①

«مکانیک محیط های پیوسته» - «جلسهٔ اوّل» - پنج شنبه - ۹۱/۱۲/۲۵ - مدرس: آقای دکتر حسینی هاشمی

مثالهایی از محیطها و سیستمهای پیوسته:

سلسله اعداد حقیقی یک سیستم پیوسته را تشکیل می دهند و بین هر دو عدد حقیقی می توان بی نهایت عدد دیگر قرار داد.

زمان و فضا نیز یکی دیگر از کمیتهای پیوسته هستند و به عنوان یک سیستم پیوسته چهار بعدی می توان از آنها نام برد.

هر جسم مادی از تعداد زیادی اتم یا مولکول تشکیل شده است که با فضاهای خالی بین شان حجم آن ماده را پر می کنند بنابراین از دیدگاه میکروسکوپیک یک جسم مادی ناپیوسته بوده ولی از دیدگاه ماکروسکوپیک می توان جسم مادی را پیوسته فرض کرد.

تعریف محیط پیوسته:

چنانچه یک مجموعه مادی فرضی را به ترتیبی در نظر بگیریم که در همهٔ نقاط آن ذرات به صورت پیوسته موجود باشند و همچنین کلیهٔ خواص ذرات این مجموعه مثل تغییر حرکت، تغییر حالت و غیره نیز توابعی پیوسته از نقاط هندسی آن باشند آن مجموعهٔ مادی را محیط پیوسته می خوانند.

انواع مایعات، جامدات و گازها را می توان محیط پیوسته تلقی کرد.

تعریف مکانیک محیط پیوسته (Continuum Mechanics):

قسمتی از علم مکانیک که بر اساس فرضیهٔ پیوستگی ذرات رفتارهای فیزیکی مجموعهٔ مادی را تحت تأثیر نیروها مورد مطالعه قرار می دهد به نام مکانیک محیط پیوسته نامیده می شود.

علائم اندیکسی و جمع قراردادی (Index notation & Summation Convention):

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

محور x را x_1، محور y را x_2 و محور z را x_3 فرض می کنیم و در راستای x_1 بردار $\hat{e}_1$

و در راستای x_2 بردار $\hat{e}_2$ و در راستای x_3 نیز بردار $\hat{e}_3$ فرض می‌کنیم:

$$\boxed{\vec{A} = A_1\hat{e}_1 + A_2\hat{e}_2 + A_3\hat{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} A_i e_i}$$: Index notation

Summation Convention : $\boxed{\sum_{i=1}^{3} A_i\hat{e}_i = A\hat{e}_i \quad (i=1,2,3)}$

مثال:

$$B = a_i\,(i=1,2,3) = a_1 + a_2 + a_3$$

$$C = b_i b_i\,(i=1,2,3) = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$$

$$x'_i = a_{ij}x_j \quad (i,j=1,2,3) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

دلتای کرونکر (Kronecker delta):

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i=j \\ 0 & \text{if } i\neq j \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1 \\ &\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{13} = \delta_{31} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \delta_{ij} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix}$$

★ در واقع می‌توان گفت دلتای کرونکر یک ماتریس ۳×۳ واحد است.

$$\vec{A} = A_1\hat{e}_1 + A_2\hat{e}_2 + A_3\hat{e}_3 \quad ، \quad A_i e_i \neq A_i e_j \Rightarrow \boxed{A_i e_i = A_i e_j \delta_{ij}}$$

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^{3} A_i\hat{e}_i = A_i e_i = A_i\hat{e}_1\delta_{i1} + A_i\hat{e}_2\delta_{i2} + A_i\hat{e}_3\delta_{i3}$$

$$= A_1\hat{e}_1\delta_{11} + A_1\hat{e}_2\delta_{12} + A_1\hat{e}_3\delta_{13} + A_2\hat{e}_1\delta_{21} + A_2\hat{e}_2\delta_{22} + A_2\hat{e}_3\delta_{23} + A_3\hat{e}_1\delta_{31} +$$

$$+ A_3\hat{e}_2\delta_{32} + A_3\hat{e}_3\delta_{33} \Rightarrow \vec{A} = A_1\hat{e}_1 + A_2\hat{e}_2 + A_3\hat{e}_3$$

