فصل اول

مروری بر بردارها و ماتریس ها

۱-۱ مقدمه

هدف از این بخش مروری بر قواعد و عملیات بردارها و ماتریس همراه با آشنایی اولیه با نرم افزار MATLAB است. همچنین برخی از روابط کاربردی سودمند در مورد ماتریس های بلوکی، معرفی چند ماتریس خاص و اصطلاحات بکار برده شده در این مجموعه آورده شده است. این فصل جنبه معرفی و مقدماتی داشته و در صورت آشنایی خوانندگان با مبانی اولیه بردارها، ماتریس ها و کاربرد نرم افزار MATLAB می توان مباحث را از فصل دوم آغاز نمود.

۱-۲ بردارها، ماتریس ها و قواعد عملیات آنها

یک **بردار**[۱] کمیتی است که هم دارای اندازه و هم دارای جهت باشد. کمیت های طول، سطح، حجم، جرم و اعداد حقیقی تنها دارای اندازه هستند. چنین کمیت هایی را **اسکالر**[۲] می نامند. در حالیکه کمیت هایی چون سرعت، نیرو و شتاب علاوه بر اندازه دارای جهت نیز هستند.

بردار را می توان بصورت یک لیست محدودی از اعداد، بصورت سطری یا ستونی نمایش داد،

$$\mathbf{v}=\begin{bmatrix}v_1 & v_2 & \cdots & v_n\end{bmatrix}_{1\times n} \quad , \quad \mathbf{u}=\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_n\end{bmatrix}_{n\times 1} \qquad (۱-۱)$$

هر یک از این اعداد اسکالر را **عناصر** یا **درایه** های آن بردار گویند، که می توانند اعداد حقیقی، مختلط یا گویا باشند. **بعد** یک بردار بستگی به تعداد عناصر آن دارد. بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ به ترتیب ابعاد $n\times 1$ و $1\times n$ دارند. گاهی برای سهولت $\mathbf{u}$ را بردار ستونی n تایی و $\mathbf{v}$ را بردار سطری n تایی می نامند.

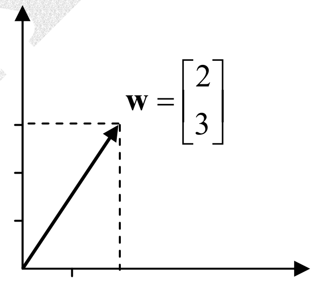
مثال۱-۱

بردار $\mathbf{v}$ با ابعاد 1×4 (یک سطر و چهار ستون) و بردار $\mathbf{u}$ ابعاد 3×1 (سه سطر و یک ستون) را در نظر بگیرید.

$$\mathbf{v}=\begin{bmatrix}-1.1 & 2 & 0 & -7.8\end{bmatrix}_{1\times 4} \quad , \quad \mathbf{u}=\begin{bmatrix}1+2j\\ -5.3\\ 0\end{bmatrix}_{3\times 1}$$

□

در تعابیر هندسی بردار را بوسیله یک پیکان نمایش می دهند، که طول این پیکان بیانگر اندازه بردار و جهت آن مشخص کننده جهت بردار می باشد.



شکل(۱-۱)- نمایش هندسی بردار

---

۱ Vector

۲ Scalar

حال اگر داده های مرتبط را با ابعاد $m \times n$ ذخیره نماییم **ماتریس**[۱] بدست می آید،

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \qquad (۲-۱)$$

مثال۱-۲

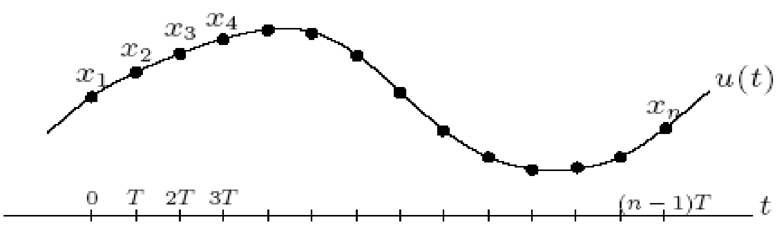
در زیر نمونه هایی از ماتریس های مربعی و غیر مربعی آورده شده است،

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -j & 5 & -9 \end{bmatrix}_{2\times 3} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1-5j & 0 & -2-j \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

□

عناصر یک بردار یا ماتریس می تواند اطلاعاتی مانند داده های آماری یک سیستم اجتماعی، پارامترهای توصیف کننده یک سیستم فیزیکی و یا داده های نمونه برداری شده یک سیگنال الکتریکی باشد. بطور نمونه در شکل(۱-۲) سیگنال $u(t)$ را پس از نمونه برداری با دوره تناوب T می توان بصورت یک بردار n تایی نمایش داد،

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(0) \\ u(T) \\ \vdots \\ u((n-1)T) \end{bmatrix}$$



شکل(۱-۲)- سیگنال نمونه برداری شده

[۱] Matrix

یکی از مهمترین جنبه های نرم افزار MATLAB کاربرد آن در محاسبات بردار، ماتریس، روشهای خاص محاسبات عددی و جبرخطی می باشد. برای ایجاد یک بردار سطری می توان بصورت زیر عمل کرد،

```
a = [1  2  3]
a =
   1     2     3
```

یک بردار ستونی نیز بطور مشابه با قرار دادن نقطه- ویرگول در بین درایه ها بدست می آید،

```
b = [1;2;3]
b =
         1
         2
         3
```

دستور length(a) تعداد عناصر یا همان طول بردار را مشخص می کند،

```
length(a)
ans =
         3
```

بطور مثال برای ایجاد یک ماتریس 3×3 بصورت زیر عمل می کنیم،

```
A = [1 2 3;4 5 6;7 8 10]
A =
     1     2     3
     4     5     6
     7     8    10
```

همانطور که مشخص است از علامت (;) برای جدا کردن سطرها استفاده می شود.

می توان از یک ماتریس فقط برخی از سطرها و ستون های آن را استخراج کرد،

```
B = A([1 3],[1 2])
B =
     1     2
     7     8
```

برای جابجا کردن سطرهای یک ماتریس می توان بصورت زیر عمل کرد،

```
C = A([3 2 1],:)
C =
     7     8    10
     4     5     6
     1     2     3
```

علامت (:) به معنی تمام ستون ها (یا سطرها) بکار می رود. بطور مثال دستور زیر ماتریس A را به یک بردار ستونی تبدیل می کند،

```
A(:)
ans =
      1
      4
      7
      2
      5
      8
      3
      6
     10
```

برای حذف برخی از سطرها (یا ستون ها) در یک ماتریس می توان بصورت زیر عمل کرد،

```
A(:, 2) = []
A =
     1     3
     4     6
     7    10
```

در واقع [ ] بیانگر بردار تهی می باشد، با این کار ستون دوم ماتریس A حذف شده است.

برای اضافه کردن سطر (یا ستون) به یک ماتریس می توان نوشت،

```
A = [A(:,1)[2; 5; 8] A(:,2)]
A =
     1     2     3
     4     5     6
     7     8    10
```

به این ترتیب ماتریس A دوباره به حالت اول خود بر می گردد.

با استفاده از نرم افزار *MATLAB* به راحتی می توان عناصر ماتریس ها را بررسی و آنها را تحت شرایط خاصی انتخاب کرد. بطور مثال ماتریس A را در نظر بگیرید،

```
A = [-1 2 3;0 5 1]
A =
    -1   2   3
     0   5   1
```

دستور $A > ۱$ یک ماتریس با درایه های صفر و یک را تولید می کند، بطوریکه برای عناصری که شرط مذکور را برآورده می کنند عدد یک و برای آنهائیکه در شرط مذکور صدق نمی کنند عدد صفر منظور می شود،

```
A > 1
ans =
     0   1   1
     0   1   0
```

دستور زیر درایه هایی را که در شرط $A > ۱$ صدق می کند را نشان می دهد،

```
A(A > 1)
ans =
     2
     5
     3
```

از دستور rand(m,n) برای ایجاد یک ماتریس تصادفی می توان استفاده کرد. درایه های این ماتریس اعدادی در بازه $[0,1]$ هستند، که بطور یکنواخت توزیع شده اند،

```
rand(3,4)
ans =
    0.9501    0.4860    0.4565    0.4447
    0.2311    0.8913    0.0185    0.6154
    0.6068    0.7621    0.8214    0.7919
```

دستور randn(m,n) برای ایجاد یک ماتریس تصادفی است که عناصر آن بصورت نرمال با میانگین صفر و واریانس یک توزیع شده اند،

```
randn(3,4)
ans =
   -0.4326    0.2877    1.1892    0.1746
   -1.6656   -1.1465   -0.0376   -0.1867
    0.1253    1.1909    0.3273    0.7258
```

دستورهای ones(m,n) ، zeros(m,n) و eye(m,n) بسیار پرکاربرد هستند،

```
ones(2,5)
ans =
     1     1     1     1     1
     1     1     1     1     1
zeros(2,5)
ans =
     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0
eye(2,5)
ans =
     1     0     0     0     0
     0     1     0     0     0
```

۱-۲-۱- عملیات جمع و تفریق در بردارها و ماتریس ها

بردارها و ماتریس ها نیز همانند اعداد قابلیت جمع و تفریق شدن را دارند به شرطی که از نظر ابعاد یکسان باشد.

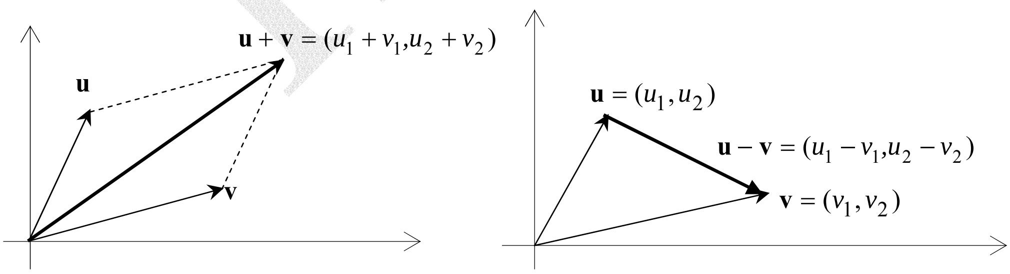
$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad \mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{bmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\\\vdots\\u_n+v_n\end{bmatrix},\quad \mathbf{u}-\mathbf{v}=\begin{bmatrix}u_1-v_1\\u_2-v_2\\\vdots\\u_n-v_n\end{bmatrix}\qquad (۱-۳)$$

برای ماتریس A و B داریم،

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}_{m\times n},\quad B=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b_{m1}&b_{m2}&\cdots&b_{mn}\end{bmatrix}_{m\times n}$$

$$A\pm B=\begin{bmatrix}a_{11}\pm b_{11}&a_{12}\pm b_{12}&\cdots&a_{1n}\pm b_{1n}\\a_{21}\pm b_{21}&a_{22}\pm b_{22}&\cdots&a_{2n}\pm b_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}\pm b_{m1}&a_{m2}\pm b_{m2}&\cdots&a_{mn}\pm b_{mn}\end{bmatrix}_{m\times n}\qquad (۱-۴)$$

نمایش هندسی جمع و تفریق دو بردار در فضای دو بعدی بصورت زیر است،



شکل(۱-۳)- نمایش هندسی جمع و تفریق دو بردار

مثال۱-۳

به جمع و تفریق دو بردار و دو ماتریس و کدهای نرم افزار MATLAB آنها توجه نمایید،

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1+j \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2+j \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} j \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

```
u1 = [1 + j; - 5; 0];
u2 = [1; 0; 2];
u1 + u2
ans =
   2.0000  + 1.0000i
  - 5.0000
   2.0000
u1 - u2
ans =
   0 + 1.0000i
  - 5.0000
  - 2.0000
```

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -j & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3-j & \sqrt{2} \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow A+B = \begin{bmatrix} 5-j & \sqrt{2} \\ -j & 9 \end{bmatrix}, A-B = \begin{bmatrix} -1+j & -\sqrt{2} \\ -j & -7 \end{bmatrix}$$

```
A = [2  0;-j  1];
B = [3 - j  sqrt(2);0  8];
A + B
ans =
   5.0000 - 1.0000i   1.4142
        0 - 1.0000i   9.0000
A - B
ans =
  - 1.0000 + 1.0000i  - 1.4142
        0 - 1.0000i  - 7.0000
```

وجود علامت (;) بعد از دستورات سبب می شود که نتایج نوشته نشوند.

□

۱-۲-۲- ضرب یک عدد اسکالر در بردار و ماتریس

حاصلضرب یک بردار یا ماتریس در یک عدد اسکالر، بردار یا ماتریسی است که هر درایه آن در عدد اسکالر مذکور ضرب شده است،

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad k\mathbf{u}=\begin{bmatrix}ku_1\\ku_2\\\vdots\\ku_n\end{bmatrix}\tag{۱-۵}$$

به لحاظ هندسی ضرب یک عدد اسکالر در بردار می تواند سبب تغییر طول و جهت بردار گردد.

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\rightarrow kA=\begin{bmatrix}ka_{11}&ka_{12}&\cdots&ka_{1n}\\ka_{21}&ka_{22}&\cdots&ka_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ka_{m1}&ka_{m2}&\cdots&ka_{mn}\end{bmatrix}\tag{۱-۶}$$

مثال ۱-۴

برای بردار $\mathbf{u}$ تعریف شده، بردارهای $2\mathbf{u}$ و $(-3j)\mathbf{u}$ به شکل زیر بدست می آید،

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}3\\-1.2\\0\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad 2\mathbf{u}=\begin{bmatrix}6\\-2.4\\0\end{bmatrix},\quad(-3j)\mathbf{u}=\begin{bmatrix}-9j\\3.6j\\0\end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
u = [3; -1.2; 0];
2*u
ans =
     6.0000
    -2.4000
          0
(-3j)*u
ans =
          0 - 9.0000i
          0 + 3.6000i
          0
```

اگر ماتریس A را بصورت زیر در نظر بگیریم، در اینصورت ماتریس $2A$ بشکل زیر بدست می آید،

$$A=\begin{bmatrix}2&4&3&-1\\3&1&5&2\\-1&0&7&6\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad 2A=\begin{bmatrix}4&8&6&-2\\6&2&10&4\\-2&0&14&12\end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[2  4  3  -1;3  1  5  2;-1  0  7  6];
2*A
ans =
     4     8     6    -2
     6     2    10     4
    -2     0    14    12
```

□

۱-۲-۳- ترکیب خطی بردارها

بنا به تعریف بردار $\mathbf{u}$ یک **ترکیب خطی**[۱] از بردارهای $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ می باشد، اگر اسکالرهای $c_1,c_2,\ldots,c_n$ وجود داشته باشد که بتوان $\mathbf{u}$ را بصورت زیر نمایش داد،

$$\mathbf{u}=c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+\ldots+c_n\mathbf{v}_n \qquad (۷-۱)$$

مثال۱-۵

در هر یک از سه حالت زیر بررسی نمایید، که آیا می توان بردار $\mathbf{u}$ را بصورت ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ نوشت.

برای این منظور در هر سه حالت باید معادله $\mathbf{u}=c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2$ را نوشته و حل کرد.

1. $\mathbf{u}=(-12,20),\quad \mathbf{v}_1=(-1,2),\quad \mathbf{v}_2=(4,-6)$

معادله $\mathbf{u}=c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2$ بصورت زیر خواهد شد،

$$(-12,20)=c_1(-1,2)+c_2(4,-6)\rightarrow \begin{matrix}-c_1+4c_2=-12\\2c_1-6c_2=20\end{matrix}\rightarrow\quad c_1=4,\quad c_2=-2$$

بنابراین بردار $\mathbf{u}$ یک ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ می باشد و می توان آن را بصورت $\mathbf{u}=4\mathbf{v}_1-2\mathbf{v}_2$ نوشت.

2. $\mathbf{u}=(4,20),\quad \mathbf{v}_1=(2,10),\quad \mathbf{v}_2=(-3,-15)$

[۱] Linear Combination

معادلات به شکل می باشند،

$$(4,20) = c_1(2,10) + c_2(-3,-15) \rightarrow \begin{array}{c} 2c_1 - 3c_2 = 4 \\ 10c_1 - 15c_2 = 20 \end{array} \rightarrow \begin{cases} c_1 = 2 + \dfrac{3}{2}t \\ c_2 = t \end{cases} \quad t \in \Re$$

در این حالت نیز بردار $\mathbf{u}$ یک ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ می باشد، ولی برخلاف حالت قبل فقط یک جواب وجود ندارد و بینهایت ترکیب خطی مختلف می توان بدست آورد.

