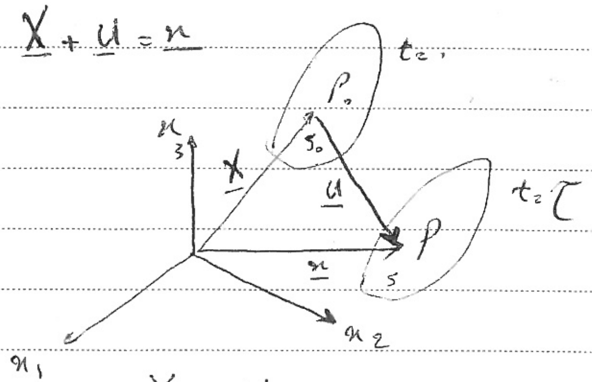
مثال: روابط تبدیل ذیل موجود است:

$$x_1 = (1 + at^2) X_1 \qquad x_2 = X_2 \qquad x_3 = X_3$$

$$\underline{X} + \underline{U} = \underline{x}$$



$$\underline{X} + \underline{U} = \underline{x}$$

$$x_i = F_i(X_j, t)$$

$$X_i + U_i = x_i \Rightarrow \underline{U_i = x_i - X_i}$$

* تشریح از دیدگاه لاگرانژی (پیدا کردن بردارهای جابجایی)

$$U_1 = x_1 - X_1 = X_1(1 + at^2) - X_1 = X_1 a t^2$$

$$U_2 = x_2 - X_2 = X_2 - X_2 = 0$$

$$U_3 = x_3 - X_3 = X_3 - X_3 = 0$$

* تشریح از دیدگاه فضایی (از دیدگاه اویلری)

$$U_1 = x_1 - X_1$$

$$X_1 = \frac{x_1}{1 + at^2}, \quad X_2 = x_2, \quad X_3 = x_3$$

$$X_i = g_i(x_j, \tau)$$

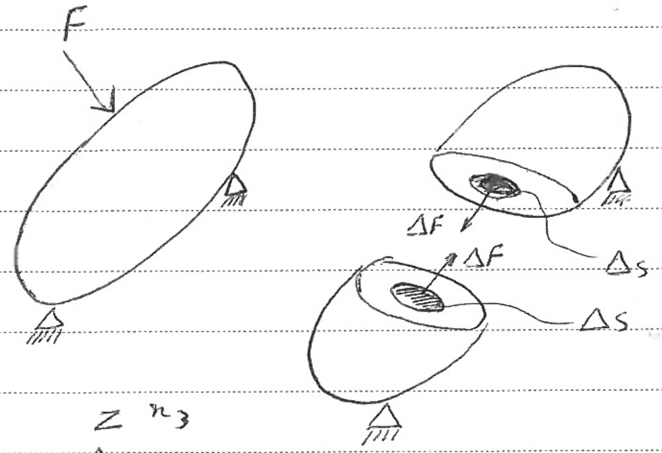
$$U_1 = x_1 - \frac{x_1}{1 + at^2} = \frac{at^2 x_1}{1 + at^2}, \quad U_2 = x_2 - X_2 = x_2 - x_2 = 0$$

$$U_3 = x_3 - X_3 = x_3 - x_3 = 0$$

Subject:
Year 92 Month 02 Date 05

Stress tensor

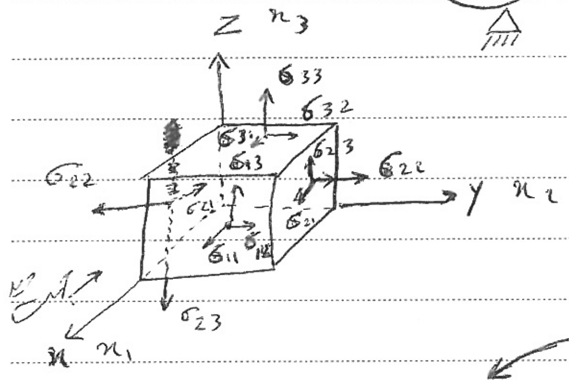
تانسور تنش



Surface Traction

$$t = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta s} = \frac{dF}{ds}$$

