Chapter Six

حركت و تغيير شكل :

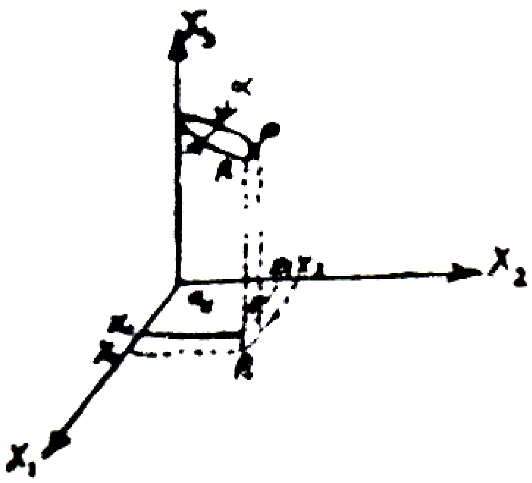
مطابق با آنچه تا به حال گفته شد، متخصات ذرات در **Ref Conf.** را با X_n در زمان **t=0** نمايش مي دهيم . در زمان بعد از آن مختصات ذره تبديل به x_i خواهد شد . در اينصورت معادلات $x = x(X,t)(6.1), x_i = x_i(X_R,t)$ حركت جسم را مشخص خواهند نمود . در حركت صلب جسم بدون اينكه شكل آن تغيير كند، موقعيت آن تغيير مي كند و فاصله بين ذرات در همين حركت بدون تغيير خواهند ماند و همينطور زاويه بين هر دو خط در جسم در حين حركت ثابت باقي مي ماند .

ساده ترين نوع حركت جابجايي با **Translation** است . در اين حركت تمام ذرات جسم به يك اندازه تغيير مكان خواهند داد . در نتيجه معادلات حركت را مي توان به صورت زير نوشت :

$$x = X + c(t)$$
$$x_i = X_i + C_i(t) \qquad (6.2)$$

كه بردار **c** مستقل از موقعيت ذرات بوده و تنها تابع زمان است .

چرخش : **Rotation**



حركتي را در نظر بگيريد كه جسم جهت حركت عقربه هاي ساعت باندازه α حول محور ۳ چرخيده است زاويه بستگي به زمان داشته باشد، در ا كه اول در نقطه P_0 قرار داشت در خواهد گرفت . روابط هندسي اب داشته باشيم :

$$\begin{cases} x_1 = X_1 Cos\alpha - X_2 Sin\alpha \\ x_2 = X_1 Sin\alpha + X_2 Cos\alpha \\ x_3 = X_3 \end{cases} \qquad (6.3)$$

و يا در **Rotation** تنسوري، داريم كه :

x=Q.X **(6.4)**

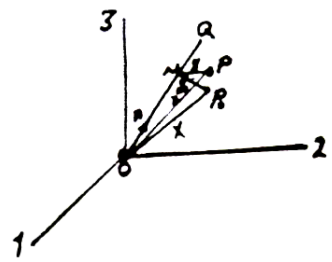
كه بردارهاي پايه e_i بوده و تنسور **Q** بصورت زير است :

$$Q_{iR} = \begin{vmatrix} Cos\alpha & -Sin\alpha & 0 \\ Sin\alpha & Cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad (6.5)$$

چون **Q** ماتريس دوران است، لذا **Orthagonal** مي باشد و داريم :

$$X = Q^T.x \qquad (6.6)$$

حال يك چرخش كلي تر را در نظر مي گيريم كه جسم **B** حول محور **OQ** كه از مبدأ مختصات مي گذ چرخيده است را بررسي مي كنيم .



فرض كنيد موقعيت ذره اي از جسم **B** در ـــــ $_0$ بوسيـ بردار **X** مشخص شده باشد، حال ذره از **P₀** حركت كرده و موقعيت آن نقطه **P** خواهد شد كه آنرا با **X** نمايش مي دهيم . **X** برداريكه روي محوري است كه چرخش حول آن انجام مي شود و صفحه اي كه حركت ذره در آن انجام مي شود و نقاط **P,P₀** در آن قرار دارند محور **OQ** را در نقطه **N** قطع نموده و بر آن عمود است . در اينصورت $\bar{NP} = \bar{NP_0}$ و $\alpha = P_0NP$ بردار موقعيت **N** نسبت به **O**، بردار **C.n** مي باشد يعني $\vec{ON} = C.n$ و مطابق شكل داريم :

(6.7)

C=n.X=n.X

بردارهاي موقعيت **P_0,P** نسبت به **N** را با **Y** و **Y_0** نمايش مي دهيم در نتيجه :

$$\begin{cases} X = Cn + y_0 \\ X = Cn + y \end{cases} \qquad (6.8)$$

با استفاده از شكل داريم كه :

$$y = y_0 Cos\alpha + n * y_0 Sin\alpha$$

به عنوان **H.W** اثبات شود .

با استفاده از روابط (**6.7**) و (**6.8**) داريم كه :

$$x = Cn + y = Cn + (X - Cn)Cos\alpha + n * (X - Cn)Sin\alpha$$

رابطه فوق را مي توان به شكل زير ساده تر نمود :

$$\begin{aligned} x &= XCos\alpha + (n * X)Sin\alpha + C(1 - Cos\alpha)n \\ &= XCos\alpha + (n * x)Sin\alpha + (n.X)(1 - Cos\alpha)n \qquad (6.9) \end{aligned}$$

و فرم انديسي آن به شكل زير خواهد بود :

$$\begin{cases} x_i = XCos\alpha + e_{ijR} n_R Sin\alpha + (1 - Cos\alpha) X_R n_R n_i \qquad (6.10) \\ x_i = Q_{iR} \Rightarrow Q_{iR} = \delta_{iR} Cos\alpha + e_{ijR} n_j Sin\alpha + (1 - Cos\alpha) n_i n_R \quad (6.11) \end{cases}$$

چرخش جسم **B** حول محور ثابت باندازه يك زاويه معلوم مانند اين است كه جسم را ثابت نگهداشته و سيستم مختصات را حول آن محور در خلاف جهت چرخش د هيم در نتيجه چرخش خالص ايجاد تنسور را **Orthagonal**، **Q** را خواهد نمود كه مؤلفه هاي آن در رابطه (**6.11**) داده شده اند و **Transformation** بصورت زير مي باشد :

$$\begin{cases} Z = Q.X \\ X = Q^T.X \end{cases}$$

كاملاً مشخص است كه هر حركت صلبي را مي توان به دو حركت، يكي جابجايي صلب و ديگري چرخش حول محوري كه از مبدأ مختصات مي گذرد، تجزيه نمود و يا اينكه حركت صلب عبارت است از :

$$\begin{cases} X = Q(t).X + C(t) \\ X = Q^T.X + C_1(t) \end{cases} \qquad (6.12)$$

$$C_1(t) = -Q^T.C(t)$$

محيطهاي تغيير شكل پذير

$$x_i = x_i(X_R, t)$$
$$x_i = x_i(X_R, t) \qquad (6.1)$$

تغيير طول يك المان خط :

در حركت كلي يك جسم به هم موقعيت و جهت و هم شكل جسم تغيير مي كند .

در تغيير شكل جسم، فواصل بين ذرات تغيير مي كند .

در اينجا تغيير طول يك المان خط را مورد بررسي قرار مي دهند .

المان خط راست $P_o Q_o$ را در جسم **B** در **ref. c** در نظر مي گيريم . بطوريكه طول δL باشد و در جهت برداريكه $\vec{A}$ باشد در نتيجه اگر مختصات نقطه **P**◦، X_R^0 باشد مختصات نقطه **Q**◦ عبارت است از $Q_0(X_R^{(0)} + A_R \delta L)$ كه A_R مؤلفه هاي برداريكه **A** در سه جهت مي باشد . ذراتي كه روي خط $P_o Q_o$ قرار داشتند در زمان (**t=0**) بعد از تغيير شكل با يك منحني فضايي در فضا خواهند نمود كه از روابط (**6.1**) پيروي خواهند نمود .

در اينجا طول جهت المان خط بعد از تغيير شكل بايد مشخص شود . فرض كنيد كه ذراتي كه اول در نقاط و **Q**◦ قرار داشتند حركت نموده و به نقاط **Q,P** مي رسند و طول خط **PQ** برابر **δL** مي باشد و در جهت برداريكه $\vec{a}$ باشد . در نتيجه اگر مختصات نقطه **P** عبارت از $P(X_i^{(0)})$ آنگاه مختصات **Q** عبارت است از $(X_i^{(0)} + a_i \delta L)$ با استفاده از (6.1) داريم كه :

$$X_i(X_R,t)=X_i \qquad (6.1)$$

مختصات نقطه P = $X_i^{(0)}=x_i(x_R^{(0)},t)$

و چون نقطه Q اول در Q₀ قرار داشت داريم كه :

$$X_i^{(0)}+a_i\delta L=x_i(X_R^{(0)}+A_R\delta Lt)$$

با استفاده از بسط تيلور رابطه فوق حول $\delta L=0$ داريم كه :

$$X_1^{(0)}+a_i\delta l=x_i(X_R^{(0)},t)+A_s\delta L\frac{\partial X_i(X_R^{(0)})}{\partial X_S}+\ldots+\frac{A_sA_q(\partial L)^2\partial^2 x}{2\partial x_s\partial x_q}+\ldots$$

و با صرفنظر از تنشهاي مراتب بالاتر $O(\delta L)^2$ خواهيم داشت :

$$x_i^{(0)}+a_i\delta L=\frac{l_l(X_R^{10},t)}{x_i^{(0)}}+A_S\delta L\frac{\partial X_i(x_R^{10})}{\partial X_S}$$

$$\Rightarrow a_i\delta L=A_S\delta L\frac{\partial X_i(X_R^{10})}{\partial X_S}$$

و يا در صورتيكه از رابطه فوق وقتي $\delta L\to 0$ حد بگيريم، خواهيم داشت :

$$a_i\frac{\delta l}{\delta l}=A_S\frac{\partial X_i(X_R^{(0)}}{\partial r_s}\Rightarrow a_i\frac{dl}{dl}=A_S\frac{\partial X_i(X_R^{10}}{\partial X_S} \qquad (6.13)$$

ضريب ديفرانسيل $\frac{dl}{dL}$ را نسبت طول ثانيه المان به طول اوليه المان خط مي ناميم و به آن نسبت كشش (**Exctension Ratio** يا **Strech Ratio**) مي ناميم و آنر با λ نمايش مي دهيم .

$$\frac{dl}{dL}=\lambda$$

در نتيجه داريم :

$$\lambda a_i=A_S\frac{\partial x_i(X_R,t)}{\partial X_S} \qquad (6.14)$$

با ضرب طرفين رابطه فوق در λaj خواهيم داشت :

$$\lambda aj = A_T \frac{\partial x_j}{\partial X_T} *$$

$$**** \Rightarrow \lambda^2 a_i a_j = A_S \frac{\partial X_i}{\partial x_s} A_T \frac{\partial x_j}{\partial x_T}$$

در صورتیکه عمل **Contraction** (انقباض اروي)، عمل شود داریم :

$$\lambda^2 a_i a_i = A_S \frac{\partial x_i}{\partial x_s} A_T \frac{\partial x_i}{\partial x_T}$$

و چون بردار **a** یکه مي باشد در نتیجه $a_i a_i$ برابر یك است داریم :

$$\lambda^2 = A_S A_T \frac{\partial x_i}{\partial x_s} \frac{\partial x_i}{\partial x_T} \qquad (6.15)$$

$$6.15 \quad \rightarrow \lambda = ? \rightarrow 6.14 \rightarrow a_i = ?$$

$$6.21 \quad \rightarrow \lambda = 0 \rightarrow 6.22 \rightarrow a_i = ?$$

مقدار λ را از رابطه (٦,١٥) و جهت مقدار چرخش بردار **a** از رابطه (**6.14**) بدست مي آید . λ همواره مثبت مي باشد، اگر $\lambda > 1$ انبساط و اگر $\lambda < 1$ انقباض خواهد بود .

اگر تغییر شکل جسم بوسیله روابط زیر مشخص شده باشند :

$$X = X(x,t) = X_R(x_i,t)$$

که مختصات **Seference** ذره را برحسب مختصات آن در لحظه **t** مي دهد به طریقه مشابه تبدیل شوند به
مي توان نسبت کشش λ و جهت بردار **A** که جهت المان خط در لحظه **t=0** است را بدست آورد در اصل فقط کافي است $x, a, \delta l \longrightarrow X, A, \delta L$ و نتایج زیر حاصل مي شود :

$$A_S = \lambda a_i \frac{\partial X_s}{\partial x_i} \qquad (6.16)$$

$$\lambda^{-2} = a_i a_j \frac{\partial X_S}{\partial x_i} \frac{\partial X_S}{\partial x_j} \qquad (6.17)$$

مثال : تغییر شکل هموژن در یك جسم به صورت زیر داده شده است :

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{2}X_1 + \frac{3}{4}\sqrt{2}X_2 \\ x_2 = -X_1 + \frac{3}{4}X_2 + \frac{1}{4}\sqrt{2}X_3 \\ x_3 = X_1 - \frac{3}{4}X_2 + \frac{1}{4}\sqrt{2}X_3 \end{cases}$$

مطلوب است :

الف) جهت المان خط بعد از تغيير فرم براي المان خطي كه در **ref conf** داراي منتهاي مثبت **(1:1:1)** باشد .

ب) مقدار كشش براي المان خط .

حل، داريم :

$$A^T = (1,1,1)$$
$$\lambda^2 = A^T.F.F^T.A$$

$$F = \frac{\partial x_i}{\partial X_R} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{3}{4}\sqrt{2} & 0 \\ -1 & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 1 & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix} \qquad T^T = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & 1 \\ 3/4\sqrt{2} & \frac{3}{4} & -3/4 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}$$

$$\lambda^3 = [1 \quad 1 \quad 1]\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & 1 \\ & F^T & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 6.5 \Rightarrow \lambda = \frac{\sqrt{13}}{6}$$

$$a = \lambda^{-1}.F.A = \frac{\sqrt{6}}{13}\begin{bmatrix} 7/4\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}-1}{4} \\ \frac{\sqrt{2}+1}{4} \end{bmatrix} = (7\sqrt{2} : \sqrt{2}-1 : \sqrt{2}+1)$$

گرايان تنسور تغيير مكان **The Deformation Gradient Tensor** :

به نه كميت $\frac{\partial x_i}{\partial X_R}$ مؤلفه هاي گراديان تنسور تغيير مكان مي گويند . اين كميتها در مشخص نمودن حركت يك ذره نسبت به حركت ذرات در همسايگي آن به كار برده مي شود . تنسور

درجه دوم **F** را که مؤلفه های آن بصورت زیر هستند را تعریف مي کنيم :

$$F_{iR} = \frac{\partial x_i}{\partial X_R} \qquad (6.18)$$

که به آن تنسور گراديان تغيير مکان مي گوييم .

