تغییر شکل مجموعه‌های خمشی و مفصلی

روش لنگر مساحت

مقدمه:

تغییر شکل تیر و سازه‌ها در موارد بسیاری مورد لزوم و از اهمیت خاصی برخوردار می‌باشد. به عنوان مثال، در طراحی سازه‌ها، یکی از معیارهای تعیین کننده، تغییر مکان است، به این معنا که تغییر مکان‌های الاستیک سازه‌ها، نباید از تغییر مکان‌های مجاز تجاوز نماید، اگرچه مقاومت در اثرز موارد تعیین کنند است، لیکن گاهی معیار سختی، عامل مهم و تعیین کننده می‌باشد.

در این مثال‌ها، تغییر شکل تیرها و سازه‌های معین، به علت تاثیر بارهای خارجی، مورد بررسی قرار می‌گیرد. این بررسی و مطالعه در محدوده تغییر شکل‌های کوچک انجام می‌شود و در تمام حالات فرض می‌شود که مصالح در ناحیه الاستیک قرار دارند و قانون هوک در مورد آنها صادق است. به همین جهت این نوع تغییر شکل‌ها، به تغییر شکل‌های الاستیک معروفند.

روش لنگر مساحت:

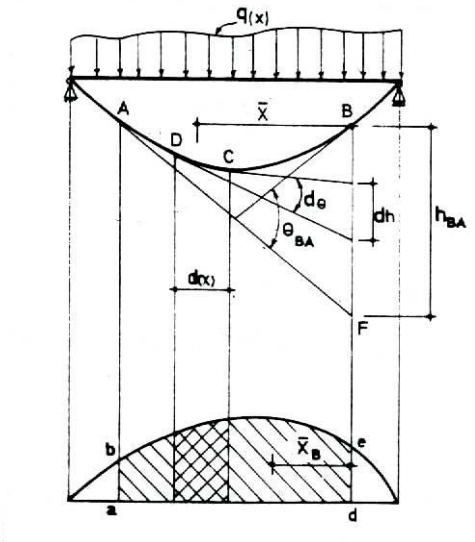
برای تعیین تغییر مکان و شیب تیرها، روش‌های مختلفی وجود دارد که هر کدام از آنها، ویژگی خاص خود را دارا می‌باشد. یکی از این روش‌ها، روش لنگر مساحت است که معمولاً در صورتی که نیروهای خارجی موثر برتیر یکسان نبوده و یا تیر از دو جنس مختلف و یا از دو مقطع متفاوت درست شده باشد، یکی از

سهل‌ترین و سریعترین روش‌ها برای تعیین شیب و یا تغییر ناگهانی هر نقطه از تیر محسوب می‌شود.

در این بررسی، ابتدا چگونگی تعیین شیب و تغییر مکان یک نقطه با ترسیم نمودار لنگر خمشی و محاسبه سطح و ممان این سطح، نسبت به نقاط معین تشریح می‌گردد و سپس چگونگی تحلیل نیروهای نامعین با این روش بیان خواهد شد.

نظر به اینکه برای محاسبه شیب و تغییر مکان از سطح زیرمنحنی لنگر خمشی استفاده می‌گردد، بدین جهت این روش را لنگر مساحت می‌نامند.

برای اثبات قضایای مربوط به لنگر مساحت، شکل زیر را درنظر می‌گیریم:



قضیه اول:

تغییر شیب بین دو نقطه A, B یعنی اندزه θ_{BA} از منحنی الاستیک برابر مساحت منحنی لنگر خمشی تقسیم بر EI دو نقطه B, A از تیر می‌باشد، یعنی:

$$\theta_{BA} = \int_A^B \frac{M}{EI} d_x \Rightarrow \theta_B = \theta_A + \theta_{BA}$$

توجه به این نکته بسیار ضروری است که در صورت مثبت بودن لنگر خمشی، علامت مساحت منحنی $\frac{M}{EI}$ مثبت و در صورا منفی بودن لنگر خمشی، علامت مساحت منحنی $\frac{M}{EI}$ منفی خواهد بود.

قضیه دوم:

اندازه فاصله BF که در حقیقیت خط مار بر نقطه B و عمود بر وضع ابتدایی تیر از منحنی الاستیک نسبت به مماس بر منحنی الاستیک در نقطه A می‌باشد، برابر است با ممان استاتیک مساحت منحنی $\frac{M}{EI}$ بین دو نقطه A, B نسبت به محوری که از BF عبور می‌کند.

اثبات:

با رجوع به شکل (الف ـ ۱)، ملاحظه می‌گردد که خطوط مماس بر نقطه بی‌نهایت نزدیک D, C خط BF را در دو نقطه به فاصله بی‌نهایت کوچک dh قطع می‌نماید. می‌توان نوشت:

$$dh = \overline{X}.d\theta$$

حال برای بدست آوردن h_{BA} باید اثر تمام المان‌های از A تا B را بدست آوردن و با هم جمع کرده و یا به عبارت دیگر انتگرال رابطه $dh = \overline{X}.d\theta$ را بین دو نقطه B, A بدست آورد:

$$h_{BA} = \int_A^B dh = \int_A^B \overline{X}.dx$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که انحراف نقطه B از منحنی الاستیک نسبت به مماس بر منحنی الاستیک در نقطه A برابر است با لنگر سطح دیاگرام $\frac{M}{EI}$ حول محور عمودی که از نقطه B عبور می‌کند.

