws, Field equation, Constitiutive equations

5.2) Material derivative of line, Surface and Volume integrals

5.3) Conservation of mass, continuity equation

5.4) linear momentum principles, equation of motion

5.5)

5.6) moment of momentum (Angular momentum) principle

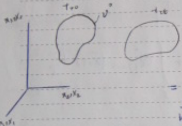
5.7) law of conservation of energy, the energy equation

$$P_{ij\ldots}(t) = \int_v P^*_{ij\ldots}(\vec{x},t)\,dv$$

P^* توزیع خواص در واحد حجم را نشان می دهد.

می خواهیم نرخ تغییرات زمانی $P_{ij}(t)$ را بدست آوریم:

$$\frac{d}{dt}P_{ij\ldots}(t) = \dot{P}_{ij\ldots}(t) = \frac{d}{dt}\int_v P^*_{ij\ldots}(\vec{x},t)\,dv$$



$$= \frac{d}{dt}\int_{v^0} P^*_{ij\ldots}[\vec{x}(\vec{X},t),t]\,J\,dv^0$$

$$= \int_{v^0} \left(\dot{P}^*_{ij}J + P^*_{ij\ldots}v_{k,k}J\right)dv^0$$

$J\,dv^0 = dv$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}P_{ij\ldots}(t) = \int\left[\dot{P}^*_{ij\ldots}(\vec{x}(\vec{X},t),t) + P^*_{ij\ldots}(\vec{x},t)v_{k,k}\right]dv$$

$$= \int_v \left[\frac{\partial}{\partial t}P^*_{ij\ldots}(\vec{x},t) + v_k\frac{\partial}{\partial x_k}P^*_{ij\ldots}(\vec{x},t) + v_{k,k}P^*\right]dv$$

$$= \int_v \left[\frac{\partial}{\partial t}P^*_{ij\ldots}(\vec{x},t) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(v_k P^*_{ij\ldots}(\vec{x},t)\right)\right]dv$$

$$= \int_v \frac{\partial P^*_{ij\ldots}(\vec{x},t)}{\partial t}dv + \int_v \frac{\partial}{\partial x_k}\left[P^*_{ij\ldots}(\vec{x},t)\,v_k\right]dv$$

انتقال رینولدز

$$\boxed{= \int_v \frac{\partial P^*_{ij\ldots}(\vec{x},t)}{\partial t}dv + \int_s P^*_{ij\ldots}(\vec{x},t)\,v_k\,ds_k}$$

مقدار دبی وارد شده (یا خارج شده) از خاصیت از سطح کنترل + نرخ تغییرات خاصیت در واحد حجم = نرخ تغییر خاصیت

فرض کنیم Q^* مثل Q است که بر واحد سطح پخش شده است. می‌خواهیم نرخ تغییرات آن را بدست آوریم

$$Q_{ij\ldots}(t) = \int_S Q^*_{ij\ldots}(\vec{x},t)\, \underbrace{ds_p}_{n_p ds}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} Q_{ij\ldots}(t) = \frac{d}{dt}\int_S Q^*_{ij\ldots}(\vec{x},t)\, ds_p$$

$$= \int_S \dot{Q}^*_{ij\ldots}(\vec{x},t)\, ds_p + \int_S Q^*_{ij\ldots}(\vec{x},t)\, d\dot{s}_p$$

$$* \quad d\dot{s}_p = v_{k,k}\, ds_p - ds_q\, v_{q,p}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \rightarrow \frac{d}{dt} Q_{ij\ldots}(t) &= \int_S \left\{ \dot{Q}^*_{ij\ldots}(\vec{x},t)\, ds_p + Q^*_{ij\ldots}(\vec{x},t)\, v_{k,k}\, ds_p - Q^*_{ij\ldots}(\vec{x},t)\, v_{q,p}\, ds_q \right\} \\ &= \int_S \left\{ \left[\dot{Q}^*_{ij\ldots}(\vec{x},t) + Q^*_{ij\ldots}(\vec{x},t)\, v_{k,k}\right] \delta_{pq} - Q^*_{ij\ldots}(\vec{x},t)\, v_{q,p} \right\} ds_q \end{aligned}}$$

* می‌خواهیم نرخ تغییرات تانسور R را بدست آوریم. R^* بر واحد طول توزیع شده است.

$$R_{ij\ldots}(t) = \int_C R^*_{ij\ldots}(\vec{x},t)\, dx_p$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} R_{ij\cdots}(t) = \frac{d}{dt}\int_c \overset{*}{R}_{ij\cdots}(\vec{x},t)\, dx_p$$

$$= \int_c \dot{\overset{*}{R}}_{ij\cdots}(\vec{x},t)\, dx_p + \overset{*}{R}_{ij\cdots}(\vec{x},t)\, v_{p,q}\, dx_q$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} R_{ij\cdots}(\vec{x},t) = \int_c \left[\dot{\overset{*}{R}}_{ij\cdots}(\vec{x},t)\,\delta_{pq} + \overset{*}{R}_{ij\cdots}(\vec{x},t)\, v_{p,q} \right] dx_q}$$

