ماتریسها

در این فصل مطالب مقدماتی در مورد خواص ماتریسهابررسی خواهد شد .تعدادی از قضایای گفته شده بدون اثبات خواهد بود .ماتریس کلی $m\times n$ ، A را به صورت زیر نمایش می دهیم :

$$A = A_{ij} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & ..... & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & ..... & A_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ A_{m1} & A_{m2} & A_{m3} & ..... & A_{mn} \end{pmatrix}$$

به طوری که A_{ij} ،درایه سطر i،وستون j می باشد .

$I=1000m$

$J=1000n$ **که اصطلاحا گفته می شود** $\Rightarrow$ ***range convention*** $A_{ij} \Rightarrow {}^{i}_{j}$

در مکانیک محیطهای پیوسته عموما با ماتریسهای 3×3 مربعی سرو کار داریم ماتریس 1×3 ماتریسی است ستونی که *s ector* نامیده می شود .ماتریسهای مربعی را معمولا باحروف بزرگ C ، B ، A و ماتریسهای سطری وستونی را باحروف کوچک c ، b،a نشان می دهند .

ترانسپزماتریس ***Transpose matrix*** **با باعوض کردن جای سطرها وستونها ترانسپز یک ماتریس به دست می آید .ماتریس مربعی A متقارن است اگر :**

$A = A^T$ **یا** $A_{ij} = A_{ji}$ *(2.2)*

وماتریسی پاد متقارن است اگر :

Antisyy metric matrix $A = -A^T$ **یا** $A_{ij} = -A_{ji}$ *(2.3)*

Skiew syymmetric

ماتریس مربعی واحد ***unit matrix***

به صورت زیر تعریف می شود

$I = \delta_{ij}$, $I,j = 1,2,3$ *(2.4)*

که در آن المانهای روی قطر واحد و المانهای خارج از قطر برابر صفر است .

$$\begin{Bmatrix} \delta_{11}=\delta_{22}=\delta_{33}=1 \\ \delta_{12}=\delta_{13}=\delta_{23}=\delta_{31}=\ldots=0 \end{Bmatrix} \qquad (2.5)$$

در نتیجه :

$$\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kronecker -Delta

$$\delta_{ij}=\begin{cases} 0 & i\neq j \\ 1 & i=j \end{cases}$$

قانون جانشـــینی: ***Substitution rulen*** **خاصیت مهـــم δ خاصـــیت**

جانشینی آن است که به صورت زیر می باشد .

$$\sum_{j=1}^{3}\delta_{ij}A_{JK}=\delta_{I1}A_{1K}+\delta_{I2}A_{2K}+\delta_{I3}A_{3K}=A_{IK} \qquad (2.6)$$

$$\sum_{j=1}^{3}\delta_{ij}\delta_{jk}=\delta_{i1}\delta_{1k}+\delta_{i2}\delta_{2k}+\delta_{i3}\delta_{3k}=\delta_{ik}$$

$$\sum_{j=1}^{3}\delta_{ij}A_{kj}=\delta_{i1}A_{k1}+\delta_{i2}A_{k2}+\delta_{i3}A_{k3}=A_{ki}$$

ماتریس *Trace* :

جمع درایه های روی قطر ماتریس را *Trace* ماتریس می نامند .

به عنوان مثال برای ماتریس A (3×3) داریم :

***Exp*:**

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}\rightarrow Trace\ \boldsymbol{A}+\boldsymbol{A_{11}}+\boldsymbol{A_{22}}+\boldsymbol{A_{33}}=\sum_{i=1}^{3}A_{ii}$$

$$\rightarrow tr\ (\mathbf{A})=\sum_{i=1}^{3}A_{ij} \qquad (2.7)$$

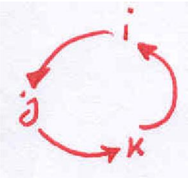
$$\sum_{i=1}^{3} \delta_{ii} = tr(I) = 3 \qquad (2.8)$$

با ماتریسهای مربع دترمینان را می شود تعریف نمود دترمینان ماتریس 3×3 A را به صورت

$det\,(A)$ می نویسیم .وبرابر است با :

$$det\,(A)=\frac{1}{6}\sum_{I=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}\sum_{t=1}^{3} e_{ijk} \quad e_{rst}\, A_{ir} \quad A_{JS}\, A_{KT} \qquad (2.9)$$

که به e_{ijk} گفته می شود *permutation symbel* یا *Alternative symbel*



$e_{ijk} = e_{jki} = \ldots = 1$

$e_{jik} = e_{kji} = \ldots = -1$

$e_{iik} = e_{jjk} = \ldots = 0$

شرط اینکه $det\ A \neq 0$ باشد شرط لازم وکافی برای وجود معکوس ماتریس A است .معکوس ماتریس A رابـا A^{-1} نشان داده می شود ،در نتیجه :

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I \qquad (2.10)$$

ماتریس Q را متعامد $(Orthogonal)$ می نامیم در صورتیکه داشته باشیم :

$$Q^{T} = Q^{-1} \qquad (2.11)$$

در نتیجه اگر Q به صورت متعامد باشد داریم :

$$Q.Q^{T} = Q^{T}.Q = I \qquad (2.12)$$

و داریم :

$$det[Q] = \pm 1 \qquad (2.13)$$

در اینجا با ماتریسها ارتگنالی سرو کارداریم که $det[Q] = \pm 1$ می باشد .

اثبات:

$$det\{[Q][Q]^{T}\} = det[I]$$

$$det[Q].det[Q]^{T} = 1 \Rightarrow \{det[Q]^{T}\}^{2} = 1$$

$$\Rightarrow det[Q] = \pm 1$$

اگر Q_1 و Q_2 هر دو متعامد باشند تنها ضرب آنها $Q_1.Q_2$ خاصیت تعامدی را دارد .

قرارداد جمع : $Summation\ Convention$ قـرارداد جمـع در

عمليـــــات مربـــــوط بـــــه ماتريســـــها ، بردارهـــــا وتانســـــورها نقـــــش مهمـــــی را ايفـــــا می کند. طبق اين قرارداد اگر يک انديس در يک عبارت تکرار شود (دوبار)به طـور اتوماتيـک ايـن انديسـها مقادير 1و2و3 را گرفته وروی آن جمع می بنديم . در نتيجه علامتΣ روی اين انديس حذف خواهد شد .

بـه طـور مثـال ،در رابطـه (2.7) چـون انـديس (I)تکـرار شـده اسـت مـی تـوان علامـت Σ را روی (I) حذف نمود وداريم :

$$Tr\ A=\sum_{i-1}^{3} A_{ii}$$

$$\Rightarrow Tr\, A = A_{ii} = A_{11}+A_{22}+A_{33}$$

در مواقعيکـــه نمـــی خـــواهيم روی (I) جمـــع ببنـــديم از لغـــت $no\ \ summation\ \ on\ \ i$ اســـتفاده می کنيم به طور مشابه رابطه 2.6 را می توان به صورت زير نوشت :

$$\sum_{i=1}^{3} \delta_{ij} A_{JK} = A_{ik}$$

$$\Rightarrow \delta_{ij} A_{jk} = A_{ik}$$

ورابطه 2.8 خواهد بود :

$$\delta_{ii} = 3$$

با استفاده ازاين قانون رابطه (2.9) ساده تر خواهد شد .

$$det\ A = \frac{1}{6} e_{ijk}\, e_{rs} + A_{ir}\ A_{js}\ A_{kt} \qquad (2.14)$$

مثالهای ديگری از استفاده از قانون جمع آمده است :

$$if \begin{cases} A = A_{ij} \\ B = B_{ij} \end{cases}$$

(a

باشدالان سطر iوستون J در ماتريس ضرب A,B را به صورت زير است :

$$A.B=\sum_{i=1}^{3} A_{ij}\, B_{jk} \rightarrow \quad A_{ij}\, B_{jk} \qquad \text{يا} \qquad A_{ik}\, B_{kj}$$

b) فرض می کنیم در حالت a ذکر شده در بالا $B=A^T$ یعنی $B_{ij}=A_{ji}$ حال المان سـطر i وسـتون j مـاتریس $A.A^T$ عبارت است از :

$$A.A^T = A_{ik}\,A_{jk}$$

به خصوص اگر A را ماتریس ارتگنال Q در نظر بگیریم از رابطه(2.12)داریم :

$$Q.Q^T=I$$

$$\begin{cases} Q_{ik} \quad Q_{jk} = \delta_{ij} \\ Q_{ki} \quad Q_{kj} = \delta_{ij} \end{cases} \qquad (2.15)$$

c) رابطه خطی بین ماتریسهای ستونی x و y عبارتند از :

$$X=AY \qquad (2.16)$$

که A یک ماتریس مربع عددی است .رابطه بالا را می توان به صورت زیر نوشت :

$$X_I = A_{ij}\,y_j \qquad (2.17) \qquad \text{یا} \qquad \{X\} = (A)\{Y\}$$

d) Trace ماتریس $A.B$ جمیع المانهای روی قطر این ماتریس است که با مساوی قرار دادن ضرایب I و k در رابطه آخر قسمت a به صورت زیر به دست می آید :

المان نوعی $\qquad AB=A_{ij}\,B_{jk}$

$$Tr(AB) = A_{ij}\;\;B_{ji} \qquad (2.18)$$

به همین ترتیب برای حاصلضرب سه تایی ABC =

$$ABC = A_{ij}\;\;B_{jk}\;\;c_{km}$$

$$\Rightarrow Tr\,(ABC) = A_{ij}\;\;B_{jk}\;\;c_{ki} \qquad (2.19)$$

دو رابطه مهم بین δ_{ij} وعلامت e به صورت زیر است :

$$e_{ijp}\;\;e_{ijq} = 2\delta_{pq}$$

$$e_{ijp}\;\;e_{rsp} = \delta_{ir}\;\;\delta_{js} - \delta_{is}\,\delta_{jr} \qquad (2.20)$$

$$\begin{pmatrix} \delta_{ir} & \delta_{is} & \delta_{it} \\ \delta_{jr} & \delta_{js} & \delta_{jt} \\ \delta_{kr} & \delta_{ks} & \delta_{kt} \end{pmatrix} = e_{ijk} \quad .e_{rst} \qquad (2.21)$$

ضرب داخلی دو بردار به شکل اندیسی :

$$\vec{A} = A_i \hat{e}_i \quad , \quad \vec{B} = B_j \hat{e}_j$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_J \overbrace{e_i e_j}^{\delta_{ij}} = \begin{cases} A_i B_i \\ A_j B_j \end{cases} \qquad \textbf{sub.rule}$$

$e_I \times e_j = e_{ijk}\ e_k$ برای اثبات اول روی k بسط می دهیم وبعد روی I و j

$$\vec{A} \times \vec{B} = A_I\ e_I \times B_j\ e_j = A_I B_j\ e_{ijk}\ e_k$$

$$\vec{B} \times \vec{C} \cdot \vec{D} = (B_I\ e_I \times C_J\ e_j).D_L\ e_L = B_i c_j e_{ijk}\ e_k\ .D_L e_L$$

$$= B_i c_j e_{ijk} \delta_{kL} D_L$$

$$= B_i C_j D_L e_{ijk}\ \delta_{Kl}$$

$$= B_i C_j D_k e_{ijk}$$

یا

$$= B_i C_j D_L e_{ijL}$$

نتیجه :

$$\vec{B} \times \vec{C} \times \vec{D} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & C_1 & D_1 \\ B_2 & C_2 & D_2 \\ B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = B_i L_j D_k \quad e_{ijk}$$

اثبات : ثابت کنید : $|A| = e_{ijk}\ A_{1i} A_{2j} A_{3K} = e_{ijk}\ A_{i1} A_{j2} A_{k3}$ (برای ماتریس 3×3)

حل :

$$|A| = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \left\{ \begin{matrix} A_{1i} & = & B_i \\ A_{2j} & = & C_j \\ A_{3k} & = & D_k \end{matrix} \right\} \Rightarrow \quad |A| = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = e_{ijk}\ B_i C_j D_k = e_{ijk} A_{1I}\ A_{2j}\ A_{3k}\ \delta_{Kl}\ D_L$$

$$\rightarrow B_i C_j D_L\ e_{ijk}\ \delta_{Kl} = B_i C_j D_k e_{ijk}$$

اثبـات دوم: $det[A_{ij}] = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = A_{11}(A_{22}A_{33} - A_{32}A_{23}) - A_{21}(A_{12}A_{33} - A_{32}A_{13}) + A_{31}(A_{12}A_{23} - A_{22}A_{13})$

$= A_{11}(e_{1jk}A_{j2}A_{K3}) - A_{21}(-e_{2jk}A_{J2}A_{k3}) + A_{31}(e_{3jk}A_{j2}A_{k3})$

$= A_{i1}e_{ijk}A_{J2}A_{K3} = e_{ijk}A_{i1}A_{j2}A_{k3}$

اثبات کنید: $\text{Show that } e_{ijk} = \begin{pmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{pmatrix}$

فرض کنیم: $\begin{cases} \delta_{ri} = A_{j1} \\ \delta_{si} = A_{2i} \\ \delta_{ti} = A_{3i} \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \delta_{r1} & \delta_{r2} & \delta_{r3} \\ \delta_{s1} & \delta_{s2} & \delta_{s3} \\ \delta_{t1} & \delta_{t2} & \delta_{t3} \end{pmatrix} = e_{ijk}\,\delta_{ri}\,\delta_{sj}\,\delta_{tk} = e_{rst}$

اثبات کنید:

$e_{rst}\,|A| = e_{ijk}A_{ri}A_{sj}A_{tk}$

با استفاده از روابط (2.14) و(2.21)می توان رابطه مهم زیر را اثبات نمود :

$$e_{rst}|A| = e_{ijk}A_{ri}A_{sj}A_{tk} \Rightarrow e_{mpq}\,detA = e_{ijk}A_{im}A_{jp}A_{kq} \qquad (2.22)$$

اندیسهای تکراری : ***Dummy Inde***

اندیسهای تکراری را $D.\ I$ می نامیم و می توانیم آنها را عوض کنیم .

$A_{ii} = A_{jj}$

باید دقت نمود که در یک جمله یک اندیس بیش از یکبار تکرار نشود چون در غیر این صـورت بـی معنی خواهد بود .اندیسهایی که در یک جمله فقط یکبار می آیند را اندیس آزاد***Free Index*** می نامند ودر یک معادله جبری یا تساوی اندیس آزاد در تمام جملات باید وجود داشته باشد .

در مکانیک محیطهای پیوسته وبعضی موارد دیگر به معادلات جبری همگن زیر برخورد می کنیم :

$$AX = \lambda X \qquad (2.23)$$

که A یک ماتریس مربعی بوده ومعلوم می باشد X یک ماتریس ستونی مجهول و λ اسکالر مجهـول اسـت

.در موردی که ما مطالعه می کنیم A یک ماتریس $3×3$ است .

معادله فوق را می توان به شکل زیر نشان داد :

$$(A-\lambda I)X=0 \qquad (2.24)$$

که I همان ماتریس یکه است که ضرب آن در یک ماتریس مانند ضرب عدد واحد در یک اسکالر می باشد

.برای اینکه معادله (2.24) دارای جواب غیر صفر *man trivial solution* باشد باید :

$$\det(A-\lambda I)X=0 \qquad (2.25)$$

که به آن معادله خصوصیت یا *characteristic* می گوییم .

وقتی دترمینان(2.25) را بسط دهیم یک معادله درجه سوم برای λ به دست می آید که سه ریشه آنرا

($\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1$)مقادیر ویژه *(eigen value)*های ماتریس A می نامیم .

فرض می کنیم این سه ریشه از هم متفاوت هستند .

مقادیر ویژه وبردارهای ویژه ماتریس زیر را پیدا کنید :

$$A=\begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |A-\lambda I|=\begin{pmatrix} 7-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$[(7-\lambda I)(5-\lambda I)(4-\lambda I)]-(4-(5-\lambda I))=0$$

$$-\lambda^3 I^3+16\lambda^2 I^2-79\lambda I+120=0$$

$$(A-\lambda I)X=0$$

$$\lambda=8$$

$$\begin{pmatrix} 7-8 & 0 & -2 \\ 0 & 5-8 & 0 \\ -2 & 0 & 4-8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}=0$$

$$n\left(\frac{2}{\sqrt{4+1}},0,\frac{-1}{\sqrt{4+1}}\right)$$

$$-X_1-2X_3=0 \quad \Rightarrow X_1=-2X_3 \quad \Rightarrow \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} -2X_3 \\ 0 \\ X_3 \end{Bmatrix}$$

$$-X_3=0 \quad \Rightarrow X_2=0$$

$$-2X_1-4X_3=0$$

$\lambda = 5$

$$\begin{pmatrix} 7-5 & 0 & -2 \\ 0 & 5-5 & 0 \\ -2 & 0 & 4-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = 0$$

$n(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{5}})$

$-2x_1 - 2x_3 = 0$

$-2x_1 - x_3 = 0 \qquad \Rightarrow x_3 = -2x_1$

$\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} 7-3 & 0 & -2 \\ 0 & 5-3 & 0 \\ -2 & 0 & 4-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = 0$$

$n(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}})$

$4x_1 - 2x_3 = 0 \qquad \Rightarrow x_1 = \frac{x_3}{L}$

$2x_2 = 0 \qquad \Rightarrow X_2 = 0$

$-2x_1 + x_3 = 0$

حال اگر مثلا λ_1 را در معادله (2.24) قرار دهیم داریم :

$(A - \lambda_1 I)X = 0$

که دارای جواب غیر صفر $x^{(1)}$ است .که در آن یک ثابت مجهول وجود دارد .

ماتریس ستونی $x^{(1)}$ را eigen vector ماتریس A مطابق با eigen vector ، λ_1 می نامیم .

به همین طریق می توان دو $E.Vec$ دیگر را یعنی $x^{(2)}$ و $x^{(3)}$ را به دست آورد که مطابق با λ_3 و λ_2 می باشد .

چون λ_3 ، λ_2 ، λ_1 ریشه های معادله(2.25) هستند وضریب λ^3 برابر (1 -) است معادله (2.25) را می توان به صورت زیر نوشت :

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda) \qquad (2.26)$$

رابطه فوق برای تمامی مقادیر λ صادق است اگر $\lambda = 0$ داریم:

$$\det A = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \qquad (2.27)$$

قضیه :

فرض کنید A یک ماتریس حقیقی متقارن است باید ثابت نمود که $E.Va$ ها و $E.Ve$ های ایــن مــاتریس تماما حقیقی هستند .

اثبات :

فرض می کنیم $x^{(1)}$ و λ حقیقی نیستند در این صورت مزدوج آنها را با $\bar{\lambda}_1$ و $\bar{X}^{(1)}$ نمایش می دهیم :

$$AX^{(1)} = \lambda_1 x^{(1)} \qquad (2.28)$$

هرگاه از رابطه (2.28) ترانسپز مزدوج بگیریم داریم :

$$\bar{x}^{(1)} A = \bar{\lambda}_1 \bar{X}^{(1)T} \qquad (2.29)$$

هرگاه رابطه(2.28) را در $\bar{X}^{(1)T}$ ورابطه (2.29)را در $X^{(1)}$ضرب واز هم کم می کنیم :

$$(\lambda_1 - \bar{\lambda}_1)\, \bar{X}^{(1)T} \cdot \bar{X}^{(1)} = 0 \qquad (2.30)$$

چون $X^{(1)}$ جواب غیر صفر 2.24 است لذا $\bar{X}^{(1)T} . \bar{X}^{(1)} \neq 0$ مخالف صفر است پس نتیجــه اینکــه بایــد $\lambda_1 = \bar{\lambda}_1$ باشد .

یعنی اینکه $E.Va$حقیقی هستند وبالطبع باید $E.Va$هم حقیقی باشند .

حال اگر (2.28)را در $x^{(2)t}$ ضرب کنیم :

$$x^{(2)T} AX^{(1)} = \lambda_1 x^{(2)T} X^{(1)} \qquad (2.31)$$

X و λ برای $\Rightarrow X^{(1)}A\, x^{(2)} = \lambda_2 x^{(1)T} x^{(2)} \qquad (2.32)$

اگر از رابطه 2.31 را ترانسپز کنیم :

$$x^{(1)T}A\, x^{(2)} = \lambda_1 x^{(1)T} x^{(2)}$$

اگر ازرابطه 2.32 مقدار بالا را کم کنیم :

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\, x^{(1)T} x^{(2)} \qquad (2.33)$$

چون λ_1 و λ_2 مقادیر ویژه هستند لذا نمی توانند برابر باشند لذا $E.Va$ های آنها عمود بر همــدیگر مــی باشند یعنی $x^{(1)T} . x^{(2)}=0$ وبه طور کلی می توان نوشت:

$$x^{(r)T} x^{(s)} = 0 \qquad r \neq s \qquad (2.34)$$

میتوان ثابتهای موجود در $E.Ve$ها را طوری انتخاب نمود که :

$$x^{(r)T} . x^{(r)} = 1 \qquad (2.35)$$

در این صورت می گوییم که $E.Ve$را $Normalize$ کرده ایم .

حال ماتریس 3×3 P را طوری می سازیم که هر سطر آن یکی از $E.Ve$ های $Normalize$ شده $x^{(3)}$ $x^{(2)}$ $x^{(1)}$ باشد ؛ به عبارت دیگر :

$$P=\begin{pmatrix} x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad P^T=(x^{(1)} \;\; x^{(2)} \;\; x^{(3)}\,) \qquad (2.36)$$

با استفاده از رابطه (2.34) و(2.35) دیده می شود که :

$$PP^T = 1$$

درنتیجه Pیک ماتریس $orthagonad$ می باشد .با استفاده از رابطه (2.28)وروابط مشــابه بــرای $X^{(2)}$ و $X^{(3)}$ دیده می شودکه :

$$AP^T=(AX^{(1)}\,,AX^{(2)}\,,AX^{(3)}\;\;)$$

$$=(\lambda_1 X^{(1)}, \lambda_2 X^{(2)}, \lambda_3 X^{(3)}) \qquad (2.37)$$

با استفاده از (2.35) و(2.36) و(2.37) داریم :

$$PAP^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \qquad (2.38)$$

در نتیجه ماتریس PAP^T یک ماتریس قطری می باشد .از رابطه(2.23) نتیجه می شود :

$$AX=\lambda X \Rightarrow A^2X=\lambda AX\,,\ \lambda^2X \qquad (2.39)$$

در نتیجه اگر λ مقدار ویژه ماتریس A باشد ، λ^2مقدار ویژه ماتریس A^2 خواهد بود وبردار ویژه مربوط به همان X است .به همین ترتیب λ^n مقدار ویژه ماتریس A^n و x بردار ویژه مربوطه اســت اگــر $\det A = 0$ باشد .این نتایج برای مقادیر منفی ومثبت صحیح n صادق است .

قضیه کیلی همیلتون: *The Cayley Hamilton Theorem*

با استفاده از رابطه(2.38)داریم :

$$Tr\,(PAP^T)= \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$$

در نتیجه:

$$Tr(PAP^T)^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

چون P به صورت *artogonal* است از (*2.15*) نتیجه می شود :

$$Tr\ (PAP^T)=Tr\ (P_{ij}A_{jk}P_{km})=P_{ij}A_{jk}P_{ki}=P_{ij}P_{ki}A_{jk}$$
$$=\delta_{jk}A_{jk}=A_{jj}=Tr\ A$$

جمع داریه های روی قطر اصلی برابر جمع $E.Va$ها است .

$$Tr\ (PAP^T)^2=Tr(PAP^T.PAP^T)=Tr\ (PA^2P^T)$$
$$P_{ij}A_{jp}A_{pk}P_{ki}=\delta_{kj}A_{jp}A_{pk}=A_{kp}A_{pk}=Tr\ A^2$$

در نتیجه داریم :

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=TrA\\ \lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=TrA^2\end{cases} \qquad (2.40)$$

با استفاده از روابط (*2.25*) و(*2.26*) داریم که :

$$\lambda^3-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\lambda^2+(\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2)\lambda-\underbrace{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}_{det\ A}=0$$

با استفاده از روابط *2.27* و*2.40* داریم که :

$$\lambda^3-Tr\ A\lambda^2+\frac{1}{2}\lambda\{(Tr\ A)^2-Tr\ A^2\}-det\ A=0 \qquad (2.41)$$

قضیه :

کیلی همیلتون می گوید که رابطه ماتریسی زیر در ماتریسهای مربعی برقرار است :

$$A^3-(Tr\ A)A^2+\frac{1}{2}A[(Tr\ A)^2-Tr\ A^2]-I\ det\ A=0 \qquad (2.42)$$

کاربرد قضیه کیلی همیلتون این است که بدون استفاده از ضرب ماتریسی می توانیم مربعات یک ماتریس را به راحتی محاسبه نماییم .

قضیه تجزیه قطبی : *The Palar De Composition Ther*

ماتریس A را *Positive definite* (*P.d*) گوییم اگر برای هر ماتریس ستونی X که تمام المانهای آن صفر نباشد X^TAX مثبت باشد .شرط لازم وکافی برای اینکه ماتریس A(*P.d*) باشد این است که تمام $E.Va$ های A مثبت باشند .قضیه تجزیه قطبی می گوید که ماتریس مربعF که *non – singular* (معکوس پذیر)است را می توان به طور یکتا به صورت زیر تجزیه نمود :

$$F=R.U \quad , \quad F=V.R \qquad (2.43)$$

که R یک ماتریس *orthogonal* وماتریسهای V,U ماتریسهای متقارن و(*P.d*) هستند دراینجا این قضیه را برای یک ماتریس 3×3 اثبات می کنیم :

فرض کنید که $\bar{X}=FX$, $C=F^T.F$ که F یک ماتریس 3×3

و X یک ماتریس ستونی است .در نتیجه C یک ماتریس متقارن است .

$$C=F^T.F$$

$$C_{ik}=B_{ij}A_{jk} \begin{cases} A=F\rightarrow A_{jk}=F_{jk} \\ B=F^T\rightarrow B_{ij}=F_{ji} \end{cases}$$

$$C_{ik}=F_{ji}F_{jk}$$

چون اگر جای I و k را در رابطه بالا عوض کنیم تغییری ایجاد نمی شود لذا C متقارن است .

$$X^TCX=X^TF^TFX=\bar{X}^T\bar{X}$$

اما $\bar{X}^T.\bar{X}$ جمع مجذورها می باشد لذا وقتیکه تمام ترمها ی ماتریس ستونی $\bar{X}$ صفر نباشد مثبت است در نتیجه $\bar{X}^TCX$ مثبت می باشد ویا C یک ماتریس (*P.d*) است و*E.Va* های آن مثبت می باشد که آنها رابا λ_1^2،λ_2^2 ، λ_3^2 نمایش می دهیم و λ_1،λ_2،λ_3 را مثبت در نظر می گیریم .

