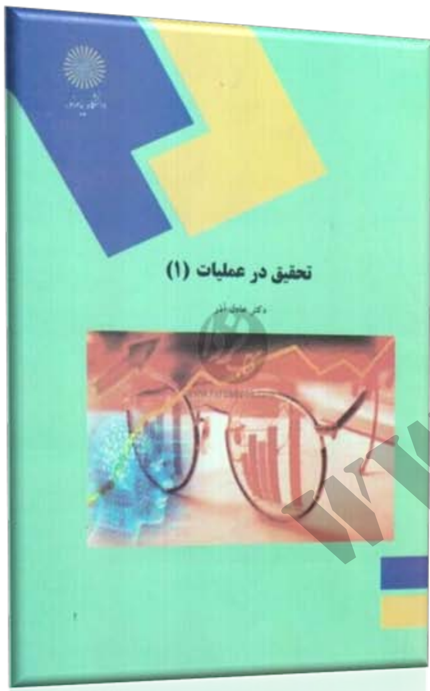
خلاصه کتاب

تحقیق در عملیات (۱)



(رشته مدیریت دولتی ، بازرگانی ، حسابداری)

ترجمه و تالیف : دکتر عادل آذر

انتشارات دانشگاه پیام نور

تهیه و تنظیم : علی بستان

پروژه دات کام

فصل اول

کلیات تحقیق در عملیات

تحقیق در عملیات [OR]

یک رویکرد علمی که درصدد حل مسائل مدیریتی است و هدف آن کمک به مدیران جهت تصمیم گیری بهتر است. نگاه این علم مانند سایر علوم به مسائل مدیریتی یک نگاه سیستماتیک و منطقی است

[تحقیق در عملیات : کاربرد روش علمی برای تحلیل و حل مسائل و تصمیمات مدیریتی است]

[OR = Operation Research]

تاریخچه تحقیق در عملیات [OR]

موضوع تحقیق در عملیات [OR] در طول جنگ جهانی دوم توسط دانشمندان انگلیسی توسعه و گسترش یافت. دلیل انجام چنین مطالعاتی محدودیت منابع و بودجه نظامی بود. پس از جنگ ، موفقیت گروههای نظامی توجه مدیران صنعتی را به خود جلب کرد. زیرا ورود تخصص شغلی در تشکیلات تجاری روز به روز حادتر می شد و این وضع منجر به مسائل تصمیم گیری پیچیده ای شده بود که نهایتا سازمانها را مجبور نمود تا درصدد استفاده از موثرترین روشهای OR برآیند.

امروزه پیشرفت چشمگیر مبانی ریاضی فنون تحقیق در عملیات و توسعه تکنولوژی رایانه، دامنه کاربرد تحقیق در عملیات را به جایی کشانده که امروزه سازمانها درصدد تهیه سیستمهای هوشمند با استفاده از منطق فازی هستند.

ویژگی های تحقیق در عملیات

تمرکز اصلی و اولیه OR بر تصمیم گیری مدیران است

رویکرد OR یک رویکرد علمی است

در OR مسائل و تصمیمات با نگاه سیستمی بررسی می شوند

رشته OR یک رشته از ترکیب چندین رشته مستقل است [دانش بین رشته ای است]

در OR از مدلهای ریاضی استفاده می شود

در OR از رایانه به وفور استفاده می شود

مدلها در تحقیق در عملیات

مدلها معمولا ساده شده واقعیت است. در OR سه مدل وجود دارد که در زیر به شرح آنها خواهیم پرداخت:

مدل شمایلی : جایگزین فیزیکی از سیستم است که معمولا در اندازه های متفاوت نشان داده می شود مانند ماکت سه بعدی و تصاویر دو بعدی

مدل قیاسی : این مدل در قالب نمودار دو بعدی بیان می شود مانند نمودار سازمانی

مدل ریاضی: مسائل پیچیده را تنها با این مدل می توان تحلیل کرد. دلایل استفاده از این مدل بدین شرح است :

- موقعیت های پیچیده را می توان تعریف کرد
- می توان زمان عملیات واقعی را شبیه سازی کرد
- آزمایش سیستم را ساده تر و امکان پذیر می سازد
- هزینه رفع عیب بسیار پایین است
- ریسک در تصمیم را محاسبه می کند
- زمینه آموزش و یادگیری را فراهم می کند

مدلهای ریاضی به سه دسته تقسیم می شوند :

قطعی : در شرایط اطمینان کامل ساخته می شود

احتمالی : در شرایط نامعین و تصادفی رخ می دهد. مهمترین مدلهای احتمالی شامل ۱– مارکوفی ۲– صف

ترکیبی : هم در شرایط قطعی و هم در شرایط احتمال ساخته می شود

فصل دوم

برنامه ریزی خطی (مدلسازی)

جدول زیر را در نظر بگیرید

میزان منابع موجود	محصول۳	محصول۲	محصول۱	
۲۰۰نفر	۵	۲	۶	نیروی انسانی
۱۵۰ کیلوگرم	۳	۵	۴	مواد اولیه
	۳۰	۳۰	۴۰	میزان سوددهی

شرکتی می خواهد بداند که از هر یک از سه محصول چه مقدار تولید کند تا با رعایت محدودیت منابع به حداکثر سود کل نایل شود

در ابتدا جدول را به صورت ریاضی در می آوریم یعنی به جای عبارت محصول از X استفاده می نماییم.

نکته: در این مسئله از واژه محصول استفاده شده است و در مسئله دیگر می تواند واژه دیگری بکار رود.