Conservation of mass. Continuity Eq. بقای جرم — معادله پیوستگی (5-3)

$$\rho(\vec{x},t) = \frac{dm}{dv}$$

$$\rightarrow dm = \rho(\vec{x},t)\, dv \longrightarrow m = \int_v \rho(\vec{x},t)\, dv \quad \text{or} \quad m = \int_{v^\circ} \overset{\circ}{\rho}(\vec{x},t)\, dv^\circ$$

$$\longrightarrow m = \int_{v^\circ} \rho[\vec{x}(\vec{X},t),t]\, J\, dv^\circ = \int_{v^\circ} \overset{\circ}{\rho}(X)\, dv^\circ$$

فرم لاگرانژی پیوستگی

$$\star\ \rho[\vec{x}(X,t),t]\, J = \overset{\circ}{\rho}(\vec{X})$$

$$\rho J = \rho^\circ$$

حالا اگر بخواهیم فرم اویلری پیوستگی را بدست آوریم داریم

$$\rho J = \rho^\circ \rightarrow \rho(\vec{x},t)\, J(\vec{x},t) = \overset{\circ}{\rho}(\vec{X})$$

مشتق نسبت به زمان $\longrightarrow \dot{\rho}(\vec{x},t)\, J(\vec{x},t) + \rho(\vec{x},t)\, v_{k,k}\, J_{(\vec{x},t)} = 0$

$$\rightarrow \dot{\rho} + v_{k,k}\,\rho = 0 \rightarrow \partial$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\rho + v_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} + v_{k,k}\,\rho = 0$$

فرم اویلری پیوستگی $\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_k)=0}$

$$P_{ij\ldots}(t) = \int_v A^*_{ij\ldots}(\vec{x},t)\,\rho(\vec{x},t)\,dv$$

$$= \int_v \dot{A}^*_{ij\ldots}(\vec{x},t)\,\rho(\vec{x},t)\,dv$$

(5.4)

اندازه حرکت خطی $P_i(t) = \int_v v_i(\vec{x},t)\,\rho(\vec{x},t)\,dv = \int_v v_i\rho\,dv$

$$\sum F = \frac{d}{dt}\vec{P}(t) \to \int_s t_i^{(\hat{n})}\,ds + \int_v \rho b_i\,dv = \frac{d}{dt}\int_v \rho v_i\,dv$$

نیروهای حجمی + نیروهای سطحی

$$= \int \rho \dot{v}_i\,dv$$

$$\to \int_s \sigma_{ij} n_j\,ds + \int_v \rho b_i\,dv = \int_v \rho \dot{v}_i\,dv$$

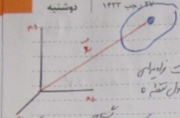
$$\to \int_v \sigma_{ij,j}\,dv + \int_v \rho b_i\,dv = \int_v \rho \dot{v}_i\,dv$$

$$\to \int_v (\sigma_{ij,j} + \rho b_i - \rho \dot{v}_i)\,dv = 0$$

$$\to \boxed{\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i}$$ معادلات حرکت در شکل اویلری

$\xrightarrow{\dot{v}=0} \sigma_{ij,j} + \rho b_i = 0 \to$ معادلات تعادل

(5-6)



اندازه حرکت زاویه‌ای
گشتاور حول نقطه o

$$\int_v \vec{x} \times \rho \vec{v} \, dv$$

نرخ تغییرات اندازه حرکت گشتاور = تمام نیروهای سطح گشتاور + گشتاور نیروهای حجمی

$$\rightarrow \int_s \vec{x} \times t^{(\hat{n})} ds + \int_v \vec{x} \times \rho \vec{b} \, dv = \frac{d}{dt} \int_v \vec{x} \times \rho \vec{v} \, dv$$

$$\rightarrow \int_s \varepsilon_{ijk} x_j t_k^{(\hat{n})} ds + \int_v \varepsilon_{ijk} x_j \rho b_k dv = \frac{d}{dt} \int_v \varepsilon_{ijk} x_j \rho v_k dv$$

$$\rightarrow \int_s \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{pk} n_p ds + \int_v \varepsilon_{ijk} x_j \rho b_k dv = \int_v \varepsilon_{ijk} \rho (\dot{x}_j v_k + x_j \dot{v}_k) dv$$

$$\rightarrow \int_v (\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{pk})_{,p} dv + \int_v \varepsilon_{ijk} x_j \rho b_k dv = \int_v \varepsilon_{ijk} \rho x_j \dot{v}_k dv$$

$$\Rightarrow \int_v \Big[\varepsilon_{ijk} \delta_{jp} \sigma_{pk} + \underbrace{\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{pk,p} + \varepsilon_{ijk} x_j \rho b_k - \varepsilon_{ijk} \rho x_j \dot{v}_k}_{=0} \Big] dv = 0$$

$$\rightarrow \int_v \varepsilon_{ijk} \delta_{jp} \sigma_{pk} dv = 0 \longrightarrow \sigma_{pk} = \sigma_{kp}$$