با استفاده از نتایج به دست آمده در قبل مثلا رابطه (*2.28*) اگر P^Tماتریسی باشد کـه سـتونهای آن *E.Ve* های *normalize* شده C باشد در این صورت P به صورت *orthogonal* خواهد بود وهمچنین :

$$PCP^T=\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}$$

در نتیجه U را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$U=P^T\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}P \qquad (2.44)$$

ماتریس Uمتقارن است وچونλ_1،λ_2،λ_3 را مثبت در نظر گرفته ایم (*P.d*) می باشد همچنین چون P

به صورت *Orthogonal* است داریم :

$$U^2 = P^T \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} P = C \qquad (2.45)$$

در نتیجه ماتریس R را به صورت $R = F\,U^{-1}$ تعریف می کنیم حال باید ثابت کنیم کـه R یـک مـاتریس *Orthoogonal* است با استفاده از (*2.43*)و (*2.45*) داریم :

$$R^T R = U^{-1} F^T . F U^{-1} = U^{-1} C\, U^{-1} = U^{-1} U^2 U^{-1} = I$$

در نتیجه R، *Orthoogonal* است .

ماتریس V به صورت زیر تعریف می گردد :

$$V = RUR^T$$

در روابط فوق روش محاسبه ماتریسها R، U، V یعنی تجزیه ماتریس F مطرح شــده عمــل محاســبه ایــن ماتریسها عموما حتی برای ماتریسها 3×3 طولانی است ولی در مکانیک محیطهای پیوسته بیشتر کافی اســت بدانیم تجزیه قطبی امکان پذیر است که این کار را در به دست آوردن محورهای اصلی کشش در فصــول بعــد خواهیم دید .

فصل سوم

بردارها وتنسورهای کارتزین

سیستم مختصات کارتزین را در نظر بگیرید که مبدا آن نقطه 0 است بردارهای واحد $\hat{e}_1$، $\hat{e}_2$، $\hat{e}_3$ را روی این مختصــــات در نظــــر مــــی گیــــریم وآنهــــا را بردارهــــای واحــــد *(Bace Vector)* می نامیم .بردارها را میتوان به شکل زیر نشان داد در صورتیکه e_I بردارهای واحد باشند :

$$a = a_i e_I \qquad (3.1)$$

$$a = \sqrt{a_i a_i} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \qquad (3.2)$$

$$a . b = a_i b_I \qquad (3.3)$$

$$e_i.e_j=\delta_{ij} \qquad (3.4)$$

ضرب برداری دو بردار a و b بردار دیگری است که عمود بر صفحه ab بوده وازقانون دست راست پیروی می کند اندازه این بردار برابر $a\ b\ sin\theta$ می باشد وبه صورت زیر تعریف می شود :

$$a\times b=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

این ضرب را می شود با استفاده از علامت *permutation syn* نشان داد :

$$a\times b= a_ib_je_{ijk}e_k \qquad e_i\times e_j =e_{ijk}e_k \qquad (3.6)$$

برای ضرب سه گانه داریم :

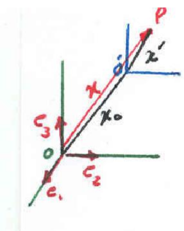
$$(a\times b).c=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$(a\times b).c=e_{ijk}\ a_Ib_je_k\ .e_m\ e_m =e_{ijk}\ a_Ib_jc_me_ke_m =e_{ijk}a_ib_jc_k \qquad (3.7)$$

تبدیل دستگاه مختصات : *Coordinate TransFormation*

بردار کمیتی است که مستقل از سیستم دستگاه مختصات می باشد .در صورتیکه سیستم مختصاتی تعریف کنیم بردار را می شود به صورت مولفه هایش در آن سیستم معرفی نمود .

فرض کنید که سیستم مختصات فقط دارای انتقال ساده ، بدون چرخش است .



به طوریکه مبدا مختصات از 0 به $0'$ منتقل شود بردار موقعیت ذره P نسبت به $0'$ به صورت زیر است :

$$\begin{cases} X = X_0 + X' \\ X' = X - X_0 \end{cases}$$

بردار انتقال بدون چرخش بردارهای پایه $\hat{e}_1، \hat{e}_2، \hat{e}_3$ بدون تغییر خواهند بود .در نتیجه مولفه های aI

بردار $\vec{a}$ در سیستم مختصات جدید همان مولفه ها در سیستم قدیم هستند .

حال سیستم مختصات کارتزین جدیدی را تعریف می کنیم که مبدا آن *0* وبردارهــای یکــه آن $\hat{e}_1 ، \hat{e}_2 ، \hat{e}_3$ باشند که نسبت به دستگاه مختصات قدیم چرخیده است .فرض کنید که بــردار $\vec{a}$ دارای مولفــه هــای aI در دستگاه قدیم و $\bar{a}_i$ در دستگاه جدید باشد .در نتیجه داریم :

$$a=a_ie_i=\bar{a}_i\ \bar{e}_i \qquad (3.8)$$

مولفه های تنسور کسینوسهای هادی بین $\bar{e}_i$ و e_jرا با m_{ij} نمایش داده وداریم :

$$m_{ij}=\bar{e}_i\ .\ e_j \qquad (3.9)$$

با ضرب طرفین رابطه بالا در e_j خواهیم داشت :

$$\bar{e}_i = m_{ij}\, e_j \qquad (3.10)$$

نه مولفه تنسور m_{ij} نمی توانند مستقل از یکدیگر باشند وچون سیستم جدید نیــز *Orthogonal* اســت بــا استفاده از (*3.4*) داریم :

$$\bar{e}_i\ \bar{e}_i=\delta_{ij}$$

واز (*3.10* داریم :

$$\delta_{ij}=\bar{e}_i\ \bar{e}_j\ =m_{ir}\ e_r\ .\ m_{js}\ e_s = m_{ir}\ m_{js}\ e_r\ e_s = m_{ir}\ m_{js}\ \delta_{rs}$$

$$= m_{ir}\ m_{jr}= \delta_{ij}=\bar{e}_i\ \bar{e}_j \qquad (3.11)$$

چون با تغییر اندیسهای *i*و*j* تغییری حاصل نمــی شــود لــذا m_{jr} ، m_{ir} یــک تانســور متقــارن اســت و m_{ij} ، *Orthogonal* است .

رابطه (*3.11*)شش رابطه بین نه مولفه تنسور m_{ij} ایجاد می کند وفرم ماتریسی(*3.*۱۱) به شکل زیر است :

$$m.m^T=1$$

حال می توان بردار یکه $\hat{e}_j$ را د ر مختصات جدید تعریف نمود ومعکوس *3.10* را به دست آورد :

$$e_j = m_{ij} . \bar{e}_i \qquad (3.13)$$

$$(3.10) \rightarrow m_{ij} \bar{e}_i = m_{ij} m_{ij} e_j \rightarrow Tr \rightarrow a \text{ orthogonal} \rightarrow \qquad (3.13)$$

با استفاده از روابط(*8 -3*) و(*3.13*) داریم :

$$\bar{a}_i \bar{e}_i = a_i e_I = a_j e_j = a_j m_{ij} \bar{e}_i \Rightarrow \bar{a}_i = \alpha_j m_{ij} \qquad (3.14)$$

که رابطه فوق مولفه های بردار $\vec{a}$ در مختصات جدید $\bar{a}_i$ را بر حسب مولفه های آن در مختصات قدیم والمانهای ماتریس m، *orthogonal* می دهد . به همین طریق با استفاده از روابط(*3.8*) و(*3.10*) داریم که :

$$\alpha_I = m_{ji} \bar{a}_j \qquad (3.15)$$

به خصوص اگر $\vec{a}$ بردار موقعیت X ، نقطه P نسبت به مبدا *0* باشد در این صورت داریم :

$$\bar{X}_i = m_{ij} x_j$$

$$X_I = m_{ji} \bar{X}_j \qquad (3.16)$$

با استفاده از تعریف ضرب داخلی ($\vec{a}.\vec{b}$)دیده می شود که مقدار آن مستقل از انتخاب سیستم مختصات است .برای اثبات داریم که :

$$a.b = \bar{a}_I \bar{b}_I = a_j m_{ij} b_k m_{ik} = a_j b_k m_{ij} m_{ik} = a_j b_j \qquad (3.17)$$

$$a \otimes b = \bar{a}_I \bar{b}_I e_{ijk} \bar{e}_k = e_{ijk}(M_{ip} a_p)(M_{jp} b_q)([_{kr} e_r) = e_{ijk}(M_{ip} M_{jq} M_{kr})$$

ثابت کنید که (*3.18*) $e_{ijk} \bar{e}_i \bar{e}_j \bar{e}_k = e_{ijk} e_i e_j e_k$

به روابط فوق گفته می شود *Invariant form* .

ضرب دیادیک : ***TheDyadic Product***

دیادیک حاصلضرب یک جفت بردار است که نه ضرب داخلی است ونه ضرب خارجی .

$a \otimes b$

$a = a_i e_i$

$b = b_j e_j$

$$\mathbf{a}\otimes \mathbf{b} = a_i\mathbf{e}_i\otimes\ b_j\mathbf{e}_j = a_ib_j\mathbf{e}_i\otimes \mathbf{e}_j = a_ib_j\mathbf{e}_i\ \mathbf{e}_j \qquad (3.19)$$

خواص ضرب دیادیک :

اگر α یک اسکالر باشد :

$$(\alpha\ \mathbf{a}) \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a}\otimes (\alpha\ \mathbf{b}) = \alpha\ (\mathbf{a}\otimes \mathbf{b})$$
$$\mathbf{a}\otimes (\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\otimes \mathbf{b}+\mathbf{a}\otimes \mathbf{c} \qquad (3.20)$$
$$(\mathbf{b}+\mathbf{c}) \otimes \mathbf{a} = \mathbf{b}\otimes \mathbf{a} + \mathbf{c}\otimes \mathbf{a}$$

بر حسب مولفه ها ضرب دیادیک را می توان به صورت زیر نمایش داد :

$$\mathbf{a}\otimes \mathbf{b} = a_i\mathbf{e}_i\otimes b_j\mathbf{e}_j = a_ib_j\mathbf{e}_i\otimes \mathbf{e}_j \qquad (3.21)$$

رابطه (*3.21*) مستقل از سیستم مختصات است ویا به عبارتی ***I nvariant farn*** می باشد .

برای اثبات با استفاده از انتقال مختصات جدید وقدیم داریم که :

$$\mathbf{a}\otimes \mathbf{b} = \bar{a}_i\ \bar{b}_j\ \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j = M_{ip}\ a_p\ M_{jq}\ b_q\ M_{ir}\mathbf{e}_r\otimes M_{js}\mathbf{e}_s$$
$$= M_{ip}\ M_{ir}\ M_{jq}\ M_{js}\ a_p\ b_q\ \mathbf{e}_r\otimes \mathbf{e}_s$$
$$= a_r\ b_s\mathbf{e}_r\otimes \mathbf{e}_s \qquad (3.22)$$

به غیر از روابط (*3.20*) ترکیب ضرب داخلی وضرب دیادیک روابط زیر را ایجاد می کنند :

$$\begin{cases} (a\otimes b).c = a(b.c) \\ a.(b\otimes c) = (a.b)c \end{cases} \qquad (3.23)$$

ویا اینکه می توان پرانتز را از روابط فوق حذف نمود :

$$\begin{cases} a\otimes b.c = a(b.c) \\ a.b\otimes c = (a.b)c \end{cases} \qquad (3.24)$$

بسط رابطه(*3.24*) به شکل زیر است :

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}.\mathbf{c} = a_i\mathbf{e}_i\otimes b_j\mathbf{e}_j\ .c_k\ \mathbf{e}_k = a_ib_jc_k\mathbf{e}_i\otimes \mathbf{e}_j.\mathbf{e}_k = a_ib_jcj\mathbf{e}_I \qquad (3.25)$$

نتیجه :

ضرب داخلی یک دیادیک در یک بردار سبب کاهش درجه شده ویک بردار می دهد .

تنسورهای کارتزین :

تنسور درجه دوم کارتزین A را می توان به صورت *dyadic* زیر نوشت :

$$A = A_{ij} e_i \otimes e_j \qquad (3.26)$$

ضرایب A_{ij} مولفه های تنسور A نامیده می شوند که بستگی به سیستم مختصات دارند .

ولی خود تنسور مستقل ازسیستم مختصات است .فرض کنید که در سیستم مختصات جدید که بـردار هـا

یکه آن $\bar{e}_i$ هستند مولفه های تنسور A عبارت از $\bar{A}_{ij}$ می باشد .در این صورت :

$$A = A_{ij} e_i \otimes e_j = \bar{A}_{ij}\, \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \qquad (3.27)$$

با استفاده از رابطه (3.13) داریم که :

$$A_{ij}\, e_i \otimes e_j = A_{ij}\, M_{pi} \bar{e}_p \otimes M_{qj}\, \bar{e}_q = \underbrace{A_{ij} M_{pi} M_{qi}}_{\bar{A}_{pq}}\, \bar{e}_p \otimes \bar{e}_q$$

$$= \bar{A}_{pq}\, \bar{e}_p \otimes \bar{e}_q = \bar{A}_{ij}\, \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$$

$$\bar{A}_{pq} = M_{pi} M_{qj}\, A_{ij}$$

$$\bar{A}_{ij} = M_{ip} M_{jq} A_{pq} \qquad (3.28)$$

ویا نمایش آن به صورت ماتریسی :

$$\left[\bar{A}\right] = [M][A][M]^T$$

رابطه(3.28) قانون تبدیل (*Trans formation*)برای تنسورهای مرتبه دوم است .بـه طـور عمـومی اگـر

تنسور از مرتبه n باشد آنرا به صورت زیر می نویسیم :

$$A = A_{ij\ldots\ldots m} e_I \otimes e_j \ldots\ldots \otimes e_m \qquad (3.29)$$

تبدیل رابطه (3.29) به مختصات جدید از قانون زیر پیروی می کند :

$$\bar{A}_{pq\ldots\ldots t} = M_{pi} M_{qj} \ldots\ldots M_{tm} A_{ij\ldots\ldots m} \qquad (3.30)$$

در نتیجه بردار تنسور مرتبه اول ، ماتریسها (تنشها) از مرتبه دوم واسکالر مرتبه صفر است .

معکوس رابطه (*3.28*)برابر است با :

$$\begin{cases} A_{ij} = M_{pi} M_{qj} \bar{A}_{pq} \\ \bar{A}_{ij} = M_{ip} M_{jq} A_{pq} \end{cases} \tag{3.31}$$

ومعکوس رابطه (*3.30*) عبارت است از :

$$A_{ij.....m} = M_{pi} M_{qj} ......M_{tm} \bar{A}_{pq........t} \tag{3.32}$$

قانون کوشنت : ***Quotient Rule***

برای اینکه نشان دهیم تنسور C_{ijk} از مرتبه سوم است باید نشان دهیم که حاصلضرب داخلی آن بـا بـردار دلخواه $b = b_I e_I$ یک تنسور مرتبه دوم است (همان نتیجه رابطه *3.25*).

تنسور درجه دوم $A = A_{ij} e_i \otimes e_j$ که برابر است با $\bar{A}_{pq} \; \bar{e}_p \otimes \bar{e}_q$ را در نظر می گیریم فرض می کنیم کـه تنسور A متقارن است ($A_{ij} = A_{ji}$) با استفاده از (*3.28*) داریم :

$$\bar{A}_{qp} = M_{qi} M_{pj} A_{ij} = M_{pj} M_{qi} A_{ji} = \bar{A}_{pq} \tag{3.33}$$

در نتیجه خاصیت متقارن تنسورها در ***trans formation*** حفظ می شود .

ترانسپز یک تنسور را به شکل زیر نمایش می دهیم :

$$(A_{ij})^T = A_{ij} \tag{3.34}$$

$$A = A_{ij} e_i \otimes e_j \quad , \quad A^T = A_{ji} e_i \otimes e_j = A_{ij} e_j \otimes e_I$$

هر تنسور را می توان به دو جزء تنسور متقارن و جزء تنسور ضد متقارن نشان داد :

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) \tag{3.35}$$

تنسورهای همان (ایزوتروپیک) :

تنسور $I = \delta_{ij} \; e_i \otimes e_j$ را یک تنسور واحد گوییم . ***Isotropicn*** N در مختصات جدید با بردارهای پایه : $\bar{e}$ با

استفاده از 3.13 داریم :

$$ej = Mij \quad \bar{e}i \quad \textbf{(3-13)}$$

$$\bar{e}i = Mijej \quad (3-10)$$

$$\begin{aligned} I &= \delta_{ij} C_i \otimes e_j = \delta_{ij} M_{ri} \bar{e}_r \otimes M_{sj} \bar{e}_s \\ &= \delta_{ij} M_{ri} M_{sj} \bar{e}_r \otimes \bar{e}_s = M_{ri} M_{si} \bar{e}_r \otimes \bar{e}_s \\ &= \delta_{rs} \bar{e}_r \otimes \bar{e}_s = \delta_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \end{aligned}$$

در نتیجه تنسور I دارای این خاصیت است که مولفه های آن در هر دستگاه مختصات δ_{ij} خواهد بود .

تنسوری که مولفه های آن در تمام سیستمهای مختصات بدون تغییر باشد، تنسور ایزوتروپیک نامیده می شود . می توان نشان داد که تنها تنسور همان درجه دو به شکل PI می باشد که P یک اسکالر می باشد . این تنسور را تنسور کروی می گوییم .

به همین ترتیب می توان نشان داد که تنسور زیر نیز ایزوتروپیک است :

$$e_{ijk} k e_i \otimes e_j \otimes e_k$$

همچنین هر تنسور ایزوتروپیک درجه سوم بصورت $Pe_{ijk} k e_i \otimes e_j \otimes e_k$ که P یک اسکالر است نشان داده می شود .

سه تنسور مستقل درجه چهار ایزوتروپیک وجود دارد که بصورت زیر می باشند :

1. $\delta_{ij} \delta_{kl} e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_l$
2. $\delta_{ik} \delta_{je} e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_l$
3. $\delta_{il} \delta_{jk} e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_l$

و کلی ترین تنسور درجه چهار عبارت است از :

$$(\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu \delta_{il} \delta_{jk}) e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_l \; (3.27)$$

که در آن λ و μ و υ سه اسکالر می باشند .

عبارات $e_{ijk} e_{kpq}, \delta_{ij} \delta_{pq}$ هر دو تنسورهای مرتبه چهار و همان هستند در ضمن چون هیچ تنسور مرتبه اول مثل A_i نمی تواند همان باشد بسط یک تنسور مرتبه چهارم ایزوتروپیک مثل C_{ijpq} بصورت e_{jpq} A_i امکانپذیر

نخواهد بود . حال اگر تنسور مرتبه چهارم C_{ijpq} را برحسب مجموعه خطی تمام حاصلضربهای ممکنه δ_{ij} بسط دهیم می توان آنرا بصورت زیر خلاصه نمود .

بسط تنسور و مرتبه چهارم :

$$C_{ijpq} = a\delta_{ij}\delta_{pq} + b\delta_{ip} + \delta_{jq} + c\delta_{iq}\delta_{jp}$$

با توجه به مطالب فوق و با بررسی بسط فوق نتیجه چنین نتیجه می شود که تنها سه تنسور مرتبه چهارم ایزوتروپیک مستقل از یکدیگر یا فت می شود که این سه تنسور عبارتند از :

$1)C_{ijpq} \qquad 2)\delta_{ij}\delta_{pq} \qquad 3)e_{ijk}e_{kpq}$

ضرب تنسورها :

بردار $a = a_i.e_i$ و تنسور $B = B_{ij}e_i \otimes e_j$ را در نظر می گیریم که مؤلفه های آن در سیستم مختصات e_i است .

فرض می کنیم در مختصات جدید با بردارهای یکه $M_{ij}e_j = \bar{e}_i$ مولفه های بردار a و ماتریس (تنسور) B، به ترتیب $\bar{B}_{ij}, \bar{a}_i$ هستند به طوریکه :

$$\bar{a}_i = M_{ip}a_p$$

$$\bar{B}_{ij} = M_{ir}M_{js}B_{rs}$$

بعلاوه فرض کنید که $C_{ijk} = a_iB_{jk}$ و تنسور زیر را در نظر بگیرید :

$$C = C_{ijk}e_i \otimes e_j \otimes e_k$$

مؤلفه های تنسور C در سیستم مختصات با بردارهای واحد $\bar{e}_i$ با $\bar{C}_{ijk}$ نمایش می دهیم . بطوریکه :

$$\bar{C}_{ijk} = M_{ip}M_{jr}M_{ks}C_{prs} = M_{ip}M_{jr}M_{ks}a_pB_{rs} = \bar{a}_i\,\bar{B}_{jk} \qquad (3.38)$$

تنسور C را ضرب تنسوری و یا ضرب دیادیک بردار a در تنسور B می نامیم و آن را بصورت زیر نمایش می دهیم .

$$a \otimes B$$

انقباض (فشرده کردن) :

Contraction :

تنسور درجه سوم $C = C_{ijk}e_i \otimes e_j \otimes e_k$ را در نظر بگیرید که مولفه های آن C_{ijk} می باشد از قانون تبدیل زیر

پیروی می کند .

$$\bar{C}_{ijk} = M_{ir} M_{js} M_{kt} C_{rst}$$

هرگاه دو اندیس ***k,j*** را با هم مساوی قرار دهیم .

$$C_{ijj} = M_{ir} M_{js} C_{rst} = \overline{M}_{ir} \delta_{st} C_{rst} = M_{ir} C_{rss} \qquad (3.39)$$

پس در نتیجه مؤلفه های تنسور C_{rss} مانند مؤلفه های یک بردار تبدیل خواهند شد . به طور کلی اگر

$D_{ij} \ldots p \ldots q \ldots rs$

مؤلفه های یک تنسور درجه ***n*** باشند و یک جفت از این اندیسها را با یکدیگر مساوی قرار دهیم .(مثال

نمودار) $D_{ij} \ldots p \ldots q \ldots rs$

مؤلفه های تنسور درجه (***n-2***) خواهند بود که به این عمل انقباض می گوییم .

به طور مثال اگر A_{ij} مؤلفه های یک ماتریس باشند در آنصورت A_{ii} یک اسکالر می شود .

ضرب داخلی یک بردار در یک تنسور درجه دو بصورت زیر است :

1. $$\begin{aligned} & a.b = a_i e_i . B_{jk} e_j \otimes e_k \\ & a_i B_{jk} \delta_{ij} \otimes e_k = a_i B_{jk} \otimes e_k \end{aligned} \qquad \mathbf{(3.40)}$$

2. $$\begin{aligned} & B.a = B_{jk} e_j \otimes e_k . a_i e_i \\ & B_{ij} e_i \otimes e_j a_k e_k = \delta_{jk} B_{ij} = B_{ik} e_i \otimes a_k \end{aligned}$$

نتیجه اینکه اگر تنسور ***B*** متقارن باشد :

a.B = B.a

3. $$A.B = (A_{ij} e_i \otimes e_j).(B_{kl} e_k \otimes e_L) = A_{ij} B_{kL} e_i \otimes e_j . e_k \otimes e_L = A_{ij} . B_{kL} \delta_{jk} e \otimes e_L$$

$$A = A_{ij} e_i \otimes e_j \;\; ,. \qquad B = B_{kl} e_k \otimes e_l = A_{ij} B_{lf} e_i \otimes a_i . e_l \otimes e_f$$

$$A^T = A_{ij} e_i \otimes e_i = A_{ji} e_i \otimes e_j$$

4. $$\begin{aligned} A^T . B &= A_{ij} B_{kl} e_j \otimes e_i . e_k \otimes e_l = A_{ij} B_{kl} \delta_{ik} e_j \otimes e_l \\ &= A_{ij} B_{il} e_j \otimes e_l \end{aligned} \qquad \mathbf{(3.41)}$$

روابط زیر را ثابت کنید .

الف) $\delta_{ik} e_{ikm} = 0$

ب) $e_{iks} e_{mks} = 2\delta_{im}$

ج) $e_{ijk}e_{ist}=e_{kji}e_{tsi}=e_{kij}e_{tis}$

د) $e_{ijk}A_jA_k=0$

هـ) $\nabla.(\nabla.A)$

و) $\nabla.(\nabla.P)$

ز) $\nabla.(\varphi A)=(\nabla\varphi)*A+\varphi\nabla*A$

اگر تنسوری مثل A^{-1} وجود داشته باشد بطوریکه :

$$A.A^{-1}=I,\ A^{-1}.A.=I \qquad (3.42)$$

آنگاه تنسور A^{-1} را معکوس تنسور A می نامند و اگر

$$A^{-1}=A^T$$

تنسور A را $Orthogonal$ می نامیم .

