۱

دینامیک سیالات محاسباتی

استاد: آقای حسینعلی‌پور

آزمایشگاه CFD و مرکز CAE ← ۷۳۹۱۲۹۴۴
۷۳۹۱۲۱۴۴

آزمایشگاه دانشکده موتورهای احتراق داخلی (ماشین‌های ادواری) ← ۷۳۹۱۲۹۴۰

اتاق ← ۷۳۹۱۲۹۳۹

---

۴ نمره تمرین + ۳ پروژه برنامه‌نویسی

امتحان ۱۰ نمره + سمینار در حدود CFD
در مورد تکنیک‌های جدید

چرا CFD ؟

تجزیه و تحلیل یک مسئله پیچیده

اگر یک سیستم موجود باشد ← چگونه آن را ارزیابی کنیم Performance → index

مثل راندمان در موتور حرارتی که عامل مناسب در موتور می‌تواند باشد

در هدف خاصی برای انجام کاری را دنبال می‌کنیم ← دنبال ساخت تجهیزات

روش طراحی چیست؟ Design

ساخت طراحی دهند و ما ساخت طراحی را انجام می‌دهیم.

اگر سیستم موجود باشد و می‌خواهیم آن را بهبود بخشیم ← optimization

— ابزارهای تحلیلی

قوانین پایه در یک سری مدل‌ها ← امکان انجام می‌یابد

← تعادل انرژی را در مورد سیستم در یک سیستم و محیط‌های که تحلیل می‌کنیم دقت کنیم.

قوانین نیوتن
قوانین ترمودینامیک ← قانون بقا ⇐
قوانین نسبی

بقای جرم
بقای ممنتم
بقای انرژی
انتروپی
شیمیایی

— ابزارهای عددی

زمانی استفاده می‌شود که ابزار تحلیلی قابل حصول نباشد

معادلات ناویر استوکس غیرخطی (PDE)، Partial و کوپل هستند. توانایی هم دارند

باید این معادلات ODE تبدیل شوند تا معادلات جبری (روش‌های عددی)

ایراد معادلات جبری چیست؟ PDE در یک محیط پیوسته عمل می‌کند اما معادلات جبری نقاط را گسسته‌سازی می‌کند.

در حقیقت به صورت مشبندی محیط (گسسته‌سازی) استفاده از معادلات جبری ممکن است.

ما بطور کلی ۲ راه داریم ① معادلات را گسسته‌سازی کنیم ② محیط را شبکه‌بندی کنیم

همچنین حل معادلات هم مشکل است.

در این درس ① هندسه سازی می‌شود ② روش finite volume (حجم محدود) استفاده می‌شود ③ بررسی تکنیک‌های verification بررسی می‌شود ④ معادله ناویر استوکس را مرور می‌کنیم.

منابع: آشنایی با تکنیک‌های عددی / روش اعمال روی ناویر استوکس / نحوه نوشتن برنامه / استفاده از برنامه‌های تجاری

اهداف رئوس درس
- توسعه و معرفی یک روش عددی که فرآیندهای مربوط به انتقال حرارت، جرم و حل یک دسته معادلات را با روش عددی حل کند
- مبانی توسعه یک روش عددی را بفهمیم (روش‌های عددی بر اساس نیاز دیگران طرح شده اند)
- کاربردهای روش‌های عددی توسط ما

هذلولوی — سهموی — بیضوی

خلاصه‌ای از مطالب درس

۱- مروری بر روابط حاکم (بقای جرم، انرژی، مومنتوم) (دسته بندی و شناخت ترم‌ها در معادلات در شکل کلی و دیفرانسیلی) (دسته بندی معادلات)

۲- مختصات
- شبکه بندی
- دسته بندی: یک راهه One way / دو راهه Two way

۳- معرفی روش‌های عددی
- معرفی یک سری خواص کلی (سازگاری، پایداری، همگرایی و ...)
- خطا (تحلیل خطا)

{۲ سری تمرین}

۴- روش Finite volume یا Central volume
- ۱- ابتدا روی بخش‌هایی از معادلات با طبیعت نفوذ ← Diffusion Type Problem {یک سری تمرین + پروژه}
- ۲- مسائل نفوذ و جابجایی (نفوذ، انتقال جرم، نفوذ ...) ← {پروژه}
- ۳- مسائلی از نوع نفوذ در صورتیکه میدان جریان معلوم ← {یک سری تمرین}
- ۴- مسائل شامل حل معادلات ← {یک سری تمرین و پروژه نهائی}

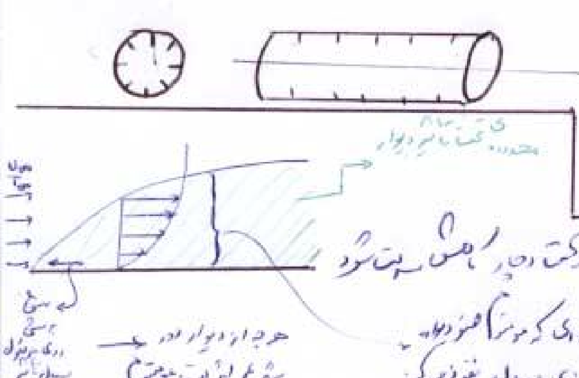
۵- مباحث انتقال حرارت
انتقال حرارت در کانال‌ها
- جریان توسعه یافته ساده.
- جریان توسعه یافته پیچیده.

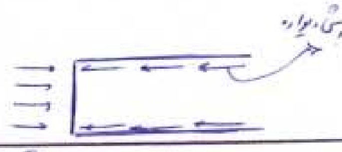
۶- مدل سازی توربولانس
- جبری
- دیفرانسیلی: تک معادله‌ای، دو معادله‌ای، یک و نیم معادله‌ای
- ...: RSM، ASM

۷- محاسبات مرزی

چند مثال

جریان توسعه یافته درون لوله پیچ دار





توضیح لایه مرزی

✓ تاثیری که دیواره روی جریان سیال می‌گذارد و باعث می‌شود جریان در جهت حرکت دچار کاهش سرعت شود

هرچه از دیواره دور شوم اثرات مومنتوم نفوذ دیواره روی مومنتوم غیر نفوذ سیال کمتر می‌شود

فاصله‌ای که مومنتوم نفوذ دیواره در درون سیال نفوذ کند را منطقه تحت تاثیر مرزی گویند (در هر مقطع)

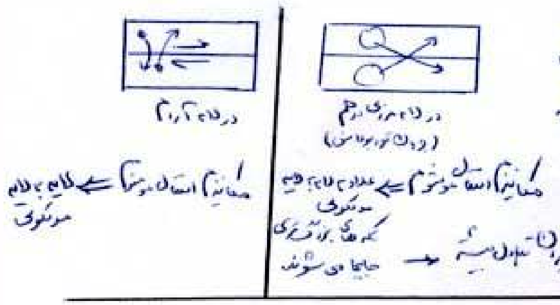
✓ با حرکت سیال جلو نفوذ مومنتوم دیواره بیشتر می‌شود و روش اعمال مومنتوم از طریق لزجت سیال صورت می‌گیرد که باعث کاهش سرعت سیال می‌شود ← $\frac{\partial u}{\partial y}$

✓ گرادیان سرعت روی دیواره برای ما خیلی مهم است چون تنش روی دیواره را به ما می‌دهد $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}$ $\tau = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}$

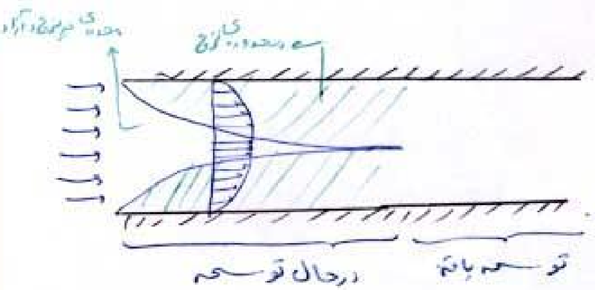
✓ وقتی نفوذ اعمال مومنتوم دیواره به سیال از طریق خاصیت لزجت سیال اعمال می‌شود که باعث گرادیان سرعت می‌شود

✓ در محدوده‌ی انتقال حرارت جابجایی کار جریانی بسیار مهم است، برای انتقال یک مقدار مشخص سیال از یک نقطه به نقطه‌ی دیگر مقداری سیال باید عقب زده شود معادل است با کاری که سیال برای انتقال باید به محیط اعمال کند تا حرکت کند (Flow work)

✓ در جریان توربولانس، برای لایه مرزی مکانیزم انتقال مومنتوم لایه به لایه است (به اثر تنش برشی) علاوه بر مکانیزم مولکولی شود و شیب پروفیل تیزتر می‌کند. یعنی علاوه بر مولکول‌ها که بین لایه‌ها منتقل می‌شوند مسئول انتقال هستند (تبادل مومنتوم) چون میزان تنش بزرگتر شده است. تکه‌های بزرگتری از سیال بین لایه‌ها در حال جابجا شدن و تاثیرگذاری هستند و تبادل مومنتوم بیشتر خواهد بود.



پایان توضیح حل لایه مرزی



— در داخل لوله هم دو لایه مرزی وجود دارد

✓ یک محدوده‌ی توسعه یافته و در حال توسعه داریم

در محدوده‌ی در حال توسعه چون شیب وجود دارد (تغییرات سرعت) به این نام است. (چرا شیب؟ چون مقطع عبوری سیال به اثر بزرگ شدن لایه مرزی در حال کوچک شدن است پس سرعت افزایش می‌یابد $\frac{\partial u}{\partial x} \neq 0$ پس به مرور سرعت سیال افزایش یافته است)

پروفیل سرعت از یک مقطع به مقطع دیگر در حال توسعه یافتن است (سرعت در حال زیاد شدن است به دلیل بالا) در محلی که لایه‌های مرزی به هم می‌رسند دیگر توسعه یافتگی (در جهت حرکت) نخواهیم داشت چون دلیلی برای ازدیاد سرعت (در جهت حرکت) وجود ندارد و $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ خواهد شد.

✓ نوع روش حل و نوع معادلات حاکم در بخش توسعه یافته و در حال توسعه هم متفاوت است.

✓ در شار گفتیم نوع فیزیکی دارد (هدف ما از فیزیک افزایش انتقال حرارت بوسیله ازدیاد سطح انتقال حرارت است)

✓ فیزیک را در حالتی قرار می‌دهیم که ضریب انتقال حرارت کوچکی داشته باشیم.

$$q = h\,A\,\Delta T$$

ΔT ← اختلاف دمای سطح با دمای متوسط سیال
A ← سطح دما
h ← ضریب انتقال حرارت جابجایی

✓ ضریب انتقال حرارت جابجایی
۲ پارامترهای خواص سیال
و نوع رژیم جریان وابسته
است که به صورت ورود در Re و Pr خودشان را نشان می‌دهیم.

$$h = f(\text{تاثیرات خواص سیال ، تاثیرات رژیم جریان})$$

Re ← این را نشان می‌دهد (چون تاثیرات رژیم جریان یعنی وابستگی به سرعت رژیم جریان را نشان می‌دهد و وابسته به ویسکوزیته سیال) که از خواص سیال است

$$Re = \frac{VD}{\nu}$$

سرعت، قطر (هندسه)، ویسکوزیته سینماتیکی (مومنتوم)

Pr ← این را نشان می‌دهد (خواص سیال را نشان می‌دهد)

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

ویسکوزیته سینماتیکی ← نفوذ مومنتوم
α ← نفوذ حرارتی
ضریب سینماتیکی ← نفوذ حرارتی

✓ نسبت ν به α به نوعی تقابلی بین دو مکانیزم انتقال مومنتوم و انتقال حرارت است که با Pr نشان می‌دهیم.

منظور از تئوری تشابه (تشابه انتقال مومنتوم و انتقال حرارت):

همان عاملی که انتقال مومنتوم را کنترل می‌کند انتقال حرارت را هم کنترل می‌کند. پس بین این دو مکانیزم تشابه وجود دارد.

این تشابه به ما این امکان را می‌دهد که بتوانیم کوپلینگ بین میدان جریان و میدان انتقال حرارت را محاسبه بکنیم.

مثال: تشابه کلبورن

← از تشابه بین انتقال مومنتوم و انتقال حرارتی

انتقال مومنتوم ↓ δP: ایجاد افت فشار، τ: ایجاد تنش برشی

انتقال حرارتی ↓ انتقال حرارت بین دیواره و سیال δ

نکته: $q = hA\Delta T$ یک رابطه هوشمندانه است که نیوتن ارائه کرد. در حقیقت چیزی به نام انتقال حرارت جابجایی وجود ندارد (دو مکانیزم هدایت و تشعشع در واقع تنها مکانیزم‌های موجود هستند)

(ما می‌نامیم انتقال مومنتوم از دیواره به سیال‌های کنار دیواره یک هدایت است اما توده‌های سیال در اثر جابجایی و حرکت به طرف سطح آمده و توده‌های گرم شده را از سطح به بقیه جاها جابجا و پخش می‌کند.)

این فرمول تفاوت بین لایه‌های روی دیواره و لایه‌های دور از دیواره است. در حقیقت $\Delta T = T_s - T_\infty$ (که این رابطه تراز بودن دمایی را ساده می‌کند)

✓ ما با استفاده از پره‌ها، تنها سطح انتقال حرارت، و به تبع آن انتقال حرارت را زیاد می‌کنیم.

✓ وجوهی در مثال فوق با آن مشاهده می‌شود چون مسائل پیچیده‌ای که جریان ساده‌تری توسعه یافته‌اند و روش‌های ساده‌ی تحلیلی برای این مسائل هم وجود ندارد بهتر است از روش عددی استفاده شود و چون مسئله پیچیده است بهتر است حل را برای یک مقطع در عمق توسعه یافته حل کرده و سپس پاسخ را تعمیم دهیم.

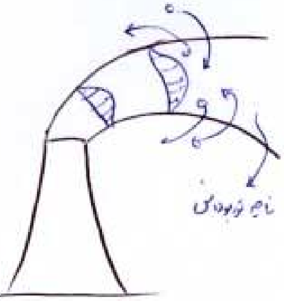
✓ شیب پروفیل سرعت و دما برای ما مهم است.

شیب پروفیل سرعت روی دیواره تنش برشی را می‌دهد.

شیب پروفیل دما که h و انتقال حرارت را هم به ما می‌دهد.

برای به دست آوردن اطلاعات فوق باید میدان را حل کرده و اطلاعاتش را داشته باشیم.

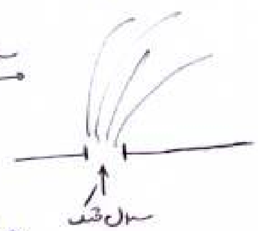
پس در حل عددی مشکل ما همین است که مجبوریم برای مسئله جواب تحلیلی آن جریان، کل جریان را تحلیل کنیم.



دود خروجی
از یک دودکش
و محاسبه توزیع دما و فشار

هم پدیده های سیالاتی داخل لوله ها و هم انتقال حرارت درون لوله و بیرون آن به علت نوع جریان بسیار پیچیده است و با یک حل تحلیلی نمی توان به پاسخ رسید.
با یک CFD قابل حل است.

سیلان داغ روی سطحی که سرد کننده دارد، توزیع دما چگونه است

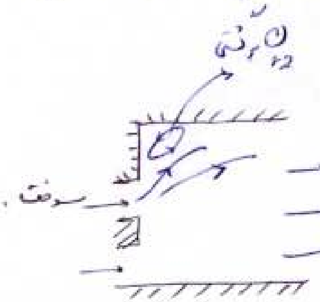


سیال داغی روی سطحی در حال حرکت است.
سطح توسط سیالی خنک می شود (مثلاً سیال داغ بسیار داغ است و ممکن است به سطح صدمه بزند)
در توربین گاز پره هایی ممکن است طراحی شوند که سوراخ هایی دارند

هدف این است که سطح این سیال داغ را تحمل کند.

✓ شکل سوراخ، زاویه، دبی سیال خنک کن روی توزیع دما تاثیر گذار است.

✓ برای محاسبه پروفیل دما روی دیواره، روش های تحلیلی نمی توانند پاسخ گو باشند پس از روش های عددی باید استفاده کرد.



پدیده هایی که دخالت دارند:
- جریان سه بعدی (Swirl flow)
- توزیع دما
- توزیع جرم
- واکنش های شیمیایی
- واکنش های توربولنس

محاسبه توزیع سرعت فشار و دما و... در یک محفظه احتراق

✓ تنها توسط حل عددی این پدیده ها قابل تحلیل هستند

روش های شبیه سازی:
- تست موضوع روی جسم واقعی (مثلاً یک هواپیما را تست کنیم): گران و در اکثر موارد غیرممکن
- تست مدل ساخته شده از روی ساخت واقعی (مدل سازی هندسی و شبیه سازی مشابه پارامترها)
  ✓ ماهیت تئوری هست؛ خطوط جریان موجود باشد تا اثرات نیروی بر آن را مشاهده کنیم
- روش های محاسبات ریاضی — متدهای کلاسیک ریاضی / حل عددی

فواید حل روش های محاسباتی ریاضی: ۱) هزینه پایین ۲) سرعت بالا ۳) جواب های کامل ۴) شبیه سازی شرایط واقعی ۵) مشاهده تاثیر هر یک پارامتر

انواع مسائل در مهندسی
- گروه A: توضیح ریاضی دقیق و حالت تحلیلی موجود است (اشکال دارند، اما مثلاً توربولانس ساده، جریان ...)
- گروه B: توضیح ریاضی دقیق و کاملی وجود ندارد (جریان‌های چندفازی، جریان توربولانس پیچیده ...)

مشکلات بررسی گروه A: ① احتمال گران بودن حالت تجربی ② مشکلات روش‌های عددی (محدوده‌ی دقت آن‌ها با بیشتر ... از زیادی ...)
③ چندحلی بودن مشکلات دارد

برای حالت B راه‌حل تحلیلی وجود ندارد و ما تلاش می‌کنیم حل را به سمت گروه A پیش ببریم.

✓ حالت تجربی هم به تنهایی پاسخگوی مسائل طبیعی نمی‌باشد

✓ گاهی روش‌های عددی در طراحی آزمایش‌ها و میزان اشتباهاتی که ممکن است در حالت تجربی ایجاد شود به ما کمک می‌کند.

- معمولاً ترکیبی از حل عددی و کار تجربی نتیجه‌بخش است.

توضیح ریاضی یک پدیده‌ی فیزیکی

✓ پدیده‌هایی که ما با آن سروکار داریم از جنس انتقال است — انتقال: اسکالر / برداری / تانسوری

✓ معمولاً با معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی ۲ سروکار داریم.

- معادلات مختلف — مکانیزم انتقال: نفوذ / جابجایی
- ما یک شکل عمومی برای این معادلات پیدا می‌کنیم.
(با همه‌ی معادلات این کار را می‌کنیم چون با دیدگاه ... با یک‌جور سروکار داشتن با پدیده‌های مختلف در توضیح‌های ریاضی مختلف معادله‌ی دیفرانسیل واحدی برای همه قابل حصول است)

- مدل توربولانسی
- متغیرهای مستقل (محدود در معادله‌ی عمومی) ← ما انتخاب این متغیرها را می‌کنیم که متغیرهای زمانی و مکانی ... معادله ساده شود
- مختصات در یک جهت یا دو جهت (جهت ...)

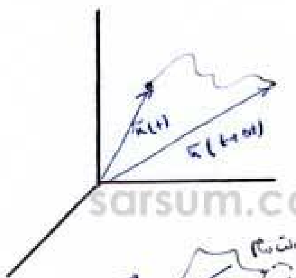
✓ برای معادلات حاکم بر پدیده‌ها سه حالت داریم: ① دستگاه مرجع و ... که در آن دستگاه استخراج معادله صورت می‌گیرد — لاگرانژی / اویلری
② شکل حجم کنترلی که انتخاب می‌کنیم
③ ارتباط بین دستگاه‌های مختلف

① توضیح در مورد انتخاب دستگاه

اگر بخواهیم مشخصه های میدان جریان سیال و تغییر مشخصه ها را بررسی کنیم باید متغیرهای مستقل را بدانیم (مثل P، ρ و ...)
چون اینها در چارچوب توابعی تابع هستند باید قوانین تابع را در حل کنیم.

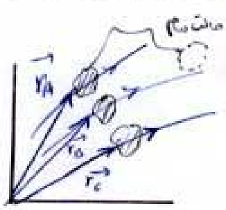
- نگرش لاگرانژی برای استخراج این معادلات:

موقعیت ذرات سیال را در یک قاب بررسی کنیم و توسط یک بردار مکان آنها را ثابت کرده و ذره را دنبال می کنیم
در موقعیت جدید یک بردار مکان جدید در زمان $t+\Delta t$ برای آن نسبت می دهیم.



توسط این بردارها معادلات نگرش $\vec{r}$ به دست می آید.

متغیر مستقل اصلی ← زمان



در تعدادی ذرات سیال را در سیال مشخص کنیم (مثلاً رنگ خاصی به آنها می دهیم)
سپس در دستگاه مختصات موقعیت اولیه آن ها را ثبت کنیم و اجازه دهیم
حرکت کنند می توانیم بردار موقعیت جدید را نیز بر اساس زمان رسم کنیم.

متغیر اصلی در این حالت نیز زمان است. برای مشخص کردن حالت ذرات داشتن موقعیت مکانی در لحظه ی صفر هم لازم است (x_0, y_0, z_0)
که در این موقعیت مکانی اولیه هم متغیر مستقل دیگری غیر از زمان است

نکته: موقعیت مکانی نهایی متغیر مستقل نیست چون از روی مکان اولیه، زمان و سرعت قابل محاسبه است.

نتیجه: متغیرهای مستقل اصلی { موقعیت مکانی اولیه ذرات سیال
زمان

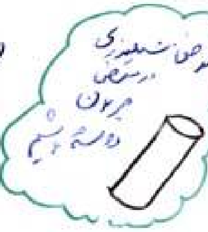
- نگرش اویلری: میدان سیال را به صورت یک میدان فیزیکی فرض می کنیم که و از بیرون به نقطه نقطه فضا در هر لحظه از تعدادی ذرات نگاه می کنیم و مشخصه های آن نقطه از فضا در آن لحظه برای ما مهم است (نه ذره).

متغیر مستقل در این نگرش { x, y, z و t هستند.

کاربردهای هر کدام در سیالات:
- آماری و مولکولی: ما این رو رفتاری مولکول‌ها را کنترل کنیم که تک‌تک آنها رفتارشان برای ما مهم است. این دیدگاه برای جریان‌های گازی رقیق توسعه یافته و معادلات آن کاربرد دارد که در حوزه سیالات در گازهای خیلی متراکم فوق دقیق نیست و کاربردی ندارد
- محیط پیوسته: ما با این روش کار می کنیم و سیال را یک محیط پیوسته در نظر می گیریم. (مثلاً یک پیوستگی وجود دارد) Continuity

✓ چه موقع فرض پیوستگی معتبر است؟

توضیح: min free path مسیری است که مولکول بدون اینکه تحت تأثیر قرار گرفتن از مولکول‌های اطراف حرکت کند.

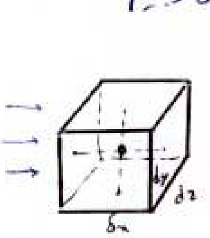


اگر min free path بزرگتر از کوچکترین بعد جسمی که در معرض جریان قرار دارد باشد، بحث پیوستگی نداریم
چون جریان پیوسته نخواهد داشت که فقط یک مولکول به بدنه‌ی (سطح زمین) اجسام برخورد می‌کند.

اگر min free path کوچکتر از کوچکترین بعد جسمی که در معرض جریان قرار دارد باشد، فرض پیوستگی داریم.
چون مولکول‌ها به بدنه‌ی جسم در جریان (سطح زمین) برخورد می‌کنند

② توضیح در مورد شکل حجم کنترلی

برای استخراج معادلات دیفرانسیل مرحله به مرحله یک حجم کنترل دیفرانسیلی در نظر گرفته و برای این حجم کنترل معادلات را می‌نویسیم



مقادیر روی سطوح‌ها به وسیله بسط تیلور از مرکز به دست می‌آید. (مقادیر موجود در مرکز)

مثلاً برای فشار: $P + \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\delta x}{2} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\left(\frac{\delta x}{2}\right)^2 + \dots$ (برای وجه سمت راست)

که به وسیله‌ی بسط تیلور مقادیر روی شش وجه حاصل می‌شود

حال توان‌ها را اعمال می‌کنیم و سپس حد می‌گیریم وقتی $\delta x \to 0$، $\delta y \to 0$، $\delta z \to 0$ (یک جمع‌بندی در مشتقات است (ε))

راه بهتر است که به جای δx و δy و δz از dx، dy و dz استفاده کنیم و دیگر لازم به حد گیری نیست (چون dx، dy و dz به اندازه‌ی کافی کوچک‌اند)

✓ می‌توان به جای یک حجم کنترل که ابعادش مشخص است و معادلات بقا را توسط انتگرال معادله به دست آوریم و در نهایت یک معادله‌ی انتگرال دیفرانسیلی به دست می‌آوریم.

نکته مهم: در دینامیک سیالات، نرخ تغییرات هر خاصیت از سیال نسبت به زمان را مشتق کلی یا مشتق مادی می‌نامیم و این مشتق قابل تبدیل به مشتق در دیدگاه اویلری است.

مشتق مادی $= \frac{D\alpha}{Dt}$

$$\underbrace{\frac{D\alpha}{Dt}}_{\text{دیدگاه لاگرانژی}} = \underbrace{\underbrace{\frac{\partial \alpha}{\partial t}}_{\text{مشتق زمانی}} + \underbrace{u_k \frac{\partial \alpha}{\partial x_k}}_{\text{مشتق مکانی}}}_{\text{دیدگاه اویلری}}$$

← در حوزه‌ی سرعت در هر مکان ثابت است (می‌باشد)

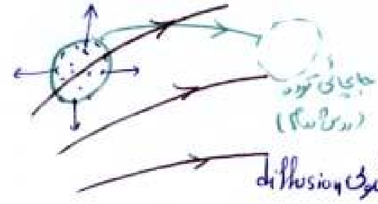
نشان داده در حالت steady state (دائم) در کانال رو به رو سرعت مکانی وجود دارد (در حوزه سرعت بیشتر از شروع کانال است)

← در حقیقت مشتق زمانی صفر است ولی مشتق مکانی وجود دارد

در جریان سرعت در بیرون بیشتر
همیشه مقدار ثابت (جریان دائم)

در ادامه‌ی استخراج معادلات که از روش control volume (حجم کنترل) استفاده می‌شود، مسأله‌ی انتقال یک کمیت در داخل میدان سیال است.

جابجایی مولکولی (اویل ادن)



✓ کمیت می‌تواند اسکالر، برداری یا تانسور باشد.

تانسور ← تنش

برداری ← $m\vec{u}$ ← سرعت

اسکالر ← P, ρ, T ← فشار، دانسیته، دما

✓ در میدان سیال انتقال با دو مکانیزم قابل توجه است ← مکانیزم‌ها:

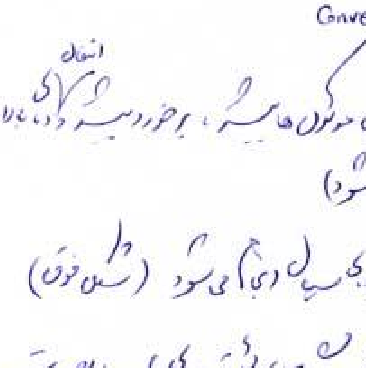
- مولکولی diffusion
- توده‌ای Convection

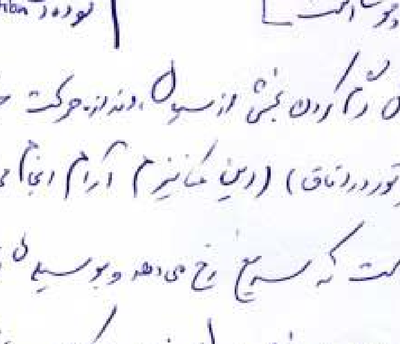
یکی انتقال بوسیله‌ی مولکول‌هاست (مثل رنگ کردن بخشی از سیال، بدون حرکت کلی مولکول‌ها، برخورد بیشتر مولکول‌ها با انرژی بالا برای مولکول‌های دیگر اتفاق می‌افتد) (مثل راه رفتن تو در اتاق) (این مکانیزم آرام انجام می‌شود)

مکانیزم دوم جابجایی (Convection) است که سریع رخ می‌دهد و بوسیله‌ی توده‌ی سیال انجام می‌شود (شکل فوق)

در جریان‌ها این دو مکانیزم ممکن است همراه هم (در بخشی از سیال انتقال مولکولی و در بخشی دیگر جابجایی توده‌ای) و یا بصورت منفرد صورت بگیرد. بطور کلی این دو مکانیزم در جریان‌ها در حال رقابت هستند.

فرض کنیم هر دوی این مکانیزم‌ها وجود دارند و باعث تغییر در کمیت‌های میدانی جریان (مثل فشار، دما و تنش و ...) می‌شوند. ما باید بتوانیم اثرات این دو مکانیزم را در استخراج معادلات حاکم بر جریان سیال بصورت تفکیکی ببینیم.





یک المان کوچک فرضی را در میدان سیال در نظر می‌گیریم.

برداری را تعریف می‌کنیم به عنوان بردار فلاکس ($\vec{J}$) که وظیفه‌ی این بردار فلاکس در نظر گرفتن همین دو مکانیزم فوق است (دیفیوژن و کانوکشن) و از دو بخش فلاکس نفوذی و فلاکس جابجایی تشکیل شده است. معمولاً وظیفه‌ی این بردار جابجایی چیزی را جابجا کند هم کمیت (نوع انرژی)

فلاکس جابجایی ← $\vec{J}_c$ ← Convection

فلاکس نفوذی ← $\vec{J}_D$ ← Diffusion

اگر مقدار ورودی این بردار در سمت چپ J_x باشد، مقدار خروجی این جریان در سمت راست به کمک بسط تیلور قابل محاسبه است. $J_x + \frac{\partial J_x}{\partial x} dx$

(چون خود dx خیلی کوچک است، از نوشتن ادامه‌ی بسط تیلور صرف‌نظر می‌کنیم چون توان‌های بالای dx وجود دارند که مقادیر خیلی کوچکی هستند)

دقت شود که این ورود و خروج منطقی بدان دلیل است چون ما میدان را پیوسته در نظر گرفته‌ایم.

نکته مهم: J_x یک کمیت را وارد این حجم کنترل می‌کند و بسط تیلور آن را از سمت دیگر خارج می‌کند.

$$\text{net flux} = \cancel{J_x} + \frac{\partial J_x}{\partial x} dx - \cancel{J_x} = \frac{\partial J_x}{\partial x} dx \xRightarrow[\text{معنی می‌دهم}]{\text{فلاکس در واحد سطح}} \boxed{\text{net flux} = \frac{\partial J_x}{\partial x} dx\, dy\, dz} \quad \text{I}$$

حجم ← (سطح رو بروی بردار)

گفتیم J شامل دو بخش است (convection , diffusion)

وقتی کمیتی که در حال انتقال است φ باشد (φ می‌تواند جرم، مومنتوم، ..... باشد)

اگر فرض کنیم تنها دیفیوژن باشد ⟸

Diff ∝ گرادیان متغیر مورد نظر

نفوذ در امتداد افت کمیت است

$$J_{Dx} \propto \frac{D\varphi}{Dx} \Longrightarrow ① \quad \boxed{J_{Dx} = -\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x}}$$

منفی را می‌گذاریم تا حاصل عبارت مثبت شود

ضریب تناسب به نام گاما

ضریب نفوذ (ضریب تناسب)

[در حالت حرارتی Γ = k است
φ دما است]

در جهت مومنتوم → آنچه در جهت x، φ را حمل می‌کند ذرات سیال می‌باشند (مثلاً جرم سیال!) → در حقیقت مولفه‌ی ρu در حال حمل φ است. (ذرات سیال با مشخصه ρu در حال حرکت است) → (ρu)φ

$$\boxed{J_{Cx} = (\rho u)\varphi} \quad ②$$

$$①\ ,\ ② \Rightarrow \boxed{J_x = (\rho u)\varphi - \Gamma\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)} \quad ③$$

این معادله نشان می‌دهد کمیت φ به دو صورت پخشی و مولکولی از حجم کنترل ما خارج یا به حجم کنترل ما وارد شود.

φ کوچک

$$\boxed{\left[\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t}\right] dx\,dy\,dz} \quad \mathrm{II}$$

همچنین φ می‌تواند داخل حجم کنترل ذخیره شود.

مقدار φ ذخیره شده در حجم کنترل = تغییرات با زمان $\frac{d}{dt}$ (جرم واحد حجم ρ × مقدار کمیت در واحد جرم φ) × حجم المان حجم کنترل $dx\,dy\,dz$

$$\boxed{S\,dx\,dy\,dz} \quad \mathrm{III}$$

همچنین φ می‌تواند تولید شود یا نابود گردد. (مثل واکنش‌های هسته‌ای)

(S تولید φ در واحد حجم است)

به ① و I نشان می‌دهیم خودش یک مشتق دارد اینجا یک مشتق دیگر می‌گیریم

این معادله مرتبه‌ی ۲ است

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t}}_{\text{ذخیره‌ی φ داخل حجم کنترل}} + \underbrace{\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}}_{\text{ورود و خروج کمیت φ را از مرزها نشان می‌دهد}} = \underbrace{S}_{\text{تولید φ}}} \quad \mathrm{I}\ ,\ \mathrm{II}\ ,\ \mathrm{III}$$

(منبع یا سورس)

(دقت شود مشتق Jها مد نظر ماست)

این معادله نشان می‌دهد تغییرات φ در داخل C.V برابر است با تبادلات با محیط بیرون C.V به همراه تولید φ در داخل حجم کنترل.

