فصل دوم

دستگاه معادلات جبری خطی

۲-۱ مقدمه

در این فصل به معرفی دستگاه معادلات جبری خطی و روش های حل آنها پرداخته شده است. از جمله روش های مبتنی بر الگوریتم ها روش حذفی گوسی و روش گوس- جردن و از روش های مبتنی بر تجزیه ماتریس ها دو روش تجزیه LU و تجزیه چالسکی بررسی شده است. در بیان هر یک مثال های کاربرد همراه با کدنویسی های MATLAB آورده شده است. الگوریتم های نام برده به لحاظ حجم محاسبات با یکدیگر مقایسه و مزایای هر یک مطرح گردیده است.

۲-۲ معرفی دستگاه معادلات جبری خطی

صورت کلی یک دستگاه معادلات جبری خطی با m معادله و n مجهول به شکل زیر در نظر گرفته می شود،

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (۱-۲)$$

این دستگاه معادلات معرف یک سیستم $m \times n$ است، که در آن a_{ij}ها و b_iها مقادیر ثابت معین و x_jها مجهولاتی هستند که باید تعیین گردند. این دستگاه معادلات را می توان با صرفنظر کردن مجهولات و فقط با در نظر گرفتن ضرایب بصورت زیر نمایش داد،

$$[A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \qquad (۲-۲)$$

این ماتریس را **ماتریس افزوده**[۱] سیستم می نامند، که هر سطر آن بیان کننده یکی از معادلات خطی می باشد. همچنین می توان معادلات را بشکل $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ نمایش داد، که در آن A یک ماتریس $m \times n$، $\mathbf{b}$ یک بردار $m \times 1$ و $\mathbf{x}$ یک بردار $n \times 1$ بصورت زیر است،

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

در رابطه با دستگاه معادلات خطی بالا پرسشی که مطرح می گردد آن است که آیا جوابی برای این مجموعه معادلات وجود دارد یا نه و در صورت وجود جواب منحصربفرد است یا خیر. در فرآیند حل این دستگاه معادلات امکان رخ داد حالت های زیر وجود دارد،

۱- حالتی که دستگاه **بدون جواب** یا **ناسازگار**[۲] است.

۲- حالتی که دستگاه **سازگار**[۳] است و جواب دارد که در اینصورت امکان دارد **فقط یک جواب منحصربفرد** داشته باشد یا اینکه **بیشمار جواب** داشته باشد.

---

۱ Augmented Matrix
۲ Inconsistent
۳ Consistent

در یک دستگاه معادلات جبری خطی $m \times n$ که m تعداد معادلات و n تعداد مجهولات است، حالت های زیر را می توان در نظر گرفت،

۱- حالت $m = n$: در این حالت دستگاه را **همواره معین**[۱] گویند،

اگر $|A| \neq 0$ باشد، دستگاه معادلات سازگار است و یک جواب منحصربفرد دارد.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

اگر $|A| = 0$ و دستگاه سازگار باشد، بیشمار جواب دارد و برای بدست آوردن یک پاسخ معین از روش **حداقل نُرم**[۲] می توان استفاده نمود،

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 5 \\ 6x_1 + 4x_2 = 10 \end{cases}$$

اگر $|A| = 0$ و دستگاه ناسازگار باشد، اصلاً جواب ندارد و برای بدست آوردن یک پاسخ تقریبی از روش **حداقل مربعات**[۳] استفاده می شود.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 5 \\ 6x_1 + 4x_2 = 5 \end{cases}$$

۲- حالت $m < n$: در این حالت دستگاه را **فرومعین**[۴] گویند،

این گونه سیستم ها می تواند بیشمار جواب داشته باشد. در دستگاه های فرومعین که دارای بیشمار جواب هستند، برای بدست آوردن یک پاسخ معین از روش حداقل نُرم می توان استفاده کرد،

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

۳- برای $m > n$، در این صورت دستگاه را **فرامعین**[۵] می نامند،

چنین دستگاهی در صورت سازگار بودن می تواند یک جواب منحصربفرد داشته باشد.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 2 \\ -5x_1 + 2x_2 = -3 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

[۱] Everdetermined
[۲] Minimum Norm Solution
[۳] Least Square Solution
[۴] Underdetermined
[۵] Overdetermined

در صورت ناسازگار بودن، اصلاً جوابی ندارند، که در چنین مواردی برای بدست آوردن یک پاسخ تقریبی از روش حداقل مربعات استفاده می شود.

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 2 \\ 7x_1 + 2x_2 = 8 \\ x_1 + 6x_2 = 2 \end{cases}$$

بررسی وجود و عدم وجود جواب زمانیکه تعداد معادلات و مجهولات دستگاه کم باشند بسیار ساده است. لیکن در عمل ممکن است با تعداد معادلات و مجهولات بیشتری سر و کار داشته باشیم. برای دستگاه هایی با تعداد معادلات و مجهولات بیشتر باید از روشهای خاصی جهت بدست آوردن پاسخ استفاده کرد. نرم افزار *MATLAB* ابزارهای زیادی برای حل دستگاه معادلات خطی دارد. یک روش برای حل دستگاه معادلات $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ که در آن $A_{m\times n}$ و $\mathbf{b}_{m\times 1}$ می باشد، استفاده از عملگر تقسیم چپ (\ ) است.

در حالت $m = n$ نرم افزار *MATLAB* جواب دقیق دستگاه معادلات را پس از گرد کردن اعداد محاسبه می کند.

```
A =[1  2  3;4  5  6;7  8  10]
A =
     1   2   3
     4   5   6
     7   8   10
b = ones(3,1);
x = A \ b
x =
    -1.0000
     1.0000
     0.0000
```

صحت پاسخ را می توان با محاسبه بردار باقیمانده $\mathbf{r}$ بصورت زیر بررسی کرد،

```
r = b - A*x
r =
    1.0e-015 *
              0.1110
              0.6661
              0.2220
```

به لحاظ تئوری، باقیمانده $\mathbf{r}$ برابر صفر است و نتیجه حاصل تأثیر گرد کردن اعداد می باشد.

همچنین در حالت $m = n$ می توان از ماتریس معکوس $\mathrm{inv(A)}$ برای حل دستگاه معادلات استفاده نمود، لیکن به دلیل حجم بالای محاسبات و حساسیت برخی از سیستم ها نسبت که خطاهای کوچک محاسباتی و گرد کردن اعداد این روش توصیه نمی شود،

```
A =[1 2 3;4 5 6;7 8 10];
b = ones(3,1);
x = inv(A)* b
x =
   -1.0000
    1.0000
    0.0000
```

برای مشاهده تفاوت این دو روش از نظر حجم محاسباتی به ویژه در دستگاه معادلات با ابعاد بالا دستوری بصورت زیر در نظر می گیریم،

```
A = rand(1000,1000);
b = rand(1000,1);
tic;
x = A \ b;
toc
elapsed_time =
    9.8900
tic;
x = inv(A)* b;
toc
elapsed_time =
   18.2180
```

دستورهای tic و toc باعث می شوند که زمان لازم برای محاسبه عبارت بین آن دو دستور برحسب ثانیه ثبت و در خروجی نشان داده شود. مشخص است که با افزایش ابعاد دستگاه معادلات حجم محاسبات در استفاده از دستور$\mathrm{inv(A)}$ بسیار افزایش خواهد داشت.