3. $\mathbf{u} = (1,-4), \quad \mathbf{v}_1 = (2,10), \quad \mathbf{v}_2 = (-3,-15)$

در این حالت معادلات به شکل زیر خواهند بود،

$$(1,-4) = c_1(2,10) + c_2(-3,-15) \rightarrow \begin{array}{c} 2c_1 - 3c_2 = 1 \\ 10c_1 - 15c_2 = -4 \end{array}$$

همانطور که از معادلات بالا مشاهده می شود، جوابی برای c_1 و c_2 وجود ندارد. بنابراین بردار $\mathbf{u}$ را نمی توان بصورت یک ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ نوشت.

□

مثال۱-۶

بردار $\mathbf{u}$ را در نظر بگیرید،

$$\mathbf{u} = [1,2,1]$$

برای کدامیک از دسته بردارهای زیر امکان نوشتن یک ترکیب خطی بصورت زیر وجود دارد؟

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$$

الف) $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

طبق تعریف ترکیب خطی داریم،

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 \\ 0 \\ c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_2 \\ c_2 \\ -c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2c_3 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -c_1 + c_2 = 1 \\ c_2 + 2c_3 = 2 \\ c_1 - c_2 = 1 \end{cases}$$

با حل دستگاه معادلات بالا در می یابیم، که هیچ جوابی برای حل این دستگاه معادلات وجود ندارد. لذا بردار $\mathbf{u}$ را نمی توان بصورت یک ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1$، $\mathbf{v}_2$ و $\mathbf{v}_3$ نوشت.

ب) $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

طبق تعریف ترکیب خطی داریم،

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 \\ c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4c_2 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_3 \\ -c_3 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} c_1 + c_3 = 1 \\ c_1 + 4c_2 - c_3 = 2 \\ c_1 + c_2 = 1 \end{cases}$$

با حل دستگاه معادلات بالا مقادیر زیر بدست می آید،

$$c_1 = c_2 = c_3 = \frac{1}{2}$$

بنابراین بردار $\mathbf{u}$ یک ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1$، $\mathbf{v}_2$ و $\mathbf{v}_3$ می باشد و می توان آن را بصورت $\mathbf{u} = \frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_3$ نوشت.

ج) $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

طبق تعریف ترکیب خطی داریم،

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3c_1 \\ 2c_1 \\ c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_2 \\ 2c_2 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_3 \\ 4c_3 \\ 2c_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ 2c_1 + 2c_2 + 4c_3 = 2 \\ c_1 + c_2 + 2c_3 = 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} c_1 = 0.5c_3 \\ c_2 = 1 - 2.5c_3 \end{matrix}$$

در این حالت نیز بردار $\mathbf{u}$ یک ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1$، $\mathbf{v}_2$ و $\mathbf{v}_3$ می باشد، ولی فقط یک جواب وجود ندارد و بینهایت ترکیب خطی مختلف می توان بدست آورد.

□

۱-۲-۴- ضرب داخلی و نُرم بردارها

هر قاعده ای که به یک جفت بردار $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ یک کمیت اسکالر را اختصاص دهد یک **ضرب داخلی**[1] نامیده می شود و با نماد $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ نشان داده می شود، به شرط اینکه چهار اصل زیر را برآورده سازد،

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$ (خط تیره نشانگر مزدوج یک عدد مختلط است)
2. $\langle c\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \bar{c}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \bar{c}\mathbf{v} \rangle$ (c یک عدد مختاط است)
3. $\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{w}+\mathbf{s} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{s} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{s} \rangle$
4. $\forall \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \rightarrow \qquad \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$

با توجه به شرایط بالا ضرب داخلی یک جفت بردار مختلط $\mathbf{u}_{n\times 1}$ و $\mathbf{v}_{n\times 1}$ در یک فضای برداری V بصورت زیر بیان می شود،

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \bar{u}_1 v_1 + \bar{u}_2 v_2 + \cdots + \bar{u}_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \bar{u}_i v_i \qquad (۱-۸)$$

که حاصل آن یک عدد مختلط است و $\bar{u}_i$ها مزدوج های u_iها هستند. در اینصورت ضرب داخلی را بصورت زیر می توان بیان کرد،

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle} = \overline{\mathbf{v}^* \mathbf{u}} = \mathbf{v}^{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^* \mathbf{v} \qquad (۱-۹)$$

که در آن $\mathbf{u}^*$ ترانهاده مزدوج $\mathbf{u}$ را نشان می دهد. بنابراین ضرب داخلی دو بردار $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ با عناصر حقیقی بصورت زیر داده می شود،

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \qquad (۱-۱۰)$$

بدیهی است که در این حالت داریم،

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}^{\mathbf{T}} \mathbf{u} = \mathbf{u}^{\mathbf{T}} \mathbf{v} \qquad (۱-۱۱)$$

مثال۱-۷

ضرب داخلی بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ و سپس $\mathbf{v}$ و $\mathbf{u}$ را بدست آورید.

$$\mathbf{u} = [2+j3, 3+j, 4], \qquad \mathbf{v} = [4-j6, 3, 3+j2]$$

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= \overline{(2+j3)}(4-j6) + \overline{(3+j)}(3) + \overline{(4)}(3+j2) \\
&= (2-j3)(4-j6) + (3-j)(3) + (4)(3+j2) \\
&= (-10-j24) + (9-j3) + (12+j8) \\
&= 11-j19
\end{aligned}$$

[1] Inner Product

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle &= \overline{(4-j6)}(2+j3)+\overline{(3)}(3+j)+\overline{(3+j2)}(4)\\ &=(4+j6)(2+j3)+(3)(3+j)+(3-j2)(4)\\ &=(-10+j24)+(9+j3)+(12-j8)\\ &=11+j19\end{aligned}$$

همانطور که پیداست $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \overline{\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle}$ می باشد.

□

در نرم افزار MATLAB برای ایجاد ترانهاده و ترانهاده مزدوج یک بردار یا ماتریس به ترتیب از کاراکترهای ('.) و (') استفاده می شود،

```
a = [1  2  3]; b = [1;2;3];
(a + i * b').'
ans =
              1.0000  + 1.0000i
              2.0000  + 2.0000i
              3.0000  + 3.0000i
(a + i * b')'
ans =
              1.0000  - 1.0000i
              2.0000  - 2.0000i
              3.0000  - 3.0000 i
```

عملگر نقطه (.) نقش مهمی در نوشتن دستورات دارد و امکان انجام عملیات بر روی تک تک عناصر بردارها و ماتریس ها را ایجاد می نماید. بطور مثال عملگرهای *. و ^. و \. به ترتیب بیانگر انجام عملیات ضرب، توان رسانی و تقسیم از چپ روی تک تک عناصر هستند،

```
a.*a
ans =
        1   4   9
a.^2
ans =
       1   4   9
a.\b'
ans =
       1   1   1
```

به منظور انجام عملیات ضرب داخلی دو بردار بصورت زیر عمل می کنیم،

```
dotprod = a'*b
dotprod =
            14
```

عملگر نقطه (.) همانطور که برای بردارها گفته شد در مورد ماتریس ها نیز صدق می کند،

```
A = [1 2 3; 3 2 1] ;
A.* A
ans =
      1   4   9
      9   4   1
```

لازم به ذکر است دستوری بصورت $A*A$ چنین پیغام خطایی را در بر دارد،

```
A * A
??? Error using ==> *
Inner matrix dimensions must agree.
```

نکته۱: برای بردار $\mathbf{u}_{n\times 1}$ مقدار $\mathbf{u}^*\mathbf{u}$ یک عدد اسکالر نامنفی و $\mathbf{u}\mathbf{u}^*$ یک ماتریس $n\times n$ می باشد،

$$\mathbf{u}^*\mathbf{u} = \langle \mathbf{u},\mathbf{u} \rangle = \bar{u}_1u_1 + \bar{u}_2u_2 + \cdots + \bar{u}_nu_n = |u_1|^2 + |u_2|^2 + \cdots + |u_n|^2$$

$$\mathbf{u}\mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} u_1\bar{u}_1 & u_1\bar{u}_2 & \cdots & u_1\bar{u}_n \\ u_2\bar{u}_1 & u_2\bar{u}_2 & \cdots & u_2\bar{u}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n\bar{u}_1 & u_n\bar{u}_2 & \cdots & u_n\bar{u}_n \end{bmatrix}$$

مفهوم یک **نُرم**[۱] تا اندازه ای شبیه به مفهوم قدر مطلق می باشد. یک نُرم تابعی است که برای هر بردار $\mathbf{u}$ داده شده یک عدد حقیقی تخصیص می دهد که با نماد $\|\mathbf{u}\|$ نشان داده می شود، بطوریکه شرایط زیر را بر آورده سازد،

1. $\|\mathbf{u}\| > 0, \quad \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$
2. $\|\mathbf{u}\| = 0, \quad if \quad \mathbf{u} = \mathbf{0}$
3. $\|k\mathbf{u}\| = |k|\|\mathbf{u}\|$ (در اینجا k یک اسکالر و $|k|$ قدرمطلق k است)
4. $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (نامساوی مثلثاتی[۲])
5. $|\langle \mathbf{u},\mathbf{v} \rangle| \le \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$ (نامساوی کوشی- شوارتز[۳])

[۱] Norm
[۲] Triangle Inequality
[۳] Cauchy - Schwarz Inequality

در حالت کلی **u** می تواند، بردار، ماتریس و یا سیگنال باشد. با توجه به شرایط بالا نُرم یک بردار را بصورت ریشه دوم نامنفی $\langle \mathbf{u},\mathbf{u} \rangle$ می توان تعریف کرد،

$$\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u},\mathbf{u} \rangle^{1/2} = \left(\mathbf{u}^*\mathbf{u}\right)^{1/2} = \sqrt{|u_1|^2 + |u_2|^2 + \cdots + |u_n|^2} \qquad (۱۲-۱)$$

مثال۱-۸

نُرم بردارهای **u** و **v** را بدست آورید.

$$\mathbf{u} = [\,j2,-1,3+j\,], \qquad \mathbf{v} = [4,-1,2,0]$$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{|\,j2|^2 + |-1|^2 + |3+j|^2} = \sqrt{4+1+10} = \sqrt{15}$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{|4|^2 + |-1|^2 + |2|^2 + |0|^2} = \sqrt{16+1+4+0} = \sqrt{21}$$

سپس برای هر یک از دسته بردارهای زیر حاصل $2\mathbf{u}-5\mathbf{v}$، $\langle \mathbf{u},\mathbf{v} \rangle$، $\|\mathbf{u}-2\mathbf{v}\|$ را بیابید.

الف) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$

$$2\mathbf{u}-5\mathbf{v} = 2\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -14 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\langle \mathbf{u},\mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T\mathbf{v} = (3\times 0) + (-2\times 2) + (0\times(-4)) = -4$$

$$\|\mathbf{u}-2\mathbf{v}\| = \left\| \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix} \right\|$$

$$= \sqrt{|3|^2 + |-6|^2 + |8|^2} = \sqrt{109}$$

در نرم افزار MATLAB از دستور norm(u) برای محاسبه نُرم بردارها استفاده می شود،

```
v = [0; 2; -4];

u = [3; -2; 0];

2*u-5*v

ans =

      6

    -14

     20
```

```
u'*v
ans =
      -4
norm(u - 2 * v)
ans =
      10.4403
```

ب) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1+2j \\ 0 \\ 6-3j \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3j \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$2\mathbf{u} - 5\mathbf{v} = 2\begin{bmatrix} 1+2j \\ 0 \\ 6-3j \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 3j \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+4j \\ 0 \\ 12-6j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -15j \\ -15 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-11j \\ -15 \\ 17-6j \end{bmatrix}$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^* \mathbf{v} = ((1-2j) \times (3j)) + (0 \times 3) + ((6+3j) \times (-1)) = 0$$

$$\|\mathbf{u} - 2\mathbf{v}\| = \left\| \begin{bmatrix} 1+2j \\ 0 \\ 6-3j \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 3j \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 1+2j \\ 0 \\ 6-3j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6j \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 1-4j \\ -6 \\ 8-3j \end{bmatrix} \right\|$$

$$= \sqrt{|1-4j|^2 + |-6|^2 + |8-3j|^2} = \sqrt{126}$$

همچنین با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
u = [1 + 2i; 0; 6 - 3i];
v = [3i; 3; -1];
2 * u - 5 * v
ans =
        2.0000 - 11.0000i
      -15.0000
       17.0000 - 6.0000i
u'*v
ans =
        0
norm(u - 2 * v)
ans =
      11.2250
```

ج) $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix},\mathbf{v}=\begin{bmatrix}2-6j\\j\\-1\end{bmatrix}$

$$2\mathbf{u}-5\mathbf{v}=2\begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}2-6j\\j\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-2\\6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-10+30j\\-5j\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8+30j\\-2-5j\\11\end{bmatrix}$$

$$\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=\mathbf{u}^*\mathbf{v}=(1\times(2-6j))+((-1)\times j)+(3\times(-1))=-1-7j$$

$$\|\mathbf{u}-2\mathbf{v}\|=\left\|\begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}2-6j\\j\\-1\end{bmatrix}\right\|=\left\|\begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4+12j\\-2j\\2\end{bmatrix}\right\|=\left\|\begin{bmatrix}-3+12j\\-1-2j\\5\end{bmatrix}\right\|$$
$$=\sqrt{|-3+12j|^2+|-1-2j|^2+|5|^2}=\sqrt{183}$$

همچنین با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
u = [1; -1; 3];
v = [2-6i; i; -1];
2*u-5*v
ans =
      -8.0000 + 30.0000i
      -2.0000 - 5.0000i
      11.0000
u'*v
ans =
      -1.0000 - 7.0000i
norm(u-2*v)
ans =
       13.5277
```

□

مثال۱-۹

نامساوی کوشی- شوارتز و نامساوی مثلثاتی را ثابت کنید.

$$|\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle|\le\|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\| \quad , \quad \mathbf{u},\mathbf{v}\in C^{n\times 1} \qquad (۱۳-۱)$$

با توجه به تعریف ضرب داخلی و نُرم بردارها می توان نوشت،

$$\begin{aligned}\|c\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 &= \langle c\mathbf{u}-\mathbf{v}, c\mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle = \langle c\mathbf{u}, c\mathbf{u}\rangle + \langle -\mathbf{v}, c\mathbf{u}\rangle + \langle c\mathbf{u}, -\mathbf{v}\rangle + \langle -\mathbf{v}, -\mathbf{v}\rangle \\ &= \bar{c}c\|\mathbf{u}\|^2 - c\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle - \bar{c}\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= \bar{c}(c\|\mathbf{u}\|^2 - \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle) - c\overline{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle} + \|\mathbf{v}\|^2 \geq 0\end{aligned}$$

می دانیم که تساوی بالا به ازای هر مقداری از c برقرار است، لذا با فرض اینکه $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$ است، مقدار را $c=\dfrac{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|^2}$ در نظر می گیریم،

$$\begin{aligned}&\bar{c}(c\|\mathbf{u}\|^2 - \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle) - c\overline{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle} + \|\mathbf{v}\|^2 = \\ &= \frac{\overline{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle}}{\|\mathbf{u}\|^2}\left(\frac{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|^2}\|\mathbf{u}\|^2 - \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle\right) - \frac{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|^2}\overline{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle} + \|\mathbf{v}\|^2 \geq 0 \\ &= \frac{\overline{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle}}{\|\mathbf{u}\|^2}(\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle - \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle) - \frac{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|^2}\overline{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle} + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= -\frac{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|^2}\overline{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle} + \|\mathbf{v}\|^2 \geq 0\end{aligned}$$

بنابراین می توان نوشت،

$$|\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2\ \|\mathbf{v}\|^2 \quad \rightarrow \quad |\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle| \leq \|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\|$$

با استفاده از نامساوی کوشی- شوارتز می توان نامساوی مثلثاتی زیر را نیز بدست آورد،

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \qquad (۱۴-۱)$$

برای این منظور بصورت زیر عمل می کنیم،

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u}+\mathrm{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle + \overline{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle} + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2|\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle| + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 = (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2\end{aligned}$$

لذا با گرفتن ریشه دوم ازطرفین نامساوی مثلثاتی بدست می آید.