در هر صورت ما باید واژه ها را به X تبدیل نماییم

محصول ۱ ⟹ X_1

محصول ۲ ⟹ X_2

محصول ۳ ⟹ X_3

دلیل اینکه جدول را به صورت ریاضی در می آوریم این است که بتوانیم پاسخ را توسط مدل ریاضی بدست آوریم و برای این کار نمی توانیم در فرمول از کلمات محصول ۱ و محصول ۲ و... استفاده نماییم پس آنها را تبدیل به X_1 و X_2 و... می نماییم

بعد از نوشتن مدل ریاضی برای حداکثر کردن سود تابع هدف را رسم می کنیم

	محصول۱	محصول۲	محصول۳	میزان منابع موجود
نیروی انسانی	۶	۲	۵	۲۰۰نفر
مواد اولیه	۴	۵	۳	۱۵۰ کیلوگرم
میزان سوددهی	۴۰	۳۰	۳۰	

x_1 x_2 x_3

40 30 30

$40x_1$ $30x_2$ $30x_3$

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 30x_2 + 30x_3$$

تابع هدف

به دلیل حداکثرسازی سود از MAX استفاده می نماییم

محاسبه محدودیت نیروی انسانی

حال محدودیت ها را می نویسیم

	محصول۱	محصول۲	محصول۳	میزان منابع موجود
نیروی انسانی	۶	۲	۵	۲۰۰نفر
مواد اولیه	۴	۵	۳	۱۵۰ کیلوگرم
میزان سوددهی	۴۰	۳۰	۳۰	

x_1 x_2 x_3

6 2 5 200

$6x_1$ $2x_2$ $5x_3$

محدودیت نیروی انسانی

$$6x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 200$$

به این دلیل از علامت $\leq$ استفاده نموده ایم که میزان محصول مصرفی ما در محصول ۱و۲و۳ باید کمتر از میزان منابع موجود باشد. یعنی اگر ما ۲۰۰ نفر نیروی کار داشته باشیم نخواهیم توانست از ۲۵۰ نفر در یک مسئله استفاده نماییم و حتما باید میزانی منابع بکار ببریم که یا برابر و یا کمتر از میزان منابع موجود باشد

محاسبه محدودیت مواد اولیه

	محصول۱	محصول۲	محصول۳	میزان منابع موجود
نیروی انسانی	۶	۲	۵	۲۰۰نفر
مواد اولیه	۴	۵	۳	۱۵۰ کیلوگرم
میزان سوددهی	۴۰	۳۰	۳۰	

x_1 x_2 x_3

4 5 3 150

$4x_1$ $5x_2$ $3x_3$

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 150$$

محدودیت مواد اولیه

محدودیت را با s.t نشان می دهند

میزان منابع موجود	محصول۳	محصول۲	محصول۱	
۲۰۰نفر	۵	۲	۶	نیروی انسانی
۱۵۰ کیلوگرم	۳	۵	۴	مواد اولیه
	۳۰	۳۰	۴۰	میزان سوددهی

$$\left.\begin{array}{l} 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 200 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 150 \end{array}\right\}$$ محدودیت کارکردی

$$\left. x_1 , x_2 , x_3 \geq 0 \right\}$$ محدودیت علامت

صورت کلی محدودیت ها

محدودیت کارکردی: به میزان منابع موجود گفته می شود که در فرایند تولید به ما نشان می دهد در هنگام تولید توان استفاده بیشتر از این مقدار را نخواهیم داشت

محدودیت علامت: به ما نشان می دهد که تولید نمی تواند کمتر از صفر باشد یعنی ما هیچگاه تولید منفی نداریم

در نتیجه خواهیم داشت

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 30x_2 + 30x_3$$

s.t

$$6x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 200$$

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 150$$

$$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$$

فصل سوم

برنامه ریزی خطی روش هندسی

برنامه ریزی خطی

جدول زیر را در نظر بگیرید

	نیروی کار	مواد اولیه	سود
محصول ۱	۱	۴	۴۰
محصول ۲	۲	۳	۵۰
میزان منابع موجود	۴۰	۱۲۰	

	نیروی کار	مواد اولیه	سود
محصول ۱	۱	۴	۴۰
محصول ۲	۲	۳	۵۰
میزان منابع موجود	۴۰	۱۲۰	

محصول ۱ ⟸ X_1

محصول ۲ ⟸ X_2

تابع هدف

	نیروی کار	مواد اولیه	سود
محصول ١	١	۴	۴٠
محصول ٢	٢	٣	۵٠
میزان منابع موجود	۴٠	١٢٠	

Max Z

$40x_1 + 50x_2$

از آنجایی که هدف حداکثر کردن سود است پس در تابع هدف از Max استفاده می نماییم

اگر هدف حداقل کردن هزینه و... باشد از Min استفاده می کنیم

تابع هدف

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 50x_2$$

محدودیت یا s.t

	نیروی کار	مواد اولیه	سود
محصول ۱	۱	۴	۴۰
محصول ۲	۲	۳	۵۰
میزان منابع موجود	۴۰	۱۲۰	

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 120$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 50x_2$$

s.t

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 120$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

پس در حالت کلی خواهیم داشت

ابتدا $\leq$ را تبدیل به = می کنیم

پس خواهیم داشت

$$x_1 + 2x_2 = 40$$

x_1 را صفر در نظر می گیریم حال باید ۲ را در چه عددی ضرب کنیم تا برابر ۴۰ شود

مطمئنا می گویید ۲۰ ، پس x_2 برابر ۲۰ است

$$(0) + 2(20) = 40$$

x_2 را صفر در نظر می گیریم پس x_1 برابر ۴۰ است

$$(40) + 2(0) = 40$$

در کل خواهیم داشت

$$\begin{cases} x_1 = 40 \\ x_2 = 20 \end{cases}$$

ابتدا $\le$ را تبدیل به = می کنیم

پس خواهیم داشت

$$4x_1 + 3x_2 = 120$$

x_1 را صفر در نظر می گیریم حال باید ۳ را در چه عددی ضرب کنیم تا برابر ۱۲۰ شود

مطمئنا می گویید ۴۰ ، پس x_2 برابر ۴۰ است

$$4(0) + 3(40) = 120$$

x_2 را صفر در نظر می گیریم حال باید ۴ را در چه عددی ضرب کنیم تا برابر ۱۲۰ شود

مطمئنا می گویید ۳۰ ، پس x_1 برابر ۳۰است

$$4(30) + 3(0) = 120$$

در کل خواهیم داشت

$$\begin{cases} x_1 = 30 \\ x_2 = 40 \end{cases}$$

حالت کلی

$$x_1 + 2x_2 = 40$$

$$(0) + 2(20) = 40$$

$$(40) + 2(0) = 40$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_2 = 20 \\ x_1 = 40 \end{array}\right.$$