اثبات:

برای اثبات قضیه دوم می‌دانیم که رابطه دیفرانسیلی تغییر مکان با ممان خمشی در هر مقطع از تیر برابر است با:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

که در آن y مقدار تغییر مکان هر نقطه واقع بر محور طولی و M ممان در همان مقطع از تیر می‌باشد. رابطه فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI}.d\theta = \frac{M}{EI}dx$$

حال مطابق شکل زیر، قطعه‌ای به طول dx از تیر مورد بحث را درنظر بگیرید که بعد از خمش به صورت DC درآمده است. اگر مماسی در نقطه C رسم کنیم، زاویه $d\theta$ بوجود می‌آید که این زاویه در حقیقت تغییر زاویه نقطه C نسبت به D در فاصله dx می‌باشد. با توجه به رابطه بدست آمده، $d\theta$ برابر حاصلضرب $\frac{M}{EI}$ در اندازه dx و یا مساحت هاشور خورده در شکل بین دو نقطه $D.C$ است.

بنابراین ملاحظه می‌گردد که اختلاف شیب بی‌نهایت کوچک $d\theta$ برابر سطح بی‌نهایت کوچک هاشورخورده از منحنی تقسیم لنگر خمشی بر صلبیت خمشی

است، حال برای اینکه مقدار θ_{BA} یعنی تغییر زاویه در نقطه A را بدست می‌آوریم. کافی است انتگرال $d\theta$ را بین دو نقطه $B.A$ محاسبه کنیم. یعنی:

$$\int_A^B d\theta = \theta B.\theta A = \theta_{BA} == \int_A^B \frac{M}{EI} dx$$

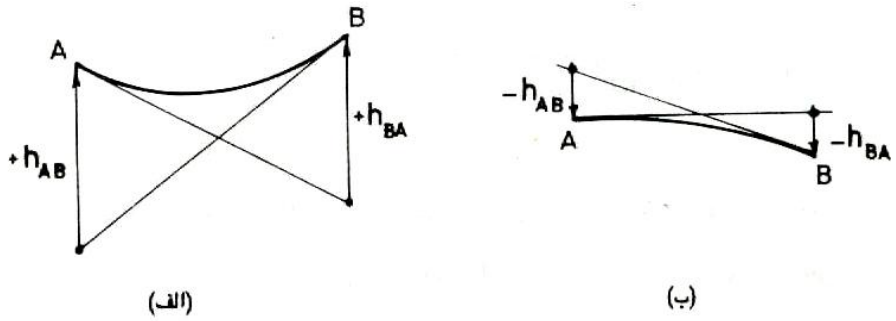
از رابطه فوق ملاحظه می‌گردد که تغییر زاویه بین دو مماس از هر دو نقطه مانند $B.A$ روی منحنی الاستیک خمشی برابر است با مساحت دیاگرام $\frac{M}{EI}$ بین دو نقطه $B.A$ (مساحت $abcd$ روی شکل زیر).

بنابراین اگر شیب یک نقطه از منحنی الاستیک خمشی مشخص باشد، مقدار شیب هر نقطه مانند B از رابطه زیر بدست می‌آید:

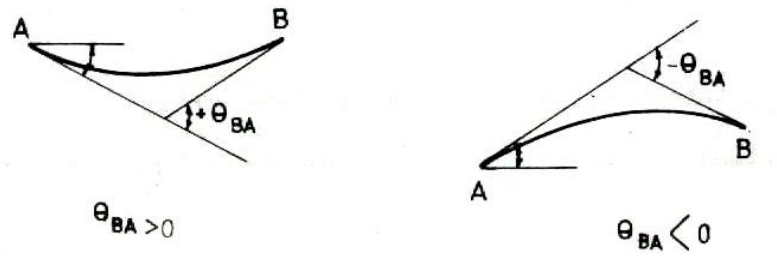
با رجوع به شکل زیر، مشاهده می‌گردد که مقدار h_{BA} روی خط Bd برابر حاصل‌ضرب مساحت سطح $abcd$ در فاصله مرکز ثقل این سطح تا خط Bd می‌باشد. h_{BA} انحراف مماسی نقطه B نسبت به نقطه A نامیده می‌شود.ذ

قاعده علامت‌گذاری

الف) مطابق شکل زیر، انحراف نقطه B نسبت به مماس در نقطه A در صورتی مثبت می‌باشد که نقطه B بالای مماس مزبور قرار گرفته باشد، در غیر اینصورت منفی است.



ب) مطابق شکل زیر، اگر مماس بر نقطه سمت چپ تیر (نقطه ***A***) بتواند زاویه حاده θ_{BA} را با گردش در جهت مثلثاتی طی کند و بر مماس نقطه سمت راست تیر (تیر ***B***) منطبق گردد. θ_{BA} مثبت و اگر برای انطباق، این زاویه حاده با گردش در جهت عقربه‌های ساعت طی شود، θ_{BA} منفی خواهد بود.