φ → جرم یا انرژی یا مومنتوم

$$\frac{\Phi}{m} = \varphi \quad (\varphi \text{ کوچک})$$

$$\begin{cases} \Phi = m \rightarrow \varphi = 1 \\ \Phi = E \rightarrow \varphi = e \\ \Phi = V \rightarrow \varphi = V\ (u, v, w) \end{cases}$$

معادله II

معادله ③

$$\xrightarrow[\text{بقای جرم}]{\varphi = 1} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u - 0) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v - 0) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w - 0) = 0$$

طبق قانون بقای جرم S = 0 چون تولید و نابودی جرم نداریم.

دیدیم که شکل کلی معادلات بقا به صورت زیر است.

$J_x \rightarrow \boxed{\quad} \rightarrow J_x + \frac{\partial J_x}{\partial x}dx$

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = S$$

$$J_x = (\rho u)\varphi - \Gamma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)$$

$$J_y = (\rho v)\varphi - \Gamma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$$

$$J_z = (\rho w)\varphi - \Gamma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t}} + \boxed{\begin{matrix}\frac{\partial}{\partial x}(\rho u\varphi)\\ \frac{\partial}{\partial y}(\rho v\varphi)\\ \frac{\partial}{\partial z}(\rho w\varphi)\end{matrix}} - \boxed{\begin{matrix}\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) +\\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) +\\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\end{matrix}} = \boxed{S}$$

ترم وابسته به زمان به صورت خطی است. ذخیره ی φ داخل حجم کنترل را نشان می دهد.

وابسته به میدان سرعت که φ را به صورت جابجایی جابجا می کند و بستگی به میدان سرعت و دانسیته دارد و می تواند غیرخطی باشد.

انتقال با مکانیزم نفوذ مولکولی را نشان می دهد. دیده شود به صورت مشتق مرتبه ۲ ظاهر شده است.

منبع تولید φ (ترم چشمه)

همیشه به یاد داشته باشیم معادلات بقا ۴ بخش دارد: ذخیره φ، توزیع جابجایی φ (J_c)، توزیع پخشی φ (J_D) و ترم تولید φ (S) را ارائه می دهد.

Unsteady Term ترم غیردائمی

Convection Term: ترم جابجایی

Diffusion Term: ترم نفوذ → تحت تاثیر ضریب Γ است → ضریب نفوذ
- (1) ضریب نفوذ جرم
- (2) ضریب نفوذ مومنتوم
- (3) ضریب نفوذ حرارتی

Source Term: ترم چشمه

دقت شود معادله پیوستگی ترم چشمه ندارد.

Φ = کمیت → mass Continuity: $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0$ معادله پیوستگی یا بقای جرم

$\varphi = \frac{\Phi}{m}$ → Energy Continuity: $\frac{E}{m} = e \rightarrow e = c_pT$ (حالت ایده آل برای معادله بقا)

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uT) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vT) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{c_p}\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k}{c_p}\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{S}{c_p}$$

معادله انرژی در یک سیستم دائمی دوبعدی و با دانسیته ثابت

با ضرب کردن همه ترم ها در c_p معادله مناسب با پارامتر سرعت می رسیم.

→ momentum Continuity: $\frac{\vec{V}}{m} = v, u, w$ در جهات مختلف

معادله مومنتوم غیرخطی هم است.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vu) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho wu)}_{\text{ترم جابجایی}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)}_{\text{ترم دیفیوژن}} \underbrace{- \frac{\partial p}{\partial x} + V_x + B_x + F_x}_{\text{ترم چشمه}}$$

مومنتوم کنترل حجم در واحد حجم

به ترم جابجایی مومنتوم در اثر ρu (ρu، ρv، ρw) (انتقال مومنتوم از یک سطح به سطح دیگر احجام خاص)

تغییرات فشار در جهت x (منفی هم)

ترم های ویسکوز Viscose term

Body Force → مثل وزن

distributed resistance → در شرایط خاص مثل محیط متخلخل

به ترم های این ترم ها ... ترکیب شده

Conservation of chemical species

برای معادله بقا در محیطی که واکنش شیمیایی داریم.

میزان جرم در ذرات واکنش

سوخت CH_4 →, هوا O_2, N_2 → محصولات احتراق: CO_2, H_2O, CO, OH, NO_x, O_2, H_2 → یک جزء

جزء:
- مولی → $Y_i = \frac{N_i}{N_t}$ = تعداد مول های جزء / تعداد کل مول ها
- جرمی → $m_\ell = \frac{m_i}{m_t}$

معادلات بقا برای یک سیستم با N جزء شیمیایی: N-1 معادله بقا برای اجزا + معادله بقای کلی

m_ℓ = mass fraction = (mass of species ℓ)/(mass of mixture)

R_ℓ = rate of generation of species ℓ by chemical reaction

ترم جرمی که در اثر واکنش ... احتراق ... (به عنوان input داریم)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho m_\ell) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u m_\ell) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v m_\ell) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w m_\ell) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial m_\ell}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial m_\ell}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma\frac{\partial m_\ell}{\partial z}\right) + R_\ell$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho m_\ell) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i m_\ell) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Gamma\frac{\partial m_\ell}{\partial x_i}\right) + R_\ell$$

نکته: در معادله‌ی بقاء ترمی که قابل بیان به فرم ترم زمانی، کانوکشن و دیفیوژن نباشد را می‌توان به عنوان بخش چشمه (منبع تولیدی) در نظر گرفت (مثلاً در معادله‌ی مومنتوم جمله‌ی قبل ترم‌های F_x و B_x و V_x همین گونه هستند)

بیان‌های مختلف قوانین بقاء:

به دو فرم برداری و تنسوری می‌توان بیان کرد.

برداری $\Rightarrow$
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varphi) + \overbrace{\operatorname{div}(\rho u\varphi)}^{\text{ترم جابجایی}} = \overbrace{\operatorname{div}(\Gamma \operatorname{grad}\varphi)}^{\text{ترم دیفیوژن}} + S$$

div تعریف $\rightarrow$ $\operatorname{div} O = \frac{\partial O}{\partial x} i + \frac{\partial O}{\partial y} j + \frac{\partial O}{\partial z} k$

grad تعریف $\rightarrow$ $\operatorname{grad} O = \frac{\partial O}{\partial x} + \frac{\partial O}{\partial y} + \frac{\partial O}{\partial z}$

نکته: شکل برداری معادله مستقل از دستگاه است.
فقط باید توجه داشت div و grad با توجه به تعریف مختص به هر دستگاه باید اعمال شوند.

تنسوری $\Rightarrow$
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varphi) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i\varphi)}_{\text{شکل ترم جابجایی}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Gamma\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)}_{\text{شکل ترم دیفیوژن}} + S$$

فرم تنسوری بر اساس اندیس‌های تکراری است که باید آنها را با هم جمع کرد.

(جرم) Continuity equation
بقای جرم

$\xrightarrow{\text{برداری}}$ $\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \operatorname{div}(\rho\vec{V}) = 0$ ← ρ ثابت $\xrightarrow{\text{برای سیال تراکم‌ناپذیر}}$ $\frac{\partial}{\partial t}(\rho) = 0 \longrightarrow$ $\operatorname{div}\vec{u} = 0$، $\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$

$\xrightarrow{\text{تنسوری}}$ $\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0$

یعنی چه؟ ← net efflux جرم از سطح صفر است (جمع ورودی‌ها و خروجی‌ها صفر است) در حقیقت شدت تغییرات جرم در جهت مختلف صفر است.

✓ دیورژانس روی هر چیزی یعنی net efflux روی آن.

نکات مهم در معادلات بقا (معادله‌ی جنرال آن)

- متغیر وابسته φ می‌تواند یک مولفه سرعت، انتالپی، دما، معادله انرژی یا فلاکس حرارتی یک معادله شیمیایی یا نرخ استهلاک یک معادله انرژی در جریان توربولانس و ... باشد.

- همراستی برای φ متناظر نیاز به انتخاب صحیح از Γ (ضریب نفوذ) و S (ترم منبع) و شرایط مرزی (همراه شرایط اولیه) است.

تعداد شرایط مرزی در حالت کلی: بزرگترین مرتبه ۲ است در ۳ جهت 3×2 شرایط مرزی و یک شرط اولیه برای شرایط غیردائم می‌خواهیم در مجموع $6+1=7$ شرط مرزی (همراه اولیه) می‌خواهیم)

- معادله جنرال ما را قادر می‌کند که برنامه‌ای با عمومیت جنرال بنویسیم بطوریکه این برنامه‌ی جنرال برای تعداد زیادی از مسائل فیزیکی قابل استفاده باشد.

درباره‌ی ضریب نفوذ (Γ)

✓ ضریب نفوذ در معادله‌ی بقای مومنتوم با μ در معادله بقای انرژی با K و در بقای جرم با D نشان داده می‌شود.

✓ Γ یک نمایش عمومی است از خواص سیال که همراه گرادیان آن کمیت در هر جهت مقدار و انتقال آن کمیت را در واحد سطح به صورت فلاکس دیفیوژنی مشخص می‌کند. (مثل تنش برشی یا هدایت حرارتی)

$$\Delta P_n = \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial n}$$

< فرض ما این است که نفوذ یک پدیده‌ی گرادیانی است >

✓ برای جریان‌های توربولانس مقدار دیفیوژن Γ و غلظت باید با مقادیر متناظر جایگزین شود.

مثلاً لزجت (μ) خاصیتی از سیال است که در آزمایشگاه قابل اندازه‌گیری است و مستقل از سرعت است.

در جریان آرام مقدار μ توسط همین مقدار اندازه‌گیری شده و مستقل است. $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial n}$

در جریان توربولانس مکانیزم‌های دیگری هم وارد پدیده‌ی انتقال به وسیله‌ی نفوذ می‌شوند. در حقیقت ضریب نفوذ عوض می‌شود و Γ مقداری عوض می‌شود.

$\Gamma_{total} = \Gamma + \Gamma_t$ ← مثلاً برای μ در توربولانس داریم $\mu = \mu_{laminar} + \mu_{turbulent}$

مربوط به توربولانس‌ها — به مربوط به ... خاصیت سیال

eddy diffusivity

به خاصیت سیال — به خاصیت سیال بستگی ندارد بلکه به خاطر توربولانس شدن جریان به وجود می‌آید

✓ Γ عملاً در میدان سیال ثابت نمی‌شود و به موقعیت مکانی، سرعت و دما وابسته باشد.

درباره‌ی منبع چشمه (S)

✓ برای برخی پدیده‌ها که لازم می‌شود مثل تولید حرارت درون یک جسم در یک لوله در واکنش‌های هسته‌ای که تولید انرژی خواهیم داشت یا در محفظه‌ی احتراق که ممکن است واکنش گرمازا یا گرماگیر باشد.
یا به صورت تولید یا نابودی (مثلاً یون‌ها تبدیل) اجزاء شیمیایی باشد. (نرخ تولید یا تبدیل در واحد حجم برای S گرفته می‌شود)

✓ S می‌تواند محل بیان (محل دفن!) برای همه‌ی ترم‌هایی که قابل بیان توسط ترم‌های دیگر نیستند باشد.
این انعطاف‌پذیری درک به ما امکان می‌دهد که خیلی از پدیده‌ها را با فرم معمول جنرال معادله مدل‌سازی کنیم.

جریان توربولانس

اغلب جریان‌هایی که با آن سروکار داریم توربولانس هستند، که دارای مشخصه‌های وسیعی از مقیاس‌های مکانی و زمانی هستند.

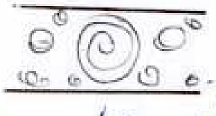
ادی: توده‌ی مولکولی

جریان آشفته خصوصیات زیر را دارد:

① وجود اسکیل‌های زمانی و مکانی زیاد: اسکیل بزرگ / میانی / کوچک

② همه‌ی جریان‌های توربولانس غیردائمی و غیرتکرارپذیر هستند و ماهیت آماری دارند.

✓ بزرگ‌ترین اسکیل‌هایی که ممکن است به وجود آیند به هندسه‌ی جریان اکیداً وابسته هستند ولی کوچک‌ترین اسکیل‌ها به هندسه وابسته نیستند و یونیورسال (رفتار جهانی) هستند.
مثلاً در یک لوله بزرگ‌ترین ادی که می‌تواند به وجود آید به اندازه‌ی قطر لوله وابسته است (برخلاف کوچک‌ترین اسکیل‌ها)

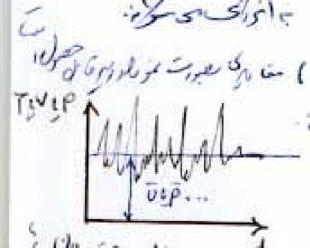


کوچک‌ترین ادی‌ها کنار دیوار تبدیل به انرژی می‌شوند.

[illegible] ← حل مستقیم معادلات ← حل یا غیرممکن است و یا با بزرگ‌ترین‌ها ممکن است
← مدل‌سازی ← معادلات را تغییر داده و به جای معادلات ناویر استوکس حل می‌کنیم.

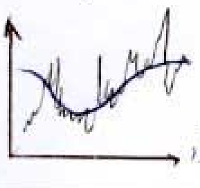
- یکی از روش‌ها متوسط‌گیری زمانی است
- یکی از روش‌ها متوسط‌گیری مکانی است
- یکی از روش‌ها فیلتر کردن زمانی است

توضیح ← برای متوسط‌گیری زمانی: کمیت‌ها (سرعت، فشار و ...) را که در جریان توربولانس نوسانی‌اند به صورت مجموع یک مقدار متوسط و یک مقدار نوسانی در نظر می‌گیریم؛ این نمودار نشان می‌دهد که مقدار متوسط به زمان وابسته نیست.



$$U(t) = \bar{U} + U'(t)$$

ترم متوسط — ترم اختلالی زمانی که تابعی از زمان است (توسط مدل‌سازی در معادلات جایگزین شود)



متوسط ما خودش تابعی از زمان خواهد بود و در حال تغییرات است.

- در معادلات متوسط‌گیری شده ترم‌هایی وارد می‌شوند که شبیه تنش هستند و به آن‌ها تنش توربولانسی گویند که با ترتیب صحیح داخل فرمول گنجانده می‌شوند.
- در مدل‌سازی توربولانسی می‌توان مدل‌های یونیورسال ارائه کرد. (یعنی مدل‌هایی که در همه جا قابل پیاده‌سازی باشند)
- گواهی وجود دارد که تنها از راه آزمایش و دست قابل حصول هستند.

شبیه‌سازی یک جریان توربولان

یکی از مدل‌های قابل پیاده‌سازی برای جریان توربولانس مدل $K-\varepsilon$ است.

The k-ε model

k = kinetic energy of turbulence → در جریان توربولان می‌توان یک انرژی جنبشی توربولانس تعریف کرد که برابر است با مجموع ترم‌های نوسانی سرعت

ε = its dissipation rate → که همان انرژی توربولانسی جریان در حال مستهلک شدن توسط نیروهای استهلاکی است (که در مستهلک شدن انرژی به سمت کاهش می‌رود)

$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon}$ → عامل ناشناخته مشخص

با نوشتن این دو معادله می‌توان جریان توربولانسی مورد نظر را شبیه‌سازی کرد و از نظر جریان‌ها تعریف کرد. (k, ε)

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i k)}_{\text{ترم جابجایی}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\mu_t}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x_i}\right)}_{\text{ترم دیفیوژن}} + \underbrace{P-\rho\varepsilon}_{\text{Production Term}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}\right) + (C_1 P - C_2\rho\varepsilon)\left(\frac{\varepsilon}{k}\right)$$

$P \equiv$ generation rate of $k = \mu_t\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$

$C_\mu = 0.09$ $\quad C_1 = 1.44$

$\sigma_k = 1.0$ $\quad C_2 = 1.92$

$\sigma_\varepsilon = 1.3$

روش‌های حل مسائل احتراق

روش‌های حل مسائل احتراق:
- ترمودینامیکی: که ساده‌ترین روش است که هدف این است بدانیم چه محصول و چه مقدار می‌دهد
- تعادلی: مدلی پیچیده با فرض وقوع تعادل شیمیایی در نقطه احتراق
- وابسته به سینتیک احتراق ← به شبیه‌سازی نرخ آزاد شدن انرژی است

ترم منبع است که نرخ زمانی تولید محصول و انرژی را می‌دهد.

$$R_{fu} = -F\rho^2 m_{fu} m_{ox} \exp\left(-\frac{E}{RT}\right)$$

F → Pre exponential factor; E → activation energy; R → universal gas constant

---

✓ تنها موضوع مهمی که فقط با یک معادله به پاسخ می‌رسیم جریان پتانسیل است، بقیه جریان‌ها با دستگاه معادلات حل می‌شوند.

نکته مهم: با انتخاب صحیح مختصات می‌توان مسائل غیرخطی را به خطی تبدیل کرد.

حل ۱ بعدی در مختصات استوانه‌ای

این معادلات برای سرعت خطی غیرخطی است

اگر مختصات را روی خط‌ها استفاده کنیم جریان‌های اطراف خط‌ها از غیرخطی به خطی تبدیل می‌شود

انواع متغیرها:
- مستقل
  - مکانی (x): 1D، 2D، 3D
  - زمانی (t): دائمی، غیردائمی
- وابسته

✓ اولین قدم در طراحی هواپیما به دست آوردن توزیع سرعت و فشار است.

دیدگاه مختصات { one way / two way }

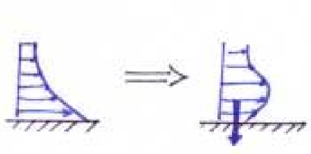
دیدگاه مختصاتی به ما کمک می کند تا قبل از حل هر معادله رفتار آن را احساس کنیم.

✓ می دانیم S (منبع) قابلیت جمع کردن تمام ترم های غیر مشابه با ترم های غیر دائمی، جابجایی، دیفیوژن را در خود دارد.

مثلاً در حالت کلی در معادله انرژی ترم هایی ظاهر می شوند که مشتقات مرتبه اول به توان ۲ هستند.

مثل ترم $\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_i}+\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right]^2$ که ترم بخش اصطکاک هستند، و در سرعت های خیلی بالا ظاهر می شود (ماخ بالا)

و بصورت گرما ظاهر می شود و روی پروفیل دمای تغییر شیب ایجاد می کند.



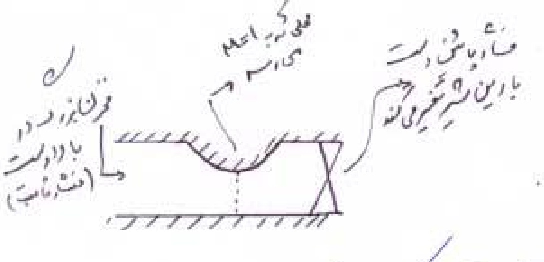
و بخشی از انرژی سیال به دیواره منتقل می شود.

ما این ترم را در S دفن می کنیم.

← گاهی اوقات این ترم باعث غلبه ی ترم چشمه نسبت به بقیه ترم ها می شود. (بعداً به این قضیه می پردازیم)

مختصات یک راهه

اگر مختصی ما به گونه ای باشد که جهت انتقال اطلاعات در امتداد یک مختصه خاص (از بالادست به پایین دست) باشد، مختصه یک رفتار one way خواهد داشت.



مثلاً در نازل سوپرسونیک:

نازل به یک مخزن بسیار بزرگ متصل است و فشار ثابت است.

ما در پایین دست شیری داریم که فشار پایین دست را تغییر می دهد.

اگر شیر ابتدا بسته باشد، هیچ جریانی نداریم. به محض باز کردن شیر، تجمع مولکول ها کاهش می یابد و افت فشار ایجاد می شود. که بصورت موج ضعیف شروع به حرکت می کند و تغییرات فشار را به سیال بالادست منتقل می کند.

در حقیقت مولکول های بالادست احساس می کنند مقاومت کمتری مقابل آنهاست و جریان جاری می شود.

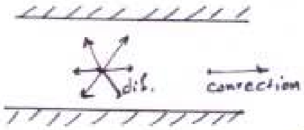
اگر شیر را بیشتر باز کنیم، باز هم این اتفاق رخ می دهد و جریان بالادست خود را با مقاومت مقابل خودش تنظیم می کند. اگر این کار را ادامه دهیم، سرعت جریان در کوچکترین مقطع جریان به مقداری می رسد که ماخ در آن برابر ۱ می شود $(M=1)$ و از این به بعد تغییر فشار در پایین دست روی بالادست تأثیر نخواهد داشت.

در حقیقت مولکول های بالادست اطلاعی از مولکول های پایین دست نخواهند داشت.

تحت شرایطی می توانیم جریان را سوپرسونیک کنیم، در این حالت هیچ اطلاعاتی قابل انتقال به بالادست نخواهد بود و همه اطلاعات از بالادست به پایین دست منتقل می شود.

رفتار جریان ما one way است (در راستای مختصه ی مربوطه)

✓ اگر از دیدگاه دیفیوژن یا کانوکشن به قضیه one way و Two way نگاه کنیم، می‌بینیم که دیفیوژن پدیده‌ای است که در همه‌ی جهات می‌تواند انتقال اطلاعات داشته باشد.



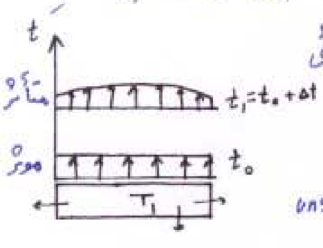
مثال: فرض کنید در یک لوله جریان سیال غیرقابل تراکم با یک Re متوسط داشته باشیم. انتقال اطلاعات در همه جهات صورت می‌گیرد در صورتی که از دیدگاه دیفیوژن بررسی شود. از طریق کانوکشن انتقال اطلاعات فقط از بالادست به پائین‌دست منتقل می‌شود.
با افزایش Re میزان قدرت نسبی کانوکشن بسیار بیشتر از قدرت دیفیوژن خواهد شد. و در عمل دیفیوژن بی‌تاثیر خواهد شد.

توجه: یکی از پیچیدگی‌های موجود در حل عددی همین است که رفتار معادله‌ها از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر ممکن است عوض شود. یعنی یک معادله ممکن است گاهی رفتار one way داشته باشد و گاهی Two way. در مثال فوق اگر قدرت کانوکشن در حدی بود که نفوذ (دیفیوژن) به بالادست داشتیم، چون هم از بالادست به پائین‌دست و هم از پائین‌دست به بالادست انتقال اطلاعات داریم پس رفتار Two way خواهد بود.

نکته: اهمیت این رفتارها در این است که مسائل ما را ساده می‌کند.

مثال: heat conduction در داخل یک لوله (با نفوذ) در همه‌ی جهات اطلاعات (در دو بعد است) را منتقل می‌کند.

نکته: مختصات زمان چگونه است؟ زمان همیشه one way است چون هیچوقت زمان‌های بعدی روی زمان‌های قبلی تاثیرگذار نیستند.



مثلاً جسمی را از داخل کوره بیرون بیاوریم که دمایش از محیط اطراف بیشتر باشد. تغییرات دمایی به طوری است که دمای زمان‌های بعدی متاثر از دمای زمان قبلی هستند.
این موضوع برای ما مهم است چون استراتژی حل را مشخص می‌کند. یعنی در مسائل unsteady ما از زمان‌های قبلی استفاده می‌کنیم. (استراتژی marching)
یعنی ما زمان قبل را داریم و یک Δt اضافه و توزیع دما را بدست می‌آوریم.

توجه: marching به ما کمک می‌کند که وابستگی زمانی به تعداد کمتری نقطه داشته باشد ولی در هر Δt باید کل توزیع دما در داخل لوله را بدست آورد.

✓ جریان در لایه مرزی، معادله one way داریم چون از بالادست به پایین‌دست جریان داریم.

✓ دسته‌بندی پدیده‌ها از دید فیزیکی ← نفوذ از قدرت بالایی برخوردار است.

در این مسائل هر نقطه تحت تأثیر تمام نقاط مرزی می‌تواند باشد
در شکل روبرو با تغییر در هر نقطه‌ی مرزی، تغییر با یک تأخیر کمی
خود را به نقاط دیگر می‌رساند.
به این نوع مسائل Boundry value Problem می‌گویند.
(یعنی نقاط مرزی روی نقاط داخلی تأثیر می‌گذارند)

مثال) اگر شکستگی بین دو دما داشته باشیم در حل به صورت Smooth
خواهد شد که جزء خواص Boundry Value Problem خواهد بود. (اگر دیوار در داخل
مرز، به صورت نرم خواهد بود

← مسائل متداول دیگر: به این نوع مسائل initial value Problem
می‌گویند. مثل همه‌ی مسائل unsteady. (به صورت one way)
یعنی همه‌ی نقاط مرزی اثر روی متغیرهای وابسته در هر نقطه تأثیر نداشته
و انتقال اطلاعات در یک جهت صورت می‌گیرد.

انواع مسائل دیفرانسیل مرتبه ۲
- سهموی Parabolic ← مسائل one way طبیعت سهموی دارند (شبیه به [illegible])
- بیضوی elliptic ← مسائل Two way
- هذلولوی hyperbolic ← جزو دسته فوق نیستند

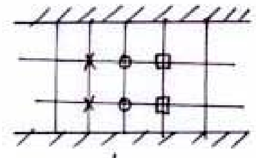
اگر جریان داری و در مرز خروجی [illegible] در نظر بگیریم طبیعت one way است و طبیعت سهموی است.

حل به صورت مقطع به مقطع
(مارچینگ)

همه‌ی مسائل Boundry value problem به صورت بیضوی هستند.
مثل مسائل نفوذ

می‌توانند یک رفتار one way داشته باشند ولی نه تنها در یک راستا و مختصات اصلی بلکه در یک راستای خاص.

marching چیست؟



marching

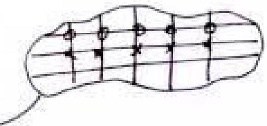
فرض کنید کانالی داریم که یک جریان قوی از چپ به راست درون آن در حرکت است.

اطلاعات ورودی را می‌دانیم (توزیع سرعت، فشار و ....)

اگر منطقه ما one way باشد با استفاده از این مقطع ورودی، اطلاعات مقاطع بعدی قابل حصول است. (استفاده از حل مراحل قبلی برای حل مرحله بعد)

وظیفه متد عملی چیست؟

۱) توجه اصلی روی مقادیر متغیرهای وابسته (دما، فشار، سرعت) در تعداد مشخصی از نقاط در یک دامین.
(یعنی به جای تمرکز روی همه‌ی نقاط روی نقاط خاص تمرکز می‌کنیم و مقادیر متغیرهای وابسته را فقط
computational domain
در همین نقاط جستجو می‌کنیم)



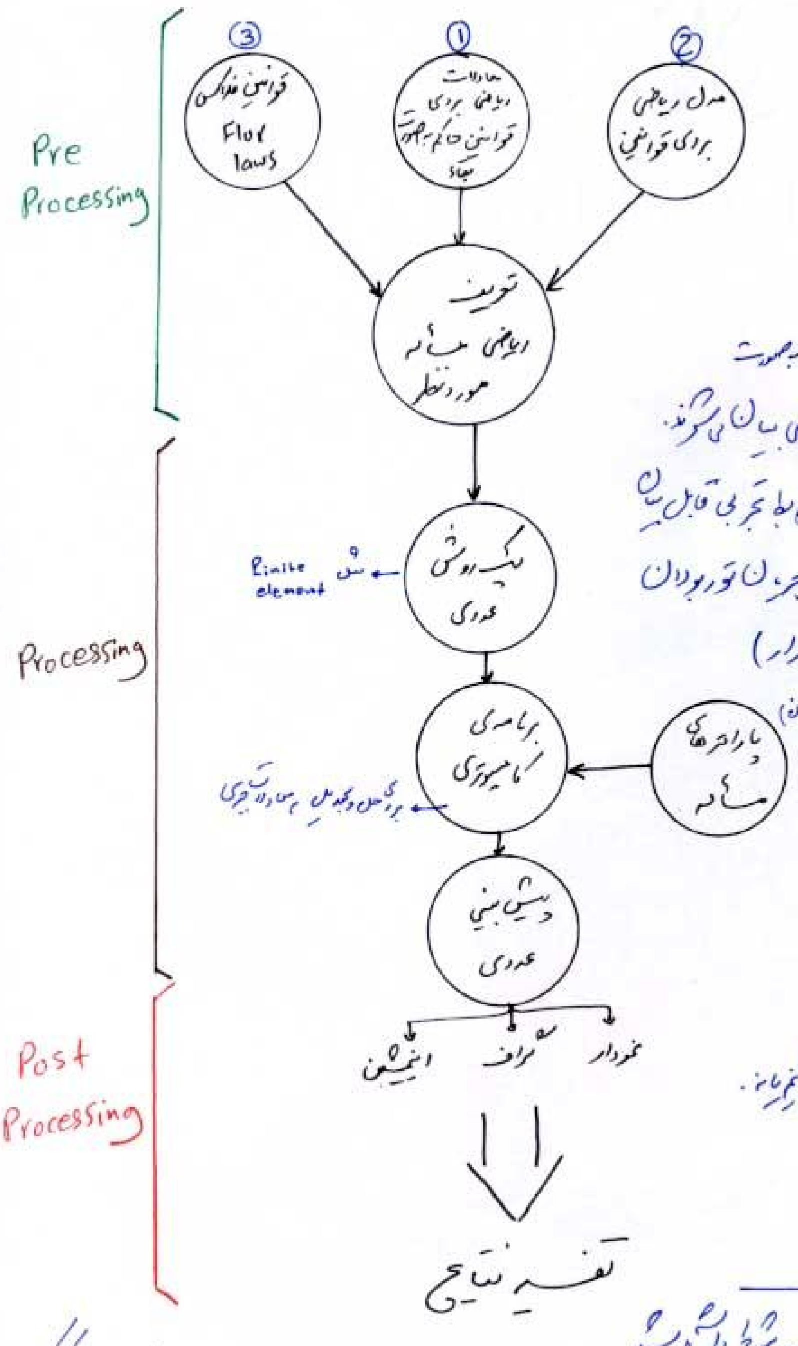
دامین محاسباتی

مثلاً اگر یک جریان دوبعدی را همراه با انتقال حرارت برای حل انتخاب کرده‌ایم
باید در هر نقطه u و v (دو مولفه سرعت) و P و ρ و T را داشته باشیم و بدست آوریم.

۲) تلاش برای نوشتن یک دسته معادلات جبری:

$$PDE \xrightarrow[\text{عددی}]{\text{روش‌های}} \text{معادلات جبری}$$

۳) یک الگوریتم برای حل معادلات گسسته شده ارائه می‌کنیم.



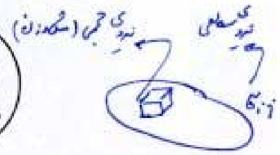
اجزاء یک پیش‌بینی عددی چیست؟

①، ②، ③ ⇐ mathematical model

① : بیان انتقال جرم، مومنتوم، تولید جرم، واکنش شیمیایی و ..... به کمک معادلات بقاء

② : معادلاتی که نیاز به مدل هستند و نتوان به صورت فیزیکی روابطی ساخت، به صورت مدل ریاضی بیان می‌گردند. این مدل‌ها به صورت یک سری فرضیات و روابط تجربی قابل بیان هستند. (مثل مدلی که برای تشعشع بار یا جریان توربولان یا خشک شدن یک ماده‌ی آبدوست یا آب‌فرار)

③ مثل فلاکس مومنتوم.



بخاطر وجود نیروها و عامل حرکت

نیروهای سطحی قابل ارتباط با گرادیان سرعت هستند:

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij}$$

نیروهای سطحی برای سیالات نیوتنی قابل ارتباط با گرادیان سرعت هستند

یا فلاکس حرارتی داریم که با فوریه یا از قانون فیک تبعیت می‌کند.

$$q \propto \frac{\partial T}{\partial x} \Rightarrow q = -k\frac{\partial T}{\partial x}$$

یعنی فلاکس را با گرادیان متناسب کردیم.

✓ لزوماً هر فلاکسی اینگونه نیست

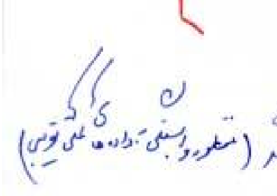
نکته: مسأله‌ای خوش رفتار است (well-posed) که سه شرط داشته باشد

1) جواب داشته باشد 2) جواب یگانه باشد 3) جواب به صورت پیوسته تابع مقادیر اولیه یا مرزی باشد (منظور وابستگی به داده‌های کمی قوی)

Discretization equation چیست؟ معادله‌ای φ را به مقدارهای φ در نقاط اطراف تبدیل می‌کند. (φ هر متغیری مثل دما، فشار، سرعت و ... است)

یک معادله دارای دیفرانسیل را در نظر بگیرید. طبیعت بیضوی است و Two way است.

برای حل یک دستگاه، معادلات جبری نیاز است که یک نقطه را به نقاط اطراف مرتبط کند.



$$\varphi_{ij} = f(\varphi_{i,j-1}, \varphi_{i,j+1}, \varphi_{i-1,j}, \varphi_{i+1,j})$$

.... برای نقاط داخلی

....

✓ چند نقطه و چقدر لازم است؟ بعداً گفته می‌شود

✓ باید معادلات جبری حاصل به گونه‌ای باشند که همان اطلاعات فیزیکی در معادلات دیفرانسیل را در همین دستگاه حفظ کنند.

✓ با افزایش تعداد نقاط حل به حل دقیق معادلات دیفرانسیل میل می‌کند

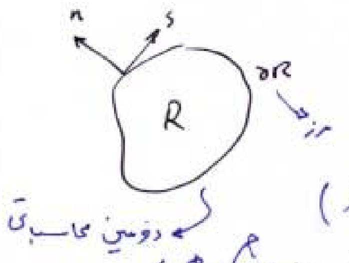
نکته مهم: دستگاه ما منحصر به فرد نیست چون در تبدیل PDE به معادلات جبری به توابعی نیاز داریم که انتخاب آن‌ها برای هر کسی متفاوت است. اما همه‌ی این دستگاه‌ها باید یک جواب مشابه به ما بدهند.

✓ در حل و محاسبه‌ی well posed تر شرایط مرزی بصورت مشتقات تابع مورد نظر باشد در اعمال این شرایط در حل عددی تقریب‌هایی وارد می‌شود که درصورت عدم ارضا شرایط مطرح شده حل دچار مشکلاتی خواهد شد.