براي اينکه ثابت کنيم F_{iR} مؤلفه هاي يك تانسور هستند، سيستم مختصات کارترين جديدي را در نظر مي گيريم که نسبت به سيستم مختصات چرخيده است . و اين چرخش بوسيله ماتريس **Orthagonal** ، **M** مشخص شده است . در نتيجه در سيستم جديد مؤلفه هاي **x,X** عبارتند از : $\bar{X}_R, \bar{x}_i$

$$(X, x \to \bar{X}_R, \bar{x}_i)$$

$$\begin{cases} \bar{X}_R = M_{RS} X_S \ , \qquad \bar{x}_i = M_{ij} x_j \\ X_S = M_{RS} \bar{X}_R \ , \qquad x_j = M_{ij} \bar{x}_i \end{cases}$$

با تغيير مختصات فوق داريم :

$$\bar{F}_{iR} = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \bar{X}_R} = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} . \frac{\partial x_j}{\partial X_S} . \frac{\partial X_S}{\partial \bar{X}_R} = M_{ij} M_{RS} \frac{\partial x_j}{\partial X_S}$$

$$\bar{F}_{iR} = M_{ij} M_{RS} \frac{\partial x_i}{\partial X_S} = M_{ij} M_{RS} F_{js}$$

چون مؤلفه هاي F_{iR} از قانون **Transformation** تنسورهاي درجه دوم پيروي مي کنند **F** يك تنسور درجه دوم است . تنسور **F** در حالت کلي متقارن نمي باشد و بصورت زير مي توانيم آنرا نشان دهيم :

$$F = F_{iR} e_i \otimes e_R$$

تنسورهاي f^T, f^{-1} نيز تنسورهاي درجه دوم مي باشند . f^{-1} به شرطي وجود دارد که $\det(F) \neq 0$ و به شکل زير نشان مي دهيم :

$$\begin{cases} f^{-1} = \dfrac{\partial X_S}{\partial x_j} e_s \otimes e \\ f_{Rj}^{-1} = \dfrac{\partial X_R}{\partial x_j} \end{cases} \qquad (6.19)$$

با استفاده از (**6.19**) رابطه (**6.14**) را مي توان به صورت زير نوشت :

$$a_i = \lambda^{-1} A_S \frac{\partial x_i}{\partial X_S}$$

$$a = \lambda^{-1}.F.A \qquad (6.20)$$

و رابطه **(6.15)** را مي توان به صورت زير نوشت :

$$\lambda^2 = A.F^T.F.A \qquad (6.21)$$

و به همين ترتيب روابط **(6.16) , (6.19)** را مي توان به شكل زير نوشت :

$$A = \lambda F^{-1}.a \qquad (6.22)$$

$$\lambda^{-2} = a.(F^{-1})^T.F^{-1}.a \qquad (6.23)$$

براي محاسبه a, A, λ عموماً مناسب تر است كه از فرم ماتريسي استفاده شود .

در اينصورت **a,A** را به صورت ماتريس هاي ستوني F^{-1}, F, F^T ` را به صورت ماتريس هاي مربعي مي نويسيم و روابط(**6.20**)و(**6.23**)بصورت زير در مي آيند :

$$(6.24) \quad \begin{cases} a = \lambda.^{-1}.F.A \\ \lambda^2 = A^T.F^T.F.A \end{cases}$$

$$(6.25) \begin{cases} A = \lambda.F^{-1}.a \\ \lambda^{-2} = a^T (F^{-1})^T F^{-1}.a \end{cases}$$

اگر جسم حركت نكند آنگاه $x_i = X_i$ در نتيجه داريم :

$$F_{iR} = \delta_{iR} \rightarrow F = I$$

مؤلفه هاي بردار تغيير مكان **U** بصورت زير است :

$$u_i = x_i - X_i$$

و گراديان تغيير مكان عبارت خواهد شد از :

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_R} = \frac{\partial x_i}{\partial X_R} - \frac{\partial X_i}{\partial X_R} = F_{iR} - \delta_{iR} \qquad (6.26)$$

در نتيجه گراديان تغيير مكان مؤلفه هاي تنسور (**f-I**) است كه اين تنسور را عموماً تنسور گراديان تغيير مكان نامند . اگر هيچ حركتي وجود نداشته باشد داريم .

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_R} = 0$$

تنسور كرنش و تغيير شكل محدود Finite Deformation and Strion Tensor

تنسور جديد **C** را به شكل زير تعريف مي كنيم :

$$C = F^T . F \qquad (6.27)$$

در نتيجه مؤلفه هاي اين تنسور عبارتند از :

$$\begin{cases} C_{RS} = \dfrac{\partial x_j}{\partial X_R} . \dfrac{\partial x_j}{\partial X_S} \\ C_{SR} = \dfrac{\partial x_j}{\partial X_S} . \dfrac{\partial x_j}{\partial X_R} \end{cases} \qquad (6.28)$$

در نتيجه تنسور **C** يك تنسور متقارن مي باشد .

با استفاده از **(6.15**) و (**6.21**)يك نسبت كشش المان خط در جهت **A** در **ref conf** مي باشد، عبارت خواهد بود از :

$$\lambda^2 = C_{RS} A_R A_S = A^T . C . A \qquad (6.29)$$

در نتيجه با دانستن **C** مي توان نسبت كشش المـــان خط را محاسبه نمود . حال يك مثلث را در نظر بگيريد كه بوسيله سه المان خط محدود شده است . دانستن طول اين المانهاي خط بعد از تغيير شكل، شكل آن را كاملاً مشخص مي كند، اگرچه جهت آن مشخص نخواهد بود . در نتيجه مؤلفه هاي **C** $_{AS}$ در يك نقطه، تغيير مكان در حوالي آن نقطه را معلوم

خواهند نمود . در صورتيكه جسم فقط داراي حركت صلب باشد، از رابطه (**6.12**) داريم :

حركت صلب :

$$\begin{cases} F = Q(t) \\ C = Q^T.Q = I \end{cases}$$

در نتيجه براي حركت صلب جسم، **C** ثابت و برابر **I** مي باشد و اندازه گير تغيير شكل جسم مي باشد، كه بر آن **Right Couchy Green Deformation Tensor** مي گويند .

هر تانسور ديگري مثل C^{-1} و يا C^2 كه تابعي از **C** است نيز مي تواند بعنوان اندازه گير تغيير شكل مورد استفاده قرار گيرد . بعضي مواقع از C^{-1} به عنوان معرف تغيير شكل استفاده مي شود كه برحسب **F** بصورت زير است :

$$C^{-1} = F^{-1}(F^T)^{-1} \qquad (6.31)$$

مؤلفه هاي C_{RS}^{-1} از تنسور C^{-1} بصورت زير خواهد بود :

$$C_{RS}^{-1} = F_{Ri}^{-1}.F_{Si}^{-1} = \frac{\partial X_R}{\partial x_i}.\frac{\partial X_S}{\partial x_i} \qquad (6.32)$$

يك نوع ديگر از اندازه گير تغيير شكل بر مبناي (**6.19**) بصورت زير است :

$$B = F.F^T \quad , \quad B^{-1} = (F^{-1})^T.F^{-1} \qquad (6.33)$$

كه **B** را **Left Couchy Green Deformation Tensor** مي گوييم و شكل انديسي آن :

$$B_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_R}.\frac{\partial x_j}{\partial X_R} \quad , \quad B_{ij}^{-1} = \frac{\partial X_R}{\partial x_i}.\frac{\partial X_R}{\partial x_j} \qquad (6.34)$$

و رابطه (**6.17**) به صورت زير درمي آيد :

$$\lambda^{-2} = a_i a_j B_{ij}^{-1} = a.B^{-1}.a \qquad (6.35)$$

در نتیجه دانستن B^{-1} و یا **B** براي مشخص كردن تغيير مكان در حوالي يك نقطه در **C.Conf** كافي است . در حركت صلب جسم ، **B=I** مي باشد :

نكته :

$$\left|\begin{array}{llll} X_1 = -x_1 - x_2 & \to B & x_1 = X_1 + X_2 & \to C \\ X_2 = x_1 - x_2 & & x_2 = & \\ X_3 = x_1 & & x_3 = & \end{array}\right|$$

تنسور η بصورت زير تعريف مي شود :

$$\eta = EuLerion(Almanses)Tensor = \frac{1}{2}(I - B^{-1}) \qquad (6.37)$$

$$\gamma = Lagrangion(Green)Tensor = \frac{1}{2}(C - I) \qquad (6.36)$$

اگر جسم فقط داراي حركت صلب باشد تنسورهاي η,γ براي آنها برابر صفر است . اگر تغيير مكانها بوسيله (**6.10**) داده شده باشند كه **x** را برحسب **X** مي دهد، محاسبه **F** و در نتيجه γ,B,C به عنوان اندازه گير تغيير مكان آسان تر مي باشد و مؤلفه هاي اين تنسورها توابعي از مختصات X_R خواهند بود . و اگر تغيير مكانها به صورت باشند **X** بر **x** باشد بهتر است كه $C^{-1},B^{-1},\eta,F^{-1}$ برحسب مؤلفه هايش از مختصات X_i (فضايي) بدست مي آوريم .

مولفه هاي γ_{RS} تنسور γ و همچنين مؤلفه هاي η_{ij} تنسور η اغلب بر حسب گراديان تغيير مكان داده شده اند چونكه :

$$F_{iR}=\frac{\partial x_i}{\partial X_R}=\frac{\partial u_i}{\partial X_R}+\partial_{iR}$$
$$\gamma_{RS}=\frac{1}{2}(C_{RS}-\delta_{RS})$$
$$C_{RS}=\frac{\partial x_j}{\partial X_R}.\frac{x_j}{\partial X_S}=\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_R}+\delta_{jR}\right)\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_S}+\delta_{js}\right)$$
$$\gamma_{RS}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_R}+\delta_{iR}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_S}+\delta_{iS}\right)-\delta_{RS}\right] \qquad (6.38)$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial X_R}.\frac{\partial u_i}{\partial X_S}+\frac{\partial u_i}{\partial X_R}.\delta_{IS}+\frac{\partial u_i}{\partial X_S}\delta_{iR}+\delta_{iR}+\delta_{iS}-\delta_{RS}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial X_R}\frac{\partial u_i}{\partial X_S}+\frac{\partial u_s}{\partial X_R}+\frac{\partial u_R}{\partial X_S}\right]$$

به عنوان مثال γ_{11} برابر است با :

$$\gamma_{11}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)^2$$

به طور مشابه با استفاده از **6.34** و **6.33** داریم که :

$$\varsigma_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_i}{\partial x_i}-\frac{\partial u_R}{\partial x_i}\frac{\partial u_R}{\partial x_j}\right) \qquad (6.39)$$

بعنوان مثال براي η_{11}داريم :

Summary

$$\varsigma_{11}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial u_1}-\left[(\frac{\partial u_1}{\partial x_1})^2+(\frac{\partial u_2}{\partial x_1})^2+(\frac{\partial u_3}{\partial x_1})^2\ \right]\right]$$

به طور خلاصه محاسبه تغيير مكان و تنسور تغيير طول نسبي را با استفاده از جبر ماتريسي مي توان بصورت زير خلاصه نمود :

$$F=F_{iR}=\frac{\partial x_i}{\partial X_R} \quad , \quad F^{-1}=F^{-1}_{(Ri)}=\frac{\partial X_R}{\partial x_i}$$
$$C=C_{RS} \quad ,B=B_{ij} \quad ,C^{-1}=C^{-1}_{RS},B^{-1}=B^{-1}_{ij} \qquad (6.40)$$
$$a=(a_1,a_2,a_3)^T \quad ,A=(A_1,A_2,A_3)^T$$

در اينصورت فرمولهاي اصلي عبارتند از :

$$C = F^T.F \qquad ,C^{-1} = F^{-1}(F^{-1})^T$$
$$B = F.F^T \qquad ,B^{-1} = (F^{-1})^T.F^{-1}$$
$$\lambda^2 = A^T.C.A \quad ,\lambda^{-2} = a^T.B^{-1}.a$$
$$2(\gamma_{RS}) = C.I \quad ,2\eta_{ij} = I - B^{-1} \qquad (6.41)$$

تنسورهاي $\gamma,\eta,B^{-1},B,C^{-1},C$ تماماً تنسورهاي متقارن درجه دو بوده و داراي **E.Va** هاي حقيقي و **E.Ve** هاي **Orthagonal** مي باشند .

مثالهايي از تغيير مكانهاي **Finite** :

مثال ۱ : « كشش يكنواخت »

فرض كنيد كه جسمي مثل ميله بلند كه داراي سطح مقطع ثابت است، بطور يكنواخت در جهت محور (۱) باندازه λ_1, x_1 كشيده شده است . اين نوع تغيير مكان را تغيير مكان يكنواخت در جهت (۱) مي ناميم بنابراين ميدان تغيير مكان برابر خواهد بود با :

$$x_1 = \lambda_1 X_1$$

اگر جسم بطور يكنواخت در جهت سه محور كشيده شود تغيير مكان بصورت زير خواهد شد :

$$x_1 = \lambda_1 X_1$$
$$x_2 = \lambda_2 X_2$$
$$x_3 = \lambda_3 X_3 \qquad (6.42)$$

كه $\lambda_3,\lambda_2,\lambda_1$ مي توانند ثابت و يا تابعي از زمان **t** باشند . يعني از حالات بخصوص **(6.42**)قابل بررسي مي باشند . مثلاً اگر $\lambda_2 = \lambda_3$ باشد، جسم در جهت عمود بر محور (۱) به طور يكنواخت در حالت كشش و فشار مي باشد و در صورتيكه $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ باشد جسم از تمام جهات بطور يكنواخت يا در حالت كشش و يا در حالت فشار خواهد بود كه به آن **Uniform Dilatation** مي گوييم . اگر $\lambda_2^{-1} = \lambda_1, \lambda_3 = 1$ باشد در اينصورت سطح جسم عمود بر محور (۳) ثابت باقي مي ماند و اين نوع تغيير

شـــکل را **Pure Shear** مـــي نـــاميم . از روابـــط **(6.42)** و بـــا اســـتفاده از

(**(6.40** و **(6.41)**) داريم .