بردار تنش



مولفه‌های تنش

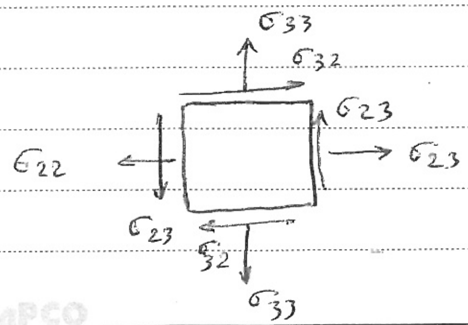
$$t_1 = \sigma_{11}\underline{e}_1 + \sigma_{12}\underline{e}_2 + \sigma_{13}\underline{e}_3$$

$$t_2 = \sigma_{21}\underline{e}_1 + \sigma_{22}\underline{e}_2 + \sigma_{23}\underline{e}_3$$

$$t_3 = \sigma_{31}\underline{e}_1 + \sigma_{32}\underline{e}_2 + \sigma_{33}\underline{e}_3$$

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{Bmatrix}$$

برای وجه روبرو



Subject:

Year. Month. Date. ( )

مولفه‌های σ_{ij} : مولفه‌های تنسور تنش

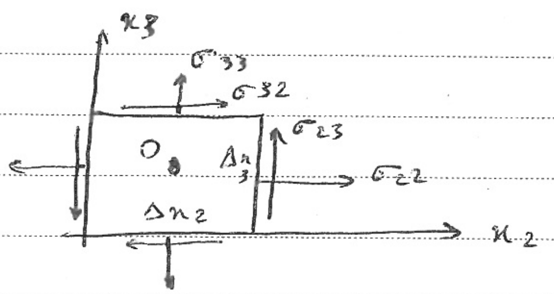
σ_{11} ، σ_{22} ، σ_{33} مولفه‌های نرمال تنسور تنش

بقیه مولفه‌ها مولفه‌های برشی می‌باشند

$$\sigma_{ij} : \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

یک گشتاور حول نقطه O.

جهت حفظ تعادل دورانی باید

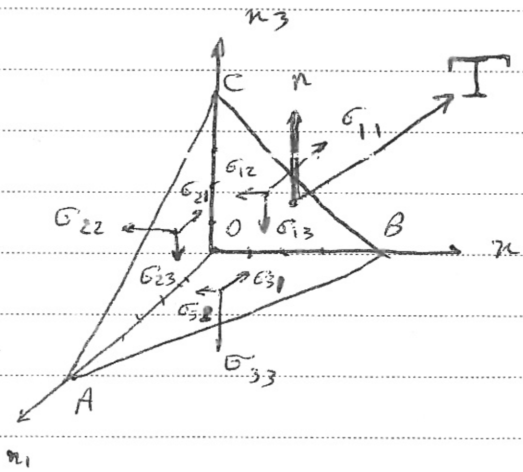


$$2(\sigma_{23}\Delta x_1 \Delta x_3 \Delta x_2/2) - 2(\sigma_{32}\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3/2) = 0$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32}$$

به طور مشابه $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ $\sigma_{13} = \sigma_{31}$

بنابراین ۶ مولفه مستقل داریم.



* تعادل انتقالی

(n) بردار نرمال بر سطح ABC

T : بردار تنش وارد بر سطح مورب ABC

ds : مساحت سطح مورب ABC

ds_1 : مساحت سطح BOC

ds_2 : مساحت سطح AOC

ds_3 : مساحت سطح AOB

$$n = n_1 \underline{e_1} + n_2 \underline{e_2} + n_3 \underline{e_3}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$ds_1 = n_1 ds \quad , \quad ds_2 = n_2 ds \quad , \quad ds_3 = n_3 ds$

$\underline{T} = T_1 \underline{e}_1 + T_2 \underline{e}_2 + T_3 \underline{e}_3$

تعادل انتقالی در امتداد محور x_1

$x_1 : T_1 ds - \sigma_{11} n_1 ds - \sigma_{21} n_2 ds - \sigma_{31} n_3 ds = 0$