✓ الگوریتم محاسباتی که برای حل مسئله مورد استفاده قرار می‌گیرد باید پایدار باشد.

بنابراین برای برخورداری از یک محاسبه‌ی خوش رفتار (well-posed) باید یک حداقل شرایطی وجود داشته باشد که از جمله:

- خوش رفتار بودن PDE و اطلاعات اضافی
- خوش رفتار بودن الگوریتم محاسباتی (پایداری)



شرایط مرزی

ما اطلاعات را از طریق شبکه‌بندی با روند حل عددی تسری می‌دهیم به مقدار حل.
فرقی نمی‌کند که مسئله Boondry Value داشته باشیم (همه‌ی اطلاعات با هم وارد محاسبات شود)
یا از نوع marching Problem باشد (از یک مرز شروع می‌کنیم و محاسبات را مرحله به مرحله انجام می‌دهیم)

پس دو نکته زیر مهم است:

۱) تشخیص شرایط مرزی صحیح ۲) implement کردن شرایط مرزی به داخل حل

انواع شرایط مرزی:

۱) مقدار تابع روی مرز مشخص باشد (شرایط دیریکله) $u=f$ on ∂R
مثل سرعت در ورودی یک لوله

۲) مشتق تابع در مرز مشخص باشد (شرایط نیومن) $\frac{\partial u}{\partial n}=f$ on ∂R یا $\frac{\partial u}{\partial s}=f$ on ∂R
مثل انتقال حرارت که بخشی از مرز عایق باشد $\frac{\partial T}{\partial n}=0$ یا فلاکس حرارتی مشخص داشته باشیم.

۳) مخلوطی از دو نوع اول (mixed or Robin Condition) $\frac{\partial u}{\partial n}+ku=f\,,\ k>0$ on ∂R

✓ در مسائل با شرایط جریان غیرلزج (مثل جریان پتانسیل) شرایط نیومن داریم. در جریان انتقال حرارت معمولاً شرایط mixed وجود دارد

توجه: از نظر محاسباتی اگر تابع f به صورت تحلیلی در اختیار باشد شرایط دیریکله به صورت دقیق قابل اعمال است. در طرف دیگر خطا در اعمال شرایط نیومن و رابین در یک حل عددی بروز پیدا کرده و می‌تواند مشکلاتی همراه داشته باشد.

معادلات دیفرانسیل پاره‌ای (PDE)

معادلات حاکم بر جریان سیال به صورت PDE که مشتمل بر مشتقات اول و دوم در مکان و مشتق اول در زمان هستند. مشتق زمانی خطی و مشتق مکانی در اغلب غیرخطی هستند. همچنین جز برای حالت خاص (جریان پتانسیل) سیستم معادلات حاکم به جای یک معادله تنها مطرح می‌باشد.

برای معادلات PDE خطی مرتبه‌ی ۲ در دو بعد مستقل یک دسته‌بندی ساده به شکل زیر امکان‌پذیر است.

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fx+G=0$$

✓ A و B و C و D و E و F و G ضرایب ثابت هستند

$B^2-4AC<0 \longrightarrow$ معادله رفتار بیضوی دارد

$B^2-4AC=0 \longrightarrow$ معادله رفتار سهموی دارد

$B^2-4AC>0 \longrightarrow$ معادله رفتار هذلولوی دارد

مثلاً برای جریان لزج غیرقابل تراکم، دائمی و دوبعدی و بدون جمله‌های $\frac{\partial u}{\partial t}$ و $\frac{\partial v}{\partial t}$ بیضوی هستند.

✓ ترتیب دادن مرزی به سبب ایجاد یک دستگاه PDE سهموی می‌شود.

✓ مسائل غیردائمی به مسائل سهموی یا هایپربولیک می‌انجامد

✓ مسائل شامل مکانیزم‌های استهلاکی به شکل (تنش‌های لزجی قابل ملاحظه در میدان جریان یا هدایت حرارتی) منجر به مسائل سهموی می‌شود

✓ عامل استهلاکی وجود نداشته باشد:

در مسئله خطی حل با دامنه ثابت در میدان جریان باقی می‌ماند

در مسئله غیرخطی حل می‌تواند با دامنه‌ی در حال رشد یا بیند و دوام پیدا کند.

مثلاً برای یک جریان پتانسیل تراکم‌پذیر دوبعدی حول یک جسم نازک:

$$(1-M_\infty^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0$$

$M_\infty<1 \rightarrow ell$ یعنی برای حل میدان جریان باید معادلات را به صورت دستگاه خطی همزمان حل کرد که هر نقطه به نقاط اطرافش متصل شود و نقاط مرزی هم تأثیرگذار هستند.

$M_\infty>1 \rightarrow Hyp$ حل به روش مشخصه‌ها و عددی انجام می‌شود

PDE انواع معادلات:

خطی ← هیچ یک از ضرایب تابع خود متغیر وابسته نباشد

شبه خطی ← اگر ضریب بزرگترین مرتبه‌ی مشتق تابع u باشد (بقیه ضرایب می‌توانند)

غیرخطی ← بزرگترین مرتبه‌ی مشتق ما حتماً ضریبی باشد تابعی از u باشد مثل u و ...

شکل عمومی معادلات پاره‌ای مرتبه ۲ خطی:

$$\sum_{i,j}^{n} A_{ij} U_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i U_i + FU = G \quad (1)$$

برای تابع دو متغیره گفتیم:

$$AU_{xx} + BU_{xy} + CU_{yy} + DU_x + EU_y + FU = G \quad (2)$$

دسته‌بندی معادلات مرتبه ۲ بر اساس امکان کاهش یا تبدیل معادله‌ی ۲ توسط انتقال مختصات و تبدیل معادله به فرم استاندارد (Canonical) در یک نقطه قابل انجام است. (یعنی در یک دومین مشخص رفتار یک نقطه می‌تواند با رفتار نقطه‌ای دیگر متفاوت باشد مثلاً در یک جا بیضوی و در جای دیگر هذلولی باشد. ما می‌توانیم جهتی را مشخص کنیم که در آن جهت معادله‌ی دیفرانسیل جزئی به یک معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل شود)

در یک نقطه مثل (x_0,y_0):

$$B^2(x_0,y_0) - 4A(x_0,y_0)C(x_0,y_0) \quad (3)$$

این معادله وضعیت را در نقطه (x_0,y_0) مشخص می‌کند که اگر حاصل بزرگتر از صفر شود در این نقطه رفتار Hyper... است و اگر برابر صفر شود رفتار Para... و اگر کوچکتر از صفر باشد رفتار elliptic است. (یعنی فقط در نقطه (x_0,y_0) است)

اگر این اتفاق برای همه‌ی نقاط بیفتد (کل دومین) می‌گوییم معادله در کل دومین رفتار Hyp یا Para یا elli دارد. این اتفاق خیلی خوب است ولی زیاد معمول نیست و ممکن است رفتارهای متفاوت در نقاط مختلف داشته باشد.

$u = f(\xi,\eta)$

برای معادلات با دو متغیر مستقل همیشه انتقالی وجود دارد که می‌تواند معادله‌ی مورد نظر را به فرم کانونی آن تبدیل کند.

(لیسی) $\xi = \xi(x,y)$

$\eta = \eta(x,y) \quad (4)$

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix}$$

ژاکوبین

می‌دانیم: $\xi_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}$

$J \neq 0 \rightarrow$ در هیچ نقطه‌ای از میدان مورد نظر صفر نیست

(ما داریم انتقال معادله را دوباره می‌دهیم)

در این صورت x و y به صورت یگانه از سیستم (۴) قابل تعیین است

$$U_x = U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x$$
$$U_y = U_\xi \xi_y + U_\eta \eta_y \quad (5)$$

$$U_{xx} = U_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2U_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + U_{\eta\eta}\eta_x^2 + U_\xi \xi_{xx} + U_\eta \eta_{xx}$$
$$U_{xy} = U_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + U_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + U_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + U_\xi\xi_{xy} + U_\eta\eta_{xy} \quad (6)$$
$$U_{yy} = U_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2U_{\xi\eta}\eta_y\xi_y + U_{\eta\eta}\eta_y^2 + U_\xi\xi_{yy} + U_\eta\eta_{yy}$$

با جایگذاری (۵) و (۶) در معادله (۲):

$$A^* U_{\xi\xi} + B^* U_{\xi\eta} + C^* U_{\eta\eta} + D^* U_\xi + E^* U_\eta + F^* U = G^* \quad (۷)$$

با توجه به تبدیل به دست آمده، برای این‌که شکل معادله‌ی منتقل شده‌ی (۷) با معادله‌ی اصلی (۲) در صورت عدم صفر شدن ژاکوبین انتقال، شکل معادله را در انتقال تغییر ندهد:

$$(۸)\quad \begin{cases} A^* = A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 \\ B^* = 2A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2C\xi_y\eta_y \\ C^* = A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 \\ D^* = A\xi_{xx} + B\xi_{xy} + C\xi_{yy} + D\xi_x + E\xi_y \\ E^* = A\eta_{xx} + B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + D\eta_x + E\eta_y \\ F^* = F \\ G^* = G \end{cases}$$

در مورد معادله‌ی درجه دوم (۲) به یاد داریم که ملاک دسته‌بندی بر اساس نوع مُبَیّن داشتیم که نوع معادله را مشخص می‌کرد. مبین ما بر اساس ضرایب A، B و C نوشته می‌شود. (ضرایب مشتقات بالاتر ما هستند) می‌دانیم ضرایب مشتقات درجه اول تأثیری در مبین ما ندارند و می‌توانیم به جای شکل گسترده (۲) از فرم مشتقات بالاتر که با H نشان می‌دهیم استفاده کنیم.

$$A U_{xx} + B U_{xy} + C U_{yy} = H \quad (۹)$$

$$H = H(x, y, U, U_x, U_y) \quad (۱۰)$$

حال می‌خواهیم ببینیم فرم کانونی به چه شکل برای معادله‌ی ۱۰ قابل استخراج است. فرض کنیم هیچ‌یک از ضرایب A، B، C صفر نباشند.

$$A^* U_{\xi\xi} + B^* U_{\xi\eta} + C^* U_{\eta\eta} = H^* \quad (۱۱)$$

$$H^* = H^*(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta) \quad (۱۲)$$

اگر ξ و η (متغیرهای جدید) باشند به طوری که ضرایب A^* و C^* در معادله‌ی (۱۱) صفر شوند آنگاه از معادلات (۸) خواهیم داشت:

$$A^* = A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = 0$$

$$C^* = A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 = 0$$

شکل A^* و C^* مشابه هم است پس می‌توانیم هر دو را برحسب ψ بنویسیم (ψ می‌تواند η یا ξ باشد)

$$A\psi_x^2 + B\psi_x\psi_y + C\psi_y^2 = 0$$

با تقسیم حاصل به دست آمده برحسب ψ بر عبارت ψ_y^2 خواهیم داشت:

$$A\left(\frac{\psi_x}{\psi_y}\right)^2 + B\left(\frac{\psi_x}{\psi_y}\right) + C = 0 \quad (۱۳)$$

در طول منحنی ψ ثابت ($\psi = cte$) می‌توان نوشت $d\psi = \psi_x dx + \psi_y dy = 0$ (دیفرانسیل کامل صفر است) پس داریم:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\psi_x}{\psi_y} \quad (۱۴)$$

با استفاده از قضاوت (۱٤) و جایگذاری در (۱۳):

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - B\left(\frac{dy}{dx}\right) + C = 0 \qquad (15)$$

معادله (۱۵) معادله جبری مرتبه ۲ بر حسب متغیر $\frac{dy}{dx}$ است و ۲ ریشه در حالت کلی دارد.

ریشه‌ها:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(B + \sqrt{B^2 - 4AC})}{2A} \qquad (16)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(B - \sqrt{B^2 - 4AC})}{2A} \qquad (17)$$

معادلات مشخصه → معادلات مشخصه شکل دیفرانسیلی یک دسته تابع را در دو جهت مختصات نشان می‌دهند.

معادلات مشخصه که معادلات دیفرانسیل معمولی برای خانواده‌ای از منحنی‌ها در صفحه xy می‌باشند که در طول آنها ψ و η ثابت هستند.

$\eta = cte \;,\; \psi = cte$

منحنی‌های مشخصه از انتگرال معادلات مشخصه به دست می‌آیند.

یعنی امتدادهائی پیدا می‌کنیم که با انتگرال‌گیری در طول آن امتدادها، معادله دیفرانسیل معمولی خواهیم داشت.

انتگرال‌گیری معادلات (۱۶) و (۱۷):

$\varphi_1(x,y) = c_1$
$\varphi_2(x,y) = c_2$ $\Rightarrow$ ثابت‌های انتگرال‌گیری

لازم است: $\xi = \varphi_1(x,y)$, $\eta = \varphi_2(x,y)$ $\Rightarrow$ معادله (۱۰) به فرم کانونی خود تبدیل می‌شود

در اینجا بار دیگر تفکیک برای هر سه فرم بیضوی، سهموی و هذلولوی انجام می‌دهیم.

$B^2 - 4AC > 0$ هایپربولیک (هذلولوی) → قطعا دو جواب داریم و دو معادله مشخصه خواهیم داشت. $\Longrightarrow$ $(11) \longrightarrow U_{\xi\eta} = H_1 \quad (18)$

$H_1 = \frac{H^*}{B^*} \qquad B^* \neq 0$

فرم کانونی معادله هایپربولیک

دو امتداد مشخصه در این حالت وجود دارد که در جهت این امتداد معادله دیفرانسیل پاره‌ای به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود

$U_{\alpha\alpha} - U_{\beta\beta} = H_2(\alpha, \beta, U, U_\alpha, U_\beta)$

فرم دوم کانونی معادله هایپربولیک

$B^2 - 4AC = 0$ (سهموی) → قطعا یک جواب داریم و یک معادله مشخصه داریم $\Longrightarrow$

$U_{\eta\eta} = H_3(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)$

$U_{\xi\xi} = H_3^*(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)$

که در این امتداد یک معادله دیفرانسیل سهموی پاره‌ای را به یک معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌کنیم و روی آن انتگرال‌گیری می‌کنیم.

یک امتداد مشخصه در این حالت وجود دارد که در جهت این امتداد معادله دیفرانسیل پاره‌ای به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود

$B^2 - 4AC < 0$ (بیضوی) $\Longrightarrow$ جواب واقعی ندارد. در مورد بیضوی معادلات، ما امتداد حقیقی نداریم.

سطوح ساده سازی معادلات ناویه استوکس

اشکال حدی معادلات ناویه استوکس (N.S)

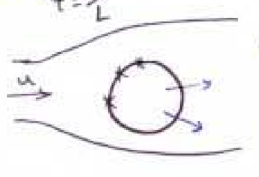
معادلات ناویه استوکس بسیار پیچیده اند (مرتبه ۲ ، پاره ای غیرخطی و کوپل هستند) ما باید این معادلات را ساده کنیم. ما می دانیم جریان های مختلف دارای طبیعت های متفاوتی هستند که طبیعت های غالب باعث می شوند که بتوان ترم های ناویه استوکس را ساده نمود. مثلاً برای جریان های رینولدز بالا برای اینکه لایه مرزی خیلی نازک می شود و فقط جاهای کوچکی هستند که برای تخمین اولیه از این لایه نازک در برابر کل دومین صرف نظر کنیم. پس طبیعت جریان غیرلزج حاکم می شود و ناویه استوکس را برای جریان غیرلزج ساده سازی می کنیم. یا در ازای لایه نتوانیم صرف نظر کنیم و توجه خود را به لایه مرزی معطوف کنیم باز هم می توان یک طبیعت غالب یافت، گرادیان (تغییرات) در امتداد عمود بر محور جریان خیلی بیشتر از گرادیان ها در طول محور جریان هستند پس می توان از مشتق های خیلی در امتداد اصلی (محور جریان) در مقابل عمود بر جریان صرف نظر کرد.

در جریان های با رینولدز پایین، زمان مشخصه برای مکانیزم جریان نسبت به زمان مشخصه برای پخش ورتیسیته از روی دیواره به داخل دومین کوچکتر است.

در داخل دومین

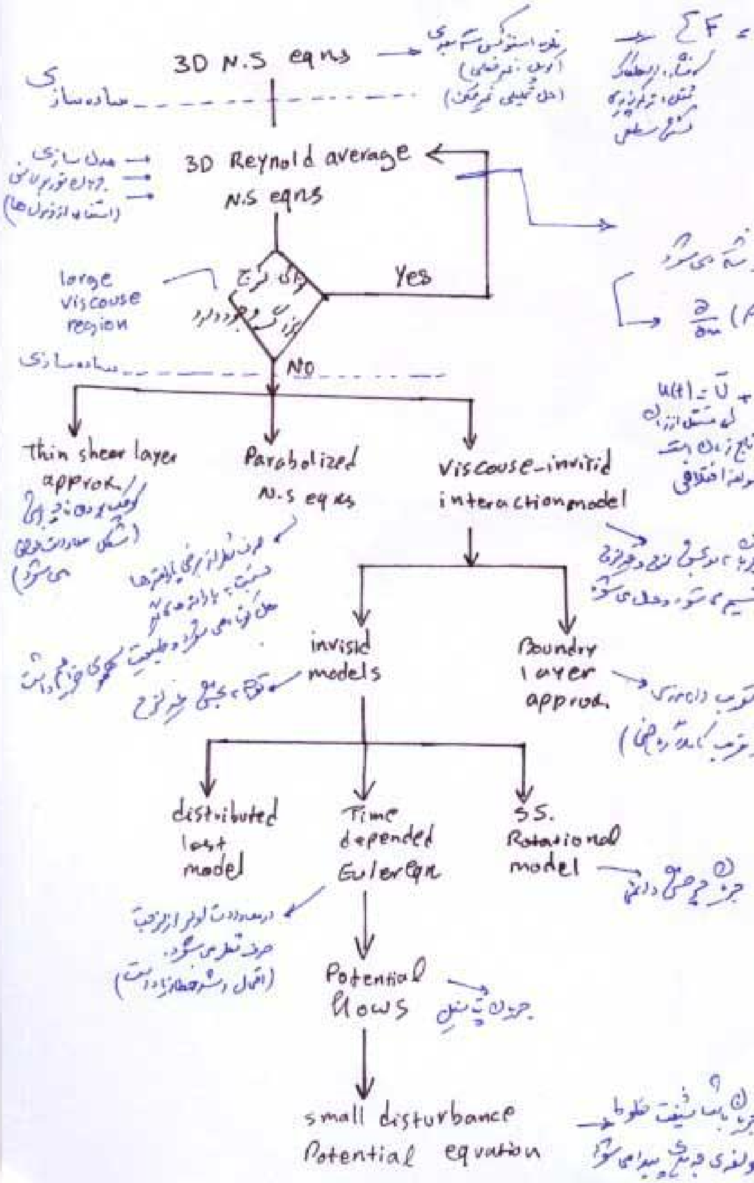
characteristic time — زمان مشخصه

$t = \frac{U}{L}$



فرض در اطراف جسمی جریان با Re پایین باشد و یک ذره را دنبال کنیم. اگر طول مسیر را طی کند (در زمان مشخصه) زمان مورد نظر قابل مقایسه است با زمانی که ورتیسیته روی سطح جسم به داخل دامین می رود (زمان مشخصه دوم)

⟸ اگر t اولی از t دومی کوچکتر باشد ⟸ یعنی تمام دامین تحت تاثیر لزجت است و لزجت همه جا پخش شده است.



$$\sum F = \frac{d}{dt}(m\vec{V})$$

نیروهای فشار، اصطکاک، تنش، ترمو، ... نیروهای سطحی

نیروهای اینرسی

بی بعد سازی — تقسیم بر ma

$N_1 + N_2 + N_3 \cdots = 1$

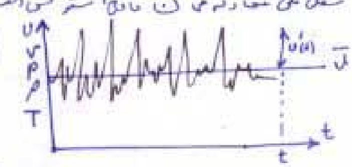
اعداد بی بعد معروفی داشته باشیم رینولدز و پرانتل و ...

ما ترم هایی که اهمیت را ندارند از معادله حذف و صرف نظر می کنیم.

یکی از راه های ساده سازی متوسط گیری زمانی از معادلات ناویه استوکس است.

شکل کلی معادله همان ناویه استوکس است اما برای مقادیر متوسط زمانی نوشته می شود

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) = \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}\,\bar{u}\,\bar{u})$$



$u(t) = \bar{u} + u'(t)$

که مستقل از زمان

که تابع زمان است

مولفه اختلافی

$$\bar{u} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t}^{t+\Delta t} u(t)\,dt$$

معمولاً اینها هم وابسته هستند و خارج کردن ممکن نیست و معادلات باید با هم حل شوند

در جهت زمان خارج باید به صورت جداگانه ... ولی در جهت مکان معادلات باید با هم حل شوند

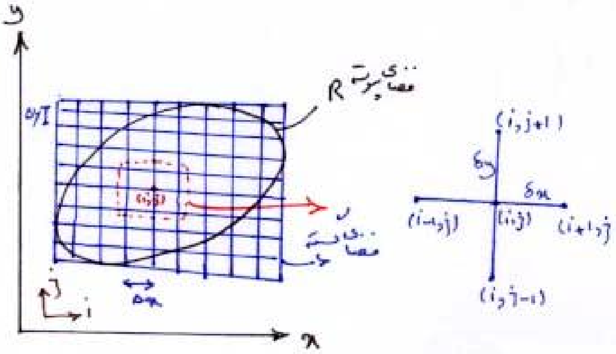
	Steady	Unsteady
Viscous flow	elliptic	Parabolic
inviscid flow	M<1 ell. M>1 Hyp	Hyperbolic
Thin shear layers	Parabolic	Parabolic

شیب خطوط را نشان دهند

در جسم خاصی در داخل جریان با شیب خطوط جریان ... یعنی مولفه دیگری پیدا می شود

روش های گسسته سازی معادلات

روش تفاضل محدود



برای حل عددی معادلات باید ابتدا آن را گسسته سازی کنیم. ⟸ (انتقال اطلاعات از dx و dy به ...)

فرض معادله ما به صورت $\underbrace{u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}}_{\text{کانوکشن}}=\underbrace{\alpha(\nabla^2 T)}_{\text{دیفیوژن}}$ پیوسته (انتقال انرژی) و مجهول $T=f(x,y)$ است.

(با فرض معلوم بودن u و v [میدان سرعت])

✓ در تمام معادلات انتقال، معادلات مشتق مرتبه اول و دوم ظاهر می‌شود. ما به جای این مشتقات عبارات جبری ساده و تقریب زده شده را جایگزین می‌کنیم.

برای تقریب مشتقات مرتبه اول و دوم در داخل معادلات حاکم می‌توانیم به اشکال زیر عمل کنیم.

① استفاده از بسط تیلور

برای یک $f(x)$ که در $x=x_0$ به صورت نامتناهی مشتق پذیر باشد

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \qquad (1)$$

a_n توابعی هستند که به f و مشتقات f وابسته هستند (در $x=x_0$)

$$x=x_0 \Rightarrow f(x_0)=a_0$$

مشتق نسبت به x:

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+\dots \qquad (2)$$

$$x=x_0 \Rightarrow a_1=f'(x)$$

مشتق گیری از (2):

$$f''(x)=2!\,a_2+3!\,a_3(x-x_0)+\dots \qquad (3)$$

$$x=x_0 \Rightarrow a_2=\frac{1}{2!}f''(x_0)$$

با ادامه روش کار داریم ⟸ $\boxed{a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x)}$

که $f^{(n)}=\frac{d^n f}{dx^n}$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-x_0)^n$$

بسط تیلور $f(x)$ در $x=x_0$

← برای تابع تحلیلی $f(x)$ می‌توان یک سری تیلور $f(x+\Delta x)$ را بسط داد. (فرض $\Delta x = h$) $\Delta x = x - x_0$

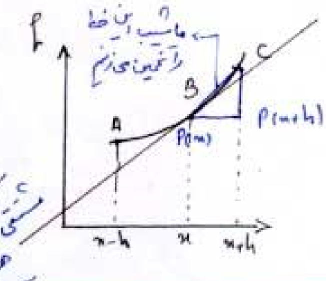
$$f(x+\Delta x) = f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \cdots$$

f' را استخراج می‌کنیم.

$$f'(x) = \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\text{تقریب تفاضل محدود مشتق اول تابع}} - \underbrace{\frac{h}{2!} f''(x) - \frac{h^2}{3!} f'''(x) + \cdots}_{}$$

h بسیار کوچک است و به توان می‌رسد کوچکتر می‌شود و قابل صرف‌نظر کردن است. (خطای برشی)

خطای برشی $o(h)$ ← order(h) یعنی وابستگی مقداری زیادی به h دارد که خطای تقریب ماست.



$$f'(x) \cong \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + o(h)$$

ما این تقریب را برای هر نقطه انجام می‌دهیم.

یعنی معادلات دیفرانسیل را به معادلات جبری تبدیل می‌کنیم.

$$\boxed{f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + o(h)}$$

تقریب تفاضلی پیشرو برای $f'(x)$ از مرتبه $h = \Delta x$

Forward finite diff.

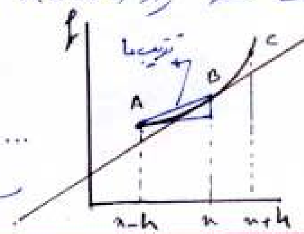
$$f'_i = \frac{\Delta f_i}{h} + T.E. \qquad T.E. = f'_i - \frac{\Delta f_i}{h}$$

اگر $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$ را اپراتور تفاضل پیشرو تعریف کنیم.

← تابع تحلیلی $f(x)$ را با یک سری تیلور $f(x-\Delta x)$ بسط می‌دهیم. $(\Delta x = h)$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x)$$

$$f'(x) = \underbrace{\frac{f(x) - f(x-h)}{h}}_{\text{تقریب تفاضلی برای مشتق}} - \underbrace{\frac{h}{2!} f''(x) + \frac{h^2}{3!} f'''(x) + \cdots}_{T.E.}$$



$$f'(x) \cong \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + o(h)$$

$$\boxed{f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + o(h)}$$

تقریب تفاضلی پسرو برای $f'(x)$ از مرتبه $h = \Delta x$

Back ward finite diff.

$$f'_i = \frac{\nabla f_i}{h} + o(h)$$

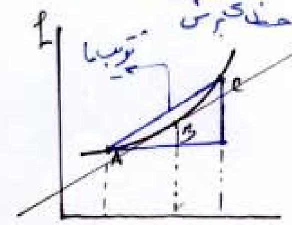
اگر $\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$ را اپراتور تفاضل پسرو تعریف کنیم.

← دو تخمین بالا را با هم تلفیق می‌کنیم.

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) \cdots \\ f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \cdots \end{aligned} \quad \xrightarrow[\text{از هم}]{\text{کم کردن}} \quad f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \underbrace{\frac{h^2}{6} f''' + \cdots}_{\text{خطای برشی}}$$

$$f'(x) \cong \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + o(h^2)$$

← h^2 از h کوچکتر است پس خطا کوچکتر شده است.



$$\boxed{f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + o(h^2)}$$

← h^2 اینجا کوچکتر است

تقریب تفاضل مرکزی

✓ تقریب مشتقات بالاتر ←

$$f''_i = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2} + O(h)$$ تقریب تفاضل پیشرو

$$f''_i = \frac{\Delta^2 f_i}{h^2} + O(h)$$
$$\Delta^2 f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i$$

$$f''_i = \frac{f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}}{h^2} + O(h)$$ تقریب تفاضل پسرو

$$f''_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + O(h^2)$$ تقریب تفاضل مرکزی

✓ پیشرو مرتبه ی ۲ : از سه نقطه بوسیله تفاضل پیشرو استفاده شده. دقت از مرتبه ی ۱ به ۲ ارتقاء یافته است.

$$f'_i = \frac{-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{2h} + O(h^2)$$

✓ تقریب ترم جایی که در آن مشتق اول ظاهر می شود با تقریب مرتبه ی ۱ مشکل دقت دارد ما مجبوریم تعداد نقاط بیشتری از همسایه ها را برای تقریب مورد استفاده قرار دهیم (مثلا سه نقطه که دقت ما از مرتبه ی ۱ به ۲ ارتقاء یابد)

✓ فرض کنیم تغییرات u برحسب t (زمان) را داشته باشیم. یک متغیر مشتق ما هست. و ما برای حل ناحیه را به Δtهای کوچک یا بزرگ تقسیم می کنیم.

فرق Δt بزرگ و کوچک چیست؟

Δt بزرگ زمان حل را کم می کند.

Δt کوچک زمان حل را زیاد می کند همچنین دقت ما افزایش می یابد.

روش های گسسته سازی

① روش F.D.M (finite difference method)

منطق: در این روش جایگزینی مشتقات متغیر وابسته مثل $\frac{\partial P}{\partial x}$ و $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$ و .... با عبارات توابع جبری تفاضل محدود.

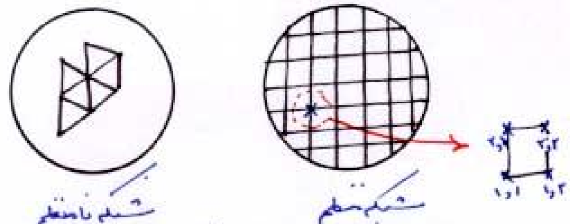
در هر نقطه از شبکه محاسباتی معادله یا دستگاه معادلات PDE ما با معادلات جبری جایگزین می شود.

✓ PDE خطی ⟵ معادلات جبری خطی

PDE غیرخطی ⟵ معادلات جبری غیرخطی

- این روش قدیمی ترین روش برای حل PDE (Partial differential equations) است. (و ساده هم)
- ساده ترین روش است برای هندسه های ساده (عدم انطباق با مختصات معمولی مثل کارتزین، استوانه ای و کروی)
- F.D. به صورت اصولی در روش شبکه ای قابل استفاده است. (اما در کارهای انجام شده بیشتر در شبکه های ساختار یافته استفاده شده است. (در هندسه های نامنظم و در کنار مرزها روش F.D. به مشکل می خورد)

(شبکه های نامنظم با حجم های محدود در بسیاری مسائل مشکل، حل های بهتری ارائه می دهند)



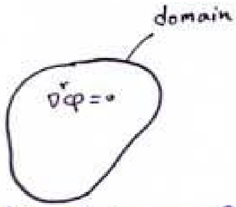
شبکه نامنظم ⟵ شماره گذاری نودهای شبکه نظم خاصی ندارد و دادن روش ها سخت است.

شبکه منظم ⟵ شماره گذاری منظم است پس همسایه هر نقطه مشخص است

- برای تقریب مشتقات از بسط تیلور و چندجمله ای ها استفاده می شود.
- استفاده از F.D.M در عدم ارضا خاصیت های بقائی (مگر در شرایط خاص) و محدودیت در کاربرد در هندسه های ساده است.

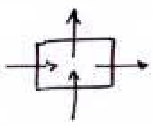
② روش F.V.M یا C.V.M (Finite volume or Control volume method)

- این روش از فرم انتگرالی معادلات بقا استفاده می‌کند.



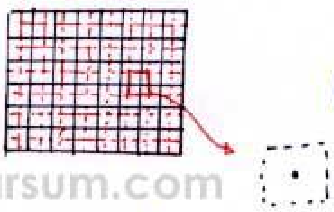
یک دومین را در نظر بگیرید. PDE ما در هر نقطه از این فضا صادق است ($\nabla^2\varphi=0$) و با در نظر گرفتن شرایط مرزی حل می‌شود.

وقتی یک ناپیوستگی در سطح داشته باشیم (شوک که میدان جریان را ناپیوسته می‌کند) برای حل PDE در معادلات دیفرانسیلی به مشکل برمی‌خوریم. در عوض معادلات بصورت انتگرالی چون به کل دومین نگاه می‌کنیم این مسأله قابل حل می‌شود.



- در این روش به مرزها و سطوح اطراف نگاه می‌کنیم و ناپیوستگی داخلی هم نیست.

- میدان حل ما (میدان محاسباتی) به تعدادی حجم کنترل تقسیم می‌شود



حول هر نقطه یک حجم کنترل در نظر می‌گیریم. (نقطه چین‌ها) (برخلاف F.D.M)

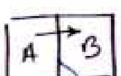
معادلات را برای هر C.V داخل دومین ارضاء می‌کنیم.

شکل انتگرالی معادلات را روی این C.V ها ارضا می‌کنیم، در کل با جزء جزء ارضا شدن معادلات بقا در کل دومین معادلات بقاء ارضاء خواهد شد.

- برای بیان مقادیر متغیرها در سطوح C.V از میانیابی استفاده می‌شود

- یک دستگاه معادلات جبری بدست می‌آید. — از هر شبکه‌ای می‌توان استفاده کرد (برای هندسه‌های پیچیده مناسب است)

- روش در اساس بقائی است تا زمانی که انتگرال‌های سطح که بیانگر فلاکس‌های جابجائی و نفوذ هستند برای حجم کنترل‌های با مرز مشترک مساوی باشند (منظور این است اگر دو المان کنار هم در نظر بگیریم عبارت توصیف برای فلاکس خروجی از المان A مساوی باشد با ورودی B)



از دو المان شکل به راحتی نتیجه می‌گیریم در مرز ناپیوستگی نداریم.

مرز یک سطح حجم کنترل است و می‌تواند ذخیره‌سازی نشود

- از نظر برنامه نویسی و فهم ساده‌ترین روش است (از لحاظ ریاضی) نسبت به F.E.M

- تمام ترم‌هایی که نیاز به تقریب دارند معنای فیزیکی دارند.

- در قیاس با F.D.M استفاده از این روش با دقت‌های بالاتر از مرتبه ۲ در مسائل سه بعدی سخت است.

(در F.D یک سطح تقریب داریم ولی در F.V (C.V) دو سطح تقریب داریم، هر چه سطح تقریب بیشتر شود کار مشکل‌تر است)

(۴) روش F.E.M (Finite element method)

- از بسیاری جهات شبیه روش F.V.M است.