$\lambda_3 = 1, \lambda_1 = \lambda_2 \Leftrightarrow$ **Pure Shear**

Uniform کشش يا فشار در بطور يکنواخت در تمام جهات در

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \Leftrightarrow$ **Dilatation**

$\lambda_2 = \lambda_3 \Leftrightarrow$

$$F = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix}$$

$$F_{iR} = \frac{\partial x_i}{\partial X_R} \Rightarrow F_{11} = \lambda_1, F_{22} = \lambda_2, F_{33} = \lambda_3$$

$$F = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}$$

$$C = F^T.F = \begin{vmatrix} \lambda^2{}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = B \qquad B = F.F^T$$

$$2\gamma_{RS} = C - I = \begin{vmatrix} \lambda_1^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 - 1 \end{vmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}$$

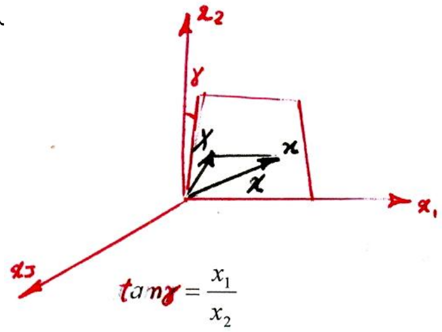
$$B^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_3^2} \end{vmatrix}$$

$$2\eta_{ij} = \begin{vmatrix} 1-\frac{1}{\lambda_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1-\frac{1}{\lambda_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{1}{\lambda_3^2} \end{vmatrix} \tag{6.43}$$

برش ساده :

در این حالت صفحات موازي نسبت به یکدیگر به طور موازي حرکت مي کنند . برش ساده در شكل ت

.



(6.44)

$$\tan\gamma = \frac{x_1}{x_2}$$

در این حالت x_1 جهت برش مي باشد و زاویه γ اندازه برش را مشخص مي كند . در حالت برش ساده حجم ثابت مي ماند و براي تغییر شكل (**6.44**) از روابط (**6.40**) و (**6.41**) داریم که :

$$F_{iR} = \frac{\partial x_i}{\partial X_R}$$

$$F = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & Tan\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

روش کوتاهتر براي محاسبه درايه هاي تنسور **B** به شکل زير است :

$$\begin{cases} B_{ij}^{-1} = \frac{\partial X_R}{\partial x_i} = \frac{\partial X_R}{\partial x_j} = \frac{\partial X_R}{\partial x_1} . \frac{\partial X_R}{\partial x_1} = \frac{\partial X_1}{\partial x_1}\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_1}\frac{\partial X_2}{\partial x_1} + \frac{\partial X_3}{\partial x_1}\frac{\partial X_3}{\partial x_1} \\ if \ = \begin{cases} i=1 \\ j=1 \end{cases} \\ X_1 = x_1 - x_2 \tan\gamma \\ B_{12}^{-1} = -\tan\gamma \end{cases}$$

تغيير مکان هموژن :

تغيير مکانهايي که از رابطه زير پيروي مي کنند وقتي که A_{iR}, C_i ثابت و يا توابعي از زمان **t** هستند را تغيير مکان هموژن مي گوييم .

$$x = C + A.X$$
$$x_i = C_i + A_{ij} X_j \qquad (6.46)$$

دو تغيير مکان قبلي حالت به خصوصي از تغيير مکان هموژن هستند . در تغيير مکان هموژن تغيير طولهاي نسبي مستقل از X_R و x_i مي با شند . اين نوع تغيير مکان ها داراي خواص زير مي باشند :

۱) صفحاتي که در **Ref Conf** موازي هستند بطور موازي تغيير شکل مي دهند .

۲) خطوطي که **Ref Conf** مستقيم هستند بعد از تغيير شکل سيستم مستقيم باقي مي مانند .

تغيير شکل نسبي سطح : **Plane Strian**

اين تغيير شکل از رابطه زير بدست مي آيد :

$$\begin{cases} x_1 = X_1(X_1, X_2) \\ x_2 = X_2(X_1, X_2) \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

مختصات $x_3 = X_3 = Cte$ صفحات تغییر شکل نامیده می شوند .
طبق این تعریف سطر و ستون η,γ همگی برابر صفرند .
پیچش خالص :
برای نشان دادن این نوع تغییر شکل مناسبتر است که از مختصات استوانه ای R,Φ,Z در **Ref Cenf** و از مختصات r,Φ,δ در **Spatial Coo** استفاده شود .
در اینصورت داریم که :

$$\mathrm{Re}\, fAnf \ = \begin{cases} R = (X_1^2 + X_2^2)^{1/2} \\ \Phi = \tan^{-1}\left(\dfrac{X_2}{X_1}\right) \\ Z = X_3 \end{cases}$$

$$SpatialCoo \begin{cases} r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \\ \Phi = \tan^{-1}\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right) \\ Z = X_3 \end{cases}$$

در اینصورت پیچش خالص توسط روابط زیر مشخص می شود .

r=R

Z= Z

$\Phi = \Phi + \Psi Z$

که در این رابطه Ψ یک ثابت است . در این نوع تغییر مکان ضخامت عمود بر عمود **Z** حول محور **Z** می چرخند . پیچش یک میله استوانه ای حول محور یک پیچش خالص است . حجم در این نوع تغییر شکل ثابت مانده و تغییر شکل هموژن نمی باشد .
از آنجائیکه محور **Z** ثابت می ماند پیچش خالص است .

$$e = M_{pi}\bar{e}_p$$

$$e_j = M_{qj}\bar{e}_q$$

$$\Rightarrow \vec{\Phi} = \Phi_{ij} e_i e_j = \bar{\Phi}_{qp}\bar{C}_P\bar{e}_q$$

$$\vec{\nabla} = e_i \frac{\partial}{\partial j_i} \Rightarrow d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial j_i} dy_i \rightarrow d\Phi = dr\vec{\nabla}\Phi$$

$$\vec{\nabla} = e_i e_j \qquad e_i = M_{ij}\bar{e}_j \qquad y_i = M_{ij}\bar{y}_j \rightarrow \bar{\nabla} = \bar{e}_j \frac{\partial}{\partial \bar{j}_j}$$

$$\partial y_i = M_{ij}\partial \bar{y}_j$$

تغيير طولهاي نسبي كوچك :

Infinitensinal Strain :

در خيلي از موارد تحت نيرو هاي نه چندان زياد، فقط تغيير طولهاي نسبي كوچك انجام مي شود . مانند اكثر فلزات، چوب و ... در عمل فرض كوچك بودن تغيير طول نسبي باعث ساده تر شدن روابط خواهد شد . تقريبي را كه قادر معادلات ايجاد مي كنيم اين است كه در مؤلفه هاي تنسور گراديان تغيير مكان نسبت به واحد كوچك مي باشد . در نتيجه داريم :

$$\left|\frac{\partial u_i}{\partial X_R}\right| << 1 \qquad i, R = 1,2,3 \qquad (6.50)$$

و از ترمهاي درجه دوم و ضرب آنها صرفنظر مي كنيم . حال چون :

$$u_i = x_i - X_i$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} = T - F^{-1}$$

با استفاده از بسط داريم كه :

$$I - F^{-1} = I - \{I + (F - I)\}^{-1} = I - \{I - (F - I) + (F - I)^2 - (F.I)^3 + ...\}$$

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = \sum (-1)^n x^n \qquad , |x| < 1$$

$$F - I < I$$

و يا اينكه داريم :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = (F-I) - (F-I)^2 + (F-I)^3$$

و چون $F - I = \frac{\partial u_i}{\partial X_R}$ با استفاده از رابطه قبلي داريم :

$$* = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_i}{\partial X_R}\frac{\partial u_R}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i}{\partial X_R}\frac{\partial u_R}{\partial X_S}\frac{\partial u_S}{\partial X_j}\ldots \qquad (6.51)$$

در نتيجه اگر از ترمهاي درجه دوم صرفنظر كنيم، خواهيم داشت :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

فرمول فوق تا زماني قابل قبول است كه در مرحله٨ لاستيك باشيم .

يا مي توان گراديان تنسور تغيير مكان را با مشتق گيري نسبت به **X** يا **x** بدست آورد . با استفاده از اين تقريب و روابط (**(6.38),(6.39**) داريم كه :

$$\gamma_{ij} = \eta_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad (6.52)$$

تنسور **E** را كه مؤلفه هايش $\mathbf{E}_{ij}$ است، تنسور تغيير طول نسبي **Infinitesinal** مي گوييم .

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$E_{ij} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) \end{vmatrix}$$

در تغيير شكل كوچك از **E** و در تغيير شكل بزرگ از γ,η استفاده مي كنيم.

با استفاده از رابطه **(6.26**) داريم كه :

$$E = \frac{1}{2}(F + F^T) - I \qquad (6.54)$$

رابطه بالا در محدوده تغيير شكلهاي نسبي كوچك دقيق مي باشد و چون **F** يك تنسور درجه دو است **E** نيز يك تنسور درجه دوم خواهد بود و مسلماً متقارن نيز مي باشد . ولي **E** يك اشكال عمده دارد و آن اين است كه براي حركت صلب جسم صفر نمي باشد . بطور مثال چرخش يك جسم صلب را حول محور **3** در نظر بگيريد . از رابطه **(6.3)** تنسور **E** از رابطه زير بدست مي آيد :

$$u_1 = x_1 - X_1 = ? \rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = ?$$

$$E_{ij} = \begin{vmatrix} -(1 - Cos\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & -(1 - Cos\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

در نتيجه E_{22}, E_{11} مخالف صفرند ولي هرگاه α كوچك باشد، با تقريب خوبي تنسور گراديان تغيير مكان صفر خواهد شد .

تعبير هندسي ترمهاي E_{ij} :

المان خط P_0Q_0 در اول به طول δL بوده و موازي محور X_1 است . پس از تعبير شكل اين المان در وضعيت **PQ** قرار مي گيرد . با استفاده از شكل داريم كه :

$$u_1(X_1 + \delta L, X_2, X_3) - u_1(X_1, X_2, X_3) = \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\delta L \qquad (6.55)$$

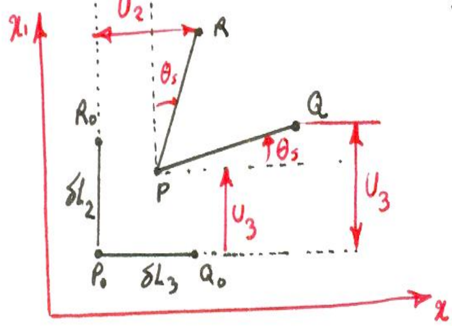
$$\overline{P_0Q_0} = \delta L, \overline{PQ} = X_1 + \delta L + u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\partial L - X_1 - u_1$$

$$\overline{PQ} - \overline{P_0Q_0} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\partial L$$

در نتيجه براي E_{11} (ازدياد طول در واحد طول اوليه المان خطي است كه موازي محور x_1 بوده است . داريم :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=E_{11}\Rightarrow E_{11}=\frac{\overline{PQ}-\overline{P_0Q_0}}{\delta L}$$

تعبیر هندسی مشابهی برای E_{23} مطابق شکل زیر می توان انجام داد :



$$\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)=2E_{23}$$

تعبیر هندسی E_{23} عبارت است از کم شدن زاویه بین دو المان خط $P_0R_0=P_0Q_0$ که اول ۹۰ درجه بودند .

معادلات سازگاری : **Compatibility Equation**

چون شش مؤلفه تغییر طول نسبی از سه مؤلفه تغییر مکان بدست می آیند نمی توانند از هم مستقل باشند و رابطه بین آنها با حذف کردن u_1 بین آنها بدست می آید . با جانشین کردن مستقیم روابط از **(6.33)** دیده می شود که E_{ij} باید شرایط همسازی (سازگاری) تغییر طولهای نسبی را ارضا نماید .

$$K_1=2\frac{\partial^2 E_{23}}{\partial X_2\partial X_3}-\left(\frac{\partial^2 E_{22}}{\partial X_3^2}+\frac{\partial^2 E_{33}}{\partial X_2^2}\right)=0 \qquad (6.57)$$

$$L_1=\frac{\partial^2 E_{11}}{\partial X_2\partial X_3}-\frac{\partial}{\partial X_1}\left(\frac{\partial^2 E_{23}}{\partial X_1}-\frac{\partial^2 E_{31}}{\partial X_2}-\frac{\partial^2 E_{12}}{\partial X_3}\right)=0 \qquad (6.58)$$

چهار رابطه دیگر با تغییر دادن سیکلی **Cyclic Permutatic** اندیسهای **3,2,1** عوض می شود . دوباره دیده می شود که این شش رابطه نیز از یکدیگر مستقل نیستند و داریم :

$$\frac{\partial v_1}{\partial X_1}=\frac{\partial L_2}{\partial X_3}+\frac{\partial L_3}{\partial X_3}$$

و دو روابط ديگر با تغيير دادن سيكلي انديسهاي **3,2,1** حاصل مي شوند .

مؤلفه هاي تغيير طول نسبي $\gamma_{RS}, \eta_{ij}, Finite$ نيز بايد شرايط سازگاري را ارضا كنند ولي روابط حاصل پيچيده تر خواهد بود .

H.W : معادلات سازگاري را براي γ_{RS}, η_{ij} بدست آوريد .

صفحه ٤٢ و ٤٣ حل شود به **Chapter 4**

Chapter 5 Chapter 8 ٦ : ١ – ١١

چرخش كوچك :

Infini Tesimel Satatian :

در روابط(**6.10**)و **(6.9)** چرخش **Finite** يا محدود جسم صلب باندازه زاويه α حل محور **n** داده شده است . در صورتيكه چرخش كوچك باشد : $Cos\alpha = 1, Sin\alpha = \alpha$ و رابطه (**6.10**) عبارت خواهد شد از :

$$u_i = x_i - X_i = \alpha e_{ijR} R n_j X_R$$

و بنابراين

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_R} = \alpha_{ijR} n_j$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial X_1} = 0 \qquad \frac{\partial u_1}{\partial X_2} = -\alpha n_3, \frac{\partial u_1}{\partial X_3} = \alpha n_2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial X_R} = \begin{vmatrix} 0 & -\alpha n_3 & \alpha n_2 \\ \alpha n_3 & 0 & -\alpha n_1 \\ -\alpha n_2 & \alpha n_1 & 0 \end{vmatrix} \qquad (6.60)$$

به تنسور فوق تنسور تغيير طول نسبي در اثر چرخش كوچك حول محور **x** مي گوييم . بطوريكه ديده مي شود تنسور فوق پاد متقارن (**Antisymmetric**) حال حالت عمومي حركت **In Finitesinal** سند را در نظر بگيريد كه تنسور گراديان تغيير مكان **F** است . تنسور چرخش **Infinitesinal rotation**)

تنسور چرخش محدود را كه مؤلفه هايش Ω_{ij} است به صورت زير تعريف مي كنيم :

$$\Omega = \frac{1}{2}(F - F^T)$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\Omega_{ij} = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_3}{\partial x_3} & 0 \end{vmatrix} \qquad (6.61)$$

در نتيجه تنسور Ω يك تنسور مرتبه دوم پاد متقارن است .