$x_2 : T_2 ds - \sigma_{12} n_1 ds - \sigma_{22} n_2 ds - \sigma_{32} n_3 ds = 0$

$x_3 : T_3 ds - \sigma_{13} n_1 ds - \sigma_{23} n_2 ds - \sigma_{33} n_3 ds = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_1 ds - \sigma_{11} n_1 ds - \sigma_{21} n_2 ds - \sigma_{31} n_3 ds \\ T_2 ds - \sigma_{12} n_1 ds - \sigma_{22} n_2 ds - \sigma_{32} n_3 ds \\ T_3 ds - \sigma_{13} n_1 ds - \sigma_{23} n_2 ds - \sigma_{33} n_3 ds \end{cases}$$

((فرمول کوشی) $T_i = \sigma_{ij} n_j$ شکل اندیسی روابط بالا

مثال ۵ بردار تنش را در صفحه‌ای به معادله ذیل پیدا کنید؟

$F(X_1, X_2, X_3) = 2X_1 - 2X_2 - X_3 = 0$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$ متقارن است

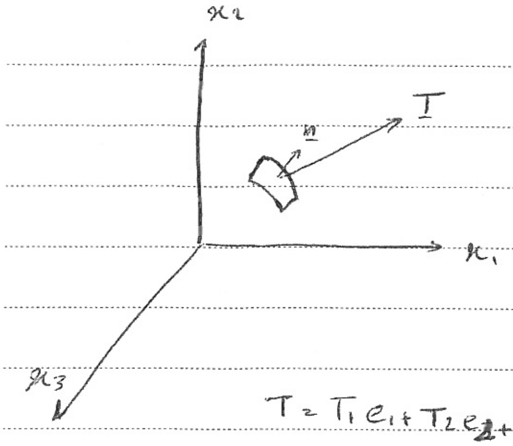
پاسخ:

$T_i = \sigma_{ij} n_j \qquad \vec{n} = \frac{\vec{\nabla} F}{|\vec{\nabla} F|} = \frac{2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3}{\sqrt{4+4+1}} = (2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3)/3$

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \Rightarrow T_1 = -5/3 \quad T_2 = -10/3 \quad T_3 = -7/3$$

$T =$

Subject:
Year. Month. Date. ( )



* تنش های اصلی Principal stresses

* بردارهای T و n بر هم منطبق فرض شده اند.

* بردار تنش را اینجا T = σn قرار میدهیم.

$$T_i = \sigma n_i = \sigma \delta_{ij} n_j$$

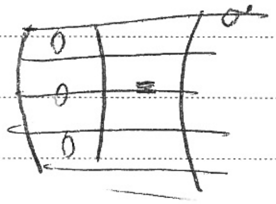
$$T = T_1 e_1 + T_2 e_2 + T_3 e_3 \qquad n = n_1 e_1 + n_2 e_2 + n_3 e_3$$

$$T_1 = \sigma n_1 \qquad T_2 = \sigma n_2 \qquad T_3 = \sigma n_3$$

$$T_i = \sigma n_i = \sigma \delta_{ij} n_j$$

از کوشی $\Rightarrow T_i = \sigma_{ij} n_j \qquad \Rightarrow (\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_j = 0$

$$\cancel{(\sigma_{i1} - \sigma \delta_{i1}) n_1 + (\sigma_{i2} - \sigma \delta_{i2}) n_2 + (\sigma_{i3}}$$



$$(\sigma_{i1} - \sigma \delta_{i1}) n_1 + (\sigma_{i2} - \sigma \delta_{i2}) n_2 + (\sigma_{i3} - \sigma \delta_{i3}) n_3 = 0$$

$$(\sigma_{11} - \sigma) n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 = 0$$

$$\sigma_{21} n_1 + (\sigma_{22} - \sigma) n_2 + \sigma_{23} n_3 = 0$$

$$\sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + (\sigma_{33} - \sigma) n_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \\ \sigma_{3} & \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

$$\det(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) = 0$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اگر دترمینان را بسط دهیم:

$$-\sigma^3 + I_1\sigma^2 - I_2\sigma + I_3 = 0$$

$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ریشه‌های معادله

که همان تنش‌های اصلی می‌باشند.