- میدان محاسباتی به تعدادی المان محدود که معمولاً غیر سازمان یافته هستند تقسیم می‌شوند (در دو بعدی به شکل مثلثی یا چهاروجهی و در سه بعدی به شکل هرم هستند)

- فرق اصلی F.E با F.V آن است که قبل از انتگرال‌گیری روی کل میدان معادلات در یک تابع وزن ضرب می‌شوند.

- حسن بزرگ این روش کاربرد ساده‌تر آن در هندسه‌های پیچیده است.

- بزرگترین مشکل F.E آن است که معادلات جبری حاصل سازمان یافته نیستند

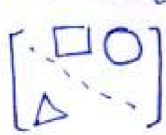
[ماتریس ضرائب] [ϕ's] = {b's}

ماتریس ضرائب در F.V کاملاً باندی است ... و با صفرها جدا هستند

در F.E نه صفرها و اعداد غیر صفری گسترده هستند و در سراسر ماتریس پخش شده‌اند.

واضح است با این اوصاف حل معادله در F.V ساده‌تر از F.E خواهد بود.

روش حل معادلات با استفاده از این ماتریس با صفرهای گسترده، دسته‌بندی صفرهای هم منطقه در المان‌های متفاوت است.



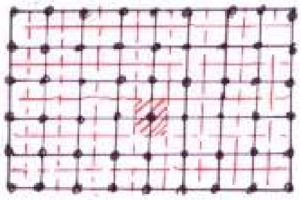
→ دسته‌بندی گروه‌های صفر

خانواده‌ی F.V (C.V):

- F.V.B.F.D.M (Finite volume Base Finite difference method)
  نرم‌افزار فلوئنت بر این اساس کار می‌کند. (روش متداول)

- F.V.B.F.E.M (Finite Volume Base finite element method)

کنترل‌حجم پیشرفته‌تر که هنوز همه‌گیر نشده است. تلفیق F.V با F.E (ماتریس‌ها منتشر با هندسه پیچیده) است که حسن هر دو روش را دارد ولی کاربردی شدن این روش زمان‌بر است و هنوز احتیاج به توسعه دارد.



مراحل روش Control Volume (Finite Volume)

۱- میدان پیوسته را گسسته می‌کنیم (تبدیل میدان به حجم های کنترل)

ابتدا نقاط را بدست می‌آوریم (grid point) و حول هر کدام حجم کنترل می‌گیریم (grid line)

تقسیم بندی نقاط ← داخلی ← حجم کنترل کامل با چهار سطح در اطراف

← مرزی ← half C.V. (نقاط ضلعی)

1/4 C.V. (نقاط گوشه)

۲- از معادله یا معادلات دیفرانسیل انتگرال می‌گیریم (روی تمام C.V. ها) $\int_{CV's} P.D.E \; dx dy dz dt$

۳- برای تبدیل این انتگرال به عبارت جبری مجبور به استفاده از توابع توزیع برای تخمین برخی ترم های داخل معادله انتگرالی هستیم

۴- حاصل کار ما دستگاه معادلات جبری است که بصورت ماتریس ضرائب حل می‌شود.

$$\left[\quad\right]\left\{\phi's\right\}=\left\{C's\right\}$$

ماتریس قطری خوش رفتار ما

✓ انتخاب توابع توزیع دست ماست پس معادلات جبری حاصل می‌توانند در اشکال مختلف ظاهر شوند.

✓ ارضاء معادلات بقاء روی هر جزء C.V. به معنی ارضاء معادلات بقاء روی کل C.V. هاست.

۵- حل نهایی یعنی ما بقاء و انتگرالی (مومنتوم، جرم و انرژی) را برای هر تعداد از C.V. ها داریم پس برای کل C.V داریم

✓ این ارضاء را برای هر تعداد نقاط می‌توان نوشت.

✓ ما مجبور هستیم که تعدادی پروفیل توزیع برای بیان تابع مجهول بین نقاط شبکه استفاده کنیم.

$\phi = f(x, y, z, t)$

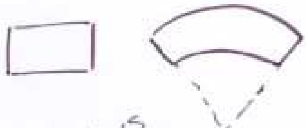
✓ پروفیل های متفاوتی را می‌توان به عنوان توابع توزیع استفاده کرد.

تخمین های مابین دو نقطه ما که نیاز داریم

(چندجمله ای درجه ۲ و ...)

✓ گفتیم این روش برای هندسه های قابل تطبیق روی یک دستگاه مختصات (دکارتی، کروی، استوانه ای) کاربرد دارد.

البته برای هندسه های پیچیده هم می‌توان از این روش استفاده کرد که سختی هایی دارد (تلفیق F.V و F.E که در جهت تکمیل آن را به نام F.V.B.F.E.M معرفی کردیم)



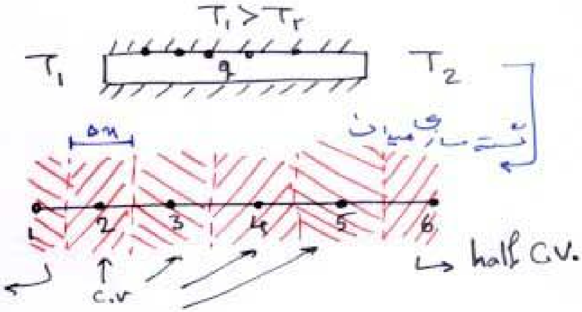
هندسه های ساده

هندسه پیچیده

روش انجام مراحل حل در روش Control volume (F.V. یا C.V.)

فرض: مسئله‌ی یکنواخت و یک بعدی از هدایت گرمایی:

Steady one-dimensional heat Conduction:



$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)+S=0$$ معادله انرژی

$$\underbrace{\rho c\frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{تغییرات انرژی}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(\rho u T)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v T)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w T)}_{\text{کانوکشن}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)}_{\text{دیفیوژن}} + \underbrace{q}_{\text{منبع (سورس)}}$$

تغییرات انرژی = 0

کانوکشن = 0

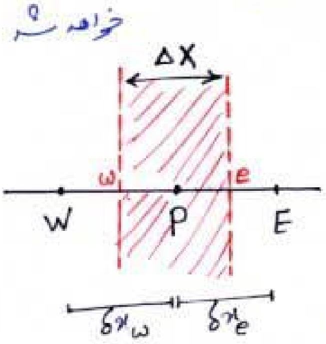
مسئله یک بعدی (در راستای y و z هیچ تغییری صورت نمی‌گیرد)

فقط هدایت حرارتی و سورس داریم.

در راستای y و z ابعاد واحد هستند

در راستای x ابعاد C.V برابر Δx است.

پس معادله انرژی به فرم روبرو ساده خواهد شد $\rightarrow \frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)+S=0$ $\rightarrow$ از این معادله روی هر C.V. انتگرال می‌گیریم. $\rightarrow$ چون این کار هر بار تکرار می‌شود بهتر است یک روش را بسازیم:



هر نقطه هدف انتگرال‌گیری را P و نقاط شرقی و غربی را E و W می‌نامیم

نقاط e و w محل مرزها هستند (با حروف کوچک نوشته می‌شود)

طول C.V. را با ΔX و فاصله نقاط همسایه را با δx نشان می‌دهیم

حال روی C.V. انتگرال می‌گیریم:

$$\int_w^e\left[\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)+S\right]dx = \int_w^e\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)dx+\int_w^e S\,dx$$

$$= k\frac{dT}{dx}\Big]_w^e+\int_w^e S\,dx$$ $\rightarrow$ این کار را برای یک C.V. ها انجام داده‌ایم (تعمیم‌پذیر است)

معادله‌ی دیفرانسیلی را انتگرال‌گیری کرده‌ایم :

$$\left(k\frac{dT}{dx}\right)_e - \left(k\frac{dT}{dx}\right)_w + \int_w^e S\,dx = 0$$

حال شروع به تخمین عبارات بالا می‌کنیم :

$k_e \frac{dT}{dx}\Big]_e$: $\frac{dT}{dx}\Big]_e \cong$ ؟ عبارت جری

$k_e \to$?

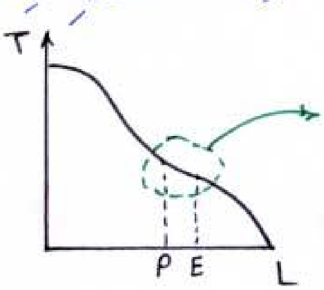
مقدار ضریب هدایت حرارتی در e (k_e) را باید بدانیم .

همچنین مشتق T (شیب پروفیل‌ها) در نقطه e را باید تخمین بزنیم .

مثلاً برای تخمین $\frac{dT}{dx}$ می‌توانیم از تخمین خطی یا درجه ۲ استفاده کنیم .

اصولاً فرض کنیم پروفیل تغییرات دما به‌طور روبرو باشد (در اصل ما نمی‌دانیم تغییرات چگونه است که مجبوریم تخمین بزنیم)

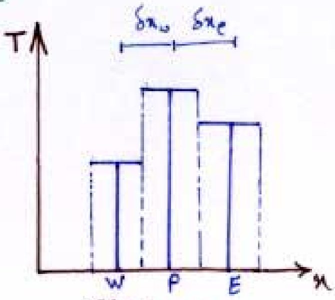
تابع تخمینی



مثلاً قرار است اینجا را تخمین بزنیم

$T \cong f(x)$: در فاصله P تا E

انواع توابع تخمینی اینها

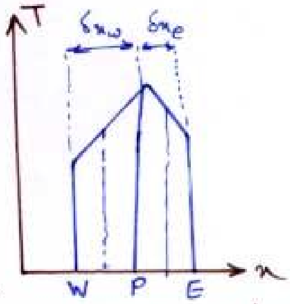


Stepwise

روی هر c.v. مقدار دما ثابت فرض شود

↓

این انتخاب مناسب نیست چون دنبال مشتق T در محل‌های ناپیوسته هستیم!



Piecewise-linear

در فاصله بین هر دو نقطه، T را یک تابع خطی فرض می‌کنیم .

↓

مناسب است .

از تخمین روش Piecewise-linear $\Longrightarrow$

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_e = \frac{T_E - T_P}{\delta x_e} \qquad \left(\frac{dT}{dx}\right)_w = \frac{T_P - T_W}{\delta x_w}$$

$\xrightarrow{\text{معادله انرژی با جایگذاری}}$

$$k_e\left(\frac{T_E - T_P}{\delta x_e}\right) - k_w\left(\frac{T_P - T_W}{\delta x_w}\right) + \int_w^e S\,dx = 0$$

هنوز در معادله انرژی انتگرال و مقادیر نامشخص k_e و k_w را داریم .

- برای Source Term : S می‌تواند تابع دما باشد . برای خطی کردن آن می‌توان روی حجم کنترل کوچک یک $\bar{S}$ فرض کرد :

$$\bar{S} = S_c + S_P T_P$$

تابعیت S با T از این جمله

$$\int_w^e S\,dx = \int_w^e \bar{S}\,dx = (S_c + S_P T_P)\,\Delta x$$

< حال در معادله انرژی همه عبارات انتگرالی جبری شده‌اند >

The discretization equation

$$\overbrace{\frac{k_e(T_E - T_P)}{\delta x_e}}^{\text{هدایت به سمت}} - \overbrace{k_w \frac{(T_P - T_W)}{\delta x_w}}^{\text{هدایت به سمت داخل}} + (S_C + S_P T_P)\Delta x = 0$$ ← معادله‌ی جبری انرژی

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b$$ ⟸ نمایش شکل دیسکریت شده‌ی معادله‌ی انرژی

Thermal Conductance / عکس مقاومت دارد ← $a_E = \frac{k_e}{\delta x_e}$ $\quad a_W = \frac{k_w}{\delta x_w}$

$a_P = a_E + a_W - S_P \Delta x$

Total generation ← $b = S_C \Delta x$

$$a_P T_P = \sum a_{nb} T_{nb} + b$$ ⟸ کل حجم کنترل

✓ برای ترم‌های k_e و k_w چه کار باید کرد؟

دو حالت وجود دارد ← جسم همگن باشد: به جای k_e از K_E استفاده می‌شود که همه جا یکسان است.

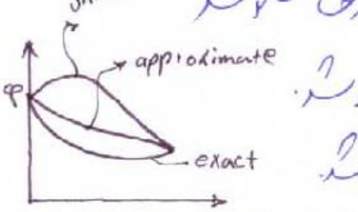
← جسم همگن نباشد: بهترین ترکیب دو طرف نقطه ترکیب خطی دو k اطراف آن است.

(که با درون‌یابی خطی به مشکل می‌خوریم).

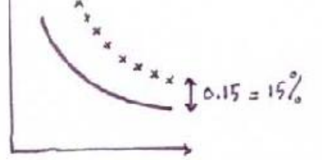
باید e را توسط E و P (نقاط اطراف اصلی) تعریف درست کرد.

اصولی که باید رعایت شود (guiding Principles)

- اگر یک شبکه با تعداد نقاط کم اختیار کنیم. نتایج معادلات گسسته بروی کامپیوتر حل می‌شود



فرض کنیم نتایج φ برحسب x در حوزه‌ی حل ما (۰ تا L) بصورتِ روبرو درآورده شود.
یعنی نمودار روبرو جواب حقیقی باشد، جواب تقریبی ما باید شبیه همین شکل باشد.
در نقاط ابتدا و انتها (شرایط مرزی) نتایج تقریبی و تحلیلی یکسان است. ولی در نقاط میانی تقریب شبیه نمودار کمی متفاوت است که مشکلی ندارد. اما نباید رفتار نقاط میانی عجیب غریب باشد.



پس برقراری دو شرط همگرا، لازم است:

① رفتار فیزیکی realistic بدهد
② بالانس کلی تمامی کمیت مورد نظر را در کل میدان ارضا کند.

شکل روبرو با اختلاف ~~۱۵٪~~ 10٪ شرط اول بالا را دارا است. یعنی رفتار کلی تقریبی با رفتار کلی تحلیلی تقریبا یکسان است.

چکار کنیم که معادله‌ی $a_P\varphi_P=\sum a_{nb}\varphi_{nb}+b$ دو شرط بالا را ارضا کند؟

باید چهار قانون رعایت شود.

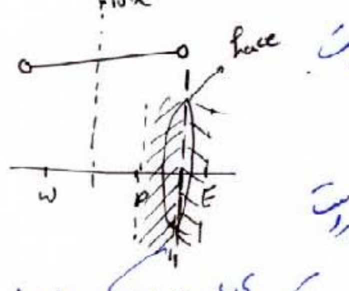
اگر معادلات گسسته شده توسط حجم کنترل دارای ۴ خاصیت (قانون) زیر باشد، پاسخ‌های حاصل از آن دارای ماهیت فیزیکی واقعی خواهد بود.

ما باید بفهمیم اگر قانونی ارضا شده در حل عددی چه (تاثیری دارد)... که جواب درست را بدست بیاوریم

قوانین:

۱. قانون سازگاری در سطوح حجم کنترل — Consistency of C.V faces
۲. ضرائب مثبت — Positive Coefficients
۳. شیب سورس منفی — negative S_p
۴. مجموع ضرائب — Sum of the neighbor Coefficients

۱- قانون سازگاری در سطوح حجم کنترل



فرض کنید یک face برای c.v در نظر می‌گیریم که مشترک بین دو نقطه هم‌جوار است.
اگر مقدار جریان (گسسته شده) را از سمت چپ یا راست این face
نگاه کنیم نباید تفاوت کند، یعنی هر فلاکسی که از سمت چپ وارد می‌شود باید عیناً از راست
خارج شود (و بالعکس) یعنی هیچ انباشتگی در face نباید باشد و فلاکس‌های عبوری از یک طرف
از طرف دیگر خارج می‌شوند. در این صورت می‌گوییم معادلات گسسته شده سازگار هستند.

یکی از مواردی که ممکن است این قانون را نقض کند K است.

$k_w\left(\frac{dT}{dx}\right)_w$

$k_e\left(\frac{dT}{dx}\right)_e \begin{cases} \to k_P\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e \to \text{مربوط به c.v سمت چپ} \\ \to k_E\left(\frac{\delta T}{dx}\right)_e \to \text{مربوط به c.v سمت راست} \end{cases} \Longrightarrow$

جاگذاری این دو عبارت در معادله‌ها نباید نتایج متفاوتی را بدهد.
در حقیقت اگر جواب‌ها متفاوت باشند یعنی چیزی در face ذخیره شده است.
→ ما باید مقدار درست ke را بدست آوریم تا شرط سازگاری ارضا شود

۲- قانون مثبت بودن ضرایب

$a_P\varphi_P = \sum a_{nb}\varphi_{nb} + b$

$\to a_E T_E + a_W T_E$

در معادلات جبری ضرایب باید هم علامت باشند (مثبت باشند)
اگر هم علامتی اتفاق نیفتد اگر مقدار تابع در یک نقطه زیاد شود، تاثیرش روی نقاط همسایه برعکس خواهد بود یعنی اگر
تصور را در نظر بگیریم دمای نقاط اطراف پایین می‌آید که غلط است. (اگر هم علامت باشند، افزایش دما روی تمام نقاط تاثیر علامتی یکسان می‌گذارد)

۳- قانون شیب منفی سورس

$a_P = \overset{+}{a_E} + \overset{+}{a_W} \underbrace{- S_P\Delta x}_{+ \Rightarrow S_P<0}$

باید شیب توزیع خطی برای ترم سورس حتماً منفی باشد (یا صفر) چون:
اگر Sp منفی نباشد ممکن است ap منفی شود و قانون دوم نقض شود. (اگر ap مثبت باشد unstable situation داریم)
یا اگر Sp مثبت باشد حل به سوی انفجار پیش می‌رود و عدد خروجی‌ها فوق‌العاده بزرگ خواهد بود. چون:

$T_P\uparrow \to S\uparrow \to T_P\uparrow \to S\uparrow \to \dots$ خروجی فوق‌العاده بزرگ

۴- $a_P = \sum a_{nb}$

یعنی اگر دماهای مرزی توسط مقدار ثابتی افزایش یابد تمام دماها باید به مقدار ثابتی افزایش پیدا کنند.
یعنی T و T+Constant باید در معادله دیفرانسیل صدق کنند.
می‌توان با جایگذاری T و T+C در معادله دیفرانسیل این قانون را اثبات کرد.

✓ ممکن است برنامه‌ی ما ایرادی پیدا کند ① جواب‌های غیرواقعی ② نوسان حل عددی ③ عدم همگرایی حل و میل به سوی اعداد بزرگ

با اتفاق افتادن هر یک از این سه مورد باید دریافت یکی از فرمول‌بندی‌های صورت قبل با مشکل مواجه شده است.

مسائل شبه هدایت

✓ مسائل شبه هدایت چیست؟ فرمولاسیون مشخصی که برای مسائل هدایت انجام دادیم مد نظر است.
درحقیقت مسائلی شکل مسئله کانداکشن را پیدا می‌کنند.

جریان پتانسیل (لاپلاسین φ) ← معادله‌ی پتانسیل $\nabla^2\varphi = 0$ است که شبیه $\nabla^2 T = 0$ است.

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T + \frac{\dot{q}}{k}$$ معادله هدایت حرارتی در حالت کلی

کارتزین: $$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k}$$ انرژی تولید شده در حجم

استوانه‌ای: $$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k}$$

در حالت دائمی و بدون منبع → $\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ ، $\dot{q} = 0$ $\Rightarrow \nabla^2 T = 0 \Rightarrow$ معمول دمایی و شبیه تابع پتانسیل شده است.

یعنی اگر نرم‌افزاری برای حل معادله هدایت حرارتی دائمی نوشتیم می‌توانیم از آن برای حل معادله پتانسیل هم استفاده کنیم.

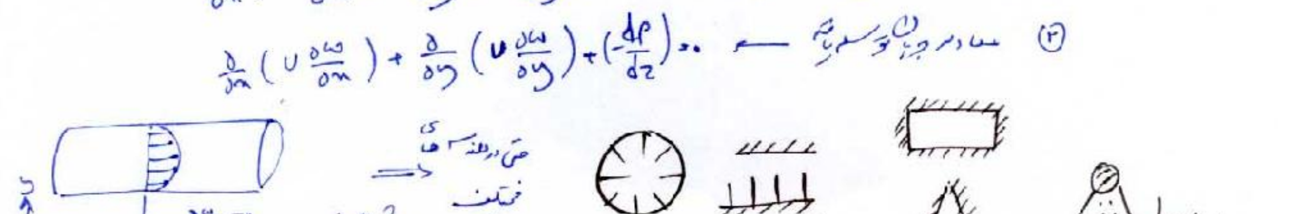
✓ fully developed duct flows ، lubrication flows ، flow through porous materials ، mass diffusion

معادله جریان توسعه‌یافته در کانال — جریان‌های روغنی (یاتاقان‌ها) — حرکت جریان در محیط‌های متخلخل — معادله انتقال جرم

شکل معادلات فوق عیناً شبیه جریان پتانسیل است. و شبه هدایت نام می‌گیرند.

مثال: ① معادله‌ی هدایت ← $$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + S = 0$$

② معادله جریان توسعه‌یافته ← $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial y}\right) + \left(-\frac{dp}{dz}\right) = 0$$



✓ ما حل به روش C.V (control volume) را از ساده به پیچیده می آوریم
(اول فقط هدایت، سپس هدایت و در میدان جریانی معلوم و در آخر حل معادله در میدان جریان نامعلوم را بررسی می کنیم)

Conduction Type
↓ Conduction - Convection Type
Fluid - flow

✓ مسئله conduction ساده‌ترین نوع حل را دارد و پیچیدگی ندارد چون ترم های او کانوکشن صفر هستند. خواهیم دید ترم کانوکشن به خصوص زمانی که میدان جریان معلوم نباشد در حل مشکلات زیادی ایجاد می کند (مشتق اول در معادلات کار را بسیار مشکل می کند (برخلاف مشتق دوم)) در حقیقت ترم مشتق اول در جریان های مختلف رفتارهای مختلف و متفاوتی از خود نشان می دهد که نمی توان قالب خاصی برای این ترم در تمام جریان ها در نظر گرفت.

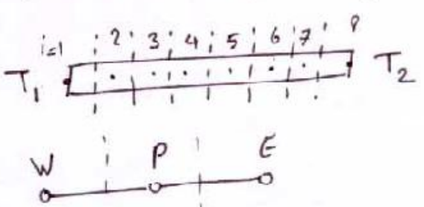
یادآوری و تکمیل بحث مربوط به حل یک بعدی دائمی همراه با سورس

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b$$

$$a_E = \frac{k_e}{\delta x_e} \qquad a_W = \frac{k_w}{\delta x_w}$$

$$a_P = a_E + a_W - S_P \Delta x$$

$$b = S_C \Delta x$$



✓ قبل از گسسته سازی معادلات باید میدان را گسسته کنیم. نکاتی هم در این مورد:

① شبکه محاسباتی (grid) الزامی بر یک اندازه بودن ندارد یعنی $\Delta x_e \neq \Delta x_w$ است (شاید هم مساوی)

② یک شبکه یکنواخت لزوماً بهتر از یک شبکه غیر یکنواخت نیست. فرض کنید روی یک نقطه شعله ای را قرار دهیم، توزیع دما در اطراف این نقطه اثر بیشتری دارد و گرادیان شدت بیشتری دارد، پس ما برای حل مسئله ای ریختن و محاسبه دما باید اطراف شعله را با حجم نقاط بیشتری نسبت به جاهای دیگر در نظر بگیریم.

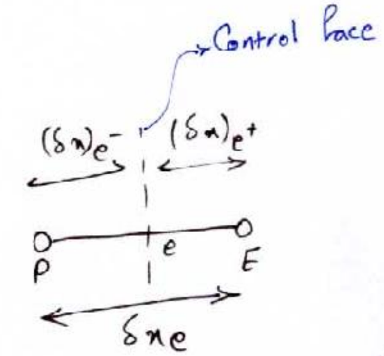
✓ هرجا گرادیان بیشتری داریم به تعداد نقاط بیشتر (شبکه ریزتر) نیاز داریم.

در نقاطی که دما ثابت است (گرادیان نداریم) یک شبکه ریز با شبکه درشت تفاوتی ندارد. پس بهتر است در نقاط دما ثابت برای صرفه جویی در زمان، نقاط کمتری را قرار دهیم تا حجم محاسبات کم شود.

نکته مهم: از کجا بفهمیم در کدام قسمت گرادیان بیشتر است که شبکه‌بندی را در آنجا ریزتر کنیم؟

① به شرایط مسئله نگاه می‌کنیم (مثلاً در مسئله‌ی دیواره مرزی یا مسئله‌ای مثل قرار دادن شعله در یک قسمت از جسم واضح است در جاهایی که تغییرات چشمگیر است باید شبکه‌بندی را ریز کرد)

② و استفاده از یک توزیع اولیه نیز در برخی مواقع کارساز خواهد بود. یکبار کل میدان را بوسیله تعداد نقاط کم شبکه‌بندی کرده و معادلات را حل می‌کنیم. جواب بدست آمده می‌تواند به ما نشان دهد در کدام نقاط گرادیان شدیدتر است. حال می‌توانیم برای حل اصلی در محل‌های مذکور، شبکه‌ها را ریزتر کرده و مسئله را حل کنیم.



تخمین Γ (The interface Conductivity)

در معادله انرژی Γ همان K است.

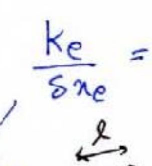
نکته: مجبور هستیم همه‌ی اطلاعات در نقاط غیراصلی شبکه را بر اساس نقاط اصلی شبکه بسازیم. یعنی k_e باید بر اساس k_P و k_E تعیین شود.

ساده‌ترین شکل توزیع، میانگین است $k_e = \frac{k_E + k_P}{2}$ ⇐ این توزیع منجر به یک غیرفیزیکی برای flux term می‌شود.

(وقتی در مسئله‌ی دوبعدی میانگین بین دو عدد تبدیل به میانگین بین ۴ عدد شود جواب بسیار پرت و بد خواهد شد، در مسئله‌ی سه‌بعدی توزیع فوق فاجعه است!)

← توزیع بین ۸ عدد

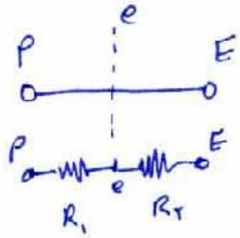
$$\frac{k_e}{\delta x_e} = \left[\frac{(\delta x)_{e^-}}{k_P} + \frac{(\delta x)_{e^+}}{k_E} \right]^{-1}$$



$\frac{k}{l} \rightarrow$ قابلیت هدایت Conductance

$\frac{l}{k} \rightarrow$ مقاومت حرارتی heat resistance

تمرین: عبارت $\frac{k_e}{\delta x_e}$ را در تخمین k در حالت یک بعدی بدست آورید:



$\xrightarrow[\text{مدار الکتریکی}]{\text{توجه با}}$

$$R_1 = \frac{(\delta x)_e^-}{k_P} \qquad R_2 = \frac{(\delta x)_e^+}{k_E} \implies q = \frac{T_P - T_E}{\frac{(\delta x)_e^-}{k_P} + \frac{(\delta x)_e^+}{k_E}} \quad (1)$$

$$q = k_e \frac{T_P - T_E}{(\delta x)_e} \quad (2)$$

مقایسه ① و ②

$$\frac{k_e}{(\delta x)_e} = \left[\frac{(\delta x)_e^-}{k_P} + \frac{(\delta x)_e^+}{k_E}\right]^{-1} \Leftarrow \frac{(\delta x)_e}{k_e} = \frac{(\delta x)_e^-}{k_P} + \frac{(\delta x)_e^+}{k_E}$$

سؤال: اگر δx_e^+ و δx_e^- ها یکسان باشند:

$$\frac{k_e}{\delta x_e} = \left(\frac{\delta x_e}{2}\right)^{-1}\left[\frac{1}{k_P} + \frac{1}{k_E}\right]^{-1} = \frac{2}{\delta x_e}\left[\frac{k_E + k_P}{k_P k_E}\right]^{-1}$$

$$\frac{\delta x_e}{2} = \delta x_e^+ = \delta x_e^-$$

$$\frac{k_e}{\cancel{\delta x_e}} = \frac{k_P k_E}{k_E + k_P}\left(\frac{2}{\cancel{\delta x_e}}\right) \implies k_e = \frac{2 k_P k_E}{k_E + k_P} \implies \text{متوسط هارمونیک}$$

سؤال: اگر علاوه بر یکسان بودن δx ها، مقادیر k_P و k_E برابر باشند

$$k_e = \frac{2k^2}{k + k} = \frac{2}{2}k = k \Leftarrow$$

بر اساس عبارت متوسط هارمونیک:

در محل P عایق داریم و هدایت نداریم

$$k_P = 0 \implies k_e \to 0$$

$$k_P \gg k_E \implies k_e \to 2k_E$$

k_P بزرگ یعنی مقاومت حرارتی نخواهیم داشت و در نتیجه E تا e اتفاق های دمایی می‌افتند که وظیفه فاصله P تا e را نیز خودش انجام می‌دهد.

احتمال غیرخطی شدن (Nonlinearity)

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right) + S = 0$$

$$k = f(T)$$
$$S = h(T)$$

→ معادله بدین صورت غیرخطی خواهد شد و دستگاه جبری حاصل هم غیرخطی خواهد بود

→ حل با روش های مستقیم دستگاه های غیرخطی

→ حل با روش معادلات شبه خطی و سپس دستگاه خطی شده را حل می کنیم.

$\xrightarrow[\text{حل خطی}]{}$ که با روش های تکراری گوس سایدل

در حالت خطی با این روش ها عمل می کنیم.

→ S, k علت بروز حل غیرخطی وجود S, k به صورت توابعی از T است

روش حل دستگاه غیرخطی

۱- مقادیر اولیه برای توزیع مجهول را فرض می‌کنیم (φ را در کل میدان یک مقدار مشخص فرض می‌کنیم) (مثلاً همه را ۱۰۰ می‌گذاریم)

۲- با مقادیر فرض شده ضرایب را بدست آورده و به عدد معلوم می‌کنیم.

$a_p \varphi_p = \sum a_{nb} \varphi_{nb} + b$

۳- سپس دستگاه خطی شده را با این ضرایب حل می‌کنیم.

۴- مقادیر بدست آمده برای φ در مرحله ۳ را با مقادیر مرحله قبل مقایسه می‌کنیم.

۵- در صورت کوچک بودن خطا از یک حد تعیین شده مقادیر φ نهایی مشخص شده، وگرنه به مرحله ② با فرض مقادیر بدست آمده برای φ برمی‌گردیم.

→ همگرایی و حد خطا را ما تعیین می‌کنیم

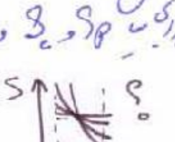
$|\varphi^{i+1} - \varphi^{i}| \leqslant \varepsilon$ حد تعیین شده

بسته به دقت در محاسبات Single Precision خطای حداکثر در حد مقدار 10^{-7} خواهد بود.

خطی‌سازی ترم چشمه

$\bar{S} = S_c + S_p T_p$

راه‌های متفاوتی برای یافتن S_p و S_c وجود دارد



$a_p = a_E + a_W - S_p \Delta x \quad , \quad S_p \leqslant 0$ مهم

خطی‌سازی $\bar{S}$ را با شیب‌های متفاوتی می‌توانیم انجام دهیم، سوالی که این است بهترین شیب کدام است؟

پیشنهاد پاتانکار:

$$\bar{S} = \bar{S}^{*} + \left(\frac{dS}{dT}\right)^{*} (T_p - T_p^{*})$$

مقدار سورس در نقطه $T = T_p$ ← از iteration قبلی بدست آمده

شیب منحنی برحسب T در نقطه $T = T_p$

مقدار معلوم ما در نقطه p که از طریق iteration بدست آمده (از مقادیر قبلی)

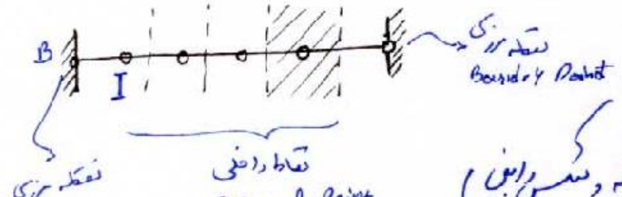
مثال) $S = 4 - 5T^3 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \bar{S} = (4 - 5T_p^{*3}) + (-15T_p^{*2})(T_p - T_p^{*})$ مرتب کردن

$$\bar{S} = \underbrace{(4 + 10T_p^{*3})}_{S_c} - \underbrace{(15T_p^{*2})}_{S_p} T_p$$

← واضح است که همیشه ضریب T_p منفی است.

تحقیق: چرا پیشنهاد آقای پاتانکار مناسب‌ترین شکل ممکن است؟

شرایط مرزی



در این قسمت راجع به شرایط مرزی بحث می‌کنیم.

گفتیم به طور کلی سه دسته شرایط مرزی داریم (نویمن، دیریکله و شرایط رابین)

ما معادلات را برای مسئله یک بعدی پایدار شرایط مرزی را بررسی می‌کنیم.

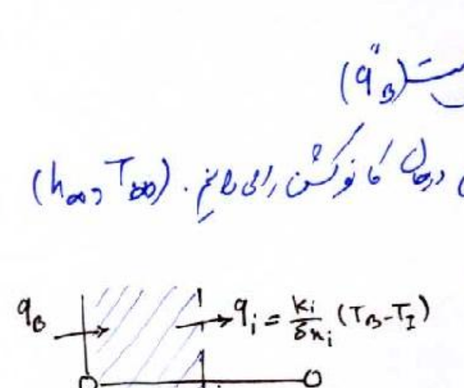
در اینجا نقطه کنار نقطه مرزی را با I نامگذاری می‌کنیم و خود نقطه مرزی را با B نامگذاری می‌کنیم. (نقاط میانی را با i نشان می‌دهیم)

در مسئله:
① T_B معلوم باشد ← مشکلی وجود ندارد
② T_B مجهول باشد ← یا فلاکس روی مرز مشخص است (q_B)
یا در کنار مرز یک سیال داریم که کانوکشن را داریم. (h_∞, T_∞)

در حالت ② یک معادله دیگر اضافه نیاز داریم.