$$4x_1 + 3x_2 = 120$$

$$4(0) + 3(40) = 120$$

$$4(30) + 3(0) = 120$$

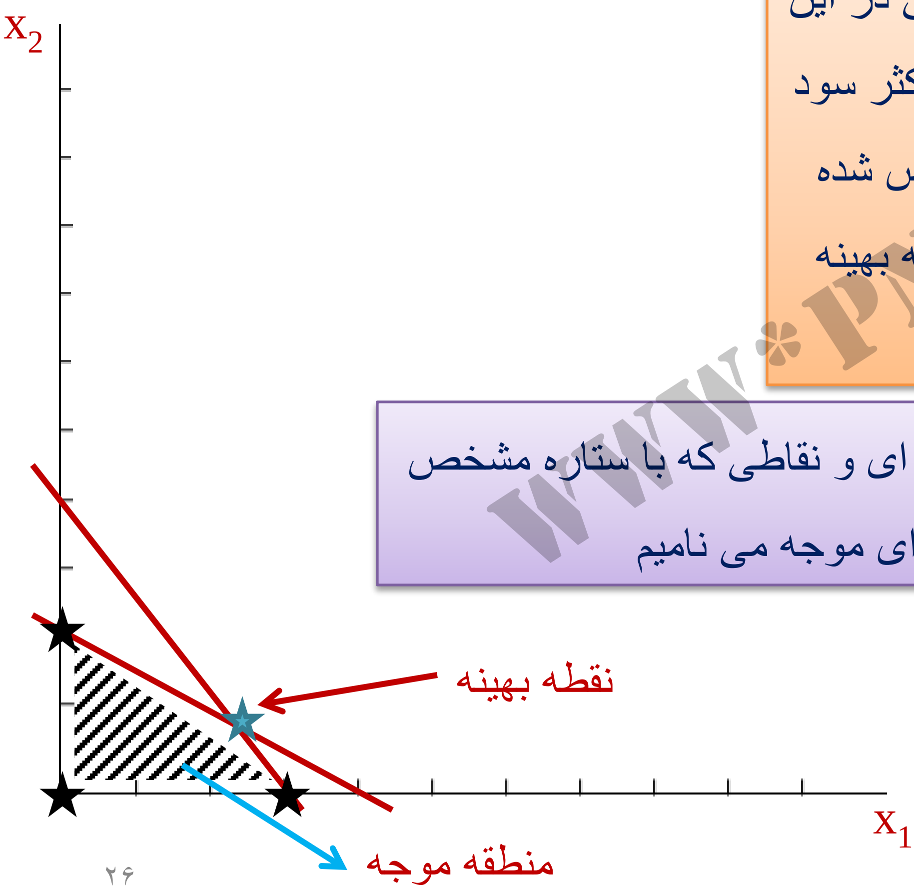
$$\left\{\begin{array}{l} x_2 = 40 \\ x_1 = 30 \end{array}\right.$$

چند نکته:

بر اساس نقاطی که در اسلاید قبل بدست آوردیم و با رنگ آبی مشخص کردیم خطوط را رسم می کنیم

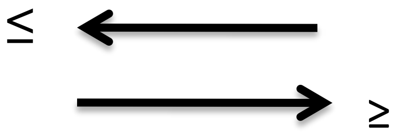
منطقه هاشور خورده منطقه موجه است یعنی در این ناحیه به سود می رسیم ولی ما به دنبال حداکثر سود هستیم پس نقطه ای که با ستاره آبی مشخص شده است نقطه حداکثر سود است که به آن نقطه بهینه می گوییم

محل تلاقی دو خط را نقطه گوشه ای و نقاطی که با ستاره مشخص شده را نقطه گوشه ای موجه می نامیم