I_1, I_2, I_3: عوامل غیر قابل تغییر پذیرهای تنش ( )

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{33} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$$

* که ریشه‌های معادله (σ_1 و σ_2 و σ_3) تنش‌های اصلی هستند.

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = 0$$

$$\sigma^3 - (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\sigma^2 + (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)\sigma - \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 0$$

برحسب تنش‌های اصلی — بر حسب محورهای اصلی

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

(25)

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مثال: اگر مولفه های تانسور تنش برای نقطه ای مشخص به صورت ماتریس زیر در دست باشد مطلوبست:

۱- مولفه های بردار تنش روی صفحه عمود بر محور x_1 که از نقطه P می گذرد.

۲- مولفه های بردار تنش را روی صفحه ای که مولفه های نرمال بر آن به نسبت $2:-1:1$ می باشد.

۳- مولفه های بردار تنش را روی صفحه ای مؤثر بر P و موازی با صفحه $2x_1-2x_2-x_3=0$

۴-

$$\det(\sigma_{ij}-\sigma\delta_{ij})=0 \qquad \begin{vmatrix} 1-\sigma & 2 & 3 \\ 2 & 4-\sigma & 6 \\ 3 & 6 & 1-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$-\sigma^3+I_1\sigma^2-I_2\sigma+I_3=0$$

$$I_1=6$$

$$I_2=-40 \quad \Longrightarrow \quad \sigma_1=10,\ \sigma_2=0,\ \sigma_3=-4$$

$$I_3=0$$

تنش های اصلی

$$(\sigma_{ij}-\sigma\delta_{ij})n_j=0 \implies \begin{pmatrix} \sigma_{11}-\sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}-\sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}-\sigma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

جهت اصلی مربوط به تنش: $\sigma_1=10$

$$\begin{pmatrix} -9 & 2 & 3 \\ 2 & -6 & 6 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-9n_1+2n_2+3n_3=0$$

$$2n_1-6n_2+6n_3=0$$

$$3n_1+6n_2-9n_3=0$$

(1)

$$\boxed{\vec{n}=(3\vec{e}_1+6\vec{e}_2+5\vec{e}_3)/\sqrt{70}}$$

جهت اصلی مربوط به تنش اصلی صفر

از سه معادله اول فقط 2 معادله مستقل می باشند بنابراین از معادله کدام به عنوان معادله کلی استفاده می کنیم

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* به طریق مشابه جهت اصلی مربوط به تنش $\sigma_2=0$:

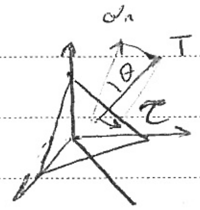
$$\vec{n}^{(2)} = (-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2)/\sqrt{5}$$

* همچنین جهت اصلی مربوط به تنش $\sigma_2=-4$

$$\vec{n}^{(3)} = (\vec{e}_1 + 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_3)/\sqrt{14}$$

ضرب نقطه ای $\vec{n}$ ها برابر با صفر می شود که این نشان می دهد که این سه بردار یک دست ortagonal تشکیل می دهند.

* تنش برشی shear stress



بردار تنش T را در امتداد عمود بر سطح و مماس بر سطح تجزیه می کنیم

$$\vec{T}\cdot\vec{n} = T_1n_1 + T_2n_2 + T_3n_3 = Tn\cos\theta = n\sigma_n = \sigma_n$$

(1) $\sigma_n = T_i n_i$

$$T^2 = \tau^2 + \sigma_n^2$$

$$\vec{n} = n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2 + n_3\vec{e}_3$$

$$\vec{T} = T_1\vec{e}_1 + T_2\vec{e}_2 + T_3\vec{e}_3$$

(2) رابطه کوشی $T_i = \sigma_{ij}n_j \xRightarrow{(1)(2)} \sigma_n = \sigma_{ij}n_in_j$

$$\sigma_n = \sigma_{11}n_1^2 + \sigma_{22}n_2^2 + \sigma_{33}n_3^2 + 2\sigma_{11}n_1n_2 + 2\sigma_{13}n_1n_3 + 2\sigma_{23}n_2n_3$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{محورهای مختصات به جهت تنشهای اصلی منطبق شوند}]{\text{وقتی محورهای}} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