★ نوشتن توان در نوشتار اندیسی رایج نیست.

$$C = b_i b_i \neq b_i^2$$

ضرب نقطه‌ای دوبردار:

$$\left.\begin{aligned} \vec{a} &= a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2 + a_3\hat{e}_3 \\ \vec{b} &= b_1\hat{e}_1 + b_2\hat{e}_2 + b_3\hat{e}_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C = \vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{C = a_i b_i = a_i b_j \delta_{ij}}$$

ضرب نقطه‌ای دوبردار یکه:

$$\boxed{\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}}$$

ضرب برداری دوبردار:

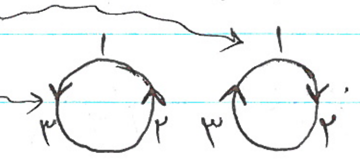
$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{e}_1 - (a_1b_3 - a_3b_1)\hat{e}_2$$

$$+ (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{e}_3 \Rightarrow \vec{c} = a_2b_3\hat{e}_1 + a_3b_1\hat{e}_2 + a_1b_2\hat{e}_3 - a_3b_2\hat{e}_1 - a_1b_3\hat{e}_2 - a_2b_1\hat{e}_3$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{c} = \varepsilon_{ijk}\, e_i\, a_j\, b_k}$$

نماد حسابگر یا گردشگر (Permutation Symbol):

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (123, 231, 312) \\ -1 & (321, 213, 132) \\ 0 & (112, 122, 113, \ldots) \end{cases}$$



بنابراین نماد گردشگر ۲۷ جمله دارد که ۶ جمله آن غیرصفر و مابقی صفر هستند.

$$C=\varepsilon_{ijk}\hat{e}_i a_j b_k=\varepsilon_{123}a_2b_3\hat{e}_1+\varepsilon_{231}a_3b_1\hat{e}_2+\varepsilon_{312}a_1b_2\hat{e}_3+$$

$$+\varepsilon_{132}a_3b_2\hat{e}_1+\varepsilon_{213}a_1b_3\hat{e}_2+\varepsilon_{321}a_2b_1\hat{e}_3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\vec{C}=\varepsilon_{ijk}\hat{e}_i a_j b_k=a_2b_3\hat{e}_1+a_3b_1\hat{e}_2+a_1b_2\hat{e}_3-a_3b_2\hat{e}_1$$

$$-a_1b_3\hat{e}_2-a_2b_1\hat{e}_3\ ,\ \boxed{\varepsilon_{ijk}e_i a_j b_k=\varepsilon_{jki}\hat{e}_j a_k b_i=\varepsilon_{kij}\hat{e}_k a_i b_j}$$

ضرب برداری دو بردار یکه :

$$\boxed{\hat{e}_j\times\hat{e}_k=\varepsilon_{ijk}\hat{e}_i}$$

مثال:

$$\hat{e}_1\times\hat{e}_3=\varepsilon_{i13}\hat{e}_i=\varepsilon_{213}\hat{e}_2=-\hat{e}_2$$

عملگر Del یا Nabla :

$$\boxed{\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x_1}\hat{e}_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\hat{e}_2+\frac{\partial}{\partial x_3}\hat{e}_3=\frac{\partial}{\partial x_i}\hat{e}_i={}_{,i}\hat{e}_i}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x_i}\hat{e}_j\,\delta_{ij}={}_{,i}e_j\,\delta_{ij}}$$

تأثیر عملگر Del روی یک تابع اسکالر :

$$\phi=\varphi(x_1,x_2,x_3)\Rightarrow\vec{\nabla}\varphi=\mathrm{grad}\,\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\hat{e}_1+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\hat{e}_2+\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\hat{e}_3=$$

$$=\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\hat{e}_i=\varphi_{,i}\hat{e}_i=\varphi_{,i}\hat{e}_j\,\delta_{ij}$$