یعنی باید T_B را به شکلی حساب کنیم

ما باید q_B را بدانیم در ② q_B به عنوان یک پارامتر معلوم است یا اینکه خود q_B را باید از روی h_∞ و T_∞ آن را حساب کنیم.



$$q_B - q_i + \overbrace{(S_c + S_p T_B)}^{\bar{S}} \underbrace{\Delta x}_{\Delta x \times 1 \times 1} = 0 \qquad q_i = \frac{k_i}{(\delta x)_i}(T_B - T_I)$$

اگر q_B معلوم باشد ←

$$a_B T_B = a_I T_I + b$$

ضرایب
$$a_I = \frac{k_i}{(\delta x)_i}, \quad b = S_c \Delta x + q_B$$
$$a_B = a_I - S_p \Delta x$$

⇐ فرم استاندارد را باید حفظ کنیم.
در رابطه‌ی خطی شده را معادل سازی کنیم.

اگر h_∞ و T_∞ داده شده باشد ←

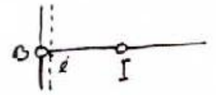
نوع سوم
$$q_B = h_B(T_f - T_B) \qquad a_B T_B = a_I T_I + b$$

ضرایب
$$a_I = \frac{k_i}{(\delta x)_i}, \quad b = S_c \Delta x + h T_f$$
$$a_B = a_I - S_p \Delta x + h$$

سؤال) اگر بین مرز جسم تشعشع داشتیم چه اتفاقی می‌افتد؟

نکات شرایط مرزی

- نقطه‌ی P تفاوتی ندارد که در فاصله‌ی بین دو نقطه B و I ، وسط باشد ،
ممکن است P خیلی نزدیک به B باشد



- یا مثلاً ممکن است P در جایی باشد که حجم کنترل مرزی برابر با صفر شود.
(این به آن برمی‌گردد که اول حجم کنترل‌ها را چیدیم یا اول نقطه‌ها را ؟)

تا اینجای کار معادلات خطی را بدست آوردیم که کاملاً گسسته شده و قابل بیان به شکل ماتریس هستند.

از اینجا به بعد هدف حل این دستگاه معادلات است.

حل معادلات گسسته شده

ماتریس ضرایب در حل یک‌بعدی، چندقطری به شکل سه‌قطری است و بقیه‌ی عناصر آن صفر است

$$a_P \phi_P = \sum a_{nb}\phi_{nb} + b = a_E \phi_W + a_W \phi_W + b$$

روش برمبنای شبه‌خطی‌سازی است و در هر تکرار باید دستگاه جبری خطی حل شود تا از دستگاه غیرخطی دور باشد.

$$\begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{Bmatrix}$$

ماتریس ضرایب — بردار مجهول (φها) — ضرایب ثابت و معلوم

قطرهای اصلی که مربوط به ضرایب a_P و a_{nb} هستند.

روش حل دستگاه جبری:
- روش مستقیم
  - معکوس کرامر
  - حذفی گوس
- روش غیرمستقیم
  - ژاکوبی
  - نقطه به نقطه گوس‌سایدل

در روش مستقیم ما مجبوریم تمام ضرایب را ذخیره کنیم ($n \times n$) یعنی n^2 عنصر

در روش غیرمستقیم هر بار فقط به عنصر غیرصفر نیاز خواهیم داشت و از این نظر حجم محاسبات کمتر است.

براساس الگوریتم تکرار فرایند انجام می‌شود.

بخش‌هایی که می‌نویسیم براساس روش‌های غیرمستقیم است.

مشکل روش‌های غیرمستقیم طولانی بودن همگرایی در برخی مواقع است

روش TDMA (Tri diagonal matrix algorithm)

این روش غیرمستقیم ابداع آقای تامسون است.

این روش کمک می‌کند خطی سه‌ای و با هم‌دانی ماتریس‌های سه قطری را حل کنیم (کاربرد در مسائل یک بعدی)

روش TDMA برای مسائل یک بعدی یا شبه یک بعدی مستقیم عمل می‌کند و برای مسائل دو و سه بعدی قابل تعمیم و بصورت تکرار است

برای یک مسئله یک بعدی داریم:

$$\underset{i=1}{\bullet}\!-\!\overset{i-1}{\bullet}\!-\!\overset{i}{\bullet}\!-\!\overset{i+1}{\bullet}\cdots\cdots\underset{i=N}{\circ}$$

$$a_P\varphi_P = a_E\varphi_E + a_W\varphi_W + b$$

for point i: $\quad a_i\varphi_i = b_i\varphi_{i+1} + c_i\varphi_{i-1} + d_i$

$$\begin{cases} \text{for first point} & c_1 = 0 \\ \text{for last point} & b_N = 0 \end{cases}$$

$$i=1 \begin{cases} a_1\varphi_1 = b_1\varphi_2 + d_1 \\ \varphi_1 = \dfrac{b_1}{a_1}\varphi_2 + \dfrac{d_1}{a_1} \end{cases}$$

$$i=2 \begin{cases} a_2\varphi_2 = b_2\varphi_3 + c_2\varphi_1 + d_2 \\ a_2\varphi_2 = b_2\varphi_3 + c_2\left[\dfrac{b_2}{a_1}\varphi_2 + \dfrac{d_1}{a_1}\right] + d_2 \\ \varphi_2 = \dfrac{b_2}{a_2}\varphi_3 + \cdots \end{cases}$$

با جایگذاری از $i=1$ داریم

φ_2 بیانی از φ_3 می‌شود.

خلاصه الگوریتم:

1. P_1 و Q_1 را حساب می‌کنیم.
2. P_i و Q_i را برای $i=2,\ldots,N$ حساب می‌کنیم.
3. $T_N = Q_N$ داریم.
4. از طریق رابطه کلی از $N-1$ شروع می‌کنیم تا $i=1$ تا مقادیر $T_{N-1}, T_{N-2}, \ldots, T_3, T_2, T_1$ را حساب کنیم.

بطور کلی $\quad \varphi_i = P_i\varphi_{i+1} + Q_i$

$$P_i = \frac{b_i}{a_i - c_iP_{i-1}}, \quad Q_i = \frac{d_i + c_iQ_{i-1}}{a_i - c_iP_{i-1}}$$

$$\text{if } i=1 \Rightarrow P_1 = \frac{b_1}{a_1}, \quad Q_1 = \frac{d_1}{a_1}$$

نحوه محاسبه P و Q ؟

فرض (می‌دانیم) $\quad a_i\varphi_i = b_i\varphi_{i+1} + c_i\varphi_{i-1} + d_i \quad (1)$

هدف $\Rightarrow \varphi_i = P_i\varphi_{i+1} + Q_i \quad (2)$

کافیست از (2) مقدار φ_{i-1} را حساب کنیم و در (1) جایگذاری کنیم.

$$\varphi_{i-1} = P_{i-1}\varphi_i + Q_{i-1} \quad (3)$$

جایگذاری (3) در (1) $\Rightarrow a_i\varphi_i = b_i\varphi_{i+1} + c_i(P_{i-1}\varphi_i + Q_{i-1}) + d_i$

$$\varphi_i = \frac{b_i}{a_i}\varphi_{i+1} + \frac{c_i}{a_i}(P_{i-1}\varphi_i + Q_{i-1}) + \frac{d_i}{a}$$

مرتب کردن و شبیه معادله (2) می‌کنیم

$$\varphi_i = \underbrace{\frac{b_i}{a_i - c_iP_{i-1}}}_{P_i}\varphi_{i+1} + \underbrace{\frac{d_i + c_iQ_{i-1}}{a_i - c_iP_{i-1}}}_{Q_i}$$

تمرین: برنامه TDMA را بنویسید

تمرین: الگوریتم توماس را برای ماتریس‌های ۵ قطری تعمیم دهید

εV

```
#include <iostream.h>

float TDMA(float aw[100],float ap[100],float ae[100],float d[100],int n)
{
float t[100];
int i;
float p[100],q[100];
p[0]=(ae[0]/ap[0]);q[0]=(d[0]/ap[0]);
for(i=1;i<=n-1;++i)
        {
        p[i]=ae[i]/(ap[i]-aw[i]*p[i-1]);
        q[i]=(d[i]-(aw[i]*q[i-1]))/(ap[i]-(aw[i]*p[i-1]));
        }
        t[n-1]=q[n-1];
        for(i=n-1;i>=0;--i)
        {
        t[i]=q[i]-(p[i]*(t[i+1]));
        cout<<"T"<<i<<" = "<<t[i]<<endl;
        }
}
void main()
{
int n;
cout<<"input nodes : ";cin>>n;
float a_w[100],a_p[100],a_e[100],d_[100];
int i;
float input;
for(i=0;i<=n-1;++i)
{
cout<<"Enter aw"<<i<<" ? : ";cin>>a_w[i];
cout<<"Enter ap"<<i<<" ? : ";cin>>a_p[i];
cout<<"Enter ae"<<i<<" ? : ";cin>>a_e[i];
cout<<"Enter d"<<i<<" ? : ";cin>>d_[i];
}
TDMA(a_w,a_p,a_e,d_,n);
}
```

مسائل هدایت غیردائمی

تا اینجا در مورد ترتیبات مسأله هدایت یک بعدی دائمی و با ترم سورس صحبت کردیم و در مورد تولید مشتق و ترتیب K صحبت کردیم
(همچنین ترتیب چشمه را بررسی کردیم)

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T + \frac{\dot q}{k}$$

معادله هدایت برای جسم همگن (k ثابت) و بدون چشمه

حال به یک مسأله هدایت یک بعدی غیردائمی بدون سورس (برای راحتی بیان شدن بررسی می‌کنیم چون قبلاً بررسی کردیم) می‌پردازیم

$$\begin{cases} \rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k\dfrac{\partial T}{\partial x}\right) \\ \rho c = \text{Constant} \end{cases}$$

→ معادله هدایت یک بعدی غیردائمی و بدون سورس (منبع)

می‌خواهیم این معادله را گسسته کنیم (به معادله جبری تبدیل کنیم)
ما باید مارچینگ را در طول زمان انجام دهیم.
به شرایط اولیه و شرایط مرزی نیاز است.

روش حل، روش قدم زدن یا marching است که از شرایط اولیه شروع و برای حل در یک قدم زمانی بعد اقدام می‌کنیم.

$$IC \xrightarrow[\text{یک قدم جلو}]{\Delta t} \text{توزیع دما را حساب می‌کنیم} \xrightarrow[\text{یک قدم جلو}]{\Delta t} \text{توزیع دما را حساب می‌کنیم} \longrightarrow \cdots$$

IC: initial condition (شرایط مرزی و اولیه)

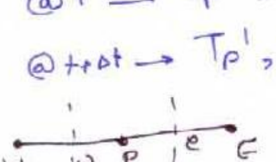
نکته مهم این است که توزیع دما در هر مرحله به عنوان IC مرحله بعد به حساب می‌آید.

فرض کنیم در لحظه t مقادیر معلوم باشد، مقادیر معلوم را با اندیس ۰ نشان می‌دهیم. در لحظه $t+\Delta t$ مقادیر را با اندیس ۱ نشان می‌دهیم.

$@t \rightarrow T_P^0,\ T_E^0,\ T_W^0$

$@t+\Delta t \rightarrow T_P^1,\ T_E^1,\ T_W^1$

(در مکان نوشتن P و W و E را حفظ می‌کنیم)



حال از معادله انتگرال دوگانه می‌گیریم ...

$$\int_w^e\int_t^{t+\Delta t} \rho c \frac{\partial T}{\partial t}\, dt\, dx = \int_t^{t+\Delta t}\int_w^e \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) dx\, dt$$

حال به گسسته‌سازی ترم سمت چپ تساوی (LHS) و ترم سمت راست تساوی (RHS) می‌پردازیم

Right hand Side

left hand Side

برای LHS (ترم سمت چپ تساوی):

$$\rho c \int_w^e \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial t}\, dt\, dx$$

انتگرال زمانی ← فرض می‌کنیم که در هر قدم زمانی، مقدار مجهول (T) در هر نقطه از شبکه و در کل حجم کنترل صادق می‌باشد

که در طول خط ثابت در نظر می‌گیریم.

$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial t}\, dt = T\Big]_t^{t+\Delta t} \Longrightarrow T_{t+\Delta t} - T_t = T_P' - T_P^\circ$$

انتگرال مکانی ←

$$L.H.S = \rho c\left[\int_w^e (T_P' - T_P^\circ)\, dx\right] = \rho c\, \Delta x\, (T_P' - T_P^\circ)$$

برای R.H.S (ترم سمت راست تساوی)

$$\int_t^{t+\Delta t}\left[\int_w^e \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) dx\right] dt = \int_t^{t+\Delta t}\left[\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e - \left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w\right] dt$$

قبلاً تخمین زدیم

$$= \int_t^{t+\Delta t}\left[\left(k_e\frac{T_E - T_P}{\delta x_e}\right) - \left(k_w\frac{T_P - T_W}{\delta x_w}\right)\right]$$

حال انتگرال را می‌شکنیم:

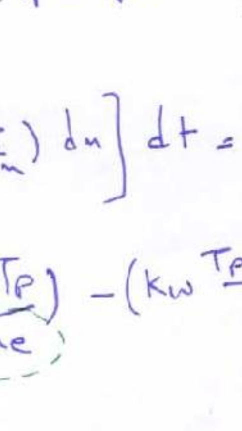
مثلاً:

$$\frac{k_e}{\delta x_e}\int_t^{t+\Delta t} T_E\, dt + \cdots$$

در این ترم چون از T_E چیزی نمی‌دانیم یک تخمین برایش می‌زنیم:
(تخمین برای T برحسب t (دما برحسب زمان))

$$T_E = f(t)$$

ما دنبال این هستیم بفهمیم دما در یک Δt چگونه تغییر می‌کند



← یعنی ما در کل Δt، دما را برابر نقطه انتهایی فرض می‌کنیم

فرض ① همه‌ی تغییرات دمایی ما در ابتدای Δt رخ می‌دهد

← یعنی در کل Δt، دما را برابر با مقدار ابتدایی فرض می‌کنیم.

فرض ② همه‌ی تغییرات دمایی ما در انتهای Δt رخ می‌دهد.

← یعنی دمایی که در نظر می‌گیریم میانگین دمای ابتدایی و انتهایی باشد

فرض ③ تغییرات دمایی ما یک مقدار خطی در Δt باشد

تخمین T در بازه‌ی Δt:

- فرض ① همان implicite است که $T = T^\circ$ خواهد شد
- فرض ② همان explicit است که $T = T'$ خواهد شد
- فرض ③ همان Crank-Nikolson است که $T = \frac{T' + T^\circ}{2}$ خواهد شد.

✓ با در نظر گرفتن شرط غیر دائمی بودن معادله جبری باید شکل زیر را پیدا کند

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_P^\circ T_P^\circ + b$$

قرار شد جای T_i (T_E یا T_P یا T_W) تابع تخمینی را قرار دهیم

$$\int_t^{t+\Delta t} T_i \, dt = ?$$

با روال تخمین های ۱ تا ۳ (هر سه نوع مشابه) داریم:

$$\int_t^{t+\Delta t} T_i \, dt = \left[f T_i^1 + (1-f) T_i^\circ \right] \Delta t$$

فرم کلی تخمین

$f = 0 \rightarrow$ F.E (full explicit)

$f = 1 \rightarrow$ F.I (full implicite)

$f = 0/5 \rightarrow$ C.N (crank-nikolson)

$\Longleftarrow$ به ازای f های مختلف تخمین های مختلف خواهیم داشت

رابطه ی R.H.S با جایگذاری فرم کلی فوق، شکل زیر می شود:

$$R.H.S = f\left[k_e \frac{(T_E^1 - T_P^1)}{\delta x_e} - k_w \frac{(T_P^1 - T_W)}{\delta x_w} \right] + (1-f)\left[k_e \frac{(T_E^\circ - T_P^\circ)}{\delta x_e} - k_w \frac{(T_P^\circ - T_W^\circ)}{\delta x_w} \right]$$

$$a_P T_P = a_E \left[f T_E + (1-f) T_E^\circ \right] + a_W \left[f T_W + (1-f) T_W^\circ \right] + \left[a_P^\circ - (1-f) a_E - (1-f) a_W \right] T_P^\circ$$

$$a_E = \frac{k_e}{\delta x_e}, \quad a_W = \frac{k_w}{\delta x_w}, \quad a_P^\circ = \frac{\rho c \Delta x}{\Delta t}, \quad a_P = f a_E + f a_W + a_P^\circ$$

حال با جایگذاری f می توانیم به تخمین های مختلف دست یابیم

که واضح است که یک نقطه در همسایه ی سابق و بین همه ارتباطی ندارد

✓ یک نقطه سه همسایه دارد

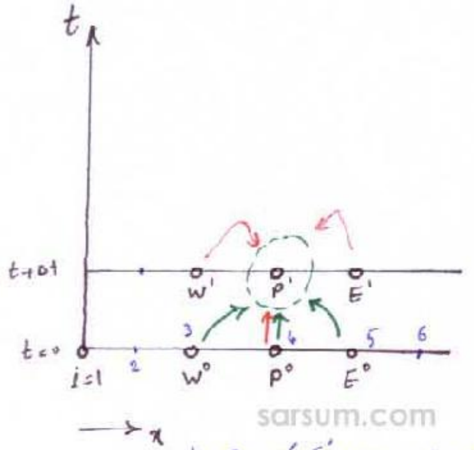
روش صریح $f = 0 \Rightarrow a_P T_P = a_E T_E^\circ + a_W T_W^\circ + (a_P^\circ - a_E - a_W) T_P^\circ$

✓ یک نقطه سه همسایه دارد ولی یکی مجهول است و دوتا مشخص است

روش ضمنی $f = 1 \Rightarrow a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_P^\circ T_P^\circ$

روش کرانک نیکلسون $f = \frac{1}{2} \Rightarrow a_P T_P = \frac{1}{2}\left(a_E T_E + a_E T_E^\circ + a_W T_W + a_W T_W^\circ + (2a_P - a_E - a_W) T_P^\circ \right)$

✓ یک نقطه سه همسایه دارد



شدهٔ ماشین خودکار در جهت خارج کردن در طول زمان و در مکان‌ها گسسته است.

فرض میله‌ای داریم که در هوای آزاد قرار داده‌ایم، هدف حل مسئله در لحظات بعدی است. (لحظهٔ اول معلوم است)

مقادیر دما در تمام نقاط در لحظهٔ $t=0$ معلوم است (شرط اولیه)

ما در لحظهٔ $t+\Delta t$ به همان تعداد نقاط داریم اما علاوه بر مجهول بودن نقاط E و W حالا نقطهٔ $P_{t+\Delta t}$ (P') همسایه‌های زمانی هم دارد که پیشتر زمان قبلی هستند.

✓ در روش صریح Explicit :
$$a_P T_P = a_E T_E^0 + a_W T_W^0 + (a_P^0 - a_E^0 - a_W) T_P^0 \quad *$$

مقدار تابع در هر نقطه فقط وابسته به مقادیر تابع در لحظهٔ قبل است. (از زمان اول معلوم است که فقط T های old نیاز است)

منطق حل این است که از اولین نقطه شروع کنیم و مقدار تابع را برای هر نقطه حساب کنیم

نتیجه: در حقیقت در لحظهٔ فعلی تابع مجهول ما در هر نقطه به صورت کاملاً صریح به نقاط معلوم در لحظهٔ قبل وابسته است

✓ در روش ضمنی implicit :
$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_P^0 T_P^0 \quad *$$

در هر لحظه مقدار تابع مجهول به نقاط همسایه و لحظهٔ قبل همان نقطه وابسته است.

پس در هر مرحلهٔ زمانی مجبوریم یک دستگاه معادلات را حل کنیم، چون در هر لحظه تابع ما وابسته به نقاط مجهول اطراف است و دلیل روش را ضمنی می‌نامند. (چون در هر لحظه مقدار تابع وابسته به مقادیر غیرمعلوم است)

ما در هر Time Step باید یک دستگاه معادلات را حل کنیم. (در روش صریح اینطور نبود)

هرکدام از این دو روش فواید و مشکلاتی دارند. دیده شد که روش صریح ساده‌تر، کم‌هزینه‌تر و سریع‌تر است و نیاز به حل دستگاه معادلات در هر Time Step نیست. اما مشکلی هم وجود دارد. مشکل بزرگ ضریب T_P^0 است که ممکن است منفی شود و شرط مثبت بودن ضرایب را زیر پا بگذارد.

✓ روش fully implicit در زمان دقت مرتبهٔ 1 دارد

در ضریب T_P^0 منفی شود، مسئله مثبت بودن ضرائب نقض شده و بنا ناپایداری جواب می‌شود

پس روش صریح تحت شرایطی ممکن است به ناپایداری بینجامد. $a_P^0 - a_E - a_W > 0$ (به دلیل ضرائب مثبت)

$$\frac{\rho c \Delta x}{\Delta t} - \frac{k_e}{\delta x_e} - \frac{k_w}{\delta x_w} > 0 \Longrightarrow \Delta t < \frac{\rho c (\Delta x)^2}{2k}$$

شرط پایداری (فرض $k_e = k_w = k$)

یعنی Δt انتخابی برای حل معادلات از $\frac{\rho c(\Delta x)^2}{2k}$ کوچکتر باشد. Δx دقت ما را مشخص می‌کند یعنی هر چه تعداد نقاط بیشتر باشد Δx کوچکتر خواهد بود. اما اگر Δx خیلی کوچک باشد، برای برقراری شرط پایداری فوق Δt خیلی خیلی باید کوچک شود که مشکل‌ساز خواهد بود. (تعداد Time Step ها فوق العاده زیاد خواهد شد)

✓ پس روش explicit پایداری مشروط دارد. و شرط پایداری هم $\Delta t < \frac{\rho c(\Delta x)^2}{2k}$ است.

✓ در روش ضمنی ما هیچ شرطی نداریم و بدون شرط پایدار است.

← باید بین روش ضمنی و صریح یکی را انتخاب کرد. این مرحله مسئله و شرایطی دارد.

✓ روش C.N تحت شرایطی پایدار و تحت شرایطی ناپایدار است.

✓ پیشنهاد آقای پاتانکار استفاده از روش fully implicit است (چون شرط پایداری نیاز ندارد)

✓ برای Δt های کوچک روش ضمنی به دقت کرنک نیکلسون نخواهد بود، برای Δt های بزرگ بهتر است از fully implicit استفاده شود.

نتیجه: Δt کوچک ← روش تخمینی کرنک نیکلسون

Δt بزرگ ← روش ضمنی

یک ترکیب مناسب از کرنک نیکلسون و ضمنی بهترین حالت نهائی می‌باشد.

در این مورد بعداً توضیح داده خواهد شد.

پس بطور کلی برای شرایط یک بعدی، همراه سورس و بصورت غیر دائمی داریم:

$$
\begin{cases}
a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b \\
a_E = \dfrac{k_e}{(\delta x)_e}, \quad a_W = \dfrac{k_w}{(\delta x)_w}, \quad a_P = a_E + a_W + a_P^0 - S_P \Delta x \\
a_P^0 = \dfrac{\rho c \Delta x}{\Delta t}, \quad b = S_c \Delta x + a_P^0 T_P^0
\end{cases}
$$

نکته مهم: می‌توان برنامه‌ای برای شرایط unsteady نوشت و حالت steady state را هم با آن حل کرد. کافیست مقدار Δt را یک عدد بزرگ (مثلاً 10^8) وارد کنیم، خود به خود معادلات شبیه حالت دائمی می‌شود.

$\Delta t \nearrow \infty \Rightarrow a_P^0 = 0 \Rightarrow$ معادلات شبه حالت دائمی می‌شود.

بعداً خواهیم دید حل مسئله steady به کمک روش unsteady بهتر جواب می‌دهد.
(در برخی جریان‌های درهم، ناپایدار است و همگرائی نداریم [در حل به روش steady] پس از روش unsteady آن را حل می‌کنیم)

ما اکنون می‌توانیم یک برنامهٔ کامپیوتری بنویسیم که مسئله هدایت یک بعدی همراه سورس و بصورت غیر دائمی را حل کند.
برای این کار:

۱- تولید شبکه (در جهت تغییرات نقاط را مشخص کنیم) (Δx ها را در یک آرایه می‌ریزیم)

۲- برای هر C.V (حجم کنترل) ضرایب معادله‌ی فوق را حساب کند (a_E، a_W و a_P و a_P^0) (و در یک آرایه ذخیره کند)

۳- معادله یک تابع برای حل معادلات جبری خطی داشته باشد (به روش TDMA)

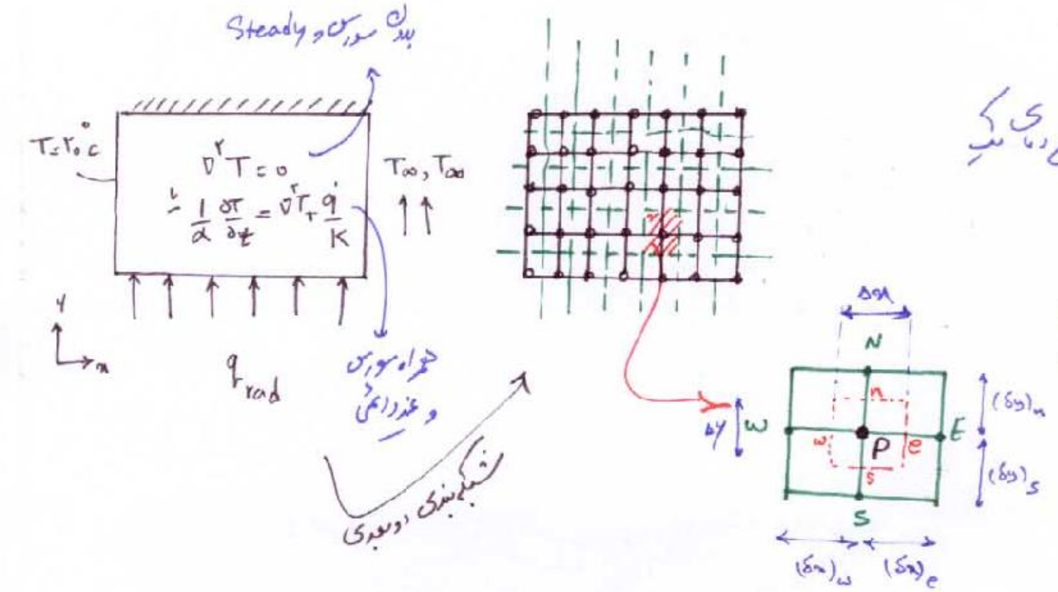
۴- برنامه بتواند بصورت Iteration عمل کند، یعنی اگر معادلات جبری ما غیر خطی شد بتواند آن را شبه خطی کند (یک مقدار اولیه فرض کند، ضرایبی که وابسته به مجهول هستند تبدیل به عدد گردد و دستگاه معادلات خطی شده را حل کند و جواب این حل را با قبلی مقایسه کند [که با توجه به یک تابع خطا])

نکته: ضرایب Γ (ضریب دیفیوژن) باید به طرز صحیح در interface ها محاسبه شود (k_w و k_e) (روش متوسط هارمونیک)

حل مسائل دو بعدی

هدف بدست آوردن توزیع دمای یک جسم دو بعدی است.

ابتدا شبکه‌بندی می‌کنیم و از نامگذاری برای هر C.V استفاده می‌کنیم.



حال معادله را گسسته سازی می‌کنیم. ابتدا از معادله انتگرال می‌گیریم:

$$\int_t^{t+\Delta t}\int_s^n\int_e^w \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}\,dx\,dy\,dt = \int_t^{t+\Delta t}\int_s^n\int_e^w \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,dx\,dy\,dt + \int_t^{t+\Delta t}\int_s^n\int_e^w \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\,dx\,dy\,dt + \int_t^{t+\Delta t}\int_s^n\int_e^w S\,dx\,dy\,dt$$

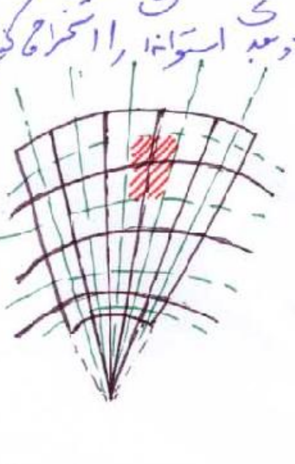
با انجام انتگرال‌گیری خواهیم داشت:

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_N T_N + a_S T_S + a_P^\circ T_P^\circ + b$$

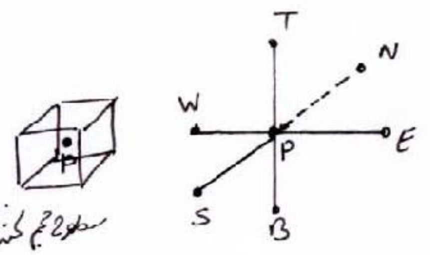
$$a_E = k_e \frac{\overbrace{\Delta y}^{\Delta y \times 1}}{(\delta x)_e}, \quad a_N = k_n \frac{\Delta x}{(\delta y)_n}, \quad a_P^\circ = (\rho c)\frac{\overbrace{(\Delta x\,\Delta y)}^{\Delta x\,\Delta y \times 1}}{\Delta t}$$

$$b = S_c\,\Delta x\,\Delta y + a_P^\circ T_P^\circ, \quad a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^\circ - S_P\,\Delta x\,\Delta y$$

تمرین: معادله‌ی بالا را از طریق انتگرال‌گیری ترتیب استخراج کنید (همچنین دو بعدی استوانه‌ای را استخراج کنید)



حل مسائل سه بعدی



سطوح حجم کنترل

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_S T_S + a_N T_N + a_B T_B + a_T T_T + b$$

$$a_E = k_e \frac{\Delta y \Delta z}{(\delta x)_e}, \quad a_N = k_n \frac{\Delta x \Delta z}{(\delta y)_n}, \quad a_W = k_w \frac{\Delta y \Delta z}{(\delta x)_w}$$

$$a_S = k_s \frac{\Delta x \Delta z}{(\delta y)_s}, \quad a_T = k_t \frac{\Delta x \Delta y}{(\delta z)_t}, \quad a_B = k_b \frac{\Delta x \Delta y}{(\delta z)_b}$$

$$a_P^0 = \rho c \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t}, \quad b = S_c \Delta x \Delta y \Delta z + a_P^0 T_P^0$$

$$a_P = \sum a_{nb} + a_P^0 - S_P \Delta x \Delta y \Delta z$$

$mc\Delta T$

$\rho c \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t} \times T_P^0$

$a_P^0 T_P^0$ یعنی چه؟ به معنای انرژی درونی داخل حجم کنترل است برمبنای زمان

b یعنی چه؟ مجموع سورس هاست.

$$b = \underbrace{S_c \Delta x \Delta y \Delta z}_{} + a_P^0 T_P^0$$

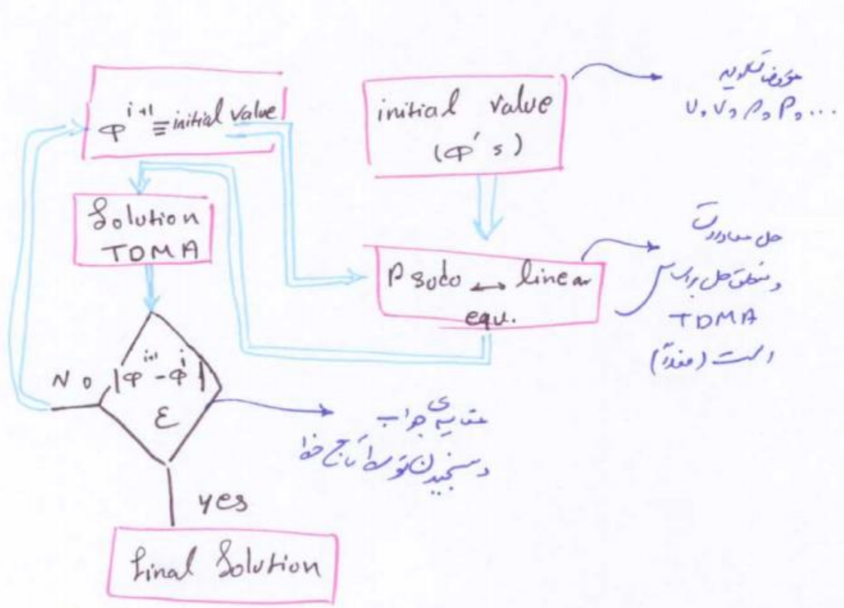
سهمی از سورس در واحد زمان در داخل C.V

انرژی تولیدی

S_P مشتق دما

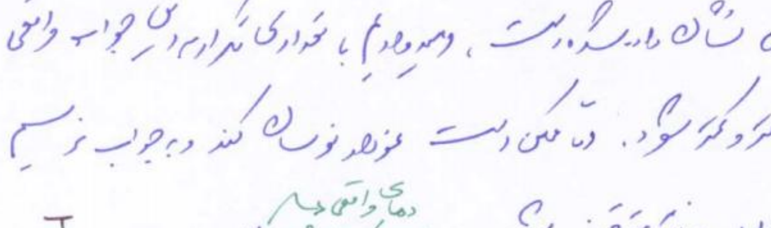
در سورس

فرآیند حل معادلات



نکته: فرض برای iteration اول یک دما طبق تجربه داده شده باشیم که حدس اولیه ماست. حال ضرایب معادلات را حساب می کنیم (a_P, a_E, ...)
و طبق روش TDMA مقادیر جدید دما را حساب می کنیم. مثلاً در iteration دوم دما به T_2 می رسد.

فرض جواب واقعی همان چیزی باشد که در شکل نشان داده شده است، و ما می خواهیم با تعدادی تکرار به آن جواب واقعی برسیم، انتظار داریم، دامنه ی خطا هر دور کمتر و کمتر شود. ولی ممکن است نوسان کند و به جواب نرسیم
همچنین امکان diverge شدن وجود دارد و برنامه متوقف شود.



ما باید سعی کنیم تا تغییرات یک تکرار به تکرار دیگر را کنترل کنیم.

استراتژی ما کنترل تغییرات متغیرها (مقادیر مجهولات) در تکرارهاست.