اگر محورهای مختصات همان جهات تنشهای اصلی شوند:

(2) $\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$

$T_i = \sigma_{ij} n_j$ $\qquad T_1 = \sigma_1 n_1$ در فرمول کوشی به این صورت بدست می‌آید

$T_2 = \sigma_2 n_2$

$T_3 = \sigma_3 n_3$

$$\tau^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2$$

$$T^2 = \tau^2 + \sigma_n^2 \qquad \tau^2 = T^2 - \sigma_n^2$$

با جایگذاری $= n_1^2 n_2^2 (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + n_1^2 n_3^2 (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + n_2^2 n_3^2 (\sigma_2 - \sigma_3)^2$

* تنش برشی ماکسیمم $\qquad$ Maximum share stress

یکی از کسینوس‌های هادی را حذف می‌کنیم (به دلخواه) مثلاً n_3 و از تنش یک بار برحسب n_1 و یک بار برحسب n_2 مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم.

$n_3^2 = 1 - n_1^2 - n_2^2$ $\qquad$ (مجموع کسینوس‌های هادی برابر یک است)

$$n_1 \left[(\sigma_1 - \sigma_3) n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) n_2^2 - 0.5 (\sigma_1 - \sigma_3) \right] = 0$$

$$n_2 \left[(\sigma_1 - \sigma_3) n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) n_2^2 - 0.5 (\sigma_2 - \sigma_3) \right] = 0$$

+ حالت اول:

$n_1 = 0 \;,\; n_2 = 0 \qquad n_3 = \pm 1 \qquad \tau = 0$ (جواب بدیهی)

+ حالت دوم

$n_1 = 0 \;,\; n_2 = \pm\sqrt{2}/2 \qquad n_3 = \pm\sqrt{2}/2 \qquad \tau = \pm 1/2 (\sigma_2 - \sigma_3)$

+ حالت سوم

$n_2 = 0 \;,\; n_1 = \pm\sqrt{2}/2 \qquad n_3 = \pm\sqrt{2}/2 \qquad \tau = \pm 1/2 (\sigma_1 - \sigma_3)$

+ حالت چهارم (اگر n_2 را از ابتدا حذف می‌کردیم)

$n_3 = 0 \;,\; n_1 = \pm\sqrt{2}/2 \qquad n_2 = \pm\sqrt{2}/2 \qquad \tau = \pm 1/2 (\sigma_1 - \sigma_2)$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

Deviatoric * Stress

تنش‌های انحرافی :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{11}-\sigma_0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}-\sigma_0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}-\sigma_0 \end{pmatrix}}_{\text{مولفه‌های انحرافی تنسور تنش}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}}_{\text{مولفه‌های هایدرواستاتیک تنسور تنش}}$$

σ'_{ij} → مولفه‌های انحرافی تنسور تنش

$$\sigma_0 = I_1/3 = (\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})/3$$

* تنش‌های انحرافی در تشریح رفتار غیرالاستیک مواد کاربرد دارند.

Principal deviatoric stress.

همانند تنش‌های اصلی، انحرافی به دست می‌آید

$\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$

$$\det[\sigma'_{ij} - \sigma'\delta_{ij}] = 0$$

لاینتغیرها در این فرم تنش

$$-\sigma'^3 + J_1\sigma'^2 - J_2\sigma' + J_3 = 0$$

$$J_1 = \sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 = 0$$

$$J_2 = \sigma'_1\sigma'_2 + \sigma'_2\sigma'_3 + \sigma'_3\sigma'_1$$

$$J_3 = \sigma'_1\sigma'_2\sigma'_3$$

لاینتغیرهای تانسور تنش انحرافی برحسب لاینتغیرهای تانسور تنش معمولی:

$$J_2 = I_2 - 3\sigma_0^2$$

$$J_3 = I_3 - I_2\sigma_0 + 2\sigma_0^3$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Lame's stress ellipsoide