۲-۲-۱- محاسبه عدد حالت ماتریس ها

ایراد دیگری که در استفاده از ماتریس معکوس وجود دارد، حساسیت برخی از دستگاه های معادلات نسبت به خطاهای کوچک محاسباتی و گرد کردن اعداد می باشد. برای بررسی این موضوع به مثال بعدی توجه نمایید،

مثال۲-۱

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 23.297x_1+33.074x_2=13.520 \\ 52.684x_1+74.752x_2=30.616 \end{cases}$$

پاسخ سیستم را می توان بصورت زیر بدست آورد،

```
A =[23.297 33.074;52.684 74.752];
b =[13.520;30.616];
det(A)
ans =
   -0.9733
x = inv(A)* b
x =
    2.0000
   -1.0000
```

حال اگر این دستگاه معادلات مربوط به انجام یک سری آزمایشات مختلف بوده و در اندازه گیری های مختلف جواب های زیر بدست آمده باشد. بررسی کنید در هر حالت حل دقیق سیستم چه خواهد شد؟

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 13.65 \\ 30.5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 13.4 \\ 30.5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 13.5 \\ 30.75 \end{bmatrix}$$

```
A =[23.297 33.074;52.684 74.752];
b =[13.65;30.5];
x = inv(A)* b
x =
  -11.9266
    8.8137

b =[13.4;30.5];
x = inv(A)* b
x =
    7.2746
   -4.7190
```

```
b =[13.5;30.75];
x = inv(A)* b
x =
    8.0897
   -5.2901
```

□

مشخص است که تغییرات بسیار کوچک در بردار $\mathbf{b}$ به شدت در نتیجه حاصل تأثیر گذار است. به چنین دستگاههای معادلات **بد حالت**[۱] گفته می شود. علت این موضوع را می توان بصورت زیر بیان کرد.

دستگاه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید،

$$A_{n\times n}\mathbf{x}_{n\times 1} = \mathbf{b}_{n\times 1}$$

با فرض اینکه ماتریس A غیر منفرد باشد می توان نوشت،

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

حال اگر $\mathbf{b}$ شامل نویز یا خطاهای محاسباتی ناشی از گرد کردن مانند $\Delta\mathbf{b}$ باشد، در اینصورت این خطا بصورت زیر در پاسخ ظاهر خواهد شد،

$$\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x} = A^{-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b})$$

لذا می توان نوشت،

$$\Delta\mathbf{x} = A^{-1}\Delta\mathbf{b}$$

با توجه به خواص نُرم ماتریس ها از این رابطه می توان نتیجه گرفت،

$$\|\Delta\mathbf{x}\| \le \|A^{-1}\|\|\Delta\mathbf{b}\|$$

نُرم مورد نظر نُرم دو است.

از عبارت اخیر می توان تعبیر کرد که، اگر $\|A^{-1}\|$ مقدار کوچکی داشته باشد، برای تغییرات کم در $\mathbf{b}$ یعنی $\|\Delta\mathbf{b}\|$ کوچک، مقدار $\|\Delta\mathbf{x}\|$ کم خواهد بود. ولی برای $\|A^{-1}\|$ های بزرگ، مقدار $\|\Delta\mathbf{x}\|$ بزرگ است، حتی اگر $\|\Delta\mathbf{b}\|$ مقدار کوچکی باشد.

لذا برای تشخیص بد حالت بودن یک دستگاه معادلات پارامتری به نام **عدد حالت**[۲] تعریف می گردد،

$$\kappa = \|A\|\|A^{-1}\| \quad , \quad \kappa \ge 1 \qquad (۳-۲)$$

---

[۱] Ill condition
[۲] Condition Number

اگر عدد حالت کوچک باشد، بیان کننده آن است که ماتریس A و دستگاه معادلات حاصل **خوش حالت**[۱] است و اگر عدد حالت مقدار خیلی بزرگی باشد، بیانگر آن است که ماتریس نزدیک به منفرد شدن است، لذا آن ماتریس را بد حالت می نامند و خطای محاسباتی در معکوس کردن ماتریس A زیاد است.

مثال۲-۲

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 23.297x_1 + 33.074x_2 = 13.520 \\ 52.684x_1 + 74.752x_2 = 30.616 \end{cases}$$

عدد حالت را برای این سیستم بدست آورید و بد حالت یا خوش حالت بودن سیستم را بررسی نمایید.

برای بدست آوردن عدد حالت از تعریف آن استفاده می نماییم، البته دستوری به نام cond(A) برای محاسبه عدد حالت ماتریس ها وجود دارد،

```
A =[23.297 33.074;52.684 74.752];
norm(A)* norm(inv(A))
ans =
  1.0275e+004
cond(A)
ans =
  1.0275e+004
```

نتیجه نشان می دهد که $\kappa = 1.0275 \times 10^4 >> 1$ است، لذا این سیستم بد حالت می باشد و به همین دلیل تغییرات بسیار کوچک در بردار $\mathbf{b}$ سبب بروز خطای محاسباتی بالایی در حل دستگاه معادلات $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ می گردد.

دستور cond(A) عدد حالت را بر اساس نُرم دو ماتریس محاسبه می نماید و برای محاسبه آن بر حسب دیگر نُرم ها می توان از دستورهای cond(A,1)، cond(A,inf) و cond(A,'fro') استفاده کرد.

□

[۱] Well Conditioned

۲-۳ حل دستگاه معادلات جبری خطی بر پایه الگوریتم ها

یکی از موضوعات مهمی که در حل دستگاه معادلات خطی مورد نظر است، تشخیص سازگار یا ناسازگار بودن سیستم و در صورت سازگار بودن یافتن جواب و یا مجموعه جوابهای ممکن می باشد. در این راستا دو روش عمده که بکار گرفته می شوند روش **خذفی گوسی**[۱] و روش **گوس – جردن**[۲] می باشند، که در ادامه به شرح این دو روش می پردازیم.

۲-۳-۱- روش خذفی گوسی

در روش حذفی گوسی سعی می شود تا با انجام یک سری عملیات ساده نظیر جابجایی سطرها، ضرب سطرها در یک عدد غیر صفر یا جمع سطرها با یکدیگر، سیستم موجود را به یک سیستم ساده ولی معادل با قبلی تبدیل کرد، به نحوی که دستیابی به جواب به راحتی امکان پذیر باشد. برای این منظور باید دو حالت را در نظر گرفت، اول هنگامیکه $m = n$ باشد و دوم در صورتیکه $m \neq n$ باشد.