تأثیر عملگر Del روی یک میدان برداری :

$$\vec{A}=A_1\hat{e}_1+A_2\hat{e}_2+A_3\hat{e}_3\Rightarrow\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\mathrm{div}A=\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\frac{\partial A_2}{\partial x_2}+\frac{\partial A_3}{\partial x_3}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i}\hat{e}_i = A_{i,j}}$$

ضرب برداری عملگر Del در یک بردار:

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{A} = \text{curl } A = \varepsilon_{ijk}\,\hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_j} A_k = \varepsilon_{ijk}\,\hat{e}_i A_{k,j}}$$

مثال:

$$\frac{\partial B_{ij}}{\partial x_k} = B_{ij,k}$$

$$\frac{\partial^3 C_{ijk}}{\partial x_l \partial x_m \partial x_n} = C_{ijk,lmn}$$

* در نوشتار اندیسی نباید از توان استفاده شود.

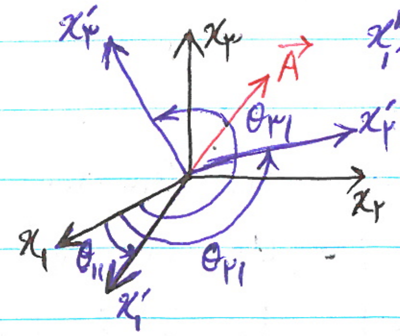
$$\frac{\partial^3 C_{ijk}}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_1} = C_{ijk,111}$$

دوران محورهای مختصات:

$$x_i \xrightarrow{\text{دوران حول یک محور فضا}} x'_i$$

دستگاه مختصات قدیم: $\vec{A} = A_1\hat{e}_1 + A_2\hat{e}_2 + A_3\hat{e}_3$

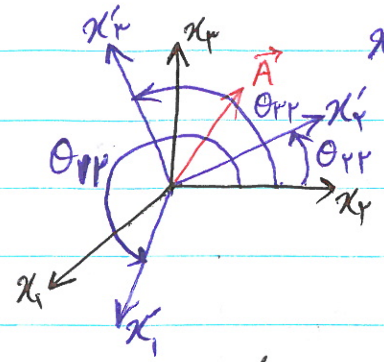
دستگاه مختصات جدید: $\vec{A}' = A'_1\hat{e}'_1 + A'_2\hat{e}'_2 + A'_3\hat{e}'_3$



تصویر مؤلفه A_1 بردار $\vec{A}$ روی محور x'_1: $\boxed{\alpha_1 = A_1 \cos\theta_{11}}$

تصویر مؤلفه A_1 بردار $\vec{A}$ روی محور x'_2: $\boxed{\alpha_2 = A_1 \cos\theta_{21}}$

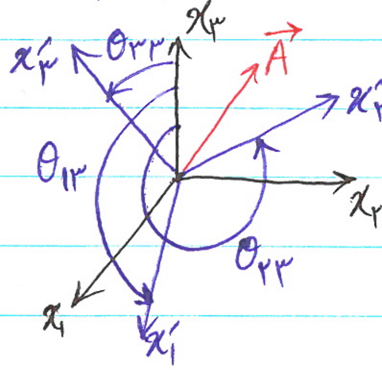
x'_3 " " " " " " : $\boxed{\alpha_3 = A_1 \cos\theta_{31}}$