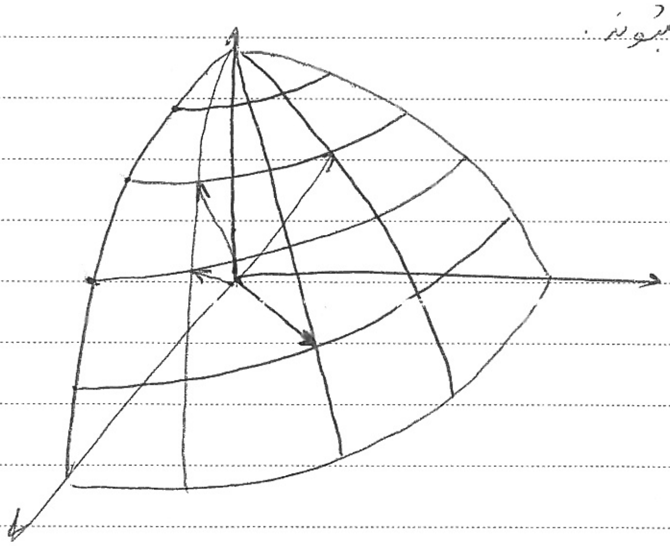
اگر محورهای مختصات بر جهات اصلی تنش های اصلی منطبق می شوند:

$$T_1 = \sigma_1 n_1 \qquad n_1 = T_1/\sigma_1$$
$$T_2 = \sigma_2 n_2 \qquad n_2 = T_2/\sigma_2$$
$$T_3 = \sigma_3 n_3 \qquad n_3 = T_3/\sigma_3$$

مجموع کسینوس های هادی برابر یک است $\Longrightarrow$ $$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

$$\frac{T_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{T_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{T_3^2}{\sigma_3^2} = 1 \quad \longleftarrow \text{بیضوی}$$

بیضوی تنش لامه: مکان هندسی انتهای بردارهای تنش T است که از مبدا مشترک دستگاه مختصات T_1 و T_2 و T_3 رسم بشوند.



Cauchy's stress quadric

$$\sigma_n = \sigma_{ij} n_i n_j$$

$$\sigma_n = \sigma_{11}^2 n_1^2 + \sigma_{22}^2 n_2^2 + \sigma_{33}^2 n_3^2 + 2\sigma_{12} n_1 n_2 + 2\sigma_{13} n_1 n_3 + 2\sigma_{23} n_2 n_3$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

از مبدا بردار عمودی n رسم می‌کنیم تا صفحه ABC را قطع کند

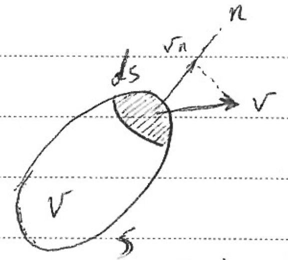
$x_i = r n_i$

$\sigma_n = \sigma_{ij} \frac{x_i}{r} \frac{x_j}{r}$ $\quad$ $r^2 \sigma_n = \sigma_{ij} x_i x_j$

$x_j = r n_j$ $\quad$ $F(x_1, x_2, x_3) = \sigma_{ij} x_i x_j \pm k^2$ $\quad$ که سطح هندسی درجه ۲

$r^2 \sigma_n = \pm k^2$ $\quad$ $\sigma_n = \pm \frac{k^2}{r^2}$

Conservation of ~~math~~ mass



طبق اصل بقای جرم، نرخ افزایش جرم درون حجم V با نرخ ریزش درون از طریق سطح S برابر است.

$M = \int_V \rho \, dv$

$\frac{\partial M}{\partial t} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv = -\int_S \rho v_i n_i ds$

علامت منفی به این خاطر است که بردار نرمال برعکس جهت ورود به داخل

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_S \rho v_i n_i ds = 0$$

معادله بالا شکل انتگرالی اصل بقای جرم است.