نمونه سوال

سوال ۱) با استفاده ازقضایای لنگر مساحت تغییر مکان نقاط ***c, b*** و همچنین شیب در نقطه ***b*** را در تیر یک سر گیردار بدست آورید (***EI*** ثابت است).

$$h_{ba} = (\frac{45}{EI})(\frac{1.5}{2})(\frac{2}{3}*1.5)$$

$$h_{ba} = \delta_b = \frac{33.75}{EI}$$

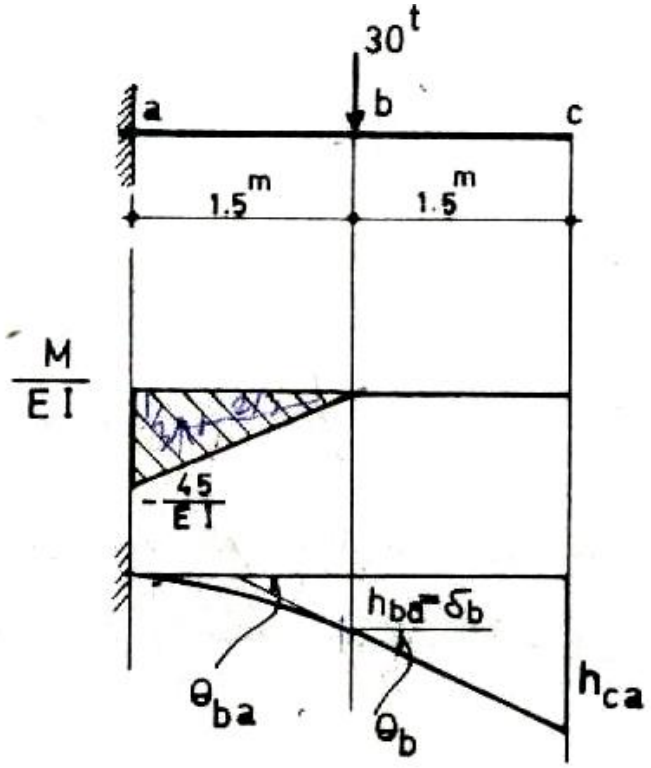
$$h_{ca} = (\frac{45}{EI})(\frac{1.5}{2})(\frac{2}{3}*1.5+1.5)$$

$$h_{ca} = \delta_c = \frac{84.375}{EI}$$

$$\theta_{ba} = \theta_b - \theta_a = \theta_b$$

$$\theta_{ba} = \theta_b = (\frac{4.5}{EI})(\frac{1.5}{2})$$

$$\theta_{ba} = \theta_b = \frac{33.75}{EI}$$



سوال ۲) با استفاده از قضایای لنگر مساحت، تغییر مکان نقطه ***b*** و شیب در نقطه ***a*** از تیر ساده دو سر مفصل را بدست آورید (***EI=const***).

$$\frac{de}{h_{ca}} = \frac{x}{L} \qquad or \qquad de = \frac{x}{L}.h_{ca}$$

$$\Delta_d = de - h_{da} \Rightarrow \Delta_d = de - h_{da}$$

$$\Delta_b = bd - h_{ba} \Rightarrow bd = \tfrac{2}{3} h_{ca}$$

$$\Delta_b = \tfrac{2}{3} h_{ca} - h_{ba}$$

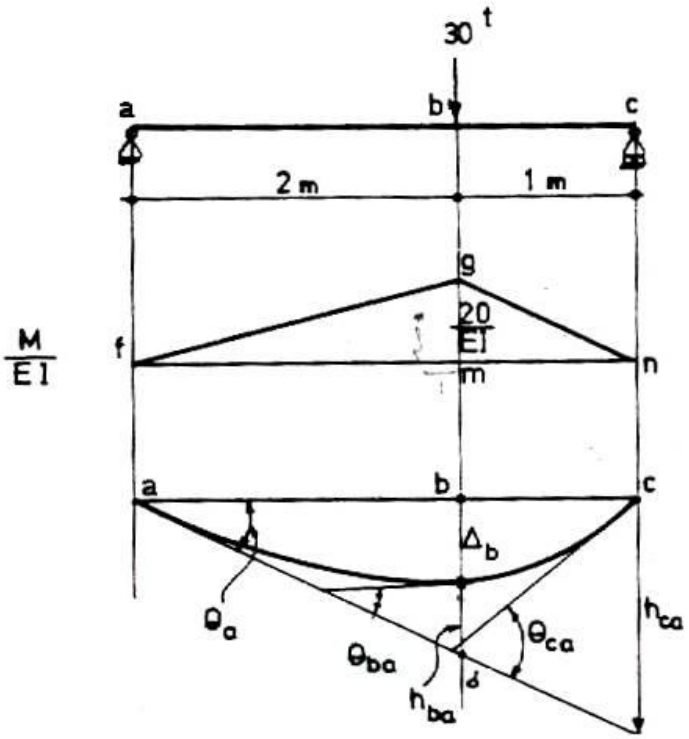
$$h_{ca} = (\frac{20}{EI})(\frac{2}{2})(\frac{2}{3}+1) + (\frac{20}{EI})(\frac{1}{2})(\frac{2}{3}) = \frac{40}{EI}$$

$$h_{ba} = (\frac{20}{EI})(\frac{2}{2})(\frac{2}{3}) = \frac{40}{3EI}$$

$$\Delta_b = \tfrac{2}{3}(\frac{40}{EI}) - \frac{40}{3EI} \Rightarrow \Delta_b = \frac{40}{3EI}$$

$$\theta_a = \tan\theta_a = \frac{h_{ca}}{L} = \frac{40/EI}{3}$$

$$\theta_a = \frac{40}{3EI}$$



سوال ۳) با استفاده از قضایای لنگر مساحت تغییر مکان ماکزیمم تیر دو سر مفصل را بدست آورید.