تصویر مؤلفه A_2 بردار A روی محور x'_1 : $\boxed{\beta_1 = A_2 \cos\theta_{12}}$

x'_2 〃 〃 〃 〃 〃 〃 : $\boxed{\beta_2 = A_2 \cos\theta_{22}}$

x'_3 〃 〃 〃 〃 〃 〃 : $\boxed{\beta_3 = A_2 \cos\theta_{32}}$



تصویر مؤلفه A_3 بردار A روی محور x'_1 : $\gamma_1 = A_3 \cos\theta_{13}$

x'_2 〃 〃 〃 〃 〃 〃 : $\gamma_2 = A_3 \cos\theta_{23}$

x'_3 〃 〃 〃 〃 〃 〃 : $\gamma_3 = A_3 \cos\theta_{33}$

$$\left.\begin{aligned}
A'_1 &= \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = A_1\cos\theta_{11} + A_2\cos\theta_{12} + A_3\cos\theta_{13} \\
A'_2 &= \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = A_1\cos\theta_{21} + A_2\cos\theta_{22} + A_3\cos\theta_{23} \\
A'_3 &= \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = A_1\cos\theta_{31} + A_2\cos\theta_{32} + A_3\cos\theta_{33}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{Bmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{11} & \cos\theta_{12} & \cos\theta_{13} \\ \cos\theta_{21} & \cos\theta_{22} & \cos\theta_{23} \\ \cos\theta_{31} & \cos\theta_{32} & \cos\theta_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix}}$$

ماتریس دوران یا تبدیل

$$\boxed{A'_i = a_{ij} A_j \quad , i , j = 1, 2, 3}$$

$$\left.\begin{aligned}
A'_1 &= a_{11}A_1 + a_{12}A_2 + a_{13}A_3 \\
A'_2 &= a_{21}A_1 + a_{22}A_2 + a_{23}A_3 \\
A'_3 &= a_{31}A_1 + a_{32}A_2 + a_{33}A_3
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{Bmatrix}}$$

ماتریس تبدیل معکوس

$$\boxed{A_i = a^{-1}_{ij} A'_j \quad ، \quad i \text{ و } j = 1, 2, 3}$$

$$\boxed{A_i = a^{T}_{ij} A'_j = a_{ji} A'_j}$$

حال باید ثابت کنیم: $\boxed{[a_{ij}]^{T} = [a_{ij}]^{-1}}$

☆ هر ماتریسی که به صورت فوق باشد ماتریس متعامد یا Orthogonal می گویند.

برای دو دستگاه مختصات مختلف داریم:

$$A_1 \hat{e}_1 + A_2 \hat{e}_2 + A_3 \hat{e}_3 = A'_1 \hat{e}'_1 + A'_2 \hat{e}'_2 + A'_3 \hat{e}'_3$$

دو طرف تساوی را در سه بردار یکه مختلف ضرب می نماییم:

$$\cdot \hat{e}_1 \Rightarrow A_1 = A'_1 (\hat{e}'_1 \cdot \hat{e}_1) + A'_2 (\hat{e}'_2 \cdot \hat{e}_1) + A'_3 (\hat{e}'_3 \cdot \hat{e}_1)$$

$$\cdot \hat{e}_2 \Rightarrow A_2 = A'_1 (\hat{e}'_1 \cdot \hat{e}_2) + A'_2 (\hat{e}'_2 \cdot \hat{e}_2) + A'_3 (\hat{e}'_3 \cdot \hat{e}_2)$$

$$\cdot \hat{e}_3 \Rightarrow A_3 = A'_1 (\hat{e}'_1 \cdot \hat{e}_3) + A'_2 (\hat{e}'_2 \cdot \hat{e}_3) + A'_3 (\hat{e}'_3 \cdot \hat{e}_3)$$

این روابط را می‌توان به صورت ذیل نوشت:

$$\begin{cases} A_1 = A'_1 \cos\theta_{11} + A'_2 \cos\theta_{21} + A'_3 \cos\theta_{31} \\ A_2 = A'_1 \cos\theta_{12} + A'_2 \cos\theta_{22} + A'_3 \cos\theta_{32} \\ A_3 = A'_1 \cos\theta_{13} + A'_2 \cos\theta_{23} + A'_3 \cos\theta_{33} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{11} & \cos\theta_{21} & \cos\theta_{31} \\ \cos\theta_{12} & \cos\theta_{22} & \cos\theta_{32} \\ \cos\theta_{31} & \cos\theta_{32} & \cos\theta_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{Bmatrix}}$$

★ دترمینان ماتریس تبدیل بسته به راستگرد یا چپگرد بودن دستگاه مختصات می‌تواند $+1$ یا -1 باشد.