برای مواد non Polar

Law of Conservation of energy, the energy equation (5-7)

کار نیروهای خارجی روی محیط پیوسته برابر است با افزایش نیروی داخلی و افزایش انرژی جنبشی

$$K(t) = \frac{1}{2}\int_V \vec{v}\cdot\vec{v}\,\rho\, dV = \frac{1}{2}\int_V \rho v_i v_i\, dV$$ انرژی جنبشی

$$\dot{K}(t) = \int_V \rho v_i \dot{v}_i\, dV$$ ← نرخ تغییرات انرژی جنبشی

$$P(t) = \int_S t_i^{(\hat{n})} v_i\, dS + \int_V v_i \rho b_i\, dV$$ توان نیروهای سطحی + جمی

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i$$ جلسه قبل داشتیم

$$\rightarrow \dot{K}(t) = \int_V \rho v_i \dot{v}_i\, dV = \int_V (\sigma_{ij,j} v_i + \rho b_i v_i)\, dV$$

$$* \ \sigma_{ij,j} v_i = (\sigma_{ij} v_i)_{,j} - \sigma_{ij} v_{i,j}$$

$$\rightarrow \dot{K}(t) = \int_V \left[(\sigma_{ij} v_i)_{,j} - \sigma_{ij} v_{i,j} + \rho b_i v_i \right] dV$$

$$* \ \sigma_{ij} v_{i,j} = \sigma_{ij}(w_{ij} + D_{ij}) = \sigma_{ij} w_{ij} + \sigma_{ij} D_{ij} = \sigma_{ij} D_{ij}$$

$$\rightarrow \dot{K}(t) = \int_V (\sigma_{ij} v_i)_{,j} - \int_V \sigma_{ij} D_{ij}\, dV + \int_V \rho b_i v_i\, dV$$

$$\rightarrow \dot{K}(t) + \int_V \sigma_{ij} D_{ij}\, dV = \int_S \sigma_{ij} v_i n_j\, dS + \int_V \rho b_i v_i\, dV$$

$$= \int_S t_i^{(\hat{n})} v_i\, dS + \int_V \rho b_i v_i\, dV$$

Stress work : $S = \int_v \sigma_{ij} D_{ij} \, dv$ $\sigma_{ij} D_{ij}$: Stress Power

$= \int_v tr(\bar{\sigma} \cdot \bar{D}) \, dv$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{k}(t) + S = P(t)}$$

$D_{ij} = 0 \longleftarrow$ فرض کنیم محیط پیوسته ما جسم صلب است.

$S =$ انرژی کرنشی   ... تغییر شکل پذیر است اما انرژی جنبشی نداشته باشد

S : انرژی است که به واسطه تغییر شکل در جسم ایجاد می‌شود.

$\dot{U} =$ انرژی داخلی (یا نرخ) $= \frac{d}{dt} \int_v \rho u \, dv$

انرژی داخلی واحد جرم

$\longrightarrow \dot{k} + \dot{U} = P(t)$ (بدون حضور حرارت)

اگر حرارت هم داشته باشیم : $\dot{k} + \dot{u} = P(t) + Q$ نرخ حرارت داده شده به محیط پیوسته

شار حرارتی - چشمه حرارتی

$Q = -\int_s q_i n_i \, ds \quad + \int_v \rho r \, dv$ نرخ انرژی در واحد جرم

$\longrightarrow \dot{k} + \dot{u} = P + Q$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_v \rho v_i v_i \, dv + \int_v \rho u \, dv\right] = \int_s t_i^{(\hat{n})} v_i \, ds + \int_v v_i \rho b_i \, dv - \overbrace{\int_s q_i n_i \, ds}^{\int q_{i,i} dv} + \int_v \rho r \, dv$$

$\int_v \sigma_{ij} v_{i,j} \, dv$

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۳۱					۱	۲
۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶
۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳
۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰

$$\rightarrow \int_V \rho v_i \dot{v}_i \, dv + \int_V \rho \dot{u} \, dv = \int_V (\sigma_{ij} v_i)_{,j} \, dv + \int_V \rho b_i v_i \, dv - \int_V q_{i,i} \, dv + \int_V \rho r \, dv$$

$$\Rightarrow \int_V \left[\rho v_i \dot{v}_i + \rho \dot{u} - (\sigma_{ij} v_i)_{,j} - \rho b_i v_i + q_{i,i} - \rho r\right] dV = 0$$

$$\boxed{\rho \dot{u} - \sigma_{ij} D_{ij} + q_{i,i} - \rho r = 0}$$ معادله دیفرانسیل انرژی

$$\rho \dot{u} - \bar{\bar{\sigma}} : \bar{\bar{D}} + \vec{\nabla} \cdot \vec{q} - \rho r = 0$$