$$h_{AB} = \frac{3pa}{4EI}(\frac{a}{2})(\frac{2a}{3}) + (\frac{3pa}{4EI})(\frac{3a}{2})(a + \frac{1}{3}(3a)$$

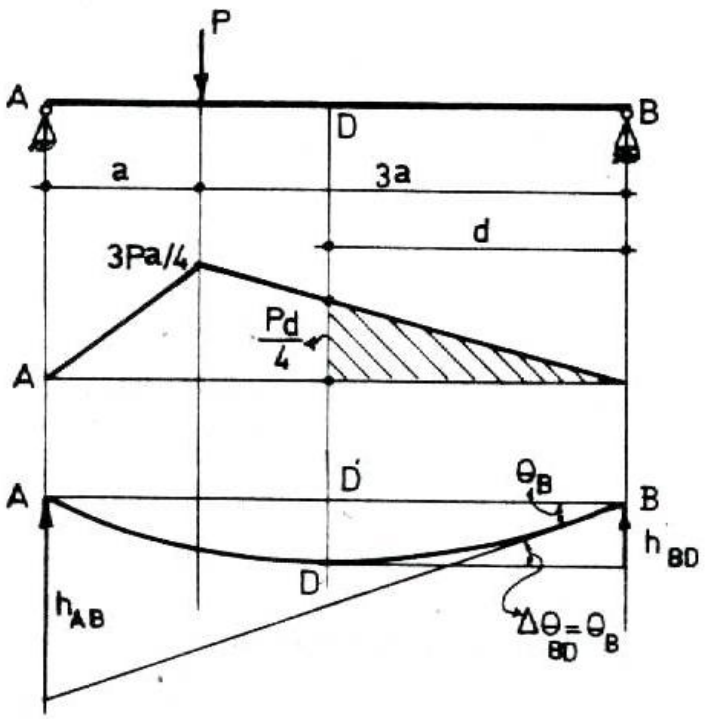
$$h_{AB} = \frac{5pa^3}{2EI}$$

$$\theta_B = \frac{h_{AB}}{L}, \qquad \theta_B = \frac{5pa^3}{2EI} * \frac{1}{4a}, \qquad \theta_B = \frac{5pa^2}{8EI}$$

$$\Delta\theta_{BD} = \theta_B = \frac{1}{EI}(\frac{d}{2} * \frac{pd}{4}) = \frac{pd^2}{8EI} = \frac{5pa^2}{8EI}$$

$$d = a\sqrt{5} \Rightarrow h_{BD} = \frac{1}{EI}(\frac{d}{2} * \frac{pd}{4})(\frac{2d}{3}) = \frac{pd^3}{12EI}$$

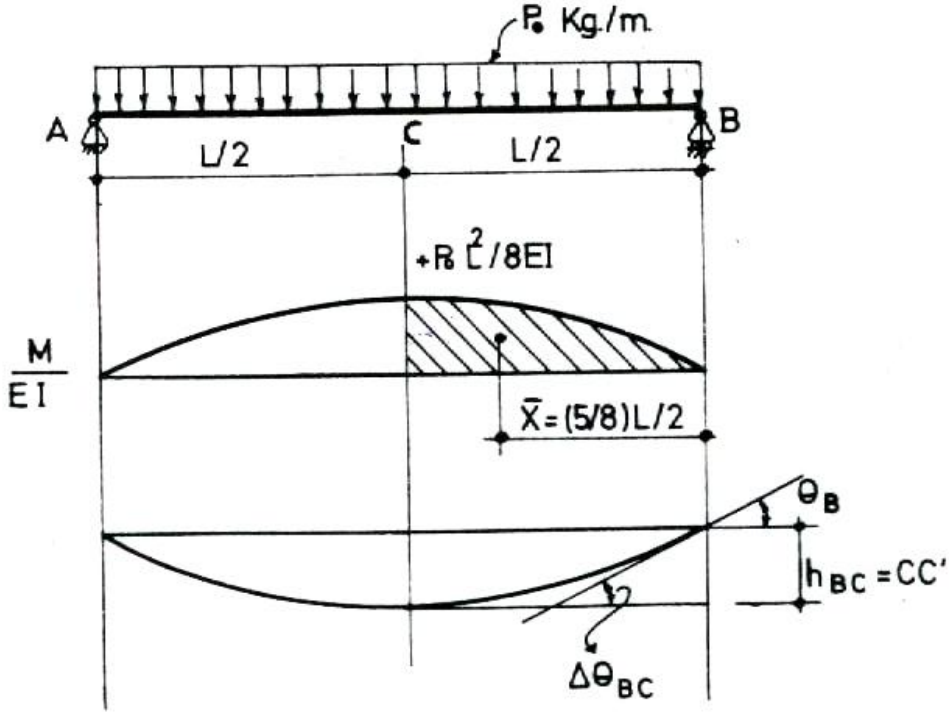
$$DD' = Y_{\max} = \frac{11.29a^3}{12EI}$$



سوال ۴) با استفاده از قضایای لنگر مساحت، تغییر مکان وسط دهانه (تغییر مکان ***max***) و شیب در نقطه ***B*** از تیر دو سر مفصل را بدست آورید (***EI=const***).

$$Y_{\max} = Y_c = h_{BC} = (\frac{pol^2}{8EI})(\frac{2}{3} * \frac{l}{2}).\overline{X} = (\frac{pol^3}{24EI})(\frac{5}{8} * \frac{l}{2})$$

$$\theta_B = \frac{pol^3}{24EI}$$



سوال ۵) با استفاده از قضیه دوم لنگر، مساحت تغییر مکان نقطه A از تیر شکل را بدست آورید.