□

مثال ۱-۱۰

الف) می توان نشان داد که برای دو بردار $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\Re^n$ روابط زیر برقرار است،

$$\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=\frac{1}{4}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2-\frac{1}{4}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 \qquad \text{و} \qquad \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2+\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2=2\|\mathbf{u}\|^2+2\|\mathbf{v}\|^2$$

برای این منظور می توان نوشت،

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{u}\|^2-2\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+\|\mathbf{v}\|^2 \quad , \quad \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{u}\|^2+2\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+\|\mathbf{v}\|^2$$

با تفاضل این دو رابطه از یکدیگر داریم،

$$4\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2-\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2\rightarrow\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=\frac{1}{4}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2-\frac{1}{4}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2$$

با جمع طرفین این دو رابطه با یکدیگر داریم،

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2+\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2=2\|\mathbf{u}\|^2+2\|\mathbf{v}\|^2$$

ب) اگر $\|\mathbf{u}\|=7$ و $\|\mathbf{v}\|=3$ باشد، حداقل و حداکثر مقدار ممکن برای $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|$ و $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$ چه مقداری است؟

با توجه به نامساوی مثلثاتی و تعبیر هندسی آن داریم،

$$\begin{matrix}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|\le\|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\| & \rightarrow & \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|\le 10\\ \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|\ge\|\mathbf{u}\|-\|\mathbf{v}\| & \rightarrow & \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|\ge 4\end{matrix} \quad \rightarrow \quad 4\le\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|\le 10$$

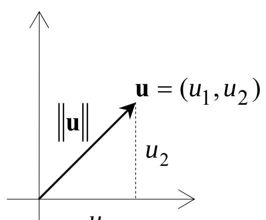
با توجه به نامساوی کوشی- شوارتز داریم،

$$|\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle|\le\|\mathbf{u}\|\;\|\mathbf{v}\| \quad\rightarrow\quad |\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle|\le 21 \quad\rightarrow\quad -21\le\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle\le 21$$

□

اگر $\mathbf{u}$ یک بردار حقیقی باشد، کمیت $\|\mathbf{u}\|^2$ می تواند، بطور هندسی بصورت توان دوم فاصله مبدأ تا نقطه نشان داده شده با بردار $\mathbf{u}$ تعبیر گردد. بطور مثال در فضای دو بعدی داریم،

$$\|\mathbf{u}\|^2=u_1^2+u_2^2$$



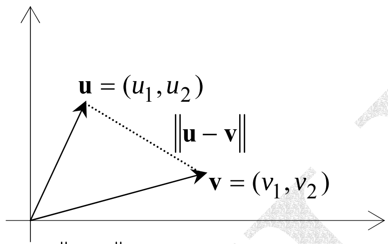
شکل(۱-۴)- نمایش هندسی نُرم بردار

برای دو بردار حقیقی $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ فاصله بین دو بردار بصورت زیر تعریف می گردد،

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle^{1/2} = \sqrt{|u_1 - v_1|^2 + |u_2 - v_2|^2 + \cdots + |u_n - v_n|^2} \qquad (۱۵-۱)$$

بطور مثال در فضای دو بعدی داریم،

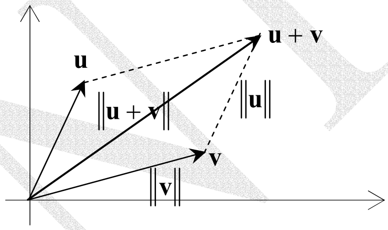
$$\|\mathbf{u}\text{-}\mathbf{v}\| = \sqrt{|u_1 - v_1|^2 + |u_2 - v_2|^2}$$



شکل(۱-۵)- نمایش هندسی $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$

تعبیر هندسی برای نامساوی مثلثاتی بصورت زیر می باشد،

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$



شکل(۱-۶)- نمایش هندسی $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$

علاوه بر رابطه گفته شده تعاریف دیگری هم برای نُرم وجود دارد که در زیر آورده شده است،

۱- یک نُرم که به **نُرم** p [۱] یا **نُرم** L_p معروف است، بصورت کلی زیر تعریف می گردد،

$$\|\mathbf{u}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|u_1|^p + |u_2|^p + \cdots + |u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad , \quad 1 \le p < \infty \qquad (۱۶-۱)$$

۲- نُرم ممکن است بصورت مجموع اندازه های تمام مؤلفه های u_i تعریف شود، که به ازای $p = 1$ در حالت قبل بدست می آید و به آن **نُرم یک**[۲] یا **نُرم** L_1 گفته می شود.

$$\|\mathbf{u}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |u_i| = |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| \qquad (۱۷-۱)$$

---

۱ p-Norm
۲ 1-Norm

۳- نُرم ممکن است بصورت بزرگترین مقدار در بین تمام مؤلفه های u_i تعریف گردد، که به آن **نُرم ماکزیمم** یا **نُرم بینهایت**[۱] یا **نُرم** L_∞ نیز می گویند.

(۱۸-۱)

$$\|\mathbf{u}\|_\infty = \lim_{p\to\infty}(\sum_{i=1}^{n}|u_i|^p)^{\frac{1}{p}} = \lim_{p\to\infty}(|u_1|^p + |u_2|^p + \cdots + |u_n|^p)^{\frac{1}{p}} = \lim_{p\to\infty}(\max_{1\le i\le n}|u_i|^p)^{\frac{1}{p}} = \max_{1\le i\le n}\{|u_i|\}$$

۴- در بین این تعاریف، نُرم $(\mathbf{u}^*\mathbf{u})^{1/2}$ که همان **نُرم دو**[۲] یا **نُرم** L_2 می باشد، از همه متداول تر است و بصورت زیر نیز نمایش داده می شود،

$$\|\mathbf{u}\|_2 = (\sum_{i=1}^{n}|u_i|^2)^{\frac{1}{2}} = (|u_1|^2 + |u_2|^2 + \cdots + |u_n|^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (۱۹-۱)$$

که به آن **نُرم اقلیدسی**[۳] نیز گفته می شود.

مثال۱-۱۱

برای بردار $\mathbf{u} = [3,4\text{-}j2,1]$ مقدار نُرم L_1، نُرم L_2 و نُرم L_∞ را بدست آورید،

$$\|\mathbf{u}\|_1 = |3| + |4 - j2| + |1| = 3 + \sqrt{20} + 1 = 4 + 2\sqrt{5}$$
$$\|\mathbf{u}\|_2 = \left(|3|^2 + |4 - j2|^2 + |1|^2\right)^{1/2} = (9 + 20 + 1)^{1/2} = \sqrt{30}$$
$$\|\mathbf{u}\|_\infty = \max\{|3|, |4 - j2|, |1|\} = \max\{3, \sqrt{20}, 1\} = \sqrt{20}$$

با بکارگیری از نرم افزار MATLAB نُرم های مختلف را می توان محاسبه نمود،

```
u=[3;4-2j;1];
norm(u,1)
ans =
    8.4721
norm(u,2)
ans =
    5.4772
norm(u,inf)
ans =
    4.4721
```

□

---

۱ ∞ -Norm
۲ 2 -Norm
۳ Euclidean Norm

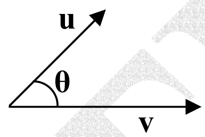
نکته۲: برخی از روابطی که بین نُرم های مختلف برقرار است بصورت زیر می باشد،

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_\infty &\le \|\mathbf{u}\|_2 \le \|\mathbf{u}\|_1 \\ \|\mathbf{u}\|_\infty &\le \|\mathbf{u}\|_2 \le \sqrt{n}\|\mathbf{u}\|_\infty \\ \|\mathbf{u}\|_2 &\le \|\mathbf{u}\|_1 \le \sqrt{n}\|\mathbf{u}\|_2 \end{aligned}$$ (۲۰-۱)

به لحاظ هندسی ضرب داخلی دو بردار عددی است که به اندازه بردارها و زاویه بین آنها مربوط است و ضرب داخلی دو بردار $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ بصورت زیر تعریف می شود،

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \ \|\mathbf{v}\| \cos\theta \quad \rightarrow \quad \theta = \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \ \|\mathbf{v}\|} \right)$$ (۲۱-۱)

که در آن θ زاویه بین دو بردار می باشد.



شکل(۱-۷)- نمایش هندسی زاویه بین دو بردار

اگر بردار $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ را بصورت زیر تعریف کنیم، زاویه بین این دو بردار بصورت زیر قابل محاسبه خواهد بود،

```
u = -2:2;
v = (1:5)'
angle = acos((u*v)/(norm(u)*norm(v)))
angle =
     1.1303
```

با توجه به تعریف دو بردار $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ را **متعامد**[1] گویند، اگر ضرب داخلی دو بردار برابر صفر باشد،

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$$ (۲۲-۱)

به عبارتی برای بردارهای حقیقی $\mathbf{u}^T\mathbf{v} = 0$ و برای بردارهای مختلط $\mathbf{u}^*\mathbf{v} = 0$ باشد. برای بردارهای متعامد $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ رابطه زیر برقرار است،

$$\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$$ (۲۳-۱)

که در واقع همان رابطه **فیثاغورث**[2] می باشد. اگر علاوه بر متعامد بودن نُرم بردارها هم برابر یک باشد، به آن بردارها **یکامتعامد**[3] گفته می شود.

[1] Orthogonal
[2] Pythagorean
[3] Orthonormal

نکته۳: اگر مجموعه ای مانند S شامل بردارهایی باشد که تمامی آنها دو به دو متعامد باشند، به آن مجموعه یک مجموعه متعامد گفته می شود، حال اگر در یک مجموعه متعامد نُرم تمامی بردارها برابر یک باشد، به آن مجموعه **یکامتعامد** گفته می شود.

مثال۱-۱۲

بردارهای زیر را در نظر بگیرید،

$$S:\left\{\mathbf{v}_1=[2,0,-1],\quad \mathbf{v}_2=[0,-1,0],\quad \mathbf{v}_3=[2,0,4]\right\}$$

الف) متعامد و یکامتعامد بودن بردارهای $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ را بررسی کنید.

برای متعامد بودن ضرب داخلی دو به دوی این بردارها را محاسبه می کنیم،

$$\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\rangle=(2)(0)+(0)(-1)+(-1)(0)=0$$
$$\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_3\rangle=(2)(2)+(0)(0)+(-1)(4)=0$$
$$\langle \mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\rangle=(0)(2)+(-1)(0)+(0)(4)=0$$

بنابراین مجموعه S یک مجموعه متعامد می باشد. برای بررسی یکامتعامد بودن، نُرم بردارها را محاسبه می کنیم.

$$\|\mathbf{v}_1\|=\sqrt{(2)^2+(0)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$$
$$\|\mathbf{v}_2\|=\sqrt{(0)^2+(-1)^2+(0)^2}=1$$
$$\|\mathbf{v}_3\|=\sqrt{(2)^2+(0)^2+(4)^2}=2\sqrt{5}$$

از آنجائیکه نُرم تمامی بردارها برابر یک نمی باشد، پس مجموعه S یک مجموعه یکامتعامد نیست.

ب) بردارهای $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ را به بردارهای یکامتعامد تبدیل کنید.

برای این منظور باید بردارها را به نحوی تبدیل کنیم که نرم آنها برابر یک گردد. اگر هر یک از بردارها را به نُرم خودش تقسیم کنیم چنین هدفی بدست می آید،

$$\mathbf{u}_1=\frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,-1)=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$$
$$\mathbf{u}_2=\frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|}\mathbf{v}_2=\frac{1}{1}(0,-1,0)=(0,-1,0)$$
$$\mathbf{u}_3=\frac{1}{\|\mathbf{v}_3\|}\mathbf{v}_3=\frac{1}{2\sqrt{5}}(2,0,4)=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

حال می توان براحتی نشان داد که بردارهای جدید $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ یکامتعامد هستند،

$$\langle \mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\rangle=\langle \mathbf{u}_1,\mathbf{u}_3\rangle=\langle \mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\rangle=0$$
$$\|\mathbf{u}_1\|=\|\mathbf{u}_2\|=\|\mathbf{u}_3\|=1$$

□

۱-۲-۵- ضرب داخلی و نُرم توابع پیوسته

فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع پیوسته و حقیقی در بازه $[a,b]$ باشند. ضرب داخلی این دو تابع پیوسته و حقیقی بصورت زیر تعریف می شود،

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx \qquad (۱-۲۴)$$

می توان نشان داد که این تعریف تمامی چهار شرط ذکر شده برای ضرب داخلی یک بردار را داراست،

$$1. \quad \langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)f(x)dx = \langle g,f\rangle$$

$$2. \quad \langle f+g,h\rangle = \int_a^b (f(x)+g(x))h(x)dx$$
$$= \int_a^b f(x)h(x)dx + \int_a^b g(x)h(x)dx = \langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle$$

$$3. \quad \langle cf,g\rangle = \int_a^b cf(x)g(x)dx = c\int_a^b f(x)g(x)dx = c\langle g,f\rangle$$

$$4. \quad \langle f,f\rangle = \int_a^b f(x)f(x)dx = \int_a^b f^2(v)dx \rightarrow \begin{cases} f \neq 0 \rightarrow \langle f,f\rangle > 0 \\ f = 0 \rightarrow \langle f,f\rangle = 0 \end{cases}$$

مثال۱-۱۳

ضرب داخلی دو تابع پیوسته زیر را در بازه $[0,\pi/2]$ محاسبه نمایید.

$$f(x) = \sin x - \cos x \qquad , \qquad g(x) = \sin x + \cos x$$

با توجه به تعریف بالا داریم،

$$\langle f,g\rangle = \int_0^{\pi/2} f(x)g(x)dx = \int_0^{\pi/2}(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)dx$$
$$= \int_0^{\pi/2}(\sin^2 x - \cos^2 x)dx = 0$$

لذا می توان گفت که دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ متعامد هستند.

□

نکته ۱: برای یک تابع یا سیگنال پیوسته اسکالر مانند $f(t)$ که در بازه $(0,\infty)$ تعریف شده باشد، نُرم های زیر در حوزه زمان قابل بیان هستند،

$$L_1: \qquad \|f\|_1 = \int_0^\infty |f(t)|dt$$

$$L_2: \qquad \|f\|_2 = \left(\int_0^\infty f(t)^2 dt\right)^{1/2} \qquad (۱-۲۵)$$

$$L_\infty: \qquad \|f\|_\infty = \sup_{t\geq 0}|f(t)|$$

عبارت sup در اینجا به معنای **سوپریمُم**[۱] می باشد، یعنی اگر S یک زیرمجموعه از اعداد حقیقی باشد، $a=\sup(S)$ است، در صورتیکه a کوچکترین مقداری باشد، بطوریکه برای تمامی $x\in S$ داشته باشیم، $a\geq x$.

مثال ۱-۱۴

برای هر یک از تابع اسکالر پیوسته زیر مقدار نُرم های L_1، L_2 و L_∞ را بدست آورید،

1. $f(t)=e^{-at},\quad a>0$

$$\|f\|_1=\int_0^\infty |f(t)|dt=\int_0^\infty |e^{-at}|dt=\frac{1}{a} \qquad \|f\|_\infty=\sup_{t\geq 0}|f(t)|=\sup_{t\geq 0}|e^{-at}|=1$$

$$\|f\|_2=\left(\int_0^\infty f(t)^2\,dt\right)^{1/2}=\left(\int_0^\infty e^{-2at}dt\right)^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{2a}}$$

2. $f(t)=t-0.5,\quad 0<t<1$

$$\|f\|_1=\int_0^\infty |f(t)|dt=\int_0^1 |t-0.5|dt=\int_0^{0.5}(-t+0.5)dt+\int_{0.5}^1 (t-0.5)dt=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$

$$\|f\|_\infty=\sup_{t\geq 0}|f(t)|=\sup_{0\leq t\leq 1}|t-0.5|=0.5$$

$$\|f\|_2=\left(\int_0^\infty f(t)^2\,dt\right)^{1/2}=\left(\int_0^1 (t-0.5)^2\,dt\right)^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{12}}$$

□

نکته ۲: برای توابع اسکالر پیوسته و حقیقی نامساوی کوشی- شوارتز بصورت زیر قابل بیان است،

$$|\langle f,g\rangle|=\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\leq\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{1/2} \qquad (۲۶-۱)$$

۱-۲-۶- ضرب ماتریس ها

ضرب یک ماتریس در ماتریس دیگر هنگامی امکان پذیر است که تعداد ستونهای ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشد. در غیر اینصورت عمل ضرب تعریف نشده است. بنا به تعریف حاصلضرب یک ماتریس $A_{n\times m}$ با درایه های a_{ij} در یک ماتریس $B_{m\times r}$ با درایه های b_{jk} ماتریسی مانند $C_{n\times r}$ است که درایه های آن بصورت زیر محاسبه می شوند،

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}b_{jk} \qquad (۲۷-۱)$$

[۱] Supremum

مثال۱-۱۵

ماتریس های $A_{3\times 4}$ و $B_{4\times 2}$ را در نظر بگیرید، حاصلضرب آنها بصورت زیر خواهد بود،

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 & 6 \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix} (2\times 1)+(4\times 2)+(3\times 0)+(-1\times 3) & (2\times 4)+(4\times 3)+(3\times -2)+(-1\times 1) \\ (3\times 1)+(1\times 2)+(5\times 0)+(2\times 3) & (3\times 4)+(1\times 3)+(5\times -2)+(2\times 1) \\ (-1\times 1)+(0\times 2)+(7\times 0)+(6\times 3) & (-1\times 4)+(0\times 3)+(7\times -2)+(6\times 1) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 7 & 13 \\ 11 & 7 \\ 17 & -12 \end{bmatrix}$$

همانطور که پیداست حاصلضرب BA امکان پذیر نمی باشد.