در حالت $(m = n)$ سعی می شود تا ماتریس افزوده سیستم به شکل بالا مثلثی زیر در آید،

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{nn} & b'_n \end{array}\right) \qquad (۴-۲)$$

در اینصورت دستگاه معادلات حاصل بشکل زیر خواهد بود، که با استفاده از یک **الگوریتم جایگزینی پسرو**[۳] می توان آن را حل کرد،

$$\begin{aligned} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \cdots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ a'_{33}x_3 + \cdots + a'_{3n}x_n &= b'_3 \\ &\vdots \\ a'_{n-1,n-1}x_{n-1} + a'_{n-1,n}x_n &= b'_{n-1} \\ a'_{nn}x_n &= b'_n \end{aligned}$$

الگوریتم جایگزینی پسرو بصورت زیر می باشد،

[۱] Gaussian Elimination
[۲] Gauss - Jordan
[۳] Backward Substitution Algorithm

گام اول) $x_n = \dfrac{b'_n}{a'_{nn}}$

گام دوم) $x_i = \dfrac{1}{a'_{ii}}\left(b'_i - \sum_{j=i+1}^{n} a'_{ij} x_j\right) \quad , \quad i = n-1,\ldots,2,1$

گام سوم) $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$

فرایند تبدیل ماتریس ضرایب به فرم بالا مثلثی را می توان بصورت زیر خلاصه کرد،

گام اول- حذف مجهول x_1 از معادلات دوم تا nام،

$$\frac{-a_{i1}}{a_{11}} r_1 + r_i \to r_i \quad , \quad i = 2,\ldots,n$$

گام دوم- حذف مجهول x_2 از معادلات سوم تا nام،

$$\frac{-a_{i2}}{a_{22}} r_2 + r_i \to r_i \quad , \quad i = 3,\ldots,n$$

گام سوم- به همین ترتیب تا گام $n-1$ ادامه می دهیم.

مثال۲-۳

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 7 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

فرم ماتریس افزوده این معادلات بصورت زیر است،

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 4 & 7 \\ 4 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(۱) ابتدا باید مجهول x_1 را از معادلات دوم و سوم حذف نماییم،

$$\left.\begin{array}{l} \frac{-4}{9} r_1 + r_2 \to r_2 \\ \frac{-1}{9} r_1 + r_3 \to r_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & \frac{15}{9} & \frac{20}{9} & \frac{44}{9} \\ 0 & \frac{6}{9} & \frac{5}{9} & \frac{20}{9} \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(۲) حال باید مجهول x_2 را از معادله سوم حذف نماییم،

$$\frac{-6}{15}r_2 + r_3 \to r_3 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & \frac{15}{9} & \frac{20}{9} & \frac{44}{9} \\ 0 & 0 & \frac{-3}{9} & \frac{4}{15} \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(۳) بنابراین ماتریس ضرایب به فرم بالامثلثی تبدیل می شود و دستگاه معادلات حاصل بصورت زیر خواهد بود،

$$\begin{aligned} 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 7 \\ \frac{15}{9}x_2 + \frac{20}{9}x_3 &= \frac{44}{9} \\ \frac{-3}{9}x_3 &= \frac{4}{15} \end{aligned}$$

که جواب ها به راحتی با استفاده از الگوریتم جایگزینی پسرو قابل محاسبه هستند،

$$x_1 = \frac{-1}{5}, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = \frac{-4}{5}$$

□

در انجام روش حذفی گوسی، هر یک از مراحل گفته شده را می توان در قالب ضرب یک **ماتریس مقدماتی**[1] بیان کرد. ماتریس های مقدماتی مربعی بوده و با انجام یک عمل مقدماتی روی ماتریس واحد I_n بدست می آیند. در مجموع سه نوع ماتریس مقدماتی برای انجام عملیات سطری، همچنین برای عملیات ستونی ماتریس ها وجود دارد.

۱- ماتریس های مقدماتی که عمل جابجایی سطر را انجام می دهند، $r_i \leftrightarrow r_j$. به چنین ماتریس هایی **ماتریس جایگشت**[2] نیز گفته می شود. در این ماتریس ها $\det(E) = -1$ و $E^{-1} = E$ است.

مثال ۲-۴

برای نمونه ماتریس های زیر را در نظر بگیرید،

$$r_2 \leftrightarrow r_3 \Rightarrow \qquad E_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 0 & 6 & 3 \\ 9 & 12 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 9 & 12 & 7 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$r_1 \leftrightarrow r_2 \Rightarrow \qquad E_2 B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -9 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

□

[1] Elementary Matrix
[2] Permutation Matrix

۲- ماتریس های مقدماتی که هر سطر از ماتریس را در عددی مثل k ضرب می نمایند، $kr_i \rightarrow r_i$.
در این ماتریس ها E یک ماتریس قطری، $\det(E)=k$ است و $[E_i(k)]^{-1}=E_i(1/k)$ است.

مثال ۲-۵

برای نمونه ماتریس های زیر را در نظر بگیرید،

$$-4r_2 \rightarrow r_2 \Rightarrow \qquad E_1A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -5 & 4\\ 0 & 6 & 3\\ 9 & 12 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -5 & 4\\ 0 & -24 & -12\\ 9 & 12 & 7\end{bmatrix}$$

$$5r_1 \rightarrow r_1 \Rightarrow \qquad E_2B=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ -9 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 15\\ -9 & 5\end{bmatrix}$$

□

۳- ماتریس های مقدماتی که هر سطر از ماتریس را با مضربی از سایر سطرها جمع می نمایند، $kr_j + r_i \rightarrow r_i$. در این ماتریس ها $\det(E)=1$ است و $[E_i(k)]^{-1}=E_i(-k)$ است.

مثال ۲-۶

برای نمونه ماتریس های زیر را در نظر بگیرید،

$$-4r_2 + r_1 \rightarrow r_1 \Rightarrow \qquad E_1A=\begin{bmatrix}1 & -4 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -5 & 4\\ 0 & 6 & 3\\ 9 & 12 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -29 & -8\\ 0 & 6 & 3\\ 9 & 12 & 7\end{bmatrix}$$

$$5r_1 + r_2 \rightarrow r_2 \Rightarrow \qquad E_2B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ -9 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 20\end{bmatrix}$$

□

مثال ۲-۷

در مثال (۲-۳) برای انجام هر یک از مراحل گفته شده ماتریس های مقدماتی E_1، E_2 و E_3 را می توان بصورت زیر بیان کرد،

مرحله (۱) : $\dfrac{-4}{9}r_1 + r_2 \rightarrow r_2$

$$E_1[A|\mathbf{b}]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{-4}{9} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\left[\begin{array}{ccc|c}9 & 3 & 4 & 7\\ 4 & 3 & 4 & 8\\ 1 & 1 & 1 & 3\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}9 & 3 & 4 & 7\\ 0 & \frac{15}{9} & \frac{20}{9} & \frac{44}{9}\\ 1 & 1 & 1 & 3\end{array}\right]$$

مرحله (۲) : $\frac{-1}{9}r_1 + r_3 \rightarrow r_3$

$$E_2E_1\left[A|\mathbf{b}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{9} & 0 & 1 \end{bmatrix}\left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & \frac{15}{9} & \frac{20}{9} & \frac{44}{9} \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & \frac{15}{9} & \frac{20}{9} & \frac{44}{9} \\ 0 & \frac{6}{9} & \frac{5}{9} & \frac{20}{9} \end{array}\right]$$