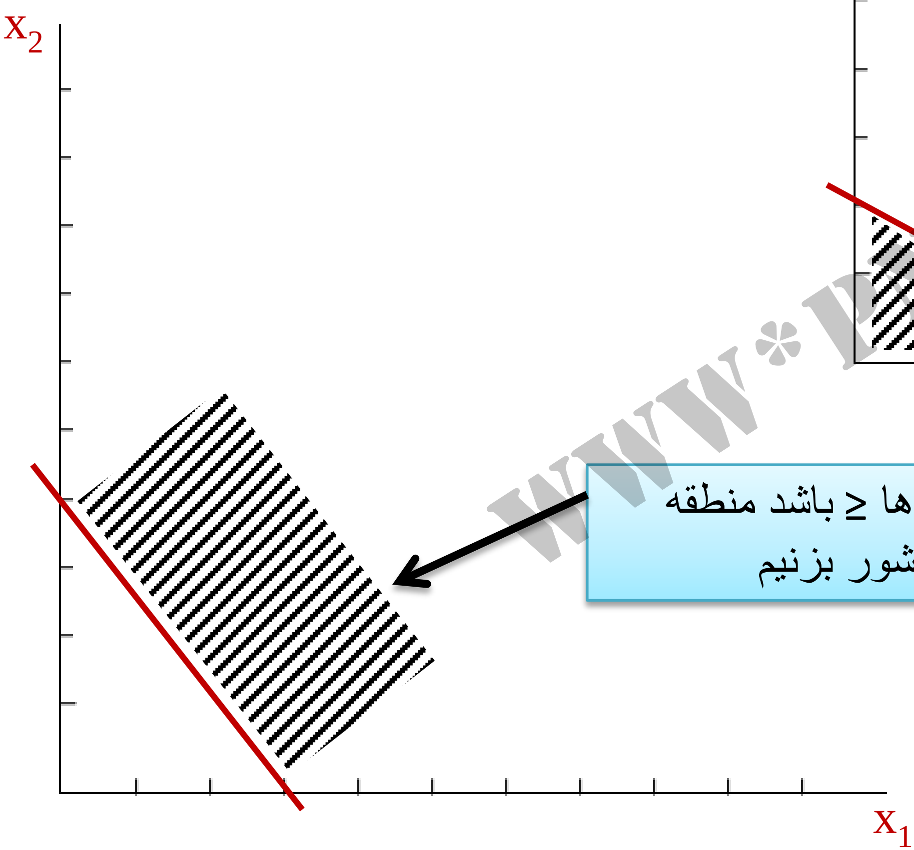


منطقه ی مشترک بین تمام خطوط را منطقه موجه می نامیم

اگر این مسئله را فراموش کردید بهتر است که علامت ها را مانند نوک پیکان در نظر بگیرید. نوک پیکان به هر سمت که باشد آن منطقه را باید هاشور زد.



به دلیل اینکه علامت محدودیت ها ≤ بود
منطقه هاشور خورده سمت چپ بوده است



اگر علامت محدودیت ها ≥ باشد منطقه
سمت راست را باید هاشور بزنیم

نقطه بهینه

نقطه بهینه

برای بدست آوردن نقطه بهینه باید طبق دستو زیر عمل نمایید

ابتدا چهار نقطه گوشه ای موجه را با حروف A,B,C,D مشخص می کنیم

سپس x_1 و x_2 نقاط A,B,C را می نویسیم برای این کار تنها باید به دستگاه مقابل نگاه کنید. با یک نگاه ساده می توانید ببینید که نقطه A بر روی 0,20 نقطه B بر روی 0,0 ونقطه C بر روی 30,0 قرار گرفته اند

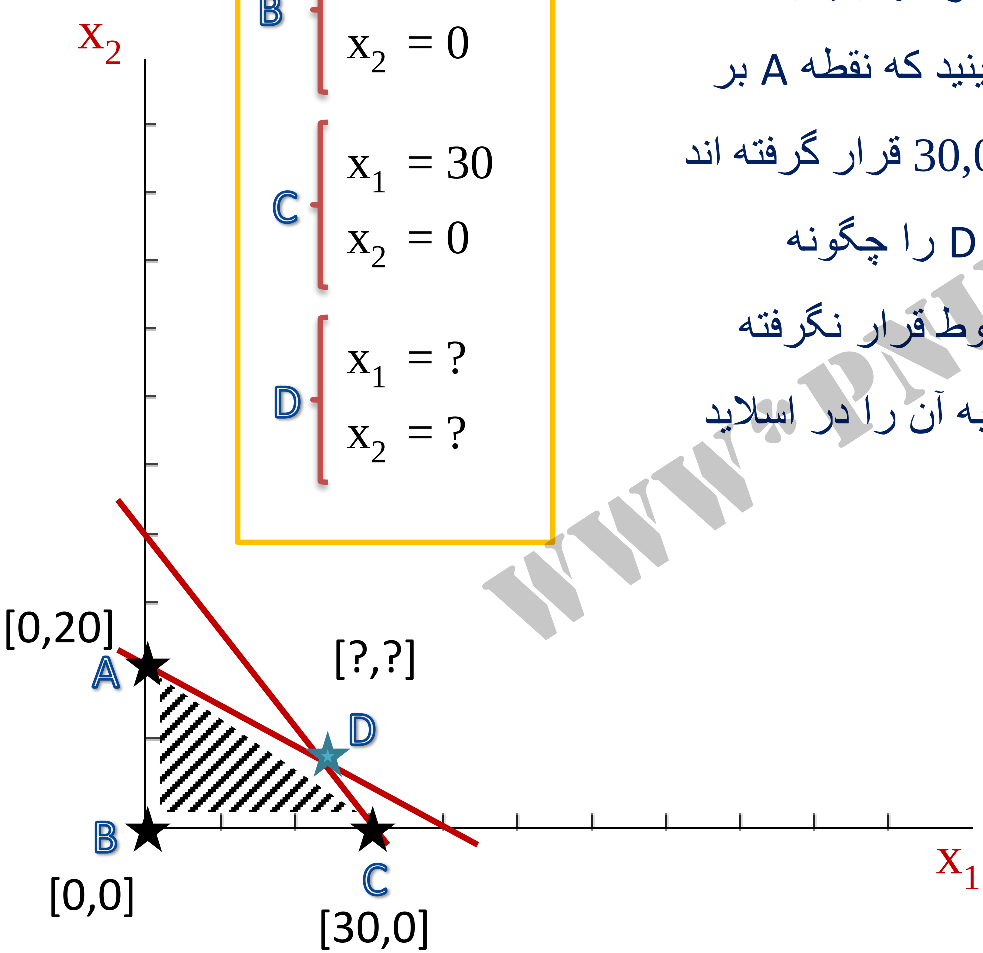
حال ممکن است این سوال برایتان پیش بیاید که نقطه D را چگونه بدست آوریم؟چون این نقطه بر روی هیچ یک از خطوط قرار نگرفته پس باید این نقطه را با محاسبه بدست آورید که محاسبه آن را در اسلاید بعد می توانید مشاهده نمایید

$$A\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 20 \end{cases}$$

$$B\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$C\begin{cases} x_1 = 30 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$D\begin{cases} x_1 = ? \\ x_2 = ? \end{cases}$$



قبل از محاسبه، تابع هدف و محدودیت ها را در نظر بگیرید

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 50x_2$$

s.t

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 120$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

حال به اسلاید بعد بروید

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 40 & \text{معادله ۱} \\ 4x_1 + 3x_2 = 120 & \text{معادله ۲} \end{cases}$$