با بکارگیری از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[2  4  3  -1;3  1  5  2;-1  0  7  6];
B =[1  4;2  3;0  -2;3  1];
A * B
ans =
     7    13
    11     7
    17   -12
B * A
??? Error using ==> *
Inner matrix dimensions must agree.
```

□

نکته۱: بدیهی است که در حالت کلی ضرب ماتریسی جابجایی پذیر نمی باشد، $AB \neq BA$ ، از این رو ترتیب حائز اهمیت است. لیکن اگر $AB = BA$ باشد ماتریس های A و B را جابجایی پذیر گویند. بطور مثال در ماتریسهای زیر اگر $a_{12} = a_{21} = b_{12} = b_{21} = 0$ باشد، آنگاه A و B جابجایی پذیر خواهد بود.

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$
$$BA=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22} \end{bmatrix}$$

نکته۲: برای ماتریس های $A_{n\times m}$، $B_{m\times r}$ و $C_{r\times p}$ قانون شرکت پذیری صادق است،

$$(AB)C=A(BC)$$

از اینرو داریم،

$$ABCD=(AB)(CD)=A(BCD)=(ABC)D$$
$$A^{m+n}=A^m A^n \quad , \quad m,n=1,2,3,\cdots$$

نکته۳: برای ماتریس های $A_{n\times m}$، $B_{n\times m}$، $C_{m\times r}$ و $D_{m\times r}$ قانون توزیع پذیری زیر صادق خواهد بود،

$$(A+B)(C+D)=AC+AD+BC+BD$$

۱-۲-۷- مشتق و انتگرال یک ماتریس

مشتق یک ماتریس $A(t)_{n\times m}$ ماتریسی است که هر درایه ijام آن برابر مشتق درایه $a_{ij}(t)$ام ماتریس $A(t)_{n\times m}$ باشد. بدیهی است، این در صورتی امکان پذیر است که درایه $a_{ij}(t)$ام نسبت به t مشتقپذیر باشد.

$$\frac{d}{dt}A(t)=\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}a_{11}(t) & \frac{d}{dt}a_{12}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{1m}(t) \\ \frac{d}{dt}a_{21}(t) & \frac{d}{dt}a_{22}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{2m}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d}{dt}a_{n1}(t) & \frac{d}{dt}a_{n2}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{nm}(t) \end{bmatrix} \qquad (۲۸-۱)$$

به طریق مشابه، انتگرال یک ماتریس $A(t)_{n\times m}$ نسبت به t با ماتریسی تعریف می شود که هر درایه ijام آن برابر انتگرال درایه $a_{ij}(t)$ام ماتریس $A(t)_{n\times m}$ باشد.

$$\int A(t)dt=\begin{bmatrix} \int a_{11}(t)dt & \int a_{12}(t)dt & \cdots & \int a_{1m}(t)dt \\ \int a_{21}(t)dt & \int a_{22}(t)dt & \cdots & \int a_{2m}(t)dt \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int a_{n1}(t)dt & \int a_{n2}(t)dt & \cdots & \int a_{nm}(t)dt \end{bmatrix} \qquad (۲۹-۱)$$

نکته۱: اگر عناصر ماتریس های A و B توابعی از t باشند، آنگاه روابط زیر برقرار است،

$$\frac{d}{dt}(A+B)=\frac{d}{dt}A+\frac{d}{dt}B$$
$$\frac{d}{dt}(AB)=\frac{dA}{dt}B+A\frac{dB}{dt}$$

نکته۲: اگر $k(t)$ یک اسکالر و تابعی از t باشد، آنگاه می توان گفت،

$$\frac{d}{dt}(Ak(t))=\frac{dA}{dt}k(t)+A\frac{dk(t)}{dt}$$
$$\int_a^b\frac{dA}{dt}Bdt=AB\Big|_a^b-\int_a^b A\frac{dB}{dt}dt$$

مثال۱-۱۶

ماتریس $A(t)$ را در نظر بگیرید، مشتق و انتگرال این ماتریس بصورت زیر بدست می آید،

$$A(t)=\begin{bmatrix}1+t & e^{-t}\\ -2 & t^2\end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}A(t)=\begin{bmatrix}1 & -e^{-t}\\ 0 & 2t\end{bmatrix} \quad , \quad \int A(t)dt=\begin{bmatrix}t+\frac{1}{2}t^2 & -e^{-t}\\ -2t & \frac{1}{3}t^3\end{bmatrix}$$

□

۱-۲-۸- اثر ماتریس مربعی

اثر[۱] یک ماتریس مربعی مانند $A_{n\times n}$ بصورت زیر تعریف می شود،

$$\mathrm{trace}(A)=\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii} \qquad (۱-۳۰)$$

به عبارتی مجموع عناصر روی قطر اصلی خواهد بود.

نکته۱: برای ماتریس های $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$ داریم،

$$\mathrm{tr}(\alpha A)=\alpha\mathrm{tr}(A) \quad , \quad \mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)$$

برای ماتریس های $A_{n\times m}$ و $B_{m\times n}$ بدون توجه به اینکه $AB=BA$ و یا $AB\neq BA$ باشد داریم،

$$\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}b_{ji}$$

اگر $m=1$ باشد داریم،

$$\mathrm{tr}(AB)=BA$$

[۱] Trace

مثال ۱-۱۷

به موارد زیر توجه نمایید،

$$A=\begin{bmatrix}2&3&5\\1&4&2\\2&1&5\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad trace(A)=2+4+5=11$$

در نرم افزار MATLAB از دستور trace(A) برای محاسبه اثر ماتریس استفاده می شود،

```
A =[2 3 5;1 4 2;2 1 5];

trace(A)

ans =

    11
```

$$\left.\begin{array}{l}A=\begin{bmatrix}1&0&5\\2&-4&7\end{bmatrix}\\ B=\begin{bmatrix}1&2\\-8&6\\3&-4\end{bmatrix}\end{array}\right\}\rightarrow\quad\left\{\begin{array}{l}AB=\begin{bmatrix}16&-18\\55&-48\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad trace(AB)=16-48=-32\\ BA=\begin{bmatrix}5&-8&19\\4&-24&2\\-5&16&-13\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad trace(BA)=5-24-13=-32\end{array}\right.$$

مشخص است که $tr(AB)=tr(BA)$ می باشد. با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[1 0 5;2 -4 7];

B =[1 2;-8 6;3 -4];

trace(A*B)

ans =

   -32

trace(B*A)

ans =

   -32
```

□

۱-۲-۹- دترمینان ماتریس ها

برای هر ماتریس مربعی مانند $A_{n\times n}$ عددی را به عنوان **دترمینان**[۱] می توان نسبت داد که بصورت زیر تعریف می گردد،

$$\det(A)=|A|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij})\qquad(۳۱-۱)$$

[۱] Determinant

A_{ij} یک ماتریس مربعی $(n-1)\times(n-1)$ است که از حذف سطر iام و ستون j ام در ماتریس $A_{n\times n}$ بدست می آید.

با توجه به تعریف بالا دترمینان ماتریس های 2×2، 3×3 و 4×4 بصورت زیر قابل بیان هستند،

- برای یک ماتریس 2×2 داریم،

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \qquad (۳۲-۱)$$

مثال ۱-۱۸

دترمینان ماتریس $A_{2\times2}$ زیر را بدست آورید،

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad |A|=1\times4-2\times3=-2$$

با استفاده از دستور det(A) نرم افزار MATLAB می توان دترمینان ماتریس را محاسبه نمود،

```
A =[1 2;3 4];
det(A)
ans =
    -2
```

□

- برای یک ماتریس 3×3 داریم،

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (۳۳-۱)$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

مثال ۱-۱۹

دترمینان ماتریس $A_{3\times3}$ زیر را بدست آورید،

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad |A|=2(20-2)-3(5-4)+5(1-8)=36-3-35=-2$$

□

- برای یک ماتریس 4×4 داریم،

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| = &\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (۳۴\text{-}۱)$$

به این رابطه **بسط لاپلاس**[۱] گویند.

مثال ۱-۲۰

دترمینان ماتریس $A_{4\times 4}$ زیر را بدست آورید،

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 8 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (5\times 40) - (-7\times 0) + (-4\times(-16)) + (-16\times 0) - (-7\times(-40)) + (-3\times 0) = -16$$

□

۱-۲-۱۰- خواص دترمینان

دترمینان یک ماتریس مربعی $n\times n$ دارای خواص زیر است،

۱- اگر جای دو سطر (یا دو ستون) دترمینان با یکدیگر تعویض شوند، تنها علامت دترمینان تغییر خواهد کرد.

[۱] Laplace's Expansion

مثال ۱-۲۱

ماتریس A را در نظر بگیرید، با تعویض سطر دوم و سوم آن ماتریس B بدست خواهد آمد، که دترمینان آن منفی دترمینان ماتریس A است.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad |A|=-2$$

تعویض سطر دوم و سوم: $r_2 \leftrightarrow r_3$

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad |B|=2(2-20)-3(4-5)+5(8-1)=-36+3+35=2$$

در نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[2  3  5;1  4  2;2  1  5];
det(A)
ans =
    -2
B = A([1 3 2],:)
B =
     2     3     5
     2     1     5
     1     4     2
det(B)
ans =
     2
```

□

۲- اگر یک سطر(یا یک ستون) دترمینان را با یک سطر(یا یک ستون) دیگر جمع کنیم مقدار دترمینان تغییر نمی کند.

مثال ۱-۲۲

ماتریس A را در نظر بگیرید، سطر دوم را با سطر اول جمع می کنیم تا ماتریس B بدست آید، که دترمینان آن همان دترمینان ماتریس A است.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 5\\ 1 & 4 & 2\\ 2 & 1 & 5\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad |A|=-2$$

سطر دوم را با سطر اول جمع می کنیم و در جایگزین سطر دوم می کنیم: $r_1+r_2 \rightarrow r_2$

$$B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 5\\ 3 & 7 & 7\\ 2 & 1 & 5\end{bmatrix} \rightarrow \quad |B|=2(35-7)-3(15-14)+5(3-14)=56-3-55=-2$$

در نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[2 3 5;1 4 2;2 1 5];
det(A)
ans =
    -2
B =[A(1,:);A(1,:)+A(2,:);A(3,:)]
B =
     2     3     5
     3     7     7
     2     1     5
det(B)
ans =
    -2
```

□

۳- اگر یک ماتریس دو سطر(یا دو ستون) یکسان داشته باشد، آنگاه دترمینان آن صفر است.

مثال ۱-۲۳

دترمینان ماتریس زیر را محاسبه کنید،

$$A=\begin{bmatrix}1 & 6 & 1\\ -5 & 0 & -5\\ 3 & 2 & 3\end{bmatrix} \rightarrow \quad |A|=1(0+10)-6(-15+15)+1(-10-0)=10-10=0$$

□

۴- دترمینان حاصلضرب دو ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$ برابر حاصلضرب دترمینان های آنها است،

$$|AB|=|A||B|=|BA|$$

۵- اگر در یک ماتریس یک سطر (یا یک ستون) در یک عدد اسکالر k ضرب شود، آنگاه دترمینان آن ماتریس در k ضرب می شود.

۶- اگر تمامی درایه های یک ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ در عدد اسکالر k ضرب شوند، آنگاه دترمینان آن ماتریس در k^n ضرب خواهد شد،

$$|kA| = k^n |A|$$

مثال۱-۲۴

صحت تساوی زیر را نشان دهید،

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

برای این منظور با توجه به خاصیت دوم مطرح شده برای دترمینان ها، از ترکیب سطرهای ماتریس A استفاده می نماییم،

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} -ar_2 + r_3 \to r_3 \\ -ar_1 + r_2 \to r_2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-ab & c^2-ac \end{vmatrix}$$

$$-br_2 + r_3 \to r_3 \quad \Rightarrow \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & c^2-ac-bc+ba \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & (c-b)(c-a) \end{vmatrix}$$

$$|A| = (b-a)(c-b)(c-a)$$

□

۱-۲-۱۱- ماتریس های منفرد، غیر منفرد و ماتریس معکوس

یک ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ را ماتریس **غیرمنفرد**[۱] یا **ناویژه** گویند، اگر یک ماتریسی مانند $B_{n\times n}$ چنان وجود داشته باشد، که $AB = BA = I$ باشد، آن ماتریس را با نماد A^{-1} نشان داده و به آن **معکوس**[۲] ماتریس A می گویند. اگر A^{-1} وجود نداشته باشد، ماتریس A را **منفرد**[۳] یا **ویژه** گویند.

نکته۱: ماتریس معکوس A^{-1} زمانی وجود دارد که $|A|$ غیر صفر باشد.

نکته۲: اگر ماتریس های مربعی $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$ غیرمنفرد باشند، آنگاه حاصلضرب AB نیز یک ماتریس غیرمنفرد است و $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ می باشد.

نکته۳: اگر k یک عدد اسکالر غیر صفر و ماتریس $A_{n\times n}$ غیرمنفرد باشد، آنگاه داریم،

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1} \qquad , \qquad (A^{-1})^{-1} = A$$

نکته۴: دترمینان ماتریس معکوس A^{-1} همان معکوس دترمینان A است،

$$\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|} \qquad \rightarrow \qquad \left|AA^{-1}\right| = |A|\left|A^{-1}\right| = 1$$

نکته۵: اگر ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ غیرمنفرد باشد، می توان یک جواب منحصربفرد برای حل آن بصورت زیر بدست آورد،

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

با توجه به تعاریف بالا معکوس ماتریس های 2×2 و 3×3 بصورت زیر قابل بیان هستند.

- برای یک ماتریس غیرمنفرد 2×2 داریم،

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} (-1)^{1+1}a_{22} & (-1)^{1+2}a_{12} \\ (-1)^{2+1}a_{21} & (-1)^{2+2}a_{11} \end{bmatrix} \qquad (۱-۳۵)$$

در رابطه فوق $adj(A)$ **ماتریس الحاقی**[۴] است، که هر عنصر ترانهاده آن از دترمینان ماتریس متناظر با حذف سطر iام و ستون j ام بدست آمده است.

[۱] Nonsingular
[۲] Inverse
[۳] Singular
[۴] Adjoint

مثال ۱-۲۵

معکوس ماتریس $A_{2\times 2}$ زیر را بدست آورید،

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{bmatrix}$$

دستور inv(A) در نرم افزار MATLAB برای محاسبه معکوس ماتریس بکار می رود،

```
A =[1 2;3 4];
inv(A)
ans =
   -2.0000    1.0000
    1.5000   -0.5000
```

□

- برای یک ماتریس غیرمنفرد 3×3 داریم،

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} \rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\end{bmatrix} \tag{۱-۳۶}$$

مثال ۱-۲۶

معکوس ماتریس $A_{3\times 3}$ زیر را بدست آورید،

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 3\\ -2 & 3 & 0\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad |A|=1(0-9)-1(0+6)+2(9-0)=3$$

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}0 & 3\\ 3 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}3 & 3\\ -2 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}3 & 0\\ -2 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-9 & 6 & 3\\ -6 & 4 & 3\\ 9 & -5 & -3\end{bmatrix}$$

□

بدست آوردن ماتریس الحاقی نیز یکی دیگر از مواردی است که کاربرد زیادی در جبر خطی دارد، برای این منظور می توان تابع adj را بصورت زیر تعریف کرد،

```
function B = adj(A).
[m,n] = size(A);
if m ~= n
   error('Matrix must be square')
end
if det(A) == 0
   warning('Matrix is singular')
end
B = [];
for k = 1:n
   for l = 1:n
      B = [B;cofact(A,k,l)];
   end
end
B = reshape(B,n,n);
```

تابع cofact استفاده شده در برنامه بالا به شرح زیر می باشد،

```
function ckl = cofact(A,k,l)
% Cofactor ckl of the a_kl entry of the matrix A.
[m,n] = size(A);
if m ~= n
   error('Matrix must be square')
   15
end
B = A([1:k-1,k+1:n],[1:l-1,l+1:n]);
ckl = (-1)^(k+l)*det(B);
```

اجرای برنامه بصورت زیر می باشد،

```
A =[8 1 6;3 5 7;4 9 2];
adj(A)
ans =
       -53     52    -23
        22     -8    -38
         7    -68     37
```

همچنین برای ماتریس های پارامتری هم قابل استفاده می باشد،

$$A=\begin{bmatrix}8-\lambda & 3 & 4\\ 1 & 5-\lambda & 9\\ 6 & 7 & 2-\lambda\end{bmatrix}$$

```
λ = sym(' λy);
A =[8 - l 1 6; 3 5 - l 7;4  9 2 - l];
det(A)
ans  =
- 360 + 24 * l + 15 * l^2 - l^3
adj(A)
ans  =
[ - 53 - 7 * λ + λ^2,            52 + λ,         - 23 + 6 * λ]
[         22 + 3 * λ,  - 8 - 10 * λ + λ^2,        - 38 + 7 * λ]
[          7 + 4 * λ,         - 68 + 9 * λ,   37 - 13 * λ + λ^2]
```

مثال۱-۲۷

ثابت کنید برای ماتریس غیرمنفرد A داریم،

$$A(\mathrm{adj}(A))=(\mathrm{adj}(A))A=(\det(A))I$$

رابطه بالا به شکل زیر قابل اثبات است،

$$\begin{cases}AA^{-1}=I\rightarrow A(\dfrac{\mathrm{adj}(A)}{\det(A)})=I\overset{\det(A)\neq 0}{\rightarrow}A(\mathrm{adj}(A))=(\det(A))I\\ A^{-1}A=I\rightarrow (\dfrac{\mathrm{adj}(A)}{\det(A)})A=I\overset{\det(A)\neq 0}{\rightarrow}(\mathrm{adj}(A))A=(\det(A))I\end{cases}$$

□

مثال۱-۲۸

با محاسبه دترمینان و ماتریس الحاقی معکوس ماتریس A را محاسبه نمایید، سپس با استفاده از آن پاسخ دستگاه معادلات زیر را بیابید.