$$h_{CB} = \phi_1 x_1 + \phi_2 x_2 + \phi_3 x_3$$

$$h_{CB} = \frac{1}{EI}[\frac{a}{2}(+pa)(\frac{2a}{3})\frac{1}{2}(\frac{a}{2})(+pa)(a+\frac{1}{3}*\frac{a}{2})+\frac{1}{2}(\frac{a}{2})(-pa)(\frac{3a}{2}+\frac{2a}{3*2})]$$

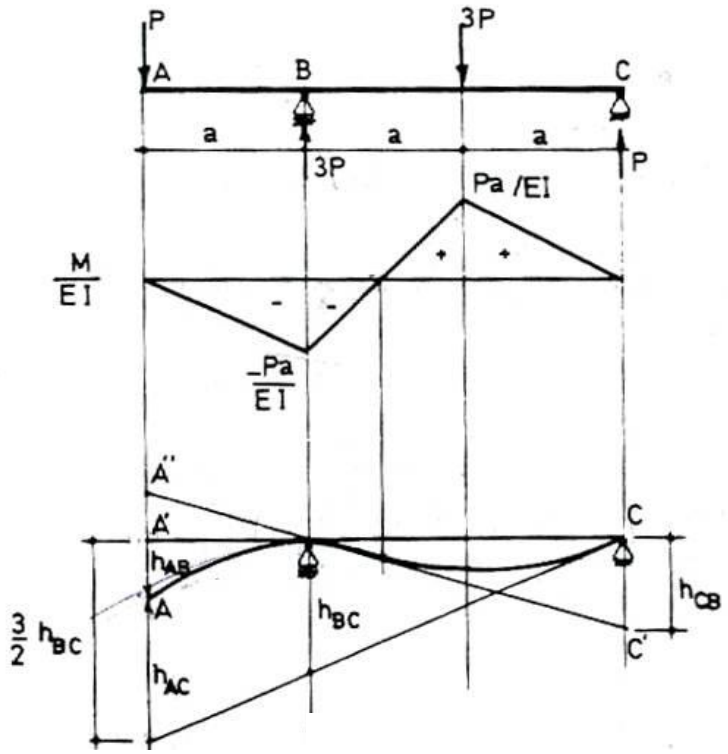
$$h_{CB} = \frac{pa^3}{26EI}$$

$$Y_A = AA' = AA'' - A'A'' = h_{AB} - \frac{h_{CB}}{2}$$

$$h_{AB} = \frac{1}{EI}[\frac{a}{2}(-pa)(\frac{2a}{3})] = -\frac{pa^3}{3EI}$$

$$Y_A = AA' = \frac{pa^3}{3EI} - \frac{pa^3}{6EI}*\frac{1}{2}$$

$$Y_A = \frac{pa^3}{4EI}$$



سوال ۶) با استفاده از قضیه دوم لنگر مساحت، تغییر مکان نقطه ***A*** از تیر شکل را بدست آورید. صلبیت خمشی ***EI*** در طول تیر تغییر می‌کند.

$$(\frac{M}{EI})_{A^-} = \frac{M/2}{EI} = \frac{M}{2EI}$$

$$(\frac{M}{EI})_{A^+} = \frac{M/2}{E(4I)} = \frac{M}{8EI}$$

$$(\frac{M}{EI})_c = \frac{M}{E(4I)} = \frac{M}{4EI}$$

$$AA' = AA'' - A'A'', \; AA'' = \frac{1}{2}h_{cb}, \; A'A'' = h_{AB}$$

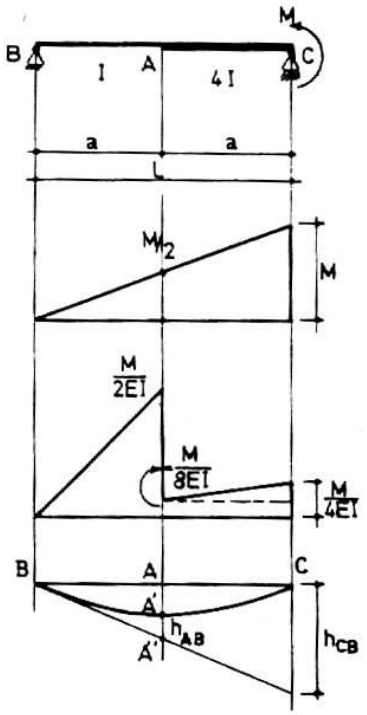
$$\Delta_A = AA' = \tfrac{1}{2}h_{CB} - h_{AB}$$

$$h_{AB} = \tfrac{1}{2}(\frac{M}{2EI} * a)(\frac{1}{3}a)$$

$$h_{CB} = (\frac{5Ma^2}{12EI}), \qquad h_{AB} = \frac{Ma^2}{12EI}$$

$$\Delta_A = \frac{1}{2}(\frac{5Ma^2}{12EI}) - (\frac{Ma^2}{12EI})$$

$$\Delta_A = (\frac{Ma^2}{8EI}) \qquad or \qquad \Delta_A = \frac{Ml^2}{32EI})$$



سوال ۷) با استفاده از قضیه دو سر لنگر مساحت، تغییر مکان نقطه ***A*** از تیر

شکل را بدست آورید (صلبیت خمشی ***EI*** ثابت است).