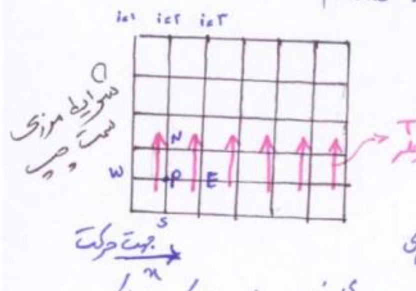
فرآیند under relaxation یا زیر تخفیف به نوعی میزان تغییرات توابع مجهول را در تکراری به تکرار دیگر کند می کند. (کم می کند) یعنی اجازه نمی دهد دامنه ی نوسانات زیاد شود.

← این فرآیند، فرآیند تکرارپذیری نیست یعنی منظور این است که اگر برای یک مسئله صادق باشد برای مسئله دیگر هم قابل تکرار باشد، حتی در یک مسئله هم قابل تکرار نیست (مثلاً اگر شرایط مرزی، یا شرایط اولیه تغییر کند نمی توان از این ضریب استفاده کرد)

نکاتی در مورد TDMA

انواع مسائل:
- مسائل یک بعدی ← TDMA ماتریس سه قطری
- مسائل دو بعدی ← الگوریتم TDMA را برای دو بعدی تعمیم می دهیم. / از خود TDMA استفاده می شود (line by line)
- مسائل سه بعدی ← مانند دو بعدی / از خود TDMA استفاده می شود (Plane by plane)

روش line by line:



حدس اولیه برای کل نقاط، سپس در جهت x مسأله دو بعدی را به مسئله یک بعدی در جهت y تبدیل می کنیم.

مثلاً برای i=2، چون T_E و T_W معلوم است. پس نقطه P تنها به نقاط بالایی و پایینی مربوط است. و ما تبدیل مسأله به یک بعدی را داریم و آن را به وسیله TDMA حل کنیم، مقادیر این خط (i=2) را بدست آورده و در حافظه می‌ریزیم. حال برای خط i=3 همین کار را تکرار می کنیم. (همه به سمت چپ را که قبلاً حل کردیم و همه به سمت راست هم که حدس اولیه هستند) حال برای i=3 می توانیم TDMA را اعمال کنیم. این کار را برای ...، i=4، i=5 تکرار می کنیم.

← ما با این کار یک بار میدان حل را در جهت x، Sweep (جاروب) کرده‌ایم. در حقیقت اثرات شرایط مرزی سمت چپ وارد میدان شده است. (مرحله به مرحله در میدان اثرش وارد می شود) شرایط مرزی بالا و پایین هم از طریق حرکت ما در جهت پایین به بالا وارد میدان می شود.

به طور کلی شرایط مرزی سمت چپ (boundary condition) با یکبار جاروب کردن میدان از سمت چپ به راست تاثیرشان روی میدان اعمال می شود.

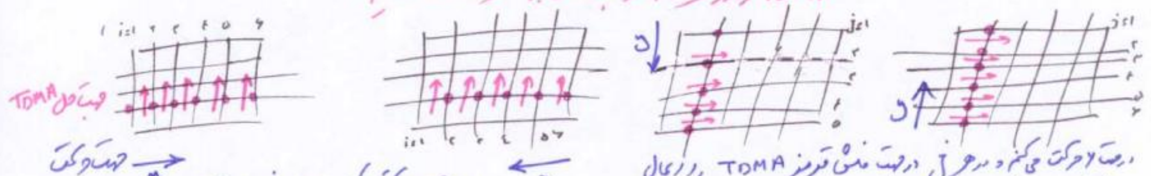
برای وارد کردن تاثیر شرایط سمت راست باید یکبار از سمت راست به چپ مسئله را مثل قبل حل کنیم. برای وارد کردن شرایط مرزی بالا و پایین هم یکبار در جهت y از بالا به پایین و بار دیگر از پایین به بالا میدان مسأله را جاروب می کنیم.

یک Sweep کامل یعنی جاروب کردن میدان در جهت x از چپ به راست و سپس از راست به چپ و همچنین جاروب کردن میدان در جهت y یکبار از بالا به پایین و بار دیگر از پایین به بالا.

براساس تابع خطا باید جواب ها را با Sweep قبلی چک کرد. اگر ارضا نشد باید یکبار دیگر جاروب کرد.

مطلوبی داریم:

TDMA را در هر مرحله در جهت منحنی برای هر نقطه اعمال می‌کنیم.

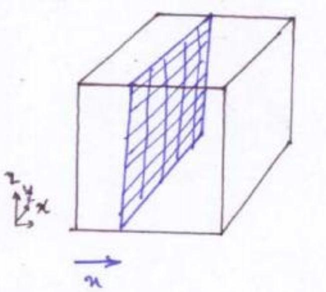


در جهت x حرکت می‌کنیم و در هر i در جهت منحنی قرمز TDMA را اعمال می‌کنیم.

در جهت y حرکت می‌کنیم و در هر j در جهت منحنی قرمز TDMA را اعمال می‌کنیم.

← مراحل بالا یک sweep کامل را نشان می‌دهد

در حالت سه بعدی نیز می‌توان روش sweep کردن را تعمیم داد. که به آن plane by plane می‌گویند.



مثلاً با توجه به شکل در هر دو انتها صفحات $x=k$ و $k=0,1,2,\dots$ را مرحله به مرحله انتخاب می‌کنیم.

روی هر صفحه line by line را انجام می‌دهیم. سپس به صفحه‌ی بعد می‌رویم.

تا اینکه یک بار به طور رفت و برگشت در جهت x، sweep را انجام دهیم.

برای جهت‌های y و z هم همین کار را تکرار می‌کنیم.

آیا همیشه به sweep در تمام جهات نیاز است؟

در برخی مسائل جهات غالب وجود دارد. مثلاً در جریان داخل لوله. (با Conduction در یک دیواره متفاوت است)

چون شرط مرزی پایین دست نداریم و سرعت و دما در بالادست جزء مقادیر معلوم مسئله است.

جهت غالب انتقال اطلاعات از چپ به راست است و ما فقط نیازمند sweep از چپ به راست هستیم.

✓ تغییر راستای جاروب کردن بر این اساس انجام می‌شود که شرایط مرزی در همه‌ی مرزها هر چه سریعتر وارد نقاط داخلی شود.

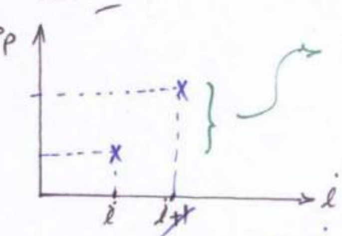
برای تسریع همگرایی بهتر است، در روش‌های ضرایب بزرگ، TDMA به کار برده شود.

ترتیب sweep مهم است، در جهتی که اطلاعات معلوم وجود دارد یا راستایی که نوسان قوی وجود دارد

مبحث under-relaxation

در روش تکرار حل معادلات جبری برای ترم های غیرخطی گاهی اوقات نیاز به افزایش یا کاهش تغییرات از تکراری به تکرار دیگر خواهیم داشت. برای این کار از دو روش عملی زیر استفاده می کنیم

۱- روش استفاده از فاکتور تخفیف به روش صریح



منظور از عبارت داخل پرانتز

می دانیم $a_P\phi_P = \sum a_{nb}\phi_{nb} + b$

$$\phi_P = \left(\sum a_{nb}\phi_{nb} + b\right) / a_P$$

فرض $\phi_P^* =$ مقدار ϕ_P در تکرار قبل (مقدار معلوم)

اضافه و کم کردن ϕ_P^*

$$\phi_P = \phi_P^* + \left(\underbrace{\frac{\sum a_{nb}\phi_{nb} + b}{a_P}}_{\text{جواب جدید در تکرار } i+1} - \phi_P^*\right)$$

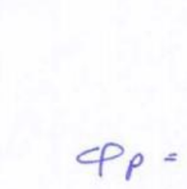
تفاضل داخل پرانتز نشان می دهد که چقدر مقدار ϕ از یک تکرار به تکرار دیگر تغییر کرده است.

برای کنترل این تفاضل می توان آن را در ضریبی ضرب کرد.

عبارت داخل پرانتز تغییر در مقدار ϕ به دلیل انجام تکرار جاری را نشان می دهد که می توان با اعمال فاکتور تخفیف این تغییر را به دلخواه کنترل کرد (فاکتور تخفیف را با α نشان می دهند)

$$\phi_P = \phi_P^* + \alpha\left(\frac{\sum a_{nb}\phi_{nb} + b}{a_P} - \phi_P^*\right)$$

بنابراین به دو شکل می توان اعمال کرد که یکی همین روش فوق است (روش صریح) α روی تغییر مقدار ϕ در دو تکرار پشت سر هم اعمال می شود.



یعنی مثلاً ϕ در نقطه (۵، ۳) مد نظر است. فرض در iteration شماره ۱۰ هستیم.
ϕ را در این iteration حل می کنیم. حاصل را منهای مقدار ϕ در iteration شماره ۹
می کنیم. (ϕ_P^*) و حاصل را در α ضرب می کنیم و با مقدار ϕ_P^* (مقدار ϕ در iter. شماره ۹)
جمع می کنیم. حاصل می شود ϕ در نقطه (۵،۳) در تکرار دهم.
به این عملیات روش صریح گفته می شود.

sarsum.com

۲ ـ روش استفاده از فاکتور تخفیف به روش ضمنی

در این روش ضرایب معادله را under relax می کنیم.

$$\frac{a_p}{\alpha}\varphi_p = \sum a_{nb}\varphi_{nb} + b + (1-\alpha)\frac{a_p}{\alpha}\varphi_p^*$$

φ تکرار قبلی

در معادله‌ی فوق ضرایب اصلاح شده است.

ما معمولاً از روش ضمنی استفاده می کنیم چون در روند برنامه نویسی کار ما راحت تر خواهد بود.

وقتی مسئله در هر تکراری همگرا شود مقدار φ_p^* مثل φ_p خواهد شد.

اگر $0<\alpha<1$ باشد ما در حال کند کردن محاسبات هستیم

اگر روند محاسبات خیلی کند باشد از over-relaxation استفاده می کنیم که $\alpha>1$ خواهیم داشت.

توضیح: یک مسئله‌ی دو بعدی مکانیک سیالات همراه با انتقال حرارت در نظر بگیرید باید معادلات پیوستگی و مومنتوم و انتقال حرارت را در نظر بگیریم (۴ مجهول داریم)
به عبارت دیگر به ازای هر نقطه از شبکه ۴ مجهول است. (۴ مجهول در هر نقطه) و به ازای n نقطه باید $4\times n$ معادله را حل کنیم.
برای چنین مسأله‌ای طبیعت تغییرات دما روی هر نقطه از تکراری به تکرار دیگر لزوماً همان طبیعت مولفه‌ی u و v و P نیست!
یعنی ممکن است در یک نقطه و از یک تکرار به تکرار دیگر یک مقدار (مجهول) تغییر چندانی نکند و مجهول دیگر تغییر زیادی کند.
← پس ما نمی‌توانیم از یک مقدار α ثابت برای مومنتوم در جهت x، مومنتوم در جهت y، پیوستگی و معادله‌ی انرژی استفاده کنیم. ما مجبوریم αهای مختلف داشته باشیم $(\alpha_T, \alpha_v, \alpha_p, \alpha_u)$

پیشنهاد: برای مکانیک سیالات $\alpha_u \approx 0.7$ و برای P در معادله‌ی پیوستگی $\alpha_p=0.5$

Convertion - Diffusion Problem

مسائل جابجائی و پخش

در این بخش هدف حل مسائل از نوع توزیع یک کمیت در حضور یک میدان جریان معلوم است.

که یعنی $\rho , \vec{u}$ ، T , ρ معلوم باشد

برای جریان غیرقابل تراکم کافیست $\vec{U}$ و P معلوم باشد:

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i \varphi)}_{\text{پیش از این با این ترم کاری نداشتیم.}} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Gamma \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + S_\varphi$$

✓ فرض ما در این است که مولفه های U و ρ و Γ معلوم است.

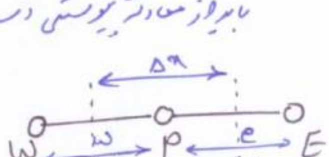
✓ هدف ما بدست آوردن توزیع φ در حضور میدان جریان معلوم است

حالت یک بعدی و پایا (Steady 1-D Situation)

$$\frac{d}{dx}(\rho u\varphi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma\frac{d\varphi}{dx}\right) \quad (I)$$

باید از معادله پیوستگی استفاده کنیم. $\frac{d(\rho U)}{dx} = 0 \Rightarrow \rho U = \text{Constant}$

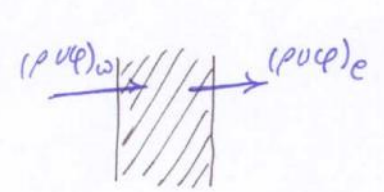
✓ ρU دبی جرمی در واحد زمان و در واحد سطح را نشان می دهد.



با انتگرال‌گیری از (I) $\Longrightarrow$

$$(\rho u\varphi)_e - (\rho U\varphi)_w = \left(\Gamma\frac{d\varphi}{dx}\right)_e - \left(\Gamma\frac{d\varphi}{dx}\right)_w$$

فلاکس جرمی چیست؟ چون ρU دبی جرمی در واحد زمان و در واحد سطح



تقریب ها: $\Leftarrow$

$$\left(\Gamma\frac{d\varphi}{dx}\right)_e \cong \Gamma_e \frac{(\varphi_E - \varphi_P)}{\delta x_e}$$

$$(\rho U\varphi)_e \cong (\rho U)_e \underbrace{\frac{(\varphi_E + \varphi_P)}{2}}_{\text{تقریب برای } \varphi_e}$$

برای w هم به همین شکل تقریب می زنیم و براساس معادله جبری استاندارد می نویسیم.

$$a_P \varphi_P = a_E \varphi_E + a_W \varphi_W$$

درنظر بگیریم F معرف flow باشد و D معرف diffusion

$$a_E = D_E - \frac{F_e}{2}$$

$$a_W = D_W + \frac{F_w}{2}$$

$$a_P = a_E + a_W$$

$$\varphi_e = \frac{\varphi_E + \varphi_P}{2}$$

$$\varphi_w = \frac{\varphi_W + \varphi_P}{2}$$

$$F \equiv \rho U$$

تاثیر قدرت جریان را نشان می‌دهد

mass flow rate

$$D \equiv \frac{\Gamma}{(\delta x)}$$

قدرت نفوذ را نشان می‌دهد

Diffusion Conductance

یک اشکال ضریب‌ها در معادله جبری شده‌ی بالا وجود دارد و آن این است که a_E می‌تواند منفی شود ($\frac{F_e}{2}$ اگر از D_E بزرگ‌تر باشد این اتفاق می‌افتد)

می‌دانیم $F_e/2$ و D_E هر دو همواره مثبت هستند. پس اگر $F_e/2 \geq D_E$ باشد a_E منفی می‌شود و یکی از چهار قانون نقض می‌شود.

ما باید بررسی کنیم که $\frac{F_e}{2D_E} \geq 1$ اتفاق نیفتد. (یا $\frac{F_e}{D_e} \geq 2$ نباشد)

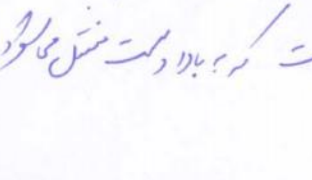
$\frac{F_e}{D_E}$ را اگر از فرم معنی خارج کنیم برابر خواهد بود با:

$$\frac{F_e}{D_E} = \frac{\rho U_E}{\frac{\Gamma}{(\delta x)_e}} \Rightarrow \frac{\rho U \delta x}{\Gamma}$$

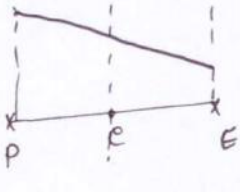
فرم استخراج شده همان عدد پکلت است.

$$P_e = \frac{\rho U \delta x}{\Gamma}$$

درحقیقت مشکل ما وقتی بروز پیدا می‌کند که $P_e \geq 2$ شود. یعنی اگر قدرت کانوکشن بیش از دو برابر قدرت دیفیوژن باشد. از نظر فیزیکی، چون از پایین دست تنها مکانیزم موثر دیفیوژن است که به بالادست منتقل می‌شود و همچنین کانوکشن از بالادست به پایین دست منتقل می‌شود. اگر کانوکشن نسبت به دیفیوژن دو برابر بیشتر باشد اطلاعات مناسب برای φ در دسترس نخواهد بود.



✓ برای تقریب مقادیر ϕ_e و ϕ_w از یک فرض توزیع خطی برای ϕ نسبت به x استفاده کردیم، دیدیم می‌گردد که این فرض منجر به معادلات گسسته‌ای می‌شود که احتمال منفی شدن ضرایب معادله وجود دارد.



فرض کنید $D_e = D_w = 1$ و $F_e = F_w = 4$ باشد.

اگر $\phi_E = 200$ و $\phi_W = 100$ در نتیجه $\phi_P = 50$ خواهد بود. (جایگذاری در معادله)

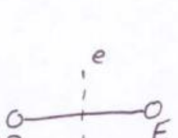
اگر $\phi_E = 100$ و $\phi_W = 200$ در نتیجه $\phi_P = 250$ خواهد بود. (جایگذاری در معادله)

این جواب‌ها کمی عجیب هستند. دیده می‌شود $\frac{F_e}{D_E} = 4$ و چون بزرگتر از ۲ است a_E که مقدارش منفی است. پس نتیجه‌ی حاصل نتیجه‌ی درست فیزیکی نیست.

باید راه حلی برای این مشکل یافت چون عملاً جواب در رینولدزهای بزرگ (پکلت بزرگ) اشتباه خواهد شد.

برای حل این مشکل چاره باید کرد چون فرض توزیع خطی ممکن است خطرناک باشد. از یک تقریب به نام upwind می‌توان استفاده کرد.

تقریب بالادستی (upwind scheme)



برای مقادیر ϕ در هر حجم کنترل، مقدارش را با مقدار بالادستی مساوی می‌گیریم.

$\phi_e = \phi_P$ if $F_e > 0$ (یعنی از غرب به شرق، از چپ به راست)

$\phi_e = \phi_E$ if $F_e < 0$ (یعنی از شرق به غرب، از راست به چپ است.)

یادآوری: F بیانگر فلاکس جرمی است و مثبت و منفی شدنش در جهت آن مؤثر است.

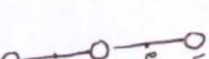
$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W$

$a_E = D_e + \max(-F_e, 0)$

$a_W = D_w + \max(F_w, 0)$

$a_P = a_E + a_W$

$F \equiv \rho u \qquad D \equiv \frac{\Gamma}{(\delta x)}$



در شبکه زیر در وضعیتی که سرعت از چپ به راست باشد:

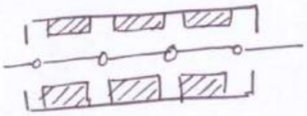
$\phi_w = \phi_W$

$\phi_e = \phi_P$

و اگر جریان راست به چپ باشد

$\phi_e = \phi_E$

$\phi_w = \phi_P$



کانوکشن جریان را بصورت Tank & Tube در نظر بگیریم. کانوکشن از طریق لوله‌ها انجام می‌شود و کانداکشن از طریق دیواره انجام می‌شود.

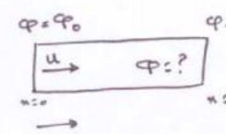
سیال در لوله هیچ اطلاعی در مورد دما در مخزن جلویی ندارد و همه‌ی اطلاعات از بالادست به پایین‌دست توسط ρu منتقل می‌شود

در این پکلت کوچک است (سیال بالادست در مورد پایین‌دست هیچ اطلاعی ندارد!؟) در اینجا نقش دیفیوژن قوی است (پکلت کوچک است) مقادیر مجهول در نقاط پایین‌دست از طریق دیفیوژن قوی موجود اطلاعات را به بالادست منتقل می‌کنند.

پس در پکلت‌های کوچک تقریب upwind به ما جواب دقیقی نمی‌دهد. (به خاطر نقش دیفیوژن)

بهتر است حل تحلیلی را بررسی کنیم و وجه تمایز و تشابه با تقریب upwind را بیابیم.

حل دقیق (exact Solution)



فرض لوله‌ای داریم که در ناحیه‌ی مشخصی از آن اطلاعات زیر موجود است.
جریان یک بعدی با u معلوم جریان دارد و φ مجهول است. و شرایط مرزی را هم در اختیار داریم.

معادله: $$\frac{d(\rho u\varphi)}{dx}=\frac{d\left(\Gamma\frac{d\varphi}{dx}\right)}{dx}$$

B.C (شرایط مرزی): $x=0,\ \varphi=\varphi_0$ ؛ $x=L,\ \varphi=\varphi_L$

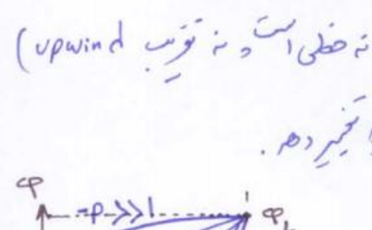
حل معادله توسط انتگرال و شرایط مرزی:

$$\frac{\varphi-\varphi_0}{\varphi_L-\varphi_0}=\frac{\exp\left(\frac{Px}{L}\right)-1}{\exp(P)},\qquad \underbrace{P}_{\text{پکلت}}=\frac{\rho uL}{\Gamma}$$

همانطور که دیده می‌شود تغییرات φ نسبت به x به صورت نمایی است (نه خطی است و نه تقریب upwind)

آن در پاسخ ما پارامتری به نام پکلت داریم که می‌تواند شیب این تابع نمایی را تغییر دهد.

حال برای پکلت‌های متفاوت نمودار $\varphi-x$ را رسم می‌کنیم.



توضیح نمودار: برای $P\ll1$ یعنی Γ نسبت به ρuL خیلی قوی‌تر است، یعنی نقش دیفیوژن زیاد است (یعنی اطلاعات از پایین‌دست به بالادست منتقل می‌گردند)

برای $P\gg1$ یعنی کانوکشن خیلی قوی است (رینولدز بزرگ) و دیفیوژن در مقابل کانوکشن حرفی ندارد (یعنی اطلاعات از بالادست به پایین‌دست منتقل می‌شوند)

در پکلت‌های بزرگ دیده می‌شود که در بخش عمده‌ای از میدان حل φ برابر با مقدار بالادست است (یعنی فرض upwind)

و در پکلت‌های کوچک عکس موضوع بالا دیده می‌شود که بیشتر φ پایین‌دست روی همه‌ی میدان حکمفرماست.

در پکلت‌های معمولی: $\rho u=0$ یعنی فقط دیفیوژن داریم پس φ به صورت خطی تغییر می‌کند.

برای P معمولی طبیعت تغییرات φ شبیه به حالت $\rho u=0$ (یا $P=0$) است.

نکته: پس عدد پکلت پارامتری تعیین کننده در تعیین صحیح مقدار φ در یک مسئله کانوکشن - دیفیوژن است که به جای گرید و از چه Scheme استفاده کنیم.

$P \geq 2$ یا $P >> 1$ از upwind می توان استفاده کرد

$P < 2$ از طرح میانی استفاده می کنیم.

نتایج:

۱- فرض تغییرات خطی نقطه برای مقادیر $|P|$ کوچک فرض خوبی است.

۲- اگر قدر مطلق P بزرگ بوشد مقدار φ در وسط میانه تقریباً برابر با مقدار φ در نقطه بالادست است.

۳- وقتی P بزرگ است $\frac{d\varphi}{dx}$ در وسط میانه تقریباً صفر است.

سؤال: در پکلت های متوسط (مثلاً ۲۰ یا ۴۰) از چه روشی باید استفاده کرد؟

نه می توان دیفیوژن را نادیده گرفت و نه کانوکشن را. (ترتیب های گفته شده جواب درست نمی دهند)

می توان خود جواب تحلیلی را جواب مورد نظر در نظر گرفت (بهترین ترتیب خود جواب است) (یعنی از ترتیب exponential استفاده کرد)

exponentional scheme ← این ترتیب دقیق ترین ترتیب برای حالت یک بعدی است.

ترتیب نمایی (exponential Scheme)

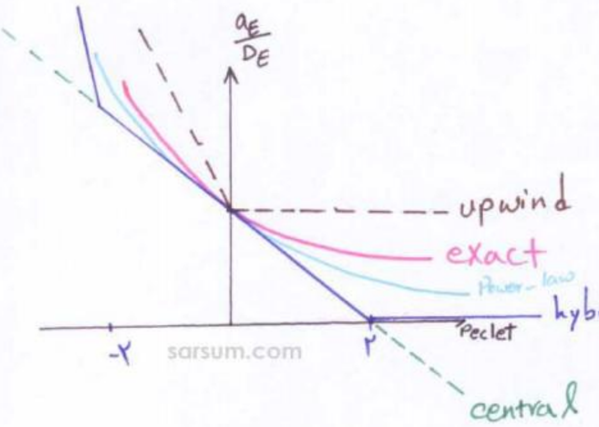
$$a_P \varphi_P = a_E \varphi_E + a_W \varphi_W$$

$$a_E = \frac{F_e}{\exp\left(\frac{F_e}{D_e}\right) - 1} \qquad a_W = F_w \frac{\exp\left(\frac{F_w}{D_w}\right)}{\left(\exp\left(\frac{F_w}{D_w}\right) - 1\right)}$$

$$a_P = a_E + a_W$$

معایب: این روش توسط کامپیوتر زیاد پرهزینه است چون یک تابع نمایی داریم.

بهتر است از ترتیب های ترکیبی به جای ترتیب استفاده کرد



رسم تغییرات $\frac{a_E}{D_E}$ بر اساس عدد پکلت

← دیده می‌شود که در upwind برای $P \geq ۲$ به مرور فاصله‌ی حل upwind و حل دقیق بیشتر و بیشتر می‌شود

← در پکلت های منفی نیز حل دقیق و حل upwind از هم فاصله می‌گیرند.

← در محدوده‌ی کوچکی (اطراف $P = 0$) از حل upwind می‌توان استفاده کرد.

← در توزیع central دیده می‌شود که در فاصله‌ی $-۲ \leq P \leq ۲$ به حل دقیق خیلی نزدیک است. اگر $Pe \geq ۲$ باشد مقدار a_E منفی می‌شود. و اگر $P \leq -۲$ باشد، توزیع central از حل دقیق دور می‌شود. پس در فاصله‌ی ۲ و ۲- این توزیع قابل استفاده است.

روش توزیع hybrid

توزیع hybrid به این دلیل به وجود آمد که در پکلت های بزرگ مشکلی نداشته باشیم. در حقیقت ما دو معادله داریم. یک معادله در $-۲ < P < ۲$ و یک معادله‌ی دیگر در $P > ۲$ و $P < -۲$.

hybrid یک توزیع مناسب و ساده است که به حالت دقیق نزدیک است و تنها از سه پاره خط تشکیل شده.

روش توزیع Power-law

این توزیع به جای exact (حل دقیق اصلی نزدیک است) هزینه‌ی حل exact را ندارد.

hybrid به صورت خطی بود ولی Powerlaw یک توزیع توانی است که به exact نزدیک است و نسبت به بقیه روش ها بهترین پاسخ را می‌دهد.

$$a_E = D_E \max\left(0, \left(1 - \frac{0.1|F_e|}{D_e}\right)^5\right) + \max(0, -F_e)$$

$$a_W = D_W \max\left(0, \left(1 - \frac{0.1|F_w|}{D_W}\right)^5\right) + \max(0, F_w)$$

$$a_P = a_E + a_W$$

✓ در حقیقت بنا به شرایط مسئله هر کدام از توزیع ها ممکن است مناسب و بقیه نامناسب باشند.

✓ این توزیع هم دقیق است و هم اقتصادی.

✓ در بعضی از جریان‌های توربولانس تقریب upwind دقت بهتری را نتیجه می‌دهد.

نکته مهم: تمام نکات گفته شده در چند صفحه‌ی اخیر (تقریب‌ها) مربوط به حل یک بعدی جریان است. (کانوکشن موجود / دیفیوژن موجود)

تعمیم مسأله به حالت دو بعدی در حالت دیفیوژن و کانوکشن

$$a_P\varphi_P = a_E\varphi_E + a_W\varphi_W + a_N\varphi_N + a_S\varphi_S + a_P^0 + \varphi_P^0 + b$$

دقت شود دیگر این معادله را همراه معادله‌ی پیوستگی باید حل شود.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varphi) + div(\rho\vec{V}\varphi) = div(\Gamma\vec{\nabla}\varphi) + S$$

$$a_E = \frac{F_e}{\exp\left(\frac{F_e}{D_e}\right)-1} \quad a_W = \cdots , a_N = \cdots$$

$$F_e = (\rho u)_e \Delta y , \quad D_e = \Gamma_e \frac{\Delta y}{(\delta x)_e}$$

$$b = S_c \Delta x \Delta y$$

$$a_P^0 = \rho_P^0 \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t}$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0 - S_P \Delta x \Delta y$$

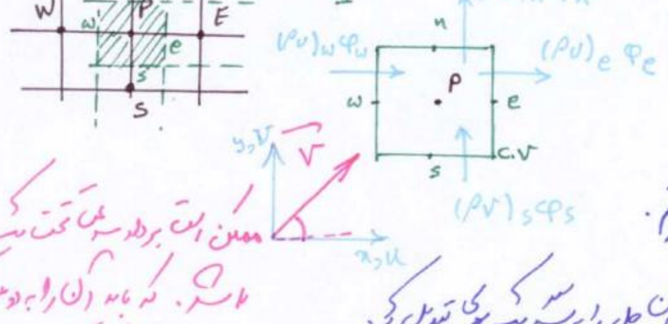
برای سه بعدی هم به همین شکل عمل می‌کنیم

عبارت فوق از معادله‌ی مومنتوم (به‌اضافه‌ی پیوستگی) حاصل شده است

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varphi) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\varphi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v\varphi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + S$$

معادله مومنتوم

✓ در حالت دو بعدی روش مورد نظر fully implicit است.



ممکن است بردار سرعت تحت یک زاویه باشد. که باید آن را به دو مولفه‌ی u و v تبدیل کنیم.

واقعیت امر این است که بردار سرعت تحت زاویه است و باید به مولفه‌های u و v تفکیک شود.

درحقیقت ما دو مسأله‌ی یک بعدی خواهیم داشت یکی در جهت x با سرعت u و دیگری در جهت y با سرعت v.

حالا به راحتی می‌توانیم در هر جهت از تقریب‌های گفته شده استفاده کنیم.

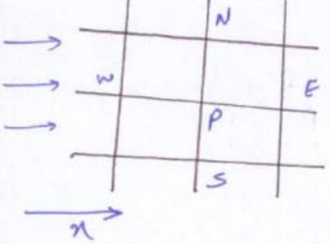
(تقریب‌ها در یک بعد قابل استفاده هستند)

درحقیقت ما دو مسأله‌ی یک بعدی داریم. در مسائل سه بعدی هم می‌توان حل را به سه یک بعدی تبدیل کرد.

مختصات یک راهه

پیش از این بحثی را در مورد مختصات یک راهه و دو راهه مطرح کردیم. دیدیم که در مختصات یک راهه اطلاعات در یک جهت منتقل می‌شود.

یک کانال دو بعدی را که جریان از سمت چپ به راست حرکت می‌کند را در نظر بگیریم:



اگر در این مقدار جریان عدد پکلت بزرگ باشد (یعنی کانوکشن خیلی قوی باشد) معنای این حرف این است که دیفیوژن به سمت صفر می‌رود (دیفیوژن پایین است)

$P \to \infty$

$a_e \to 0$

به سمت بالادست.

$F_e = (\rho u)_e \Delta y$

$D_e = \Gamma_e \Delta y/(\delta x)_e$

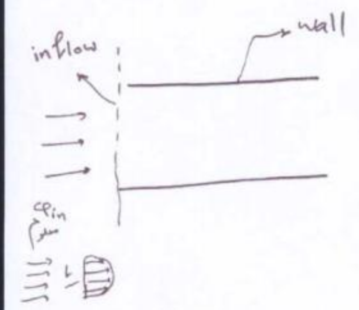
$P = \dfrac{F_e}{D_e}$

if $P = 0$ → Two way Problem → حل همه‌ی نقاط با هم

if $P \to \infty$ → one way Prolbem → (روش حل مارچینگ)

شرایط مرزی

در مسئله‌هایی که با میدان جریان سروکار داریم شرایط مرزی خیلی مهم است.

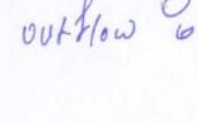


اولاً باید یک مرز غیرقابل نفوذ داشته باشیم که کانوکشن در آن‌جا صفر باشد. و فلاکس φ تنها از طریق دیفیوژن باشد

ثانیاً مرز inflow داریم و معمولاً مقدار φ مشخص داریم و در جایی است که جریان داریم.

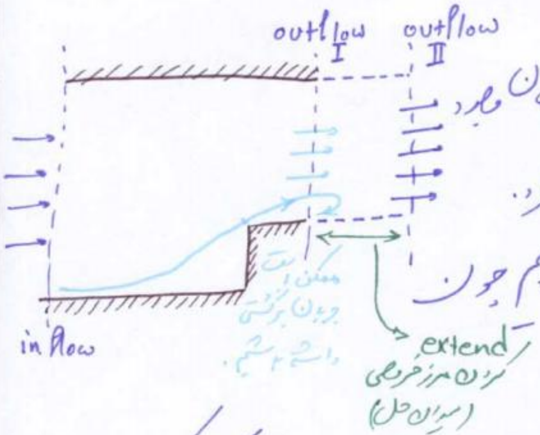
ثالثاً مرز outflow باشد و هیچ اطلاعاتی راجع به φ نداریم

در مسائل one way با همین اطلاعات می‌توان به جواب رسید اما در حالت Two way باید فکری به حال outflow بکنیم چون اطلاعاتی در آن بخش نداریم.