طرفین معاده ۱ را در 4- ضرب می کنیم و همانگونه که در زیر می بینید محاسبه می نماییم

$$-4\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 40 \\ 4x_1 + 3x_2 = 120 \end{cases} \quad \begin{cases} -4x_1 - 8x_2 = -160 \\ 4x_1 + 3x_2 = 120 \end{cases} \quad \begin{cases} \cancel{-4x_1} - 8x_2 = -160 \\ \cancel{4x_1} + 3x_2 = 120 \end{cases}$$

$$-5x_2 = -40$$

$$x_2 = 8$$

بنابراین با مشخص شدن مقدار x_2 می توانیم به کمک یکی از معادلات اصلی مقدار x_1 را نیز تعیین نماییم

$x_1 + 2(8) = 40 \rightarrow 2(8) = 16 \rightarrow 40 - 16 = 24 \rightarrow x_1 = 24$

حال که تمامی نقاط x_1 , x_2 را برای A,B,C,D مشخص نمودیم می توانیم آنها را در تابع هدف قرار دهیم تا نقطه بهینه را بدست آوریم برای این کار به اسلاید بعد مراجعه نمایید

نقاط بدست آمده را در تابع هدف وارد می کنیم.
بزرگ ترین نقطه بدست آمده نقطه بهینه خواهد بود

تابع هدف

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 50x_2$$

A $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 20 \end{cases} \Rightarrow 40(0) + 50(20) = 1000$

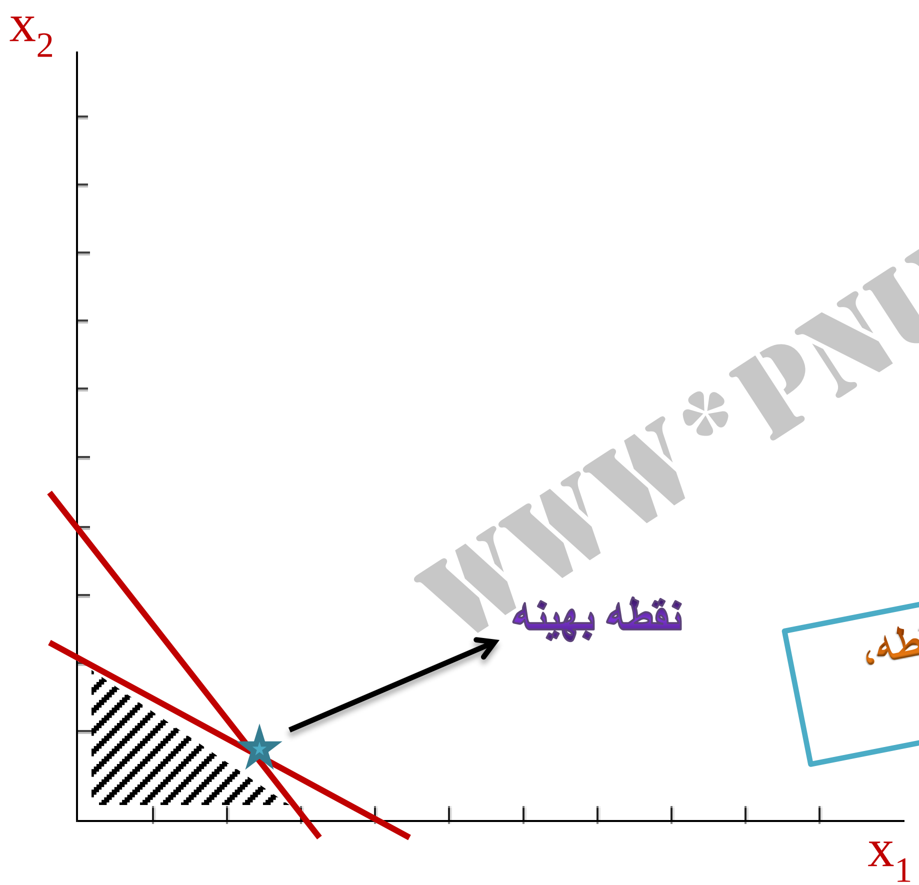
B $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 40(0) + 50(0) = 0$

C $\begin{cases} x_1 = 30 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 40(30) + 50(0) = 1200$

D $\begin{cases} x_1 = 24 \\ x_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow 40(24) + 50(8) = \boxed{1360}$

نقطه بهینه

همانطور که مشاهده می نمایید چون بیشترین مقدار متعلق به نقطه D است پس نقطه بهینه ما همین نقطه است



حال مشاهده نمودید که به چه دلیل به این نقطه،
نقطه بهینه می گوییم.

حالتهای خاص نقطه بهینه

۱- جواب بهینه چند گانه

مسائل برنامه ریزی خطی در فرم استاندارد دارای یک گوشه بهینه می باشند که مقدار تابع هدف به ازای آن نقطه حداکثر یا حداقل می گردد. اما هرگاه معادله تابع هدف موازی یکی از محدودیت ها باشد آنگاه مسئله برنامه ریزی خطی دارای جواب بهینه چندگانه خواهد بود. البته موازی بودن تابع هدف با یکی از محدودیت ها تنها شرط کافی برای جواب بهینه چند گانه بودن نیست. در کل هرگاه پس از محاسبه به دو یا چند نقطه بهینه یکسان رسیدیم آن مسئله جواب بهینه چندگانه است.

۲- فاقد ناحیه موجه (جواب)

هرگاه نتوان برای کلیه ی محدودیت های مدل ناحیه مشترکی را پیدا نمود گویند مسئله فاقد ناحیه ی موجه می باشد.