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 3\\ 5\end{bmatrix}$$

برای ماتریس A صحت رابطه زیر را بررسی نمایید،

$$\det(A)=\frac{1}{3!}(\mathrm{tr}(A)^3-3\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(A^2)+2\mathrm{tr}(A^3))$$

ابتدا مقدار دترمینان و ماتریس الحاقی را بدست می آوریم،

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -5\end{vmatrix}=1(5-2)-3(-10+1)-1(4-1)=27$$

$$\mathrm{adj}(A)=\begin{bmatrix}3 & 13 & 2\\ 9 & -6 & -3\\ 3 & -5 & -7\end{bmatrix}$$

حال با استفاده از تعریف ماتریس معکوس را محاسبه نموده و دستگاه معادلات را حل می نماییم،

$$A^{-1}=\frac{\mathrm{adj}(A)}{\det(A)}=\frac{1}{27}\begin{bmatrix}3 & 13 & 2\\ 9 & -6 & -3\\ 3 & -5 & -7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{9} & \frac{13}{27} & \frac{2}{27}\\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{9} & \frac{-1}{9}\\ \frac{1}{9} & \frac{-5}{27} & \frac{-7}{27}\end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}\quad\rightarrow\quad\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}=\begin{bmatrix}\frac{1}{9} & \frac{13}{27} & \frac{2}{27}\\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{9} & \frac{-1}{9}\\ \frac{1}{9} & \frac{-5}{27} & \frac{-7}{27}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad\mathbf{x}=\begin{bmatrix}\frac{52}{27}\\ \frac{-8}{9}\\ \frac{-47}{27}\end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A = [1  3  -1; 2  -1  1; -1  2  -5];
b = [1; 3; 5];
x = inv(A) * b
x =
   1.9259
  -0.8889
  -1.7407
```

حال برای ماتریس A صحت رابطه زیر را بررسی می نماییم،

$$\det(A)=\frac{1}{3!}(\mathrm{tr}(A)^3-3\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(A^2)+2\mathrm{tr}(A^3))$$

$$\det(A)=27,\quad \mathrm{tr}(A)=-5,\quad \mathrm{tr}(A^2)=45,\quad \mathrm{tr}(A^3)=-194$$

$$\frac{1}{3!}(\mathrm{tr}(A)^3-3\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(A^2)+2\mathrm{tr}(A^3))$$
$$=\frac{1}{6}((-5)^3-3(-5)(45)+2(-194))=\frac{1}{6}(-125+675-388)=27=\det(A)$$

□

۱-۲-۱۲- نُرم ماتریس ها

نُرم یک ماتریس حداکثر بزرگنمایی یا بهره آن را تحت چنین تبدیلی نشان می دهد،

$$\mathbf{x} \longrightarrow \boxed{A} \longrightarrow A\mathbf{x}$$

تابع $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ را می توان بصورت نگاشتی در نظر گرفت که یک بردار nبعدی $\mathbf{x}$ را بر روی یک بردار mبعدی $\mathbf{y}$ می نگارد. لذا نسبت $\|A\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ را می توان به عنوان بهره یا بزرگنمایی اپراتور f در جهت بردار $\mathbf{x}$ تعریف کرد،

$$gain(\mathbf{x}) = \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \qquad (۱-۳۷)$$

بدیهی است که این بهره می تواند مقداری بزرگ، کوچک حتی صفر باشد. حال می توان نُرم یک ماتریس را بصورت بزرگترین بهره قابل دسترسی از بین تمامی بردارهای $\mathbf{x}$ دانست که در اختیار داریم،

$$\|A\| = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} gain(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \qquad (۱-۳۸)$$

لذا اگر $\|A\| << 1$ باشد، در اینصورت برای تمامی $\mathbf{x} \neq 0$ خواهیم داشت، $\|A\mathbf{x}\| << \|\mathbf{x}\|$ یعنی تابع f بردار $\mathbf{x}$ را شدیداً تضعیف می نماید و اگر $\|A\|$ مقدار بزرگی داشته باشد $gain(\mathbf{x})$ هم مقدار بزرگی خواهد بود.

مثال۱-۲۹

به مثال های زیر توجه نمایید،

1. $$A = 0 \rightarrow A\mathbf{x} = 0 \quad \rightarrow \quad \|A\| = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{0}{\|\mathbf{x}\|} = 0$$

2. $$A = I \rightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{x} \quad \rightarrow \quad \|A\| = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = 1$$

3. $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow A\mathbf{x} = [x_2, -x_3, x_1] \rightarrow \|A\mathbf{x}\| = \sqrt{x_2^2 + x_3^2 + x_1^2} \rightarrow \|A\| = 1$$

4. $$A=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}_{m\times 1} ,\|x\|=|x| \quad \rightarrow \quad A\mathbf{x}=\begin{bmatrix} a_1 x \\ a_2 x \\ \vdots \\ a_m x \end{bmatrix}$$

$$\|A\mathbf{x}\|=|x|\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_m^2} \quad \rightarrow \quad \|A\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_m^2}$$

5. $$A=\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad A\mathbf{x}=[\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_n x_n]$$

$$\|A\|=\max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\sqrt{\alpha_1^2 x_1^2+\alpha_2^2 x_2^2+\cdots+\alpha_n^2 x_n^2}}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}}=\max\{|\alpha_1|,|\alpha_2|,\ldots,|\alpha_n|\}$$

برای اثبات، فرض کنید داریم،

$$\alpha_1^2 \geq \alpha_2^2 \geq \cdots \geq \alpha_n^2 \quad \Rightarrow \quad |\alpha_1|=\max_i\{|\alpha_i|\}$$

از آنجاییکه $\mathbf{x}\neq 0$ است، می توان نوشت،

$$\alpha_1^2 x_1^2+\alpha_2^2 x_2^2+\cdots+\alpha_n^2 x_n^2 \leq \alpha_1^2(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)$$

$$\sqrt{\alpha_1^2 x_1^2+\alpha_2^2 x_2^2+\cdots+\alpha_n^2 x_n^2} \leq |\alpha_1|\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$$

$$\frac{\sqrt{\alpha_1^2 x_1^2+\alpha_2^2 x_2^2+\cdots+\alpha_n^2 x_n^2}}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}} \leq |\alpha_1|$$

بنابراین داریم،

$$\max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}}\left\{\frac{\sqrt{\alpha_1^2 x_1^2+\alpha_2^2 x_2^2+\cdots+\alpha_n^2 x_n^2}}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}}\right\}=|\alpha_1| \rightarrow \|A\|=\max\{|\alpha_1|,|\alpha_2|,\ldots,|\alpha_n|\}$$

□

برای نُرم ماتریس تعاریف مختلفی وجود دارد که به برخی از آنها اشاره می کنیم.

۱- برای یک ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ یک نُرم که به نُرم p معروف است، بصورت زیر تعریف شود،

$$\|A\|_p = \max_{\|\mathbf{x}\|_p=1} \frac{\|A\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p} = \max_{\|\mathbf{x}\|_p=1} \|A\mathbf{x}\|_p \qquad , \qquad p \ge 1 \tag{۳۹-۱}$$

۲- در تعریف قبل به ازای $p=1$ داریم،

$$\|A\|_1 = \max_{\|\mathbf{x}\|_1=1} \|A\mathbf{x}\|_1 = \max_j (\sum_i^n |a_{ij}|) \tag{۴۰-۱}$$

که در واقع همان بزرگترین مقدار مجموع قدر مطلق های عناصر ستون های ماتریس است.

۳- برای $p=2$ نُرم به شکل زیر تعریف می گردد،

$$\|A\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|A\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}} \tag{۴۱-۱}$$

در اینجا $\lambda_{\max}$ بزرگترین مقدار عددی است، که سبب می شود ماتریس $A^T A - \lambda I$ منفرد گردد.
می توان نشان داد که،

$$\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\min_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|A\mathbf{x}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}}} \tag{۴۲-۱}$$

در آن، $\lambda_{\min}$ کوچکترین مقدار عددی است، که به ازای آن ماتریس $A^T A - \lambda I$ منفرد می گردد.

۴- برای حالتیکه $p=\infty$ باشد نُرم به شکل زیر تعریف می گردد،

$$\|A\|_\infty = \max_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1} \|A\mathbf{x}\|_\infty = \max_i (\sum_j^n |a_{ij}|) \tag{۴۳-۱}$$

که در واقع همان بزرگترین مقدار مجموع قدر مطلق عناصر سطر های ماتریس است.

۵- یک تعریف دیگری از نُرم ماتریس $A_{m\times n}$ که به **نُرم فروبنیوس**[۱] معروف است، بدین صورت تعریف می گردد،

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \tag{۴۴-۱}$$

همچنین می توان نوشت،

$$\|A\|_F = \sqrt{trace(A^T A)} \tag{۴۵-۱}$$

[۱] Frobenius Norm

تمامی تعریف های داده شده برای نُرم یک ماتریس $A_{n\times n}$ دارای خواص زیر است،

1. $\|A\| = \|A^*\|, \quad \|A\| = \|A^T\|$
2. $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$
3. $\|AB\| \le \|A\| \ \|B\|$
4. $\|A\mathbf{x}\| \le \|A\| \ \|\mathbf{x}\|$
5. $\|kA\| = |k| \ \|A\|$
6. $\|A\| \ge 0 \quad , \quad \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = \mathbf{0}$

مثال۱-۳۰

برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ داریم،

$$\|A\|_1 = \max_j\left(|a_{1j}| + |a_{2j}|\right) = \max\left(|a_{11}| + |a_{21}|, |a_{12}| + |a_{22}|\right) = \max(|-6| + |-2|, |4| + |0|) = 8$$

$$\|A\|_\infty = \max_i\left(|a_{i1}| + |a_{i2}|\right) = \max\left(|a_{11}| + |a_{12}|, |a_{21}| + |a_{22}|\right) = \max\left(|-6| + |4|, |-2| + |0|\right) = 10$$

$$\|A\|_F = \left(|a_{11}|^2 + |a_{21}|^2 + |a_{12}|^2 + |a_{22}|^2\right)^{1/2} = \sqrt{|-6|^2 + |-2|^2 + |4|^2 + |0|^2} = \sqrt{56}$$

$$\|B\|_1 = \max_j\left(|b_{1j}| + |b_{2j}|\right) = \max\left(|b_{11}| + |b_{21}|, |b_{12}| + |b_{22}|\right) = \max(|2| + |-3|, |1| + |5|) = 6$$

$$\|B\|_\infty = \max_i\left(|b_{i1}| + |b_{i2}|\right) = \max\left(|b_{11}| + |b_{12}|, |b_{21}| + |b_{22}|\right) = \max\left(|2| + |1|, |-3| + |5|\right) = 8$$

$$\|B\|_F = \left(|b_{11}|^2 + |b_{21}|^2 + |b_{12}|^2 + |b_{22}|^2\right)^{1/2} = \sqrt{|2|^2 + |-3|^2 + |1|^2 + |5|^2} = \sqrt{39}$$

برای محاسبه $\|A\|_2$ و $\|A^{-1}\|_2$ ابتدا از رابطه $A^*A - \lambda I$ مقدار $\lambda_{\max}$ و $\lambda_{\min}$ را محاسبه می کنیم،

$$A^T A - \lambda I = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40-\lambda & -24 \\ -24 & 16-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\left|A^T A - \lambda I\right| = (40-\lambda)(16-\lambda) - 576 = 0 \rightarrow \lambda = \{28 + 6\sqrt{5}, 28 - 6\sqrt{5}\}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{28 + 6\sqrt{5}} \quad , \quad \|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sqrt{28 - 6\sqrt{5}}}$$

$$B^T B-\lambda I=\begin{bmatrix}2&-3\\1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\-3&5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13-\lambda&-13\\-13&26-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\left|B^T B-\lambda I\right|=(13-\lambda)(26-\lambda)-169=0\rightarrow\lambda=\{19.5+6.5\sqrt{5},19.5-6.5\sqrt{5}\}$$

$$\left\|B\right\|_2=\sqrt{19.5+6.5\sqrt{5}}\qquad,\qquad\left\|B^{-1}\right\|_2=\frac{1}{\sqrt{19.5-6.5\sqrt{5}}}$$

با استفاده از دستور norm(A,p) در نرم افزار MATLAB می توان نُرم p ماتریس را بدست آورد،