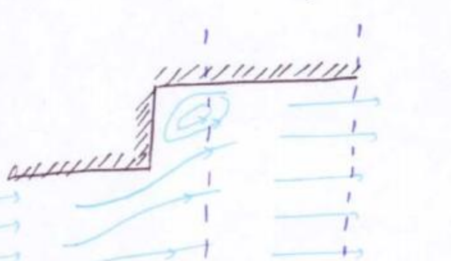
فرض کنید دیفیوژن در مرز خروجی کوچک باشد یعنی در نقطه‌ی قبل آخر (P در شکل) مقدار a_E صفر باشد جریان در این حالت تقریباً one way است، در حقیقت مقدار $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ روی مرز صفر است و این یعنی مقدار مجهول روی مرز خروجی برابر است با مقدار مجهول روی نقطه‌ی قبل. $\phi_E = \phi_P$

اگر به این راه دقت نشود ممکن است به اطلاعات غلط برسیم. معمولاً راه خوبی به ما برای رسیدن به جواب خیلی کمک می‌کند.



فرض کنید مسأله‌ای را در جهت وارد شده داشته باشیم، در محل خروجی به علت تیزی امکان وجود جریان برگشتی وجود دارد و جریان در outflow I به صورت inflow می‌شود.
اگر $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ را در این مرز نهایی صفر قرار دهیم، اشتباه بزرگی انجام داده‌ایم چون جریان در بخشی از آن از بیرون به داخل می‌آید.

می‌توانیم برای رفع این اشکال مرز را به صورت مصنوعی ادامه دهیم و outflow I را به جایی منتقل کنیم که این حالت ناخوشایند دیگر موجود نباشد. ما با این کار مقام تحت خروجی را با شکل outflow II کرده‌ایم و دیگر جریان برگشتی روی مرز خروجی موجود نیست.



اگر در شکل مقابل را مدنظر قرار دهیم محل outflow I مناسب است چون جریان برگشتی نداریم ولی اگر outflow در محل II بود خیلی بد بود و مجبور بودیم که میدان حل را گسترش دهیم تا به outflow I برسیم.

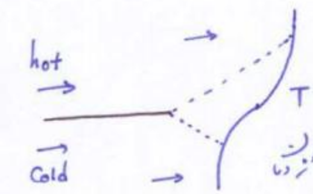
نیاز به extend ندارد.

دیفیوژن‌های غیرواقعی (False diffusion)

- upwind-scheme سبب false diffusion می‌شود و منجر به جواب خطا می‌شود. و از این نظر central scheme مناسب است.
- اگر Γ موجود در central scheme را با $\Gamma + \frac{\rho u \delta n}{2}$ جایگزین کنیم به ضرایب upwind scheme می‌رسیم.
مثل این است که upwind به Γ مسأله مقدار $\frac{\rho u \delta n}{2}$ اضافه می‌کند در حقیقت $\frac{\rho u \delta n}{2}$ باعث False diffusion می‌شود.
- دیگر فرض central برای پکلت‌های بزرگ نادرست است پس central تقریب خوبی نیست.
- در hybrid هم مشکل upwind وجود دارد (همچنین در power-law)

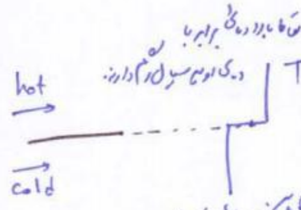
ریشه‌ی مشکلات در تقریب‌های مختلف نیست بلکه در سایز شبکه است و نوع روش حل.

✓ جریانی را در نظر بگیرید که در دو طرف صفحه‌ای وجود دارد. یک طرف سیال سرد باشد و یک طرف سیال گرم، انتظار داریم در انتهای صفحه دو سیال با هم مخلوط شوند.
در یک shear layer تشکیل می‌شود (از لحاظ مکانیکی و دمایی)
همانی که قبلاً دیدیم

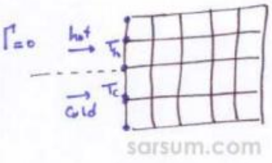


وجود مقدار مشخصی برای Γ باعث این اتفاق شده است

اگر Γ را حذف کنیم ($\Gamma = 0$) انتظار یک پروفیل دمایی ثابت در درون میدان جریان را خواهیم داشت

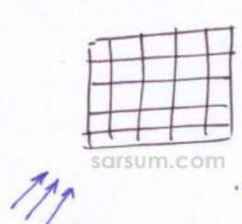


✓ برای $\Gamma = 0$ حل عددی را بررسی می‌کنیم (مسأله Convection-diffusion دو بعدی)



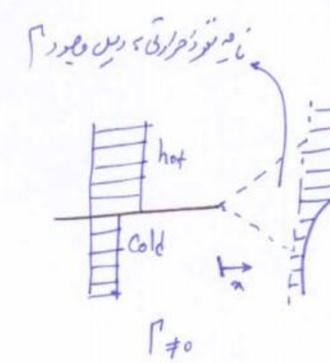
✓ اگر به درستی پروفیل ثابت در داخل میدان جریان باقی بماند، یعنی هیچ دیفیوژن غیرواقعی اضافه نشده است.

← هدف بررسی دو حالت شبکه‌ای روبرو است



اگر شبکه‌بندی ما تحت زاویه در میدان جریان باشد هم می‌توان نتایج را بررسی کرد.

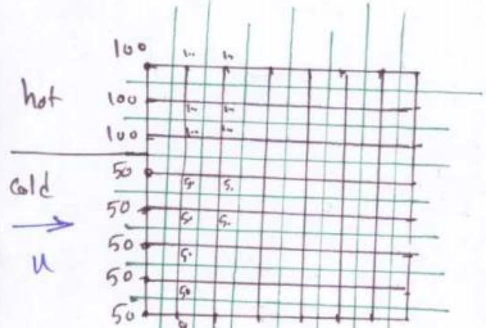
مسأله‌ی اضافه شدن یک ترم به عنوان ضریب نفوذ غیرواقعی در اثر استفاده از اسکیم‌هایی مانند اسکیم بالادستی تا مدت‌ها به عنوان یک ابهام اصلی برای محققین در مورد دقت این تقریب‌ها مطرح بود. براساس بررسی‌های به عمل آمده مشخص شده است که False diffusion مسأله‌ای مرتبط با نوع اسکیم مورد استفاده نبوده، بلکه اصولاً به هر مسأله مورد نظر و زاویه‌ی بردار سرعت با راستای شبکه (به صورت محلی) و اندازه‌ی شبکه بستگی دارد. در این رابطه مسأله‌ی ساده‌ای که در ادامه می‌آید به عنوان روشی برای بررسی این ادعا مطرح است.



پیش از مخلوط شدن سیال پروفیل دمائی به صورت Sharp است. با پیشروی در جهت x پروفیل دمائی مخلوط دو سیال به هم نزدیک خواهد شد که ناهمواری به دلیل وجود Γ نیز ایجاد خواهد شد.

اگر Γ=0 باشد این مسأله را در دو حالت حل می‌کنیم

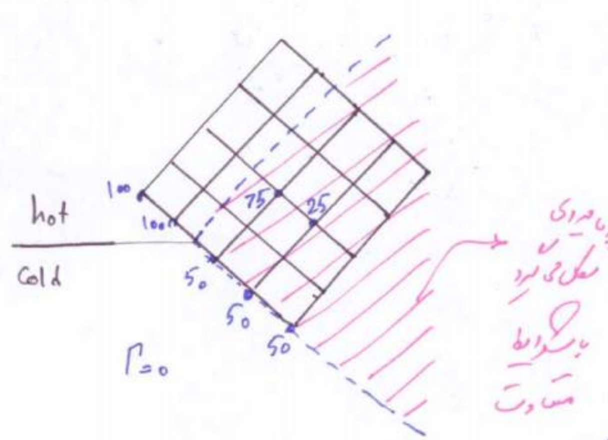
به کارگیری upwind scheme برای جریان یکنواخت در جهت x



$$\left.\begin{array}{l}\Gamma=0\\ \text{flow } y=0 \\ \;\hookrightarrow V=0\end{array}\right\} \xrightarrow[\text{scheme}]{\text{upwind}} \begin{array}{l} a_N=a_S=0 \\ a_E\ (\text{استفاده از upwind})=0\end{array} \overset{\text{upwind}}{\Longrightarrow} \begin{array}{l} a_P=a_W \\ \varphi_P=\varphi_W\end{array}$$

(به دماهای درون شبکه که برابر از نقاط مرزی می‌باشد مقدار φهای ما با φهای سمت چپ برابر است $\varphi_P=\varphi_W$ و هیچ برخوردی از لحاظ دمای تداخل نداشت)

به کارگیری upwind scheme برای جریان یکنواخت تحت زاویه



دما در داخل ناحیه‌ای که نشان داده شده متفاوت است.

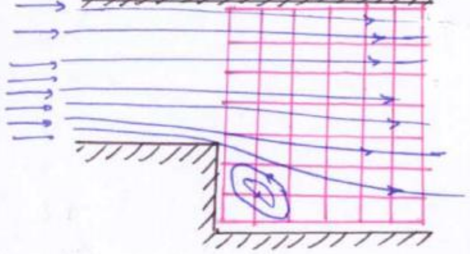
در حقیقت دمای ناحیه نه دمای 100 درجه می‌شود و نه 50.

دمای ناحیه به مرور کمتر می‌شود.

در اینجا اتفاقی که افتاده به خاطر به کارگیری upwind scheme نیست بلکه به علت وجود زاویه است

✓ False diffusion در مسائل یک بعدی اتفاق نمی‌افتد (در دو بعدی و سه بعدی اتفاق می‌افتد) و دلیل به وجود آمدن آن زاویه بین جریان و شبکه است. همچنین F.D به سایز شبکه هم بستگی دارد. (هرچه ریزتر باشد F.D کمتر می‌شود) (هرچه زاویه به سمت 45° برود F.D بیشتر می‌شود)

با توجه به علت وقوع False diffusion چکار کنیم که این اتفاق نیفتد؟



کانال روبرو را در نظر بگیرید. (شکلی که قبلاً هم ذکر شد)

این کانال در محلی به طور ناگهانی تغییر عرض می‌دهد.

فرض می‌خواهیم مسأله‌ی روبرو را حل کنیم و در این محاسبات

بخش انتهایی را در نظر بگیریم.

درست در محلی که ما حساس هستیم (محل برگشت) False diffusion اتفاق می‌افتد و توزیع سرعت‌ها به هم می‌ریزد، برای حل این مشکل باید به نحوی این زاویه را از بین ببریم. پس بهتر است شبکه را طوری طراحی کنیم که منطبق بر مرزهای حل باشد. مش شبکه زیر که اصلاح شده درست.

ما با این کار زاویه‌ی جریان با شبکه را به سمت صفر میل داده‌ایم و False diffusion را به حداقل رسانده‌ایم. (تولید این شبکه در CFD2 بررسی خواهد شد)

راه دوم برای رفع این مشکل ریز کردن شبکه است.

جمع بندی False diffusion

- وقتی جریان زاویه‌دار باشد و در راستای عمود بر خط جریان گرادیان موجود باشد، False diffusion اتفاق می‌افتد.
- رایج‌ترین عامل بروز F.D. رفتار یک سویه ما به صورت محلی است (چون در واقع ما یک مسأله دو بعدی را به صورت یک بعدی حل می‌کنیم)
- و استفاده از central scheme به عنوان یک راه حل برای F.D غلط است. این ترتیب می‌تواند در Pe (پکلت‌ها) بالا ما را به جواب غلط برساند.
- اسکیم‌های پیچیده‌تری برای حل مسائل F.D. مورد نیاز است. (مثل Skew upwind different sheme)
- کاهش سایز شبکه در رفع مشکل F.D. موثر است.

معادلات مومنتوم

شکل کلی معادله شکل رو به رو است:

$$\underbrace{\frac{\partial \rho\varphi}{\partial t}}_{} + \underbrace{\operatorname{div}(\rho \vec{u}\varphi)}_{\text{ترم کانوکشن}} = \underbrace{\operatorname{div}(\mu \nabla\varphi)}_{\text{ترم دیفیوژن}} + \underbrace{S}_{\text{ترم چشمه}}$$

$$\varphi = \frac{\Phi}{m} \qquad \Phi = m\vec{v} \qquad \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}\vec{v}) = \operatorname{div}(\mu \nabla \vec{v}) + S$$

← کوپلینگ بین ورودی سرعت و فشار و چگالی در ترم‌های معادله‌ی مومنتوم خودش را نشان می‌دهد.

← معادله‌ی مومنتوم را باید همراه با پیوستگی حل شود و با درگیر شدن دانسیته می‌شود.

← برای یک مسأله‌ی سه بعدی، سه معادله‌ی مومنتوم داریم، یک معادله‌ی پیوستگی داریم و یک معادله‌ی انرژی ← پنج معادله در دقیقه داریم که شامل سه مولفه‌ی سرعت مجهول، میزان فشار مجهول و چگالی و انرژی هستند.

← مشاهده می‌شود که با ورود دانسیته به معادلات ترمودینامیک کوپل می‌شود با معادله‌های دینامیکی (مومنتوم).

← باید ارتباط بین P, ρ, T را به صورت یک معادله نشان دهیم. (بوسیله‌ی state equ.)

مشکلات:

1. کوپل بودن معادلات (میدان فشار با میدان سرعت)
2. درگیر شدن معادلات ترمودینامیک با معادلات دینامیکی در مواقعی که تراکم‌پذیری هم هست.
3. عدم برخورداری از یک معادله‌ی مستقل برای میدان فشار
4. برای جریان‌های توربولانس حل مستقیم معادلات ناویر استوکس (NS) بسیار پیچیده و در اکثر مواقع ناممکن است. (مدل‌سازی توربولانس لازم است)
   ← به جای حل خود معادلات، از یک مدل‌ساز استفاده می‌کنیم.
   ← مجهولات اصلی: u و v و w و P و ρ و T (Primitive variables) ⟸ به جای حل مستقیم از مدل‌ساز استفاده می‌کنیم.
5. غیرخطی بودن معادلات.

← حسن این‌ها چیزهایی است نسبت به آن‌هاست. حل مستقیم ما را به این می‌رساند. اطلاعات مورد نیاز ما عمدتاً افت فشار و انتقال حرارت است که می‌خواهیم به این دست یابیم (هدف اصلی)

مولفه‌های مهم سینماتیکی جریان:

1. خطوط جریان در یک جریان سیال (خط جریان: خط رسم شده که...) (به ما برای تجسم و تصویرسازی جریان کمک می‌کند)
2. سیرکولاسیون در یک جریان $\oint v\,dl = \Gamma$

3. ورتیسیتی (چرخش): حرکت نسبی یک ذره جریان نسبت به یک نقطه ترکیب با آن.

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$$

← می‌دانیم در یک جریان به طور کلی سه نوع حرکت داریم: ۱- انتقالی ۲- دورانی ← ورتیسیتی ۳- تغییر شکل

کاهش بعد معادلات با تابع جریان:
- از دو معادله مومنتوم دو بعدی، و برای رسیدن به نتایج
- از دو معادله مومنتوم و پیوستگی و برای رسیدن به نتایج

← با به کارگیری توابع ساده شدن معادلات کم می‌شود.

حل جریان سیال:
- استفاده از متغیرهای اصلی (متغیرهای فیزیکی جریان) (Primitive variables)
- استفاده از متغیرهای ثانویه (Seeondary variables)

روش کار در Secendary variable: یعنی میدان فشار را از معادلات مومنتوم بیرون بکشیم و در نهایت به جای معادلات مومنتوم معادله‌ای را برای دیفرانسیل ورتیسیتی بوجود آوریم.

مثلاً در یک جریان دو بعدی، در جهت x و y دو مومنتوم را داریم. اگر از معادلات مشتق بگیریم و آنها را با هم جمع کنیم معادله‌ای برای ورتیسیتی بدست می‌آید. و تعداد معادلات کم می‌شود.

تابع جریان را تعریف می‌کنیم: تابع جریان ← تابع پتانسیل

$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$ $\longrightarrow$ $\nabla^2 = 0$ (معادله لاپلاس) $\longrightarrow$ $F(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$

← که از این رابطه توزیع سرعت را می‌توان بدست آورد.

با استفاده از این توزیع حل برای جریان‌های ساده‌ای، مانند چشمه و چاهک و دابلت بدون نیاز به حل معادلات دیفرانسیل به طور مستقیم از طریق φ و ψ و در نتیجه آن به وسیله گرادیان توزیع سرعت را بدست آوردیم. (با حل معادلات لاپلاس)

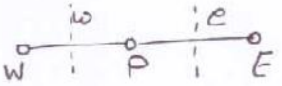
مشکل این روش این است که آن برای حالت سه بعدی است (تابع جریان برای سه بعدی) که پیچیدگی زیادی داشت و تعداد معادلات زیاد می‌شود.

در حالت سه بعدی استفاده از تابع پتانسیل مرسوم است. (زیاد شدن تعداد معادلات)

گسسته‌سازی ترم $\frac{\partial P}{\partial x}$ در معادله مومنتوم و $\frac{\partial u}{\partial x}$ در معادله پیوستگی

برای گسسته‌سازی ترم‌ها، معادله مومنتوم گسسته‌سازی را انجام داده‌ایم. حالا می‌خواهیم گسسته‌سازی را برای $\frac{\partial P}{\partial x}$ انجام دهیم.

هدف: تبدیل $\frac{\partial P}{\partial x}$ به یک مقدار جبری است. (مثل $P_w - P_e$)

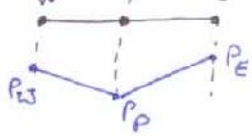


$\frac{\partial P}{\partial x}$ در کجای معادله مومنتوم قرار دارد؟

مومنتوم در جهت x:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v u)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w u)}_{\text{کانوکشن}}=\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)}_{\text{دیفیوژن}}\underbrace{-\frac{\partial P}{\partial x}+V_{x}+B_{x}+f}_{\text{ترم چشمه } S}$$

$$\int_w^e -\frac{\partial P}{\partial x}\,dx = P_w - P_e = \frac{P_W+P_P}{2}-\frac{P_P+P_E}{2}=\frac{P_W-P_E}{2}$$



در اینجا فرض شده تغییرات بین P و E خطی است و شبکه یکنواخت است. ⟸ چون اطلاعات e و w را نداریم، بنابراین بر اساس P و W و E مقدار انتگرال را بیان می‌کنیم.

حال این ترتیب چه اشکالی ایجاد می‌کند؟

در معادله مومنتوم در نقطه P، فشار خود نقطه P تأثیری در معادله گسسته ندارد!!!

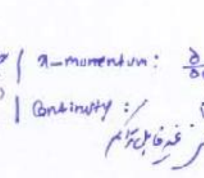
یعنی در نقطه P میدان سرعت و میدان فشار جدا شده‌اند (اصطلاحاً کوپل نیستند) ⟸ فرض دائمی
x-momentum: $\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+S$
Continuity: $\nabla\cdot u=0$, $\frac{\partial u}{\partial x}=0$, $\vec{u}=$ Const.
جابجایی در معادله داریم — ولی غیرقابل تراکم

یعنی وقتی گسسته‌سازی می‌شود عملاً سرعت در نقطه P به فشار در نقطه P ربطی ندارد!!

(در جریان غیرقابل تراکم، گرادیان فشار عامل اصلی حرکت جریان است)

(معادلات دی‌کوپل شدن سرعت و فشار)

به نظر همه چیز طبیعی است، می‌خواهیم ببینیم آیا مشکلی به وجود می‌آید؟



کیفیت فشار ناهموار را در نظر بگیرید که اصلاً فیزیکی نیست ولی ما آن را در نظر می‌گیریم. فشار نقطه 1 را در نظر بگیرید (در نقاط دیگر) بر اساس معادلات بدست آمده برای نقطه 1 اختلاف فشار در طرفین آن صفر است. (از نظر معادلات گسسته شده)
سرعت‌ها که گسسته شده نسبت به مقدار فشار حساسیتی ندارند.

$$\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_P=\frac{P-P}{2}=0$$

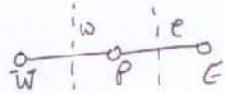
این تناقض به دلیل دی‌کوپل شدن میدان سرعت و فشار اتفاق افتاده است.

اسم این میدان فشار خاص را «میدان فشار شطرنجی» می‌گذارند (A checker board Pressure field)

با روش‌هایی این مشکل را حل کرد.

با این مشکل در گسسته‌سازی معادله پیوستگی هم مواجه می‌شویم چون استخراج سرعت با مقدار فشار است.

در معادله پیوستگی نیز همین مشکل را داریم:

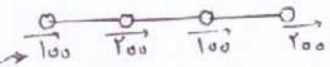


معادله پیوستگی / در جابجایی طرف گسسته شده

$$\frac{du}{dx}=0 \rightarrow u_e-u_w=\frac{u_E+u_P}{2}-\frac{u_W+u_P}{2}=0$$

$$u_E-u_W=0$$

چند مقدار متفاوت که یک توزیع سرعت شطرنجی تصور کنیم (مثل شکل زیر)

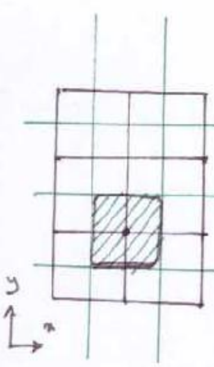


از نظر معادله فوق چنین میدان سرعتی هیچ مشکلی ندارد. (از نظر ریاضی)

ولی واضح است که این جریان سرعت ثابت یکنواخت ندارد. (با اینکه معادله گسسته شده را ارضاء می‌کند) با موارد این اشکال را برطرف کرد.

یکی از راه‌حل‌های مطرح شده استفاده از شبکه‌ی شیفت داده شده است.

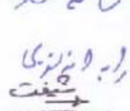
شبکه‌ی شیفت داده شده The staggered grid



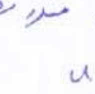
کمیت‌ها به دو دسته، دو بعدی، نوع اول ترکم و نوع دوم را در نظر بگیرید.

مجهولات ما P، u و v خواهد بود.

C.V ها که تاکنون در نظر گرفتیم هم برای P و v و u است. یکی از راه‌حل‌ها برای رفع مشکل گفته شده در بخش قبل، جدا کردن C.V های معادلات مختلف است. مثلاً شبکه را به اندازه‌ی نصف C.V به سمت راست شیفت دهیم. و محل محاسبه‌ی u را در محل جدید قرار دهیم.



به همین ترتیب در جهت v این کار را در راستای y انجام دهیم.



و بقیه مجهولات را (هر چه که هست) در C.V اصلی از انتگرال‌گیری کنیم.

در اینجا سه C.V وجود دارد، یکی برای $\vec{u}$، یکی برای $\vec{v}$ و دیگری برای بقیه مجهولات.

در این حالت u مستقیماً به P در دو طرف خودش وابسته می‌شود. اما در حالتی بین دو طرف ظاهر شد (دیکوپلینگ از بین می‌رود) همچنین در جهت v این اتفاق می‌افتد.

یک راه‌حل برای مشکل دیکوپلینگ میدان سرعت از میدان فشار، طریق استفاده از C.V های متفاوت نسبت به C.V های اصلی برای محاسبه‌ی مولفه‌های مومنتوم در همان راستا می‌باشد. بدین معنا که به جای استفاده از یک حجم کنترل برای انتگرال‌گیری معادلات همه‌ی مجهولات، از C.V های متفاوت به ازاء هر یک از مولفه‌های مومنتوم استفاده کرده و برای بقیه مجهولات از همان C.V اصلی استفاده می‌کنیم.

برخی از اثرات دیگر که به عنوان مشکل شبکه جابجا نشده مطرح می‌شوند عبارتست از:

- در حل جرمی روی سطوح CV بدون درون‌یابی برای مولفه‌های سرعت قابل محاسبه نمی‌شوند.
- معادله پیوستگی گسسته شده شامل مولفه‌های سرعت در نقاط کناری هم خواهد بود و این مانع از میدان سرعت شطرنجی (مقادیر مساوی) که می‌توانند (علیرغم صحت) پیوستگی را ارضا نمایند خواهد شد.

(بنابراین نقاط میدان سرعت واقعی می‌تواند پیوستگی را ارضا کند) (در معادله گسسته شده پیوستگی خود سرعت‌های اطراف نقطه ظاهر می‌شوند و نه نقطه‌ای در میان)

- و اختلاف فشار بین نقاط کناری هم نیروی رانش طبیعی برای مولفه سرعت بین آنها می‌شود.

بنابراین میدان فشار شطرنجی دیگر به عنوان یک میدان فشار یکنواخت حس نشده و نمی‌تواند به عنوان یک حل قابل قبول در روند محاسبات تولید شود.

مشکل این روش نیاز به حافظه کامپیوتری بیشتر است. چون سه شبکه CV داریم.

به جز روش شبکه جابجا شده، روش‌هایی به عنوان collocated method مطرح است.

پس به طور کلی دو نوع راه حل وجود دارد:
- استفاده از شبکه‌ی جابجا شده (staggered grid)
- استفاده از روش‌های (collocated method) (که از کنترل والیوم واحد استفاده می‌کند)

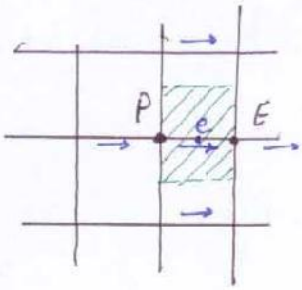
← فعلاً به روش شبکه جابجا شده می‌پردازیم (staggered grid).

✓ شرط کمک کردن میدان سرعت، معادله پیوستگی است. باید معادله مومنتوم بتواند معادله پیوستگی را ارضاء کند تا در جریان واقعی قابل وقوع باشد. یعنی این دو معادله با هم کوپل هستند و نباید بگذاریم تا توزیع‌های دلخواه اتفاق بیفتند.

معادلات برای جریان نوعی از لحاظ تراکم:
- غیرقابل تراکم (مجهولات u و v و P): ۲ معادله مومنتوم و یک پیوستگی نیاز است.
- قابل تراکم (مجهولات u و v و P، ρ، T): ۲ مومنتوم، ۱ پیوستگی و ۱ انرژی و ۱ معادله حالت نیاز است.

سه بعدی / [illegible]
دو بعدی / [illegible]

گسسته‌سازی معادله مومنتوم



$$a_E u_E = \sum a_{nb} u_{nb} + b + A_e (P_P - P_E)$$

به محل حجم کنترل دقت شود که مربوط به سرعت است.

برای سرعت در یک نقطه می‌بینیم اختلاف فشار در دو طرف آن ظاهر شده در صورتی که قبلاً اینطور نشده بود و اختلاف فشار دیگر در بین آن ظاهر شده بود.

منطق حل: شروع کار با یک میدان فشار حدسی ــــ جایگذاری در معادله مومنتوم و به دست آوردن میدان سرعتها (که درست نیست) باید راهی پیدا کرد که میدان فشار را تصحیح کنیم که باعث تصحیح میدان سرعت شود (و با معادله پیوستگی چک کردن انجام شود.)

این منطق در الگوریتم‌های Simple base به کار می‌رود. یعنی با یک میدان فشار حدسی میدان سرعت به دست می‌آید.

منطق Simple Base method : ① حدس میدان فشار ② حل معادلات مومنتوم توسط میدان فشار ③ چک کردن معادله پیوستگی برای اینکه بفهمیم آیا میدان سرعتها می‌توانند یک میدان واقعی باشند یا خیر ④ اصلاح میدان فشار ⑤ بازگشت به شماره ۲

علامت * برای P و u به معنای آن است که اینها فشار و سرعتهای واقعی نیستند.

$$a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + b + A_e (P_P^* - P_E^*)$$

هر بار میدان فشار توسط مقدار P' تصحیح می‌شود و به

$$P = P^* + P' \quad (I)$$

پس دوباره مومنتوم ارسال می‌گردد

باید تأثیر این تصحیح روی میدان فشار را در میدان سرعت مشاهده کرد

$$u = u^* + u' \quad (II)$$

باید یک معادله برای تصحیح سرعتها داشته باشیم.

$$\left.\begin{aligned} a_e u_e &= \sum a_{nb} u_{nb} + b + A_e (P_P - P_E) \\ a_e u_e^* &= \sum a_{nb} u_{nb}^* + b + A_e (P_P^* - P_E^*) \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{تا رابطه‌ای پیدا شود که } u' \text{ را به } P' \text{ وصل کند.}]{\text{از هم کم می‌کنیم}} a_e (u_e - u_e^*) = \sum a_{nb} u_{nb}' + A_e (P_P' - P_E')$$

اثر تصحیحات سرعت در نقاط همسایه

رابطه بین P' و u' $\qquad a_e(u_e - u_e^*) = \sum a_{nb} u'_{nb} + A_e(P'_P - P'_E)$

از ترم $\sum a_{nb} u'_{nb}$ ها که صرف‌نظر می‌کنیم چون معادله‌ی فوق یک معادله‌ی میانی است و در این معادله تصحیح اعمال شده در نقاط همسایه P، بود و نبودشان تأثیری ندارد چون اینها تقریب هستند. (حذف نکردنش باعث ایجاد مقدار زیادی محاسبات می‌شود)

تقسیم معادله فوق بر a_e و ساده‌سازی

$$u_e = u_e^* + d_e(P'_P - P'_E) \quad (\mathrm{III})$$

$$d_e \equiv \frac{A_e}{a_e}$$

به همین شکل در جهت y داریم

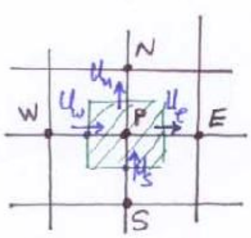
$$v_n = v_n^* + d_n(P'_P - P'_N) \quad (\mathrm{III})'$$

یادآوری: این معادلات (III و III′) اثر تصحیح فشار روی سرعت را نشان می‌دهد.

ما ابتدا یک P' اعمال می‌کنیم و با آن میدان سرعت را تصحیح کرده، و اثرات آن را روی میدان سرعت می‌بینیم.

سؤال این است این P' را از کجا بیاوریم؟

که از پیوستگی استفاده کنیم و رابطه‌ای برای P' بدست بیاوریم، به عبارتی داریم تصحیح فشار را به معادله‌ی پیوستگی تحویل می‌کنیم، پس بر اساس یک منطق تصحیح را انجام می‌دهیم



برای گسسته‌سازی معادله‌ی پیوستگی باید حول P یک دامنه کنترل از معادله بگیریم.

$$(\rho uA)_w - (\rho uA)_e + (\rho vA)_s - (\rho vA)_n = 0$$

(شار جرم) ها که ورودی و خروجی از سطوح کنترل هستند پیوستگی رو نشان می‌دهد)

سپس با جایگذاری و ساده‌سازی:

$$a_P P'_P = a_E P'_E + a_W P'_W + a_N P'_N + a_S P'_S + b \quad (\mathrm{IV})$$

$$a_E = (\rho A d)_e, \dots$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S$$

$$b = (\rho u^* A)_w - (\rho u^* A)_e + (\rho v^* A)_s - (\rho v^* A)_n$$

اساس کار الگوریتم simple همین است. $\Rightarrow$ یعنی اگر ما به میدان فشار تصحیح شده‌ای برسیم که میدان سرعتی بدهد که ترم b را صفر کند، الگوریتم ما به اتمام می‌رسد $\Rightarrow$ که ترم b ما بر اساس سرعت تکرار قبلی بدست آمده است.

روش نیمه صریح برای معادلاتی که با میدان فشار لینک هستند. Semi Implicit method for pressure link equ.

قدم های الگوریتم:

۱- حدس یک میدان فشار (P^*) (شروع محاسبات) را 1 atm در نظر می گیریم.

۲- حل معادله‌ی مومنتوم با این میدان فشار (سه معادله و سه مجهول) این معادله‌ی مومنتوم برای u و v و w حل می شود (که جواب واقعی نیست و باید تصحیح شود)

۳- معادله‌ی Pressure-Correction را اعمال می کنیم تا P' بدست آید. (معادله‌ی (III) صفحه قبل (III'))

۴- به کمک P' ها میدان فشار و سرعت تصحیح می شود (معادله (IV))

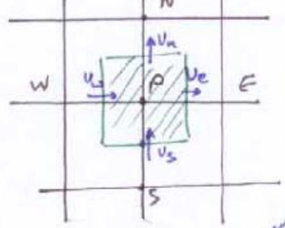
۵- اگر متغیرهای دیگری داریم (مثلا مسئله توربولانس است و انرژی هم هست) معادلات مربوطه را حل می کنیم.

۶- ترم ϕ را چک می کنیم. اگر همگرا شده بود که الگوریتم به پایان رسیده و اگر همگرا نشده باید به مرحله‌ی ۲ بازگردیم.

در این الگوریتم کمی کند است و فشار حدسی باعث می شود جواب ها در مراحل اول از جواب واقعی دور شود
بعدها سعی شد در این الگوریتم تصحیح شود که الگوریتم Simple C (Simple Correction)
بوجود آمد که نقش در وجود ترم $\sum a_{nb} u'_{nb}$ در معادلات تصحیح سرعت است. با این کار همگرایی
سریع می شود (با اینکه هزینه‌ی محاسباتی هم زیاد می شود)

مراحل انجام الگوریتم فوق در صفحه‌ی بعد توضیح داده شده است.

الگوریتم و جزئیات Simple :



همانطور که قبلاً توضیح دادیم حجم کنترل برای u و v باید شیفت داد (برای u ها به سمت راست و برای v به سمت بالا) و معادلات را به شکل نوشت.