قضیه تجزیع قطبی نیز به همان صورت مورد استفاده برقرار است به طوریکه :

$$\begin{aligned}F_{ij}&=R_{ik}U_{kj}=R.U\\F&=V.R\end{aligned} \qquad (3.44)$$

ثابتهای تنسور درجه دوم :

فرض کنید که A_{ij} مولفه های یک تنسور درجه دوم در سیستم مختصات بـا بـردار واحـد e_i اسـت و $\overline{A}_{ij}$ مؤلفه های همین تنسور در سیستم مختصات با بردار واحد $\overline{e}_i$ می باشد و انتقال از یک سیستم مختصات بـه سیستم دیگری بوسیله رابطه :

$$\overline{e}_i=M_{ij}e_j$$

انجام می شود . فرض کنید که λ یکی از $E.Va$ های ماتریس $\overline{A}$ است به طوریکه :

$$det(\overline{A}-\lambda I)=0$$

چون A تنسور مرتبه دوم می باشد داریم :

$$\begin{cases}A=MAM^T\\MM^T=T\end{cases} \qquad (*)$$

با جایگزینی دو رابطه بالا در * داریم :

$$det\left\{(MAM^T-\lambda MIM^T)\right\}=det\left\{M(A-\lambda I)M^T\right\}$$

$$= det(M)\,det(A-\lambda I)\,det(M^T) = \left[det(M)\right]^2\ det(A-\lambda I)$$
$$= det(A-\lambda I)$$

در نتیجه $E.Va,\lambda$ ،ماتریس نیز می باشد و $E.Va$ ها مستقل از سیستم مختصات می باشند .

در قبل دیده شد که اگر A یک ماتریس متقارن باشد $E.Va$ های آن حقیقی هستند که آنها را A_1, A_2, A_3 نشان می دهند . همچنین گفتیم که اگر همه $E.Va$ ها مثبت باشند، ماتریس را مثبت معین $PositveDefinite$ می گویند .

فرض کنید که $E.Va$ های ماتریس متقارن A یعنی A_1, A_2, A_3 از یکدیگر متمایز هستند . $E.Ve$ مربوط به این $E.Va$ ها را با $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}$ نشان می دهیم که $Normalize$ هم شده اند .

$$\left|X^{(i)}\right|=1 \qquad i=1,2,3$$

مجدداً ماتریس P را طوری می سازیم که داشته باشیم :

$$P^T=(X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)})$$

و به شکل اندیسی؛

$$P_{ij}=X_j^{(1)}$$

و مجدداً :

$$\overline{A}=PAP^T=\begin{vmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{vmatrix} \qquad (3.46)$$

در نتیجه در سیستم مختصاتی که محورهای آن $E.Ve$ ها هستند، ماتریس قطری خواهد شد و به آن مختصات اصلی گوییم . (مانند : برای تنش، همان اینرسی و...) .

بطوریکه دیده شد $E.Va$ های ماتریس A بستگی به سیستم مختصات ندارند و به آنها ثابتهای ماتریس A می گوییم .

سه کمیت متقارن زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 \\ A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 \quad (3.47) \\ A_1^3 + A_2^3 + A_3^3 \end{cases}$$

این سه کمیت بستگی به انتخاب سیستم مختصات نداشته و ثابت هستند و از یکدیگر مستقل خطی اند یعنی هیچ یک از آنها را نمی توان برحسب دوتای دیگر نوشت . استفاده از این ثابتها به جای A_1, A_2, A_3 دارای ایـــن مزیت است که مستقیماً از ماتریس A محاسبه شده و احتیاج به قطری کردن ماتریس نداریم .

با استفاده از(3.46) دیده می شود که :

$$Tr(\bar{A}) = A_1 + A_2 + A_3$$

و به شکل اندیسی؛

$$\bar{A} = PAP^T = \begin{vmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \bar{A}_{ij} = P_{ir}P_{is}A_{rs} = \delta_s A_{rs} = A_{rr} = A_{ii} = trA \quad (3.48)$$

در نتیجه اولین ثابت بردار $Tr(A)$ می باشد .

و دومین ثابت :

$$A_1^2 = A_2^2.A_3^2 = Tr\,\bar{A}^2 = \bar{A}_{ik}\,\bar{A}_{ki} = P_{ip}P_{kq}A_{pq}P_{kr}P_{is}A_{rs}$$
$$= P_{ip}P_{is}P_{kq}P_{kr}A_{pq}A_{rs} = A_{pr}A_{rp} = TrA^2\,(3.49) \qquad (3.49)$$

$$Tr(\bar{A})^2 = Tr(A)^2$$

به همین طریق می توان ثابت نمود که :

$$Tr\,\bar{A}^3 = TrA^3$$

مجموعه 3- 47 را به صورت زیر نمایش می دهیم :

$$\{TrA = TrA^3 = TrA^3\} \qquad (3.50)$$

حال مجموعه دیگری از ثابتهای متقارن از A_3, A_2, A_1 را در نظر بگیرید :

$$\begin{cases} I_1 = A_1 + A_2 + A_3 \\ I_2 = A_1A_2 + A_1A_3 + A_2A_3 \\ I_3 = A_1A_2A_3 \end{cases} \qquad (3.51)$$

که اینها نیز ثابت هستند، چون A_3, A_2, A_1 ثابت می باشند و I_2 را می توان بصورت زیر نوشت :

$$I_2 = \frac{1}{2}\{(A_1 + A_2 + A_3)^2 - (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)\}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{(Tr(\bar{A}) - Tr\,\bar{A}^2\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\{(TrA)^2 - TrA^2\}$$

و برای I_3 از رابطه(*3.46*)داریم که :

$$I_3 = \det \bar{A} = \det(PAP^T)$$

$$= \det(P)\det(A)\det(P^T) = \det A$$

بنابراین مجموعه $\{I_1, I_2, I_3\}$ دارای المانهایی به صورت زیر است :

$$\begin{cases} I_1 = TrA \\ I_2 = \frac{1}{2}\{(TrA)^2 - TrA^2\} \\ I_3 = \det A \end{cases}$$

با استفاده از قضیه کیلی همیلتون رابطه(*3.42*) بصورت زیر درمی آید :

$$A^3 - I_1A^2 + I_2A - I_3I = 0 \qquad (3.53)$$

هرگاه از رابطه بالا *Tr* بگیریم، داریم :

$$I_3 = \frac{1}{3}\{TrA^3 - I_1TrA^2 + I_2TrA\} \qquad (3.54)$$

تنسور انحرافی :

Deviatoric Tensor :

تنسور A' را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$A' = A - \frac{1}{3}ITrA \qquad (3.55)$$

A' دارای این خاصیت است که ***Trance*** آن صفر می شود و به تنسوری که ***Trance*** آن صفر شود ***Deviatoric*** گوییم و A' را ***Deviatorie*** تنسور ***A*** می نامیم . در مکانیک محیطهای پیوسته در مواقعی باید تنسور را به جزء کروی و ***Deviatoric*** تقسیم نمود .

$$A = A' + \frac{1}{3} ITrA \qquad (3.56)$$

مقادیر I_3, I_2 نیز با استفاده از تعریف فوق خواهند شد :

$$(3.57) \quad \begin{cases} I_2 = -\frac{1}{2}\left\{(Tr(A')^2 - TrA'^2\right\} = -\frac{1}{2} TrA'^2 \\ I_3 = \frac{1}{3}\left\{TrA'^3 - \frac{3}{2} TrA'^2 TrA' + \frac{1}{2}(TrA')^3\right\} = \frac{1}{3} TrA'^3 \end{cases}$$

جبر برداری و تنسوری :

Vecter & Tensor Calculuonse :

اگر (X_1, X_2, X_3) Φ یک اسکالر باشد در مختصات کارترین، گرایان Φ بصورت زیر تعریف می شود :

$$grad\Phi = \nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\delta x_1} e_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial x_2} e_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial x_3} e_3 \qquad (3.58)$$

$$gread\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} e_i$$

$$\partial\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i} e_i n$$

از نظر هندسی گرایان Φ برداری است که بر سطح *constont* =(X_1, X_2, X_3) Φ

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = Cte$$

عمود می باشد .

حال بردار $a = e_i e_i$ را در نظر بگیریم داریم :

$$div \quad \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{\partial}{\partial x_i} e_i . a_j e_j = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \partial_{ij}$$

$$= \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}$$

و همین طور *Curl* بردار $\vec{a}$ یک بردار بوده و از رابطه زیر بدست می آید :

$$Curl \quad \vec{a} = \vec{\nabla} * \vec{a} = e_{ijk} \frac{\partial_{ak}}{\partial_{xj}} e_i = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} \qquad (3.60)$$

Problem Set (I)

تمرین : مطلوبست محاسبه :

الف) کرل یک تانسور مرتبه دوم

ب) کرل یک تانسور مرتبه سوم (پولی)

تمرین : معادله مشخصه یک جسم ارتجاعی همگن ایزوتروپیک خطی را به صورت زیر در نظر بگیرید .

$$T_{ij} = \lambda E_{kk}\delta_{ij} + 2\mu E_{ij}$$
$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad (\lambda, \mu) = Cte$$

نشان دهید که اصل بقای مومنتم خطی را برای این جسم می توان بصورت زیر نوشت :

$$(\lambda, \mu) \quad Ie, i + \mu u_{ijjj} + jj_i = ju_i$$
$$Ie = E_{kk}$$

اگر نیروی F_t را طوری به انتهای یک میله از جسم فوق وارد نمائیم که تنها مؤلفه تغییر مکان U_1 باشد، ثابت کنید که معادله نمایش این حرکت به صورت زیر باشد .

$$C = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{f}}$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}$$ بطوریکه

تمرین : اگر $\vec{r}$ بردار موقعیت نقطه ای از جسم و R نمایشگر $|\vec{r}|$ باشند نشان دهید .

$a) \qquad \vec{\nabla}.(R^n \vec{r}) = (n+3)R^n$

$b) \qquad \vec{\nabla} * (R^n \vec{r}) = 0$

$c) \qquad \vec{\nabla}.\vec{\nabla} R^n = n(n+1)R^{n-2}$

$d) \qquad \nabla^2 (R^n) = n(n+1)R^{n-2}$

مشتق نسبی تنسورها :

دو سیستم $\bar{x}, x$ که در حالت کلی به صورت زیر بهم مرتبطند را در نظر می گیریم :

$$\bar{x}_i = M_{ij} x_j + b_i$$

اگر B یک تنسور مرتبه اول باشد داریم که :

$$\bar{B}_i = M_{ik} B_k$$

چنانچه از طرفین روابط فوق نسبت به $\bar{x}_j$ مشتق بگیریم، خواهیم داشت :

$$\frac{\partial \bar{B}_i}{\partial \bar{x}_j} = M_{ik} \frac{\partial B_k}{\partial x_m} . \frac{\partial x_m}{\partial \bar{x}_j} = M_{ik} M_{mj} \frac{\partial B_k}{\partial x_M}$$

روابط فوق نشان می دهد که $\frac{\partial \bar{B}_i}{\partial \bar{x}_j}$ یک تنسور مرتبه دوم است . قانون فوق را می توان بـرای تنسـورهای مرتبـه بالاتر و مشتقهای مراتب بالاتر عمومیت داد .

قضایای دیورژاس، گوس، گرین :

در مکانیک محیطهای پیوسته در بسیاری از موارد از قضیه گوس ($Gouss$) استفاده می شود . طبق این قضیه اگر a: یک بردار باشد که مؤلفه های آن دارای مشتقات جزیی مرتبـه اول پیوسـته باشـند و منطقـه $Domain$ ، R بوسیله سطح S محدود شده باشد، داریم که :

قضیه گاوس : $\iiint_R div\,\vec{a}\,du = \iint_s \vec{a}.\vec{n}.ds$ (3.61)

$$\iiint \vec{\nabla}\vec{A}\,dv = \iint \vec{A}.\vec{n}.ds$$

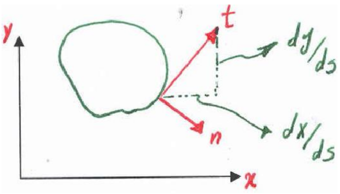
که dv المان حجم، ds المان سطح و $\vec{x}$ بردار یک عمود بر سطح می باشد .

و به شکل اندیسی : $\iiint_R \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dv = \iint_s a_1 n_1 ds$ (3.62)

قضیه گوس را می توان به تنسورها از هر درجه ای اعمال نمود . به طور مثال اگر A یک تنسور مرتبه دوم باشند و مؤلفه های A_{ij} باشند سه رابطه زیر حاصل خواهد شد :

$$\iiint_R \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_i} dv = \iint_s A_{ij} n_i ds \qquad (3.63)$$

در حالت دو بعدی قضیه گرین عبارت است از :



$$\oint Fn_x ds = \int_A \frac{\partial f}{\partial x} dA$$

$$\oint Fn_y ds = \int_A \frac{\partial f}{\partial y} dA$$

(3.64)

$$\begin{cases} n_x = dy/ds \\ n_y = -\dfrac{dx}{ds} \end{cases}$$

که n_y, n_x مؤلفه های بردار یکه عمود بر مرزی می باشند و f یک تابع است .

فرم کلی قضیه گوس را می توان در حالت سه بعدی بصورت زیر نوشت :

$$\int_s n * A ds = \int_v V * A dv \qquad (3.65)$$

که A می تواند اسکالر یا تنسور باشد و * ضرب داخلی، خارجی و یا ضرب دیادیک باشد .

به طور مثال اگر $A = \vec{V}$ و (*) ضرب داخلی در نظر گرفته شود رابطه(3.65) عبارت خواهد شد از :

$$\int_S n_i v_i ds = \int \frac{\partial V_i}{\partial X_i} dv$$

که همان رابطه(3.62) است .

اگر $A=T$ یک تنسور بوده و (*) ضرب داخلی باشد، در مختصات کارتزین داریم :

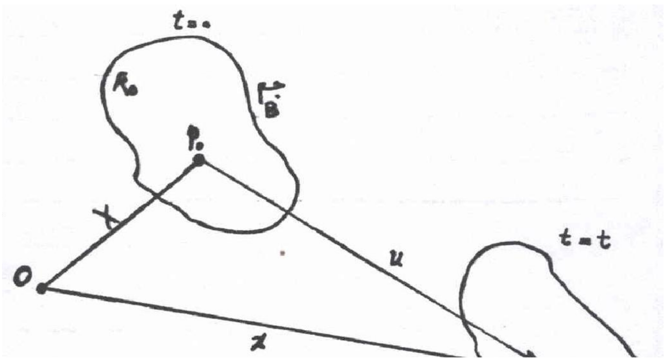
$$\int_S n_i T_{ij} ds = \int_v \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} dv$$

که همان رابطه(3.63) می باشد .

سینماتیک :

« اجسام و موقعیت آنها »

سینماتیک عبارت است از مطالعه حرکت اجسام بدون در نظر گرفتن نیروهایی که این حرکت را ایجاد می کنند .



سیســـتم مختصـــات کـــاترین ثابـــت کـــه مبـــدأ آن «O» و بردارهـــای واحـــد آن $\hat{e}_i$ اســـت را در نظـــر می گیریم . محیط پیوسته یا جسم B در زمان $t=0$ فضای R_o را اشغال کرده است . موقعیت هر نقطـه فضـای R_0 مـــثلاً P_0 را نســـبت بـــه مبـــدأ مختصـــات O بـــا بـــردار $\vec{X}$ نمـــایش مـــی دهـــیم . مؤلفه های این بردار X_R می باشد . فرض کنید که جسمی که در زمان $t=0$ منطقـه R_0 را اشـغال نمـوده اسـت، حرکت کرده و در زمان t، منطقه R از فضا را اشغال می نماید . موقعیت ذره را که اول در $P_0, t=0$ بوده در زمـان t با P نمایش می دهیم .

موقعیت ذره در هر لحظه بستگی به زمان و موقعیت اولیه ذره دارد یعنی :

$$x = x(X,t) \qquad (4.1)$$

اگر x_i مؤلفه های بردار x باشد رابطه بالا را می توان به شکل زیر نوشت :

$$x_i = x_i(x_R,t) \qquad (4.2)$$

مختصات x_R را، مختصات داده یا ***Material Coordinate*** می گویند .

مختصات x_i را، مختصات فضایی یا ***Spatial Coordinate*** می گویند .

موقعیت جسم در زمان $t=0$ را ***Reference Configuration*** و در زمان $t=t$ را ***Corrent Configuration*** مـی گوییم .

سه معادله ***4.2*** را می توان حل کرد و مؤلفه های X_R را برحسب X_i و زمان t بدست آورد .

به عبارتی دیگر می توان رابطه زیر را نوشت :

$$4.1 \Rightarrow X = (x,t)$$

$$X_R = X_R(x_i,t) \qquad (4.3)$$

رابطه بالا مختصات هر نقطه X_R را در ***Re. Conf*** برحسب موقعیت آن x_i در ***Co.conf Corf*** در زمان t می دهد

.

این دو معادله با هم بیانگر این است که تولید جرم نداریم :

$$\begin{cases} x_i = x_i(X_R, t) \\ X_R, X_R(X_i, t) \end{cases}$$

مسائل در مکانیک محیطهای پیوسته به دو صورت فرموله می شوند یا بصورت $x_i = x_i(X_R, t)$ و یا در $X_R = X_R(x_i, t)$ یعنی در *Re. Conf* یا *Cor. Conf* نوشته می شوند .

جسم در *Material Coordinate* را *Lagrangian Description* و

جسم را در *Spatial Coordinate* را *Eulerion Descsription* می نامند .

اگر دوباره حرکت کنیم و آنرا بررسی کنیم *Eulerion* و اگر در جای ثابت حرکت آنرا بررسی کنیم لاگرانثرین می باشد .

تغییر مکان و سرعت :

بردار تغییر مکان یک ذره بصورت زیر است :

$$U = x - X \qquad (4.4)$$

در *Lagrangian. Dis* بردار U، تابعی از *t,x* می باشد بطوریکه :

$$U(X,t) = x(X,t) - X \qquad (4.5)$$

در *Euleriom .Dis* بردار U تابعی از *t,x* می باشد، لذا :

$$U(x,t) = x - X(x,t) \qquad (4.6)$$

برای مشتق گیری (بدست آوردن سرعت) از رابطه (*4.5*) استفاده می کنیم چون X اولیه تابع زمان نیست ولی عکس آن تابع زمان است . طبق تعریف بردار سرعت U یک ذره عبارت است از نرخ تعیین مکان ذره چون X_R ثابت است یا تابعی از زمان نمی باشد، مناسب تر است که از توصیف لا گرانژین استفاده کنیم . با استفاده از (*4.5*) داریم .

$$V(X,t) = \frac{\partial X(X,t)}{\partial t} = \frac{\partial U(X,t)}{\partial t} \qquad (4.7)$$

که در مشتق گیری از رابطه بالا X ثابت است .

رابطه بالا بر حسب مؤلفه هایش بصورت زیر می باشد :

$$V_i(X_R,t)=\frac{\partial x_i(X_R,t)}{\partial t}=\frac{\partial u_i(X_i,t)}{\partial t} \qquad (4.8)$$

در خیلی از موارد لازم است که از توصیف اویلری که سرعت ذره در موقعیت x است استفاده نمود . برای این کـار لازم است که V_i را با استفاده از رابطه (4.3) برحسب x_i نوشت .

مثال : حرکت جسمی بوسیله روابط زیر مشخص شده است :

$$\begin{aligned}
X_1 &= X_1(1+a^2t^2)\\
X_2 &= X_2\\
X_3 &= X_3 \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

که a ثابت معلوم است تغییر مکان و سرعت را در توصیف لاگرانژی و اویلری بدست آورید .

حل : در توصیف لاگرانژی $(L.D)$ داریم :

$$X_i = X_i(X_R,t)$$

در نتیجه :

$$\begin{cases}
U_1 = x_1 - X_1 = X_1(1+a^2t^2) - X_1 = X_1a^2t^2\\
U_2 = x_2 - X_2 = 0 \qquad V_2 = 0\\
U_3 = x_3 - X_3 = 0 \qquad V_3 = 0
\end{cases}$$

$$\rightarrow V_1 = 2a^2X_1t$$

در توصیف اویلری $(E.D)$ داریم :

$$X_R = X_R(x_i,t)$$

در نتیجه :

$$\begin{cases}
X_1 = \dfrac{x_1}{1+a^2t^2} \rightarrow U_1 = x_1 - X = x_1 - \dfrac{x_1}{1+a^2t^2} = \dfrac{x_1a^2t^2}{1+a^2t^2} \rightarrow V_1 = \dfrac{\partial u_1}{\partial t}\\
X_2 = x_2 \qquad \rightarrow u_2 = 0\\
X_3 = x_3 \qquad \rightarrow u_3 = 0 \qquad\qquad \rightarrow V_1 = \dfrac{2a^2x_1t}{(1-a^2t^2)^2}
\end{cases}$$

نرخ تغییر برحسب زمان :

فرض کنید که Φ تابعی است که در محیط پیوسته برحسب زمان و مکان تغییر می کند .

می توان Φ را تابعی از زمان و ***Material Coordinate*** و یا زمان و***Spatial Coodinate*** در نظر گرفت .

مانند تابع چگالی در گازها : $P=P(X,t), P_1=P(x,t)$

در نتیجه داریم که :

$$\Phi = G(X_R,t) = g(x_i,t) \qquad (4.14)$$

حال نیز تغییرات ***Φ***نقطه ای با مختصات X_R بصورت $\frac{\partial G(X_R,t)}{\partial t}$ می باشد و یا بطور کلی اگر از (***4.14***) نسبت بـه زمان مشتق بگیریم داریم که :

Mateial Time Derivative

$$\Phi = \frac{D\Phi}{Dt} = \frac{\partial G(X_R,t)}{\partial t} \qquad (4.15)$$

اگر Φ در ***E.D*** داده شده باشد و بخواهیم $\frac{D\Phi}{DT}$ را بدست آوریم با استفاده از رابطه(***4.2***) و (***4.14***) داریم که :

$$\Phi = g\{x_i(X_R,t),t\} = g\{x_1(X_R,t), x_2(X_R,t), x_3(X_R,t),t\}$$

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{\partial g(x_i t)}{\partial t} + \frac{\partial g(x_i t)}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial g(x_{ij} t)}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial g(x_i t)}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial t}$$

و یا با استفاده از قرار جمع داریم که :

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{\partial g(x_i,t)}{\partial t} + \frac{\partial g(x_i,t)}{\partial x_j}\frac{\partial x_y}{\partial t} \qquad (4.16)$$

با استفاده از رابطه(***4.8*** داریم که :

$$V.\nabla\Phi = V_i e_i - \frac{\partial}{\partial x_j}\Phi e_i = V_i\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} = V_j$$

$$\frac{D\Phi}{Dt} = V_j(X_R,t)\frac{\partial g(x_i,t)}{\partial x_j} + \frac{\partial g(x_i,t)}{\partial t} \qquad (4.17)$$

با ساده نمودن داریم :

$$\frac{D\Phi}{Dt} = Vgrad \quad g + \frac{\partial g(x_i,t)}{\partial t} \qquad (4.18)$$

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \left\{ Subs\,tantional \quad Derivative \quad MaterialTime \quad Derivative \quad Convectel \right.$$

در روابط بالا از دو علامت j,g برای نشان دادن وابستگی Φ به متغیرات (x_i,t) و (X_R,t) استفاده شده است .از این به بعد عموماً به جای این دو تابع از خود تابع Φ استفاده خواهد شد.

و به جای روابط *(4.17)* و *(4.18)* رابطه زیر را می نویسیم :

$$\frac{D\Phi}{Dt} = V_j \frac{\partial \Phi(x_i,t)}{\partial x_j} + \frac{\partial \Phi(x_i,t)}{\partial t} = V.grand\Phi(x_i,t) + \frac{\partial \Phi(x_i,t)}{\partial t} \qquad (4.20)$$

شتاب ***Aulleration*** :

شتاب یک ذره عبارت است از نرخ تغییرات سرعت نسبت به زمان بردار شتاب را با f و مؤلفه های آنرا با J_i نشان می دهیم در ***L.D*** داریم :

$$\begin{cases} x_i = x_i(X_R,t) \\ V_i = \dfrac{\partial x_i(X_R,t)}{\partial t} \\ j_i = \dfrac{\partial^2 x_i(X_R,t)}{\partial t^2} = \dfrac{\partial V_i(X_R,t)}{\partial t} \end{cases}$$

در صورتیکه مؤلفه های بردار سرعت برحسب مختصات فضایی (***Spatial***) داده شده باشد، مؤلفه های بردار شتاب از رابطه زیر بدست می آید :

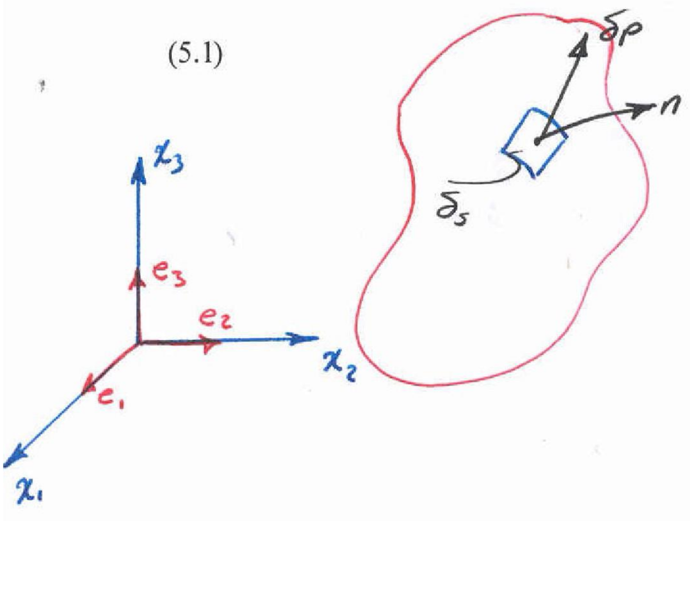
$$f_i = \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial V_i(x_j,t)}{\partial t} + V_k \frac{\partial V_i(x_j,t)}{\partial x_k} \qquad (4.23)$$

تنش : ***Stress***

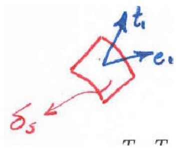
: ***Surface Traction***

المان ∂_s از سطح جسم در ***Configuration*** را در نظر بگیرید که بردار یکه عمود بر آن x باشد فرض کنید که نیروی ∂P بر سطح ∂S وارد می شود

$$t^{(n)} = \lim_{\partial s \to 0} \frac{\partial P}{\partial S}$$



که $t^{(n)}$ از جنس بردار و تنسور درجه یک می باشد و n معرف برداریکه عمود بر سطح المان است حـال سیستم مختصات کارترین را در نظر بگیرید که بردارهای یکه روی آنها، e_3, e_2, e_1 می باشند . بطوریکه e_1 برداریکه عمود بر سطح و t_1 بردار ترکش سطحی باشد .