```
A =[-6 4;-2 0];
norm(A,1)
ans =
     8
norm(A,inf)
ans =
    10
norm(A,'fro')
ans =
    7.4833
norm(A,2)
ans =
    7.4049
```

□

۱-۲-۱۳- روابط کاربردی از ماتریس های بلوکی و دترمینان ها

به ماتریس هایی که درایه های آنها خود ماتریس هستند، **ماتریس های بلوکی** گویند. در این مبحث چند رابطه کاربردی در رابطه با این ماتریس ها و دترمینان آنها ارائه شده است.

نکته۱: برای ماتریس های $A_{n\times n}$، $B_{n\times m}$، $C_{m\times n}$ و $D_{m\times m}$ روابط زیر برقرار هستند،

الف) اگر $|A|\neq 0$ و $|D|\neq 0$ باشند، داریم،

$$\begin{vmatrix}A&B\\0&D\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A&0\\C&D\end{vmatrix}=|A||D| \qquad (۴۶-۱)$$

اثبات: از آنجائیکه ماتریس $A_{n\times n}$ غیرمنفرد است، داریم،

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & A^{-1}B \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & I_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_n & 0 \\ 0 & D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_n & A^{-1}B \\ 0 & I_m \end{vmatrix} = |A||I_m||I_n||D||I_n||I_m| = |A||D|$$

بطور مشابه از آنجائیکه ماتریس $D_{m\times m}$ غیرمنفرد است، قسمت دوم نیز قابل اثبات می باشد.

ب) اگر $|A|=0$ یا $|D|=0$ یا $|A|=|D|=0$ باشند، داریم،

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ C & D \end{vmatrix} = 0 \qquad (۴۷-۱)$$

ج) اگر $|A|\neq 0$ باشد، آنگاه،

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D-CA^{-1}B| \qquad (۴۸-۱)$$

اثبات: اگر $|A|\neq 0$ باشد می توان نوشت،

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & A^{-1}B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ C & I_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_n & A^{-1}B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{vmatrix}$$

$$= |A||I_m||I_n||D-CA^{-1}B| = |A||D-CA^{-1}B|$$

د) اگر $|D|\neq 0$ باشد، آنگاه،

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |D||A-BD^{-1}C| \qquad (۴۹-۱)$$

اثبات: اگر $|D|\neq 0$ باشد می توان نوشت،

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & B \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A-BD^{-1}C & 0 \\ D^{-1}C & I_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & B \\ 0 & D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A-BD^{-1}C & 0 \\ D^{-1}C & I_m \end{vmatrix} = |I_n||D||A-BD^{-1}C||I_m| = |D||A-BD^{-1}C|$$

ه) اگر $|A| \neq 0$ و $|D| \neq 0$ باشند، داریم،

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix} \qquad (۵۰\text{-}۱)$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix} \qquad (۵۱\text{-}۱)$$

اثبات: برای رابطه اول می توان نوشت،

$$\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -D^{-1}C + D^{-1}C & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ CA^{-1} - CA^{-1} & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

بطور مشابه برای رابطه دوم داریم،

$$\begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & A^{-1}B - A^{-1}B \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & -BD^{-1} + BD^{-1} \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

نکته۲: برای ماتریس های $A_{n\times m}$ و $B_{m\times n}$ با فرض اینکه I_n و I_m به ترتیب ماتریس های واحد $n\times n$ و $m\times m$ باشند، روابط زیر برقرار است،

الف)

$$|I_n + AB| = |I_m + BA| \qquad (۵۲\text{-}۱)$$

اثبات: ماتریس زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{bmatrix} I_n & -A \\ B & I_m \end{bmatrix}$$

با توجه به روابط قبل می توان نوشت،

$$\begin{vmatrix} I_n & -A \\ B & I_m \end{vmatrix} = |I_n||I_m + BA| = |I_m + BA|$$

$$\begin{vmatrix} I_n & -A \\ B & I_m \end{vmatrix} = |I_m||I_n + AB| = |I_n + AB|$$

از این رو داریم،

$$\left|I_n + AB\right| = \left|I_m + BA\right|$$

ب) اگر $m=1$ باشد و ماتریس های $A_{n\times 1}$ و $B_{1\times n}$ باشند،

$$\left|I_n + AB\right| = 1 + BA \qquad (۵۳\text{-}۱)$$

ج) اگر $\left|I_n + AB\right| \neq 0$ باشد، آنگاه،

$$(I_n + AB)^{-1} = I_n - A(I_m + BA)^{-1}B \qquad (۵۴\text{-}۱)$$

اثبات: ابتدا طرفین معادله را در $(I_n + AB)$ ضرب می کنیم،

$$(I_n + AB)(I_n + AB)^{-1} = (I_n + AB)I_n - (I_n + AB)A(I_m + BA)^{-1}B$$

به این ترتیب داریم،

$$\begin{aligned} I_n &= I_n + AB - (A + ABA)(I_m + BA)^{-1}B \\ &= I_n + AB - A(I_m + BA)(I_m + BA)^{-1}B \\ &= I_n + AB - AB \\ &= I_n \end{aligned}$$

رابطه مذکور حالت خاصی از **لم معکوس سازی ماتریس**[۱] است که در ادامه بیان شده است.

نکته۳: برای ماتریس های $A_{n\times n}$، $B_{n\times m}$، $C_{m\times n}$ و $D_{m\times m}$ با فرض اینکه معکوس های نشان داده شده وجود دارند، **لم معکوس سازی ماتریس** بصورت زیر برقرار است،

$$(A + BDC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(D^{-1} + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \qquad (۵۵\text{-}۱)$$

اثبات: ابتدا طرفین معادله را در $(A + BDC)$ ضرب می کنیم،

$$(A + BDC)(A + BDC)^{-1} = (A + BDC)[A^{-1} - A^{-1}B(D^{-1} + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}]$$

در اینصورت داریم،

$$\begin{aligned} I &= (A + BDC)A^{-1} - (A + BDC)A^{-1}B(D^{-1} + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \\ &= I + BDCA^{-1} - (B + BDCA^{-1}B)(D^{-1} + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \\ &= I + BDCA^{-1} - BD(D^{-1} + CA^{-1}B)(D^{-1} + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \\ &= I + BDCA^{-1} - BDCA^{-1} = I \end{aligned}$$

[۱] Matrix Inversion Lemma

مثال۱-۳۱

اگر بتوان ماتریس A را بصورت زیر تفکیک کرد، $|A|$ را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & -3 & -4 & -5 \\ 4 & 8 & 13 & 16 & 20 \\ 2 & 4 & 6 & 9 & 10 \\ 8 & 16 & 24 & 32 & 41 \end{bmatrix} = I_5 + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

برای محاسبه $|A|$ از رابطه زیر استفاده می نماییم،

$$|I_n + AB| = 1 + BA \quad , \quad A_{n\times 1}, B_{1\times n}$$

لذا داریم،

$$|A| = |I_5 + GH| = 1 + HG = 1 + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} = 58$$

در نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[0 -2 -3 -4 -5;-1 -1 -3 -4 -5;4 8 13 16 20;2 4 6 9 10;8 16 24 32 41];
det(A)
ans =
    58
```

□

۱-۲-۱۴- ماتریس مختلط و ماتریس مختلط مزدوج

ماتریس **مختلط**[1] ماتریسی است که همه یا برخی از عناصر آن اعداد مختلط باشند.

مثال ۱-۳۲

ماتریس A در زیر نمونه ای از یک ماتریس مختلط است،

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1+j & -1 & -2+3j \\ -1+4j & 3-3j & -2 \end{bmatrix}$$

[1] Complex

در نرم افزار MATLAB برای نوشتن اعداد مختلط می توان از نماد i و j استفاده نمود و بین این نماد و اعداد نباید علامت ضرب قرار داد،

```
A =[0  1  3;-1+j  -1  -2+3j;-1+4j  3-3j  -2]
A =
        0                1.0000              3.0000
  -1.0000 + 1.0000i  -1.0000            -2.0000 + 3.0000i
  -1.0000 + 4.0000i   3.0000 - 3.0000i  -2.0000
```

□

مزدوج[۱] ماتریس مختلط A ماتریس است که هر یک از درایه های آن مزدوج مختلط درایه های متناظر در ماتریس مختلط A باشد. مزدوج ماتریس مختلط A را با $\overline{A}=\left[\overline{a}_{ij}\right]$ نشان می دهند، که در آن $\overline{a}_{ij}$ مزدوج مختلط a_{ij} است.

مثال ۱-۳۳

مزدوج ماتریس مختلط A بصورت زیر بیان می گردد،

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1+j & -1 & -2+3j \\ -1+4j & 3-3j & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \overline{A}=[\overline{a}_{ij}]=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1-j & -1 & -2-3j \\ -1-4j & 3+3j & -2 \end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[0 1 3;-1+j -1 -2+3j;-1+4j 3-3j -2];
(A.')'
ans =
        0                1.0000              3.0000
  -1.0000 - 1.0000i  -1.0000            -2.0000 - 3.0000i
  -1.0000 - 4.0000i   3.0000 + 3.0000i  -2.0000
```

□

[۱] Conjugated

۱-۲-۱۵- ماتریس ترانهاده و ماتریس ترانهاده مزدوج

اگر جای سطرها و ستون های یک ماتریس $A_{n\times m}$ با یکدیگر عوض شوند، یک ماتریس $m\times n$ حاصل می شود که آن را ماتریس **ترانهاده**[۱] $A_{n\times m}$ می نامند و با نماد A^T نشان می دهند.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (۱-۵۶)$$

نکته۱: بدیهی است که $(A^T)^T = A$ می باشد.

نکته۲: در صورتیکه $A+B$ و AB قابل تعریف باشند،

$$(A+B)^T = A^T + B^T \quad , \quad (AB)^T = B^T A^T$$

نکته۳: برای یک ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ همواره $\left|A^T\right| = |A|$ و $\mathrm{tr}(A^T)=\mathrm{tr}(A)$ می باشد.

نکته۴: برای ماتریس غیرمنفرد $A_{n\times n}$ همواره $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ است.

ماتریس **ترانهاده مزدوج**[۲]، همان مزدوج ترانهاده یک ماتریس است. برای یک ماتریس $A=[a_{ij}]$ ، ترانهاده مزدوج با نماد $\overline{A}^T$ یا A^* نشان داده می شود.

مثال ۱-۳۴

ترانهاده مزدوج ماتریس مختلط A بصورت زیر بدست می آید،

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1+j & -1 & -2+3j \\ -1+4j & 3-3j & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \overline{A}^T = A^* = [\overline{a}_{ji}] = \begin{bmatrix} 0 & -1-j & -1-4j \\ 1 & -1 & 3+3j \\ 3 & -2-3j & -2 \end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[0 1 3;-1 + j -1 - 2 + 3j;-1 + 4j 3 - 3j - 2];
A'
ans =
        0            -1.0000 - 1.0000i  -1.0000 - 4.0000i
   1.0000            -1.0000              3.0000 + 3.0000i
   3.0000            -2.0000 - 3.0000i  -2.0000
```

---

[۱] Transposed
[۲] Conjugate Transposed

```
  A.'

ans =

      0            -1.0000 + 1.0000i  -1.0000 + 4.0000i

   1.0000          -1.0000             3.0000 - 3.0000i

   3.0000          -2.0000 + 3.0000i  -2.0000
```

□

نکته۱: بدیهی است که مزدوج A^T همان ترانهاده $\overline{A}$ است و $(A^*)^* = A$ می باشد.

نکته۲: همچنین در صورتیکه $A+B$ و AB قابل تعریف باشند، آنگاه،

$$(A+B)^* = A^* + B^* \quad , \quad (AB)^* = B^* A^*$$

نکته۳: اگر c یک عدد مختلط باشد، آنگاه، $(cA)^* = \overline{c}A^*$ است.

نکته۴: در صورتیکه A یک ماتریس حقیقی باشد، آنگاه $A^T = A^*$ می باشد.

نکته۵: برای یک ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ همواره $\left|A^*\right| = \left|\overline{A}\right|$ می باشد.

نکته۶: برای ماتریس غیرمنفرد $A_{n\times n}$ همواره $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ است.

۱-۲-۱۶- ماتریس متقارن و ماتریس شبه متقارن

ماتریس متقارن[۱] ماتریسی است که ترانهاده اش با خودش برابر باشد. به عبارتی برای هر ماتریس متقارن A داریم،

$$A = A^T \quad , \quad a_{ij} = a_{ji} \tag{۵۷-۱}$$

اگر ماتریس A با منفی ترانهاده اش برابر باشد، آن را **ماتریس شبه متقارن**[۲] نامند،

$$A = -A^T \quad , \quad a_{ij} = -a_{ji} \tag{۵۸-۱}$$

نکته۱: بدیهی است که برای هر ماتریس مربعی A، حاصل $A+A^T$ یک ماتریس متقارن و $A-A^T$ یک ماتریس شبه متقارن است، به مثال زیر توجه نمایید،

مثال ۱-۳۵

برای ماتریس مربعی A بصورت زیر داریم،

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \quad A + A^T = \begin{bmatrix} 8 & -3 & 8 \\ -3 & 0 & 8 \\ 8 & 8 & 14 \end{bmatrix} \quad , \quad A - A^T = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 3 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

□

---

[۱] Symmetric
[۲] Skew-Symmetric

مثال۱- ۳۶

هر یک ماتریس های زیر را بصورت حاصل جمع یک ماتریس متقارن و شبه متقارن نمایش دهید.
ماتریس را می توان بصورت زیر تفکیک کرد، که در آن P ماتریس متقارن و Q ماتریس شبه متقارن است.

$$A = P + Q \quad , \quad P = \frac{1}{2}(A + A^T), \quad Q = \frac{1}{2}(A - A^T)$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Q = \frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad P = \frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & 8 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$Q = \frac{1}{2}(B - B^T) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad P = \frac{1}{2}(B + B^T) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 11 & 0 \\ 11 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

□

نکته۲: برای ماتریس $A_{m\times n}$، ماتریس $B = A^T A$ یک ماتریس متقارن خواهد بود.

$$B^T = (A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A = B$$

مثال ۱-۳۷

برای ماتریس A داریم،

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \\ 9 & 5 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 2 & 20 & -2 \\ 9 & -2 & 106 \end{bmatrix}$$

□

نکته۳: معکوس یک ماتریس متقارن، در صورتیکه وجود داشته باشد، یک ماتریس متقارن است.

$$AA^{-1} = I \rightarrow (A^{-1})^T A^T = I^T \underset{I=I^T}{\overset{A=A^T}{\rightarrow}} (A^{-1})^T A = I = A^{-1}A \rightarrow (A^{-1})^T = A^{-1}$$

۱-۲-۱۷- ماتریس هرمیتی و ماتریس شبه هرمیتی

اگر یک ماتریس مختلط A رابطه زیر را برآورده سازد آن را یک **ماتریس هرمیتی**[۱] گویند، که در آن $\overline{a}_{ji}$ مزدوج مختلط a_{ij} است.

$$A^* = A \quad , \quad a_{ij} = \overline{a}_{ji} \qquad (۱-۵۹)$$

نکته۱: ماتریس هرمیتی باید مربعی بوده و درایه های قطر اصلی آن صفر یا حقیقی باشند.

مثال ۱-۳۸

دو نمونه از ماتریس های هرمیتی در زیر آورده شده است،

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1-2j & 0 \\ 1+2j & 0 & -j \\ 0 & j & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1+j & 2j \\ 1-j & 5 & -3 \\ -2j & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

□

نکته۲: هر ماتریس هرمیتی را می توان بصورت $A = C + jD$ نمایش داد، که در آن C و D ماتریس های حقیقی با خواص زیر باشند،

$$C = C^T \quad , \quad D = -D^T$$

مثال ۱-۳۹

برای ماتریس A می توان نوشت،

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1-2j & 0 \\ 1+2j & 0 & -j \\ 0 & j & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \quad A = C + jD = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

□

نکته۳: معکوس یک ماتریس هرمیتی مانند ماتریس A باز هم هرمیتی است، به عبارتی $A^{-1} = (A^{-1})^*$ می باشد.

نکته۴: هر ماتریس مربعی را می توان بطور یکتا بصورت $A = G + jH$ بیان کرد، که در آن G و H ماتریس های هرمیتی هستند و با روابط زیر محاسبه می شوند،

$$G = \frac{1}{2}(A + A^*) \quad , \quad H = \frac{1}{2j}(A - A^*)$$

هرمیتی بودن ماتریس های G و H را می توان بصورت زیر نشان داد،

[۱] Hermitian

$$G^* = \frac{1}{2}(A^* + A) = G \quad , \quad H^* = -\frac{1}{2j}(A^* - A) = H$$

نکته۵: برای ماتریس های هرمیتی $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$، ماتریس های $A+B$، $A-B$ و $AB+BA$ نیز هرمیتی هستند.

$$\begin{matrix} A = A^* \\ B = B^* \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} 1.\ \ A \pm B = A^* \pm B^* = (A \pm B)^* \\ 2.\ \ AB + BA = A^*B^* + B^*A^* = (BA)^* + (AB)^* = (BA + AB)^* \end{cases}$$

نکته۶: دترمینان یک ماتریس هرمیتی همواره حقیقی است، زیرا $|A| = |A^*| = |\overline{A}|$ است.

اگر یک ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ رابطه زیر را برآورده سازد، آنگاه ماتریس A را یک **ماتریس شبه هرمیتی**[1] می نامند،

$$A^* = -A \quad , \quad a_{ij} = -\overline{a}_{ji} \qquad (۱-۶۰)$$

لازم به ذکر است که یک ماتریس شبه هرمیتی باید مربعی باشد و عناصر روی قطر اصلی آن موهومی یا صفر باشند.

مثال ۱-۴۰

ماتریس های زیر نمونه ای از ماتریس های شبه هرمیتی هستند،

$$A = \begin{bmatrix} j5 & -2+j3 & -4+j6 \\ 2+j3 & j4 & -2+j2 \\ 4+j6 & 2+j2 & j \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} j & 1+j & 2j \\ -1+j & 5j & 3 \\ 2j & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

□

نکته۱: هر ماتریس شبه هرمیتی مانند A را می توان بصورت $A = C + jD$ نمایش داد، که در آن C و D ماتریس های حقیقی با خواص زیر باشند،

$$C = -C^T \quad , \quad D = D^T$$

مثال ۱-۴۱

برای ماتریس A می توان نوشت،

$$A = \begin{bmatrix} j5 & -2+j3 & -4+j6 \\ 2+j3 & j4 & -2+j2 \\ 4+j6 & 2+j2 & j \end{bmatrix} \rightarrow A = C + jD = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} + j\begin{bmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

□

[1] Skew-Hermitian

۱-۲-۱۸- ماتریس یکین و ماتریس نرمال

ماتریس یکین[۱] ماتریس مختلطی است که در آن معکوس ماتریس برابر با مزدوج ترانهاده آن است. به عبارتی،

$$A^{-1} = A^* \tag{۱-۶۱}$$

مثال ۱-۴۲

ماتریس های زیر نمونه ای از ماتریس های یکین هستند،

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{15}}(2+j) & \frac{1}{\sqrt{15}}(3+j) \\ \frac{1}{\sqrt{15}}(-3+j) & \frac{1}{\sqrt{15}}(2-j) \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -j\frac{1}{\sqrt{2}} & j\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & j \end{bmatrix}$$

□

نکته۱: با توجه به تعریف ماتریس یکین $AA^* = A^*A = I$ می باشد.

نکته۲: قدرمطلق دترمینان یک ماتریس یکین مانند A برابر واحد است، یعنی $|\det(A)| = 1$ است.