تنسور **F-I** را مي توان به دو جزء متقارن و ضد متقارن تقسيم نمود .

$$F - I = \frac{1}{2}(F + F^T) - I + \frac{1}{2}(F - F^T) = E + \Omega \qquad (6.62)$$

در نتيجه حركت **Infintesime** به دو جزء **E** كه تغيير شكل يافته **Infinitesimal Deformation** و چرخش Ω تجزيه نموديم . بردار چرخش (**Infinitesmial Rotation Vector**) **W** را به صورت زير تعريف مي كنيم :

$$\vec{W} = \frac{1}{2} Curl \quad u \qquad (6.63)$$

$$W_i = \frac{1}{2} e_{ijk} \frac{\partial uk}{\partial x_j}$$

با استفاده از **(6.61**)ديده مي شود كه :

$$\Omega_{jk} = -e_{ijk} W_i \qquad (6.64)$$

رابطه بين بردار چرخش تنسور و چرخش »
اثبات :

$$\Omega_{jk} = \bar{e}_{ijk}\,(\frac{1}{2}e_{ist}\frac{\partial u_t}{\partial X_S} = -\frac{1}{2}e_{ijk}e_{ist}\frac{\partial u_t}{\partial X_S}$$

$$e_{ijk}e_{ist} = \delta_{js}\delta_{kt} - \delta_{jt}\delta_{ks}$$

$$\Omega_{jk} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_j}{\partial X_k} - \frac{\partial u_k}{\partial X_j})$$

براي w_i نياز داريم :

$$w_i = -\frac{1}{2}e_{ijk}\Omega_{jk} \qquad \textbf{(6.65)}$$

اثبات : **H.W**

نرخ تغييرات تنسور تغيير طول نسبي :

The Sate of Deformation Tensor :

در خيلي از مسايل مكانيك محيط هاي پيوسته مقدار تغيير مكان مهم نمي باشد، بلكه آنچه مهم است نرخ اين تغييرات مي باشد . به طور مثال در سيالات، سرعت سيال مهم است، در اينجا نرخ تغيير طول المان خط را بررسي مي كنيم كه همان نرخ تغييرات λ براي يك المان خط است .

رابطه (6.15) عبارت است از :

$$\lambda^2 = A_S A_T \frac{\partial x_i}{\partial x_s}\frac{\partial x_i}{\partial x_T} \qquad (6.66)$$

كه λ را برحسب X_R و كسينوسهاي هادي A_R را در **Ref Conf** مي دهد .

هرگاه از رابطه بالا نسبت به زمان مشتق بگيريم با توجه به اينكه X_R ثابت است داريم :

$$2\lambda\frac{d\lambda}{dt} = A_S A_T\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_s}\frac{\partial v_i}{\partial x_T} + \frac{\partial x_i}{\partial x_T}\frac{\partial v_i}{\partial x_s}\right) \qquad (6.67)$$

با استفاده از رابطه زير :

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_t} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x_t}$$

رابطه (**6.67**) عبارت خواهد شد از :

$$\lambda \frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{2} A_S A_T \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_s} \frac{\partial x_j}{\partial x_T} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial x_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_j}{\partial y_2} \frac{\partial v_1}{\partial x_j} \right)$$

هرگاه جاي انديسهاي **dummy** را با هم عوض كنيم، داريم :

اثبات **HW** :

$$\lambda \frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{2} A_S A_T \frac{\partial x_i}{\partial x_s} \frac{\partial x_j}{\partial x_T} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) \qquad (6.68)$$

كه در رابطه بالا $\lambda^{-1} \frac{d\lambda}{dt}$ عبارت است از نرخ تغيير طول در واحد طولي كنوني المان طول با جهت كنوني كسينوسهاي هادي $\mathbf{a_i}$.

براي هر جهت بردار **a** اين نرخ تغيير طول با استفاده از **(6.68**)بصورت :

$$\lambda^{-1} \frac{d\lambda}{dt} = a_i a_j D_{ij}$$

است كه در آن $D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)$. **(6.69)**

كه D_{ij} مولفه هاي تنسور **D** هستند كه به آن تنسور تغيير طول **D**مي گوييم به طوريكه ديده مي شود رابطه بالا برحسب مؤلفه هاي سرعت خطي است و در بدست آوردن آن هيچ تقريبي به كار برده نشده است . همچنين در روابط (**6.68**)ديده مي شود كه تعميرات **C.Conf** هستند . تنسور **D**، درجه دوم و متقارن بوده و خواص آن شبيه تنسور **E** مي باشد . مؤلفه هي D_{ij} روابط سازگاري را ارضا مي نمايند كه شبيه **(6.57**) تا (**6.59**) است كه بوسيله مؤلفه هاي E_{ij} نوشته شده اند . تنها تفاوت اين است كه مشتقات بايد بر حسب x_i **(Spatialcor)** گرفته شوند . تنسور **P** با تنسور E از اين لحاظ اختلاف

دارند که **P** اندازه گیر دقیق نرخ تغییر مکان است . در صورتیکه **E** اندازه گیر دقیق تغییر مکان نمي باشد .

گرادیان سرعت و تنسور چرخش : **The Velocity Gradiant And Spin Tensorn**

تنسور نرخ تغییر شکل **P** را مي توان جزء متقارن گرادیان سرعت «**L**» در نظر گرفت که مؤلفه هاي آن L_{ij} بصورت زیر است .

$$L_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \qquad (6.70)$$

قسمت پارمتقارن **L** را با **W** نشان مي دهیم که مؤلفه هاي آن W_{ij} بصورت زیر مي باشند :

$$W_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right) \qquad (6.71)$$

$$L = D + W, D = \frac{1}{2}(L + L^T), W = \frac{1}{2}(L - L^T) \qquad (6.22)$$

تنسور **W** را تنسور چرخش، **Spin** یا **Vorticity** مي گویند و داراي خواص مشابه تنسور چرخش (**Inifintisimal ratation**) است با این تفاوت که هیچ تعبیر در بدست آوردن آن وجود ندارد و اندازه گیر نرخ چرخش المان است .

رابطه **(6.72**)تنسور **L** را به دو جزء تنسور نرخ تغییر شکل **D** و چرخش **W** تقسیم نموده است. چرخش را مي توان بوسیله بردار (**Vorticity**) **V** تعریف نمود که بوسیله رابطه زیر تعریف مي شود :

$$V = Curl V$$

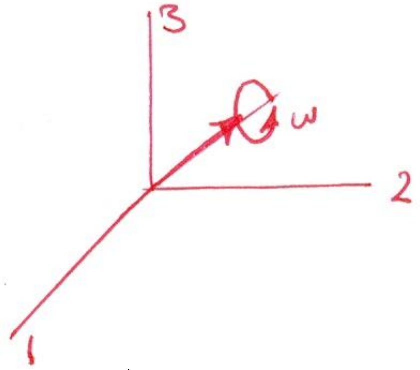
$$V_i = e_{ijk} \frac{\partial_{vk}}{\partial_{xj}} \qquad (6.73)$$

با روابط مشباه **(6.64) , (6.65)** مي توان **W,V** را به هم مربوط نمود .

$$W_{ik} = -\tfrac{1}{2} e_{ijk} V_i$$
$$V_i = -e_{ijk} W_{jk} \qquad (6.74)$$

در حرکت يك ذره با سرعت زاويه اي **W** حول محوري که از مبـــــدأ مختصـــــات بـــــا بـــــردار واحـــــد n مي گذرد سرعت عبارت است از :

$$V = w.n * x$$
$$x = x_1 i + x_2 j + x_3 k$$
$$V_1 = e_{ijk} w n_j x_k$$
$$L_{ik} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = e_{ijk} w n_j$$
$$L_{ik} = W_{ik} = W \begin{vmatrix} 0 & & \\ n_3 & & \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{vmatrix}$$



در نتيجه تنسور **D** در چرخش صلب جسم برابر صفر خواهد بود . به غير از اين اگر حرکت کلي جسم صلب را با صلب **(6.75** جمع کنيم، **D** حاصل همان **D** حرکت کلي جسم خواهد بود و يا اينکه **D** اندازه گيرند براي نرخ تغيير شكل مي باشد . مشتق زماني حاد (**Material Timderivator**) تنسور **F** به صورت زير است :

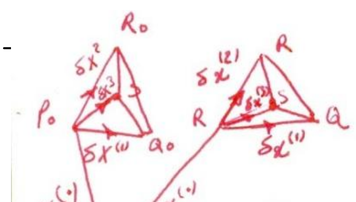
$$\frac{D}{Dt}(F_{iR}) = \frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_R}\right) = \frac{\partial v_i}{\partial X_R} = \frac{\partial v_i}{\partial X_j}\frac{\partial x_j}{\partial X_R} = L_{ij} F_{jR}$$
$$\Rightarrow \frac{DF}{Dt} = L.F \Rightarrow L = \frac{DF}{Dt}.F^{-1} \qquad (6.76)$$

در حالتيکه گراديان تغيير مکان کوچك است خواهيم داشت :

$$F^{-1} \cong I, L \cong \frac{DF}{Dt}, \qquad D \approx \frac{DE}{Dt} \qquad ,V \approx 2\frac{DW}{Dt}, W \approx \frac{D\Omega}{DT} \qquad (6.77)$$

قوانين بقاء :

بسياري از قوانين فيزيك کلاسيك را مي توان با استفاده از اين اصل که کميتي مثل جرم، بار الکتريکي، مومنتم و يا ساير اينها بايد بدون تغيير باقي بماند بدست آورد .



توابع از این نوع بستگي به ماده ندارند و روابط رياضي حاصل از این قوانین باید ارضا شود .

تغییر شکل المان حجم :

المان چهار وجهي بارئوس **P.Q.R.S** را در نظر بگیرید . بردارهاي موقعیت این رئوس را بترتیب با $X^{(0)}, X^{(0)}+\partial X^{(1)}, X^{(0)}+\partial X^{2}, X^{(0)}+\partial X^{3}$ در نظر بگیرید . چون مختصات در **Ref Conf** بیان مي شوند لذا مي توان از اندیس **R** نیز استفاده کرد لذا داریم :

$$X_R^{(0)}, X_R^{(0)}+\partial X_R^{(1)}, X_R^{(0)}+\partial X_R^{(2)}, X_R^{(0)}+\partial X_R^{(3)} \qquad (7.1)$$

حجم المان $P_0Q_0R_0S_0$ عبارت است از :

$$\delta V = \tfrac{1}{6}\delta X^{(1)}(\delta X^{(2)} * \delta X^{(3)})$$

و به شکل اندیسي عبارت خواهد شد از :

$$\delta V = \frac{1}{6}e_{RST} \qquad \delta X_R^{(1)}\delta X_S^{(7)}\delta X_T^{(3)} \qquad (7.2)$$

$$\delta X^{1} = \delta X_r^{(1)}e_r \qquad A = \delta X^{2} * \delta X^{3} = \delta X_T^{2}\delta X_S^{3} \qquad e_{TSK}e_k$$

$$\delta X^{2} = \delta X_t^{(2)}e_t$$

$$\delta X^{3} = \delta X_s^{(3)}e_s \qquad \delta X^{(1)} * A = \delta X_r^{(1)}e_r\delta X_T^{(2)}\delta X_S^{(3)}e_{TSK}e_k - \delta X_r^{(1)}\delta X_s^{(2)}\delta X_t^{(3)}e_{rst}$$

بعد از تغییر شکل نقاط $P_0Q_0R_0S_0$ به نقاط $PQRS$ با بردار موقعیت $X^{(0)}, X^{(0)}+\partial X^{(1)}, X^{(0)}+\partial X^{2}, X^{(0)}+\partial X^{3}$ تغییر مکان مي دهد .

حجم المان **PQRS** عبارت است از :

$$\delta V = \tfrac{1}{6}\delta x^{(1)}.(\delta x^{(2)} * \delta x^{(3)})$$

فرم اندیسي :

$$SV = \tfrac{1}{6}e_{ijk}\delta x_i^{(1)}\delta x_j^{(2)}\delta x_k^{(3)}$$

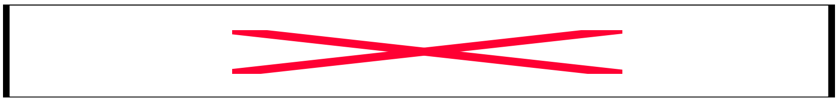
هر گاه تغیير شکل بوسیله رابطه $x_i = x_i(X_R, t)$ داده شده باشد، داریم :

$$\delta x^{(1)} = \frac{\partial x_i}{\partial X_R}\delta X_R^{(1)} + O(\delta X_R^{(1)})^2 \qquad (7.3)$$

به طريقه مشابه مي توان روابط را براي δX_i^2 و δX_i^3 نيز نوشت، در نتيجه حجم المان **PQRS** خواهد شد :

$$\delta V = \frac{1}{6} e_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial X_R}\frac{\partial x_j}{\partial X_S}\frac{\partial x_K}{\partial X_T}\partial X_R^{(1)}\partial X_S^{(2)}\partial X_T^{(3)}$$

با استفاده از رابطه **(2.22)** $\lfloor e_{mpq}\det A = e_{ijk}A_{im}A_{jp}A_{kq}\rfloor$ داريم



ژاكوبين $\dfrac{\delta v}{\delta V} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} = \dfrac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(X_1,X_2,X_3)}$

هرگاه حجم المان اوليه به سمت صفر ميل كند با استفاده از (**7.4**) داريم كه :

$$\frac{dv}{dv} = \frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(X_1,X_2,X_3)} \qquad (7.5)$$

با استفاده از رابطه (۶,۱۸) ديده مي شود كه ژاكوبين عبارتست از دترمينان تنسور گراديان تغيير مكان **F** . در نتيجه رابطه (۷,۵) به صورت زير است :

$$\frac{dv}{dV} = \det F \qquad (7.6)$$

اگر ماده غيرقابل تراكم باشد :

$$\frac{dv}{DV} = \det F = 1$$

اگر **det F** را بسط دهيم داريم :

$$\det F = \det(\delta iR \frac{\partial u_i}{\partial X_R}) = 1 + \frac{\partial u_i}{\partial X_i} + O(\frac{\partial u_i}{\partial X_R})^2$$

در صورتیکه تغییر طولها کوچك باشند و یا گرادیان تغییر مکان کوچك باشد داریم :

$$\frac{dv}{dV} = \det F \cong 1 + \frac{\partial u_i}{\partial X_R} = 1 + E_{ii} = j \qquad (7.7)$$

مقدار E_{ii} را **Delatotion** گوییم و با Δ نمایش مي دهیم و از(**7.7**)دیده مي شود که **Tensor** تنسور تغییر طول نسبي **Infinitesimal** مساوي Δ است .

$$\Delta = E_{ii} = E_{11} + E_{22} + E_{33} = tr(E)$$

براي تغییر مکانهاي کوچك Δ همان اندازه گیر تغییر حجم مي باشد .