13 یا 14 معادله قابل حل هستند. (اتمام این فصل)

فصل ششم

« Linear Elasticity »

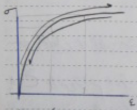
6.1) Elasticity Hook's law , strain energy

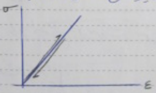
6.2) Hook's Law for isotropic media, elastic constants

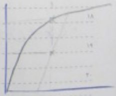
6.3) Elastic Symmetry , Hook's law for anisotropic media

6.4) Isotropic elasto static and elastodynamics , superposition principle

ماده‌ای که ① در اثر اعمال نیرو تغییر شکل دهد و پس از برداشتن نیرو به حالت اولیه خود بازگردد
② از strain state به stress state برسیم (و متناظر یک به یک)
را ماده‌ی الاستیک گویند
و لزوما تغییر شکل ها خطی نخواهند بود.







ماده الاستیک غیرخطی
ماده الاستیک خطی
ماده الاستیک - پلاستیک

ودر عین حال الاستیک

liner elastic material

elastic - Plastic material

که با داشتن کرنش نمی توان تنش را بدست آورد و برعکس

nonlinear elastic material

با داشتن تنش (یا کرنش) می توان کرنش (یا تنش) را بدست آورد.

$$\bar{\bar{\sigma}} = G(\bar{\bar{\varepsilon}})$$

برای مواد الاستیک:

با فرض تغییر شکل های کوچک داریم: (از این پس :)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

رابطه کلی هوک $\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\bar{\bar{C}}}} : \bar{\bar{\varepsilon}}$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkm}\,\varepsilon_{km}$$

(۹ مولفه تنش از طریق ۸۱ ثابت $81 = 3^4$

به ۹ مولفه کرنش ارتباط پیدا می کند!)

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkm}\,\varepsilon_{km} \\ \sigma_{ji} &= C_{jikm}\,\varepsilon_{km} \end{aligned}\right\} \quad C_{ijkm} = C_{jikm}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkm}\,\varepsilon_{km} \\ &= C_{ijmk}\,\varepsilon_{mk} \end{aligned}\right\} \quad C_{ijkm} = C_{ijmk}$$

← تقلیل از ۸۱ ثابت به 36 ثابت در صورت تنش و کرنش متقارن.

★ $\bar{\bar{\bar{\bar{C}}}}$ را می توانیم با ماتریس نشان دهیم.

از روش زیر استفاده می کنیم که از لحاظ ماتریس درست نیست اما از لحاظ محاسباتی درست است.

$\sigma_{11} = \sigma_1$	$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1$
$\sigma_{22} = \sigma_2$	$\varepsilon_{22} = \varepsilon_2$
$\vdots$	$\vdots$
$\sigma_{66} = \sigma_6$	$\varepsilon_{66} = \varepsilon_6$

$$\longrightarrow \sigma_\alpha = C_{\alpha\beta}\,\varepsilon_\beta$$

$$\rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{16} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{61} & \cdots & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}$$

• مواد الاستیک
تغییر شکل های کوچک

قانون انرژی $\quad \rho\dot{u} - \sigma_{ij} D_{ij} - \rho r + q_{i,i} = 0$

بدون حرارت $\quad \rho\dot{u} = \sigma_{ij} D_{ij} \longrightarrow \dot{u} = \frac{1}{\rho}\sigma_{ij} D_{ij}$

تغییر شکل های کوچک $\quad D_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij} \longrightarrow \dot{u} = \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} \quad \mathrm{I}$

$\rho J = \rho^{\circ}$ تغییر شکل کوچک $\quad J = |F| \simeq 1 \longrightarrow \rho = \rho^{\circ}$

$$\rightarrow u = u(\varepsilon_{ij}) \quad \rightarrow \dot{u} = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} \quad \mathrm{II}$$

$$\mathrm{I}, \mathrm{II} \rightarrow \frac{1}{\rho}\sigma_{ij} = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}} \rightarrow \boxed{\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}}}$$

$\rho u = W$ چگالی انرژی کرنشی $\quad \rightarrow \boxed{\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}}$

$$W(\varepsilon_{ij}) = W(0) + \frac{\partial W_{(0)}}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial^2 W_{(0)}}{2\,\partial \varepsilon_{ij}\,\partial \varepsilon_{km}} \varepsilon_{ij}\varepsilon_{km} + \cdots$$