★ دترمینان هر ماتریس متعامدی واحد است.

حال به اثبات این موضوع می‌پردازیم. داشتیم:

$$A'_i = a_{ij} A_j \Rightarrow \hat{e}'_i = a_{ij}\hat{e}_j \Rightarrow \begin{cases} \hat{e}'_1 = a_{11}\hat{e}_1 + a_{12}\hat{e}_2 + a_{13}\hat{e}_3 \\ \hat{e}'_2 = a_{21}\hat{e}_1 + a_{22}\hat{e}_2 + a_{23}\hat{e}_3 \\ \hat{e}'_3 = a_{31}\hat{e}_1 + a_{32}\hat{e}_2 + a_{33}\hat{e}_3 \end{cases}$$

$$\hat{e}'_1 \cdot \overbrace{(\hat{e}'_2 \times \hat{e}'_3)}^{\hat{e}'_1} = 1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1$$

تانسورهای کارتزین:

کمیتهای فیزیکی برحسب تعریف اجزاء یا مؤلفه‌هایشان برای متغیرهای x_i و همچنین نحوه تبدیلشان به هنگامی که متغیرهای x_i به x'_i تبدیل می‌شوند، اسکالر یا بردار و یا تانسور نامیده می‌شوند.

یک اسکالر، تنسور مرتبهٔ صفر و یک بردار، تانسور مرتبهٔ یک می باشد.

اسکالر:

یک کمیت را اسکالر یا تانسور مرتبهٔ صفری نامیم در صورتی که دارای یک جزء مجرد φ برای متغیرهای x_i و یک جزء مجرد φ' برای متغیرهای x'_i باشد و همچنین مقادیر عددی φ و φ' در نقاط تطابق یا متناظر با هم برابر باشد.

$$\varphi'(x'_1, x'_2, x'_3) = x_1'^2 + x'_2 x'_3 \quad , \quad \begin{cases} x'_1 = x_1 + x_2 \\ x'_2 = x_2 \\ x'_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + x_2 x_3$$

مثال: $x_1 = 1 , x_2 = 2 , x_3 = 3 \Rightarrow \boxed{\varphi = 15}$

مثال: $x'_1 = 3 , x'_2 = 2 , x'_3 = 3 \Rightarrow \boxed{\varphi' = 15}$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = \varphi'}$$

بردار:

یک کمیت را بردار یا تانسور مرتبهٔ یک می نامیم در صورتی که دارای سه مؤلفهٔ A_i $(i = 1, 2, 3)$ و سه مؤلفهٔ A'_i $(i = 1, 2, 3)$ برای متغیرهای x'_i باشد همچنین مؤلفه‌های A'_i و A_i توسط روابط تبدیل و تبدیل معکوس بردارها به یکدیگر مربوط باشد.

☆ تانسور مرتبهٔ یک (vector): سه مؤلفه دارد که با روابط تبدیل تانسور مرتبهٔ یک به هم مرتبط می شوند. این تانسور یک Index دارد.

$$A_i(x_1, x_2, x_3) \qquad A'_i(x'_1, x'_2, x'_3)$$

$$\boxed{A'_i = a_{ij} A_j} \qquad \boxed{A_i = a_{ji} A'_j}$$

با تعمیم تعاریف بالای توان نتیجه گرفت که یک تانسور مرتبهٔ ۲، تانسوری است که

دارای ۹ مؤلفه‌ی A_{ij} برای متغیرهای x_i و ۹ مؤلفه A_{ij} برای متغیرهای x_i می‌باشد که همچنین مؤلفه‌های A'_{ij} و A_{ij} به وسیله روابط تبدیل و تبدیل معکوس تانسورهای مرتبه ۲ به یکدیگر مربوط می‌شوند.

★ تانسور مرتبه دو (Matrix): این تانسور ۹ مؤلفه دارد که با استفاده از روابط تبدیل تانسور مرتبه دو به هم مربوط می‌شوند.