مرحله (۳) : $\frac{-6}{15}r_2 + r_3 \rightarrow r_3$

$$E_3E_2E_1\left[A|\mathbf{b}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-6}{15} & 1 \end{bmatrix}\left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & \frac{15}{9} & \frac{20}{9} & \frac{44}{9} \\ 0 & \frac{6}{9} & \frac{5}{9} & \frac{20}{9} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & \frac{15}{9} & \frac{20}{9} & \frac{44}{9} \\ 0 & 0 & \frac{3}{9} & \frac{4}{15} \end{array}\right]$$

بنابراین کل این تبدیلات را می توان بصورت زیر بیان کرد،

$$E_3E_2E_1\left[A|\mathbf{b}\right]$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB می توان برنامه ای برای محاسبه ماتریس های مقدماتی از روش حذفی گوسی و حل دستگاه معادلات با استفاده از الگوریتم جایگزینی پسرو نوشت،

```
%Gaussian Eliminatio n algorithm without pivoting.
function [x, AB] = gauss1(A, B)
NA = size(A,2);
[NB1, NB] = size(B);
if NB1 ~= NA,
   error(' A and B must have compatible dimensions ');
end
AB = [A B];
E = eye(NA, NA);
for j = 1 : NA - 1
for i = j + 1 : NA
      if AB(j, j) ~= 0
      E(i, j) = - AB(i, j) / AB(j, j);
   AB = E * AB;
         E = eye(NA, NA);
      else
         error(' algorithm needs pivoting' )
      end
   end
end
```

```
% backward substitution for a upper-triangular matrix equation
x = zeros(1,NA);
sum = 0;
for i = NA:-1:1
   for j = i+1:NA
      sum = sum + x(1,j) * AB(i,j);
   end
   x(1,i) = (AB(i,NA+1) - sum) / AB(i,i);
   sum = 0;
end
```

خروجی برنامه اصلی شامل پاسخ نهایی و ماتریس افزوده بالامثلثی می باشد و در صورتیکه با حذف (;) اجازه نوشتن نتایج را برای ماتریس های مقدماتی بدهید، اجرای برنامه بصورت زیر خواهد بود،

```
A =[9 3 4;4 3 4;1 1 1];
b =[7;8;3];
[x AB]= gauss1(A,b)
E =
    1.0000         0         0
   -0.4444    1.0000         0
         0         0    1.0000
E =
    1.0000         0         0
         0    1.0000         0
   -0.1111         0    1.0000
E =
    1.0000         0         0
         0    1.0000         0
         0   -0.4000    1.0000
x =
   -0.2000    4.0000   -0.8000
AB =
    9.0000    3.0000    4.0000    7.0000
         0    1.6667    2.2222    4.8889
         0         0   -0.3333    0.2667
```

□

مثال ۲-۸

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13 \\ 3x_1 + x_3 = -1 \end{cases}$$

فرم ماتریس افزوده این معادلات بصورت زیر می باشد،

$$[A|\mathbf{b}] \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 13 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

گام اول- حذف مجهول x_1 از معادلات دوم و سوم،

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}r_1 + r_2 \rightarrow r_2 \\ \frac{3}{2}r_1 + r_3 \rightarrow r_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 15 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & 5 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

گام دوم- حذف مجهول x_2 از معادلات سوم،

$$\frac{-3}{5}r_2 + r_3 \rightarrow r_3 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 15 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

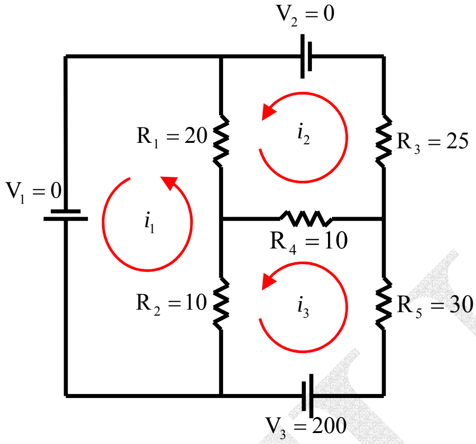
گام سوم - اجرای الگوریتم جایگزینی پسرو برای حل معادلات،

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ \frac{5}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3 = 15 \\ -2x_3 = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = \frac{2}{5}(15 - \frac{5}{2}x_3) = 4 \\ x_1 = -\frac{1}{2}(4 - x_2 + x_3) = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

□

مثال ۲-۹

در مدار الکتریکی زیر با اعمال روش حذفی گوسی جریانهای i_1، i_2 و i_3 را بدست آورید.



معادلات مداری برای حلقه ها و ماتریس افزوده حاصل برای این سیستم بصورت زیر بدست می آید،

$$\begin{cases} 20(i_1 - i_2) + 10(i_1 - i_3) = 0 \\ 25i_2 + 10(i_2 - i_3) + 20(i_2 - i_1) = 0 \\ 30i_3 + 10(i_3 - i_2) + 10(i_3 - i_1) = 200 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 30 & -20 & -10 & 0 \\ -20 & 55 & -10 & 0 \\ -10 & -10 & 50 & 200 \end{array}\right] \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

حال با اعمال روش حذفی گوسی دستگاه معادلات حاصل را حل می کنیم،

<u>گام اول</u>- حذف مجهول i_1 از معادلات دوم و سوم،

$$\left.\begin{array}{l} \frac{20}{30} r_1 + r_2 \rightarrow r_2 \\ \frac{10}{30} r_1 + r_3 \rightarrow r_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 30 & -20 & -10 & 0 \\ 0 & \frac{125}{3} & \frac{-50}{3} & 0 \\ 0 & \frac{-50}{3} & \frac{140}{3} & 200 \end{array}\right] \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

<u>گام دوم</u>- حذف مجهول i_2 از معادله سوم،

$$\left.\frac{2}{5} r_2 + r_3 \rightarrow r_3 \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 30 & -20 & -10 & 0 \\ 0 & \frac{125}{3} & \frac{-50}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 200 \end{array}\right] \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

<u>گام سوم</u> - اجرای الگوریتم جایگزینی پسرو برای حل معادلات،

$$\begin{cases} 30i_1 - 20i_2 - 10i_3 = 0 \\ \frac{125}{3} i_2 - \frac{50}{3} i_3 = 0 \\ 40i_3 = 200 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} i_3 = 5 \\ i_2 = 2 \\ i_1 = 3 \end{cases}$$

لذا جریان هر یک از حلقه ها بدست می آید.

□

مثال ۲-۱۰

در یک آزمایش پرتاب موشک، سرعت موشک در راستای قائم در زمان های مختلف بصورت زیر اندازه گیری شده است،

t (sec) زمان	v (m/sec) سرعت
5	106.8
8	177.2
12	279.2

با توجه به این جدول سرعت موشک بر حسب زمان را می توان بصورت چندجمله ای درجه دوم تقریب زد،

$$v(t) = a_1 t^2 + a_2 t + a_3 \qquad , \qquad 5 \le t \le 12$$

با استفاده از روش حذفی گوسی مقدار ضرایب این چند جمله ای را بدست آورید. سپس سرعت موشک را در لحظه $t = 6\sec$ بیابید.