مبنا W = کرنش صفر $\longrightarrow W(0) = 0 \quad$ یا $\quad W(\varepsilon_{ij}=0) = 0$

$$\rightarrow W_{ij} = \frac{\partial W_{(0)}}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial^2 W_{(0)}}{2\,\partial \varepsilon_{ij}\,\partial \varepsilon_{km}} \varepsilon_{ij}\varepsilon_{km}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = ,$$

$$\frac{\partial W(\cdot)}{\partial \varepsilon_{km}} \varepsilon_{km} \quad = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} \left[\frac{\partial W(\cdot)}{\partial \varepsilon_{km}} \varepsilon_{km} \right] = \frac{\partial W(\cdot)}{\partial \varepsilon_{km}} \delta_{ki} \delta_{jm} = \frac{\partial W(\cdot)}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 W(\cdot)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{km}}}_{k} \quad (\varepsilon_{ij} \varepsilon_{km}) \downarrow (\varepsilon_{pq} \varepsilon_{km})$$

$$\to \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} (k \varepsilon_{pq} \varepsilon_{km}) = k \left(\delta_{pi} \delta_{qj} \varepsilon_{km} + \varepsilon_{pq} \delta_{ki} \delta_{mj} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W(0)}{\partial \varepsilon_{pq} \partial \varepsilon_{km}} \delta_{pi} \delta_{qj} \varepsilon_{km} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W(0)}{\partial \varepsilon_{pq} \partial \varepsilon_{km}} \varepsilon_{pq} \delta_{ki} \delta_{mj}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W(0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{km}} \varepsilon_{km} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W(0)}{\partial \varepsilon_{pq} \partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{pq} = \frac{\partial^2 W(0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{km}} \varepsilon_{km}$$

$$\to \sigma_{ij} = \frac{\partial W(0)}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial^2 W(0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{km}} \varepsilon_{km} + \cdots$$

$$\sigma_{ij} = C^{0}_{ijkm} \varepsilon_{km}$$

گر فرض کنیم تنش باقیمانده در جسم صفر باشد

$$\varepsilon_{ij} = 0 \to \sigma_{ij} = 0 \to \frac{\partial W(0)}{\partial \varepsilon_{ij}} = 0 \Longrightarrow$$

$$\to \sigma_{ij} = C_{ijkm} \varepsilon_{km} = \frac{\partial^2 W(0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{km}} \varepsilon_{km} \Rightarrow \boxed{C_{ijkm} = \frac{\partial^2 W(0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{km}}}$$

Hook's Law for isotropic media, elastic Constants $\boxed{(6.2)}$

با عنایت از جلسه قبل:

Material Constant

جنس ماده ← بدست آوردیم: $c_{ijkm} = \dfrac{\partial^2 w(0)}{\partial \varepsilon_{ij}\, \partial \varepsilon_{km}}$

C_{ijkm} نسبت به ij و نسبت به km متقارن است (Minor Symmetry)

C_{ijkm} نسبت به: ij و km نیز (جفت) متقارن است (Major Symmetry)

چنین موادی با شرایط بالا را hyperelastic گویند

(در کل 21 مولفه (ثابت) مستقل خواهیم داشت)

$$w(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} C_{ijkm}\, \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{km} = \frac{1}{2} \sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij}$$

$$w(\varepsilon_\alpha) = \frac{1}{2} C_{\alpha\beta}\, \varepsilon_\alpha\, \varepsilon_\beta = \frac{1}{2} \sigma_\alpha\, \varepsilon_\alpha$$

همگن

مواد Isotropic: موادی که خاصیت آن در یک نقطه در جهات مختلف یکسان است

می‌خواهیم این رفتار را به صورت تانسوری بیان کنیم

$$\sigma_{ij} = \underbrace{C_{ijkm}}_{\text{تانسور ایزوتروپیک}}\, \varepsilon_{km}$$

کلیه تانسورهای رتبه صفر (اسکالرها) ایزوتروپیک هستند

تانسور رتبه یک ایزوتروپیک نداریم

تانسور رتبه دو ایزوتروپیک مانند $\delta_{ij} = \delta'_{ij} = \delta''_{ij} = \delta'''_{ij} \cdots$

$\lambda \delta_{ij} \rightarrow$ باز هم ایزوتروپیک

تانسور رتبه سه ایزوتروپیک مانند $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon'_{ijk}$

جان فدای دهنش باد که در باغ نظر ✿ چمن آرای جهان خوشتر از این غنچه نبست
حافظ از دولت عشق تو سلیمانی شد ✿ یعنی از وصل تواش نیست بجز باد به دست

$$C_{ijkm} = C'_{ijkm}$$ لازمه ایزوتروپیک بودن ماده پلاستیک

$\underbrace{\delta_{ij}\delta_{km}}_{\text{ایزوتروپیک مرتبه ۴}}$ $\underline{\delta_{ik}\delta_{jm}}$ " " $\underline{\delta_{im}\delta_{kj}}$ " "