$$AA' = AA'' - A'A'', \quad AA'' = \frac{3}{4}h_{bc}, \quad A'A'' = h_{AC}$$

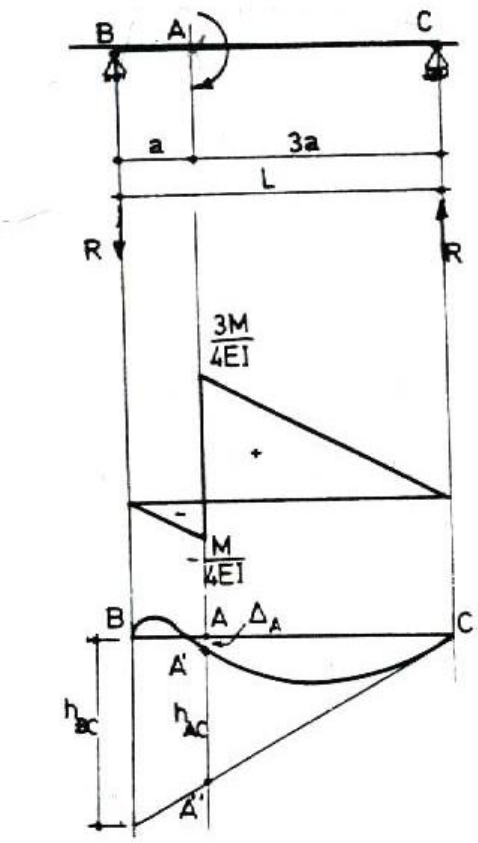
$$h_{BC} = [\frac{1}{2}(\frac{3M}{4EI} * 3a)(\frac{1}{3} * 3a + a) + \frac{1}{2}(-\frac{M}{4EI} * a)(-\frac{2}{3}a)]$$

$$h_{AC} = \frac{1}{2}(\frac{3M}{4EI} * 3a)(\frac{1}{3} * 3a)$$

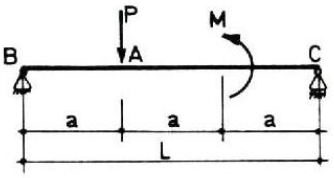
$$h_{BC} = \frac{13Ma^2}{6EI}, h_{AC} = \frac{9Ma^2}{28EI}$$

$$\Delta_A = \frac{3}{4}(\frac{13Ma^2}{6EI}) - (\frac{9Ma^2}{8EI})$$

$$\Delta_A = \frac{Ma^2}{2EI} \qquad or \qquad \Delta_A = \frac{ML^2}{32EI}$$



سوال ۸) با استفاده از قضیه دوم لنگر مساحت، تغییر مکان A از تیر شکل را بدست آورید ($EI=const$).



$$\Delta_A = \Delta_1 + \Delta_2$$

$$\Delta_1 = AA' = AA'' - A'A'',\ AA'' = \tfrac{1}{3} h_{cb},\ A'A'' = h_{AB}$$

$$h_{CB} = [\tfrac{1}{2}(\frac{2pa}{3EI} * a)(\frac{a}{2} + 2a) + \tfrac{1}{2}(\frac{2pa}{3EI} * 2a)(\frac{2}{3} * 2a)] = \frac{5pa^3}{3EI}$$

$$h_{AB} = \frac{1}{2}(\frac{2pa}{3EI} * a)(\frac{a}{3}) = \frac{p.a^3}{9EI}$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{3}(\frac{5pa^3}{3EI}) - \frac{pa^3}{9EI} = \frac{4pa^3}{9EI}$$

حالت دوم: محاسبه Δ_2

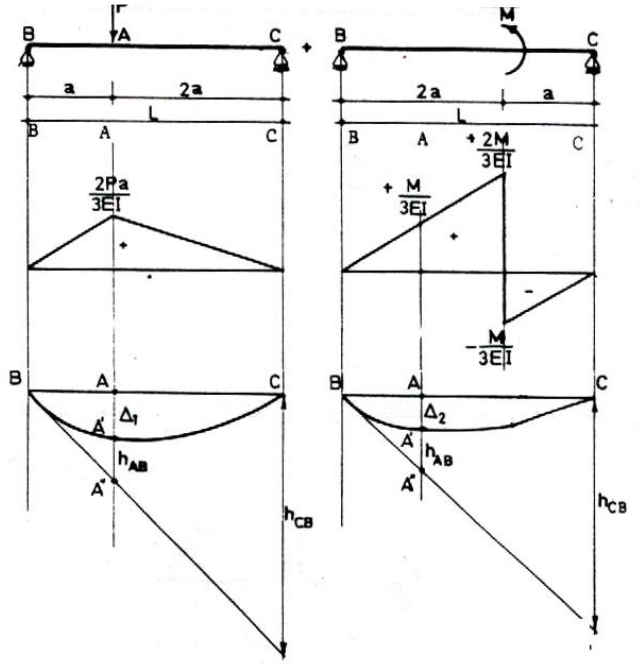
$$\Delta_2 = \tfrac{1}{3} h_{CB} - h_{AB}$$

$$h_{CB} = [\tfrac{1}{2}(\frac{2M}{3EI} * 2a)(\frac{2a}{3} + a) - \frac{1}{2}(\frac{M}{3EI} * a)(\frac{2a}{3})] = \frac{Ma^3}{EI}$$

$$h_{AB} = \tfrac{1}{2}(\frac{M}{3EI} * a)(\frac{p}{a}) = \frac{Ma^3}{18EI}$$

$$\Delta_2 = \tfrac{1}{3}(\frac{Ma^2}{EI}) - (\frac{Ma^2}{18EI}) = \frac{5Ma^2}{18EI}$$

$$\Delta_A = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{4pa^3}{9EI} + \frac{5Ma^2}{18EI}$$



سوال ۹) با استفاده از قضیه دوم لنگر مساحت، تغییر مکان نقطه B را از تیر شکل بدست آورید.