قانون بقاي ماده : **Conservotion Of Mass Lagrangien Fam**

فرم لاگرانژین :

فرض کنید که داده مو جود در حجم $P_0Q_0R_0S_0$ داراي جر مي برابر δ_m در **Ref Conf** باشد بقاي ماده حکم مي کند که جرم ماده در المان حجم در حین تغییر شکل ثابت باشد . اگر دانسیته ماده در **Ref.conf** ، $\rho_\circ$ ودر **C.conf** ، ρباشد داریم :

$$\int_0 = Lim \frac{\delta m}{\delta V} \qquad\qquad \int = Lim \frac{\delta m}{\delta v}$$

$$\delta V \to 0 \qquad\qquad \delta v \to 0$$

$$\Rightarrow \frac{\int 0}{\int} = Lim \frac{\delta v}{\delta V} = \frac{dv}{dV} = \det F (7.8)$$

معادله **(7.8)** قانون بقاي ماده را برحسب گرادیان تغییر مکان مي دهد . در خیلي از موارد مناسبت تر است که این قانون را برحسب مؤلفه هاي سرعت بنویسیم . (فرم اویلري)

براي این کار منطقه دلخواه **R** را که داراي سطح S مي باشد، و در **Ref Conf** ثابت مي باشد را در نظر مي گیریم .

بقاي ماده – فرم اویلري **Conservation Of Mass – Eulerian Form**

قانون بقاي ماده در فرم اولرين مي گويد كه نرخ افزايش ماده در حجم **R** $(\iiint \frac{Di}{Dt}dv)$ برابر است با نرخ جريان ماده – به داخل حجم از سطح **S** نرخ جريان ماده از المان سطح **ds** وقتي كه **n** برداريكه عمود بر سطح به سمت خارج است، عبارت است از :

$N - \rho Vndsn$

و علامت منفي بدين علت است كه بردار **n** به سمت خارج حجم باشد .

بقاي ماده حكم مي كند كه داشته باشيم :

$$\iiint_R \frac{\partial P}{\partial t}dv = -\int e.v.nds \qquad (7.9)$$

با ساتفاده از قضيه گرين انتگرال روي سطح را تبديل به انتگرال داخل حجم مي كنيم

$$\iiint_R (\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho v))dv = 0 \qquad (7.10)$$

چون **R** اختياري است رابطه فوق به شكل زير در مي آيد :

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + div(\rho V) = 0 \qquad (7.11)$$

Continuity Equation

معادله بالا به رابطه (معادله) پيوستگي نيز مشهور است و آنرا به صورتهاي زير مي توان نوشت :

$div(V\Phi) = \Phi Liv V + V grad \Phi$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho div V + V.grad\rho = 0 \qquad (7.12)$$

و به شكل انديسي داريم :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\delta V_i}{\delta x_i} + V_i \frac{\delta \rho}{\delta x_i} = 0 \qquad (7.13)$$

اگر تابع چگالي تابعي از زمان و مكان باشد داريم :

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\frac{\partial V_i}{\partial x_i}=0$$

$$\rho=\rho(t,x_1(t))$$

$$\frac{D\rho}{Dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+V_1\frac{\partial\rho}{\partial x_i}$$

در نتيجه داريم :

در صورتيكه ماده غيرقابل تراكم باشد . $\frac{D\rho}{Dt}=0$ مي شود و از **(7.14)** ديده مي شود كه شرط تراكم ناپذيري معادل هر يك از روابط زير است :

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i}=0 \qquad or \qquad divV=0 \qquad Or \qquad D_{ii}=0 \qquad orTraceD=0 \qquad (7.15)$$

مشتق زماني مادي انتگرال حجم **The Matherial Time Dervective Ofvolume integraf Inteagh**

فرض كنيد كه Φ يك كميت فيزيكي مثل جرم و يا انرژي است كه مربوط به ذرات جسم مي شود و فرض كنيد كه Φ مقدار Φ در واحد جرم است . مقدار $\Phi=\frac{\Phi}{M}$ و مقدار Φ در واحد حجم عبارت است از $\rho\Phi$ و در زمان **t** عبارت است از :

$$\iiint_R \rho\Phi dv \qquad (7.16)$$

در فاصله زماني كوچك Δt مقدار Φ در يك نقطه در منقطه **R** تغيير خواهد نمود و مقداري ذرات از سطح جسم عبور نموده و Φ را انتقال خواهند داد .

نرخ تغييرات Φ مربوط به ذرات موجود در منطقه **R** در زمان **t** را مشتق زماني انتگرال **(7.16)** مي ناميم .

$$\frac{\Delta}{\Delta t}\iiint_R \Phi\rho dv \qquad (7.17)$$

نرخ افزايش Φ در **R** برابر است با جمع نرخ افزايش Φ مربوط به ذراتي كه در داخل وجود دارند و نرخ Φ مربوط به ذرات ورودي به عبارت ديگر .

$$\frac{\Delta}{\Delta t}\iiint_R \Phi\rho \mathrm{dv} \qquad (7.17)$$

نرخ افزایش Φ در **R** برابر است با جمع نرخ افزایش Φ مربوط به ذراتي كه در داخل وجود دارند و نرخ Φ مربوط به ذرات ورودي به عبارت ديگر .

$$\frac{\Delta}{\Delta t}\iiint_R \rho\Phi dv = \iiint_R \frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t}dv + \iint_S \Phi\rho vnds$$

با استفاده از قضيه گوس انتگرال روي سطح را روي جمع مي بريم و داريم :

$$\frac{\Delta}{\Delta t}\iiint_R \rho\Phi dv = \iiint \frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} + div(\Phi\rho v)\}dv \qquad (7.18)$$

با استفاده از رابطه ⊗ انتگرال سمت راست برابر است با :

$$= \iiint \left\{ \Phi\left[\frac{\partial p}{\partial t} + div(\rho V)\right] + \rho\left[\rho\frac{\partial\Phi}{ot} + Vgread\Phi\right]\right\} dv$$

$$\Rightarrow \frac{D}{Dt}\iiint_R \rho\Phi dv = \iiint_R \frac{D\Phi}{Dt}\rho dv \qquad (7.20)$$

قانون بقاي اندازه حركت خطي : **ConservationOf Liner Momentum**

قانون بقاي مومنتوم خطي براي ذره با جرم **m** مي گويد كه نرخ تغييرات مومنتوم خطي معادل با نيروي **P** است كه به ذره وارد مي شود و به فرم رياضي :

$$\frac{D}{Dt}(mV) = P$$

براي محيط پيوسته اين قانون بصورت زير در مي آيد .

نرخ تغيير مومنتوم خطي ذراتي كه در يك لحظه در منطقه ثابت **R** قرار دارند متناسب با نيروي وارد بر ماده در داخل منطقه **R** مي شود . اين نيروها عبارتند از نيروهاي جسمي كه بر واحد حجم وارد مي شوند و نيرو هاي تركشن

سطحي كه به سطح جسم وارد مي شوند در نتيجه رابطه بصورت زير در مي آيد .

$$\frac{D}{Dt}\iiint \rho v dv = \iiint_R \rho b dv + \iint_S t^n ds \qquad (7.21)$$

شكل مؤلفه اي :

$$\frac{D}{Dt}\iiint \rho v_i dv = \iiint \rho b_i dv + \iint T_{ij} n_j ds$$

با استفاده از **(7.20)** هرگاه به جاي Φ مؤلفه هاي سرعت يا Φ_j را قرار دهيم با استفاده از قضيه گوس خواهيم داشت .

$$\iiint \left\{ \rho \frac{DV_i}{Dt} - \rho b_i - \frac{\partial T_{ji}}{\partial_j} \right\} dv = 0$$

$$\frac{Dvi}{Dt} = F_i \qquad \Rightarrow \frac{\partial T_{ij}}{\partial X_j} + \rho b_j + \rho f_j \qquad (7.22)$$

اصل بقاي مومنتوم زاويه اي :

Conservation of Angulart Momentum :

براي يك ذره اصل بقاي مونتوم زاويه اي بصورت زير است :

$$\frac{D}{Dt}\{m(X * V\} = X * P$$

كه **P** نيروي وارد بر ذره و **X** بردار موقعيت ذره از يك مبدأ اختياري و **M** جرم ذره است براي محيطهاي پيوسته مشابه به **(7.21)** داريم كه :

$$\frac{D}{Dt}\iiint \rho X * V dv = \iiint_R \rho X * b dv \iint_S X * t^n \quad ds$$

و شكل مؤلفه اي :

$$\frac{D}{Dt}\iiint \rho e_{ijk} x_j V_K dv = \iiint_R \rho e_{ijk} x_j b_k dv + \iint_S e_{ijk} x_j T_{PK} n_p ds \qquad (7.23)$$

با استفاده از **(7.20)** داريم :

$$\iiint \rho e_{ijk} \frac{D}{Dt}(x_j V_k) dv = \iiint_R e_{ijk} x_j b_k dv + \iint_S e_{ijk} x_j T_{PK} n_p ds$$

و يا اينكه :

$$e_{ijk}\rho\frac{D}{Dt}(x_j v_k)=e_{ijk}\left\{\rho x_j b_k+\frac{\partial}{\partial xp}(x_J T_{pk}\right\} \qquad (7.24)$$

$$\frac{D}{Dt}(x_j V_K)=X_J f_k+V_j V_K$$

$$\frac{\partial}{\partial X_P}(X_j T_{PK})=T_{jk}+x_j\frac{\partial T_{pk}}{\partial X_p}$$

در نتيجه رابطه (**7.24**) بصورت زير در مي آيد :

$$e_{ijk}\left\{T_{jk}+x_j\left(\frac{\partial T_{pk}}{\partial Xp}+\rho b_k-\rho f_k\right)-\rho v_j v_k\right\}=0$$

$$\Rightarrow e_{ijk}T_{jk}=0\Rightarrow T_{jk}=T_{kj}$$

قانون بقاي انرژي :

Gensernation Of Energy :

انرژي سينيتيك **K** در ماده اي كه منطقه ثابت **R** را اشغال نموده است بوسيله عبارت زير بيان مي شود :

$$K=\iiint\frac{1}{2}\rho v_i v_i dv \qquad (7.27)$$

انرژي سينيتيك يك محيط پيوسته قسمتي از انرژي آن است و بقيه انرژي آن داخلي زاويه مي شود . **Ienteral energy** . آنرا با **E** نمايش مي دهيم كه بوسيله چگالي انرژي داخلي از رابطه زير حاصل مي شود . (**Internal Energy**) انرژي داخلي همان انرژي كرنشي ذخيره شده در جسم مي باشد .

$$E=\iint\rho e dv \qquad (7.28)$$

اصل بقاي انرژي مي گويد كه مشتق زماني **K+E** برابر است با جمع نرخ كار مكانيكي انجام شده روي جسم توسط نيروهاي جسمي و سطحي و نرخ ورود ساير انرژيها به جسم . ساير انواع انرژي مي توانند بصورت انرژي مغناطيسي انرژي حاصل از تشعشع و سايرين باشند . در اينجا فقط انرژي حرارتي مدنظر است . در صورتيكه q_i مؤلفه بردار

انرژي حرارتي و $\mathbf{n}_i$ مؤلفه بردار يكه عمود بر سطح باشد، در اينصورت $q_0 n$ مقدار حرارتي است از واحد سطح جسم به آن وارد مي شود و رابطه بقاي انرژي عبارت خواهد بود :

$$\frac{D}{Dt}\iiint_R \rho(\frac{1}{2}V_iV_i + e)dv = \iiint_R \rho b_i v_i dv + \iint_S (T_{ij}V_i q_j)n_j ds \qquad (7.29)$$

علامت منفي در ترم آخر (**7.29**) بدين علت است كه **n** بردار عمود بر سطح به سمت خارج و $-q_j n_j$ انرژي حرارتي وارد بر محيط پيوسته مي باشد . با استفاده از قضيه مشتق زماني (۷,۲۰) و همچنين با استفاده از قضيه گرين راي تبديل انتگرال از روي سطح به جسم رابطه (**7.29**) عبارت خواهد شد از :

$$e\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}v_iv_i + e\right) = \rho b_i v_i + \frac{\partial}{\partial x_j}(T_{ij}v_i - q_i) \qquad (7.30)$$

$$\frac{Dv}{Df} = F$$

$$\Rightarrow -V_i\left(\frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i - \rho f_i\right) + \rho\frac{De}{Dt} - T_{ji}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial q_j}{\partial x_j} = 0$$

رابط داخل پرانتز با استفاده از رابطه (**7.22**۹برابر صفر بوده و داريم :

$$\rho\frac{De}{Dt} = T_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \qquad (7.31)$$

و چون T_{ji} متقارن است با استفاده از (**6.69**) داريم :

$$T_{ji}\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left[T_{ji}\frac{\partial v_i}{\partial v_j} - T_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}T_{ij}\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right] = T_{ij}D_{ij}$$

توان تنش يا نرخ كارتنشهاي داخل محيطهاي پيوسته گوس و انرژي حرارتي **q** از رابطه فور يه براي هدايت حرارتي به دست مي آيد .

$$T_{ji}\frac{\partial V_i}{\partial x_j}=T_{ij}D_{ij}$$

$$\rho\frac{De}{Dt}=T_{ij}D_{ij}-\frac{\partial q_j}{\partial x_j} \qquad (7.32)$$

$$q=-k\nabla T^{*} \qquad (7.33)$$

فصل هشتم :

Linear Constitvetive Equation

مطالبي كه تابحال گفته شد در تمام موارد بطور يكسان معتبر است . ولي چون مواد داراي خواص يكسان نيستند روابط ديگري بايد وجود داشته باشد كه اين خواص را آشكار سازد كه آنها را معادلات ساختاري **Constitutive** مي گوييم . اينها معادلاتي هستند كه مربوط به هر ماده اي شده و مواد مختلف را از يكديگر متمايز مي سازند . معادلات ساختاري روابطي هستند كه تنش را به تغيير طول نسبي يا تنسور نرخ تغيير شكل مربوط مي سازند . معادلات ساختاري روابطي هستند كه تنش را به تغيير طول نسبي يا تنسور نرخ تغيير شكل مربوط مي سازند . عموماً متغيرات ترموديناميكي بخصوص درجه حرارت در معادلات ساختاري مؤثر هستند و در اينجا راجع به آنها بحث نخواهد شد .

رفتار مكانيكي مواد خيلي گوناگون و پيچيده است ولي معادلات ساختاري بايد به گونه اي باشند كه مهمترين رفتار مكانيك ماده را نشان دهند . اين روابط را معادلات حاكم بر ماده ايده آل مي ناميم .

معادلات ساختاري بايد نه تنها خواص ماده، بلكه مورد استعمال ماده را نيز در نظر بگيرند، بطور مثال تئوري سيال غيرقابل تراكم، جريان آب را در لوله ها خيلي خوب مدل مي كند ولي اگر انتشار موج در سيال مورد نظر باشد اين مدل ديگر قابل قبول نمي باشد و بايد آب را قابل تراكم در نظر گرفت .