نکته۳: اگر ماتریس A یکین باشد، آنگاه معکوس آن A^{-1} نیز یکین خواهد بود.

$$(A^{-1})^*(A^{-1}) = (A^*)^*(A^{-1}) = (A)(A^{-1}) = I$$

$$(A^{-1})(A^{-1})^* = (A^{-1})(A^*)^* = (A^{-1})(A) = I$$

نکته۴: اگر ماتریس های $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$ یکین باشند، آنگاه ماتریس AB نیز یکین خواهد بود.

$$(AB)(AB)^* = ABB^*A^* = AA^* = I$$

$$(AB)^*(AB) = B^*A^*AB = B^*B = I$$

نکته۵: در تبدیل های انجام شده توسط ماتریس های یکین نُرم بردار تغییر نمی یابد،

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

$$\|\mathbf{y}\|^2 = \|A\mathbf{x}\|^2 = (A\mathbf{x})^*(A\mathbf{x}) = \mathbf{x}^*A^*A\mathbf{x} = \mathbf{x}^*\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2$$

ماتریس مربعی را که با ترانهاده مزدوج خود جابجایی پذیر باشد، یک **ماتریس نرمال**[۲] گویند. بنابراین اگر ماتریس نرمال A مختلط باشد،

---

[۱] Unitary
[۲] Normal

$$AA^* = A^*A \qquad (۶۲-۱)$$

و اگر حقیقی باشد رابطه زیر بر قرار است.

$$AA^T = A^TA \qquad (۶۳-۱)$$

مثال ۱-۴۳

ماتریس زیر نمونه ای از یک ماتریس نرمال است،

$$A = \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & 3-j5 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & j \\ -j & 1 \end{bmatrix}$$

□

نکته۱: اگر A یک ماتریس نرمال و U یک ماتریس یکین باشد، آنگاه $U^{-1}AU$ نیز یک ماتریس نرمال است.

$$(U^{-1}AU)(U^{-1}AU)^* = U^{-1}AUU^*A^*(U^{-1})^* = U^{-1}AA^*(U^{-1})^* = U^*A^*AU$$
$$= U^*A^*(U^{-1})^*U^{-1}AU = (U^{-1}AU)^*(U^{-1}AU)$$

مثال۱-۴۴

ثابت کنید، یک ماتریس نرمال است اگر متقارن حقیقی یا هرمیتی یا شبه متقارن حقیقی یا شبه هرمیتی یا یکین و یا متعامد باشد.

با توجه به تعریف شرط نرمال بودن ماتریس $A_{n\times n}$ این است که، در ماتریس حقیقی $AA^T = A^TA$ و در ماتریس مختلط $AA^* = A^*A$ باشد.

۱- متقارن حقیقی $\leftarrow A^T = A$

$$\left.\begin{aligned} A^T = A \rightarrow AA^T = A^2 \\ A^T = A \rightarrow A^TA = A^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow AA^T = A^TA$$

۲- هرمیتی $\leftarrow A^* = A$

$$\left.\begin{aligned} A^* = A \rightarrow AA^* = A^2 \\ A^* = A \rightarrow A^*A = A^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow AA^* = A^*A$$

۳- شبه متقارن حقیقی $\leftarrow A^T = -A$

$$\left.\begin{aligned} A^T = -A \rightarrow AA^T = -A^2 \\ A^T = -A \rightarrow A^TA = -A^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow AA^T = A^TA$$

۴- شبه هرمیتی $\leftarrow A^* = -A$

$$\left.\begin{array}{l} A^* = -A \rightarrow AA^* = -A^2 \\ A^* = -A \rightarrow A^*A = -A^2 \end{array}\right\} \Rightarrow AA^* = A^*A$$

۵- یکین $\leftarrow A^{-1} = A^*$

$$\left.\begin{array}{l} A^* = A^{-1} \rightarrow AA^* = I \\ A^* = A^{-1} \rightarrow A^*A = I \end{array}\right\} \Rightarrow AA^* = A^*A$$

۶- متعامد $\leftarrow A^T A = AA^T = I$

$$AA^T = A^T A$$

□

مثال۱-۴۵

ثابت کنید، اگر A یک ماتریس شبه هرمیتی باشد، آنگاه U یک ماتریس یکین است.

$$U = (I - A)(I + A)^{-1} = (I + A)^{-1}(I - A)$$

طبق تعریف اگر ماتریس A شبه هرمیتی باشد، رابطه زیر برقرار است،

$$A^* = -A$$

با توجه به این نکته مسئله را حل می کنیم و نشان می دهیم که $U^{-1} = U^*$ است.

$$U^* = \left[(I - A)(I + A)^{-1}\right]^* = \left[(I + A)^{-1}\right]^*(I - A)^* = \left[(I + A)^*\right]^{-1}(I - A)^*$$
$$= \left[(I^* + A^*)\right]^{-1}(I^* - A^*) = (I - A)^{-1}(I + A) = \left[(I + A)^{-1}(I - A)\right]^{-1} = U^{-1}$$

لذا U ماتریس یکین است.

□

۱-۲-۱۹- ماتریس قطری و ماتریس مثلثی

ماتریس قطری[۱] ماتریس مربعی است که تمام درایه های آن به جز عناصر روی قطر اصلی همگی صفر هستند. فرم کلی یک ماتریس قطری به شکل زیر می باشد،

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad , \quad a_{ij} = 0, \quad i \neq j \qquad (۶۴-۱)$$

[۱] Diagonal

نکته۱: دترمینان یک ماتریس قطری برابر با حاصلضرب کلیه عناصر روی قطر اصلی می باشد،

$$|A| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

لذا ماتریس قطری A غیرمنفرد است، اگر هیچ یک از عناصر روی قطر اصلی آن صفر نباشند.

نکته۲: فرم دیگر نمایش ماتریس قطری به شکل زیر است،

$$diag(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$$

مثال۱-۴۶

ماتریس های زیر نمونه هایی از ماتریس های قطری می باشند،

$$A = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

□

از تابع diag می توان برای ایجاد یک ماتریس قطری استفاده کرد،

```
d = [1 2 3];
D = diag(d)
D =
     1    0    0
     0    2    0
     0    0    3
```

برای استخراج عناصر قطر اصلی ماتریس D بصورت زیر عمل می کنیم،

```
d = diag(D)
d =
     1
     2
     3
```

ماتریس های مثلثی را می توان به دو صورت **بالا مثلثی**[۱] و **پایین مثلثی**[۲] بیان کرد، شکل کلی یک ماتریس بالا مثلثی و پایین مثلثی بصورت زیر می باشد،

[۱] Upper Triangular
[۲] Lower Triangular

$$U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad , \quad U_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i \le j \\ 0 & i > j \end{cases} \tag{۱-۶۵}$$

$$L = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad , \quad L_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i \ge j \\ 0 & i < j \end{cases} \tag{۱-۶۶}$$

نکته۱: دترمینان یک ماتریس مثلثی برابر با حاصلضرب کلیه عناصر قطر اصلی می باشد،

$$|L| = |U| = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

لذا ماتریس مثلثی A غیرمنفرد است، اگر هیچ یک از عناصر روی قطر اصلی آن صفر نباشند.

مثال۱-۴۷

ماتریس های زیر نمونه ای از ماتریس بالا مثلثی و پایین مثلثی می باشد،

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ -1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

□

به عملکرد توابع triu و tril توجه نمایید،

```
A = rand(4)
A =
    0.9218    0.9355    0.0579    0.1389
    0.7382    0.9169    0.3529    0.2028
    0.1763    0.4103    0.8132    0.1987
    0.4057    0.8936    0.0099    0.6038
```

```
triu(A)

ans =

    0.9218    0.9355    0.0579    0.1389
         0    0.9169    0.3529    0.2028
         0         0    0.8132    0.1987
         0         0         0    0.6038

triu(A,1)

ans =

         0    0.9355    0.0579    0.1389
         0         0    0.3529    0.2028
         0         0         0    0.1987
         0         0         0         0


triu(A,2)

ans =

         0         0    0.0579    0.1389
         0         0         0    0.2028
         0         0         0         0
         0         0         0         0
tril(A)

ans =

    0.9218         0         0         0
    0.7382    0.9169         0         0
    0.1763    0.4103    0.8132         0
    0.4057    0.8936    0.0099    0.6038
tril(A,-1)

ans =

         0         0         0         0
    0.7382         0         0         0
    0.1763    0.4103         0         0
    0.4057    0.8936    0.0099         0
```

۱-۲-۲۰- ماتریس متعامد[1]

به ماتریس A **متعامد** گفته می شود، اگر حقیقی بوده و رابطه زیر را برآورده سازد،

$$A^T A = AA^T = I \qquad (۱-۶۷)$$

نکته۱: ستون های ماتریس متعامد بردارهای یکامتعامد هستند.

نکته۲: در یک ماتریس متعامد، بدیهی است که باید $|A| = \pm 1$ باشد و لذا ماتریس A غیر منفرد است.

نکته۳: در یک ماتریس متعامد معکوس ماتریس برابر با ترانهاده آن ماتریس است. $A^{-1} = A^T$

نکته۴: اگر A و B ماتریس های مربعی متعامد باشند، آنگاه A^{-1}، A^T و AB نیز ماتریس های متعامد هستند.

$$\begin{array}{l} A^T A = AA^T = I \\ B^T B = BB^T = I \end{array} \rightarrow \begin{cases} 1.\ (A^{-1})^T A^{-1} = (A^T)^{-1} A^{-1} = (AA^T)^{-1} = I = (A^T A)^{-1} \\ \qquad\qquad = A^{-1}(A^T)^{-1} = A^{-1}(A^{-1})^T \\ 2.\ (A^T)^T A^T = AA^T = I = A^T A = A^T (A^T)^T \\ 3.\ \begin{array}{l} (AB)^T AB = B^T A^T AB = B^T B = I \\ AB(AB)^T = ABB^T A^T = AA^T = I \end{array} \end{cases}$$

نکته۵: از آنجائیکه ماتریس های متعامد تساوی $AA^* = A^* A = I$ را برآورده می سازند، از این رو یکین هستند.

نکته۶: برای یک ماتریس متعامد A روابط زیر برقرار هستند،

$$\|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\| \quad , \quad \mathbf{x} \in \Re^n$$

$$\|A\mathbf{x}\|^2 = (A\mathbf{x})^T (A\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2$$

$$\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad , \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Re^n$$

$$\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle = (A\mathbf{x})^T (A\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

مثال ۱-۴۸

نمونه هایی از ماتریس های متعامد عبارتند از،

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

---

[1] Orthogonal Matrix

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
B=[1/3 -2/3 2/3;2/3 -1/3 -2/3;2/3 2/3 1/3]

B =

    0.3333   -0.6667    0.6667

    0.6667   -0.3333   -0.6667

    0.6667    0.6667    0.3333


det(B)

ans =

     1
inv(B)

ans =

    0.3333    0.6667    0.6667

   -0.6667   -0.3333    0.6667

    0.6667   -0.6667    0.3333

B(:,1)'*B(:,2)

ans =

     0

B(:,1)'*B(:,3)

ans =

     0

B(:,2)'*B(:,3)