ابتدا باید با قرار دادن نقاط در معادله سرعت موشک بر حسب زمان دستگاه معادلات حاصل را بدست آوریم،

$$\begin{bmatrix} t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_3^2 & t_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad \to \quad \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$

حال با اعمال روش حذفی- گوسی این دستگاه معادلات را حل می نماییم، فرم ماتریس افزوده سیستم بصورت زیر است،

$$[A|\mathbf{b}] \quad \to \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 25 & 5 & 1 & 106.8 \\ 64 & 8 & 1 & 177.2 \\ 144 & 12 & 1 & 279.2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

<u>گام اول</u>- حذف مجهول a_1 از معادلات دوم و سوم، توجه کنید که $-64/25 = -2.56$ و $-144/25 = -5.76$ می باشد،

$$\left.\begin{array}{l} -2.56 r_1 + r_2 \to r_2 \\ -5.76 r_1 + r_3 \to r_3 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 25 & 5 & 1 & 106.8 \\ 0 & -4.8 & -1.56 & -96.208 \\ 0 & -16.8 & -4.76 & -335.968 \end{array}\right] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

گام دوم- حذف مجهول a_2 از معادله سوم، توجه کنید که $-16.8/4.8=-3.5$ می باشد،

$$-3.5r_2+r_3\to r_3\}\quad\Rightarrow\quad\left[\begin{array}{ccc|c}25&5&1&106.8\\0&-4.8&-1.56&-96.208\\0&0&0.7&0.76\end{array}\right]\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$$

گام سوم - اجرای الگوریتم جایگزینی پسرو برای حل معادلات،

$$\begin{cases}25a_1+5a_2+a_3=106.8\\-4.8a_2-1.56a_3=-96.208\\0.7a_3=0.76\end{cases}\quad\to\quad\begin{cases}a_3=1.0857\\a_2=19.6905\\a_1=0.2905\end{cases}$$

لذا معادله سرعت موشک بر حسب زمان بصورت زیر بدست می آید،

$$v(t)=0.2905t^2+19.6905t+1.0857\quad,\quad 5\le t\le 12$$

سرعت موشک را در لحظه $t=6\sec$ بصورت زیر محاسبه می شود،

$$v(6)=0.2905\times(6)^2+19.6905\times(6)+1.0857=129.686\ \text{m}/\sec$$

□

نکته۱: در اجرای عملیات حذفی- گوسی اگر یکی از عناصر قطر اصلی برابر با صفر گردد انجام عملیات متوقف خواهد شد. در چنین مواردی برای ادامه عملیات نیاز به جابجا کردن معادله مذکور یا همان سطرهای ماتریس افزوده داریم، که به این کار **محورگیری**[۱] گفته می شود. در انتخاب سطر مناسب برای جابجایی بخاطر پایداری الگوریتم، بهتر است سطری را در نظر بگیریم که بزرگترین عدد محوری را داشته باشد.

مثال ۲-۱۱

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases}2x_1+4x_2-2x_3-2x_4=-4\\x_1+2x_2+4x_3-3x_4=5\\-3x_1-3x_2+8x_3-2x_4=7\\-x_1+x_2+6x_3-3x_4=7\end{cases}$$

فرم ماتریسی این معادلات بصورت زیر می باشد،

[۱] Pivoting

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & -3 \\ -3 & -3 & 8 & -2 \\ -1 & 1 & 6 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}$$

می خواهیم این دستگاه معادلات خطی را با استفاده از روش حذفی گوسی حل کنیم. حال مراحل مربوطه را طی می نماییم،

(۱) ابتدا باید مجهول x_1 را از معادلات دوم تا چهارم حذف نماییم،

$$\left.\begin{array}{l} \frac{-1}{2}r_1+r_2\rightarrow r_2 \\ \frac{3}{2}r_1+r_3\rightarrow r_3 \\ \frac{1}{2}r_1+r_4\rightarrow r_4 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & -4 & 5 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

(۲) حال باید مجهول x_2 را از معادلات سوم و چهارم حذف نماییم، لیکن به علت صفر بودن عنصر محوری a_{22} این کار امکان پذیر نمی باشد. در چنین شرایطی باید عمل محورگیری انجام دهیم، یعنی جای معادله دوم را با معادله چهارم عوض می نماییم. بنابراین ماتریس افزوده جدید بصورت زیر قابل بازنویسی خواهد بود،

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 5 & -4 & 5 \\ 0 & 3 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 7 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

(۳) حال می توانیم مجهول x_2 را از معادلات سوم و چهارم حذف کنیم،

$$-r_2+r_3\rightarrow r_3 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 5 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 7 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

(۴) این بار لازم است تا مجهول x_3 را از معادله چهارم حذف نماییم، لیکن باز هم عنصر محوری a_{33} برابر با صفر است، پس باز هم عمل محورگیری را انجام داده و جای معادله سوم را با معادله چهارم عوض می نماییم،

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 5 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

به این ترتیب ماتریس ضرایب به فرم بالامثلثی تبدیل می گردد و دستگاه معادلات حاصل بصورت زیر خواهد بود،

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= -4 \\ 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= 5 \\ 5x_3 - 2x_4 &= 7 \\ -x_4 &= -4 \end{aligned}$$

که جواب ها به راحتی با استفاده از الگوریتم جایگزینی پسرو قابل محاسبه هستند،

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 4$$

ماتریس های مقدماتی برای انجام هر مرحله بصورت زیر بدست می آیند،

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

در برنامه gauss1 عملیات محورگیری در نظر گرفته نشده است، لذا استفاده از این برنامه در این حالت پیغام خطایی بصورت زیر می دهد،

```
A =[2 4 - 2 - 2;1 2 4 - 3;-3 - 3 8 - 2;-1 1 6 - 3];
b =[-4;5;7;7];
x = gauss1(A,b)
??? Error using ==> gauss1
algorithm needs pivoting
```

لذا می توان بصورت زیر برنامه را اصلاح نمود تا عمل محورگیری هم صورت گیرد،

```
%Gaussian Elimination algorithm with pivoting.
function [x,AB] = gauss2(A,B)
NA = size(A,2);
[NB1,NB] = size(B);
if NB1 ~= NA,
   error('A and B must have compatible dimensions');
end
NA;
AB = [A B];
E = eye(NA,NA);
for j = 1:NA - 1
for i = j+1:NA
      if AB(j,j) ~= 0
      E(i,j) = - AB(i,j) / AB(j,j);
   AB = E * AB;
         E = eye(NA,NA);
      else
         [max,k] = max(abs(AB([j:NA],j)));
         AB([j k+(j-1)],:) = AB([k+(j-1) j],:);
         E(i,j) = - AB(i,j) / AB(j,j);
   AB = E * AB;
         E = eye(NA,NA);
      end
   end
end
```

```
% backward substitution for a upper-triangular matrix equation
x = zeros(1,NA);
sum = 0;
for i = NA:-1:1
   for j = i+1:NA
      sum = sum + x(1,j) * AB(i,j);
   end
   x(1,i) = (AB(i,NA+1) - sum) / AB(i,i);
   sum = 0;
end
```