برای سه بعد

$$
(I)\quad
\begin{cases}
a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + b + A_e (P_P - P_E) \\
a_n v_n = \sum a_{nb} v_{nb} + b + A_n (P_P - P_N) \\
a_t w_t = \sum a_{nb} w_{nb} + b + A_t (P_P - P_T)
\end{cases}
$$

① همانطور که در روش Simple داشتیم در اولین قدم حدسی میدان فشار داریم (P^*)

$$
(II)\quad
\begin{cases}
a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + b + A_e (P_P^* - P_E^*) \\
a_n v_n^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + b + A_n (P_P^* - P_N^*) \\
a_t w_t^* = \sum a_{nb} w_{nb}^* + b + A_t (P_P^* - P_T^*)
\end{cases}
\Rightarrow
$$

از اینجا u^* و v^* و w^* بدست می آیند (u^* و v^* و w^* واقعی نیستند)

② حل معادلات فوق (مومنتوم) و معادله پیوستگی بدست می آید که واقعی نیستند

③ اعمال تصحیح روی میدان فشار حدسی زده شده از طریق معادلات Pressure-Correction

$$P = P^* + P'$$

$$
\begin{cases}
u = u^* + u' , \\
v = v^* + v' , \\
w = w^* + w'
\end{cases}
\xrightarrow[\text{نظیرهم در دسته معادلات I و II}]{\text{کم کردن دو معادله}}
$$

$$a_e (u_e - u_e^*) = \sum a_{nb} (\overbrace{u_{nb} - u_{nb}^*}^{u'_{nb}}) + A_e \left[\underbrace{(P_P - P_P^*)}_{P'_P} - \underbrace{(P_E - P_E^*)}_{P'_E} \right]$$

$$a_e (u_e - u_e^*) = \underbrace{\sum a_{nb} u'_{nb}}_{\text{حذف به دلایل گفته شده در بالا، دو صفری تبدیل}} + A_e (P'_P - P'_E)$$

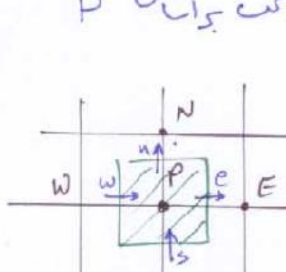
$$(u_e - u_e^*) = \frac{A_e}{a_e} (P'_P - P'_E)$$

$$
(III)\quad
\begin{cases}
u_e = u_e^* + d_e (P'_P - P'_E) , & d_e \equiv \dfrac{A_e}{a_e} \\
v_n = v_n^* + d_n (P'_P - P'_N) , & d_n \equiv \dfrac{A_n}{a_e} \\
w_t = w_t^* + d_t (P'_P - P'_T) , & d_t \equiv \dfrac{A_t}{a_t}
\end{cases}
$$

و به شکل فوق برای v_n و w_t هم داریم

معادلات تصحیح سرعت برای P'

④ به کمک P' میدان فشار و سرعت تصحیح شود. (از طریق معادله پیوستگی)



به محل سرعتها دقت شود که شیفت داده شده.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (\rho u A)_w - (\rho u A)_e + (\rho v A)_s - (\rho v A)_n = 0$$

به جای مقادیر u_w و u_e و v_n و v_s از روابط تصحیح سرعت جایگذاری می کنیم. (رابطه III)

$$(\rho A)_w \left[u_w^* + d_w (P'_P - P'_W) \right] - (\rho A)_e \left[u_e^* + d_e (P'_P - P'_E) \right]$$
$$- (\rho A)_n \left[v_n^* + d_n (P'_P - P'_N) \right] + (\rho A)_s \left[v_s^* + d_s (P'_P - P'_S) \right] = 0$$

پس از ساده سازی و حل $\Rightarrow$

$$a_P P'_P = a_E P'_E + a_W P'_W + a_N P'_N + a_S P'_S + b \qquad (IV)$$

$$a_E = (\rho A d)_e , \quad a_W = (\rho A d)_w , \quad a_P = a_E + a_W + a_S + a_N , \quad b = (\rho u^* A)_w - (\rho u^* A)_e + (\rho v^* A)_s - (\rho v^* A)$$

⑤ حل متغیرهای دیگر توسط معادلات دیگر مسئله (اگر موجود باشند) (مثل k و توربولانس معادلات توزیع غلظت و ...)

⑥ چک کردن ترم b که اگر صفر شده باشد به مرحله ۲ بازمی گردیم.

بحث در مورد الگوریتم Simple

- معادله‌ی مربوط به p' تقریبی است و در حل نهایی تأثیری ندارد. (چون در حل نهایی p' صفر است)
- ارزیابی convergency میدان سرعت (شارها)، پیوستگی را در نهایت با p^* ارضا خواهد کرد و p' صفر می‌شود.
- ترم b را mass source یا extra mass (جرم اضافی) می‌نامند. وقتی میدان سرعت دقیق شود $b=0$ خواهد شد
- به خاطر طبیعت تقریبی p' باید مقدار آن را under relax کرد. (پیشنهاد برای تصحیح $\alpha_p = 0.8$ است)

$$P = P^* \alpha_p + P'$$

$$\alpha_p = 0.8$$

- در مسائلی که تراکم‌پذیری در آن قوی است معادله‌ی p' باید عوض شود چون در این نوع مسائل P روی ρ تأثیرگذار است.
(بطورکلی شکسته‌سازی معادلات با توجه به تراکم‌پذیری، منجر به روابطی می‌شود که تا حدود ماخ ۲ جواب می‌دهند)

SimpleR (Simple_Revised)

به جای حل معادله‌ی تصحیح شده‌ی فشار، معادله را برای خود فشار را حل کنیم یعنی یک معادله‌ی فشار مستقل.
در روش Simple هم میدان سرعت را تصحیح می‌کردیم و هم میدان فشار را که باعث می‌شود همگرایی طول بکشد.
حال اگر از معادله‌ی تصحیح فقط برای تصحیح میدان سرعت استفاده کنیم (نه فشار) و برای فشار یک معادله‌ی مستقل ایجاد کنیم.
روش SimpleR را اعمال کرده‌ایم.

در واقع در روش SimpleR دو معادله‌ی مستقل مورد استفاده قرار می‌گیرد:

۱- معادله‌ی تصحیح فشار برای تصحیح میدان سرعت

۲- معادله‌ی دومی که برای معادله‌ی فشار استفاده می‌شود

پس هدف ایجاد همگرایی سریع نسبت به روش Simple است

دیدیم که در معادله‌ی p' توزیع بر اساس حذف ترم‌های $\sum a_{nb}u'_{nb}$ وارد مسأله شده که این توزیع سبب می‌شود تا مقادیر تصحیح فشار بزرگ شود (حتماً p' را باید under relax کرد تا از ایجاد اعداد بزرگ جلوگیری شود)

با این کار، اثر تصحیحات سرعت نقاط همسایه از معادله‌ی تصحیح سرعت برداشته می‌شود. تصحیح فشار (p') فقط در تصحیح سرعت اثر داشته، لذا میدان سرعت را به خوبی تصحیح نمی‌کند، بنابراین میدان تصحیح فشار به سختی همگرا می‌شود.

(یعنی میل b به سمت صفر خیلی طول می‌کشد)

بنابراین بهتر است که از معادله‌ی تصحیح فشار فقط برای تصحیح سرعت استفاده شود و میدان فشار از معادله‌ی دیگری تصحیح شود.

تبدیل شده (استفاده از I اول صفحه قبل)

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + A_e (P_P - P_E) \Longrightarrow u_e = \underbrace{\frac{\sum a_{nb} u_{nb}}{a_e}}_{\text{سرعت فرضی (Pseudo Velocity)}} + \underbrace{\frac{A_e}{a_e}}_{d_e} (P_P - P_E) \quad (1)$$

$$\hat{u} = \frac{\sum a_{nb} u_{nb}}{a_e} \quad (2)$$

سرعت غیر واقعی (فرضی) که اثرات فشار دیگر در آن وجود ندارد.
(فقط سرعت‌های نقاط همسایه در آن موجود است)

$$u_e = \hat{u}_e + d_e (P_P - P_E) \quad (3)$$

$$v_n = \hat{v}_n + d_n (P_P - P_N) \quad (4)$$

$$w_t = \hat{w}_t + d_t (P_P - P_T) \quad (5)$$

بر اساس جایگذاری در معادله‌ی پیوستگی

$$a_P P_P = \sum a_{nb} P_{nb} + b \quad (6)$$

$$b = \frac{(\rho_P^* - \rho_P)\,\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t} + \left[(\rho\hat{u})_w - (\rho\hat{u})_e\right]\Delta y \Delta z + \left[(\rho\hat{v})_s - (\rho\hat{v})_s\right]\Delta x \Delta y + \left[(\rho\hat{w})_b - (\rho\hat{w})_t\right]\Delta x \Delta z \quad (7)$$

اختلاف اصلی این معادله با معادله‌ی تصحیح فشار در الگوریتم Simple این است که هیچ تقریبی در استخراج این معادله اعمال نشده است، اما ترم b براساس مقادیر سرعت‌های واقعی می‌باشد.

قدم‌های الگوریتم SimpleR

۱- حدس میدان سرعت

۲- محاسبه‌ی ضرائب معادلات مومنتوم و محاسبه‌ی $\hat{u}$ و $\hat{v}$ و $\hat{w}$ از روی معادله‌ی (۴) (صفحه قبل)

۳- محاسبه‌ی ضرائب معادله‌ی فشار و حل آن (معادله‌ی ۶)

۴- استفاده از این میدان فشار به عنوان p^* و حل معادلات مومنتوم برای u^* و v^* و w^*

۵- محاسبه‌ی b (برای معادله‌ی تصحیح فشار)

۶- تصحیح میدان سرعت توسط معادلات تصحیح سرعت

۷- حل دیگر معادلات (… ، غلظت)

۸- برگشت به قدم دوم

مقایسه با Simple

مراحل الگوریتم Simple به شرح زیر است:

۱- حدس p^* و u^* و v^* و w^*

۲- حل معادله مومنتوم برای یافتن u^* و v^* و w^*

۳- حل معادله‌ی فشار اصلاح شده

۴- تصحیح سرعت و فشار

۵- حل دیگر معادلات

۶- بازگشت به مرحله ۲

✓ تعداد مراحل در SimpleR بیشتر از الگوریتم Simple است ضمن اینکه یک معادله بیشتر هم حل می‌کنیم اما ادعا می‌شود که SimpleR، Convergency بهتری از Simple دارد.

✓ SimpleR در کجاها بهتر از Simple عمل می‌کند؟

- در جریانات رینولدز بالا و نواحی چرخشی بزرگ SimpleR بهتر جواب می‌دهد.
- در جریاناتی که momentum-driven هستند و pressure-driven نیستند.

عیب در مورد SimpleR

- میدان فشار حدسی (p^*) در Simple نقش مهمی داشت (چون هم میدان سرعت و هم میدان فشار با آن تصحیح می‌شد) ولی در الگوریتم SimpleR از این میدان فشار حدسی استفاده نمی‌کنیم.
- تکرار در SimpleR گران‌تر از Simple است (مراحل بیشتری دارد) اما به تعداد Iteration کمتری برای همگرایی نیاز دارد.
- SimpleR، به مقادیر Relaktion Factor کمتر حساس است.

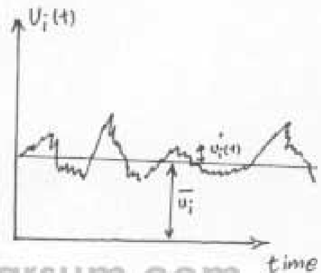
معرفی جریان توربولانس در CFD

مشخصه توربولانس چیست؟

✓ غیردائمی و پریودیک است (fluctuate) و تمام سه مولفه سرعت حضور دارد. رفتار غیردائمی (unsteady) تکرار نمی‌شود
اختلاط در این جریان مهم است. نرخ تبادل مومنتوم و انرژی نیز اهمیت دارد.

در جریان لایه‌ای انتقال در مقیاس مولکولی مدنظر بود و برخورد مولکول‌ها با هم باعث انتقال مومنتوم بین لایه‌ها می‌شود.
این انتقال بین لایه‌های پرسرعت و کم‌سرعت صورت می‌گیرد (لایه پرسرعت کند می‌شود و لایه کم‌سرعت تند می‌شود)
این تبادل را به صورت تنش برشی نشان می‌دهیم. (نتیجه تبادل، انتقال نیرو است که تنش برشی را تولید می‌کند)

✓ در جریان توربولانس علاوه بر انتقال در مقیاس مولکولی، توده‌های سیال هم وارد کار می‌شوند. پس مومنتوم‌های قوی
می‌توانند جابجا شوند و این باعث بالا رفتن نرخ انتقال می‌شود. (انتقال جرم، مومنتوم یا انرژی)



$$U_i(t) = \overline{U_i} + u_i'(t)$$

که نوسان در مقدار متوسط در طول زمان

✓ کمیت‌ها در جریان توربولانس می‌توانند به صورت مجموع دو بخش که از یک مقدار متوسط و یک مقدار متغیر تشکیل شده است.

✓ تعریف Re برای جریان توربولانس

$$Re_L = \frac{\rho u L}{\mu}$$

$L = x, D, D_h, \dots$

External Flow

$Re_x \geq 5 \times 10^5$ along or surface

$Re_D \geq 20000$ around an obstacle

Internal Flow

$Re_D \geq 2300$

Natural Convection

$Ra \geq 10^8 \sim 10^{10}$

نکته: در جریان درون لوله می‌توان با حذف عوامل آشفته‌ساز مثل کاهش اصطکاک، حذف لرزش و... تا $Re = 40000$ جریان آرام داشت.

✓ ما به جای حل معادلات یک مدلی ارائه می کنیم که بتوانیم توسط آن بخشی از طبیعت پیچیده‌ی جریان توربولان را بررسی کنیم.
(آن را ساده‌تر می کنیم)

ما به جای طبیعت unsteady یک طبیعت steady جایگزین می کنیم که به طور وسیع‌تری، تأثیرات را در جریان حفظ کند.

نکته: ما در مدل سازی انتخاب های متفاوتی می توانیم داشته باشیم که بستگی به موارد زیر دارد:

۱- چه اطلاعاتی را می خواهیم به دست آوریم (از نظر حجم محاسبات و سرعت)

۲- فیزیک جریان توربولان چگونه است. (استفاده از یک مدل واحد برای همه‌ی جریان ها امکان پذیر نیست)

۳- چه دقتی مورد نیاز است.

۴- چه محدودیت زمانی باید مورد توجه قرار گیرد.

که موارد فوق روی نوع شبکه‌ی مورد استفاده‌ی ما و نوع و دقت مدل ما نیز کاملاً مؤثر است

✓ بحث رفتار جریان در کنار دیواره خیلی مهم است چون اتفاقات مهم در همین جا می افتد. در حقیقت مدل ما توانایی نمایش رفتار کنار دیواره را باید داشته باشد.

✓ در معادلات توربولانسی با مفهوم eddy viscosity روبرو می شویم. در معادلات ناویر استوکس ترم هایی به وجود می آیند که به تنش تعبیر می شوند و آنها را تنش های توربولانسی می نامیم. در حقیقت ما مجهولات اضافی داریم که باید جلوی آن را توسط مدل سازی محاسبه کرد.

سعی ما این است که این تنش های اضافی را به گرادیان سرعت متوسط ربط دهیم. ضریب رابطه را در اینجا μ_t می نامیم. که μ_t خاصیت جریان است (نه سیال)

μ_t تابع مکان و زمان است (در نقاط مختلف متفاوت است)

✓ در جریان توربولانسی تنش دست توربولانی و وابستگی دارد که وقتی با فرض μ_t با گرادیان سرعت در ارتباط است و در ادامه می بینیم.

✓ یک مدل باید آن مدلی است که طیف زیادی از جریان ها را شامل شود.

مدل سازی توربولانسی

- eddy vis. models
  - algebric: ν_t, L
  - diffusion
    - first order: one equ. model, two equ. model, low Reynolds
    - second order: RSM → ASM (شکل ساده شده)
      - حل ۶ معادله دیفرانسیل برای تنش های رینولدز
- advanced
  - linear eddy viss
  - non-linear eddy visc. → ترم های بالاتر از رابطه خطی مدل ها شده. (با جمله سازی)

استخراج معادله برای جریان توربولانسی

derivation of the time-averaged equ.

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' \qquad \bar{\phi} = \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{\Delta t}\phi \, dt$$

ترم میانگین زمانی: $\bar{\phi}$ — ترم اختلافی: ϕ'

قواعد متوسط گیری زمانی:

$$\overline{\phi'} = 0 \quad , \quad \overline{\phi_1 \phi_2} = \bar{\phi}_1 \bar{\phi}_2 + \overline{\phi_1' \phi_2'}$$

معادله کلی:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i \phi) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) + S$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\bar{\phi}) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \bar{u}_i \bar{\phi}) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Gamma \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_i} - \underbrace{\overline{\rho u_i' \phi'}}_{\text{Turbulent diffusion flux}}\right) + \bar{S}$$

به علت ماهیت توربولانس ایجاد شده است

برای مومنتوم، با استفاده از معادلات فوق داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{u}_j) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \bar{u}_i \bar{u}_j) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - \rho \overline{u_i' u_j'}\right) + S_j$$

تنش توربولانسی یا تنش رینولدز نام دارد. در بیشتر مناطق جریان این ترم بسیار بزرگتر از تنش ویسکوز است ($\mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$)

تعریف Turbulence modeling: یک مدل توربولانسی شامل معادلاتی است که عبارات انتقال توربولانسی در سیستم معادلات میانگین زمانی را محاسبه می‌کند.

$-\rho\overline{u'u'}$, $-\rho\overline{u'v'}$, $-\rho\overline{u'w'}$, $-\rho\overline{v'v'}$, $-\rho\overline{v'w'}$, $-\rho\overline{w'w'}$

(برای مومنتوم شش مجهول جدید روبرو تولید می‌شوند)

اثرات توربولانسی خود را در معادلات به فرم ترم هایی مثل $\rho\overline{u'v'}$ نشان می‌دهند که تنش های توربولانسی نام دارند.

eddy viscosity

اولین بار توسط Boussinesq در سال ۱۸۷۷ مفهوم آن بیان شد و رابطه زیر برای هر ترم از تنش های توربولانسی قابل بیان شد.

$$-\rho \overline{u_i' u_j'} = \mu_t\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3} k\rho\,\delta_{ij}$$

$$k = \frac{1}{2}\left(\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2}\right)$$

→ turbulent kinetic Energy per unit mass

هر جریان توربولانس دو نوع انرژی جنبشی دارد. (برای $\bar{U}$ و برای u')

ترم $-\frac{2}{3}k\rho\delta_{ij}$ را در داخل ترم فشار قرار می‌دهیم.

$$P = p + \frac{2}{3}k\rho$$

→ در انتها باید این مقدار از فشار کم شود تا فشار واقعی بدست آید.

با داشتن رابطه بالا μ_t هم تنها مجهول ما است.

gradient diffusion hypothesis

$$-\rho \overline{u_i' \varphi'} = \Gamma_t\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right)$$

$$\Gamma_t = \frac{\mu_t}{\sigma_t}$$

Prandtl number

σ_t:
- برای کانال‌ها و جت آزاد → ۰٫۵
- برای لایه‌های مرزی نزدیک دیوار → ۰٫۹

مفهوم فیزیکی eddy visc.

مانند آنچه در جریان لایه‌ای بین مولکول‌ها اتفاق می‌افتد، در اینجا نیز ادی‌ها با هم برخورد می‌کنند و در نهایت این برخورد باعث تبادل مومنتوم می‌شود. (البته تفاوت مکانیزم برخورد ادی‌ها با مولکول‌ها این است که ادی‌ها می‌توانند همدیگر را بشکنند یا در همدیگر ممزوج شوند)

I $\quad \mu_t = (\text{Constant})\cdot\rho\cdot V_t\cdot l$

طول مقیاس، سرعت، دانسیته، ثابت

تنش‌های توربولانسی $(-\rho\overline{u'v'}, \ldots)$ $\longrightarrow \mu_t \longrightarrow V_t,\ l$

مدل‌هایی که محاسبه V_t و l را فراهم می‌کنند دو دسته هستند:
مدل جبری، مدل‌های دیفرانسیلی

ساده‌سازی ما منجر شد در انتها به دو مجهول جدید برسیم.

مدل های جبری

Constant eddy visc. model : یعنی که μ_t ثابت در تمام جریان فرض می کنیم. برای بعضی از جریان ها بصورت کیفی قابل بررسی هستند. یعنی روند کار قابل پیش بینی است اما از لحاظ کمیتی مقدار دقیقی نمی دهد.

Prandtl's free-shear-layer model : مدل لایه برشی آزاد پرانتل: در لایه ای که گرادیان سرعت در آن وجود دارد. (مثل ویک و جت)

توزیع در هر مقطع:

$$V_t = |U_{max} - U_{min}|$$

V_t را توزیع می کنیم

$$L = \delta$$

ضخامت جت

ثابت C به نوع جریان وابسته است.

C = 0,01 mixing layer

C = 0,014 plane jet

C = 0,024 plane wake

$$\text{I} \quad \mu_t = C\rho\delta|U_{max} - U_{min}|$$

ثابت

The mixing-length model : جریان هایی که گرادیان سرعت قابل ملاحظه در آن در جهت عرضی باشد. (جهت عمود بر x)
پیشنهاد در این مواقع به فرم روبرو است:

$$V_t = l_m\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

$$L = l_m$$

[این مدل هم توسط پرانتل در سال ۱۹۲۵ مطرح گردید]

$$\text{II} \quad \mu_t = \rho l_m^2\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

مجهول ما

عبارات جبری نیاز است که l_m را برای ما توضیح دهد.

for more general flows:

$$\mu_t = \rho l_m^2\left[\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)\right]^{1/2}$$

وقتی گرادیان سرعت در جهت های دیگر هم مهم باشد

✓ برای محاسبه l_m دو گروه رابطه ارائه شده است. یکی برای free shear layer و دیگری برای wall boundry layer.

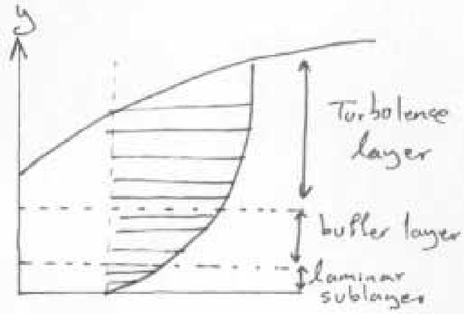
محاسبه‌ی l_m :

برای free shear layer : فرض می‌شود l_m در عرض shear layer ثابت است (ولی با δ متناسب است)

پس برای $\frac{l_m}{\delta}$ مقدارهایی پیشنهاد شده است.

٠,٠٧ → mixing layer
٠,٠٩ → plane jet
٠,٠٧٥ → round jet
0,16 → plane wake

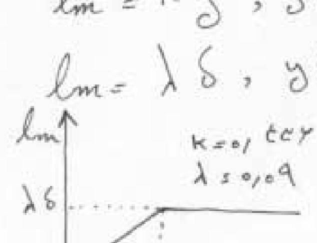
برای wall boundary layer : منظور جریان‌هایی که از یک یا دو طرف با دیواره محدود هستند. برای محاسبه‌ی l_m آن را تابعی از فاصله تا دیواره در نظر می‌گیریم و از یک y به بعد، برابر یک مقدار ثابت. مقدار ثابت حاصل می‌شود.



$l_m = \kappa y \ , \ y < (\frac{\lambda}{\kappa})\delta$

$l_m = \lambda \delta \ , \ y > (\frac{\lambda}{\kappa})\delta$

با دور شدن از دیواره l_m بزرگ‌تر می‌شود. یعنی μ_t قوی‌تر می‌شود (رابطه‌ی II صفحه قبل را ببین)



لایه‌ی مرزی توربولانسی به سه بخش تقسیم می‌شود

laminar sublayer ← حرف اول را μ می‌زند (از μ_t بیشتر) تنش برشی دیواره اثر خود را حفظ می‌کند و توربولانس وجود ندارد.

buffer layer ← تنش برشی و تنش برشی توربولانسی هم مقیاس هستند (μ و μ_t قابل مقایسه هستند)

Turbolence layer ← μ_t در مقابل μ فوق‌العاده قوی است. (تنش غالب تنش توربولانسی است)

نتیجه: هرچه از دیواره دور شویم μ_t قوی‌تر شده است که مدل فوق برای l_m همین را نشان می‌دهد.

نکته: اگر جریان از هر طرف به دیواره محدود باشد نیاز به اصلاحاتی در مدل‌های فوق وجود دارد:
مثلاً برای جریان توسعه‌یافته درون لوله‌ها آقای نیکورادزه رابطه زیر را مطرح می‌کند.

$$\frac{l_m}{R} = 0.14 - 0.08\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 0.06\left(\frac{r}{R}\right)^4$$

یا مثلاً برای داکت‌هایی که شکل منظم ندارند:

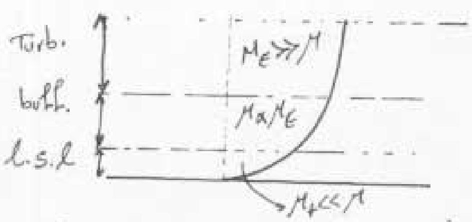
$$l_m^{-1} = 1.25\int_0^{2\pi} r^{-1}\, d\theta$$

(از این روش زیاد استفاده نمی‌شود)

نکته: در مورد مواردی که در دیواره محدودیت اطراف هستند قاعده‌ای که در نظر می‌گیریم، فاصله‌ی گوشه تا مرز ما در l.s.l خواهد بود.

نکته: مدل‌های k-ε برای جریان بر روی external flow ها جواب‌های بهتری می‌دهد تا Internal flow ها.

نکته: همه‌ی اتفاقات و نکات مهم در کنار دیواره است. ما باید نزدیک دیواره را با ترتیب خوب محاسبه کنیم.
یک راه، شبکه بندی ریزتر در نزدیکی دیواره است. (شیب پروفیل در کنار دیواره زیاد است)



ما می‌خواهیم بین نقاط روی دیواره و اولین نقطه بیرون l.s.l پل بزنیم تا پروفیل دقیق‌تری داشته باشیم و این اطلاعات برای این کار را از اندازه گیری بدست می‌آوریم.

← رفتار داده‌ی نزدیک دیواره براساس یک سری توابع universal به نام wall function قابل طرح است.
کار این توابع یونیورسال این است که دو نقطه را به هم وصل کنند، تنش برشی روی دیواره را به شرایط جریان در خارج لایه‌ی کنار دیواره ربط می‌دهند.

این کار به جای استفاده از تعداد زیادی نقطه استفاده می‌شود.

← توابع دیواره (wall function) معمولاً برای سطوح تخت استخراج شده و استفاده می‌شود.
(برای دیگر سطوح نیاز به تصحیح دارند)

نکته: اصطلاحاً به روش‌هایی که از wall function استفاده می‌کنند high Reynolds می‌گویند. (پل زدن بین l.s.l و خارج از لایه)

مثلاً:

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{K} \ln\left(\frac{E \rho u_\tau y}{\mu}\right)$$

$u_\tau = \left(\frac{\tau_w}{\rho}\right)^{1/2}$ $\quad E = 9$ for smooth walls

$K = 0.448$

نکات در مورد mixing length :

- ✓ محدود به جریانات ساده است. (سیرکولاسیون ... را مدل نمی‌کند)
- ✓ برای جریان های داخلی بهتر است از آن استفاده شود (برای external flow مناسب است)
- ✓ در جاهایی که $\frac{\partial u}{\partial y}$ صفر باشد مقدار μ_t صفر است. که اشکال بزرگی ایجاد می‌کند. (مثلاً در جریان داخل یک کانال دقیقاً جایی که گرادیان سرعت صفر می‌شود وسط کانال است جایی که μ_t حداکثر است)
- ✓ حتی برای جریان های ساده، l_m یک مقدار universal ندارد.

معادله انرژی جنبشی توربولانس :

$$K = \frac{1}{2}(U)^2 + \frac{1}{2}(V)^2 + \frac{1}{2}(W)^2$$

انرژی جنبشی ← $\bar{u} + u'$

در هر نقطه دو نوع انرژی جنبشی داریم: یکی بر اساس $\bar{u}$ و $\bar{v}$ و $\bar{w}$ و دیگری بر اساس u' و v' و w' (صفحه ۴)

$$K = \frac{1}{2}\left(u'^2 + v'^2 + w'^2\right)$$ ← انرژی جنبشی توربولانسی

$$K^{1/2} = V_t \xrightarrow[\text{در معادله صفحه I}]{\text{جایگذاری}} \mu_t = \rho K^{1/2} L$$

حالا مجهول ما به جای V_t و l به K و l تغییر کرد و ما باید دنبال رابطه‌ای برای K و l باشیم.

نکته: مدل هایی که یک معادله دیفرانسیل برای K نوشته می‌شود و l از شرایط غیر دیفرانسیلی بدست می‌آید را one equation model می‌نامیم.

مدل هایی هستند که یک معادله برای K و یک معادله برای l حل می‌کنند two equation model

برای محاسبه l روش های مختلفی وجود دارد. مثل جایگزین کردن ε و ω (مثل K-ε و K-ω)

معادله دیفرانسیل برای K از معادلات ناویر استوکس استخراج می‌شود (برای high Reynold numbers)

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho K)}_{\text{unsteady term}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho U_i K)}_{\text{Convection term}} = \underbrace{D}_{\text{diffusion term}} + \underbrace{P}_{\text{Production term}} - \underbrace{\rho \varepsilon}_{\text{dissipation term}}$$

نابودکردن انرژی

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i k) = D + P - \rho \varepsilon$$

$$P = -\left(\overline{\rho v_i' u_j'}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \longrightarrow$$ کار انجام شده توسط تنش های توربولانی در جریان

$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \rightarrow$ rate of strain term

$$D = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_i}\right] \longrightarrow$$ ترم دیفیوژن $\quad \sigma_k = 1$

$$\varepsilon = C_D \frac{k^{3/2}}{L} \longrightarrow$$ نرخ استهلاک انرژی توربولانی در جریان $\quad C_D = 0.09$

(ε به k و L بستگی دارد)

انرژی جنبشی — طول مشخصه

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i k) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\mu_t}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x_i}\right) + \mu_t\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - C_D \rho \frac{k^{3/2}}{L}$$

$\sigma_k = 1$

$C_D = 0.09$

معادله کلی دیفرانسیل استخراج شده برای K از روی معادلات ناویر استوکس.

نکته: اگر تمام ترم‌ها بجز Production term و dissipation term قابل صرف‌نظر باشند، یعنی جریان طوری است که هر چقدر انرژی توربولانی تولید می‌شود، همان قدر هم دمپ می‌شود. به عبارتی Product = dissipate

$$\mu_t\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = C_D \rho \frac{k^{3/2}}{L} \quad , \quad \mu_t = \rho k^{1/2} l$$

همان μ_t که در پرانتز مطرح کرده بود.

$$(\mathrm{I})\ \mu_t = \rho l_m^2 \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

$$\text{if } l_m = \frac{L}{C_D^{1/4}} \xrightarrow{(\mathrm{I})} \mu_t = \rho l^2 C_D^{-1/4}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

نکته مهم: منظور از Low Reynolds مدلی است که معادلات مومنتوم، k و ... تا روی دیواره انتگرال‌گیری شود
(یعنی شرط مرزی درست روی دیواره است)

منظور از High Reynolds مدلی است که معادلات فوق تا نقطه‌ای نزدیک دیواره که خارج از Sub layer است انتگرال‌گیری شود و مقدار فاصله تا دیواره توسط قانون دیواره (wall law) ارضا می‌شود.

The k-ε model

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho U_i k) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\mu_t}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x_i}\right) + P - \rho\varepsilon$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho U_i \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}\right) + \underbrace{(C_1 P - C_2\rho\varepsilon)\left(\frac{\varepsilon}{k}\right)}_{\text{Source Term}}$$

- این مدل جواب‌های خوبی می‌دهد معمولاً زمانی که انتقال حرارت بر جریان غالب شود.
- این مدل زیر مجموعه two equ. model است.

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \sim V_t l_t \rho$$

$$\begin{cases} l_t \sim \dfrac{k^{3/2}}{\varepsilon} \\ V_t = k^{1/2} \end{cases}$$

✓ مدل‌های دو معادله‌ای مثل k-ε می‌توانند توزیع l را به دست بدهند و برای هر جریان پیچیده‌ای معمولاً جواب می‌دهد.

$$C_\mu = 0.09,\quad C_1 = 1.44,\quad C_2 = 1.92,\quad \sigma_k = 1,\quad \sigma_\varepsilon = 1.3$$

← به صورت تجربی این مقادیر به دست آمده است

The wall function treatment (launder & spolding 1974)

$$u^+ = \frac{u\mu}{\tau_w y} = \left(\frac{1}{k}\right)\frac{\ln(Ey^+)}{y^+}$$

$$y^+ = \rho k^{1/2} C_\mu^{1/4}\frac{y}{\mu}$$

y^+: فاصله‌ی بی‌بعد از دیواره

$$30 \leq \frac{\rho u^+}{\nu} \leq 110$$

$$\varepsilon = (C_\mu k^2)^{3/4}\frac{1}{ky}$$

✓ برای ناحیه fully turbulent ($\mu_t \gg \mu$) صادق است
✓ ناحیه نزدیک دیوار به وسیله wall function قابل بررسی است.
✓ به وسیله مقادیر u، k، ε و ... خارج از ناحیه‌ی Sublayer تنش برشی دیوار τ_w به وسیله‌ی logarithmic law قابل تعمیم است.
✓ این معادلات در جاهایی مناسب است که مدل کردن‌ها روی دیواره خیلی خوب نشد
✓ این معادلات برای چند پدیده هم قابل استفاده نیست، ترانزیشن، relaminarization، مدل کردن‌های عملی قوی

relaminarization: جریانی که دوباره آرام می‌شود

$k = 0$ روی دیواره (چون U و V در دیواره صفر است)

The low Reynolds number k-ε (Jones & launder 1972-1973)

در جریان‌های پیچیده و استفاده از قانون دیواره، کار درستی نیست (استفاده از high Reynolds درست نیست)

باید معادلات را تا دیوار انتگرال گرفت.

باید ترم هایی به k و ε اضافه کرد تا تغییرات را تا خود دیواره محاسبه کند.

$$R_t = \frac{\rho k^2}{\mu \varepsilon}$$

local Reynolds number

رینولدز توربولانسی

$$S_{k,extra} = -2\mu \left(\frac{\partial k^{1/2}}{\partial x_j}\right)^2$$

$$S_{\varepsilon,extra} = 2\left(\mu \frac{\mu_t}{\rho}\right)\left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_k}\right)^2$$

$$C_\mu = 0.09\, e^{\left(\frac{-3.4}{(1+0.02R_t)^2}\right)}$$

$$C_2 = 1.92\left(1 - 0.2222\, e^{\left(-\frac{R_t^2}{36}\right)}\right)$$