ترکیب خطی از عبارت‌های بالا باز هم ایزوتروپیک است

$$C_{ijkm} = \lambda \delta_{ij}\delta_{km} + \alpha \delta_{ik}\delta_{jm} + \gamma \delta_{im}\delta_{jk}$$

$$C_{ijkm} = \lambda \delta_{ij}\delta_{km} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jk}) + \beta(\delta_{ik}\delta_{jm} - \delta_{jm}\delta_{ik})$$

$$\Rightarrow C_{ijkm} = C_{jikm}$$

$$= \lambda \delta_{ji}\delta_{km} + \mu(\delta_{jk}\delta_{im} + \delta_{jm}\delta_{ik}) + \beta(\delta_{jk}\delta_{im} - \delta_{im}\delta_{jm})$$

$$\rightarrow \beta = -\beta \rightarrow \boxed{\beta = 0}$$

$$C_{ijkm} = \lambda \delta_{ij}\delta_{km} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jk})$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkm}\varepsilon_{km}$$ رابطه تنش - کرنش برای ماده الاستیک ایزوتروپیک

$$= \lambda \delta_{ij}\delta_{km}\varepsilon_{km} + \mu(\delta_{ij}\delta_{jm}\varepsilon_{km} + \delta_{im}\delta_{jk}\varepsilon_{km})$$

$$= \lambda \delta_{ij}\varepsilon_{kk} + \mu(\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji})$$

$$\boxed{\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij}}$$

ثابت λ و μ برای بدست آمدن ارتباط بین تنش و کرنش کافی خواهد بود

« λ, μ: Lame Constants »

شکفته شد گل حمرا و گشت بلبل مست / صلای سرخوشی ای صوفیان باده‌پرست / اساس توبه که در محکمی چو سنگ نمود / ببین که جام زجاجی چه طرفه‌اش بشکست

شهادت مظلومانه آیت‌الله دکتر بهشتی و ۷۲ تن از یاران امام خمینی (ره) با انفجار بمب به دست منافقان در دفتر مرکزی حزب جمهوری اسلامی (۱۳۶۰ ه‌ش) - روز قوه قضاییه

حال می خواهیم کرنش را برحسب تنش بدست آوریم

$$- \sigma_{ii} = \lambda \delta_{ii} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ii} \rightarrow \varepsilon_{ii} = \frac{\sigma_{ii}}{3\lambda + 2\mu} = \varepsilon_{kk}$$

جاگذاری در σ_{ij} $\Rightarrow$

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_{ij} - \frac{\lambda \delta_{ij} \sigma_{kk}}{3\lambda + 2\mu} \right]}$$

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \left\{ \left[1 + \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\right] \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right\}}$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

رابطه ثانویه $\longrightarrow$ $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} \left[(1+\nu) \sigma_{ij} - \nu \delta_{ij} \sigma_{kk} \right]$

اگر از E و ν و G و K دو تا را بدهند می توانیم μ و λ را بدست آوریم.

* اثبات کنید.

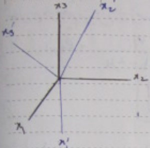
$$\begin{cases} S_{ij} = 2G \eta_{ij} \\ \sigma_{ii} = 3K \varepsilon_{ii} \end{cases}$$

Elastic Symmetry . Hook's law for anisotropic media $\boxed{(6.3)}$

مواد غیر ایزوتروپیک موادی هستند که در حالت کلی در یک نقطه در جهات مختلف خواص متفاوتی دارند

ولی ممکن است نسبت به بعضی محورها یا صفحات خواص یکسانی را بروز دهند.

equalent elastic directions



فرض: برای جهت خاص : $C_{ijkm} = C'_{ijkm}$

رفتار یکسان برای یک جهت خاص

۱. این جهت ممکن است یک محور باشد یا حول یک محور باشد. (یا حول یک محور و در زوایای خاص)

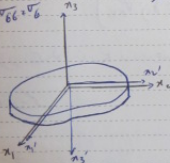
۲. و ممکن است نسبت به صفحه خاص رابطه فوق برقرار باشد

می‌خواهیم بدانیم 81 مولفه به چند مولفه تقلیل می‌یابد.