با توجه به رابطه گوس:

$\int_S \rho v_i n_i ds = \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) dv$

با توجه به شکل انتگرالی اصل بقای جرم:

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i)\right] dv = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0 \xRightarrow{\text{داریم}}$$

معادله بالا شکل دیفرانسیلی اصل بقای جرم

$$\xRightarrow{\text{باز کردیم}} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

Conservation of linear momentum *

اصل بقای اندازه حرکت خطی

نرخ مادی تغییرات مومنتوم خطی برای یک مجموعه مادی که حجم V با سطح جانبی S را اشغال کرده است برابر است با برآیند کلیه نیروهای خارجی وارد بر مجموعه مادی:

بردار اندازه حرکت خطی $\vec{L} = \int_m \vec{V}\, dm = \int_V \vec{V} \rho\, dv$

بردار برآیند نیروها $L_i = \int_V \rho v_i\, dv$

$$\vec{R} = \int_V \vec{F}\, dv + \int_S \vec{T}\, ds$$

$$R_i = \int_V F_i\, dv + \int_S T_i\, ds$$

$$\frac{D}{Dt} L_i = R_i$$

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho v_i\, dv = \int_V F_i\, dv + \int_S T_i\, ds$$

معادله بالا شکل انتگرالی اصل بقای مومنتوم خطی است.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \longrightarrow \int_s T_i\, ds = \int_s \sigma_{ij} n_j\, ds = \int_v \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}\, dv$$

$$\frac{D}{Dt} \int_v \rho v_i\, dv = \int_v \left(F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\right) dv$$

طبق تئوری ترانسپورت : $\frac{D}{Dt} \int_v \rho v_i\, dv = \int_v \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j)\right] dv$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j)\right] = \left(F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\right)$$

$$\int_v \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j)\right] dv = \int_v \left(F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\right) dv$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j)\right] = \left(F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\right)$$

$$\Rightarrow \rho \underline{\frac{\partial v_i}{\partial t}} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) + \underline{\rho v_j \frac{\partial}{\partial x_j} v_i} = F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) + \cancel{v_i\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j)\right)} = \left(F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\right)$$

$$\rho \frac{D}{Dt} v_i = F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

معادله بالا شکل دیفرانسیلی اصل تعادل مومنتوم خطی است.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

Conservation of angular momentum * اصل بقای اندازه حرکت زاویه‌ای

نرخ مادی تغییرات ممان مومنتوم خطی برای یک مجموعه مادی که حجم V با سطح جانبی S را اشغال کرده است برابر است با گشتاور برآیند کلیه نیروهای وارده بر مجموعه مادی.

اندازه حرکت زاویه‌ای

$$A.M \Rightarrow \underline{A} = \int_m \underline{r}\times\underline{v}\,dm = \int_V \underline{r}\times\underline{v}\,\rho\,dv$$

سرعت

$$\underline{r} = x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + x_3\underline{e}_3$$

$$\underline{v} = v_1\underline{e}_1 + v_2\underline{e}_2 + v_3\underline{e}_3 \qquad \underline{r}\times\underline{v} = \epsilon_{ijk}\,\underline{e}_i\,x_j v_k$$

$$A_i\underline{e}_i = \int_V \epsilon_{ijk}\,\rho\,\underline{e}_i\,x_j v_k\,dv \Rightarrow A_i = \int_V \epsilon_{ijk}\,\rho\,x_j v_k\,dv$$

A_i ها

برآیند نیروها

$$\underline{R} = \int_V \underline{f}\,dv + \int_S \underline{T}\,ds$$

$\underline{f}$: نیروهای حجمی (N/m^3) بر واحد حجم مجموعه مادی

$$R_i\underline{e}_i = \left[\int_V F_i\,dv + \int_S T_i\,ds\right]\underline{e}_i$$

$$R_i = \int_V F_i\,dv + \int_S T_i\,ds$$

$$\underline{M} = \underline{r}\times\underline{R} = \int_V \underline{r}\times\underline{f}\,dv + \int_S \underline{r}\times\underline{T}\,ds$$

$$M_i\underline{e}_i = \int_V \epsilon_{ijk}\,\underline{e}_i\,x_j f_k\,dv + \int_S \epsilon_{ijk}\,\underline{e}_i\,x_j T_k\,ds$$

$$M_i = \int_V \epsilon_{ijk}\,x_j f_k\,dv + \int_S \epsilon_{ijk}\,x_j T_k\,ds$$