اجرای برنامه بصورت زیر است،

```
A =[2  4 -2 -2;1  2  4 -3;-3 -3  8 -2;-1  1  6 -3];
b =[-4;5;7;7];
[x AB]= gauss2(A,b)
x =
     1     2     3     4
AB =
     2     4    -2    -2    -4
     0     3     5    -5     1
     0     0     5    -2     7
     0     0     0     1     4
```

□

مثال ۲-۱۲

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7 \end{cases}$$

فرم ماتریس افزوده این دستگاه معادلات بصورت زیر می باشد،

$$[A|\mathbf{b}] \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & -7 \end{array}\right]$$

گام اول- حذف مجهول x_1 از معادلات دوم و سوم،

$$\left.\begin{array}{l} r_1+r_2\rightarrow r_2 \\ -2r_1+r_3\rightarrow r_3 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$E_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

گام دوم- جابجایی معادلات دوم و سوم حذف مجهول x_2 از معادله سوم،

$$r_2\leftrightarrow r_3 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad E_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

گام سوم - اجرای الگوریتم جایگزینی پسرو برای حل معادلات،

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=-2 \\ 3x_2-3x_3=-3 \\ x_3=1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_3=1 \\ x_2=\frac{1}{3}(-3+3x_3)=0 \\ x_1=-2+2x_2-3x_3=-5 \end{cases}$$

□

۲-۳-۱-۱- حجم محاسبات جبری الگوریتم حذفی گوسی

الگوریتم حذفی گوسی را می توان از نظر تعداد محاسبات جبری نیز بررسی نمود. در حالت کلی تعداد عملیات لازم برای محاسبات جبری بصورت زیر بدست می آید،

۱- جمع دو بردار $n\times 1$:

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=[u_1+v_1,u_2+v_2,\ldots,u_n+v_n]$$

- نیاز به انجام n عملیات جمع جبری دارد،

۲- ضرب عدد اسکالر a در یک بردار $n\times 1$:

$$a\mathbf{u}=[au_1,au_2\ldots,au_n]$$

- نیاز به انجام n عملیات ضرب جبری دارد،

هر یک از این عملیات جبری (جمع/ تفریق و ضرب/ تقسیم) را اصطلاحاً یک flop[۱] می نامند.

---

[۱] Floating-point operation

۳- ضرب داخلی دو بردار $n\times1$: $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = u^T v = u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n=\sum_{i=1}^{n}u_iv_i$

- معادل با n عمل ضرب و $n-1$ عمل جمع می باشد، لذا تعداد کل عملیات $2n-1$ خواهد بود.

۴- ضرب بردار در ماتریس: $\mathbf{y}_{m\times1}=A_{m\times n}\mathbf{x}_{n\times1}$

- این حالت را می توان معادل با ضرب داخلی m بردار $n\times1$ در نظر گرفت، لذا تعداد کل عملیات $(2n-1)m$ است.

- برای ماتریس هایی با ابعاد بزرگ ($n\to\infty$) می توان $2nm$ عملیات در نظر گرفت.

- اگر A ماتریس قطری باشد $(m=n)$، محاسبات n عمل ضرب خواهد بود.

۵- ضرب ماتریس در ماتریس: $C_{m\times p}=A_{m\times n}B_{n\times p}$

- با توجه به بند ۴ تعداد محاسبات جبری $(2n-1)mp$ بدست می آید.

- برای ماتریس هایی با ابعاد بزرگ ($n\to\infty$) می توان $2nmp$ عملیات در نظر گرفت.

۶ - الگوریتم جایگزینی پسرو یا پیشرو:

- دستگاه معادلات زیر را در بگیرید،

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}\to\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\0&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}$$

الگوریتم جایگزینی پسرو به فرم زیر است،

$$\begin{aligned}x_n&=b_n/a_{nn}\\x_{n-1}&=(b_{n-1}-a_{n-1,n}x_n)/a_{n-1,n-1}\\x_{n-2}&=(b_{n-2}-a_{n-2,n-1}x_{n-1}-a_{n-2,n}x_n)/a_{n-2,n-2}\\\vdots&\quad\vdots\\x_1&=(b_1-a_{12}x_2-a_{13}x_3-\cdots-a_{1n}x_n)/a_{11}\end{aligned}$$

تعداد عملیات جبری مورد نیاز برای انجام این الگوریتم بصورت زیر بدست می آید،

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}\quad\rightarrow\quad \text{عملیات ضرب یا تقسیم}$$

$$0+1+2+\cdots+n-1=\frac{n(n+1)}{2}-n\quad\rightarrow\quad \text{عملیات جمع یا تفریق}$$

لذا در کل n^2 عملیات جبری خواهد بود.

۷- الگوریتم حذفی گوسی برای دستگاه معادلات $n \times n$:

$$\frac{n^3}{3}+n^2-\frac{n}{3} \quad \rightarrow$$ عملیات ضرب یا تقسیم

$$\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}-\frac{5n}{6} \quad \rightarrow$$ عملیات جمع یا تفریق

- برای ($n \rightarrow \infty$) می توان هر یک را $\frac{n^3}{3}$ عملیات و در کل $\frac{2n^3}{3}$ در نظر گرفت.

مثال۲-۱۳

به حجم محاسبات برای حل دستگاه معادلات با روش حذفی گوسی توجه نمایید،

$$3\times 3 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \frac{3^3}{3}+3^2-\frac{3}{3}=11 \\ \frac{3^3}{3}+\frac{3^2}{2}-\frac{5\times 3}{6}=5 \end{cases} \quad \rightarrow \quad 16\, flops$$

عبارت flop[1] برای بیان تعداد عملیات جبری بکار می رود.

$$5\times 5 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \frac{5^3}{3}+5^2-\frac{5}{3}=65 \\ \frac{5^3}{3}+\frac{5^2}{2}-\frac{5\times 5}{6}=50 \end{cases} \quad \rightarrow \quad 115\, flops$$

□

در نرم افزار MATLAB از دستور flops می توان تعداد عملیات جبری انجام شده را بدست آورد. این دستور برای عمل جمع یا تفریق اعداد حقیقی $1\ \ flops$ و برای اعداد مختلط $2\ \ flops$ در نظر می گیرد. در مورد عمل ضرب و تقسیم برای اعداد حقیقی $1\ \ flops$ و برای اعداد مختلط $6\ \ flops$ در نظر می گیرد. دستور flops(0) شمارش را از صفر آغاز می کند.