ترکش t_1 را روی محورها تصویر کرده و تصاویر آنرا با :

T_{11}, T_{12}, T_{13}

نمایش می دهیم که به ترتیب تصاویر t_1 روی محورهای X_3, X_2, X_1 است .

به عبارت دیگر :

$$\vec{t}_1 = T_{11}e_1 + T_{12}e_2 + T_{13}e_3 \qquad (5.2)$$

اگر المان سطح را طوری در نظر بگیریم که عمود بر e_2 و یا عمود بر e_3 باشد و بردارهای ترکش سطحی را تصـویر کنیم، خواهیم داشت :

$$t_1 = T_{11}e_1 + \vec{T}_{12}e_2 T_{13}e_3$$

$$\vec{t}_2 = T_{21}e_1 + T_{22}e_2 + T_{23}e_3 \qquad (5.3)$$

$$\vec{t}_3 = T_{31}e_1 + T_{32}e_2 + T_{33}e_3$$

و یا به فرم ماتریسی داریم :

$$\begin{vmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{vmatrix} \qquad (5.4)$$

و یا در فرم اندیسی عبارت است از :

$$t_i = T_{ij}e_j \qquad (5.5)$$

اگردو طرفین را در e_j ضرب کنیم $T_{ij}=t_i.e_j$ (5.6)

در مختصـات کـارترین روابـط (5.6) حاصـل مـی شـود کـه در ایـن روابـط T_{ij} را مؤلفـه هـای تـنش می نامیم .

بردار ترکش روی سطح دلخواه :

***1*. دستگاه مختصات *xyz*، ماتریس تنش در یک نقطه مشخص از یک جسم بصورت زیر داده شده است :**

2

***a*) بردار تنش و مقدار تنش عمودی روی صفحه ای که از این نقطه گذشته و موازی صفحه *x+2y+2I-6=0* باشد را بیابید .**

***b*) اگر** $(2e_1+2e_2+e_2)\frac{1}{3}=e'_1,(e_1-e_2)\frac{1}{\sqrt{2}}=e'_2$ **آنگاه** $T'_{12}=?$ **.**

***2*. در نقطـــه ای در سیســـــتم مختصـــات*1,2,3* ســــه مؤلفــــه تـــــنش** $T_{13}=T_{23}=T_{33}=0$ **بـــوده و بقیـــه مؤلفـــه هـــای تــــنش مخـــالف صـــفر هســـتند . سیســـتم مختصـــات را حـــول محـــور *3* بانـــدازه زاویـــه** α **می چرخانیم . مؤلفه های تنش را** $\bar{T}_{ij}$ **می نامیم . آنها را بدست آورید .**

د) حرکت زیر را در نظر بگیرید :

$$x_1=X_1(2-e^{-X_2t})$$
$$x_2=X_2$$
$$x_3=X_3e^t+X_1t$$

اگر در زمان *t=0* موقعیت جسم توسط $\begin{cases}0\le X_1\le L_1\\0\le X_2\le L_2\\0\le X_3\le L_3\end{cases}$ **مشخص شده باشد آنگاه،**

***a*) امکان تحقق چنین حرکتی را بررسی کنید .**

***b*) سرعت و شتاب این جسم را برحسب *S.C* و *M.C* بیان کنید .**

***c*) مشخص نمایید کدام ذره مادی در زمان *t=L* در موقعیت فضایی زیر قرار می گیرد ؟**

$t=L$ $\quad\quad\quad X=6e_1+9e_2+10e_3$

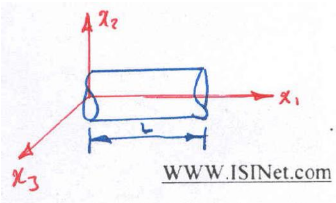
***4*. توزیع تنش زیر را برای یک میله استوانه ای مدور و مشخص در نظر بگیرید :**

$$T=\begin{bmatrix} 0 & -\alpha x_3 & \alpha x_2 \\ -\alpha x_3 & 0 & 0 \\ x x_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) **توزیع بردار تنش را روی سطوحی که توسط معادله** $x_1 = L \;\; , x_1 = 0, x_2^2 + x_3^2 = L$ **تعریف شده اند چقـدر مـی باشند ؟**

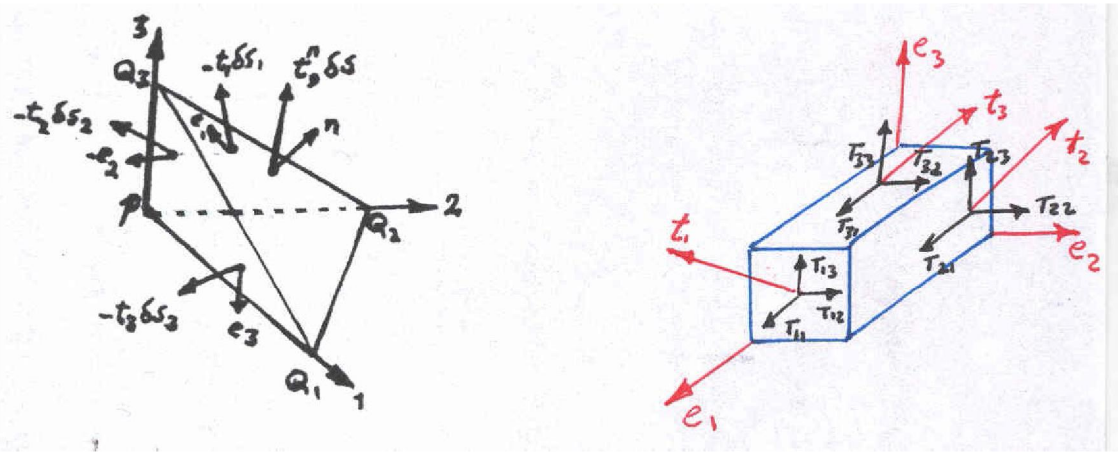
b) **برآیند کل نیرو و معان روی صفحه انتهایی** $x_1 = L$ **را پیدا کنید .**

n **کلیه مقالات** ***ISI*** **موجود در زمینه مهندسی مکانیک را** ***derive*** **کنید .**



بردار ترکشن روی سطح دلخواه :

فرض کنید که مؤلفه های T_{ij} **در نقطه** ***P*** **داده شده باشند . حال می خواهیم بردار ترکشن را روی سطح دلخـواهی که از نقطه** ***P*** **می گذرد، محاسبه کنیم . برای این کار چهار وجهی مطابق شکل زیر به نظر می گیریم :**



برداریکه ***n*** **عمود بر سطح** Q_1, Q_2, Q_3 **می باشد و ترکشن روی سـطوح** PQ_2Q_3 **،** Q_3Q_1 ***P*** **و** PQ_1Q_2 **بـه ترتیـب** $-t_3, -t_2, -t_1$ **می باشد . علامت منفی به این علت است که بردارهای یکه عمود بر سطوح در خلاف جهت محورهای مختصـات هسـتند . بـردار ترکشـن روی سـطح** Q_1, Q_2, Q_3 **،** t^n **مـی باشـد . بـرای محاسـبه سـطوح** $PQ_1Q_2, PQ_2Q_3, PQ_1Q_3$ **داریم که :**

$$PQ_2Q_3 \text{ سطح } = \partial S_1 = n_1 \partial s \qquad Cos(n, e_1) = n_1$$

$$PQ_1Q_3 \text{ سطح } = \partial S_2 = n_2 \partial s \qquad Cos(n, e_2) = n_2 \qquad (5.7)$$

$$PQ_1Q_2 \text{ سطح } = \partial S_3 = n_3 \partial s \qquad Cos(n, e_3) = n_3$$

نیروی وارد بر سطوح المان عبارتند از :

$$-t_1\partial s_1,-t_2\partial s_2,-t_3\partial s_3+t^{(n)}\partial s=0$$

با استفاده از(5.7)خواهیم داشت :

$$t^{(n)}=t_1n_1+t_2n_2+t_3n_3=n_it_i=n_iT_{ij}e_j=T^{(n)}$$

قانون کوشی $\quad t^n=n_iT_{ij}e_j \qquad (5.8)$

e_j **با ضرب طرفین در** $\rightarrow t_j^n=n_iT_{ij} \qquad (5.9)$ **رابطه کوشی**

بسط رابطه فوق به صورت زیر است :

$$\begin{vmatrix} t_1^n \\ t_2 \\ t_3^n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{vmatrix} \qquad (5.10)$$

انتقال مؤلفه های تنش :

مؤلفه های تنش T_{ij} را در سیستم مختصات با بردارهای یکه e_i تعریف می کنیم . تغییر سیستم مختصات باعث تغییر مؤلفه های تنش خواهد شد . فرض کنید که می خواهیم مؤلفه های تنش $\bar{T}_{ij}$ را در سیستم مختصات با بردارهای یکه $\bar{e}_i$ بدست آورید :

$$\begin{cases} e_i=\bar{M}_{ij}e_j \\ e_j=M_{ij}\bar{e}_i \end{cases} \qquad (5.11)$$

در رابطه (5.8) بردار n را با $\bar{e}_i$ عوض می کنیم

در اینصورت مؤلفه های $\bar{e}_i$ در مختصات با بردارهای یکه e_i بدست آورید:

$$n_i=M_{1i}$$

و ترکشن را روی سطح با $\bar{t}_1$ نمایش می دهیم :

$$\bar{t}_1=M_{1i}T_{ij}e_j$$

با استفاده از تبدیل (5.11) داریم که :

$$\bar{t}_1 = M_{1i}T_{ij}e_j = M_{1i}T_{1j}M_{qj}\bar{e}_q = M_{1i}Mq_jT_{ij}\bar{e}_q$$

اگر همین کار را با محورهای $\bar{e}_3, \bar{e}_2$ انجام دهیم خواهیم داشت :

$$\bar{t}_p = M_{pi}M_{qj}T_{ij}\bar{e}_q \qquad (5.12)$$

حال مؤلفه های تنش را در سیستم مختصات با بردارهای یکه $\bar{e}_q$ با $\bar{T}_{pq}$ نشان می دهیم . مشابه *(5.5)* می تـوان نوشت که :

$$\bar{t}_p = \bar{T}_{pq}\bar{e}_q \qquad (5.13)$$

با مقایسه روابط *(5.12)* و *(5.13)* داریم :

$$\bar{T}_{pq} = M_{pi}M_{qj}T_{ij} \qquad (5.14)$$

رابطه فوق مشابه رابطه *(3.28)* برای تانسور درجه دوم می باشد، پس تنش یک تنسور مرتبه دوم است، لذا داریم :

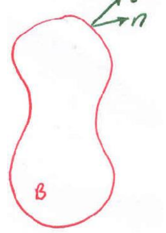
$$T = T_{ij}e_i \otimes e_j \qquad (5.16)$$

« هر تنسور مرتبه دوم را می توان به شکل *Sil* نوشت »

معادلات تعادل :

Equilibrium Equation:

محیط پیوسته B در حال تعادل است، به سطح این محیط که آنرا با S نمایش می دهـیم، بـردار ترکشـن t^n وارد شده است و نیروی جسمی Pb بر واحد حجم اعمال می شود . روابط تعادل عبارتند از :



1) تعادل نیروها

2) تعادل مکانها نسبت به یک نقطه دلخواه مثل O

(5.17) « تعادل نیرو » $\iint_S t^n.ds + \iiint_V Pbdv = 0$

(5.18) « تعادل معافها» $\iint_s x * t^n ds + \iiint_V x * Pbdv = 0$

X موقعیت نقاط مختلف جسم نسبت به نقطه O می باشد . در صورتیکه n بردار یکه عمود بر سطح باشد از رابطـه

(5.8) دو رابطه بالا را می توان بصورت زیر بازنویسی نمود :

$$\iint_s n_i T_{ij} ds + \iiint_V Pb_j dv = 0 \qquad (5.19)$$

$$\iiint \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} + Pb_j \right) dv = 0 \qquad (5.21)$$

جمله $x^* t^{(n)}$ را می توان به صورت زیر نوشت :

$$x * t^n = x_i e_i * T_{kL} n_k e_l = x_i T_{kl} e_{i\,lm} e_m n_k$$

$$5.18 \Rightarrow \iiint e_{jpq} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2} (x_p T_{rq}) + Px_p b_q \right\} dw = 0 \qquad (5.22)$$

روابط (5.21) و (5.22) از قضیه گاوس بدست آمده اند چون خواستیم از سطح به حجم برویم یک دیورژانس مورد نیاز بوده است .

روابط (5.21) و (5.22) برای هر حجمی بایستی صادق باشند، لذا باید *Integrand* روابط فوق صفر باشند یعنی :

$$\left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} + Pb_j \right) = 0 \qquad (5.23)$$

$$e_{jpq} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_r} (x_p T_{rq}) + Px_p b_q = 0 \right\} = 0 \qquad (5.24)$$

با ساده سازی رابطه (5.24) داریم :

$$\frac{\partial}{\partial x_r} (x_p T_{rq}) = \frac{\partial T_{rq}}{\partial x_2} x_p + T_{rq} \left(\frac{\partial x_p}{\partial x_r} \right) = \frac{\partial Tr_{rq}}{\partial x_2} x_2 + T_{pq}$$

$$e_{jpq} \left\{ \left(\frac{\partial T_{rq}}{\partial x_r} + Pb_q \right) x_p + T_{pq} \right\} = 0$$

$$\Rightarrow e_{jpq} T_{pq} = 0$$

چون e_{jpq} تنسور پاد متقارن می باشد و ضرب e_{jpq}, T_{pq} منو شده لذا باید T_{pq} یک تنور متقارن باشد .

یعنی :

Chapter Six:

$$T_{pq} = T_{qp}$$

حرکت و تغییر شکل :

مطابق با آنچه تا به حال گفته شد، متخصات ذرات در $Conf$. R را با X_n در زمان $t=0$ نمایش می دهیم . در زمان بعد از آن مختصات ذره تبدیل به x_i خواهد شد . در اینصورت معادلات $x = x(X,t)(6.1), x_i = x_i(X_R,t)$ حرکت جسم را مشخص خواهند نمود . در حرکت صلب جسم بدون اینکه شکل آن تغییر کند، موقعیت آن تغییر می کند و فاصله بین ذرات در همین حرکت بدون تغییر خواهند ماند و همینطور زاویه بین هر دو خط در جسم در حین حرکت ثابت باقی می ماند .

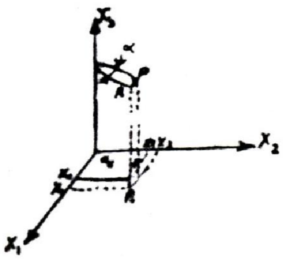
ساده ترین نوع حرکت جابجایی با **Translation** است . در این حرکت تمام ذرات جسم به یک اندازه تغییر مکان خواهند داد . در نتیجه معادلات حرکت را می توان به صورت زیر نوشت :

$$x = X + c(t)$$
$$x_i = X_i + C_i(t) \qquad (6.2)$$

که بردار c مستقل از موقعیت ذرات بوده و تنها تابع زمان است .

چرخش :

Rototion :



حرکتی را در نظر بگیرید که جسم B در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت باندازه زاویه α حول محور 3 چرخیده است زاویه α ممکن است بستگی به زمان داشته باشد، در این حالت ذره ای که اول در نقطه P_0 قرار داشت در نقطه P قرار خواهد گرفت . روابط هندسی ابتدایی حکم می کنند که داشته باشیم :

$$\begin{cases} x_1 = X_1 Cos\alpha - X_2 Sin\alpha \\ x_2 = X_1 Sin\alpha + X_2 Cos\alpha \\ x_3 = X_3 \end{cases} \qquad (6.3)$$

و یا در **Rotation** تنسوری، داریم که :

$$\boldsymbol{x=Q.X} \qquad (6.4)$$

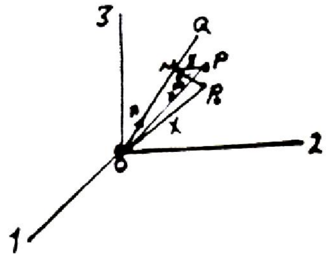
که بردارهای پایه e_i بوده و تنسور Q بصورت زیر است :

$$Q_{iR} = \begin{vmatrix} Cos\alpha & -Sin\alpha & 0 \\ Sin\alpha & Cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad (6.5)$$

چون Q ماتریس دوران است، لذا *Orthagonal* می باشد و داریم :

$$X = Q^T.x \qquad (6.6)$$

حال یک چرخش کلی تر را در نظر می گیریم که جسم B حول محور OQ که از مبدأ مختصات می گذرد و باندازه $\alpha 0$ چرخیده است را بررسی می کنیم .



فرض کنید موقعیت ذره ای از جسم B در نقطه P_o بوسیله بردار X مشخص شده باشد، حال ذره از P_o حرکت کرده و موقعیت آن نقطه P خواهد شد که آنرا با X نمایش می دهیم .X برداریکه روی محوری است که چرخش حول آن انجام می شود و صفحه ای که حرکت ذره در آن انجام می شود و نقاط P,P_o در آن قرار دارند محور OQ را در نقطه N قطع نموده و بر آن عمود است . در اینصورت $\bar{N}P = \bar{N}P_0$ و $\alpha = P_0NP$ بردار موقعیت N نسبت به O، بردار $C.n$ می باشد یعنی $\vec{ON} = C.n$ و مطابق شکل داریم :

$$C=n.X=n.X \qquad (6.7)$$

بردارهای موقعیت P_o,P نسبت به N را با Y و Y_o نمایش می دهیم در نتیجه :

$$\begin{cases} X = Cn + y_0 \\ X = Cn + y \end{cases} \qquad (6.8)$$

با استفاده از شکل داریم که :

$$y = y_0 Cos\alpha + n * y_0 Sin\alpha$$

به عنوان $H.W$ اثبات شود .

با استفاده از روابط (6.7) و (6.8) داریم که :

$$x = Cn + y = Cn + (X - Cn)Cos\alpha + n * (X - Cn)Sin\alpha$$

رابطه فوق را می توان به شکل زیر ساده تر نمود :

$$x = XCos\alpha + (n * X)Sin\alpha + C(1 - Cos\alpha)n$$
$$= XCos\alpha + (n * x)Sin\alpha + (n.X)(1 - Cos\alpha)n \qquad (6.9)$$

و فرم اندیسی آن به شکل زیر خواهد بود :

$$\begin{cases} x_i = XCos\alpha + e_{ijR}n_R Sin\alpha + (1 - Cos\alpha)X_R n_R n_i & (6.10) \\ x_i = Q_{iR} \Rightarrow Q_{iR} = \delta_{iR}Cos\alpha + e_{ijR}n_j Sin\alpha + (1 - Cos\alpha)n_i n_R & (6.11) \end{cases}$$

چرخش جسم B حول محور ثابت باندازه یک زاویه معلوم مانند این است که جسم را ثابت نگهداشته و سیستم مختصات را حول آن محور در خلاف جهت چرخش دهیم در نتیجه چرخش خالص ایجاد تنسور را *Orthagonal*، Q را خواهد نمود که مؤلفه های آن در رابطه *(6.11)* داده شده اند و *Transformation* بصورت زیر می باشد :

$$\begin{cases} Z = Q.X \\ X = Q^T.X \end{cases}$$

کاملاً مشخص است که هر حرکت صلبی را می توان به دو حرکت، یکی جابجایی صلب و دیگری چرخش حول محوری که از مبدأ مختصات می گذرد، تجزیه نمود و یا اینکه حرکت صلب عبارت است از :

$$\begin{cases} X = Q(t).X + C(t) \\ X = Q^T.X + C_1(t) \end{cases} \qquad (6.12)$$

$$C_1(t) = -Q^T.C(t)$$

محیطهای تغییر شکل پذیر

$$x_i = x_i(X_R, t)$$
$$x_i = x_i(X_R, t) \qquad (6.1)$$

تغییر طول یک المان خط :

در حرکت کلی یک جسم به هم موقعیت و جهت و هم شکل جسم تغییر می کند .

در تغییر شکل جسم، فواصل بین ذرات تغییر می کند .

در اینجا تغییر طول یک المان خط را مورد بررسی قرار می دهند .

المان خط راست P_o Q_o را در جسم B در *ref. c* در نظر می گیریم . بطوریکه طول δL باشد و در جهت برداریکه $\vec{A}$ باشد در نتیجه اگر مختصات نقطه P_o، X_R^0 باشد مختصات نقطه Q_o عبارت است از $Q_0(X_R^{(0)} + A_R\delta L)$ که A_R

مؤلفه های برداریکه A در سه جهت می باشد . ذراتی که روی خط P_o Q_o قرار داشتند در زمان $(t=0)$ بعد از تغییر شکل با یک منحنی فضایی در فضا خواهند نمود که از روابط (6.1) پیروی خواهند نمود . در اینجا طول جهت المان خط بعد از تغییر شکل باید مشخص شود . فرض کنید که ذراتی که اول در نقاط و $Q_\circ$ قرار داشتند حرکت نموده و به نقاط Q,P می رسند و طول خط PQ برابر δL می باشد و در جهت برداریکه $\vec{a}$ باشد . در نتیجه اگر مختصات نقطه P عبارت از $P(X_i^{(0)})$ آنگاه مختصات Q عبارت است از $(X_i^{(0)}+a_i\delta L)$ با استفاده از (6.1) داریم که :

$$X_i(X_R,t)=X_i \qquad (6.1)$$

مختصات نقطه P = $X_i^{(0)}=x_i(x_R^{(0)},t)$

و چون نقطه Q اول در $Q_\circ$ قرار داشت داریم که :

$$X_i^{(0)}+a_i\delta L=x_i(X_R^{(0)}+A_R\delta Lt)$$

با استفاده از بسط تیلور رابطه فوق حول $\delta L=0$ داریم که :

$$X_1^{(0)}+a_i\delta l=x_i(X_R^{(0)},t)+A_s\delta L\frac{\partial X_i(X_R^{(0)})}{\partial X_S}+\ldots+\frac{A_sA_q(\partial L)^2\partial^2x}{2\partial x_s\partial x_q}+\ldots$$

و با صرفنظر از تنشهای مراتب بالاتر $O(\delta L)^2$ خواهیم داشت :

$$x_i^{(0)}+a_i\delta L=\frac{1_1(X_R^{10},t)}{x_i^{(0)}}+A_S\delta L\frac{\partial X_i(x_R^{10})}{\partial X_S}$$

$$\Rightarrow a_i\delta L=A_S\delta L\frac{\partial X_i(X_R^{10})}{\partial X_S}$$

و یا در صورتیکه از رابطه فوق وقتی $\delta L\to 0$ حد بگیریم، خواهیم داشت :

$$a_i\frac{\delta l}{\delta l}=A_S\frac{\partial X_i(X_R^{(0)}}{\partial r_s}\Rightarrow a_i\frac{dl}{dl}=A_S\frac{\partial X_i(X_R^{10}}{\partial X_S} \qquad (6.13)$$

ضریب دیفرانسیل $\frac{dl}{dL}$ را نسبت طول ثانیه المان به طول اولیه المان خط می نامیم و به آن نسبت کشش (*Exctension Ratio* یا *Strech Ratio*) می نامیم و آنرا با λ نمایش می دهیم .

$$\frac{dl}{dL}=\lambda$$

در نتیجه داریم :

$$\lambda a_i = A_S \frac{\partial x_i (X_R, t)}{\partial X_S} \qquad (6.14)$$

با ضرب طرفین رابطه فوق در λaj خواهیم داشت :

$$\lambda aj = A_T \frac{\partial x_j}{\partial X_T} *$$

$$**** \Rightarrow \lambda^2 a_i a_j = A_S \frac{\partial X_i}{\partial x_s} A_T \frac{\partial x_j}{\partial x_T}$$

در صورتیکه عمل ***Contraction*** (انقباض اروی)، عمل شود داریم :

$$\lambda^2 a_i a_i = A_S \frac{\partial x_i}{\partial x_s} A_T \frac{\partial x_i}{\partial x_T}$$

و چون بردار ***a*** یکه می باشد در نتیجه $a_i a_i$ برابر یک است داریم :

$$\lambda^2 = A_S A_T \frac{\partial x_i}{\partial x_s} \frac{\partial x_i}{\partial x_T} \qquad (6.15)$$

$$6.15 \quad \rightarrow \lambda = ? \rightarrow 6.14 \rightarrow a_i = ?$$

$$6.21 \quad \rightarrow \lambda = 0 \rightarrow 6.22 \rightarrow a_i = ?$$

مقدار λ را از رابطه (***6.15***) و جهت مقدار چرخش بردار ***a*** از رابطه (***6.14***) بدست می آید . λ همواره مثبت می باشد، اگر $\lambda > 1$ انبساط و اگر $\lambda < 1$ انقباض خواهد بود .

اگر تغییر شکل جسم بوسیله روابط زیر مشخص شده باشند :

$$X = X(x, t) = X_R (x_i, t)$$

که مختصات ***Seference*** ذره را برحسب مختصات آن در لحظه ***t*** می دهد به طریقه مشابه می توان نسبت کشش λ و جهت بردار ***A*** که جهت المان خط در لحظه ***t=0*** است را بدست آورد در اصل فقط کافی است $X, A, \delta L \xrightarrow{\text{تبدیل شوند به}} x, a, \delta l$ و نتایج زیر حاصل می شود :

$$A_S = \lambda a_i \frac{\partial X_s}{\partial x_i} \qquad (6.16)$$

$$\lambda^{-2} = a_i a_j \frac{\partial X_S}{\partial x_i} \frac{\partial X_S}{\partial x_j} \qquad (6.17)$$

مثال : تغییر شکل هموژن در یک جسم به صورت زیر داده شده است :

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{2}X_1 + \frac{3}{4}\sqrt{2}X_2 \\ x_2 = -X_1 + \frac{3}{4}X_2 + \frac{1}{4}\sqrt{2}X_3 \\ x_3 = X_1 - \frac{3}{4}X_2 + \frac{1}{4}\sqrt{2}X_3 \end{cases}$$

مطلوب است :

الف) جهت المان خط بعد از تغییر فرم برای المان خطی که در *ref conf* دارای منتهای مثبت *(1:1:1)* باشد .