از جلسه قبل داشتیم

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \sigma_1 \\ \sigma_{22} = \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_{66} = \sigma_6 \end{cases}$$

ماده زیر نسبت به صفحه x_1x_2 رفتار یکسان داشته باشد



$$\rightarrow [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma'_{ij} = a_{ip} a_{jq} \sigma_{pq}$$

$$[\sigma'_{ij}] = [A][\sigma_{ij}][A]^T$$

به همین ترتیب $[\varepsilon'_{ij}] = [A][\varepsilon_{ij}][A]^T$

$$\begin{bmatrix} \sigma'_1 & \sigma'_6 & \sigma'_5 \\ \sigma'_6 & \sigma'_2 & \sigma'_4 \\ \sigma'_5 & \sigma'_4 & \sigma'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & \sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & \sigma_4 \\ \sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \sigma'_\alpha = \sigma_\alpha & \alpha = 1,2,3,6 \\ \sigma'_5 = -\sigma_5 \\ \sigma'_4 = -\sigma_4 \end{cases}$$

همین ترتیب برای εها داریم

$$\begin{cases} \varepsilon'_\alpha = \varepsilon_\alpha & \alpha = 1,2,3,6 \\ \varepsilon'_5 = -\varepsilon_5 \\ \varepsilon'_4 = -\varepsilon_4 \end{cases}$$

$C'_{\alpha p} = C_{\alpha p}$

$$\sigma_\alpha = C_{\alpha p}\,\varepsilon_p \longrightarrow \sigma'_\alpha = C_{\alpha p}\,\varepsilon'_p$$

$$\alpha = 1 \rightarrow \sigma_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + \cdots + C_{16}\varepsilon_6$$

$$\alpha = 1 \longrightarrow \sigma'_1 = C_{11}\varepsilon'_1 + \cdots + C_{16}\varepsilon'_6$$

$$\longrightarrow \sigma_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{13}\varepsilon_3 - C_{14}\varepsilon_4 - C_{15}\varepsilon_5 + C_{16}\varepsilon_6$$

$$\longrightarrow C_{14} = -C_{14} \longrightarrow C_{14} = 0$$

$$C_{14} = -C_{15} \longrightarrow C_{15} = 0$$

$$\longrightarrow \begin{cases} C_{24} = C_{25} = C_{34} = C_{35} = C_{41} \\ = C_{42} = C_{43} = C_{46} = C_{54} = \\ = C_{52} = C_{53} = C_{56} = C_{64} = C_{65} = 0 \end{cases}$$

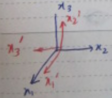
$$\rightarrow [C_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \cdot & \cdot & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \cdot & \cdot & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

اگر بازهم تقارن اعمال کنیم Reflection $x_2 x_3$

$$[C_{\alpha\beta}]_r \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

- مواردی که نسبت به سه صفحه رفتار یکسان (الاستیک) داشته باشند مواد ارتوتروپیک گویند و به ۹ مولفه $C_{\alpha\beta}$ احتیاج خواهد داشت.

حال فرض کنیم این ماده نسبت به محور x_1، 90° بچرخیم و بازهم رفتار الاستیکی یکسان داشته باشیم خواهیم داشت.



$C_{12} = C_{13}$

$C_{21} = C_{31}$

$C_{22} = C_{33}$ $\rightarrow 9 - 5 = 4$

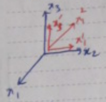
$C_{23} = C_{32}$

$C_{55} = C_{66}$

ولادت حضرت علی اکبر علیه‌السلام (۳۳ ه‌ق) و روز جوان - شهادت آیت‌الله صدوقی چهارمین شهید محراب به دست منافقان (۱۳۶۱ ه‌ش)

وقتی حول x_3 ، ۹۰ درجه بچرخیم و باز هم رفتار الاستیکی یکسان داشته باشیم خواهیم داشت

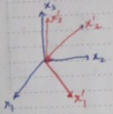
$$2C_{44} = C_{11} - C_{12} \qquad 4-1=3$$



$$\left\{\begin{array}{l} C_{12}=C_{21} \quad C_{11}=C_{22} \\ C_{13}=C_{23} \\ C_{31}=C_{32} \\ C_{44}=C_{55} \end{array}\right.$$

وقتی حول محور x_3 ، ۴۵ درجه بچرخیم، داریم:

$$2C_{44} = C_{11} - C_{12}$$



$$\longrightarrow [C_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

$C_{12} = \lambda$

$C_{44} = \mu$

جلسه 25 - 91/10/4

اگر λ، μ را در آخرین ماتریس برحسب E، ν بنویسیم خواهیم داشت:

$$\sigma_\alpha = C_{\alpha\beta}\,\varepsilon_\alpha$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\\ \sigma_5\\ \sigma_6\end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0\\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0\\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \varepsilon_4\\ \varepsilon_5\\ \varepsilon_6\end{Bmatrix}$$

Isotropic elasto static and elastodynamics, Superposition principles $\boxed{(6.4)}$

معادلات مربوط به محیط پیوسته الاستیک در حال تعادل یا در حال دینامیک (شتاب‌دار)

a) Equilibrium Eq. $\quad \sigma_{ij,j} + \rho b_i = 0 \quad$ معادلات تعادل

$\longrightarrow$ [illegible] مستقل است

b) Strain-displacement relation $\quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$

c) Hook's law

$$\begin{cases}\sigma_{ij} = \lambda\,\delta_{ij}\,\varepsilon_{kk} + 2\mu\,\varepsilon_{ij}\\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\,\delta_{ij}\,\sigma_{kk}\right]\end{cases}$$