به نمونه های زیر توجه نمایید،

```
u =[3;1;0;-5;9];
v =[2;-1;3;4;8];
A =[6 -1;2 9;7 8];
B =[3 8 5 6;8 -1 -9 6];
C =[5 6 4 2 5;1 6 -1 0 3];
```

[1] Floating point operations per second

```
flops(0)
u+v;
nflops=flops
nflops =
     5
flops(0)
u'*v;
nflops=flops
nflops =
    10
flops(0)
A*B;
nflops=flops
nflops =
    48
flops(0)
C*u;
nflops=flops
nflops =
    20
```

۲-۳-۱-۲- فرم سطری پلکانی

در مثال های قبل تعداد معادلات با تعداد مجهولات مساوی در نظر گرفته شده بود، به عبارتی $m=n$ و ماتریس A مربعی است. لیکن در صورتیکه ماتریس A مربعی نباشد، سعی می شود تا ماتریس A به **فرم سطری پلکانی**[۱] زیر تبدیل گردد،

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۵-۲)$$

[۱] Row Echelon Form

فرم سطری پلکانی خصوصیات زیر را داراست،

۱- سطرهایی که تمامی عناصر آنها صفر است در بخش پایین ماتریس قرار می گیرند.

۲- در سطرهایی که شامل عناصر غیر صفر هستند، اولین عنصر غیر صفر در سمت چپ سطر، عدد یک می باشد، که به آن، **عنصر محوری**[۱] گفته می شود.

فرایند تبدیل ماتریس ضرایب $m\times n$ به فرم سطری پلکانی را می توان بصورت زیر خلاصه کرد،

گام اول- در صورتیکه ضریب x_1 در معادله اول یک نباشد،

$$\frac{1}{a_{11}}r_1 \to r_1$$

حذف مجهول x_1 از معادلات دوم تا mام،

$$-a_{i1}r_1 + r_i \to r_i \qquad , \qquad i = 2,\dots,m$$

گام دوم- در صورتیکه ضریب x_2 در معادله دوم یک نباشد،

$$\frac{1}{a_{22}}r_2 \to r_2$$

حذف مجهول x_2 از معادلات سوم تا mام،

$$-a_{i2}r_2 + r_i \to r_i \qquad , \qquad i = 3,\dots,m$$

گام سوم- به همین ترتیب تا گام $m-1$ ادامه می دهیم.

مثال۲-۱۴

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 = 5 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$$

فرم ماتریس افزوده این معادلات بصورت زیر می باشد،

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 7 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

[۱] Pivot Entry

(۱) از آنجاییکه ضریب x_1 در سطر اول یک و در سطر دوم صفر می باشد، لذا x_1 را از سطر سوم حذف نماییم،

$$-2r_1+r_3 \to r_3 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -3 & -1 & -7 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

(۲) با توجه به اینکه ضریب x_2 در سطر دوم یک است، لذا x_2 را از سطر سوم حذف می نماییم،

$$2r_2+r_3 \to r_3 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

(۳) از آنجاییکه در سطر سوم، اولین عدد غیر صفر از سمت چپ یک می باشد، لذا الگوریتم پایان یافته است و فرم سطری پلکانی بصورت زیر بدست می آید،

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

بنابراین، دستگاه معادلات معادل بصورت زیر در خواهد آمد،

$$\begin{aligned} &x_1+3x_2+x_3+5x_4+x_5=5 \\ &x_2+x_3+2x_4+x_5=4 \\ &x_4+x_5=1 \end{aligned}$$

از آنجائیکه تعداد مجهولات بیشتر از تعداد معادلات می باشند، می توان برخی از مجهولات را برحسب دیگری بدست آورد،

$$x_1=-6+x_5+2x_3, \quad x_2=2+x_5-x_3, \quad x_4=1-x_5$$

با توجه به این جوابها، متغیرهای x_1,x_2,x_4 مستقل نبوده و وابسته به مقدار x_3 و x_5 هستند، به x_3 و x_5 **متغیرهای آزاد**[۱] نیز گفته می شود. با کمی دقت می توان دریافت که متغیرهای x_1,x_2,x_4 مربوط به ستون هایی هستند که عناصر محوری در آنها قرار دارند.

□

[۱] Free variables

مثال۲-۱۵

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} 7x_1+2x_2-2x_3-4x_4+3x_5=8 \\ -3x_1-3x_2+2x_4+x_5=-1 \\ 4x_1-x_2-8x_3+20x_5=1 \end{cases}$$

فرم ماتریس افزوده این معادلات بصورت زیر می باشد،

$$[A|\mathbf{b}] \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 7 & 2 & -2 & -4 & 3 & 8 \\ -3 & -3 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -8 & 0 & 20 & 1 \end{array}\right]$$

گام اول- ابتدا ضریب x_1 را در معادله اول به یک تبدیل می کنیم،

$$\frac{1}{7}r_1 \rightarrow r_1 \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{2}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{-4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{8}{7} \\ -3 & -3 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -8 & 0 & 20 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

حذف مجهول x_1 از معادلات دوم و سوم،

$$\left.\begin{array}{l} 3r_1+r_2 \rightarrow r_2 \\ -4r_1+r_3 \rightarrow r_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{2}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{-4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{8}{7} \\ 0 & \frac{-15}{7} & \frac{-6}{7} & \frac{2}{7} & \frac{16}{7} & \frac{17}{7} \\ 0 & \frac{-15}{7} & \frac{-48}{7} & \frac{16}{7} & \frac{128}{7} & \frac{-25}{7} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

گام دوم- از آنجاییکه ضریب x_2 در معادله دوم یک نیست داریم،

$$\frac{-7}{15}r_2 \rightarrow r_2 \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{2}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{-4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{8}{7} \\ 0 & 1 & \frac{6}{15} & \frac{-2}{15} & \frac{-16}{15} & \frac{-17}{15} \\ 0 & \frac{-15}{7} & \frac{-48}{7} & \frac{16}{7} & \frac{128}{7} & \frac{-25}{7} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

حذف مجهول x_2 از معادله سوم،

$$\frac{15}{7}r_2+r_3\to r_3 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{2}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{-4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{8}{7} \\ 0 & 1 & \frac{6}{15} & \frac{-2}{15} & \frac{-16}{15} & \frac{-17}{15} \\ 0 & 0 & -6 & 2 & 16 & -6 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

گام سوم- ضریب x_3 را در معادله سوم به یک تبدیل می کنیم،

$$\frac{-1}{6}r_3\to r_3 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{2}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{-4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{8}{7} \\ 0 & 1 & \frac{6}{15} & \frac{-2}{15} & \frac{-16}{15} & \frac{-17}{15} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-8}{3} & 1 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

گام چهارم- با توجه به اینکه x_4 و x_5 متغیرهای آزاد هستند، دستگاه معادلات حاصل را حل می کنیم،

$$\left.\begin{array}{r} x_1+\frac{2}{7}x_2-\frac{2}{7}x_3-\frac{4}{7}x_4+\frac{3}{7}x_5=\frac{8}{7} \\ x_2+\frac{6}{15}x_3-\frac{2}{15}x_4-\frac{16}{15}x_5=\frac{-17}{15} \\ x_3-\frac{1}{3}x_4-\frac{8}{3}x_5=1 \end{array}\right\} \quad \to \quad \left\{\begin{array}{l} x_1=\frac{28}{15}+\frac{2}{3}x_4+\frac{1}{3}x_5 \\ x_2=\frac{-23}{15} \\ x_3=1+\frac{1}{3}x_4+\frac{8}{3}x_5 \end{array}\right.$$

این دستگاه بیشمار جواب دارد.