$A_{ij}(x_1, x_2, x_3)$. $A'_{ij}(x'_1, x'_2, x'_3)$

$$\boxed{A'_{ij} = a_{ir} a_{js} A_{rs}} \qquad \boxed{A_{ij} = a_{ri} a_{sj} A'_{rs}}$$

★ تانسور مرتبه سه: ۲۷ مؤلفه دارد که با روابط تبدیل تانسور مرتبه سه به هم مرتبط می‌شوند.

$A_{ijk}(x_1, x_2, x_3)$ $A'_{ijk}(x'_1, x'_2, x'_3)$

$$\boxed{A'_{ijk} = a_{ir} a_{js} a_{kl} A_{rsl}} \qquad \boxed{A_{ijk} = a_{ri} a_{sj} a_{lk} A'_{rsl}}$$

★ تانسور مرتبه n: 3^n مؤلفه دارد که با روابط تبدیل تانسور مرتبه n به هم مرتبط می‌شوند.

$$\boxed{\underbrace{A'_{ij\ldots k}}_{\text{n تا اندیس}} = \underbrace{a_{ir} a_{js} \cdots a_{kl}}_{\text{n تا کسینوس هادی}} \underbrace{A_{rs\ldots l}}_{\text{n اندیس}}}$$

$$\boxed{A_{ij\ldots k} = a_{ri} a_{sj} \cdots a_{lk} A'_{rs\ldots l}}$$

★ تانسور مرتبه دو متقارن:

یک تانسور مرتبه دو را متقارن می‌نامیم در صورتی که مؤلفه‌های A_{ij} مساوی A_{ji} باشند. بنابراین یک تانسور مرتبه دو متقارن دارای شش مؤلفه مستقل می‌باشد.

☆ یک تانسور مرتبه دو را ضد متقارن می نامیم در صورتی که مؤلفه های A_{ji} مساوی $-A_{ij}$ باشد. در این صورت یک تانسور مرتبه دو ضد متقارن فقط دارای سه مؤلفه مستقل خواهد بود. به عبارت دیگر چنانچه آن را در یک ماتریس ۳×۳ مرتب کنیم کلیه مؤلفه های غیرقطری این ماتریس برابر صفر خواهد بود.

☆ تانسور مرتبه دو ایزوتروپیک (Isotropic):

یک تانسور مرتبه دو را ایزوتروپیک می خوانیم در صورتی که مؤلفه های آن در دوران محورهای مختصات مبداء تغییر نکند. به عبارت دیگر مؤلفه های تانسوری بایست قبل و بعد از دوران نظیر به نظیر برابر باشند یعنی اینکه داشته باشیم $A'_{ij}=A_{ij}$.

☆ تنش هیدرواستاتیک یک تانسور مرتبه دو ایزوتروپیک است و دلتا کرونکر هم همین طور.

☆ تانسور تنش یک تانسور متقارن است و تانسور کرنش هم همین طور.

نشان دهید یک تانسور مرتبه دو را می توان به صورت مجموع دو تانسور متقارن و ضد متقارن بیان نمود:

$$A_{ij}=\frac{A_{ij}+A_{ji}}{2}+\frac{A_{ij}-A_{ji}}{2}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11} & \frac{A_{12}+A_{21}}{2} & \frac{A_{13}+A_{31}}{2} \\ \frac{A_{21}+A_{12}}{2} & A_{22} & \frac{A_{23}+A_{32}}{2} \\ \frac{A_{31}+A_{13}}{2} & \frac{A_{32}+A_{23}}{2} & A_{33} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & \frac{A_{12}-A_{21}}{2} & \frac{A_{13}-A_{31}}{2} \\ \frac{A_{21}-A_{12}}{2} & 0 & \frac{A_{23}-A_{32}}{2} \\ \frac{A_{31}-A_{13}}{2} & \frac{A_{32}-A_{23}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

قانون کوشنت (Quotient's Rule):

با استفاده از این قانون می توان روابط تبدیل و تبدیل معکوس تانسورها را از هر مرتبه ای را بدست آورد.