مهمترين محدوديت روي معادلات ساختاري اين است كه تنش ايجاد شده بر اثر تغيير شكل نبايد تابعي از حركت صلب جسم باشد . در نتيجه اگر در ماده دو تغيير مكان انجام گيرد كه فقط در حركت صلب متفاوت باشند تنشهاي ايجاد شده در هر دو بايد يكسان باشد و بعبارت ديگر مي توان گفت كه معادلات ساختمان بايد تحت **Translation** و **Rotation** (انتقال و دوران)، محورهاي مختصات و ساير تغييرات مواد را عموماً به عنوان جامدات و يا سيالات طبقه بندي مي كنند كه سيالات شامل مايعات و گازها هستند . البته اين طبقه بندي چندان دقيق و تعريف شده نمي باشد . از نظر خواص مكانيكي آنچه سيال را از جامد متمايز مي كند، اين است كه سيالات تحمل تنش برشي را ندارند و تا زمانيكه تنش برشي به آنها داده مي شود در جهت آن تغيير شكل مي دهند ولي اين مطلب در مورد جامدات صادق نبوده و تغيير مكان آنها در برابر تنش جزئي محدود است .

الا سيسيته خطي :

بيشتر جامدات بخصوص موادي مثل فلزات، بتون، چوب و غيره عموماً تحت اثر نيروهايي كه به آنها وارد مي شود داراي تغيير مكانهاي كوچك هستند، و در صورتيكه نيروي وارد بر آنها خيلي زياد نباشد، بعد از اينكه نيرو را از روي جسم برداريم به حالت اوليه خود بر مي گردد . تئوري الا سيسيته خطي مدل بسيار مناسبي براي نشان دادن رفتار جامدات است . ماده الاستيك خطي ماده اي است كه انرژي داخل آن $(\rho 0 e)$ در واحد حجم داراي دو خاصيت زير مي باشد :

a) اول اينكه $\rho_0 e$ تابعي از مؤلفه هاي E_{ij} يعني تنسور تغيير طول نسبي بوده و اين وابستگي به صورت تابع درجه دوم از مؤلفه هاي تغيير طول نسبي است .

b) اگر **k** انرژي سينتيك (**7.27**) و **E** انرژي داخلي (**7.28**) باشد در اينصورت مشتقات عبارت است از **Z** نرخ كار مكانيكي نيروهاي سطحي و جسمي روي سطح .

در اينجا $\rho_0 e$ را با **W** نشان داده و آنرا تابع انرژي تغيير شكل يا **Strain Energy Function** مي ناميم . در نتيجه با رابطه (**a**) داريم :

$$W = \frac{1}{2} C_{ijk} l E_{ijk} E_{Kl} \qquad (8.7)$$

در اين رابطه ۸۱ ترم دارد .

خاصيت (**b**) همان اصل بقاي انرژي است كه انرژي حرارتي در آن وجود ندارد .

حال فرض كنيد كه از سيستم مختصات با بردارهاي واحد $\mathbf{e}_i$ به سيستم مختصات با بردار واحد $\bar{e}_i$ رفته ايم بطوريكه :

$$\bar{e}_i = M_{ij} e_j \qquad , \qquad e_j = M_{ji} \bar{\bar{e}}_i$$

در اينصورت مؤلفه هاي تنسور تغيير طول نسبي **Infiniresimal**، $\bar{E}_{ij}, E_{ij}$ در مختصات قديم و جديد بوسيله روابط زير به يكديگر مربوط مي شوند :

$$\begin{cases} \bar{E}_{rs} = M_{ri} M_{sj} E_{ij} \\ \\ E_{ij} = M_{ri} M_{sj} \bar{E}_{rs} \end{cases} \qquad (8.8)$$

انرژي تغيير طول نسبي را برحسب مؤلفه هاي $\bar{\bar{E}}_{ij}$ مي توان بصورت زير نوشت :

$$W = \frac{1}{2} \bar{e}_{ijk} l \quad \bar{E}_{ij} \quad \bar{E}_{KL} \qquad (8.9)$$

چون **W** اسكالر بوده و بستگي به سيستم مختصات ندارد، روابط (**8.7**) و (**8.9**) با يكديگر مساوي هستند . با استفاده از (**8.8**) داريم :

$$\bar{C}_{pqrs}\bar{E}_{pq}\bar{E}_{rs} = C_{IJK}LE_{ij}E_{kl} = C_{ijkl}M_{ei}M_{qi}M_{rk}M_{sl}\bar{E}_{pq}\bar{E}_{rs}$$

حال چون براي تمام مقادير، تغيير طول نسبي، روابط فوق بايد برقرار باشد، لذا C_{ijkl} بايد مؤلفه هاي يك تنسور مرتبه چهار باشد و يا اينكه $\bar{C}_{pqrs} = C_{ijkl}M_{pi}M_{qj}M_{rk}M_{sl}$

اگر در **(8.7)** انديسهاي **j,I** را با يكديگر عوض كنيم، داريم :

$$W = \frac{1}{2}C_{ijkl}E_{ji}E_{kl} = \frac{1}{2}C_{ijkl}E_{ij}E_{kl}$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(C_{ijkl} + C_{ijkl})\right]E_{ij}E_{kl}$$

$$\Rightarrow C_{ijkl} = \frac{1}{2}(C_{ijkl} + C_{ijkl})$$

در نتيجه C_{ijkl} را مي توان با $\frac{1}{2}(C_{ijkl} + C_{jikl})$ عوض نمود .

در نتيجه C_{ijkl} نسبت به **q,I** متقان است . به همين ترتيب مي توان نشان داد كه C_{ijkl} نسبت به L,k نيز متقارن مي باشد و بعبارت ديگر :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} \qquad (8.10)$$

تقارن بالا تعداد ثابتها را از ۸۱ به ۳۶ تبديل مي كند، بعلاوه تغيير همزمان انديسهاي (**k,I**) و همين طول (**e,j**) داريم كه :

$$W = \tfrac{1}{2}C_{klij}.E_{ij}E_{kl} = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}(C_{ijkl} + C_{klij})\right]E_{kL}E_{ij}$$

$$C_{ijkl} = C_{klij} \qquad (8.11)$$

و تعداد ثابتها با اين كار به ۲۱ تقليل مي يابد .

محدوديت ديگري كه روي **W** اعمال مي شود . اين است كه انرژي تغيير شكل همواره مثبت مي باشد و در نتيجه رابطه (۸,۷) تابع درجه دوم مثبت از E_{ij} مي باشد . تابحال از خاصيت (**b**) مواد الاستيك استفاده نشده است . با استفاده

از (7.31) وقتيکه e را با $e=\dfrac{W}{\rho_\circ}$ جانشين نموده و از انرژي حرارتي صرفنظر کنيم، داريم :

$$T_{ij}=\frac{\partial v_i}{\partial X_j}=\frac{\rho}{\rho_0}\frac{DW}{Dt} \qquad (8.12)$$

با استفاده از (7.7) و (7.8) با تقريب $\dfrac{\rho}{\rho_0}\cong 1$ داريم :

$$T_{ij}\frac{\partial V_i}{\partial x_j}=\frac{DW}{Dt}$$

$$\Rightarrow T_{ij}D_{ij}=-\frac{DW}{Dt} \qquad (8.13)$$

رابطه فوق اشکال مفهومي دارد، زيرا که **W** تابعي از E_{ij} مي باشد، بنابراين ترم زمان به طور صريح نبايد وجود داشته باشد، چون در اين صورت بدون اينکه محيط اثري بر آنها داشته باشد تبديل مي شوند و تنها مواد راديو اکتيو داراي اين خاصيت مي باشند و در نتيجه (8.13) به شکل زير بازنويسي مي شود :

$$W=W(E_{ij}) \qquad \frac{DW}{Dt}=\frac{\partial W}{\partial E}+\frac{\partial W}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\Rightarrow T_{ij}D_{ij}=\frac{\partial W}{\partial E_{ij}}\frac{\partial E_{ij}}{\partial_t}\Rightarrow T_{ij}=\frac{\partial w}{\partial E_{ij}}$$

براي محاسبه اين عبارت داريم :

$$W=\tfrac{1}{2}C_{pqrs}E_{pq}E_{rs}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial W}{\partial E_{ij}}=\tfrac{1}{2}C_{pqrs}\frac{\partial}{\partial E_{ij}}(E_{pq}E_{rs})=\tfrac{1}{2}C_{pqrs}\left(\frac{\partial E_{pq}}{\partial E_{ij}}\right)E_{rs}+E_{pq}\frac{\partial E_{rs}}{\partial E_{ij}}$$

$$=\frac{1}{2}C_{pqrs}(\delta_{pi}\delta_{qj}E_{rs}+\delta_{ri}\delta_{sj}E_{pq})=\tfrac{1}{2}C_{ijrs}E_{rs}+\tfrac{1}{2}C_{pqij}E_{pq}=T_{ij}$$

$$=\frac{1}{2}C_{ijrs}E_{rs}+\frac{1}{2}C_{rsij}E_{rs}=C_{ijrs}E_{rs}=T_{ij}$$

$$T_{ij}=C_{ijrs}E_{rs} \qquad (8.14)$$

آناليز جامع تغيير طول نسبي :

Further unolysis of finite deformation

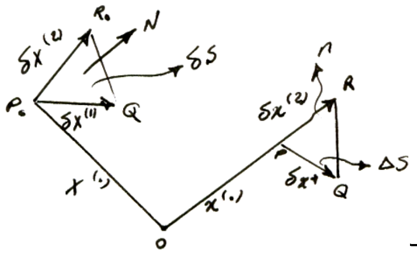
تغيير شكل المان سطح :

در بعضي از موارد مهم است كه جهت و اندازه المان سطح را بعد از تغيير شكل داشت، بطور مثال وقتيكه نيروهاي مشخص به نيروهاي جسم وارد مي شود . اين امر مهم مي باشد . المان مثلثي شكل سطح را در نظر بگيريد .

كه رئوس آن $P_1Q_0R_0$ در **Ref Conf** بوسيله بردارهاي $X^{(0)}, X^{(0)}, \delta X^{(1)}, X^{(0)} + \delta X^{(2)}$ مشخص شده اند . فرض كنيد كه اين مثلث داراي سطح δS بوده و برداريكه عمود بر آن **n** است در نتيجه داريم :

$$\delta s.n = \tfrac{1}{2}\delta X^{(1)} * \delta X^{(2)} as N_R \delta s = \tfrac{1}{2} e_{RST} \delta x_s^{(1)} \delta X_T^{(2)} \qquad (9.1)$$

فرض كنيد كه اين نقاط به نقاط **R,P,Q** كه بوسيله بردارهاي $X^{(0)}, X^{(1)}, \delta X^{(1)}, X^{(0)} + \delta X^{(6)}$



مشخص شده اند، منتقل شده اند و مساحـ مي باشد و داريم :

$$n.\Delta s = \frac{1}{2}\delta X^{(1)} * \delta X^{(2)} \;\; as \qquad n_i \Delta s = \tfrac{1}{2} e_{ijk} \delta X_J^{(1)} \delta X_K^{(2)} \qquad (9.2)$$

با استفاده از **(7.3**)و روابط مشابه آن و قرار دادن در **(9.2**)داريم :

$$(n_i \Delta s) = \frac{1}{2} e_{ijkj} \delta X^{(1)} \delta X_K^{(2)} = \frac{1}{2} e_{ijk} \frac{\partial x_j}{\partial X_S} \frac{\partial X_K}{\partial X_T} \delta X_S^{(1)} \delta X_T^{(2)}$$

با حذف طرفين رابطه فوق در $\dfrac{\partial X_i}{\partial X_R}$

$$n_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_R} \Delta S = \tfrac{1}{2} e_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial X_R} \frac{\partial X_j}{\partial X_s} \frac{\partial X_K}{\partial X_T} \delta X_S^{(1)} \delta X_T^{(2)}$$

با استفاده از روابط **(9.4**)و(**9.1**)داريم :

$$n_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_R}\Delta S = \tfrac{1}{2} e_{rst} \frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(X_1,X_2,X_3)} \delta X_S^{(1)} \delta X_T^{(2)} = \frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(X_1,X_2,X_3)} N_R \delta S \qquad (9.3)$$

در حد وقتیکه $\delta X^{(1)}, \delta X^{(2)}$ به سمت صفر میل مي کنند رابطه **9.3** بصورت زیر در مي آید :

$$n_i \frac{\partial x_i}{\partial X_R}\frac{dS}{ds} = \frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(X_1,X_2,X_3)} N_R = \det(F) N_R = \frac{\rho_0}{\rho} N_R$$

چون **N** بردار یکه است از **(9.4)** داریم :

$$N_R.N_R = 1 = (\det(F))^{-2} n_i n_j \frac{\partial x_i}{\partial X_R}\frac{\partial x_j}{\partial X_R}\left(\frac{dS}{ds}\right)^2 = (\det(F))^{-2} n_i n_j B_{ij}\left(\frac{dS}{ds}\right)^2$$

$$\left(\frac{dS}{ds}\right)^2 = \frac{(\det(F))^2}{n_i n_j B_{ij}} \qquad (9.6)$$

روابط **(9.4)** و **(9.6)** را به صورت تنسوري داریم :

$$N\det(F) = n.F.\frac{dS}{ds} \qquad (9.7)$$

و براي **(9.6)** :

$$\left(\frac{dS}{ds}\right)^2 = \frac{(\det(F))^2}{n.B.n} \qquad (9.8)$$

روابط **(9.6)** و یا **(9.8)** نسبت سطوح $\left(\frac{dS}{ds}\right)$ ثانویه به اولیه برحسب برداریکه **n** که عمود بر المان بعد از تغییر شکل است را مي دهد . برداریکه **N** بوسیله **9.4** و یا **9.7** مشخص مي شود . روابط معکوس **9.7** و **9.8** با استفاده از فصل شش بصورت زیر درمي آید :

$$\begin{cases} n\det(F)^{-1} = N.F^{-1}\dfrac{dS}{ds} & (9.9) \\ \left(\dfrac{dS}{ds}\right)^2 = \dfrac{(\det F^{-1})^2}{N.C^{-1}.N} & (9.10) \end{cases}$$

قضیه تجزیه قطبي تغییر مکان : **Decomposition Of Deformation**

بوسيله قضيه تجزيه قطبي تنسور گراديان تغيير مكان را مي توان بصورت زير نشان داد :

$$F = R.U = V.R \qquad (9.11)$$

كه **R** يك تنسور اورتگنال **V,U** تنسورهاي متقارن هستند .

چون $\det F = \frac{\rho_0}{\rho}$ تنسور **F** وقتيكه داده شده باشد، تنسورها **V,U,R** بصورت يكتا **Unique** هستند . با استفاده از **(9.11)** داريم .

$$U = R^T.V.R \quad \& \quad V = R.U.R^T \qquad (9.12)$$

حالتي را در نظر مي گيريم كه تغيير مكان هموژن است بطوريكه :

$$\mathbf{x=F.X} \qquad \mathbf{(9.13)}$$

چون تغيير مكان هموژن است، لذا مؤلفه هاي تنسور **F** ثابت هستند . فرض كنيد كه در جسم در حركت متوالي هموژن ايجاد مي شود، بطوريكه، ذراتي كه اول در موقعيت **X** قرار داشته اند، حركت كرده و در موقعيت $\hat{X}$ قرار مي گيرند . سپس از اين موقعيت به موقعيت **X** مي رسند . بطوريكه :

$$\begin{cases} \hat{X} = u.x \\ x = R.\hat{X} \end{cases} \qquad (9.14)$$

با استفاده از (**9.11**) و (**9.14**) داريم :

$$x = R.\hat{X} = R.U.X = F.X$$

بنابراين در حركت (**9.14**) معادل يك حركت (**9.13**) است .