۳- ناحیه جواب بیکران

در برخی از مسائل ناحیه ی موجه مدل طراحی شده، به وسیله ی محدودیت ها محصور نمی شود به عبارت دیگر ناحیه موجه در میان معادلات مرزی بسته نمی شود. در چنین مدل هایی ممکن است تابع هدف به نحو نامحدودی افزایش یا کاهش یابد و هیچگاه به حداکثر یا حداقل نرسد. یعنی جواب بهینه مسئله می تواند محدود و معین و یا نامحدود باشد.

۴- جواب تبهگن

در یک مسئله برنامه ریزی خطی اگر گوشه موجه از محل تلاقی بیش از دو معادله ی مرزی تشکیل شود مسئله تبهگن خواهد بود. یعنی گوشه ای که بیش از دو معادله ی مرزی تشکیل شده باشد را گوشه ی تبهگن گویند.

جواب بهینه چندگانه

جواب بهینه چند گانه : در جواب بهینه چندگانه دو یا چند نقطه مساوی بدست می آید

مثال)

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 30x_2$$

s.t:

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 120$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

بر اساس تابع هدف و محدودیت های داده شده می خواهیم بدانیم

این مسئله جزء کدام حالت از حالتهای خاص نقطه بهینه است

نقاط X را برای معادله ۱و۲ بدست می آوریم

$$4x_1 + 3x_2 = 120$$

$$4(0) + 3(40) = 120$$

$$4(30) + 3(0) = 120$$

$$\begin{cases} x_1 = 30 \\ x_2 = 40 \end{cases}$$

$$x_1 + 2x_2 = 40$$

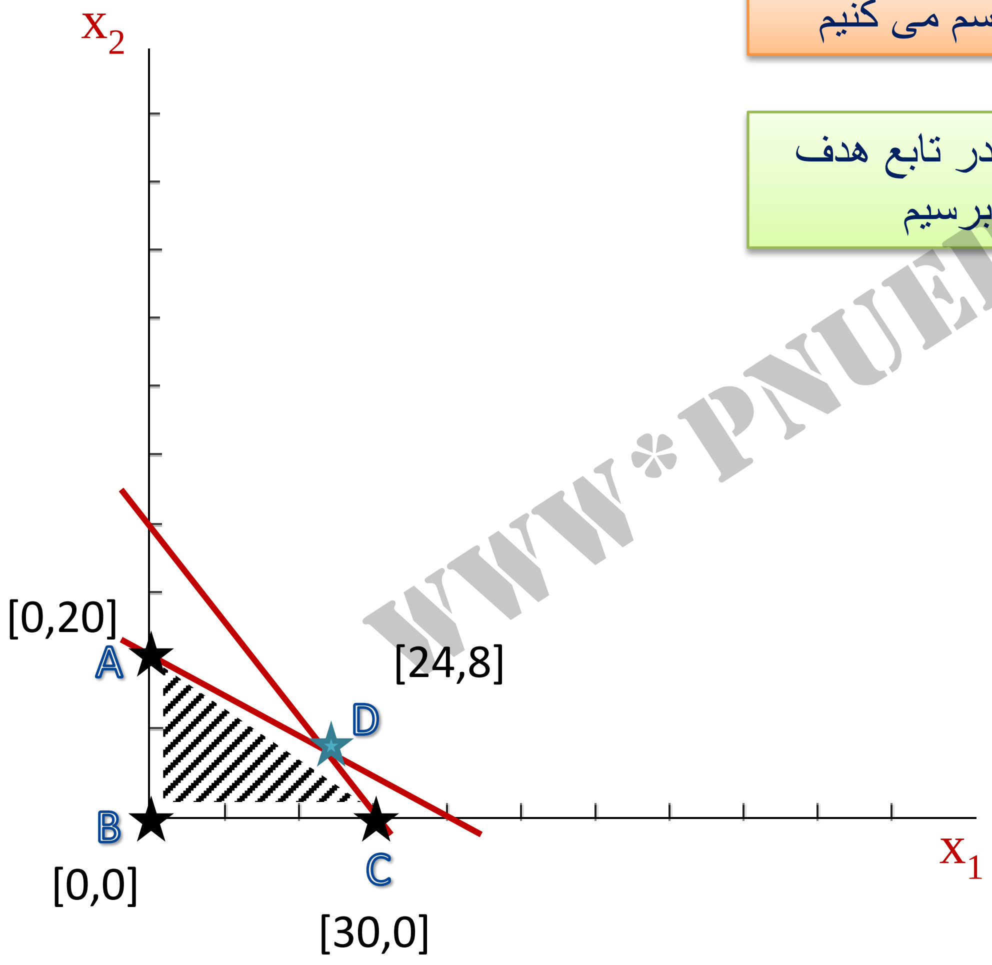
$$(0) + 2(20) = 40$$

$$(40) + 2(0) = 40$$

$$\begin{cases} x_1 = 40 \\ x_2 = 20 \end{cases}$$

نقاط بدست آمده در اسلاید قبل را رسم می کنیم

در اسلاید بعد نقاط گوشه ای بهینه را در تابع هدف قرار می دهیم تا به نقطه بهینه برسیم



تابع هدف

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 30x_2$$

A $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 20 \end{cases} \Rightarrow 40(0) + 30(20) = 600$

B $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 40(0) + 30(0) = 0$

C $\begin{cases} x_1 = 30 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 40(30) + 30(0) = \boxed{1200}$

D $\begin{cases} x_1 = 24 \\ x_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow 40(24) + 30(8) = \boxed{1200}$

همانطور که مشاهده می نمایید در این مسئله به دو نقطه مساوی دست پیدا کردیم پس دو
نقطه بهینه داریم بنابراین جواب بهینه چند گانه است

فاقد ناحیه موجه

فاقد ناحیه موجه : هرگاه نتوانیم منطقه موجه مشترک برای تمام محدودیت ها بیابیم

مثال)