ب) مقدار کشش برای المان خط .

حل، داریم :

$$A^T = (1,1,1)$$

$$\lambda^2 = A^T.F.F^T.A$$

$$F = \frac{\partial x_i}{\partial X_R} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{3}{4}\sqrt{2} & 0 \\ -1 & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 1 & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix} \qquad T^T = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & 1 \\ 3/4\sqrt{2} & \frac{3}{4} & -3/4 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}$$

$$\lambda^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & 1 \\ & F^T & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 6.5 \Rightarrow \lambda = \frac{\sqrt{13}}{6}$$

$$a = \lambda^{-1}.F.A = \frac{\sqrt{6}}{13} \begin{bmatrix} 7/4\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}-1}{4} \\ \frac{\sqrt{2}+1}{4} \end{bmatrix} = (7\sqrt{2} : \sqrt{2}-1 : \sqrt{2}+1)$$

گرایان تنسور تغییر مکان *The Deformation Gradient Tensor* :

به نه کمیت $\frac{\partial x_i}{\partial X_R}$ مؤلفه های گرادیان تنسور تغییر مکان می گویند . این کمیتها در مشخص نمودن حرکت یک ذره نسبت به حرکت ذرات در همسایگی آن به کار برده می شود . تنسور درجه دوم F را که مؤلفه های آن بصورت زیر هستند را تعریف می کنیم :

$$F_{iR}=\frac{\partial x_i}{\partial X_R} \qquad (6.18)$$

که به آن تنسور گرادیان تغییر مکان می گوییم .

برای اینکه ثابت کنیم F_{iR} مؤلفه های یک تانسور هستند، سیستم مختصات کارترین جدیدی را در نظر می گیریم که نسبت به سیستم مختصات چرخیده است . و این چرخش بوسیله ماتریس *Orthagonal* ، M مشــخص شــده است . در نتیجه در سیستم جدید مؤلفه های x,X عبارتند از : $\bar{X}_R, \bar{x}_i$ $\qquad (X, x \rightarrow \bar{X}_R, \bar{x}_i)$

$$\begin{cases} \bar{X}_R = M_{RS} X_S \ , & \bar{x}_i = M_{ij} x_j \\ X_S = M_{RS}\,\bar{X}_R \ , & x_j = M_{ij}\,\bar{x}_i \end{cases}$$

با تغییر مختصات فوق داریم :

$$\bar{F}_{iR}=\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \bar{X}_R}=\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j}.\frac{\partial x_j}{\partial X_S}.\frac{\partial X_S}{\partial \bar{X}_R}=M_{ij}M_{RS}\frac{\partial x_j}{\partial X_S}$$

$$\bar{F}_{iR}=M_{ij}M_{RS}\frac{\partial x_i}{\partial X_S}=M_{ij}M_{RS}F_{js}$$

چون مؤلفه های F_{iR} از قانون *Transformation* تنسورهای درجه دوم پیروی می کنند F یک تنسور درجه دوم است . تنسور F در حالت کلی متقارن نمی باشد و بصورت زیر می توانیم آنرا نشان دهیم :

$$F = F_{iR} e_i \otimes e_R$$

تنسورهای f^T, f^{-1} نیز تنسورهای درجه دوم می باشند . f^{-1} به شرطی وجود دارد که $det(F) \neq 0$ و بــه شــکل زیر نشان می دهیم :

$$\begin{cases} f^{-1}=\dfrac{\partial X_S}{\partial x_j} e_s \otimes e \\ f_{Rj}^{-1}=\dfrac{\partial X_R}{\partial x_j} \end{cases} \qquad (6.19)$$

با استفاده از (*6.19*)رابطه (*6.14*) را می توان به صورت زیر نوشت :

$$a_i=\lambda^{-1} A_S \frac{\partial x_i}{\partial X_S}$$

$$a=\lambda^{-1}.F.A \qquad (6.20)$$

و رابطه *(6.15)* را می توان به صورت زیر نوشت :

$$\lambda^2 = A.F^T.F.A \qquad (6.21)$$

و به همین ترتیب روابط *(6.16)* , *(6.19)* را می توان به شکل زیر نوشت :

$$A = \lambda F^{-1}.a \qquad (6.22)$$
$$\lambda^{-2} = a.(F^{-1})^T.F^{-1}.a \qquad (6.23)$$

برای محاسبه a, A, λ عموماً مناسب تر است که از فرم ماتریسی استفاده شود .

در اینصورت ***a,A*** را به صورت ماتریس های ستونی ` F^{-1}, F, F^T را به صورت ماتریس های مربعی مـــی نویســـیم و روابط(***6.20***)و(***6.23***)بصورت زیر در می آیند :

$$(6.24) \quad \begin{cases} a = \lambda.^{-1}.F.A \\ \lambda^2 = A^T.F^T.F.A \end{cases}$$

$$(6.25) \begin{cases} A = \lambda.F^{-1}.a \\ \lambda^{-2} = a^T\,(F^{-1})^T\,F^{-1}.a \end{cases}$$

اگر جسم حرکت نکند آنگاه $x_i = X_i$ در نتیجه داریم :

$$F_{iR} = \delta_{iR} \rightarrow F = I$$

مؤلفه های بردار تغییر مکان U بصورت زیر است :

$$u_i = x_i - X_i$$

و گرادیان تغییر مکان عبارت خواهد شد از :

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_R} = \frac{\partial x_i}{\partial X_R} - \frac{\partial X_i}{\partial X_R} = F_{iR} - \delta_{iR} \qquad (6.26)$$

در نتیجه گرادیان تغییر مکان مؤلفه های تنسور(***f-I***)است که این تنسور را عموماً تنسور گرادیان تغییـــر مکـــان نامند . اگر هیچ حرکتی وجود نداشته باشد داریم .

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_R} = 0$$

تنسور کرنش و تغییر شکل محدود *Finite Deformation and Strion Tensor*

تنسور جدید C را به شکل زیر تعریف می کنیم :

$$C = F^T.F \qquad (6.27)$$

در نتیجه مؤلفه های این تنسور عبارتند از :

$$\begin{cases} C_{RS} = \dfrac{\partial x_j}{\partial X_R}.\dfrac{\partial x_j}{\partial X_S} \\ C_{SR} = \dfrac{\partial x_j}{\partial X_S}.\dfrac{\partial x_j}{\partial X_R} \end{cases} \qquad (6.28)$$

در نتیجه تنسور C یک تنسور متقارن می باشد .

با استفاده از (6.15) و (6.21) یک نسبت کشش المان خط در جهت A در *ref conf* می باشد، عبارت خواهد بود از :

$$\lambda^2 = C_{RS}A_R A_S = A^T.C.A \qquad (6.29)$$

در نتیجه با دانستن C می توان نسبت کشش المان خط را محاسبه نمود . حال یک مثلث را در نظر بگیرید که بوسیله سه المان خط محدود شده است . دانستن طول این المانهای خط بعد از تغییر شکل، شکل آن را کاملاً مشخص می کند، اگرچه جهت آن مشخص نخواهد بود . در نتیجه مؤلفه های C_{AS} در یک نقطه، تغییر مکان در حوالی آن نقطه را معلوم خواهند نمود . در صورتیکه جسم فقط دارای حرکت صلب باشد، از رابطه (6.12) داریم :

حرکت صلب :

$$\begin{cases} F = Q(t) \\ C = Q^T.Q = I \end{cases}$$

در نتیجه برای حرکت صلب جسم، C ثابت و برابر I می باشد و اندازه گیر تغییر شکل جسم می باشد، که بر آن *Right Couchy Green Deformation Tensor* می گویند .

هر تانسور دیگری مثل C^{-1} و یا C^2 که تابعی از C است نیز می تواند بعنوان اندازه گیر تغییر شکل مورد استفاده قرار گیرد . بعضی مواقع از C^{-1} به عنوان معرف تغییر شکل استفاده می شود که برحسب F بصورت زیر است :

$$C^{-1} = F^{-1}(F^T)^{-1} \qquad (6.31)$$

مؤلفه های C^{-1}_{RS} از تنسور C^{-1} بصورت زیر خواهد بود :

$$C_{RS}^{-1} = F_{Ri}^{-1}.F_{Si}^{-1} = \frac{\partial X_R}{\partial x_i}.\frac{\partial X_S}{\partial x_i} \qquad (6.32)$$

یک نوع دیگر از اندازه گیر تغییر شکل بر مبنای *(6.19)* بصورت زیر است :

$$B = F.F^T \qquad , \qquad B^{-1} = (F^{-1})^T.F^{-1} \qquad (6.33)$$

که B را *Left Couchy Green Deformation Tensor* می گوییم و شکل اندیسی آن :

$$B_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_R}.\frac{\partial x_j}{\partial X_R} \qquad , \qquad B_{ij}^{-1} = \frac{\partial X_R}{\partial x_i}.\frac{\partial X_R}{\partial x_j} \qquad (6.34)$$

و رابطه *(6.17)* به صورت زیر درمی آید :

$$\lambda^{-2} = a_i a_j B_{ij}^{-1} = a.B^{-1}.a \qquad (6.35)$$

در نتیجه دانستن B^{-1} و یا B برای مشخص کردن تغییر مکان در حوالی یک نقطه در *C.Conf* کافی است . در حرکت صلب جسم، $B=I$ می باشد :

نکته :

$$\left| \begin{array}{llll} X_1 = -x_1 - x_2 & \to B & x_1 = X_1 + X_2 & \to C \\ X_2 = x_1 - x_2 & & x_2 = & \\ X_3 = x_1 & & x_3 = & \end{array} \right|$$

تنسور η بصورت زیر تعریف می شود :

$$\eta = EuLerion(Almanses)Tensor = \frac{1}{2}(I - B^{-1}) \qquad (6.37)$$

$$\gamma = Lagrangion(Green)Tensor = \frac{1}{2}(C - I) \qquad (6.36)$$

اگر جسم فقط دارای حرکت صلب باشد تنسورهای η, γ برای آنها برابر صفر است . اگر تغییر مکانها بوسیله(*6.10*) داده شده باشند که x را برحسب X می دهد، محاسبه F و در نتیجه γ, B, C به عنوان اندازه گیر تغییر مکان آسان تر می باشد و مؤلفه های این تنسورها توابعی از مختصات X_R خواهند بود . و اگر تغییر مکانها به صورت باشند X بر x باشد بهتر است که $C^{-1}, B^{-1}, \eta, F^{-1}$ برحسب مؤلفه هایش از مختصات X_i (فضایی) بدست می آوریم .

مولفه های γ_{RS} تنسور γ و همچنین مؤلفه های η_{ij} تنسور η اغلب بر حسب گرادیان تغییر مکان داده شده اند چونکه :

$$F_{iR}=\frac{\partial x_i}{\partial X_R}=\frac{\partial u_i}{\partial X_R}+\partial_{iR}$$
$$\gamma_{RS}=\frac{1}{2}(C_{RS}-\delta_{RS})$$
$$C_{RS}=\frac{\partial x_j}{\partial X_R}.\frac{x_j}{\partial X_S}=\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_R}+\delta_{jR}\right)\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_S}+\delta_{js}\right)$$
$$\gamma_{RS}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_R}+\delta_{iR}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_S}+\delta_{iS}\right)-\delta_{RS}\right] \qquad (6.38)$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial X_R}.\frac{\partial u_i}{\partial X_S}+\frac{\partial u_i}{\partial X_R}.\delta_{IS}+\frac{\partial u_i}{\partial X_S}\delta_{iR}+\delta_{iR}+\delta_{iS}-\delta_{RS}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial X_R}\frac{\partial u_i}{\partial X_S}+\frac{\partial u_s}{\partial X_R}+\frac{\partial u_R}{\partial X_S}\right]$$

به عنوان مثال γ_{11} برابر است با :

$$\gamma_{11}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)^2$$

به طور مشابه با استفاده از *6.34* و *6.33* داریم که :

$$\varsigma_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_i}{\partial x_i}-\frac{\partial u_R}{\partial x_i}\frac{\partial u_R}{\partial x_j}\right) \qquad (6.39)$$

بعنوان مثال برای η_{11}داریم :

Summary

$$\varsigma_{11}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial u_1}-\left[(\frac{\partial u_1}{\partial x_1})^2+(\frac{\partial u_2}{\partial x_1})^2+(\frac{\partial u_3}{\partial x_1})^2\ \ ]\right]\right.$$

به طور خلاصه محاسبه تغییر مکان و تنسور تغییر طول نسبی را با استفاده از جبر ماتریسی می توان بصورت زیـر خلاصه نمود :

$$F=F_{iR}=\frac{\partial x_i}{\partial X_R} \qquad , \qquad F^{-1}=F^{-1}_{(Ri)}=\frac{\partial X_R}{\partial x_i}$$
$$C=C_{RS} \qquad ,B=B_{ij} \qquad ,C^{-1}=C^{-1}_{RS},B^{-1}=B^{-1}_{ij} \qquad (6.40)$$
$$a=(a_1,a_2,a_3)^T \qquad ,A=(A_1,A_2,A_3)^T$$

در اینصورت فرمولهای اصلی عبارتند از :

$$C = F^T.F \qquad ,C^{-1} = F^{-1}(F^{-1})^T$$
$$B = F.F^T \qquad ,B^{-1} = (F^{-1})^T.F^{-1}$$
$$\lambda^2 = A^T.C.A \quad ,\lambda^{-2} = a^T.B^{-1}.a$$
$$2(\gamma_{RS}) = C.I \quad ,2\eta_{ij} = I - B^{-1} \qquad (6.41)$$

تنسورهای $\gamma, \eta, B^{-1}, B, C^{-1}, C$ تماماً تنسورهای متقارن درجه دو بوده و دارای *E.Va* های حقیقی و *E.Ve* هـای *Orthagonal* می باشند .

مثالهایی از تغییر مکانهای *Finite* :

مثال *1* : « کشش یکنواخت »

فرض کنید که جسمی مثل میله بلند که دارای سطح مقطع ثابت است، بطور یکنواخت در جهت محور (*1*) بانـدازه λ_1, x_1 کشیده شده است . این نوع تغییر مکان را تغییر مکان یکنواخت در جهت (*1*) می نـامیم بنـابراین میـدان تغییر مکان برابر خواهد بود با :

$$x_1 = \lambda_1 X_1$$

اگر جسم بطور یکنواخت در جهت سه محور کشیده شود تغییر مکان بصورت زیر خواهد شد :

$$x_1 = \lambda_1 X_1$$
$$x_2 = \lambda_2 X_2$$
$$x_3 = \lambda_3 X_3 \qquad (6.42)$$

که $\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1$ می توانند ثابت و یا تابعی از زمان *t* باشند . یعنی از حالات بخصوص *(6.42*)قابل بررسی می باشند . مثلاً اگر $\lambda_2 = \lambda_3$ باشد، جسم در جهت عمود بر محور (*1*) به طور یکنواخت در حالت کشش و فشار می باشد و در صورتیکه $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ باشد جسم از تمام جهات بطور یکنواخت یا در حالت کشش و یا در حالت فشـار خواهـد بـــــود کـــــــــه بـــــــــه آن *Dilatation Uniform* می گوییم . اگر $\lambda_2^{-1} = \lambda_1, \lambda_3 = 1$ باشد در اینصورت سطح جسم عمود بر محور (*3*) ثابت باقی می ماند و ایـن نـوع تغییـــــر شـــــکل را *Shear Pure* مـــــی نـــــامیم . از روابــــط *(6.42*)و بـــــا اســـــتفاده از (*6.40*) و *(6.41*)داریم .

$$\lambda_3 = 1, \lambda_1 = \lambda_2 \Leftrightarrow \textbf{\textit{Pure Shenr}}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \Leftrightarrow$ ***Uniform Dilutation*** **در تمام جهات بطور یکنواخت در فشار یا کشش**

$\lambda_2 = \lambda_3 \Leftrightarrow$

$$F = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix}$$

$$F_{iR} = \frac{\partial x_i}{\partial X_R} \Rightarrow F_{11} = \lambda_1, F_{22} = \lambda_2, F_{33} = \lambda_3$$

$$F = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}$$

$$C = F^T.F = \begin{vmatrix} \lambda^2{}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = B \qquad\qquad B = F.F^T$$

$$2\gamma_{RS} = C - I = \begin{vmatrix} \lambda_1^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 - 1 \end{vmatrix}$$

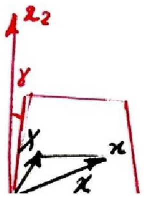
$$B^{-1} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_3^2} \end{vmatrix}$$

$$2\eta_{ij} = \begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{\lambda_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{\lambda_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{\lambda_3^2} \end{vmatrix} \qquad (6.43)$$

برش ساده :

در این حالت صفحات موازی نسبت به یکدیگر به طور موازی حرکت می کنند . برش ساده در شکل زیر نشان داده



شده است .

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + X_2 Tan\gamma \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases} \qquad (6.44)$$

$$tan\gamma = \frac{x_1}{x_2}$$

در این حالت x_1 جهت برش می باشد و زاویه γ اندازه برش را مشخص می کند . در حالت برش ساده حجم ثابت می ماند و برای تغییر شکل (*6.44*) از روابط (*6.40*) و (*6.41*) داریم که :

$$F_{iR} = \frac{\partial x_i}{\partial X_R}$$

$$F = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & Tan\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

روش کوتاهتر برای محاسبه درایه های تنسور B به شکل زیر است :

$$\begin{cases} B_{ij}^{-1} = \frac{\partial X_R}{\partial x_i} = \frac{\partial X_R}{\partial x_j} = \frac{\partial X_R}{\partial x_1} . \frac{\partial X_R}{\partial x_1} = \frac{\partial X_1}{\partial x_1}\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_1}\frac{\partial X_2}{\partial x_1} + \frac{\partial X_3}{\partial x_1}\frac{\partial X_3}{\partial x_1} \\ if = \begin{cases} i = 1 \\ j = 1 \end{cases} \\ X_1 = x_1 - x_2 \, tan\gamma \\ B_{12}^{-1} = - tan\gamma \end{cases}$$

تغییر مکان هموژن :

تغییر مکانهایی که از رابطه زیر پیروی می کنند وقتی که A_{iR}, C_i ثابت و یا توابعی از زمان t هستند را تغییر مکان هموژن می گوییم .

$$x = C + A.X$$
$$x_i = C_i + A_{ij} X_j \qquad (6.46)$$

در تغییر مکان قبلی حالت به خصوصی از تغییر مکان هموژن هستند . در تغییر مکان هموژن تغییر طولهای نسبی مستقل از X_R و x_i می باشند . این نوع تغییر مکانها دارای خواص زیر می باشند :

1) صفحاتی که در *Ref Conf* موازی هستند بطور موازی تغییر شکل می دهند .

2) خطوطی که *Ref Conf* مستقیم هستند بعد از تغییر شکل سیستم مستقیم باقی می مانند .

تغییر شکل نسبی سطح : *Plane Strian*

این تغییر شکل از رابطه زیر بدست می آید :

$$\begin{cases} x_1 = X_1(X_1, X_2) \\ x_2 = X_2(X_1, X_2) \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

مختصات $x_3 = X_3 = Cte$ **صفحات تغییر شکل نامیده می شوند . طبق این تعریف سطر و ستون** η, γ **همگی برابر صفرند .**

پیچش خالص :

برای نشان دادن این نوع تغییر شکل مناسـبتر اسـت کـه از مختصـات اسـتوانه ای R, Φ, Z **در *Ref Cenf* و از مختصات** r, Φ, δ **در *Spatial Coo* استفاده شود .**

در اینصورت داریم که :

$$Re\ fAnf = \begin{cases} R = (X_1^2 + X_2^2)^{1/2} \\ \Phi = tan^{-1}\left(\dfrac{X_2}{X_1}\right) \\ Z = X_3 \end{cases}$$

$$SpatialCoo \begin{cases} r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \\ \Phi = tan^{-1}\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right) \\ Z = X_3 \end{cases}$$

در اینصورت پیچش خالص توسط روابط زیر مشخص می شود .

$r=R$

$Z=Z$

$$\Phi = \Phi + \Psi Z$$

که در این رابطه Ψ **یک ثابت است . در این نوع تغییر مکان ضخامت عمود بر عمود Z حول محور Z می چرخنـد . پیچش یک میله استوانه ای حول محور یک پیچش خالص است . حجم در این نوع تغییر شکل ثابت مانده و تغییر**

شکل هموژن نمی باشد .

از آنجائیکه محور Z ثابت می ماند پیچش خالص است .

$$e = M_{pi}\bar{e}_p$$

$$e_j = M_{qj}\bar{e}_q$$

$$\Rightarrow \vec{\Phi} = \Phi_{ij}e_ie_j = \bar{\Phi}_{qp}\bar{C}_P\bar{e}_q$$

$$\vec{\nabla} = e_i\frac{\partial}{\partial j_i} \Rightarrow d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial j_i}dy_i \rightarrow d\Phi = dr\nabla\vec{\Phi}$$

$$\vec{\nabla} = e_ie_j \qquad e_i = M_{ij}\bar{e}_j \qquad y_i = M_{ij}\bar{y}_j \rightarrow \bar{\nabla} = \bar{e}_j\frac{\partial}{\partial\bar{j}_j}$$

$$\partial y_i = M_{ij}\partial\bar{y}_j$$

تغییر طولهای نسبی کوچک :

Infinitensinal Strain :

در خیلی از موارد تحت نیروهای نه چندان زیاد، فقط تغییر طولهای نسبی کوچک انجام می شود . مانند اکثر فلزات، چوب و ... در عمل فرض کوچک بودن تغییر طول نسبی باعث ساده تر شدن روابط خواهد شد . تقریبی را که قادر معادلات ایجاد می کنیم این است که در مؤلفه های تنسور گرادیان تغییر مکان نسبت به واحد کوچک می باشد . در نتیجه داریم :

$$\left|\frac{\partial u_i}{\partial X_R}\right| << 1 \qquad i, R = 1,2,3 \qquad (6.50)$$

و از ترمهای درجه دوم و ضرب آنها صرفنظر می کنیم . حال چون :

$$u_i = x_i - X_i$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} = T - F^{-1}$$

با استفاده از بسط داریم که :

$$I - F^{-1} = I - \{I + (F - I)\}^{-1} = I - \{I - (F - I) + (F - I)^2 - (F.I)^3 + \ldots\}$$

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = \sum(-1)^n x^n \qquad ,|x| < 1$$

$$F - I < I$$

و یا اینکه داریم :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = (F-I) - (F-I)^2 + (F-I)^3$$

و چون $F - I = \frac{\partial u_i}{\partial X_R}$ **با استفاده از رابطه قبلی داریم :**

$$* = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_i}{\partial X_R}\frac{\partial u_R}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i}{\partial X_R}\frac{\partial u_R}{\partial X_S}\frac{\partial u_S}{\partial X_j} \ldots \qquad (6.51)$$

در نتیجه اگر از ترمهای درجه دوم صرفنظر کنیم، خواهیم داشت :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

فرمول فوق تا زمانی قابل قبول است که در مرحله8 لاستیک باشیم .

یا می توان گرادیان تنسور تغییر مکان را با مشتق گیری نسبت به X یا x بدست آورد . با استفاده از این تقریب و روابط (6.39),(6.38) داریم که :

$$\gamma_{ij} = \eta_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad (6.52)$$

تنسور E را که مؤلفه هایش E_{ij} است، تنسور تغییر طول نسبی *Infinitesinal* می گوییم .

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$E_{ij} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) \end{vmatrix}$$

در تغییر شکل کوچک از E و در تغییر شکل بزرگ از γ, η استفاده می کنیم.

با استفاده از رابطه (6.26)داریم که :

$$E = \frac{1}{2}(F + F^T) - I \qquad (6.54)$$

رابطه بالا در محدوده تغییر شکلهای نسبی کوچک دقیق می باشد و چون F یک تنسور درجه دو است E نیز یک تنسور درجه دوم خواهد بود و مسلماً متقارن نیز می باشد . ولی E یک اشکال عمده دارد و آن این است که بـرای حرکت صلب جسم صفر نمی باشد . بطور مثال چرخش یک جسم صلب را حول محور 3 در نظر بگیرید . از رابطـه

(6.3) تنسور E از رابطه زیر بدست می آید :

$$u_1 = x_1 - X_1 = ? \rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = ?$$

$$E_{ij} = \begin{vmatrix} -(1-Cos\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & -(1-Cos\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

در نتیجه E_{22}, E_{11} مخالف صفرند ولی هرگاه α کوچک باشد، با تقریب خوبی تنسور گرادیان تغییر مکان صفر خواهد شد .