تانسور مرتبه دوم $\boxed{\underline{A}=A_{ij}\,\underline{e}_i\,\underline{e}_j}$ ضرب بازیا دایا دیک (Dyadic): $\boxed{\underline{\underline{B}}=B_k\,\underline{e}_k}$

$$\underline{A}\cdot\underline{B} = (A_{ij}\,\underline{e_i}\,\underline{e_j})\cdot(B_k\,\underline{e_k}) = A_{ij}B_k\,\underline{e_i}\,(\underline{e_j}\cdot\underline{e_k}) = A_{ij}B_k\,e_i\,\delta_{jk} =$$

$$= A_{ij}B_j\,\underline{e_i} = \underline{C} \Rightarrow C_i\,\underline{e_i} = A_{ij}B_j\,\underline{e_i} \Rightarrow \boxed{C_i = A_{ij}B_j}$$

★ ضرب نقطه‌ای یک تانسور مرتبه دو در یک تانسور مرتبه یک، یک برداری می‌شود. (یک تانسور مرتبه یک)

$$x_i \longrightarrow x'_i \Rightarrow \underline{C}' = \underline{A}'\cdot\underline{B}' \Rightarrow \boxed{C'_i = A'_{ij}\cdot B'_j}$$

$A'_i = a_{ij}A_j$: رابطه تبدیل بردارها $\Rightarrow B'_j = a_{jk}B_k \Rightarrow C'_i = a_{ir}C_r \Rightarrow$

$$\Rightarrow A'_{ij}B'_j = C'_i = a_{ir}C_r = a_{ir}A_{rs}B_s$$

رابطه تبدیل معکوس بردارها : $A_i = a_{ji}A'_j \Rightarrow B_s = a_{js}B'_j$

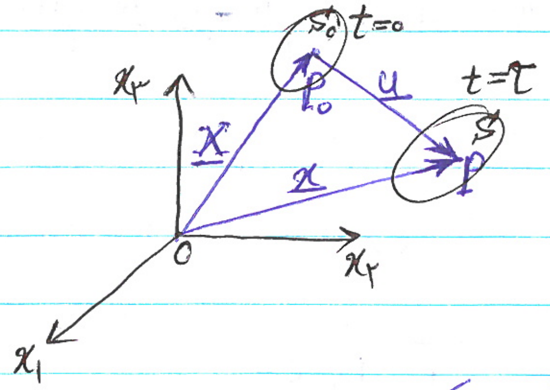
$$\Rightarrow A'_{ij}B'_j = a_{ir}A_{rs}a_{js}B'_j$$

$$\Rightarrow (A'_{ij} - a_{ir}A_{rs}a_{js})B'_j = 0 \;,\; B'_j \neq 0 \Rightarrow (A'_{ij} - a_{ir}A_{rs}a_{js}) = 0$$

$\Rightarrow \boxed{A'_{ij} = a_{ir}a_{js}A_{rs}}$ رابطه تبدیل تانسورهای مرتبه دو:

★ با تعمیم این روش می‌توان روابط تبدیل برای تانسورهای مرتبه بالاتر را بدست آورد.

تشریح مادی و فضایی جنبش (Material & Spatial Description of Motion):



فرض کنیم در یک لحظه زمانی مانند $t=0$ یک ناحیه معینی از فضا مثل S_0 بوسیله ذرات یک سیستم پیوسته پر می‌شود. فرض کنیم همان فضا در لحظه $t\neq 0$ ناحیه دیگری از فضا مثل S را اشغال کنند.