ans =

     0
```

□

۱-۲-۲۱- تعیین علامت ماتریس ها

ماتریس متقارن حقیقی $A_{n\times n}$ را **مثبت معین**[۱] گویند، اگر شرط زیر برقرار باشد،

$$\begin{cases} \mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0, & \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0, & \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases} \tag{۶۸-۱}$$

[۱] Positive Definite

مثبت نیمه معین[۱] گویند، اگر شرط زیر برقرار باشد،

$$\begin{cases}\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \geq 0, & \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0, & \mathbf{x} = \mathbf{0}\end{cases} \qquad (۶۹-۱)$$

منفی معین[۲] گویند، اگر شرط زیر برقرار باشد،

$$\begin{cases}\mathbf{x}^T A\mathbf{x} < 0, & \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0, & \mathbf{x} = \mathbf{0}\end{cases} \qquad (۷۰-۱)$$

منفی نیمه معین[۳] گویند، اگر شرط زیر برقرار باشد،

$$\begin{cases}\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \leq 0, & \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0, & \mathbf{x} = \mathbf{0}\end{cases} \qquad (۷۱-۱)$$

اگر $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ بتواند علامتهای مثبت، منفی و صفر را داشته باشد آن را **نامعین**[۴] گویند.

نکته۱: چند جمله ای های به فرم $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ را **صورت های درجه دوم**[۵] می نامند.

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \qquad , \qquad a_{ij} = a_{ji}$$

نکته۲: تمامی تعاریف بالا برای ماتریس هرمیتی $A_{n\times n}$ با صورت درجه دوم مختلط $\mathbf{x}^* A\mathbf{x}$ نیز صادق است.

مثال۱-۴۹

صورت درجه دوم زیر را در نظر بگیرید،

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 8x_3^2$$

می توان آن را بصورت $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ نمایش داد،

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

□

[۱] Positive Semi Definite
[۲] Negative Definite
[۳] Negative Semi Definite
[۴] Indefinite
[۵] Quadratic Form

نکته۱: یک صورت درجه دوم برای یک ماتریس شبه متقارن حقیقی برابر صفر است.
برای ماتریس حقیقی $A_{n\times n}$ ماتریس های B و C را بصورت زیر می توان تعریف کرد،

$$B=\frac{1}{2}(A+A^T) \quad , \quad C=\frac{1}{2}(A-A^T)$$

در اینصورت می توان نوشت،

$$A=B+C, \quad B^T=B, \quad C^T=-C$$

لذا با این کار ماتریس $A_{n\times n}$ را بصورت مجموع یک ماتریس متقارن حقیقی B و یک ماتریس شبه متقارن حقیقی C بیان کرده ایم. با توجه به اینکه $\mathbf{x}^T C\mathbf{x}$ یک کمیت اسکالر حقیقی است، داریم،

$$\mathbf{x}^T C\mathbf{x}=(\mathbf{x}^T C\mathbf{x})^T=\mathbf{x}^T C^T\mathbf{x}=-\mathbf{x}^T C\mathbf{x}$$

از این رو نتیجه می گیریم که $\mathbf{x}^T C\mathbf{x}=0$ می باشد. این بدان معنی است که یک صورت درجه دوم برای یک ماتریس شبه متقارن حقیقی برابر صفر است. لذا می توان نوشت،

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x}=\mathbf{x}^T(B+C)\mathbf{x}=\mathbf{x}^T B\mathbf{x}$$

بنابراین صورت درجه دوم حقیقی $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ فقط برای بخش متقارن $\mathbf{x}^T B\mathbf{x}$ تعریف می شود.

یکی از روش های تعیین علامت ماتریس ها استفاده از **معیار سیلوستر** می باشد. در ادامه نحوه استفاده از این معیار بیان شده است.

شرط مثبت معین: یک شرط لازم و کافی برای مثبت معین بودن یک صورت درجه دوم $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ (یا صورت هرمیتی $\mathbf{x}^* A\mathbf{x}$) که در آن ماتریس $A_{n\times n}$ یک ماتریس متقارن حقیقی(یا ماتریس هرمیتی) می باشد، آن است که $|A|>0$ بوده و کهادهای اصلی مقدم[1] متوالی A مثبت باشند. منظور از کهادهای اصلی مقدم، دترمینان های ماتریس های $k\times k$ ($k=1,2,\ldots,n-1$) در گوشه سمت چپ بالای ماتریس $A_{n\times n}$ می باشد. به عبارتی باید داشته باشیم،

$$a_{11}>0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}>0, \quad \cdots \quad ,|A|>0 \qquad (۷۲-۱)$$

شرط منفی معین: یک شرط لازم و کافی برای منفی معین بودن یک صورت درجه دوم $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ (یا صورت هرمیتی $\mathbf{x}^* A\mathbf{x}$) که در آن ماتریس $A_{n\times n}$ یک ماتریس متقارن حقیقی(یا ماتریس هرمیتی) می باشد، آن است که $|A|$ برای مقادیر زوج n مثبت و برای مقادیر فرد n منفی باشد و کهادهای اصلی متوالی مرتبه زوج مثبت و کهادهای اصلی متوالی مرتبه فرد منفی باشند. به عبارتی باید داشته باشیم،

[1] Principal Minors

$$a_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \quad \cdots \qquad (۷۳-۱)$$

برای مقادیر زوج n باید $|A| > 0$ و برای مقادیر فرد n باید $|A| < 0$ باشد. همچنین این شرط را می توان با لازم داشتن اینکه $\mathbf{x}^T(-A)\mathbf{x}$ مثبت معین باشد بدست آورد.

شرط مثبت نیمه معین: یک شرط لازم و کافی برای مثبت نیمه معین بودن یک صورت درجه دوم $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ (یا صورت هرمیتی $\mathbf{x}^* A\mathbf{x}$) که در آن ماتریس $A_{n\times n}$ یک ماتریس متقارن حقیقی(یا ماتریس هرمیتی) می باشد، آن است که ماتریس A منفرد باشد، ($|A| = 0$) و تمامی کهادهای اصلی آن غیر منفی باشند.

$$a_{ii} \geq 0, \quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} \geq 0, \quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix} \geq 0, \quad \cdots \quad , |A| = 0 \qquad (۷۴-۱)$$

که در آن $i < j < k$ می باشد.

شرط منفی نیمه معین: یک شرط لازم و کافی برای مثبت نیمه معین بودن یک صورت درجه دوم $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ (یا صورت هرمیتی $\mathbf{x}^* A\mathbf{x}$) که در آن ماتریس $A_{n\times n}$ یک ماتریس متقارن حقیقی(یا ماتریس هرمیتی) می باشد، آن است که ماتریس A منفرد باشد، ($|A| = 0$) و تمامی کهادهای اصلی مرتبه زوج آن غیر منفی و مرتبه فرد آن غیر مثبت باشند.

$$a_{ii} \leq 0, \quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} \geq 0, \quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix} \leq 0, \quad \cdots \quad , |A| = 0 \qquad (۷۵-۱)$$

که در آن $i < j < k$ می باشد.

نکته۳: در بررسی مثبت نیمه معین یا منفی نیمه معین بودن علامت تمامی کهادهای اصلی باید بررسی شوند نه فقط کهادهای اصلی مقدم متوالی.

مثال۱-۵۰

مثبت معین بودن ماتریس A را بررسی نمایید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

با استفاده از معیار سیلوستر داریم،

$$2>0,\quad \begin{vmatrix}2&2\\2&6\end{vmatrix}=8>0,\quad \begin{vmatrix}2&2&-1\\2&6&0\\-1&0&1\end{vmatrix}=2>0$$

از آنجائیکه تمامی کهادهای اصلی متوالی مثبت هستند، لذا ماتریس A مثبت معین است.

□

مثال۱-۵۱

مثبت نیمه معین بودن ماتریس A را بررسی نمایید.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&0\end{bmatrix}$$

با توجه به معیار سیلوستر، باید علامت تمامی کهادهای اصلی بررسی نماییم و دترمینان ماتریس نیز صفر باشد.

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&0\end{vmatrix}=0$$

همانطور که پیداست $|A|=0$ است، حال علامت کهادهای اصلی را بررسی می نماییم. برای یک ماتریس $A_{3\times3}$ شش کهاد اصلی بصورت زیر وجود دارد،

$$a_{11},\quad a_{22},\quad a_{33},\quad \begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}$$

برای ماتریس داده شده داریم،

$$a_{11}=1>0,\quad a_{22}=4>0,\quad a_{33}=0$$

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\\2&4\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&2\\2&0\end{vmatrix}=-4<0$$

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}=-1<0$$

مشخص است که دو تا از کهادهای اصلی منفی هستند، لذا ماتریس A مثبت نیمه معین نمی باشد.

□

مثال۱-۵۲

برای هر یک از ماتریس های متقارن زیر یک صورت درجه دوم به فرم $V(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ بدست آورید.

و آنها را با معیار سیلوستر تعیین علامت کنید.

الف)
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

صورت درجه دوم به شکل زیر است

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$
$$= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$$

برای تعیین علامت ابتدا علامت کهادهای اصلی مقدم را بررسی نماییم،

$$2 > 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

با توجه به معیار سیلوستر ماتریس A مثبت معین می باشد.

ب)
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 10 & 9 \\ -6 & 9 & 26 \end{bmatrix}$$

صورت درجه دوم به شکل زیر است

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 10 & 9 \\ -6 & 9 & 26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$
$$= 4x_1^2 + 10x_2^2 + 26x_3^2 + 4x_1x_2 + 18x_2x_3 - 12x_1x_3$$

برای تعیین علامت ابتدا علامت کهادهای اصلی مقدم را بررسی نماییم،

$$4 > 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 36 > 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 10 & 9 \\ -6 & 9 & 26 \end{vmatrix} = 36 > 0$$

با توجه به معیار سیلوستر ماتریس A مثبت معین می باشد.

ج)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

صورت درجه دوم به شکل زیر است

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_1x_2 + 10x_2x_3$$

حال علامت کهادهای اصلی مقدم را بررسی نماییم،

$$1 > 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -25 < 0$$

با توجه به معیار سیلوستر ماتریس A مثبت معین نمی باشد.

□

مثال۱-۵۳

برای چه مقادیری از k ماتریس های زیر مثبت معین خواهند بود؟

الف) $A = \begin{bmatrix} k & -4 & -4 \\ -4 & k & -4 \\ -4 & -4 & k \end{bmatrix}$

از معیار سیلوستر برای جواب استفاده می کنیم و ابتدا علامت کهادهای اصلی مقدم را برای مثبت معین بودن ماتریس بررسی نماییم،

$$k > 0 \qquad (1)$$

$$\begin{vmatrix} k & -4 \\ -4 & k \end{vmatrix} = k^2 - 16 > 0 \rightarrow \quad k < -4,\ k > 4 \qquad (2)$$

$$\begin{vmatrix} k & -4 & -4 \\ -4 & k & -4 \\ -4 & -4 & k \end{vmatrix} = k^3 - 48k - 128 = (k-8)(k+4)^2 > 0 \rightarrow \quad k > 8 \qquad (3)$$

از مقایسه محدوده های (1)، (2) و (3) نتیجه می شود که برا ی مثبت معین بودن ماتریس A باید $k > 8$ باشد.

ب) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & k \\ -1 & 2 & -1 \\ k & -1 & 2 \end{bmatrix}$

از معیار سیلوستر برای جواب استفاده می کنیم و ابتدا علامت کهادهای اصلی مقدم را برای مثبت معین بودن ماتریس بررسی نماییم،

$$2 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & k \\ -1 & 2 & -1 \\ k & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2k^2 + 2k + 4 = -2(k-2)(k+1) > 0 \rightarrow \qquad -1 < k < 2$$

لذا نتیجه می شود که برا ی مثبت معین بودن ماتریس A باید $-1 < k < 2$ باشد.

□

مسائل

۱-۱- برای هر یک از دسته بردارهای زیر حاصل $2\mathbf{u}-5\mathbf{v}$، $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$، $\|\mathbf{u}-2\mathbf{v}\|$ و زاویه بین بردار $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ را بیابید.

الف) $\mathbf{u}=[1,1],\quad \mathbf{v}=[-5,0]$

ب) $\mathbf{u}=[1,2],\quad \mathbf{v}=[2,1]$

ج) $\mathbf{u}=[1,1,1],\quad \mathbf{v}=[-5,0,5]$

د) $\mathbf{u}=[1,2,3],\quad \mathbf{v}=[3,2,1]$

۱-۲- برای بردارهای زیر $\|\mathbf{u}\|_1$، $\|\mathbf{u}\|_2$ و $\|\mathbf{u}\|_\infty$ را محاسبه نمایید.

الف) $\mathbf{u}=[2,1,-4,-2]$

ب) $\mathbf{u}=[1+i,1-i,1,4i]$

ج) $\mathbf{u}=[-2,3,1,-1]$

د) $\mathbf{u}=[-i,1+i,0,2i]$

۱-۳- برای هر یک از دسته بردارهای زیر متعامد و یکامتعامد بودن بردارها را بررسی کنید.

$$S:\left\{\mathbf{v}_1=[2,-1,0],\quad \mathbf{v}_2=[1,0,-1],\quad \mathbf{v}_3=[3,7,-1]\right\}$$

$$K:\left\{\mathbf{v}_1=[1,1,1,1],\quad \mathbf{v}_2=[1,1,1,0],\quad \mathbf{v}_3=[1,1,0,0],\quad \mathbf{v}_4=[1,0,0,0]\right\}$$

۱-۴- مقادیر a,b,c را چنان بیابید که ماتریس زیر یک ماتریس متعامد گردد.

الف) $$A=\begin{bmatrix} 0 & b & 1\\ a & 2 & 1\\ -1 & 1 & c\end{bmatrix}$$

ب) $$A=\begin{bmatrix} a+b & b-a\\ a-b & b+a\end{bmatrix}$$

۱-۵- برای ماتریس های متعامد A و B ثابت کنید،

الف) A^{-1} متعامد است.

ب) $|A|=\pm 1$ است.

ج) AB متعامد است.

۱-۶- نشان دهید برای هر مقداری از a ماتریس A یک ماتریس متعامد است،

$$A=\frac{1}{1+2a^2}\begin{bmatrix}1 & -2a & 2a^2\\ 2a & 1-2a^2 & -2a\\ 2a^2 & 2a & 1\end{bmatrix}$$

۱-۷- نشان دهید برای اینکه ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ متعامد باشد، باید شرایط زیر بر قرار باشند،

الف) $a^2+b^2=c^2+d^2=1$

ب) $ac+bd=0$

۱-۸- اگر $A=\begin{bmatrix}2 & -5\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ باشد، ضرایب غیر صفر α، β و γ را چنان بیابید که رابطه زیر برقرار گردد،

$$\alpha I_2+\beta A+\gamma A^2=\mathbf{0}$$

۱-۹- اگر $A=\begin{bmatrix}6 & -4\\ 9 & -6\end{bmatrix}$ باشد،

الف) نشان دهید که A^2 ماتریس صفر است.

ب) کلیه ماتریس های 2×2 بصورت $B=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}$ را بیابید که در آن B^2 ماتریس صفر باشد.

۱-۱۰- نشان دهید برای یک ماتریس 3×3 بالا مثلثی رابطه زیر برقرار است،

$$\begin{vmatrix}a & b & c\\ 0 & e & f\\ 0 & 0 & i\end{vmatrix}=aei$$

۱-۱۱- به ازای چه مقداری از β ماتریس های زیر منفرد خواهند بود،

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & \beta & 1-\beta\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}12-\beta & 4\\ 8 & 8-\beta\end{bmatrix}$$

۱-۱۲- نشان دهید ماتریس A غیرمنفرد است،

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

اگر رابطه زیر بر قرار باشد،

$$aei+bfg+cdh-hfa-idb-gec\neq 0$$

۱-۱۳- ثابت کنید که برای ماتریس های $A_{n\times n}$، $B_{n\times m}$، $C_{m\times n}$ و $D_{m\times m}$ روابط زیر برقرار هستند،

الف) اگر $|A|\neq 0$ و $|D-CA^{-1}B|\neq 0$ باشند، آنگاه،

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1}+A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}$$

ب) اگر $|D|\neq 0$ و $|A-BD^{-1}C|\neq 0$ باشند، آنگاه،

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} (A-BD^{-1}C)^{-1} & -(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1}+D^{-1} \end{bmatrix}$$

۱-۱۴- با استفاده از لم معکوس سازی ماتریس رابطه (ب) را با توجه به رابطه (الف) بدست آورید. این معادلات صورتهای مختلف بیان فیلتر کالمن برای فرآیندهای اتفاقی می باشند، که رابطه دوم کاربرد بیشتری دارد.

(الف)
$$\begin{cases} \hat{X}(n+1)=\Pi(n)[H^TR^{-1}z(n+1)+\Sigma^{-1}(n+1)FX(n)] \\ \Pi(n)=[H^TR^{-1}H+\Sigma^{-1}(n)]^{-1} \\ \Sigma(n+1)=F\Sigma(n)F^T+GQG^T \\ \Sigma(0\,|\,0)=\Psi \\ \hat{X}(0\,|\,0)=0 \end{cases}$$

(ب)
$$\begin{cases} \hat{X}(n+1)=F\hat{X}(n)+K(n+1)[z(n+1)+HF\hat{X}(n)] \\ K(n+1)=\Sigma(n+1)H^T[R+H\Sigma(n+1)H^T]^{-1} \\ \Sigma(n+1)=F\Sigma(n)F^T+GQG^T \\ \Sigma(0\,|\,0)=\Psi \\ \hat{X}(0\,|\,0)=0 \end{cases}$$

در اینجا X یک متغیر تصادفی و Z نیز خروجی سیستم اتفاقی می باشد.

۱-۱۵- برای ماتریس A مقدار A^{300} را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

راهنمایی: بررسی کنید که ماتریس A یک ماتریس خودتوان است، یعنی $A^2 = A$ می باشد.

۱-۱۶- برای ماتریس مربعی A اگر $I-A$ غیر منفرد باشد، نشان دهید که رابطه زیر بر قرار است،

$$A(I-A)^{-1}=(I-A)^{-1}A$$

۱-۱۷- اگر ماتریس های A، B و $A+B$ غیر منفرد باشند نشان دهید،

$$A(A+B)^{-1}B=B(A+B)^{-1}A=(A^{-1}+B^{-1})^{-1}$$

۱-۱۸- اگر K یک ماتریس شبه متقارن با عناصر حقیقی باشد. نشان دهید،

الف) ماتریس $I-K$ غیرمنفرد است.

ب) اگر $A=(I+K)(I-K)^{-1}$ باشد، آنگاه $A^{-1}=A^T$ است.

۱-۱۹- برای ماتریس $A_{m\times n}$ نشان دهید که ماتریس های A^*A و AA^* هرمیتی هستند.

۱-۲۰- به ازای چه مقادیری از α و β ماتریس A یک ماتریس یکین می باشد.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 & \mathrm{i}\beta \\ \alpha & 0 & \mathrm{i}\beta & 0 \\ 0 & \mathrm{i}\beta & 0 & \alpha \\ \mathrm{i}\beta & 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

۱-۲۱- اگر برای ماتریس $B_{n\times n}$ داشته باشیم $B^3=\mathbf{0}$ و اگر $A=I_n-B$ باشد، نشان دهید،

الف) ماتریس A غیرمنفرد است و رابطه $A^{-1}=I_n+B+B^2$ برقرار است.

ب) پاسخ سیستم $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ بصورت زیر می باشد،

$$\mathbf{x}=\mathbf{b}+B\mathbf{b}+B^2\mathbf{b}$$

۱-۲۲- نشان دهید اگر $P^{-1}AP = B$ باشد، آنگاه $P^{-1}A^nP = B^n$ است ($n \geq 1$).

۱-۲۳- با توجه به لم معکوس سازی ماتریس ها صحت روابط زیر را بررسی کنید،

الف) $(A+BC)^{-1} = A^{-1} - \dfrac{A^{-1}BCA^{-1}}{(D^{-1}+CA^{-1}B)}$

ب) $(P^{-1}+H^TQH)^{-1} = P - PH^T(HPH^T+Q^{-1})^{-1}HP$، این رابطه مربوط به الگوریتم حداقل مربعات بازگشتی می باشد.

۱-۲۴- نشان دهید،

الف) برای یک ماتریس مختلط $A_{n\times n}$ و بردارهای مختلط $\mathbf{u}_{n\times 1}$ و $\mathbf{v}_{n\times 1}$ داریم،

$$\langle \mathbf{u}, A\mathbf{v}\rangle = \mathbf{u}^* A\mathbf{v} \quad , \quad \langle A^*\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \mathbf{u}^* A\mathbf{v}$$

صحت روابط فوق را برای بردارهای $\mathbf{u}_{3\times 1}$ و $\mathbf{v}_{3\times 1}$ و ماتریس $A_{3\times 3}$ تحقیق کنید.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -j2 \\ 1 \\ 3+j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -j \\ 0 \\ 2+j3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2+j & -2 \\ -j & j & 1-j3 \\ 0 & 1-j & 2 \end{bmatrix}$$

ب) برای یک ماتریس حقیقی $A_{n\times n}$ و بردارهای حقیقی $\mathbf{u}_{n\times 1}$ و $\mathbf{v}_{n\times 1}$ داریم،

$$\langle \mathbf{u}, A\mathbf{v}\rangle = \mathbf{u}^T A\mathbf{v} \quad , \quad \langle A^T\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \mathbf{u}^T A\mathbf{v}$$

۱-۲۵- ماتریس زیر را ماتریس وَندرموند (Vandermonde) گویند،

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

نشان دهید، $|A| = \prod_{1\leq j\leq i\leq n}(a_i - a_j)$ است.

۱-۲۶- تعیین نمایید کدامیک از ماتریس های زیر مثبت معین هستند،

الف) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

ب) $A = I - \mathbf{u}\mathbf{u}^T$، که در آن $\mathbf{u}$ بردار n تایی با نُرم $\|\mathbf{u}\| < 1$ می باشد.

ج) $A = \begin{bmatrix} I & B \\ B^T & I + B^T B \end{bmatrix}$، که $B_{m\times n}$ است.

۱-۲۷- صورت های درجه دوم زیر را تعیین علامت نمایید،

الف) $Q = -x_1^2 - 3x_2^2 - 11x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 - 2x_1x_3$

ب) $Q = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 6x_2x_3 - 2x_1x_3$

ج) $Q = 10x_1^2 + 4x_2^2 - 11x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 - 2x_1x_3$

د) $Q = 6x_1^2 + 41x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 12x_2x_3$

۱-۲۸- نشان دهید معکوس یک ماتریس مثبت معین، خود یک ماتریس مثبت معین است.

۱-۲۹- اگر برای ماتریس $A_{m\times n}$ داشته باشیم، $\|A\| < 1$، نشان دهید،

الف) ماتریس $I - A^T A$ مثبت معین است.

ب) ماتریس $\begin{bmatrix} I & A \\ A^T & I \end{bmatrix}$ مثبت معین است.

۱-۳۰- ماتریس مثبت نیمه معین زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & B \end{bmatrix}$$

نشان دهید $A = \mathbf{0}$ و B ماتریس مثبت نیمه معین است.