تعبیر هندسی ترمهای E_{ij} :

المان خط P_0Q_0 در اول به طول δL بوده و موازی محور X_1 است . پس از تعبیر شکل این المان در وضعیت PQ قرار می گیرد . با استفاده از شکل داریم که :

$$u_1(X_1+\delta L, X_2, X_3) - u_1(X_1, X_2, X_3) = \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\delta L \qquad (6.55)$$

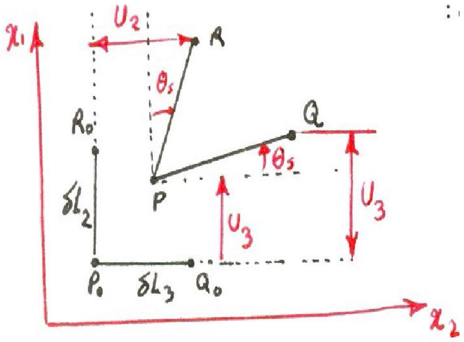
$$\overline{P_0Q_0} = \delta L, \overline{PQ} = X_1 + \delta L + u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\partial L - X_1 - u_1$$

$$\overline{PQ} - \overline{P_0Q_0} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\partial L$$

در نتیجه برای E_{11} (ازدیاد طول در واحد طول اولیه المان خطی است که موازی محور x_1 بوده است . داریم :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = E_{11} \Rightarrow E_{11} = \frac{\overline{PQ} - \overline{P_0Q_0}}{\delta L}$$

تعبیر هندسی مشابهی برای E_{23} مطابق شکل زیر می توان انجام داد :



$$\theta_1 \cong \frac{\partial u_3}{\partial x_2}$$

$$\theta_2 \cong \frac{\partial u_2}{\partial x_3}$$

$$\theta_1 + \theta_2 = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) = 2E_{23}$$

تعبیر هندسی E_{23} عبارت است از کم شدن زاویه بین دو المان خط $P_0R_0 = P_0Q_0$ که اول *90* درجه بودند .

معادلات سازگاری : *Compatibility Equation*

چون شش مؤلفه تغییر طول نسبی از سه مؤلفه تغییر مکان بدست می آیند نمی توانند از هـم مسـتقل باشـند و رابطه بین آنها با حذف کردن u_1 بین آنها بدست می آید . با جانشین کردن مستقیم روابـط از *(6.33*)دیـده مـی شود که E_{ij} باید شرایط همسازی (سازگاری) تغییر طولهای نسبی را ارضا نماید .

$$K_1 = 2\frac{\partial^2 E_{23}}{\partial X_2 \partial X_3} - \left(\frac{\partial^2 E_{22}}{\partial X_3^2} + \frac{\partial^2 E_{33}}{\partial X_2^2} \right) = 0 \qquad (6.57)$$

$$L_1 = \frac{\partial^2 E_{11}}{\partial X_2 \partial X_3} - \frac{\partial}{\partial X_1}\left(\frac{\partial^2 E_{23}}{\partial X_1} - \frac{\partial^2 E_{31}}{\partial X_2} - \frac{\partial^2 E_{12}}{\partial X_3} \right) = 0 \qquad (6.58)$$

چهار رابطه دیگر با تغییر دادن سیکلی ***Cyclic Permutatic*** اندیسهای ***3,2,1*** عوض می شود . دوباره دیده مـی شود که این شش رابطه نیز از یکدیگر مستقل نیستند و داریم :

$$\frac{\partial v_1}{\partial X_1} = \frac{\partial L_2}{\partial X_3} + \frac{\partial L_3}{\partial X_3}$$

و دو روابط دیگر با تغییر دادن سیکلی اندیسهای ***3,2,1*** حاصل می شوند .

مؤلفه های تغییر طول نسبی $\gamma_{RS}, \eta_{ij}, Finite$ نیز باید شرایط سازگاری را ارضا کنند ولی روابط حاصل پیچیده تـر خواهد بود .

H.W : معادلات سازگاری را برای γ_{RS}, η_{ij} بدست آورید .

صفحه ***42*** و ***43*** حل شود به ***Chapter 4***

Chapter 5 Chapter 8 6 : 1 – 11

چرخش کوچک :

Infini Tesimel Satatian :

در روابط(***6.10***)و ***(6.9)*** چرخش ***Finite*** یا محدود جسم صلب باندازه زاویه α حل محور ***n*** داده شده اسـت . در صورتیکه چرخش کوچک باشد : $Cos\alpha = 1, Sin\alpha = \alpha$ و رابطه (***6.10***) عبارت خواهد شد از :

$$u_i = x_i - X_i = \alpha e_{ijR} R n_j X_R$$

و بنابراین

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_R}=\alpha_{ijR}n_j$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial X_1}=0 \qquad \frac{\partial u_1}{\partial X_2}=-\alpha n_3,\frac{\partial u_1}{\partial X_3}=\alpha n_2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial X_R}=\begin{vmatrix} 0 & -\alpha n_3 & \alpha n_2 \\ \alpha n_3 & 0 & -\alpha n_1 \\ -\alpha n_2 & \alpha n_1 & 0 \end{vmatrix} \qquad (6.60)$$

به تنسور فوق تنسور تغییر طول نسبی در اثر چرخش کوچک حول محور x می گوییم . بطوریکه دیده مـی شـود تنسور فوق پار متقارن (*Antisymmetric*) حال حالت عمومی حرکت *In Finitesinal* سند را در نظر بگیرید که تنسور گرادیان تغییر مکان F است . تنسور چرخش *Infinitesinal rotation* (تنسور چــرخش محــدود را کــه مؤلفه هایش Ω_{ij} است به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\Omega=\frac{1}{2}(F-F^T)$$

$$\Omega_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\Omega_{ij}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial u_1}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_3}{\partial x_3} & 0 \end{vmatrix} \qquad (6.61)$$

در نتیجه تنسور Ω یک تنسور مرتبه دوم پاد متقارن است .

تنسور *F-I* را می توان به دو جزء متقارن و ضد متقارن تقسیم نمود .

$$F-I=\frac{1}{2}(F+F^T)-I+\frac{1}{2}(F-F^T)=E+\Omega \qquad (6.62)$$

در نتیجه حرکت *Infintesime* به دو جزء E که تغییر شکل یافته *Infinitesimal Deformation* و چرخش Ω تجزیه نمودیم . بردار چرخش (*Infinitesmial Rotation Vector*) W را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\vec{W}=\frac{1}{2}Curl \quad u \qquad (6.63)$$

$$W_i=\frac{1}{2}e_{ijk}\frac{\partial uk}{\partial x_j}$$

با استفاده از *(6.61)* دیده می شود که :

$$\Omega_{jk} = -e_{ijk} W_i \qquad (6.64)$$

رابطه بین بردار چرخش تنسور و چرخش »

اثبات :

$$\Omega_{jk} = \bar{e}_{ijk} (\frac{1}{2} e_{ist} \frac{\partial u_t}{\partial X_S} = -\frac{1}{2} e_{ijk} e_{ist} \frac{\partial u_t}{\partial X_S}$$

$$e_{ijk} e_{ist} = \delta_{js}\delta_{kt} - \delta_{jt}\delta_{ks}$$

$$\Omega_{jk} = \frac{1}{2} (\frac{\partial u_j}{\partial X_k} - \frac{\partial u_k}{\partial X_j})$$

برای w_i **نیاز داریم :**

$$w_i = -\frac{1}{2} e_{ijk} \Omega_{jk} \qquad \mathbf{(6.65)}$$

اثبات :*H.W*

نرخ تغییرات تنسور تغییر طول نسبی :

The Sate of Deformation Tensor :

در خیلی از مسایل مکانیک محیط های پیوسته مقدار تغییر مکان مهم نمی باشد، بلکه آنچه مهم است نرخ ایـن تغییرات می باشد . به طور مثال در سیالات، سرعت سیال مهم است، در اینجا نرخ تغییر طول المان خط را بررسی می کنیم که همان نرخ تغییرات λ **برای یک المان خط است .**

رابطه *(6.15)* **عبارت است از :**

$$\lambda^2 = A_S A_T \frac{\partial x_i}{\partial x_s} \frac{\partial x_i}{\partial x_T} \qquad (6.66)$$

که λ **را برحسب** X_R **و کسینوسهای هادی** A_R **را در *Ref Conf* می دهد .**

هرگاه از رابطه بالا نسبت به زمان مشتق بگیریم با توجه به اینکه X_R **ثابت است داریم :**

$$2\lambda \frac{d\lambda}{dt} = A_S A_T \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_s} \frac{\partial v_i}{\partial x_T} + \frac{\partial x_i}{\partial x_T} \frac{\partial v_i}{\partial x_s} \right) \qquad (6.67)$$

با استفاده از رابطه زیر :

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_t}=\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x_t}$$

رابطه(*6.67*)عبارت خواهد شد از :

$$\lambda\frac{d\lambda}{dt}=\frac{1}{2}A_S A_T\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_s}\frac{\partial x_j}{\partial x_T}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial x_i}{\partial x_2}\frac{\partial x_j}{\partial y_2}\frac{\partial v_1}{\partial x_j}\right)$$

هرگاه جای اندیسهای ***dummy*** را با هم عوض کنیم، داریم :

اثبات *HW* :

$$\lambda\frac{d\lambda}{dt}=\frac{1}{2}A_S A_T\frac{\partial x_i}{\partial x_s}\frac{\partial x_j}{\partial x_T}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right)\qquad(6.68)$$

که در رابطه بالا $\lambda^{-1}\frac{d\lambda}{dt}$ عبارت است از نرخ تغییر طول در واحد طــولی کنــونی المــان طــول بــا جهــت کنــونی کسینوسهای هادی a_i .

برای هر جهت بردار *a* این نرخ تغییر طول با استفاده از *(6.68*)بصورت :

$$\lambda^{-1}\frac{d\lambda}{dt}=a_i a_j D_{ij}$$

است که در آن $D_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right)$. *(6.69)*

که D_{ij} مولفه های تنسور *D* هستند که به آن تنسور تغییر طول *D*می گوییم به طوریکه دیده می شود رابطه بــالا برحسب مؤلفه های سرعت خطی است و در بدست آوردن آن هیچ تقریبی به کار برده نشده اســت . همچنــین در روابط (*6.68*)دیده می شود که تعمیرات *C.Conf* هستند . تنسور *D*، درجه دوم و متقارن بوده و خواص آن شبیه تنسور *E* می باشد . مؤلفه هی D_{ij} روابط سازگاری را ارضا می نمایند که شبیه *(6.57*) تا (*6.59)* است که بوســیله مؤلفه های E_{ij} نوشته شده اند . تنها تفاوت این است که مشتقات باید بر حسب x_i *(Spatialcor)* گرفته شوند .

تنسور *P* با تنسور E از این لحاظ اختلاف دارند که *P* اندازه گیر دقیق نرخ تغییر مکــان اســت . در صــورتیکه *E* اندازه گیر دقیق تغییر مکان نمی باشد .

گرادیان سرعت و تنسور چرخش :*The Velocity Gradiant And Spin Tensorn*

تنســور نــرخ تغییــر شــکل *P* را مــی تــوان جــزء متقــارن گرادیــان ســرعت «*L*» در نظــر گرفــت کــه

مؤلفه های آن L_{ij} بصورت زیر است .

$$L_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \qquad (6.70)$$

قسمت پارمتقارن L را با W نشان می دهیم که مؤلفه های آن W_{ij} بصورت زیر می باشند :

$$W_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right) \qquad (6.71)$$

$$L = D + W, D = \frac{1}{2}(L + L^T), W = \frac{1}{2}(L - L^T) \qquad (6.22)$$

تنسور W را تنسور چرخش، $Spin$ یا $Vorticity$ می گویند و دارای خواص مشابه تنسور چرخش ($Inifintisimal\ ratation$) است با این تفاوت که هیچ تعبیر در بدست آوردن آن وجود ندارد و اندازه گیر نرخ چرخش المان است .

رابطه (6.72)تنسور L را به دو جزء تنسور نرخ تغییر شکل D و چرخش W تقسیم نموده است. چرخش را می توان بوسیله بردار $V(Vorticity)$ تعریف نمود که بوسیله رابطه زیر تعریف می شود :

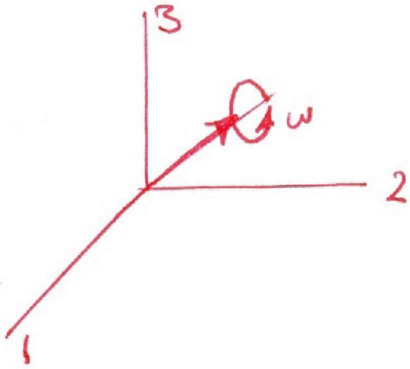
$$V = CurlV$$
$$V_i = e_{ijk}\frac{\partial_{vk}}{\partial_{xj}} \qquad (6.73)$$

با روابط مشابه (6.64) , (6.65) می توان W,V را به هم مربوط نمود .

$$W_{ik} = -{}^1\!/_2\, e_{ijk} V_i$$
$$V_i = -e_{ijk} W_{jk} \qquad (6.74)$$

در حرکت یک ذره با سرعت زاویه ای W حول محوری که از مبدأ مختصات با بردار واحد n می گذرد وسرعت عبارت است از :

$$V = w.n * x$$
$$x = x_1 i + x_2 j + x_3 k$$
$$V_1 = e_{ijk} w n_j x_k \qquad (6.75)$$
$$L_{ik} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = e_{ijk} w n_j$$
$$L_{ik} = W_{ik} = W\begin{vmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{vmatrix} \qquad , D_{ik} = 0$$



در نتیجه تنسور D در چرخش صلب جسم برابر صفر خواهد بود . به غیر از این اگر حرکت کلی جسم صلب را با صلب (6.75) جمع کنیم، D حاصل همان D حرکت کلی جسم خواهد بود و یا اینکه D اندازه گیرند برای نرخ تغییر شکل می باشد . مشتق زمانی حاد (*Material Timderivator*) تنسور F به صورت زیر است :

$$\frac{D}{Dt}(F_{iR}) = \frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_R}\right) = \frac{\partial v_i}{\partial X_R} = \frac{\partial v_i}{\partial X_j}\frac{\partial x_j}{\partial X_R} = L_{ij}F_{jR}$$

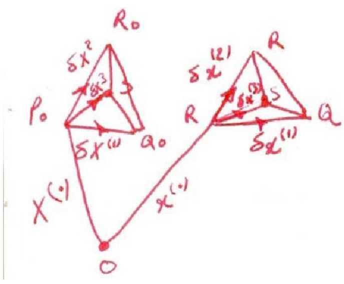
$$\Rightarrow \frac{DF}{Dt} = L.F \Rightarrow L = \frac{DF}{Dt}.F^{-1} \qquad (6.76)$$

در حالتیکه گرادیان تغییر مکان کوچک است خواهیم داشت :

$$F^{-1} \cong I, L \cong \frac{DF}{Dt}, \qquad D \approx \frac{DE}{Dt} \qquad ,V \approx 2\frac{DW}{Dt}, W \approx \frac{D\Omega}{DT} \qquad (6.77)$$

قوانین بقاء :

بسیاری از قوانین فیزیک کلاسیک را می توان با استفاده از این اصل که کمیتی مثل جرم، بار الکتریکی، مومتنم و یا سایر اینها باید بدون تغییر باقی بماند بدست آورد . توابع از این نوع بستگی به ماده ندارند و روابط ریاضی حاصل از این قوانین باید ارضا شود .



تغییر شکل المان حجم :

المان چهار وجهی بارئوس $P.Q.R.S$ را در نظر بگیرید . بردارهای موقعیت $X^{(0)}, X^{(0)} + \partial X^{(1)}, X^{(0)} + \partial X^{2}, X^{(0)} + \partial X^{3}$ در نظر بگیرید . چون مختصات در *nf* می توان از اندیس R نیز استفاده کرد لذا داریم :

$$X_R^{(0)}, X_R^{(0)} + \partial X_R^{(1)}, X_R^{(0)} + \partial X_R^{(2)}, X_R^{(0)} + \partial X_R^{(3)} \qquad (7.1)$$

حجم المان $P_0Q_0R_0S_0$ عبارت است از :

$$\delta V = {}^{1}\!/_{6}\,\delta X^{(1)}(\delta X^{(2)} * \delta X^{(3)})$$

و به شکل اندیسی عبارت خواهد شد از :

$$\delta V=\frac{1}{6}e_{RST} \qquad \delta X_R^{(1)}\delta X_S^{(7)}\delta X_T^{(3)} \qquad (7.2)$$

$$\delta X^1=\delta X_r^{(1)}e_r \qquad A=\delta X^2 * \delta X^3=\delta X_T^2\delta X_S^3 \qquad e_{TSK}\,e_k$$

$$\delta X^2=\delta X_t^{(2)}e_t$$

$$\delta X^3=\delta X_s^{(3)}e_s \qquad \delta X^{(1)} * A=\delta X_r^{(1)}e_r\delta X_T^{(2)}\delta X_S^{(3)}e_{TSK}\,e_k-\delta X_r^{(1)}\delta X_s^{(2)}\delta X_t^{(3)}e_{rst}$$

بعد از تغییر شکل نقاط $P_0Q_0R_0S_0$ **به نقاط** $PQRS$ **با بردار موقعیت** $X^{(0)}, X^{(0)}+\partial X^{(1)}, X^{(0)}+\partial X^2, X^{(0)}+\partial X^3$ **تغییر مکان می دهد .**

حجم المان $PQRS$ **عبارت است از :**

$$\delta V=\frac{1}{6}\delta x^{(1)}.(\delta x^{(2)} * \delta x^{(3)})$$

فرم اندیسی :

$$SV=\frac{1}{6}e_{ijk}\delta x_i^{(1)}\delta x_j^{(2)}\delta x_k^{(3)}$$

هرگاه تغییر شکل بوسیله رابطه $x_i=x_i(X_R,t)$ **داده شده باشد، داریم :**

$$\delta x^{(1)}=\frac{\partial x_i}{\partial X_R}\delta X_R^{(1)}+O(\delta X_R^{(1)})^2 \qquad (7.3)$$

به طریقه مشابه می توان روابط را برای δX_i^2 **و** δX_i^3 **نیز نوشت، در نتیجه حجم المان** $PQRS$ **خواهد شد :**

$$\delta V=\frac{1}{6}e_{ijk}\frac{\partial x_i}{\partial X_R}\frac{\partial x_j}{\partial X_S}\frac{\partial x_K}{\partial X_T}\partial X_R^{(1)}\partial X_S^{(2)}\partial X_T^{(3)}$$

با استفاده از رابطه (2.22) $\left[e_{mpq}\det A=e_{ijk}A_{im}A_{jp}A_{kq}\right]$ **داریم**

ژاکوبین $$\frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(X_1,X_2,X_3)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3}\\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3}\\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3}\end{vmatrix}=\frac{\delta v}{\delta V}$$

هرگاه حجم المان اولیه به سمت صفر میل کند با استفاده از (7.4) **داریم که :**

$$\frac{dv}{dv}=\frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(X_1,X_2,X_3)} \qquad (7.5)$$

با استفاده از رابطه (6.18)دیده می شود که ژاکوبین عبارتست از دترمینان تنسور گرادیـان تغییـر مکـان F . در نتیجه رابطه (7.5) به صورت زیر است :

$$\frac{dv}{dV}=\det F \qquad (7.6)$$

اگر ماده غیرقابل تراکم باشد :

$$\frac{dv}{DV}=\det F=1$$

اگر $\det F$ را بسط دهیم داریم :

$$\det F=\det(\delta iR\frac{\partial u_i}{\partial X_R})=1+\frac{\partial u_i}{\partial X_i}+O(\frac{\partial u_i}{\partial X_R})^2$$

در صورتیکه تغییر طولها کوچک باشند و یا گرادیان تغییر مکان کوچک باشد داریم :

$$\frac{dv}{dV}=\det F\cong 1+\frac{\partial u_i}{\partial X_R}=1+E_{ii}=j \qquad (7.7)$$

مقدار E_{ii} را *Delatotion* گوییم و با Δ نمایش می دهیم و از(7.7)دیده می شود که *Tensor* تنسور تغییر طول نسبی *Infinitesimal* مساوی Δ است .

$$\Delta=E_{ii}=E_{11}+E_{22}+E_{33}=tr(E)$$

برای تغییر مکانهای کوچک Δ همان اندازه گیر تغییر حجم می باشد .

قانون بقای ماده : *Conservotion Of Mass Lagrangien Fam*

فرم لاگرانژین :

فرض کنید که داده موجود در حجم $P_0Q_0R_0S_0$ دارای جرمی برابر δ_m در *Ref Conf* باشد بقای ماده حکـم مـی کند که جرم ماده در المان حجم در حین تغییر شکل ثابت باشد . اگـر دانسـیته مـاده در *Ref.conf* ، $\rho_\circ$ ودر *C.conf* ، ρ باشد داریم :

$$\int_0 = \underset{\delta V \to 0}{Lim} \frac{\delta m}{\delta V} \qquad \int = \underset{\delta v \to 0}{Lim} \frac{\delta m}{\delta v}$$

$$\Rightarrow \frac{\int 0}{\int} = Lim \frac{\delta v}{\delta V} = \frac{dv}{dV} = \det F \ (7.8)$$

معادله (7.8) قانون بقای ماده را برحسب گرادیان تغییر مکان می دهد . در خیلی از موارد مناسبت تر است که این قانون را برحسب مؤلفه های سرعت بنویسیم . (فرم اویلری)

برای این کار منطقه دلخواه R را که دارای سطح S می باشد، و در *Ref Conf* ثابت می باشد را در نظر می گیریم .

بقای ماده – فرم اویلری *Conservation Of Mass – Eulerian Form*

قانون بقای ماده در فرم اولرین می گوید که نرخ افزایش ماده در حجم R $(\iiint \frac{Di}{Dt} dv)$ برابر است با نرخ جریان ماده – به داخل حجم از سطح S نرخ جریان ماده از المان سطح ds وقتی که n برداریکه عمود بر سطح به سمت خارج است، عبارت است از :

$$N - \rho V n ds n$$

و علامت منفی بدین علت است که بردار n به سمت خارج حجم باشد .

بقای ماده حکم می کند که داشته باشیم :

$$\iiint_R \frac{\partial P}{\partial t} dv = -\int e.v.nds \qquad (7.9)$$

با ساتفاده از قضیه گرین انتگرال روی سطح را تبدیل به انتگرال داخل حجم می کنیم

$$\iiint_R (\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho v))dv = 0 \qquad (7.10)$$

چون R اختیاری است رابطه فوق به شکل زیر در می آید :

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + div(\rho V) = 0 \qquad (7.11)$$

Continuity Equation

معادله بالا به رابطه (معادله) پیوستگی نیز مشهور است و آنرا به صورتهای زیر می توان نوشت :

$$div(V\Phi) = \Phi Liv V + V grad \Phi$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho divV+V.grad\rho=0 \qquad (7.12)$$

و به شکل اندیسی داریم :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\frac{\delta V_i}{\delta x_i}+V_i\frac{\delta\rho}{\delta x_i}=0 \qquad (7.13)$$

اگر تابع چگالی تابعی از زمان و مکان باشد داریم :

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\frac{\partial V_i}{\partial x_i}=0$$

$$\rho=\rho(t,x_1(t))$$

$$\frac{D\rho}{Dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+V_1\frac{\partial\rho}{\partial x_i}$$

در نتیجه داریم :

در صورتیکه ماده غیرقابل تراکم باشد . $\frac{D\rho}{Dt}=0$ **می شود و از *(7.14)* دیده می شود که شـرط تـراکم ناپـذیری معادل هر یک از روابط زیر است :**

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i}=0 \quad or \quad divV=0 \quad Or \quad D_{ii}=0 \quad orTraceD=0 \qquad (7.15)$$

مشتق زمانی مادی انتگرال حجم ***The Matherial Time Dervective Ofvolume integraf Inteagh***

فـرض کنیـد کـه Φ یـک کمیـت فیزیکـی مثـل جـرم و یـا انـرژی اسـت کـه مربـوط بـه ذرات جسـم می شود و فرض کنید که Φ مقدار Φ در واحد جرم است . مقدار $\Phi=\frac{\Phi}{M}$ و مقدار Φ در واحد حجم عبارت است از $\rho\Phi$ و در زمان t عبارت است از :

$$\iiint_R \rho\Phi\, dv \qquad (7.16)$$

در فاصله زمانی کوچک Δt مقدار Φ در یک نقطه در منقطه R تغییر خواهد نمود و مقداری ذرات از سطح جسـم عبور نموده و Φ را انتقال خواهند داد .

نرخ تغییرات Φ مربوط به ذرات موجود در منطقه R در زمان t را مشتق زمانی انتگرال *(7.16)* می نامیم .

$$\frac{\Delta}{\Delta t}\iiint_R \Phi\rho dv \qquad (7.17)$$

نرخ افزایش Φ در R برابر است با جمع نرخ افزایش Φ مربوط به ذراتی که در داخل وجود دارند و نرخ Φ مربوط به ذرات ورودی به عبارت دیگر .

$$\frac{\Delta}{\Delta t}\iiint_R \Phi \rho dv \qquad (7.17)$$

نرخ افزایش Φ در R برابر است با جمع نرخ افزایش Φ مربوط به ذراتی که در داخل وجود دارند و نرخ Φ مربوط به ذرات ورودی به عبارت دیگر .

$$\frac{\Delta}{\Delta t}\iiint_R \rho\Phi dv = \iiint_R \frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t}dv + \iint_S \Phi\rho vnds$$

با استفاده از قضیه گوس انتگرال روی سطح را روی جمع می بریم و داریم :

$$\frac{\Delta}{\Delta t}\iiint_R \rho\Phi dv = \iiint \frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} + div(\Phi\rho v)\}dv \qquad (7.18)$$

با استفاده از رابطه $\otimes$ انتگرال سمت راست برابر است با :

$$= \iiint \left\{ \Phi\left[\frac{\partial p}{\partial t} + div(\rho V)\right] + \rho\left[\rho\frac{\partial\Phi}{ot} + Vgread\Phi\right]\right\}dv$$

$$\Rightarrow \frac{D}{Dt}\iiint_R \rho\Phi dv = \iiint_R \frac{D\Phi}{Dt}\rho dv \qquad (7.20)$$

قانون بقای اندازه حرکت خطی : *ConservationOf Liner Momentum*

قانون بقای مومنتوم خطی برای ذره با جرم m می گوید که نرخ تغییرات مومنتوم خطی معادل با نیروی P است که به ذره وارد می شود و به فرم ریاضی :

$$\frac{D}{Dt}(mV) = P$$

برای محیط پیوسته این قانون بصورت زیر در می آید .