اگر مبداء O را به یکی از ذرات در فضای S_0 وصل کنیم بردار وضعیت حاصل را با بردار $\underline{X}$

به نمایش می گذاریم. می توان بوسیلهٔ مرتبط کردن بردارهای وضعیت $\underline{X}$ و $\underline{x}$ جنبش سیستم پیوسته را مورد بررسی قرار داد.

$$\underline{x} = f(\underline{X}, t)$$

$$x_1 = f_1(X_1, X_2, X_3, t), \quad x_2 = f_2(X_1, X_2, X_3, t), \quad x_3 = f_3(X_1, X_2, X_3, t)$$

$$\Rightarrow \boxed{x_i = f_i(X_j, t)}$$

مثال:

$$x_1 = (1 + at^2)X_1, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3$$

$$\boxed{\underline{X} = g(\underline{x}, t)} \Rightarrow X_1 = g_1(x_1, x_2, x_3, t), \quad X_2 = g_2(x_1, x_2, x_3, t), \quad X_3 = g_3(x_1, x_2, x_3, t)$$

$$\Rightarrow \boxed{X_i = g_i(x_j, t)} \Rightarrow X_1 = \frac{x_1}{1 + at^2}, \quad X_2 = x_2, \quad X_3 = x_3$$

همیشه نمی توان یک تبدیل یک به یک برگشت پذیر داشت برای اینکه بتوانیم یک تبدیل یک به یک برگشت پذیر داشته باشیم:

ژاکوبین
$$\boxed{J = \left|\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} \neq 0}$$

☆ مؤلفه‌های بردارهای X را مختصات مادی ذرات نامیده و مؤلفه‌های بردارهای x را مختصات فضایی می نامند.

★ اگر مسیر یک ذره را بررسی کنیم و دنبال کنیم از دیدگاه اویلری استفاده کرده‌ایم و در صورتی که هر نقطه از فضا را به صورت جداگانه بررسی کنیم از دیدگاه لاگرانژی استفاده کرده‌ایم.

★ در دیدگاه لاگرانژی از تشریح و مختصات مادی استفاده می‌شود و در دیدگاه اویلری از تشریح و مختصات فضایی استفاده می‌شود در مسائل جامدات از دیدگاه لاگرانژی و در مسائل سیالاتی از دیدگاه اویلری استفاده می‌شود.

مثال:

$$x_1=(1+at^2)X_1 \quad , \quad x_2=X_2 \quad و \quad x_3=X_3 \quad , \quad x_i=F_i(X_j,t)$$

ذره P_0 را در فضای صفر در نظر گرفته‌ایم و این نقطه در زمان t نقطه P را اشغال کرده است و بردار $\underline{u}$ بردار جابجایی ذره P_0 می‌باشد که نقطه P_0 را به P وصل می‌کند.

$$\underline{X}+\underline{u}=\underline{x} \Rightarrow X_i+u_i=x_i \Rightarrow \boxed{u_i=\underbrace{x_i}_{\text{مختصات فضایی}}-\underbrace{X_i}_{\text{مختصات مادی}}}$$

با استفاده از تشریح مادی و مختصات مادی (از دیدگاه لاگرانژی) مسئله را حل می‌کنیم:

$$u_1=x_1-X_1=(1+at^2)X_1-X_1=X_1at^2 \Rightarrow \boxed{u_1=X_1at^2}$$

$$u_2=x_2-X_2=X_2-X_2 \Rightarrow \boxed{u_2=0}$$

$$u_3=x_3-X_3=X_3-X_3 \Rightarrow \boxed{u_3=0}$$

با استفاده از تشریح فضایی و مختصات فضایی (از دیدگاه اویلری) مسئله را حل می‌کنیم:

$$u_1=x_1-X_1 \quad , \quad \boxed{X_1=\frac{x_1}{1+at^2}} \quad , \quad X_2=x_2 \quad , \quad X_3=x_3 \quad , \quad X_i=g_i(x_j,t)$$

$$u_1=x_1-\frac{x_1}{1+at^2} \Rightarrow \boxed{u_1=\frac{at^2x_1}{1+at^2}}$$

$$u_2=x_2-X_2=x_2-x_2 \Rightarrow \boxed{u_2=0}$$

$$u_3=x_3-X_3=x_3-x_3 \Rightarrow \boxed{u_3=0}$$