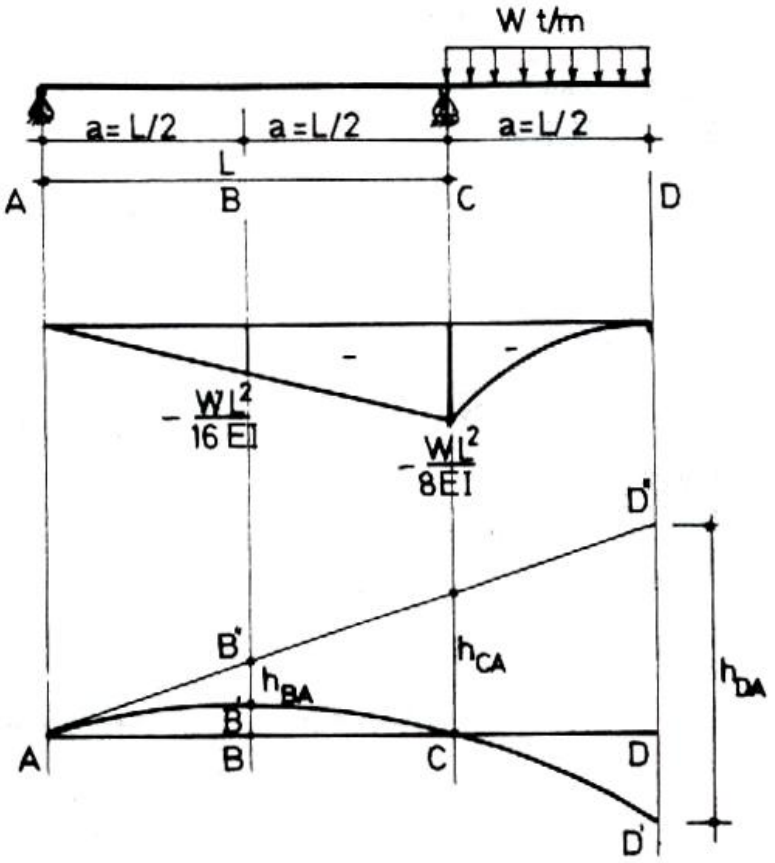
$$\Delta_B = BB' + BB'' - B'B'', \; BB'' = \frac{h_{CA}}{2}$$

$$B'B'' = h_{BA}$$

$$h_{CA} = \frac{1}{2}\left(\frac{-WL^2}{8EI}.L\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-WL^2}{48EI}$$

$$h_{BA} = \frac{1}{2}\left(\frac{-WL^2}{16EI}.\frac{L}{2}\right)\left(\frac{1}{3}.\frac{L}{2}\right) = \frac{-WL^4}{384EI}$$

$$\Delta_B = \tfrac{1}{2}\left(\frac{WL^4}{48EI}\right) - \frac{WL^4}{384EI} \Rightarrow \Delta_B = \frac{WL^4}{128EI}$$



سوال ۱۰) با استفاده از قضیه دوم لنگر مساحت در مثال شماره ۹، تغییر مکان نقطه ***D*** را بدست آورید.

$$AD = DD' = D'D'' - DD''$$

$$D'D'' = h_{DA},\ DD'' = \frac{3}{2}h_{CA}$$

$$h_{DA} = [\frac{1}{2}(-\frac{WL^2}{8EI}.L)(\frac{L}{3}+\frac{L}{2}) + \frac{1}{3}(-\frac{WL^2}{8EI}.\frac{L}{2})(\frac{3}{4}.\frac{L}{2})] = \frac{23WL^4}{384EI}$$

$$AD = \frac{23L^2}{384EI} = -\frac{3}{4}(\frac{WL^4}{48EI}) \Rightarrow AD = \frac{11WL^4}{384EI}$$

سوال ۱۱) با استفاده از قضیه دوم لنگر مساحت، تغییر مکان نقطه C از تیر مقابل را بدست آورید.

$$(\frac{M}{EI})_{D^-} = \frac{\frac{pa}{2}}{EI}\frac{pa}{2EI}$$

$$(\frac{M}{EI})_{D^+} = \frac{\frac{pa}{2}}{EI(2I)} = \frac{pa}{4EI}$$

$$(\frac{M}{EI})_{E^-} = \frac{pa}{4EI}$$

$$(\frac{M}{EI})_{E^+} = \frac{pa}{2EI}$$

$$(\frac{M}{EI})_C = \frac{pa}{2EI}$$

$$\Delta_C = CC' = CC'' - C'C'', CC'' = \frac{h_{AB}}{2}$$

$$C'C'' = h_{CA}$$

$$h_{AB} = [\tfrac{1}{2}(\frac{pa}{2EI}.a)(\frac{a}{3}+3a) + (\frac{pa}{4EI}.2a)*(2a) + \frac{1}{2}(\frac{pa}{4EI}.2a)(2a) + \frac{1}{2}(\frac{pa}{2EI}.a)(\frac{2a}{3})$$