چون **R** بصورت اورتگنال است، دومين حركت **(9.14)** چرخش صلب جسم را مشخص مي نمايد و اولين حركت (**9.14**)تغيير مكان مطابق با تنسور متقارن **u** را مي دهد، در نتيجه، اولين رابطه **(9.11)** نشان مي دهد كه هر تغيير مكان هموژن را مي توان به دو تغيير مكان، اولي مطابق با تنسور متقارن **u**

و دومي چرخش صلب **R** تجزيه نموده در صورتيكه تغيير مكان همگن نباشد، (۹,۱۳) را به صورت زير مي نويسيم :

$$\begin{cases} F = \dfrac{\partial x_i}{\partial x_R} \\ dx = F.dX \end{cases}$$

چون در اين حالت **F** تابعي از **x** بوده و ثابت نيست .

در اين حالت روابط (۹,۱۱) قابل اجرا هستند ولي **V,U,R** توابعي از موقعيت ذرات مي باشند . در اين صورت تغيير كلي محلي سپس چرخش محلي **R** و يا اول چرخش محلي **R** و سپس تغيير مكان محلي **V** قابل تجزيه مي باشد . تنسور **R** را تنسور چرخش و تنسور **U** را تنسور كشش راست (**Right Stretch**) و تنسور **V** را تنسور كشش چپ **Left Stretch** مي ناميم . اين تنسورها با تنسورهاي **C,B** با استفاده از **(6.27**) و (**9.11**)بستگي دارند :

$$C = F^T.F = U.R^T.R.U = U^2 \qquad (9.15)$$

$$B = F.F^T = V.R.R^T.V = V^2 \qquad (9.16)$$

چون **U** متقارن و مثبت معين **Positive Definite** رابطه**(9.15**)مؤلفه هاي **u** را برحسب **C** و بالعكس بدست مي دهد . در نتيجه از نقطه نظر اندازه گير تغيير مكان، **C,U** معادل يكديگرند .

اگر تانسور **F** داده شده باشد، محاسبه **C** از **(6.27**)آسانتر از محاسبه **U** از **(9.11**)مي باشد و معمولاً تانسور **C** را محاسبه مي كنند . همين مطلب در مورد تنسورهاي **B** و **V** نيز صادق مي باشد . با استفاده از **(6.62**)داريم .

$$F = I + E + \Omega \qquad (9.17)$$

كه **E** تنسور متقارن و Ω تنسور ضد متقارن مي باشد .

در حالت تغيير طولهاي نسبي كوچك و چرخش هاي كوچك از ضرب هاي Ω, E صرفنظر مي كنيم و داريم :

$$U^2 = F^T.F = (I+E-\Omega)(I+E+\Omega) = I+2E$$

$$\rightarrow U = (1+2E)^{1/2} = I + \frac{1}{2} * 2E + \ldots \cong I+E \qquad (9.18)$$

به همين ترتيب مي توان نشان داد كه :

=I+E

نتيجه اينكه در صورتيكه تغيير مكانها **Infinitesimal** يا كوچك باشند، قضيه تجزيه قطعي ساده شده و ماتريسها **V,U** به سادگي محاسبه مي شوند . بنابراين در حالتيكه تغيير مكانها كوچك مي باشند، فرق نمي كند كه اول جسم را بچرخانيم و بعد تغيير شكل بدهيم و يا بالعكس . در نتيجه **V-I , U-I** در تغيير كانالهاي كوچك **Infinitesimal** به تنسور تغيير طول نسبي كوچك **E** منجر خواهد شد .

با استفاده از(۹،۱۸)داريم كه :

$$U^{-1} \cong I - E \qquad (9.19)$$

و با استفاده از **(9.11)** و **(9.17**)و(**9.19**)داريم كه :

$$R = FU^{-1} = (I+E+\Omega)(I-E), I+\Omega$$

بنابراين **R-I** منجر به تنسور چرخش كوچك Ω در تغيير مكانهاي كوچك خواهد شد .

كششهاي اصلي و محورهاي اصلي تغيير مكان : **pricipal stretch and principal axes of deformation**

فرض كنيد كه **F** مثل**(9.11)** به دو تنسور **U,R** تجزيه شده است كه **R** تنسور چرخش مي باشد . در اينجا تغيير مكان حاصل از تنسور متقارن **U** مورد نظر است . با استفاده از نتايج گرفته شده از **(6.20**)كه تغيير جهت يك المان خط ماده را در حركت مي دهد براي حركت حاصل از **U** مي توان نوشت :

$$U.\vec{A} = \lambda \vec{a} \qquad (9.21)$$

که **a,A** بردارهاي واحد در جهت المان خط، قبل و بعد از حركت **U** بوده و λ كشش المان خط است فرض مي كنيم كه براي يك المان خط بخصوص كه در جهت $\vec{A}$ مي باشد، چرخش وجود ندارد . بدين معني كه $\vec{a},\vec{A}$ موازي يكديگرند . در اينصورت براي **(9.21**)داريم :

$$u.\vec{A} = \lambda \vec{A}$$

$$\Rightarrow (U - \lambda I)\vec{A} = 0 \qquad (9.22)$$

λ مقدار اصلي يا تنسور **U** و $\vec{A}$ جهت اصلي پايه **Principul Dirletion** گفته مي شود :

چون **U** متقارن است، مقادير اصلي آن $(\lambda_3, \lambda_2, \lambda_3)$ حقيقي بوده و $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ مي باشد .

و اگر مثبت معين باشند همگي λ مثبتند . همچنين جهتهاي بردار هاي اصلي آن كه بردار هاي يكه A_3, A_2, A_1 هستند بر يكديگر عمود مي باشد . در صورتيكه محور هاي مختصات را مطابق با محورهاي اصلي **U** قرار دهيم، ماتريس مؤلفه هاي **U**، قطري خواهد شد . بنابراين :

$$U_{RS} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}$$

در نتيجه در اين سيستم مختصات، تغيير مكان **U** فقط عبارت است از كشش در امتداد اين محور ها و بدون چرخش . به طريقه مشابه از تجزيه **F=V.R** مي توان استفاده نمود و نشان داد كه **F** را مي توان چرخش **R** و سپس سه كشش كه بوسيله مقادير اصلي **V** در امتداد محورهاي اصلي انجام مي شده نشان داد .

مقادير اصلي **V.U** به هم مربوط هستند چون $R^T.R=I$ با استفاده از **9.22** خواهيم داشت :

$$R(U-\lambda I),R^T=R_0\vec{A}=0$$
$$\rightarrow (RUR^T-\lambda R.I.R^T)R.\vec{A}=0 \qquad \Rightarrow (V-\lambda I).R.A=0 \qquad \textbf{(9.23)}$$

در نتيجه مقادير اصلي **U** كه همان $\lambda_3,\lambda_2,\lambda_1$ مي باشد، مقادير اصلي **V** نيز خواهند بود و اگر بردارهاي يكه $\vec{A}_1,\vec{A}_2,\vec{A}_3$ جهتهاي اصلي **U** باشند RA_3,RA_2,RA_1 جهتهاي فعلي **V** خواهند بود و يا اينكه جهتهاي اصلي **V** يا چرخش جهتهاي اصلي **U**– اندازه **R** بدست مي آيند .

اگر تغيير مكان هموژن باشد، تنسور **F** ثابت است و در اينصورت تنسورهاي **C,V,U,R** ثابت خواهند بود و كشش هاي اصلي $\lambda_3,\lambda_2,\lambda_1$ و جهتهاي اصلي در تمام جسم يكسان هستند .

در حالت كلي كه تغيير مكان هموژن نيست $\lambda_3,\lambda_2,\lambda_1$ و A_1,A_2,A_3 توابعي از موقعيت مي باشند .

چون $C=U^2$ و $\gamma=\frac{1}{2}(C-I)$ مي باشد، جهتهاي اصلي γ,C با **U** يكي خواهد بود و مقادير اصلي آنها براي λ_i^2,C و براي $\frac{1}{2}(\lambda_i^2-1)\gamma$ مي باشد . به همين ترتيب جهتهاي اصلي η,B با **V** مطابق بوده و مقادير اصلي آنها $\frac{1}{2}(1-\lambda_i^2)^{-2},\lambda_i^2$ خواهد بود .

كششهاي اصلي و جهات اصلي را به طريقه ديگري نيز مي توان محاسبه نمود .

با استفاده از (**9.29**)داريم :

$$\lambda^2=A_RA_SC_{RS} \qquad (9.24)$$

وقتيكه تنسور **C** داده شده است، براي هر سيستم مختصات در **Ref Confi**، λ را مي توان محاسبه نمود و چون λ ها مقادير اصلي حداكثر و حداقل كشش هستند، مقادير حداكثر و حداقل

$A_R A_S C_{RS}$ وقتیکه شرط $A_R.A_R = I$ ارضا شود، مقادیر λ را می دهد . در نتیجه باید معادله زیر را ارضا کنید .

$$\frac{\partial}{\partial A_P}\left\{A_R A_S C_{RS} - \mu^2 (A_R A_R - I)\right\} = 0$$
$$\frac{\partial A_S}{\partial A_P} = \delta_{SP}, \frac{\partial A_R}{\partial A_P} = \delta_{RP}$$
$$\Rightarrow (C_{RS} - \mu^2 \delta_{RS}) A_R = 0 \qquad \Rightarrow (C - \mu^2 I) A = 0 \qquad (9.25)$$

ثابتهاي تنسور تغيير طول نسبي :

بطوریکه قبلاً نیز دیده شد، کشهاي اصلي $\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1$ تحت انتقال محورهاي مختصات ثابت هستند . چون $\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1$ مقادیر ویژه تنسورهاي **V,U** هستند سه تابع متقارن مي توان انتخاب نمود ولي عموماً بهتر است که از $\lambda_3^2, \lambda_2^2, \lambda_1^2$ که مقادیر اصلي تنسورهاي **C,B** هستند استفاده نمود . سه ثابت تغییر طول نسبي را (I_3, I_2, I_1) بصورت زیر انتخاب مي کنیم :

$$\begin{Bmatrix} I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 \\ I_3 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \end{Bmatrix} \qquad (9.26)$$

با استفاده از (**3.52**) داریم :

$$\begin{cases} I_i = t\ rC = t\ rB = C_{RR} = B_{ii} \\ I_2 = \frac{1}{2}\left\{(t\ rC)^2 - t\ rC^2\right\} = \frac{1}{2}\left\{(t\ rB)^2 - t\ rB^2\right\} = \frac{1}{2}\left\{C_{RR} C_{ss} - C_{RS} C_{RS}\right\} \\ \qquad = \frac{1}{2}\left\{B_{ii} B_{jj} - B_{ij} B_{ij}\right\} \qquad (9.27) \\ I_3 = \det C = \det B \end{cases}$$

با استفاده از (**3.58**) قضیه کیلي همیلتون براي ماتریسهاي **C,B** بصورت زیر در مي آید :

$$B^3 - I_1 B^2 + I_2 B - I_3 I = 0$$
$$C^3 - I_1 C^2 + I_1 C - I_3 I = 0 \qquad (9.28)$$

مقادیر اصلي مقادیر ویژه C^{-1}, B^{-1} عبارتند از : $\lambda_3^{-2}, \lambda_2^{-2}, \lambda_1^{-2}$ در نتیجه :

$$trC^{-1} = trB^{-1} = \lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2} = I_2 I_3^{-1}$$

در نتیجه رابطه دیگري براي I_2 مي توان بصورت زیر درآورد .

$$I_2 = I_3 t_i C^{-1} = I_3 t_i B^{-1} \qquad (9.29)$$

همینطور داریم :

$$I_3 = \det C = \det(F^T.F) = \det(F)^T.\det(F) = \det(F)^2 = \left(\frac{dv}{dV}\right)^2 = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2$$

مثال **D** : کشش یکنواخت

کشش یکنواخت بوسیله روابط **(6.42)** مشخص شده است . تجزیه قطبي ساده مي شود و داریم :

R=I , F=U=V

کشهاي اصلي $\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1$ بوده و محورهاي اصلي همان محورهاي اصلي تنسور **C,B** هستند . ثابتهاي تغییر طول نسبي در این حالت عبارتند از :

$$\begin{Bmatrix} I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_1^2\lambda_3^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 \\ I_3 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \end{Bmatrix}$$

مثال۲ : برش ساده :
برش ساده توسط روابط **6.44** مشخص شده است . با استفاده از (**6.45**) (**9.29**) ثابتهاي تغییر طول نسبي عبارتند از :

$$I_1 = 3 + \tan^2\gamma \qquad I_2 = 3 + \tan^2\gamma \qquad , I_3 = I$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & \tan\gamma & 0 \\ \tan\gamma & 1 + \tan^2\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

با استفاده از مقادیر ویژه ماتریس **C** داریم :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \sec\beta + \tan\beta \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = \sec\beta - \tan\beta \end{cases}$$

$$\tan\beta = \frac{1}{2}\tan\gamma$$

بردار ویژه هاي نرمال شده عبارتند از :

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1\mp\sin\beta)^{\frac{1}{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}(1\pm\sin\beta)^{\frac{1}{2}},0)\right\}^T$$

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1\pm\sin\beta)^{\frac{1}{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}(1\mp\sin\beta)^{\frac{1}{2}},0)\right\}^T$$

$$\{0,0,1\}^T$$

بطور مشابه بردار ویژه هاي نرمال شده **B** عبارت خواهند بود با قرمزهاي بالا و با مقادیر ویژه برابرند .