M_i ها

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$\cancel{\frac{D}{Dt}M}$ $\quad \frac{D}{Dt}\underline{A} = \underline{M} \qquad \boxed{\frac{D}{Dt} A_i = M_i}$ (اصل بقای اندازه حرکت زاویه‌ای)

$$\vec{A} = \int_v \vec{r} \times \vec{L}\, dv = \int_v \vec{r} \times (\rho \vec{v})\, dv$$

$A_i = \int_V$

$$\frac{D}{Dt}\int_V \varepsilon_{ijk}\, \rho\, x_j v_k\, dv = \int_v \varepsilon_{ijk} x_j F_k\, dv + \int_s \varepsilon_{ijk} x_j T_k\, ds$$

با توجه به رابطه کوشی و تئوری گاوس داریم:

$$\int_s \varepsilon_{ijk} x_j T_k\, ds = \int_s \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} n_l\, ds = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j}(\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl})\, dv$$

$$= \int_V \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_l}(x_j \sigma_{kl})\, dv = \int_V \varepsilon_{ijk}\left(\sigma_{kl}\frac{\partial x_j}{\partial x_l} + x_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l}\right) dv$$

$$= \int_V \varepsilon_{ijk}\left(\sigma_{kl}\, \delta_{jl} + x_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l}\right) dv = \int_V \varepsilon_{ijk}\left(\sigma_{kj} + x_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l}\right) dv$$

بنابراین معادله انتگرالی صفحه قبل به شکل زیر در می‌آید:

$$\frac{D}{Dt}\int_V \varepsilon_{ijk}\, \rho\, x_j V_k\, dv = \int_v \varepsilon_{ijk}\left(x_j F_k + \sigma_{kj} + x_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l}\right) dv$$

با استفاده از اصل ترانسپورت:

$$\int_v \rho \frac{D}{Dt}(\varepsilon_{ijk} x_j V_k)\, dv = \int_V \varepsilon_{ijk}\left(x_j F_k + \sigma_{kj} + x_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l}\right) dv$$

$$\rho \frac{D}{Dt}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اصل بقای مومنتم زاویه‌ای به شکل ذیل در می‌آید

$$\varepsilon_{ijk}\,\sigma_{kj} = 0$$

مثلا

$$\Rightarrow \varepsilon_{123}\,\sigma_{32} + \varepsilon_{132}\,\sigma_{23} = 0$$

* شکل دیفرانسیلی اصل بقای مومنتم خطی:

$$\rho \frac{D}{Dt} v_i = F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\rho \frac{D}{Dt} v_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} + F_i \qquad \Sigma \underline{F} = m \underline{a}$$

معادلات دینامیکی حرکت

$$\rho \frac{D}{Dt} v_i = \frac{\partial}{\partial x_1} \sigma_{i1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \sigma_{i2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \sigma_{i3} + F_i$$

$$\begin{cases} \rho \dfrac{D}{Dt} v_1 = \dfrac{\partial}{\partial x_1} \sigma_{11} + \dfrac{\partial}{\partial x_2} \sigma_{12} + \dfrac{\partial}{\partial x_3} \sigma_{13} + F_1 \\ \rho \dfrac{D}{Dt} v_2 = \dfrac{\partial}{\partial x_1} \sigma_{21} + \dfrac{\partial}{\partial x_3} \sigma_{22} + \dfrac{\partial}{\partial x_3} \sigma_{23} + F_2 \\ \rho \dfrac{D}{Dt} v_3 = \dfrac{\partial}{\partial x_1} \sigma_{31} + \dfrac{\partial}{\partial x_3} \sigma_{32} + \dfrac{\partial}{\partial x_3} \sigma_{33} + F_3 \end{cases}$$

$$\rho \frac{D}{Dt} v_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} + F_i \qquad \Sigma F = m \underline{a}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} + F_i = 0$$