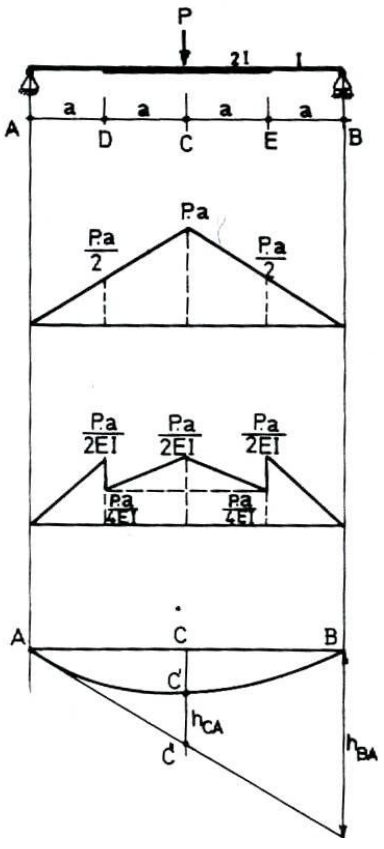
$$= \frac{5pa^3}{2EI}$$

$$h_{CA} = [\frac{1}{2}(\frac{pa}{2EI}.a)(a+\frac{a}{3}) + (\frac{pa}{4EI}.a)(\frac{a}{2}) + \frac{1}{2}(\frac{pa}{4EI}.a)(\frac{a}{3})]$$

$$= \frac{pa^3}{2EI}$$

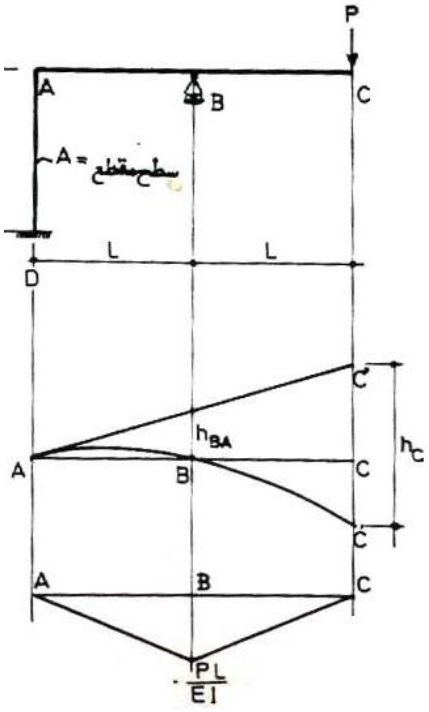
$$\Delta_C = \frac{1}{2}(\frac{5pa^3}{2EI}) - (\frac{pa^3}{2EI}) \Rightarrow \Delta_C = \frac{3pa^3}{4EI}$$

$$\left(\frac{M}{EI}\right)_{E^+} = \frac{Pa}{2EI}$$



سوال ۱۲) با استفاده از قضیه هر دو لنگر مساحت، تغییر مکان نقطه C از سازه شکل مقابل را که متشکل از تیر AC و خرپای AD با سطح مقطع A بوده و تحت تاثیر بار متمرکز P در نقطه C قرار گرفته‌است را بدست آورید. EI در طول تیر AC ثابت است.

$$\Delta_1 = CC' = C'C'' - CC'', C'C'' = h_{CA}$$
$$CC'' = 2h_{BA}$$
$$h_{CA} = \frac{1}{2}(-\frac{pl}{EI}.2l)(l) = (-\frac{pl^3}{EI})$$
$$h_{BA} = \frac{1}{2}(-\frac{pl}{EI}.2l)(l) = (-\frac{pl^3}{6EI})$$
$$\Delta_1 = (\frac{pl^3}{3EI}) - 2(\frac{pl^3}{6EI}) \Rightarrow \Delta_1 = \frac{2pl^3}{3EI}$$
$$\Delta_A = \frac{pl}{EA} \Rightarrow \Delta_2 = \Delta_A = \frac{pl}{EA}$$
$$\Delta_C = \Delta_1 + \Delta_2 \Rightarrow \Delta_C = \frac{2pl^3}{3EI} + \frac{pl}{3EA}$$



سوال ۱۳) مطلوب است Δ_B, Δ_C در تیر مقابل.

$$\theta_{\max} = \theta_C = \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot - \frac{ql^2}{8EI} = - \frac{ql^3}{48EI}$$

$$\Delta_B = - \frac{ql^3}{40EI} \cdot \frac{3l}{8} = - \frac{3ql^4}{384EI}$$

سوال ۱۴) مطلوب است افت و تغییر مکان در نقطه B از تیر مقابل

$$\theta_B = -\frac{pl}{2}.\frac{l}{2}.\frac{1}{2} = -\frac{pl^2}{8EI} = \theta_B$$

$$\Delta_B = -\frac{pl^2}{8EI}.\frac{l}{6} = -\frac{pl^3}{48EI}$$

سوال ۱۵) مطلوب است تعیین مقدار Δ,θ در تیر مقابل در نقطه ***B***.

$$\theta_B = \frac{1}{3}.l.\frac{ql^2}{2} = -\frac{ql^3}{6EI}$$

$$\Delta_B = -\frac{ql^3}{6EI}.\frac{3}{4}3l = -\frac{3ql^4}{24EI}$$