نرخ تغییر مومنتوم خطی ذراتی که در یک لحظه در منطقه ثابت R قرار دارند متناسب با نیروی وارد بـر مـاده در داخل منطقه R می شود . این نیروها عبارتند از نیروهای جسمی که بر واحد حجـم وارد مـی شـوند و نیروهـای ترکشن سطحی که به سطح جسم وارد می شوند در نتیجه رابطه بصورت زیر در می آید .

$$\frac{D}{Dt}\iiint \rho v dv = \iiint_R \rho b dv + \iint_S t^n ds \qquad (7.21)$$

شکل مؤلفه ای :

$$\frac{D}{Dt}\iiint \rho v_i dv = \iiint \rho b_i dv + \iint T_{ij} n_j ds$$

با استفاده از *(7.20)* هرگاه به جای Φ مؤلفه های سرعت یا Φ_j را قرار دهیم با استفاده از قضیه گــوس خــواهیم داشت .

$$\iiint \left\{ \rho \frac{DV_i}{Dt} - \rho b_i - \frac{\partial T_{ji}}{\partial_j} \right\} dv = 0$$

$$\frac{Dvi}{Dt} = F_i \qquad \Rightarrow \frac{\partial T_{ij}}{\partial X_j} + \rho b_j + \rho f_j \qquad (7.22)$$

اصل بقای مومنتوم زاویه ای : ***Conservation of Angulart Momentum :***

برای یک ذره اصل بقای مونتوم زاویه ای بصورت زیر است :

$$\frac{D}{Dt}\{m(X * V\} = X * P$$

که P نیروی وارد بر ذره و X بردار موقعیت ذره از یک مبدأ اختیاری و M جرم ذره است برای محیطهای پیوســته مشابه به *(7.21)* داریم که :

$$\frac{D}{Dt}\iiint \rho X * V dv = \iiint_R \rho X * b dv \iint_S X * t^n \quad ds$$

و شکل مؤلفه ای :

$$\frac{D}{Dt}\iiint \rho e_{ijk} x_j V_K dv = \iiint_R \rho e_{ijk} x_j b_k dv + \iint_S e_{ijk} x_j T_{PK} n_p ds \qquad (7.23)$$

با استفاده از *(7.20)* داریم :

$$\iiint \rho e_{ijk} \frac{D}{Dt}(x_j V_k) dv = \iiint_R e_{ijk} x_j b_k dv + \iint_S e_{ijk} x_j T_{PK} n_p ds$$

و یا اینکه :

$$e_{ijk} \rho \frac{D}{Dt}(x_j v_k) = e_{ijk}\left\{ \rho x_j b_k + \frac{\partial}{\partial xp}(x_J T_{pk} \right\} \qquad (7.24)$$

$$\frac{D}{Dt}(x_j V_K) = X_J f_k + V_j V_K$$

$$\frac{\partial}{\partial X_P}(X_j T_{PK}) = T_{jk} + x_j \frac{\partial T_{pk}}{\partial X_p}$$

در نتیجه رابطه *(7.24)* بصورت زیر در می آید :

$$e_{ijk}\left\{T_{jk}+x_j\left(\frac{\partial T_{pk}}{\partial Xp}+\rho b_k-\rho f_k\right)-\rho v_j v_k\right\}=0$$

$$\Rightarrow e_{ijk}T_{jk}=0\Rightarrow T_{jk}=T_{kj}$$

قانون بقای انرژی :

Gensernation Of Energy :

انرژی سینیتیک K در ماده ای که منطقه ثابت R را اشغال نموده است بوسیله عبارت زیر بیان می شود :

$$K=\iiint\frac{1}{2}\rho v_i v_i dv \qquad (7.27)$$

انرژی سینیتیک یک محیط پیوسته قسمتی از انرژی آن است و بقیه انرژی آن داخلی زاویه می شود . *Ienteral energy* . آنرا با E نمایش می دهیم که بوسیله چگالی انرژی داخلی از رابطه زیر حاصل می شود . (*Internal Energy*) انرژی داخلی همان انرژی کرنشی ذخیره شده در جسم می باشد .

$$E=\iint\rho e dv \qquad (7.28)$$

اصل بقای انرژی می گوید که مشتق زمانی $K+E$ برابر است با جمع نرخ کار مکانیکی انجام شده روی جسم توسط نیروهای جسمی و سطحی و نرخ ورود سایر انرژیها به جسم . سایر انواع انرژی می توانند بصورت انرژی مغناطیسی انرژی حاصل از تشعشع و سایرین باشند . در اینجا فقط انرژی حرارتی مدنظر است . در صورتیکه q_i مؤلفه بردار انرژی حرارتی و n_i مؤلفه بردار یکه عمود بر سطح باشد، در اینصورت $q_0 n$ مقدار حرارتی است از واحد سطح جسم به آن وارد می شود و رابطه بقای انرژی عبارت خواهد بود :

$$\frac{D}{Dt}\iiint_R\rho\left(\frac{1}{2}V_iV_i+e\right)dv=\iiint_R\rho b_i v_i dv+\iint_S\left(T_{ij}V_iq_j\right)n_j ds \qquad (7.29)$$

علامت منفی در ترم آخر *(7.29)* بدین علت است که n بردار عمود بر سطح به سمت خارج و $-q_jn_j$ انرژی حرارتی وارد بر محیط پیوسته می باشد . با استفاده از قضیه مشتق زمانی (*7.20*) و همچنین با استفاده از قضیه گرین رای تبدیل انتگرال از روی سطح به جسم رابطه (*7.29*) عبارت خواهد شد از :

$$e\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}v_i v_i + e\right) = \rho b_i v_i + \frac{\partial}{\partial x_j}(T_{ij}v_i - q_i) \qquad (7.30)$$

$$\frac{Dv}{Df} = F$$

$$\Rightarrow -V_i\left(\frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i - \rho f_i\right) + \rho\frac{De}{Dt} - T_{ji}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial q_j}{\partial x_j} = 0$$

رابط داخل پرانتز با استفاده از رابطه (7.22 9برابر صفر بوده و داریم :

$$\rho\frac{De}{Dt} = T_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \qquad (7.31)$$

و چون T_{ji} متقارن است با استفاده از (6.69)داریم :

$$T_{ji}\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left[T_{ji}\frac{\partial v_i}{\partial v_j} - T_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}T_{ij}\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right] = T_{ij}D_{ij}$$

توان تنش یا نرخ کارتنشهای داخل محیطهای پیوسته گوس و انرژی حرارتی q از رابطه فور یه برای هدایت حرارتی به دست می آید .

$$T_{ji}\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = T_{ij}D_{ij}$$

$$\rho\frac{De}{Dt} = T_{ij}D_{ij} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \qquad (7.32)$$

$$q = -k\nabla T^* \qquad (7.33)$$

فصل هشتم : *Linear Constitvetive Equation*

مطالبی که تابحال گفته شد در تمام موارد بطور یکسان معتبر است . ولی چون مواد دارای خواص یکسان نیستند روابط دیگری باید وجود داشته باشد که این خواص را آشکار سازد که آنها را معادلات ساختاری *Constitutive* می گوییم . اینها معادلاتی هستند که مربوط به هر ماده ای شده و مواد مختلف را از یکدیگر متمایز می سازند . معادلات ساختاری روابطی هستند که تنش را به تغییر طول نسبی یا تنسور نرخ تغییر شکل مربوط می سازند .

معادلات ساختاری روابطی هستند که تنش را به تغییر طول نسبی یا تنسور نرخ تغییر شکل مربوط می سازند .

عموماً متغیرات ترمودینامیکی بخصوص درجه حرارت در معادلات ساختاری مؤثر هستند و در اینجا راجع به آنها بحث نخواهد شد .

رفتار مکانیکی مواد خیلی گوناگون و پیچیده است ولی معادلات ساختاری باید به گونه ای باشند که مهمترین رفتار مکانیک ماده را نشان دهند . این روابط را معادلات حاکم بر ماده ایده آل می نامیم .

معادلات ساختاری باید نه تنها خواص ماده، بلکه مورد استعمال ماده را نیز در نظر بگیرند، بطور مثال تئوری سیال غیرقابل تراکم، جریان آب را در لوله ها خیلی خوب مدل می کند ولی اگر انتشار موج در سیال مورد نظر باشد این مدل دیگر قابل قبول نمی باشد و باید آب را قابل تراکم در نظر گرفت .

مهمترین محدودیت روی معادلات ساختاری این است که تنش ایجاد شده بر اثر تغییر شکل نباید تابعی از حرکت صلب جسم باشد . در نتیجه اگر در ماده دو تغییر مکان انجام گیرد که فقط در حرکت صلب متفاوت باشند تنشهای ایجاد شده در هر دو باید یکسان باشد و بعبارت دیگر می توان گفت که معادلات ساختمان باید تحت *Translation* و *Rotation* (انتقال و دوران)، محورهای مختصات و سایر تغییرات مواد را عموماً به عنوان جامدات و یا سیالات طبقه بندی می کنند که سیالات شامل مایعات و گازها هستند . البته این طبقه بندی چندان دقیق و تعریف شده نمی باشد . از نظر خواص مکانیکی آنچه سیال را از جامد متمایز می کند، این است که سیالات تحمل تنش برشی را ندارند و تا زمانیکه تنش برشی به آنها داده می شود در جهت آن تغییر شکل می دهند ولی این مطلب در مورد جامدات صادق نبوده و تغییر مکان آنها در برابر تنش جزئی محدود است .

الا سیسیته خطی :

بیشتر جامدات بخصوص موادی مثل فلزات، بتون، چوب و غیره عموماً تحت اثر نیروهایی که به آنها وارد می شود دارای تغییر مکانهای کوچک هستند، و در صورتیکه نیروی وارد بر آنها خیلی زیاد نباشد، بعد از اینکه نیرو را از روی جسم برداریم به حالت اولیه خود بر می گردد . تئوری الا سیسیته خطی مدل بسیار مناسبی برای نشان دادن رفتار جامدات است . ماده الاستیک خطی ماده ای است که انرژی داخل آن $(\rho 0e)$ در واحد حجم دارای دو خاصیت زیر می باشد :

a) اول اینکه $\rho_0 e$ تابعی از مؤلفه های E_{ij} یعنی تنسور تغییر طول نسبی بوده و این وابستگی به صورت تابع درجه دوم از مؤلفه های تغییر طول نسبی است .

b) اگر k انرژی سینتیک (7.27) و E انرژی داخلی (7.28) باشد در اینصورت مشتقات عبارت است از Z نرخ کار مکانیکی نیروهای سطحی و جسمی روی سطح .

در اینجا $\rho_0 e$ را با W نشان داده و آنرا تابع انرژی تغییر شکل یا *Strain Energy Function* می نامیم . در نتیجه با رابطه (a) داریم :

$$W = \frac{1}{2} C_{ijk} l E_{ijk} E_{Kl} \qquad (8.7)$$

در این رابطه 81 ترم دارد .

خاصیت (b) همان اصل بقای انرژی است که انرژی حرارتی در آن وجود ندارد .

حال فرض کنید که از سیستم مختصات با بردارهای واحد e_i به سیستم مختصات با بردار واحد $\bar{e}_i$ رفته ایم بطوریکه :

$$\bar{e}_i = M_{ij} e_j \qquad , \qquad e_j = M_{ji} \bar{e}_i$$

در اینصورت مؤلفه های تنسور تغییر طول نسبی *Infiniresimal*، $\bar{E}_{ij}, E_{ij}$ در مختصات قدیم و جدید بوسیله روابط زیر به یکدیگر مربوط می شوند :

$$\begin{cases} \bar{E}_{rs} = M_{ri} M_{sj} E_{ij} \\ \\ E_{ij} = M_{ri} M_{sj} \bar{E}_{rs} \end{cases} \qquad (8.8)$$

انرژی تغییر طول نسبی را برحسب مؤلفه های $\bar{E}_{ij}$ می توان بصورت زیر نوشت :

$$W = \frac{1}{2} \bar{e}_{ijk} l \quad \bar{E}_{ij} \quad \bar{E}_{KL} \qquad (8.9)$$

چون W اسکالر بوده و بستگی به سیستم مختصات ندارد، روابط (8.7) و (8.9) با یکدیگر مساوی هستند . با استفاده از (8.8) داریم :

$$\bar{C}_{pqrs} \bar{E}_{pq} \bar{E}_{rs} = C_{IJK} L E_{ij} E_{kl} = C_{ijkl} M_{ei} M_{qi} M_{rk} M_{sl} \bar{E}_{pq} \bar{E}_{rs}$$

حال چون برای تمام مقادیر، تغییر طول نسبی، روابط فوق باید برقرار باشد، لذا C_{ijkl} باید مؤلفه های یک تنسور مرتبه چهار باشد و یا اینکه $\bar{C}_{pqrs} = C_{ijkl} M_{pi} M_{qj} M_{rk} M_{sl}$

اگر در (8.7) اندیسهای j,I را با یکدیگر عوض کنیم، داریم :

$$W=\frac{1}{2}C_{ijkl}E_{ji}E_{kl}=\frac{1}{2}C_{ijkl}E_{ij}E_{kl}$$
$$\Rightarrow W=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(C_{ijkl}+C_{ijkl})\right]E_{ij}E_{kl}$$
$$\Rightarrow C_{ijkl}=\frac{1}{2}(C_{ijkl}+C_{ijkl})$$

در نتیجه C_{ijkl} را می توان با ($C_{ijkl}+C_{jikl}$) $\frac{1}{2}$ عوض نمود . در نتیجه C_{ijkl} نسبت به q,I متقان است . به همین ترتیب می توان نشان داد که C_{ijkl} نسبت به L,k نیز متقارن می باشد و بعبارت دیگر :

$$C_{ijkl}=C_{jikl}=C_{ijlk} \qquad (8.10)$$

تقارن بالا تعداد ثابتها را از 81 به 36 تبدیل می کند، بعلاوه تغییر همزمان اندیسهای (k,I) و همین طول (e,j) داریم که :

$$W=\tfrac{1}{2}C_{klij}.E_{ij}E_{kl}=\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}(C_{ijkl}+C_{klij})\right]E_{kL}E_{ij}$$
$$C_{ijkl}=C_{klij} \qquad (8.11)$$

و تعداد ثابتها با این کار به 21 تقلیل می یابد .

محدودیت دیگری که روی W اعمال می شود . این است که انرژی تغییر شکل همواره مثبت می باشد و در نتیجه رابطه (8.7) تابع درجه دوم مثبت از E_{ij} می باشد . تابحال از خاصیت (b) مواد الاستیک استفاده نشده است . با استفاده از (7.31) وقتیکه e را با $e=\frac{W}{\rho_\circ}$ جانشین نموده و از انرژی حرارتی صرفنظر کنیم، داریم :

$$T_{ij}=\frac{\partial v_i}{\partial X_j}=\frac{\rho}{\rho_0}\frac{DW}{Dt} \qquad (8.12)$$

با استفاده از (7.7) و (7.8) با تقریب $\frac{\rho}{\rho_0}\cong 1$ داریم :

$$T_{ij}\frac{\partial V_i}{\partial x_j}=\frac{DW}{Dt}$$
$$\Rightarrow T_{ij}D_{ij}=-\frac{DW}{Dt} \qquad (8.13)$$

رابطه فوق اشکال مفهومی دارد، زیرا که W تابعی از E_{ij} می باشد، بنابراین ترم زمان به طور صریح نباید وجود داشته باشد، چون در این صورت بدون اینکه محیط اثری بر آنها داشته باشد تبدیل می شوند و تنها مواد رادیو

اکتیو دارای این خاصیت می باشند و در نتیجه *(8.13)*به شکل زیر بازنویسی می شود :

$$W = W(E_{ij}) \qquad\qquad \frac{DW}{Dt} = \frac{\partial W}{\partial E} + \frac{\partial W}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\Rightarrow T_{ij}D_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}}\frac{\partial E_{ij}}{\partial_t} \Rightarrow T_{ij} = \frac{\partial w}{\partial E_{ij}}$$

برای محاسبه این عبارت داریم :

$$W = \tfrac{1}{2} C_{pqrs} E_{pq} E_{rs}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} = \tfrac{1}{2} C_{pqrs} \frac{\partial}{\partial E_{ij}}(E_{pq}E_{rs}) = \tfrac{1}{2} C_{pqrs}\left(\frac{\partial E_{pq}}{\partial E_{ij}}\right)E_{rs} + E_{pq}\frac{\partial E_{rs}}{\partial E_{ij}}$$

$$= \frac{1}{2}C_{pqrs}(\delta_{pi}\delta_{qj}E_{rs} + \delta_{ri}\delta_{sj}E_{pq}) = \tfrac{1}{2}C_{ijrs}E_{rs} + \tfrac{1}{2}C_{pqij}E_{pq} = T_{ij}$$

$$= \frac{1}{2}C_{ijrs}E_{rs} + \frac{1}{2}C_{rsij}E_{rs} = C_{ijrs}E_{rs} = T_{ij}$$

$$T_{ij} = C_{ijrs}E_{rs} \qquad (8.14)$$

آنالیز جامع تغییر طول نسبی : ***Further unolysis of finite deformation***

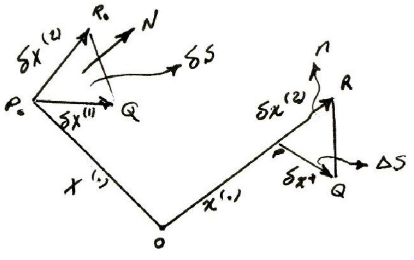
تغییر شکل المان سطح :

در بعضی از موارد مهم است که جهت و اندازه المان سطح را بعد از تغییر شکل داشت، بطور مثال وقتیکه نیروهای مشخص به نیروهای جسم وارد می شود . این امر مهم می باشد . المان مثلثی شکل سطح را در نظر بگیرید .

که رئوس آن $P_1Q_0R_0$ در ***Ref Conf*** بوسیله بردارهای $X^{(0)}, X^{(0)}, \delta X^{(1)}, X^{(0)} + \delta X^{(2)}$ مشخص شده اند . فرض کنید که این مثلث دارای سطح δS بوده و بردار یکه عمود بر آن n است در نتیجه داریم :

$$\delta s.n = \tfrac{1}{2}\delta X^{(1)} * \delta X^{(2)} as N_R \delta s = \tfrac{1}{2} e_{RST}\delta x_s^{(1)}\delta X_T^{(2)} \qquad (9.1)$$

فرض کنید که این نقاط به نقاط ***R,P,Q*** که بوسیله بردارهای $X^{(0)}, X^{(1)}, \delta X^{(1)}, X^{(0)} + \delta X^{(6)}$



مشخص شده اند، منتقل شده اند و مساحت مثلث ***PQR*** ΔS می باشد و داریم :

$$n.\Delta s = \frac{1}{2}\delta X^{(1)} * \delta X^{(2)} \quad as \qquad n_i \Delta s = \tfrac{1}{2} e_{ijk}\delta X_J^{(1)}\delta X_K^{(2)} \qquad (9.2)$$

با استفاده از *(7.3*)و روابط مشابه آن و قرار دادن در *(9.2*)داریم :

$$(n_i\Delta s)=\frac{1}{2}e_{ijkj}\delta X^{(1)}\delta X_K^{(2)}=\frac{1}{2}e_{ijk}\frac{\partial x_j}{\partial X_S}\frac{\partial X_K}{\partial X_T}\delta X_S^{(1)}\delta X_T^{(2)}$$

با حذف طرفین رابطه فوق در $\dfrac{\partial X_i}{\partial X_R}$

$$n_i=\frac{\partial x_i}{\partial X_R}\Delta S=\tfrac{1}{2}e_{ijk}\frac{\partial x_i}{\partial X_R}\frac{\partial X_j}{\partial X_s}\frac{\partial X_K}{\partial X_T}\delta X_S^{(1)}\delta X_T^{(2)}$$

با استفاده از روابط *(9.4*)و(*9.1*)داریم :

$$n_i=\frac{\partial x_i}{\partial X_R}\Delta S=\tfrac{1}{2}e_{rst}\frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(X_1,X_2,X_3)}\delta X_S^{(1)}\delta X_T^{(2)}=\frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(X_1,X_2,X_3)}N_R\delta S \qquad (9.3)$$

در حد وقتیکه $\delta X^{(1)},\delta X^{(2)}$ به سمت صفر میل می کنند رابطه *9.3* بصورت زیر در می آید :

$$n_i\frac{\partial x_i}{\partial X_R}\frac{dS}{ds}=\frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(X_1,X_2,X_3)}N_R=det(F)N_R=\frac{\rho_0}{\rho}N_R$$

چون N بردار یکه است از *(9.4*)داریم :

$$N_R.N_R=1=(det(F))^{-2}n_in_j\frac{\partial x_i}{\partial X_R}\frac{\partial x_j}{\partial X_R}\left(\frac{dS}{ds}\right)^2=(det(F))^{-2}n_in_jB_{ij}\left(\frac{dS}{ds}\right)^2$$

$$\left(\frac{dS}{ds}\right)^2=\frac{(det(F))^2}{n_in_jB_{ij}} \qquad (9.6)$$

روابط *(9.4*)و (*9.6*)را به صورت تنسوری داریم :

$$N\,det(F)=n.F.\frac{dS}{ds} \qquad (9.7)$$

و برای (*9.6*) :

$$\left(\frac{dS}{ds}\right)^2=\frac{(det(F))^2}{n.B.n} \qquad (9.8)$$

روابط (*9.6*)و یا(*9.8*)نسبت سطوح ثانویه به اولیه $\left(\frac{dS}{ds}\right)$ برحسب بردار یکه n که عمود بر المان بعد از تغییر شکل است را می دهد . بردار یکه N بوسیله *9.4* و یا *9.7* مشخص می شود . روابط معکوس *9.7* و *9.8* با استفاده

از فصل شش بصورت زیر درمی آید :

$$\begin{cases} n\,det(F)^{-1} = N.F^{-1}\dfrac{dS}{ds} & (9.9) \\ \left(\dfrac{dS}{ds}\right)^2 = \dfrac{(det\,F^{-1})^2}{N.C^{-1}.N} & (9.10) \end{cases}$$

قضیه تجزیه قطبی تغییر مکان : *Decomposition Of Deformation*

بوسیله قضیه تجزیه قطبی تنسور گرادیان تغییر مکان را می توان بصورت زیر نشان داد :

$$F = R.U = V.R \qquad (9.11)$$

که R یک تنسور اورتگنال V,U تنسورهای متقارن هستند . چون $det\,F = \dfrac{\rho_0}{\rho}$ تنسور F وقتیکه داده شده باشد، تنسورها V,U,R بصورت یکتا *Unique* هستند . با استفاده از *(9.11)* داریم .

$$U = R^T.V.R \quad \& \quad V = R.U.R^T \qquad (9.12)$$

حالتی را در نظر می گیریم که تغییر مکان هموژن است بطوریکه :

$$x = F.X \qquad (9.13)$$

چون تغییر مکان هموژن است، لذا مؤلفه های تنسور F ثابت هستند . فرض کنید که در جسم در حرکت متوالی هموژن ایجاد می شود، بطوریکه، ذراتی که اول در موقعیت X قرار داشته اند، حرکت کرده و در موقعیت $\hat{X}$ قرار می گیرند . سپس از این موقعیت به موقعیت X می رسند . بطوریکه :

$$\begin{cases} \hat{X} = u.x \\ x = R.\hat{X} \end{cases} \qquad (9.14)$$

با استفاده از (*9.11*) و (*9.14*) داریم :

$$x = R.\hat{X} = R.U.X = F.X$$

بنابراین در حرکت (*9.14*) معادل یک حرکت (*9.13*)است .

چون R بصورت اورتگنال است، دومین حرکت *(9.14)* چرخش صلب جسم را مشخص می نماید و اولین حرکت (*9.14*)تغییر مکان مطابق با تنسور متقارن u را می دهد، در نتیجه، اولین رابطه *(9.11)* نشان می دهد که هر تغییر مکان هموژن را می توان به دو تغییر مکان، اولی مطابق با تنسور متقارن u و دومی چرخش صلب R تجزیه نموده در صورتیکه تغییر مکان هموژن نباشد، (*9.13*)را به صورت زیر می نویسیم :

$$\begin{cases} F = \dfrac{\partial x_i}{\partial x_R} \\ dx = F.dX \end{cases}$$

چون در این حالت F تابعی از x بوده و ثابت نیست .

در این حالت روابط (9.11)قابل اجرا هستند ولی V,U,R توابعی از موقعیت ذرات می باشند . در این صورت تغییر کلی محلی سپس چرخش محلی R و یا اول چرخش محلی R و سپس تغییر مکان محلی V قابل تجزیه می باشد . تنسور R را تنسور چرخش و تنسور U را تنسور کشش راست (*Right Stretch*) و تنسور V را تنسور کشش چپ *Left Stretch* می نامیم . این تنسورها با تنسورهای C,B با استفاده از (6.27)و (9.11)بستگی دارند :

$$C = F^T.F = U.R^T.RU = U^2 \qquad (9.15)$$
$$B = F.F^T = V.R.R^T.V = V^2 \qquad (9.16)$$

چون U متقارن و مثبت معین *Positive Definite* رابطه(9.15)مؤلفه های u را برحسب C و بالعکس بدست می دهد . در نتیجه از نقطه نظر اندازه گیر تغییر مکان، C,U معادل یکدیگرند .

اگر تانسور F داده شده باشد، محاسبه C از (6.27)آسانتر از محاسبه U از (9.11)می باشد و معمولاً تانسور C را محاسبه می کنند . همین مطلب در مورد تنسورهای B و V نیز صادق می باشد . با استفاده از (6.62)داریم .

$$F = I + E + \Omega \qquad (9.17)$$

که E تنسور متقارن و Ω تنسور ضد متقارن می باشد .