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 3x_2$$

s.t:

$$4x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1 \geq 4$$

$$x_2 \geq 6$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

بر اساس تابع هدف و محدودیت های داده شده می خواهیم بدانیم

این مسئله جزء کدام حالت از حالتهای خاص نقطه بهینه است

نقاط X را برای معادله ۱و ۲و۳ بدست می آوریم

$4x_1 + 2x_2 = 8$

$4(0) + 2(4) = 8$

$4(2) + 2(0) = 8$

$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

$x_1 = 4$

$(4) = 4$

$\begin{cases} x_1 = 4 \end{cases}$

$x_2 = 6$

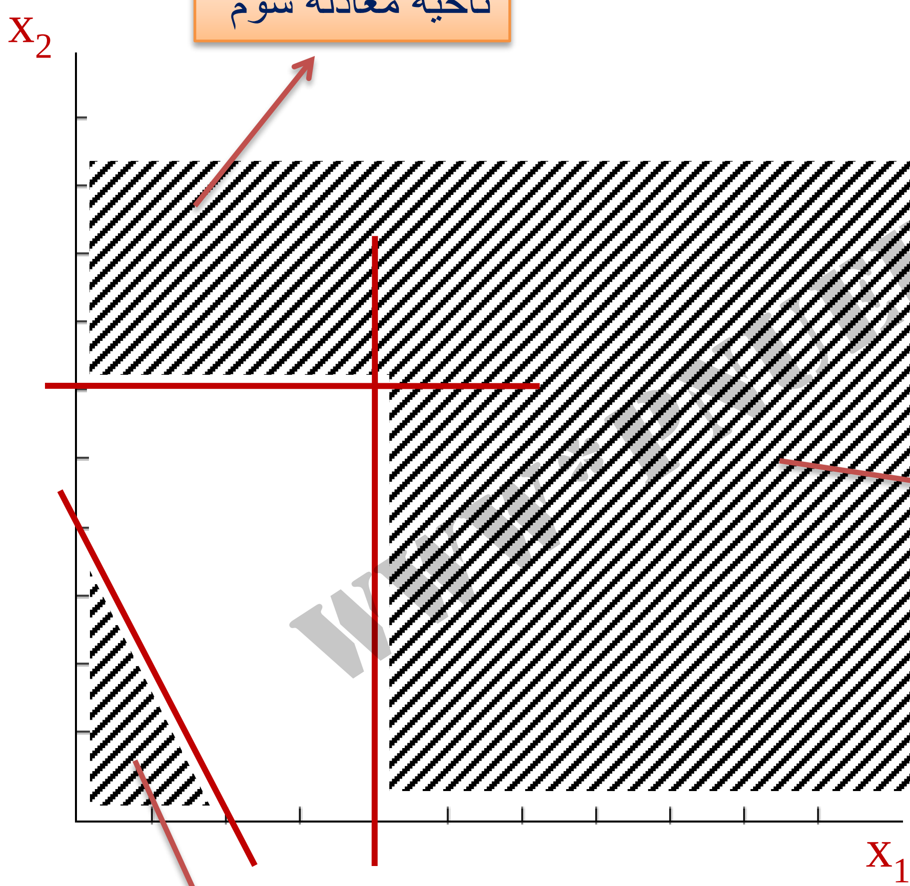
$(6) = 6$

$\begin{cases} x_2 = 6 \end{cases}$

نقاط بدست آمده در اسلاید قبل را رسم می کنیم

اگرچه ناحیه دوم و سوم دارای نقاط مشترکی هستند اما از آنجایی که با ناحیه اول نقطه مشترکی ندارند مسئله جواب ندارد

ناحیه معادله سوم



ناحیه معادله دوم

ناحیه معادله اول

ناحیه جواب بیکران

ناحیه جواب بیکران: اگر منطقه موجه توسط محدودیت ها بسته نشود

مثال)

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 2x_2$$

s.t:

$$x_1 \geq 4$$

$$x_2 \leq 8$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

بر اساس تابع هدف و محدودیت های داده شده می خواهیم بدانیم

این مسئله جزء کدام حالت از حالتهای خاص نقطه بهینه است

نقاط X را برای معادله ۱و ۲ بدست می آوریم

$x_1 = 4$

$(4) = 4$

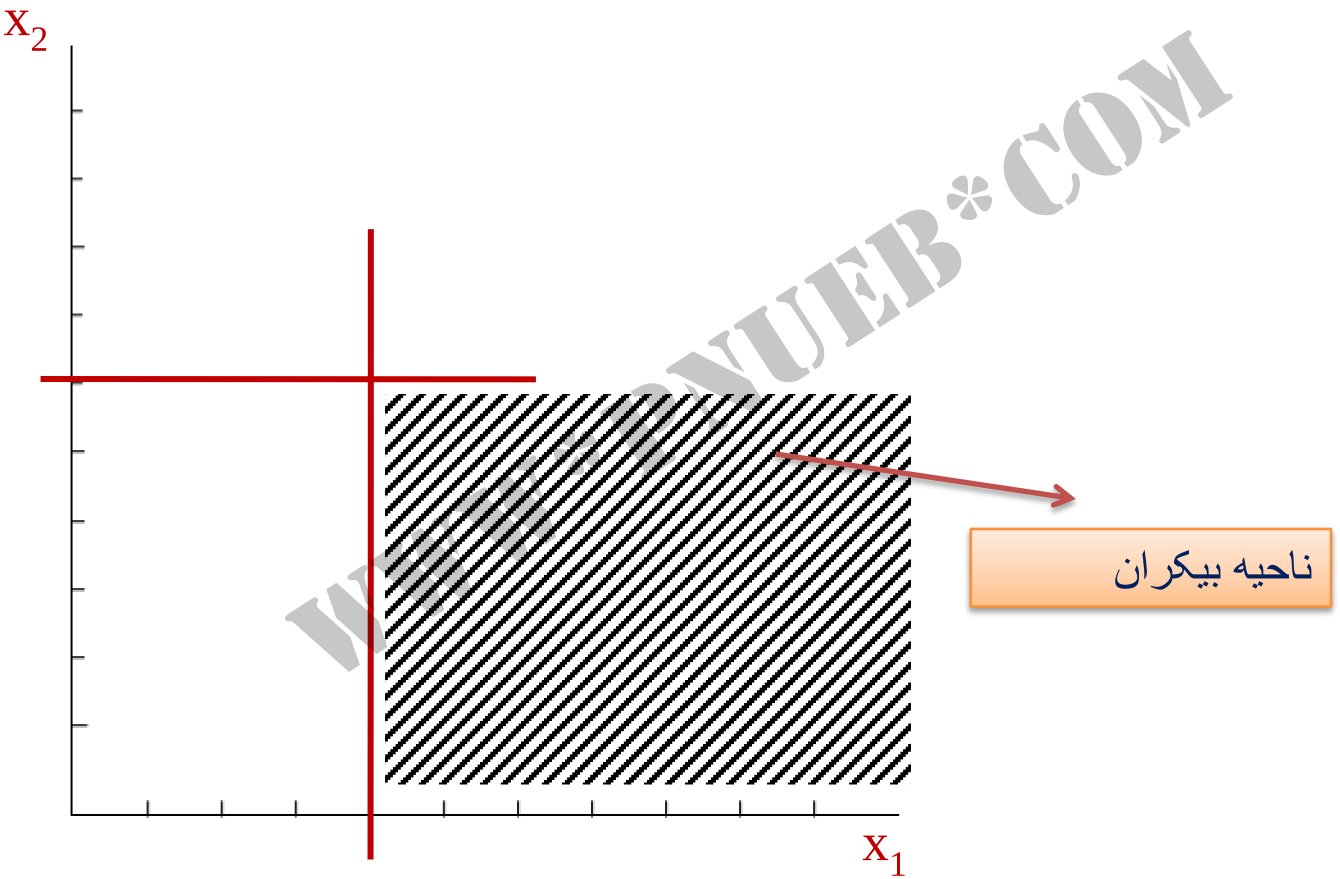
$x_2 = 8$

$(8) = 8$

$\{\ x_1 = 4$

$\{\ x_2 = 8$

نقاط بدست آمده در اسلاید قبل را رسم می کنیم



بنابراین تا بیکران منطقه موجه وجود دارد

جواب تبهگن

جواب تبهگن: اگر از یک نقطه بیش از دو خط عبور کند آن را نقطه تبهگن می نامیم

مثال)

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 6x_2$$

s.t:

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$x_2 \leq 3$$

$$5x_1 + 10x_2 \leq 40$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

بر اساس تابع هدف و محدودیت های داده شده می خواهیم بدانیم

این مسئله جزء کدام حالت از حالتهای خاص نقطه بهینه است

نقاط x را برای معادله ۱و ۲و۳ بدست می آوریم

$$6x_1 + 4x_2 = 24$$

$$6(0) + 4(6) = 24$$

$$6(4) + 4(0) = 24$$

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 6 \end{cases}$$

$$x_2 = 3$$

$$(3) = 3$$

$$\begin{cases} x_2 = 3 \end{cases}$$

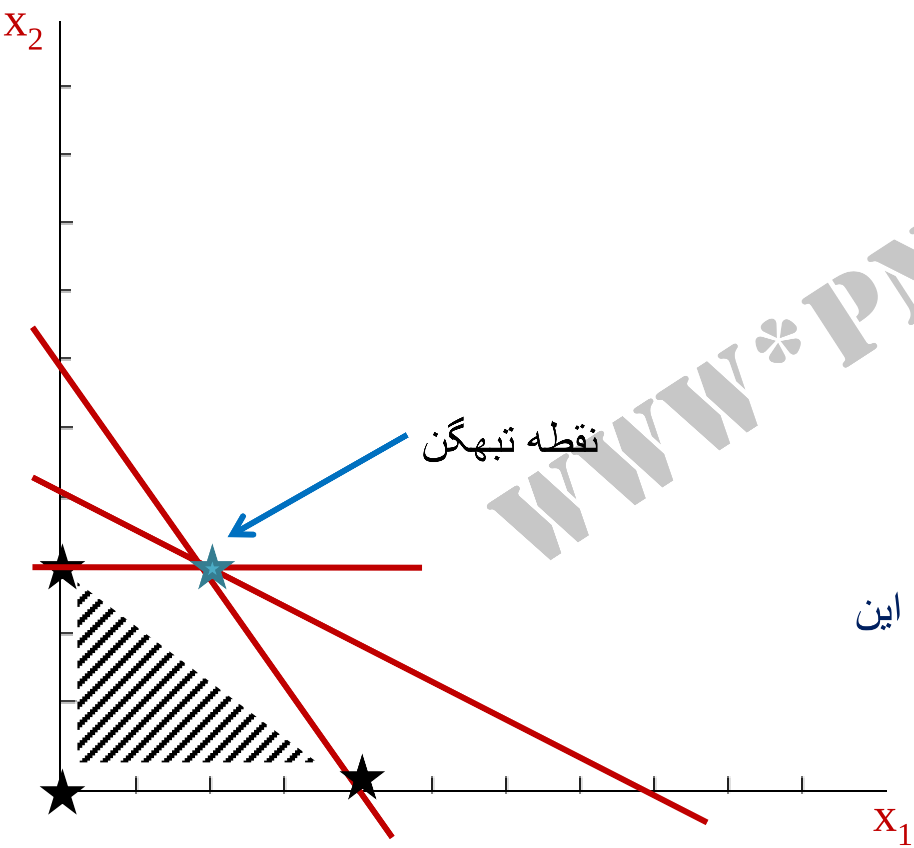
$$5x_1 + 10x_2 = 40$$

$$5(0) + 10(4) = 40$$

$$5(8) + 10(0) = 40$$

$$\begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

نقاط بدست آمده در اسلاید قبل را رسم می کنیم



به دلیل اینکه بیش از دو خط از یک نقطه عبور کرده است این نقطه تبهگن است