با داشتن روابط بالا معادله انرژی $\sigma_{ij} D_{ij}$ و $\frac{1}{2}\rho \dot{u}^2$ نیز برقرار است اما اگر تغییرات دمایی (انتقال حرارت) داشته باشیم بایستی نوشته شود

* یک محیط پیوسته تحت یک بارگذاری + شرایط مرزی و اولیه:

مجهولات u_i و ε_{ij} (۶ تا) ، σ_{ij} (۶ تا)

⟵ بایستی 15 معادله داشته باشیم.

(a) → 3 معادله

(b) → 6 معادله

(c) → 6 معادله

اگر انتقال حرارت داشتیم مجهول دما نیز اضافه می‌شد آنگاه معادله ــــ نیز اضافه می‌شد.

• شرایط مرزی و اولیه بایستی مشخص باشد:

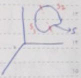
سه نوع شرط مرزی

B.C:

1- جابجایی همه‌جا معلوم باشد

Displacement prescribed everywhere

$$u_i = u_i^*(\vec{x}) \quad \text{on } S$$



2- traction همه‌جا معلوم باشد

Traction

$$t_i^{(\hat{n})} = t_i^{*(\hat{n})}(\vec{x}) \quad \text{on } S$$

3-

Displacement prescribed on portion S_1 of S $\quad u_i = u_i^*(\vec{x})$ on S_1

with traction prescribed on the remainder S_2 $\quad t_i^{(\hat{n})} = t_i^{*(\hat{n})}(\vec{x})$ on S_2

مقادیر * دار مقادیر معلوم مسئله هستند.

در این مسائل که بررسی می‌کنیم به دلیل کوچک بودن تغییر شکل‌ها و خطی بودن روابط می‌توان از اصل برهم نهی (جمع آثار) استفاده نمود.

وقتی سیستم نیروهای زیر وارد شوند.

$$\underbrace{\overset{*(\hat{n}_1)(1)}{t_i} \quad \overset{*(1)}{b_i}}_{} \qquad \underbrace{\overset{*(\hat{n}_2)(2)}{t_i} \quad \overset{*(2)}{b_i}}_{}$$

اثر ↓   اثر ↓

$$\sigma_{ij}^{(1)} \qquad \sigma_{ij}^{(2)} \qquad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}$$

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} \qquad \varepsilon_{ij}^{(2)} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)}$$

$$u_i^{(1)} \qquad u_i^{(2)} \qquad u_i = u_i^{(1)} + u_i^{(2)}$$

معادلات بدست آمده برحسب شرایط مرزی جابجایی (تغییر مکان) را می‌توان به شکل معادلات ناویر نوشت، (روابط تنش و کرنش را برحسب جابجایی‌ها u_i ها نوشت)

معادله مرتبه دو خطی با مشتقات جزئی →

$$\boxed{\mu u_{i,jj} + (\lambda+\mu) u_{j,ji} + \rho b_i = 0}$$

b_i ها معلوم

Navier Eq.

• ممکن است شرایط مرزی برحسب تنش باشد می‌توان از معادلات Compatability استفاده کرد

$$\varepsilon_{ij,km} + \varepsilon_{km,ij} - \varepsilon_{ik,jm} - \varepsilon_{jm,ik} = 0$$

★ بدست آورید ،

$$\boxed{\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,ij} + \rho\left(b_{i,j} + b_{j,i}\right) + \frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij}\,\rho\, b_{k,k} = 0}$$

رابطه سازگاری بلترامی-میشل Beltrami-Mishell stress equations of compatibility

اگر مسئله ریاضی (تشابه دار) باشد در قسمت دوم بایستی از ترم ... استفاده نمود،

$\varepsilon_{ij}^{(1)}$ و $\sigma_{ij}^{(2)}$ و $\varepsilon_{ij}^{(3)}$ متقابل

[illegible]

$\longrightarrow \sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \longrightarrow$ احتیاج به شرایط اولیه و مرزی

$$\begin{cases} u_i = u_i^*(\vec{x},0) \text{ on } S \\ \dot{u}_i = \dot{u}_i^*(\vec{x},0) \text{ on } S \end{cases} \xleftrightarrow{+} \begin{cases} u_i = u_i^*(\vec{x},t) \\ t_i^{(\hat{n})} = t_i^{*(\hat{n})}(\vec{x},t) \end{cases}$$

شرایط اولیه + شرایط مرزی

معادلات ناویر برای حالت دینامیک به شکل زیر درخواهد آمد:

$$\boxed{\mu u_{i,jj} + (\lambda+\mu) u_{j,ji} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i}$$