در حالت تغییر طولهای نسبی کوچک و چرخش های کوچک از ضرب های Ω, E صرفنظر می کنیم و داریم :

$$U^2 = F^T.F = (I + E - \Omega)(I + E + \Omega) = I + 2E$$
$$\rightarrow U = (1 + 2E)^{1/2} = I + \frac{1}{2} * 2E + \ldots \cong I + E \qquad (9.18)$$

به همین ترتیب می توان نشان داد که :

$=I+E$

نتیجه اینکه در صورتیکه تغییر مکانها *Infinitesimal* یا کوچک باشند، قضیه تجزیه قطعی ساده شده و ماتریسها V,U به سادگی محاسبه می شوند . بنابراین در حالتیکه تغییر مکانها کوچک می باشند، فرق نمی کند

که اول جسم را بچرخانیم و بعد تغییر شکل بدهیم و یا بالعکس . در نتیجه $U\text{-}I$, $V\text{-}I$ در تغییر کانالهـای کوچـک *Infinitesimal* به تنسور تغییر طول نسبی کوچک E منجر خواهد شد .

با استفاده از(*9.18*)داریم که :

$$U^{-1} \cong I - E \qquad (9.19)$$

و با استفاده از *(9.11*) و *(9.17*)و(*9.19*)داریم که :

$$R = FU^{-1} = (I + E + \Omega)(I - E), I + \Omega$$

بنابراین $R\text{-}I$ منجر به تنسور چرخش کوچک Ω در تغییر مکانهای کوچک خواهد شد .

کششهای اصلی و محورهای اصلی تغییر مکان : ***pricipal stretch and principal axes of deformation***

فرض کنید که F مثل*(9.11)* به دو تنسور U,R تجزیه شده است که R تنسور چرخش می باشد . در اینجا تغییـر مکان حاصل از تنسور متقارن U مورد نظر است . با استفاده از نتایج گرفته شده از *(6.20*)که تغییر جهـت یـک المان خط ماده را در حرکت می دهد برای حرکت حاصل از U می توان نوشت :

$$U.\vec{A} = \lambda \vec{a} \qquad (9.21)$$

که a,A بردارهای واحد در جهت المان خط، قبل و بعد از حرکت U بوده و λ کشش المان خط اسـت فـرض مـی کنیم که برای یک المان خط بخصوص که در جهت $\vec{A}$ می باشد، چرخش وجود ندارد . بدین معنی که $\vec{a}, \vec{A}$ مـوازی یکدیگرند . در اینصورت برای *(9.21*)داریم :

$$u.\vec{A} = \lambda \vec{A}$$

$$\Rightarrow (U - \lambda I)\vec{A} = 0 \qquad (9.22)$$

λ مقدار اصلی یا تنسور U و $\vec{A}$ جهت اصلی پایه ***Principul Dirletion*** گفته می شود :

چون U متقارن است، مقادیر اصلی آن $(\lambda_3, \lambda_2, \lambda_3)$ حقیقی بوده و $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ می باشد .

و اگر مثبت معین باشند همگی λ مثبتند . همچنین جهتهای بردارهای اصلی آن کـه بردارهـای یکـه A_3, A_2, A_1 هستند بر یکدیگر عمود می باشد . در صورتیکه محورهای مختصات را مطابق با محورهای اصـلی U قـرار دهـیم، ماتریس مؤلفه های U، قطری خواهد شد . بنابراین :

$$U_{RS} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}$$

در نتیجه در این سیستم مختصات، تغییر مکان U فقط عبارت است از کشش در امتداد این محورها و بدون چرخش . به طریقه مشابه از تجزیه $F=V.R$ می توان استفاده نمود و نشان داد که F را می توان چرخش R و سپس سه کشش که بوسیله مقادیر اصلی V در امتداد محورهای اصلی انجام می شده نشان داد .

مقادیر اصلی $V.U$ به هم مربوط هستند چون $R^T.R = I$ با استفاده از 9.22 خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} & R(U-\lambda I), R^T = R_0 \vec{A} = 0 \\ & \rightarrow (RUR^T - \lambda R.I.R^T)R.\vec{A} = 0 \qquad \Rightarrow (V-\lambda I).R.A = 0 \end{aligned} \qquad (9.23)$$

در نتیجه مقادیر اصلی U که همان $\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1$ می باشد، مقادیر اصلی V نیز خواهند بود و اگر بردارهای یکه $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3$ جهتهای اصلی U باشند RA_3, RA_2, RA_1 جهتهای فعلی V خواهند بود و یا اینکه جهتهای اصلی V یا چرخش جهتهای اصلی $U-$ اندازه R بدست می آیند .

اگر تغییر مکان هموژن باشد، تنسور F ثابت است و در اینصورت تنسورهای C,V,U,R ثابت خواهند بود و کشش های اصلی $\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1$ و جهتهای اصلی در تمام جسم یکسان هستند . در حالت کلی که تغییر مکان هموژن نیست $\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1$ و A_1, A_2, A_3 توابعی از موقعیت می باشند .

چون $C = U^2$ و $\gamma = \frac{1}{2}(C-I)$ می باشد، جهتهای اصلی γ, C با U یکی خواهد بود و مقادیر اصلی آنها برای λ_i^2, C و برای $\frac{1}{2}(\lambda_i^2 - 1)\gamma$ می باشد . به همین ترتیب جهتهای اصلی η, B با V مطابق بوده و مقادیر اصلی آنها $\frac{1}{2}(1-\lambda_i^2)^{-2}, \lambda_i^2$ خواهد بود . کششهای اصلی و جهات اصلی را به طریقه دیگری نیز می توان محاسبه نمود .

با استفاده از (9.29)داریم :

$$\lambda^2 = A_R A_S C_{RS} \qquad (9.24)$$

وقتیکه تنسور C داده شده است، برای هر سیستم مختصات در ***Ref Confi***، λ را می توان محاسبه نمود و چون λ ها مقادیر اصلی حداکثر و حداقل کشش هستند، مقادیر حداکثر و حداقل $A_R A_S C_{RS}$ وقتیکه شرط $A_R.A_R = I$ ارضا شود، مقادیر λ را می دهد . در نتیجه باید معادله زیر را ارضا کنید .

$$\frac{\partial}{\partial A_P}\left\{A_R A_S C_{RS} - \mu^2 (A_R A_R - I)\right\} = 0$$
$$\frac{\partial A_S}{\partial A_P} = \delta_{SP}, \frac{\partial A_R}{\partial A_P} = \delta_{RP}$$
$$\Rightarrow (C_{RS} - \mu^2 \delta_{RS}) A_R = 0 \qquad \Rightarrow (C - \mu^2 I) A = 0 \qquad (9.25)$$

ثابتهای تنسور تغییر طول نسبی :

بطوریکه قبلاً نیز دیده شد، کنشهای اصلی $\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1$ تحت انتقـال محورهـای مختصـات ثابت هســتند . چــون $\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1$ مقادیر ویژه تنسورهای V,U هستند سه تابع متقارن می توان انتخاب نمود ولی عموماً بهتر است که از $\lambda_3^2, \lambda_2^2, \lambda_1^2$ که مقادیر اصلی تنسورهای C,B هستند استفاده نمود . سه ثابـت تغییــر طــول نســبی را (I_3, I_2, I_1) بصورت زیر انتخاب می کنیم :

$$\begin{Bmatrix} I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_1^2\lambda_3^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 \\ I_3 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \end{Bmatrix} \qquad (9.26)$$

با استفاده از (3.52)داریم :

$$\begin{cases} I_i = t\ rC = t\ rB = C_{RR} = B_{ii} \\ I_2 = \frac{1}{2}\left\{(t\ rC)^2 - t\ rC^2\right\} = \frac{1}{2}\left\{(t\ rB)^2 - t\ rB^2\right\} = \frac{1}{2}\left\{C_{RR}C_{ss} - C_{RS}C_{RS}\right\} \\ \qquad = \frac{1}{2}\left\{B_{ii}B_{jj} - B_{ij}B_{ij}\right\} \qquad (9.27) \\ I_3 = \det C = \det B \end{cases}$$

با استفاده از (3.58)قضیه کیلی همیلتون برای ماتریسهای C,B بصورت زیر در می آید :

$$B^3 - I_1 B^2 + I_2 B - I_3 I = 0$$
$$C^3 - I_1 C^2 + I_1 C - I_3 I = 0 \qquad (9.28)$$

مقادیر اصلی مقادیر ویژه C^{-1}, B^{-1} عبارتند از : $\lambda_3^{-2}, \lambda_2^{-2}, \lambda_1^{-2}$ در نتیجه :

$$trC^{-1} = trB^{-1} = \lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2} = I_2 I_3^{-1}$$

در نتیجه رابطه دیگری برای I_2 می توان بصورت زیر درآورد .

$$I_2 = I_3 t_i C^{-1} = I_3 t_i B^{-1} \qquad (9.29)$$

همینطور داریم :

$$I_3 = det\,C = det(F^T.F) = det(F)^T.det(F) = det(F)^2 = \left(\frac{dv}{dV}\right)^2 = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2$$

مثال D : کشش یکنواخت

کشش یکنواخت بوسیله روابط (6.42) مشخص شده است . تجزیه قطبی ساده می شود و داریم :

$$R=I \qquad , \qquad F=U=V$$

کششهای اصلی $\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1$ بوده و محورهای اصلی همان محورهای اصلی تنسور C,B هستند . ثابتهای تغییر طول نسبی در این حالت عبارتند از :

$$\begin{Bmatrix} I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_1^2\lambda_3^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 \\ I_3 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \end{Bmatrix}$$

مثال2 : برش ساده :

برش ساده توسط روابط 6.44 مشخص شده است . با استفاده از (6.45) (9.29) ثابتهای تغییر طول نسبی عبارتند از :

$$I_1 = 3 + tan^2\gamma \qquad I_2 = 3 + tan^2\gamma \qquad , I_3 = I$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & tan\gamma & 0 \\ tan\gamma & 1 + tan^2\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

با استفاده از مقادیر ویژه ماتریس C داریم :

$$\begin{cases} \lambda_1 = sec\,\beta + tan\,\beta \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = sec\,\beta - tan\,\beta \end{cases}$$

$$tan\,\beta = \frac{1}{2}tan\gamma$$

بردار ویژه های نرمال شده عبارتند از :

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1 \mp sin\,\beta)^{1/2}, \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm sin\,\beta)^{1/2}, 0)\right\}^T$$

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm sin\,\beta)^{1/2}, \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \mp sin\,\beta)^{1/2}, 0)\right\}^T$$

$$\{0,0,1\}^T$$

بطور مشابه بردار ویژه های نرمال شده B عبارت خواهند بود با قرمزهای بالا و با مقادیر ویژه برابرند .

مؤلفه های تنسور R را با استفاده از این خاصیت که R تنسوری است که محورهــای اصــلی C را چرخانــده و بــه محورهای اصلیB تصویر می کند، بدست می آید .

$$M_2 = RM_1$$

$$M_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} (1-\sin\beta)^{1/2}, & 0 & , (1+\sin\beta)^{1/2} \\ (1+\sin\beta)^{1/2}, & 0 & , (1-\sin\beta)^{1/2} \\ 0 & , \quad \sqrt{2} & ,0 \end{vmatrix} \text{جهات}$$

$$M_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} (1+\sin\beta)^{1/2}, & 0 & , (1-\sin\beta)^{1/2} \\ (1-\sin\beta)^{1/2}, & 0 & , (1+\sin\beta)^{1/2} \\ 0 & , \quad \sqrt{2} & ,0 \end{vmatrix}$$

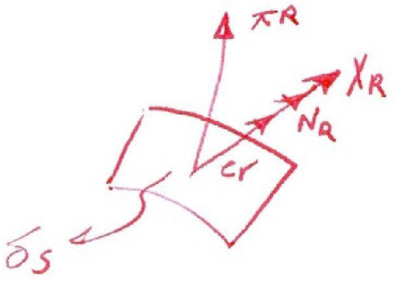
$$R = M_2.M_1^T = \begin{vmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$U = R^T.F = \begin{vmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \sec\beta\,(1+\sin^2\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

فرمولهای دیگر تنسور تنش :

تنسور تنش T که آنرا تنسور تنش می گوییم . مؤلفــه هــای تنســور تــنش در جهــات X_i روی صــفحات X_i در *Curent con figuration* هستند . در بعضی از موارد مناسبتر است که تنسور تــنش را برحســب مؤلفــه هــای *Traction* در *Ref Conf* مشخص کنیم . (توضیح اینکه وقتیکه نیرو به سطح وارد می شود، سطح تغییــر شــکل داده و بنابراین بایستی اثر نیرو را بر سطح تغییر شکل یافته، بررسی نمود علاوه بر آن چون در خیلــی از مســایل شکل سطح (مقطع) بعد از تغییر فرم بطور کل عوض می شود (مانند تغییر شکل هــای بــزرگ *Large Defrint* ، کمانش) شکل صفحه بعد از *Deformation* با شکل صفحه قبل از تغییــر شــکل کــاملاً متفــاوت اســت و چــون اطلاعات دقیقی از سطح ثانویه نداریم لذا بهتر است که مؤلفه های تنش را برحسب ســطح اولیــه (تغییــر شــکل نیافته) محاسبه کنیم . به این منظور مؤلفین تنشهای متفاوتی را تعریف می کنند که هر کدام بــا ســطح اولیــه و ثانویه در ارتباط می باشند .

المانی از سطح جسم را در نظر بگیرید که ***Ref Conf*** عبور بر محور X_R بوده و مساحت آن δ_S است . بردار واحد عمود بر این سطح در ***Ref Conf*** را با e_R نشان می دهیم . بعد از تغییر شکل **(*6.1*)** $Ox_i = x_i(X_R,t)$



این المان مساحت δ_S را داشته و بردار عمود بر آن n_R خواهد بود . با استفاده از (

$$(9.31) \quad n_R = [\det F] * \frac{ds}{dS}.e_R.F^{-1}$$

نیرو روی سطح تغییر شکل نیافته را δS . π_R نمایش می دهیم . بردار π_R دارای مؤلفه های π_{Ri} بصورت زیر است :

$$\pi_R = \pi_{Ri} - e_i \qquad (9.32)$$

اگر π_{Ri} مؤلفه در جهت X_i نیرو روی سطحی است که عمود بر بردار X_R در ***Ref Conf*** می باشد .

برای اینکه π_{Ri} را به T_{ij} (تنسور تنش کوشی) مربوط کنیم دیده می شود که نیروی روی سطح المان تغییر شکل داده شده معادل است با :

کل نیرو روی سطح تغییرشکل یافته $\qquad n_R.T.\delta S$

در نتیجه با استفاده از (*9.31*) و (*9.32*) داریم :

$$\pi_{Ri}.e_i.\delta s = (\det F)\frac{ds}{dS}.e_R.F^{-1}.T\delta S$$

نیرو بعد از تغییر شکل = نیرو قبل از تغییر شکل

با مساوی قرار دادن مؤلفه ها در دو طرف رابطه بالا و گرفتن حد وقتی که $\delta S \to 0$ داریم :

$$\pi_{Ri} = (\det F).F^{-1}_{Rj}.T_{ij} \qquad (9.34)$$

که π_{Ri} مؤلفه های تنسور درجه دوم می باشد و به فرم تنسوری برابر است با :

$$\begin{cases} \pi = (\det F)F^{-1}.T \\ T = (\det F)^{-1}.F.TI \end{cases}$$

تانسور π در حالت کلی متقارن نمی باشد و آنرا تنسور اول تنش پیولا ***Fisrt Piola Kirchhoff Tensor*** می

گوییم . با در نظر گرفتن تعادل یک المان چهار وجهی که سه وجه آن عمود بـر محورهـای مختصـات ***Ref Conf*** بـــــوده و وجـــــه چهـــــارم آن ســــــطح خـــــارجی جســـــم اســـــت، می توان نشان داد که $t^{(N)}$ که در واحد سطح ***Ref Conf*** بوده و برداریکه عمود بر آن در ***Ref Conf*** ، N اســت از رابطه زیر بدست می آید :

$$t^N = N.\pi \qquad (9.37)$$

با در نظر گرفتن نیروهای جسمی و سطحی در ***Ref Conf*** می توان معادله تعادل را بصورت زیر بدست آورد :

$$\frac{\partial \pi_{Ri}}{\partial X_R} + \rho 0 b_i = \rho_0 f_i \qquad (9.38)$$

تنسور پیولای نوع دوم را بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$P = \pi (F^{-1})^T = (\det F).F^{-1}.T.(F^{-1})^T \qquad (9.39)$$

$$\pi \to \pi = P.F^T \pi_{Ri} = P_{RS} \frac{\partial x_i}{\partial X_S}$$

$$T = (\det F)^{-1}.F.P.F^T \qquad (9.40)$$

$$\frac{\partial P_{Ri}}{\partial X_R} + \rho_0 b_i = \rho_0 f_i \qquad (9.41)$$

فصل دهم : ***Nonlinear Contitutive Equation*** معادلات مشخصه مواد غیر خطی

معادله مشخصه مواد غیرخطی (معادلات ساختاری برای مواد ***Finite*** تغییر شکل ***Finite***دارند) مثـل پلیمرهـا . رفتار خیلی از مواد را می توان توسط تئوی الا سیسیته خطی بیان نمود . ولی چون این تئوری محدود بــه حــالتی است که گرادیان تغییر مکان کوچک است رفتار بعضی از مواد مثل لاستیک ها و انواع پلیمرها که مــی تواننــد در محیط الاستیک دارای تغییر مکان نیز باشند، بوسیله تئوری الا سیسیته خطی قابل بیان نیست و باید از تئــوری الا سیسیته ***Finite*** استفاده نمود .

برای فرموله کردن تئوری الاشیشه محدود، مانند الا شیشه خطی،فرض

با استفاده از روابط ***(6.26)*** و ***(8.12)*** و ***(10.1)*** داریم که :

$$T_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{DW}{Dt} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{DF_{iR}}{Dt} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial F_{iR}} \frac{\partial x_j}{\partial X_R} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

چون رابطه فوق برای تمامی $\frac{\partial v_j}{\partial X_j}$ معتبر می باشد، خواهیم داشت :

$$T_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial W}{\partial F_{iR}}\frac{\partial X_i}{\partial X_R}$$

رابطه ***10.2*** فرم کلی معادلات ساختاری برای تغییر مکانهای ***Finite Deformation Finite*** یا ***Finite elastic*** است . w را در رابطه بالا نه مؤلفه تنسور F می باشد . تابع انرژی تغییر طول نسبی نباید بستگی به حرکت صلب جسم داشته باشد . فرض کنید که ذره ای که در اول در نقطه X است، حرکت کرده و بردار موقعیت آن x خواهد شد . سپس به آن یک چرخش صلب می دهیم، بطوریکه $\bar{x} = M.x$ که M یک تنسور ارتگنال می باشد .

بنابراین ذره ای که در X قرار داشت حال در موقعیت $\bar{x}$ قرار دارد، از تعریف F داریم :

$$F_{iR} = \frac{\partial x_i}{\partial X_R}$$

$$\bar{F}_{iR} = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial X_R} = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial X_j}\frac{\partial \bar{x}_j}{\partial X_R} = M_{ij}\frac{\partial x_i}{\partial X_R}M_{ij}F_{jR}$$

$$\bar{F} = M.F \qquad (10.3)$$

$$W(F) = W(\bar{F}) = W(M.F) \qquad (10.4)$$

رابطه بالا محدودیت بستگی W را به F نشان می دهد . چون نباید قضیه تجزیه قطبی $F=R.U$ رابطه ***10.4*** را به صورت زیر داریم :

$$W(F)=W(M.RU)$$

چون رابطه بالا برای تمام تنسورهای ارتگنال M باید صادق باشد، قرار می دهیم :

$$M = R^T \Rightarrow W(F) = W(R^T.RU) = W(U)$$

در نتیجه W را می توان تابعی از شش مؤلفه تنسور متقارن u در نظر گرفت . حال چون طبق ***9.15*** می توان U را برحسب C نوشت و چون C براثر چرخش صلب جسم تغییر نمی کند برای رابطه بالا داریم :

$$W= W(C) \qquad (10.5)$$

رابطه بالا در اثر چرخش صلب جسم، بدون تغییر می ماند و دیگر این رابطه را نمی توان ساده تر نمود .

مشتق زمانی رابطه فوق برابر است با :

$$\frac{DW}{Dt}=\frac{\partial W}{\partial C_{RS}}\frac{\partial C_{RS}}{Dt}=\frac{\partial W}{\partial C_{RS}}\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_R}.\frac{\partial x_i}{\partial X_S}\right)$$
$$=\frac{\partial w}{\partial C_{RS}}\left(\frac{\partial v_i}{\partial X_R}\frac{\partial x_i}{\partial X_s}+\frac{\partial x_i}{\partial X_R}\frac{\partial v_i}{\partial X_s}\right)$$
$$\Rightarrow\frac{Dw}{Dt}=\left(\frac{\partial w}{\partial C_{RS}}+\frac{\partial w}{\partial C_{RS}}\right)\frac{\partial x_i}{\partial X_R}\frac{\partial v_i}{\partial X_s}=\left(\frac{\partial w}{\partial C_{RS}}+\frac{\partial w}{\partial C_{RS}}\right)\frac{\partial x_i}{\partial X_R}\frac{\partial v_i}{\partial X_j}\frac{\partial x_j}{\partial X_S}$$

با مقایسه رابطه فوق با *10.2* داریم :

$$T_{ij}=\frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial x_i}{\partial X_R}\frac{\partial x_j}{\partial X_s}\left(\frac{\partial w}{\partial C_{RS}}+\frac{\partial W}{\partial C_{SR}}\right) \qquad (10.7)$$

هر نوع تقارن در خواص مکانیکی ماده، نوعی را که W به C بستگی دارد، محدود می کند . به طور مثال، فرض کنید که ماتریس ارتگنال Q، ماتریس تقارن چرخش خواص مکانیکی ماده باشد، بعبارت دیگر رابطه زیر برقرار است :

$$W(C)=W(Q^T.C.Q) \qquad (10.8)$$

اگر ماده ایزوتروپیک باشد، یعنی خواص آن در تمام جهات (یا تحت هر تنسور Q) ثابت خواهد بود که آنرا می توان به این صورت تعبیر نمود که W یکه *Invcrictive* تنسور C است . چون سه ثابت تنسور C عبارتند از I_3, I_2, I_1 در نتیجه در مواد ایزوترپیک تابع W باید بصورت زیر باشد :

$W=W(I_3, I_2, I_1)$

بنابراین :

$$\frac{\partial W}{\partial C_{RS}}=\frac{\partial W}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial C_{RS}}+\frac{\partial W}{\partial I_2}\frac{\partial I_2}{\partial C_{RS}}+\frac{\partial W}{\partial I_3}\frac{\partial I_3}{\partial C_{RS}}$$

مقادیر مشتقهای : $\frac{\partial I_3}{\partial C_{RS}},\frac{\partial I_2}{\partial C_{RS}},\frac{\partial I_1}{\partial C_{RS}}$ برابرند با :

$$\frac{\partial I_1}{\partial C_{RS}}=\frac{\partial C_{PP}}{\partial C_{RS}}=\delta_{PR}\delta_{PS}=\delta_{RS} \qquad (10.11)$$
$$\frac{\partial I_2}{\partial C_{RS}}=I_1\delta_{RS}-C_{RS}\ (10.12),\frac{\partial I_3}{\partial C_{RS}}=I_2\delta_{RS}-I_1C_{RS}+C_{RP}C_{SP} \quad (10.14)$$

$$I_3=\frac{1}{3}\left\{tiC^3-I_1tiC^2+I_2tiC\right\} \qquad (10.13)$$

با قرار دادن روابط *10.11* تا *10.14* در *10.7* خواهیم داشت :

$$T_{ij} = 2\frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial x_i}{\partial X_R}\frac{\partial x_j}{\partial X_S}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1\frac{\partial W}{\partial I_2} + I_2\frac{\partial W}{\partial I_3}\right)\delta_{RS} - \left(\frac{\partial W}{\partial I_2} + I_1\frac{\partial W}{\partial I_3}\right) + \left(\frac{\partial W}{\partial I_3}\right)C_{RP}C_{SP}\right\}$$

رابطــه بــالا فــرم کلــی، معــادلات مشخصــه مــواد ایزوتروپیــک اســت کــه آنــرا بــه فــرم تنســوری زیــر می توان نوشت :

$$T = 2(I_3)^{\frac{1}{2}} F.\{(W_1 + I_1W_2 + I_2W_3)I - (W_2 + I_1W_3)C + W_3C^2\}.F^T \qquad (10.15)$$

$$I_3 = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2, W = \frac{\partial W}{\partial I_1} \qquad I = UnitTensor \qquad (10.16)$$

رابطه *10.15* را با استفاده از روابط *6.27* و *6.33* می توان به صورت زیر بازنویسی نمود :

$$F.F^T = B \qquad , \qquad F.C.F^T = B^2 \qquad F.C^2.F^T = B^3$$

یا جایگذاری در رابطه داریم :

$$T = 2(I_3)^{-\frac{1}{2}}\{(W_1 + I_2W_2 + I_2W_3)B - (W_2 + I_1W_3)B^2 + W_3B^3\} \qquad (10.17)$$

که با استفاده از روابط *9.28* می توان B^3 **را حذف نمود همینطور اگر *9.28* را در** B^{-1} **ضرب کنیم،** B^2 **را هم از بالا حذف کنیم، در نتیجه داریم :**

$$T = 2(I_3)^{-\frac{1}{2}}\{(I_2W_2 + I_3W)I + W_1B - I_3W_2B^{-1}\} \qquad (10.18)$$

تمرین : ثابت کنید که برای تنسورهای خطی ارتجاعی بی نهایت کوچک تابع انرژی تغییر فرم نسبی را مــی تــوان بصورت زیر نوشت :

$$W = W_1 + W_2$$

$$\begin{cases} W_1 = \dfrac{k}{2}I^2 \\ W_2 = \dfrac{\mu}{3}(2I_1^2 - 6I_2) \end{cases} \qquad K, \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

همچنین رابطه ضریب *K* را باضرایب لامه *Lame* μ, λ **را با *k* پیدا کنید و مفهوم فیزیکی و** w_2 **را توضیح دهید .**

پلاستیک و پلیمر تغییر شکل *infinte* دارند ولی فولاد تغییر شکل *Infinitecimal* دارد .