مؤلفه هاي تنسور **R** را با استفاده از این خاصیت که **R** تنسوري است که محورهاي اصلي **C** را چرخانده و به محورهاي اصلي**B** تصویر مي کند، بدست مي آید .

$$M_2 = RM_1$$

$$M_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} (1-\sin\beta)^{\frac{1}{2}}, & 0 & ,(1+\sin\beta)^{\frac{1}{2}} \\ (1+\sin\beta)^{\frac{1}{2}}, & 0 & ,(1-\sin\beta)^{\frac{1}{2}} \\ 0 \quad , & \sqrt{2} & ,0 \end{vmatrix}$$ جهات

$$M_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} (1+\sin\beta)^{\frac{1}{2}}, & 0 & ,(1-\sin\beta)^{\frac{1}{2}} \\ (1-\sin\beta)^{\frac{1}{2}}, & 0 & ,(1+\sin\beta)^{\frac{1}{2}} \\ 0 \quad , & \sqrt{2} & ,0 \end{vmatrix}$$

$$R = M_2.M_I^T = \begin{vmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$U = R^T.F = \begin{vmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \sec\beta(1+\sin^2\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

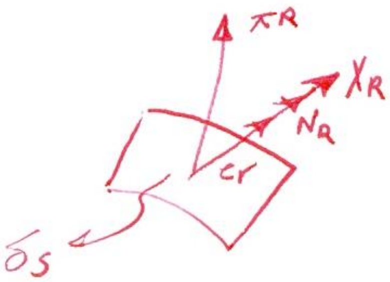
فرمولهاي دیگر تنسور تنش :

تنسور تنش **T** که آنرا تنسور تنش مي گوییم . مؤلفه هاي تنسور تنش در جهات X_i روي صفحات X_i در **Curent con figuration**

هستند . در بعضي از موارد مناسبتر است كه تنسور تنش را برحسب مؤلفه هاي **Traction** در **Ref Conf** مشخص كنيم . (توضيح اينكه وقتيكه نيرو به سطح وارد مي شود، سطح تغيير شكل داده و بنابراين بايستي اثر نيرو را بر سطح تغيير شكل يافته، بررسي نمود علاوه بر آن چون در خيلي از مسايل شكل سطح (مقطع) بعد از تغيير فرم بطور كل عوض مي شود (مانند تغيير شكل هاي بزرگ **Large Defrint** ، كمانش) شكل صفحه بعد از **Deformation** با شكل صفحه قبل از تغيير شكل كاملاً متفاوت است و چون اطلاعات دقيقي از سطح ثانويه نداريم لذا بهتر است كه مؤلفه هاي تنش را برحسب سطح اوليه (تغيير شكل نيافته) محاسبه كنيم . به اين منظور مؤلفين تنشهاي متفاوتي را تعريف مي كنند كه هر كدام با سطح اوليه و ثانويه در ارتباط مي باشند .

الماني از سطح جسم را در نظر بگيريد كه **Ref Conf**، عبور بر محور X_R بوده و مساحت آن δ_S است . بردار واحد عمود بر اين سطح در **Ref Conf** را با e_R نشار

تغيير شكل (**6.1**) $Ox_i = x_i(X_R, t)$



اين المان مساحت δ_S را داشته و بر خواهد بود . با استفاده از **(9.9**) داريم كه :

$$(9.31) \quad n_R = [\det F]^* \frac{ds}{dS} . e_R . F^{-1}$$

نيرو روي سطح تغيير شكل نيافته را δS . π_R نمايش مي دهيم . بردار π_R داراي مؤلفه هاي π_{Ri} بصورت زير است :

$$\pi_R = \pi_{Ri} - e_i \qquad (9.32)$$

اگر π_{Ri} مؤلفه در جهت X_i نيرو روي سطحي است كه عمود بر بردار X_R در **Ref Conf** مي باشد .

براي اينكه π_{Ri} را به T_{ij} (تنسور تنش كوشي) مربوط كنيم ديده مي شود كه نيروي روي سطح المان تغيير شكل داده شده معادل است با :

كل نيرو روي سطح تغيير شكل يافته $n_R.T.\delta S$

در نتيجه با استفاده از (**9.31**) و (**9.32**) داريم :

$$\pi_{Ri}.e_i.\delta s=(\det F)\frac{ds}{dS}.e_R.F^{-1}.T\delta S$$

نيرو بعد از تغيير شكل = نيرو قبل از تغيير شكل

با مساوي قرار دادن مؤلفه ها در دو طرف رابطه بالا و گرفتن حد وقتي كه $\delta S\to 0$ داريم :

$$\pi_{Ri}=(\det F).F_{Rj}^{-1}.T_{ij} \qquad (9.34)$$

كه π_{Ri} مؤلفه هاي تنسور درجه دوم مي باشد و به فرم تنسوري برابر است با :

$$\begin{cases}\pi=(\det F)F^{-1}.T\\ T=(\det F)^{-1}.F.TI\end{cases}$$

تانسور **π** در حالت كلي متقارن نمي باشد و آنرا تنسور اول تنش پيولا **Fisrt Piola Kirchhoff Tensor** مي گوييم . با در نظر گرفتن تعادل يك المان چهار وجهي كه سه وجه آن عمود بر محورهاي مختصات **Ref Conf** بوده و وجه چهارم آن سطح خارجي جسم است، مي توان نشان داد كه $t^{(N)}$ كه در واحد سطح **Ref Conf** بوده و برداريكه عمود بر آن در **Ref Conf** ، **N** است از رابطه زير بدست مي آيد :

$$t^N=N.\pi \qquad (9.37)$$

با در نظر گرفتن نيروهاي جسمي و سطحي در **Ref Conf** مي توان معادله تعادل را بصورت زير بدست آورد :

$$\frac{\partial \pi_{Ri}}{\partial X_R} + \rho 0 b_i = \rho_0 f_i \qquad (9.38)$$

تنسور پيولاي نوع دوم را بصورت زير تعريف مي كنيم :

$$P = \pi (F^{-1})^T = (\det F).F^{-1}.T.(F^{-1})^T \qquad (9.39)$$

$$\pi \to \pi = P.F^T \pi_{Ri} = P_{RS} \frac{\partial x_i}{\partial X_S}$$

$$T = (\det F)^{-1}.F.P.F^T \qquad (9.40)$$

$$\frac{\partial P_{Ri}}{\partial X_R} + \rho_0 b_i = \rho_0 f_i \qquad (9.41)$$

فصل دهم : **Nonlinear Contitutive Equation** معادلات مشخصه مواد غير خطي

معادله مشخصه مواد غيرخطي (معادلات ساختاري براي مواد **Finite** تغيير شكل **Finite**دارند) مثل پليمرها . رفتار خيلي از مواد را مي توان توسط تئوي الا سيسيته خطي بيان نمود . ولي چون اين تئوري محدود به حالتي است كه گراديان تغيير مكان كوچك است رفتار بعضي از مواد مثل لاستيك ها و انواع پليمر ها كه مي توانند در محيط الاستيك داراي تغيير مكان نيز باشند، بوسيله تئوري الا سيسيته خطي قابل بيان نيست و بايد از تئوري الا سيسيته **Finite** استفاده نمود .

براي فرموله كردن تئوري الاشيشه محدود، مانند الا شيشه خطي،فرض

با استفاده از روابط **(6.26**)و(**8.12**)و (**10.1**)داريم كه :

$$T_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{DW}{Dt} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{DF_{iR}}{Dt} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial F_{iR}} \frac{\partial x_j}{\partial X_R} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

چون رابطه فوق براي تمامي $\frac{\partial v_j}{\partial X_j}$ معتبر مي باشد، خواهيم داشت :

$$T_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial F_{iR}} \frac{\partial X_i}{\partial X_R}$$

رابطه ۱۰,۲ فرم کلي معادلات ساختاري براي تغيير مکانهاي **Finite Deformation Finite** يا **Finite elastic** است . **w** را در رابطه بالا نه مؤلفه تنسور **F** مي باشد . تابع انرژي تغيير طول نسبي نبايد بستگي به حرکت صلب جسم داشته باشد . فرض کنيد که ذره اي که در اول در نقطه **X** است، حرکت کرده و بردار موقعيت آن **x** خواهد شد . سپس به آن يك چرخش صلب مي دهيم، بطوريکه $\bar{x} = M.x$ که **M** يك تنسور ارتگنال مي باشد .

بنابراين ذره اي که در **X** قرار داشت حال در موقعيت $\bar{x}$ قرار دارد، از تعريف**F** داريم :

$$F_{iR} = \frac{\partial x_i}{\partial X_R}$$

$$\bar{F}_{iR} = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial X_R} = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial X_j} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial X_R} = M_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial X_R} M_{ij} F_{jR}$$

$$\bar{F} = M.F \qquad (10.3)$$

$$W(F) = W(\bar{F}) = W(M.F) \qquad (10.4)$$

رابطه بالا محدوديت بستگي **W** را به**F** نشان مي دهد . چون نبايد قضيه تجزيه قطبي **F=R.U** رابطه **10.4** را به صورت زير داريم :

W(F)=W(M.RU)

چون رابطه بالا براي تمام تنسورهاي ارتگنال **M** بايد صادق باشد، قرار مي دهيم :

$$M = R^T \Rightarrow W(F) = W(R^T.R.U) = W(U)$$

در نتيجه **W** را مي توان تابعي از شش مؤلفه تنسور متقارن **u** در نظر گرفت . حال چون طبق **9.15** مي توان **U** را

برحسب **C** نوشت و چون **C** براثر چرخش صلب جسم تغيير نمي كند براي رابطه بالا داريم :

$$W = W(C) \qquad (10.5)$$

رابطه بالا در اثر چرخش صلب جسم، بدون تغيير مي ماند و ديگر اين رابطه را نمي توان ساده تر نمود .

مشتق زماني رابطه فوق برابر است با :

$$\frac{DW}{Dt} = \frac{\partial W}{\partial C_{RS}}\frac{\partial C_{RS}}{Dt} = \frac{\partial W}{\partial C_{RS}}\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_R}.\frac{\partial x_i}{\partial X_S}\right)$$

$$= \frac{\partial w}{\partial C_{RS}}\left(\frac{\partial v_i}{\partial X_R}\frac{\partial x_i}{\partial X_s} + \frac{\partial x_i}{\partial X_R}\frac{\partial v_i}{\partial X_s}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{Dw}{Dt} = \left(\frac{\partial w}{\partial C_{RS}} + \frac{\partial w}{\partial C_{RS}}\right)\frac{\partial x_i}{\partial X_R}\frac{\partial v_i}{\partial X_s} = \left(\frac{\partial w}{\partial C_{RS}} + \frac{\partial w}{\partial C_{RS}}\right)\frac{\partial x_i}{\partial X_R}\frac{\partial v_i}{\partial X_j}\frac{\partial x_j}{\partial X_S}$$

با مقايسه رابطه فوق با **10.2** داريم :

$$T_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial x_i}{\partial X_R}\frac{\partial x_j}{\partial X_s}\left(\frac{\partial w}{\partial C_{RS}} + \frac{\partial W}{\partial C_{SR}}\right) \qquad (10.7)$$

هر نوع تقارن در خواص مكانيكي ماده، نوعي را كه **W** به **C** بستگي دارد، محدود مي كند . به طور مثال، فرض كنيد كه ماتريس ارتگنال **Q**، ماتريس تقارن چرخش خواص مكانيكي ماده باشد، بعبارت ديگر رابطه زير برقرار است :

$$W(C) = W(Q^T.C.Q) \qquad (10.8)$$

اگر ماده ايزوتروپيك باشد، يعني خواص آن در تمام جهات (يا تحت هر تنسور **Q**) ثابت خواهد بود كه آنرا مي توان به اين صورت تعبير نمود كه **W** يكه **Invcrictive** تنسور **C** است . چون سه ثابت تنسور **C** عبارتند از I_3, I_2, I_1 در نتيجه در مواد ايزوترپيك تابع **W** بايد بصورت زير باشد :

W=W(I_3, I_2, I_1 **)**

بنابراين :

$$\frac{\partial W}{\partial C_{RS}}=\frac{\partial W}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial C_{RS}}+\frac{\partial W}{\partial I_2}\frac{\partial I_2}{\partial C_{RS}}+\frac{\partial W}{\partial I_3}\frac{\partial I_3}{\partial C_{RS}}$$

مقادير مشتقهاي : $\frac{\partial I_3}{\partial C_{RS}},\frac{\partial I_2}{\partial C_{RS}},\frac{\partial I_1}{\partial C_{RS}}$ برابرند با :

$$\frac{\partial I_1}{\partial C_{RS}}=\frac{\partial C_{PP}}{\partial C_{RS}}=\delta_{PR}\delta_{PS}=\delta_{RS} \qquad (10.11)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial C_{RS}}=I_1\delta_{RS}-C_{RS}\ (10.12),\ \frac{\partial I_3}{\partial C_{RS}}=I_2\delta_{RS}-I_1C_{RS}+C_{RP}C_{SP} \quad (10.14)$$

$$I_3=\tfrac{1}{3}\left\{tiC^3-I_1tiC^2+I_2tiC\right\} \qquad (10.13)$$

با قرار دادن روابط **10.11** تا **10.14** در **10.7** خواهيم داشت :

$$T_{ij}=2\frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial x_i}{\partial X_R}\frac{\partial x_j}{\partial X_S}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial I_I}+I_1\frac{\partial W}{\partial I_2}+I_2\frac{\partial W}{\partial I_3}\right)\delta_{RS}-\left(\frac{\partial W}{\partial I_2}+I_1\frac{\partial W}{\partial I_3}\right)+\left(\frac{\partial W}{\partial I_3}\right)C_{RP}C_{SP}\right\}$$

رابطه بالا فرم كلي، معادلات مشخصه مواد ايزوتروپيك است كه آنرا به فرم تنسوري زير مي توان نوشت :

$$T=2(I_3)^{1/2}F.\left\{(W_1+I_1W_2+I_2W_3)I-(W_2+I_1W_3)C+W_3C^2\right\}.F^T \qquad (10.15)$$

$$I_3=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2,W=\frac{\partial W}{\partial I_1} \qquad I=UnitTensor \qquad (10.16)$$

رابطه **10.15** را با استفاده از روابط **6.27** و **6.33** مي توان به صورت زير بازنويسي نمود :

$$F.F^T=B \quad , \quad F.C.F^T=B^2 \quad F.C^2.F^T=B^3$$

با جايگذاري در رابطه داريم :

$$T=2(I_3)^{-1/2}\left\{(W_1+I_2W_2+I_2W_3)B-(W_2+I_1W_3)B^2+W_3B^3\right\} \qquad (10.17)$$

كه با استفاده از روابط **9.28** مي توان B^3 را حذف نمود همينطور اگر **9.28** را در B^{-1} ضرب كنيم، B^2 را هم از بالا حذف كنيم، در نتيجه داريم :

$$T=2(I_3)^{-1/2}\left\{(I_2W_2+I_3W)I+W_1B-I_3W_2B^{-1}\right\} \qquad (10.18)$$

تمرين : ثابت كنيد كه براي تنسورهاي خطي ارتجاعي بي نهايت كوچك تابع انرژي تغيير فرم نسبي را مي توان بصورت زير نوشت :

$$W = W_1 + W_2$$

$$\begin{cases} W_1 = \dfrac{k}{2} I^2 \\ W_2 = \dfrac{\mu}{3}(2I_1^2 - 6I_2) \end{cases} \qquad\qquad K, \lambda + \dfrac{2}{3}\mu$$

همچنين رابطه ضريب **K** را باضرايب لامه **Lame** μ,λ را با **k** پيدا كنيد و مفهوم فيزيكي و w_2 را توضيح دهيد .

پلاستيك و پليمر تغيير شكل **infinte** دارند ولي فولاد تغيير شكل **Infinitecimal** دارد .