□

مثال۲-۱۶

معادله شیمیایی اکسیداسیون آمونیاک را در نظر بگیرید،

$$(x_1)NH_3+(x_2)O_2\to(x_3)NO+(x_4)H_2O$$

که محصول نهایی آن منواکسید نیتروژن و آب می باشد. هدف یافتن کمترین مقادیر صحیح مثبت برای x_1، x_2، x_3 و x_4 می باشد بطوریکه تعادل در معادله شیمیایی بالا برقرار گردد. برای این منظور تعداد اتمهای هر یک از عناصر را در طرفین معادله شیمیایی در نظر می گیریم،

$$N: \quad x_1=x_3$$
$$H: \quad 3x_1=2x_4$$
$$O: \quad 2x_2=x_3+x_4$$

در نتیجه یک دستگاه معادلات همگن با سه معادله و چهار مجهول بشکل زیر بدست می آید،

$$x_1 - x_3 = 0$$
$$3x_1 - 2x_4 = 0$$
$$2x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

برای این دستگاه معادلات خطی ماتریس افزوده زیر قابل نوشتن است،

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

با اعمال روش سطری پلکانی معادلات به شکل زیر در می آید،

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{3} & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

با توجه به محل قرار گرفتن عناصر محوری می توان گفت که x_1، x_2 و x_3 متغیرهای وابسته و x_4 متغیر آزاد می باشد. به این ترتیب مجموعه جواب به شکل زیر بدست می آید،

$$x_1 = \frac{2}{3}x_4\,, \qquad x_2 = \frac{5}{6}x_4\,, \qquad x_3 = \frac{2}{3}x_4$$

بنابراین با انتخاب $x_4 = 6$ کمترین مقادیر صحیح مثبت برای x_1، x_2، x_3 و x_4 بدست می آید،

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4,5,4,6)$$

نهایتاً معادله شیمیایی به شکل زیر خواهد بود،

$$4NH_3 + 5O_2 \rightarrow 4NO + 6H_2O$$

□

۲-۳-۲- روش گوس- جردن

در روش گوس - جردن سعی بر آن است تا عملیات انجام شده بر روی ماتریس افزوده چنان باشد که ماتریس A تبدیل به یک ماتریس قطری با عناصر قطر اصلی یک گردد. به عبارتی ماتریس افزوده در حالت $m = n$ به فرم زیر تبدیل می گردد،

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & b'_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b'_n \end{array}\right) \qquad (۶-۲)$$

الگوریتم کلی را بصورت زیر می توان بیان کرد،

گام اول- حذف مجهول x_1 از تمامی معادلات به جز معادله اول،

$$\frac{-a_{i1}}{a_{11}} r_1 + r_i \to r_i \quad , \quad i = 2,\ldots,n$$

گام دوم- حذف مجهول x_2 از تمامی معادلات به جز معادله دوم،

$$\frac{-a_{i2}}{a_{22}} r_2 + r_i \to r_i \quad , \quad i = 1,\ldots,n, \quad i \neq 2$$

گام سوم- به همین ترتیب تا گام $n-1$ ادامه می دهیم.

گام چهارم- تبدیل عناصر قطری به یک،

$$\frac{1}{a_{ii}} r_i \to r_i \quad , \quad i = 1,\ldots,n$$

همانند آنچه که در اعمال روش حذفی گوسی گفته شد، در روش گوس- جردن نیز اگر یکی از عناصر قطری به عدد صفر تبدیل گردد نیاز به عمل محورگیری خواهد بود. در این روش نسبت به روش حذفی گوسی حجم محاسبات الگوریتم بیشتر است، لیکن در پایان نیازی به اجرای الگریتم جایگزینی پسرو وجود ندارد.

مثال۲-۱۷

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

فرم ماتریس افزوده سیستم به بصورت زیر خواهد بود،

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

از آنجاییکه ضریب x_1 در معادله اول برابر صفر است، با جابجا کردن سطر اول و سوم داریم،

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(۱) ضریب x_1 در معادله سوم صفر می باشد، لذا مجهول x_1 را از معادله دوم حذف می نماییم ،

$$\frac{-1}{2}r_1 + r_2 \to r_2 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(۲) حذف مجهول x_2 از معادلات اول و سوم،

$$\left.\begin{array}{l} -2r_2 + r_1 \to r_1 \\ -4r_2 + r_3 \to r_3 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -5 & -6 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(۳) حذف مجهول x_3 از معادلات اول و دوم،

$$\left.\begin{array}{l} \frac{-2}{5}r_3 + r_1 \to r_1 \\ \frac{3}{10}r_3 + r_2 \to r_2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & \frac{22}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{7}{10} \\ 0 & 0 & -5 & -6 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(۴) در این مرحله که ماتریس A بصورت قطری در آمده است، با تقسیم هر سطر بر عنصر قطر اصلی آن ماتریس A را به یک ماتریس واحد تبدیل می نماییم،

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}r_1 \to r_1 \\ 2r_2 \to r_2 \\ \frac{-1}{5}r_3 \to r_3 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{5} \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

به این ترتیب مقدار مجهولات به صورت زیر بدست می آید،

$$x_1 = \frac{11}{5}, \qquad x_2 = \frac{7}{5}, \qquad x_3 = \frac{6}{5}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB می توان برنامه ای برای الگوریتم گوس- جردن نوشت،

```
%Gauss-Jordan algorithm with pivoting.
function [x,AB] = gaussjordan(A,B)
NA = size(A,2);
[NB1,NB] = size(B);
if NB1 ~= NA,
   error('A and B must have compatible dimensions');
end
NA;
AB = [A B];
E = eye(NA,NA);
```

```
for j = 1:NA
for i = 1:NA
      if AB(j,j) ~= 0
      E(i,j) = - AB(i,j) / AB(j,j);
   AB = E * AB;
         E = eye(NA,NA);
      else
         [max,k] = max(abs(AB([j:NA],j)));
         AB([j k+(j-1)],:) = AB([k+(j-1) j],:);
         E(i,j) = - AB(i,j) / AB(j,j);
         AB = E * AB;
         E = eye(NA,NA);
      end
   end
end
E = eye(NA,NA);
for i = 1:NA
   E(i,i) = 1 / AB(i,i);
end
   AB = E * AB;
x = AB(:,NA+1)';
```

اجرای برنامه بصورت زیر است که شامل پاسخ سیستم و ماتریس افزوده قطری شده می باشد،

```
A =[0 2 1;1 1 2;2 1 1];
b =[4;6;7];
[x AB]= gaussjordan(A,b)
x =
    2.2000    1.4000    1.2000
AB =
    1.0000         0         0    2.2000
         0    1.0000         0    1.4000
         0         0    1.0000    1.2000
```

□

مثال۲-۱۸

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13 \\ 3x_1 + x_3 = -1 \end{cases}$$

فرم ماتریس افزوده این معادلات بصورت زیر می باشد،

$$[A|\mathbf{b}] \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 13 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

گام اول- حذف مجهول x_1 از تمامی معادلات به جز معادله اول،

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}r_1 + r_2 \rightarrow r_2 \\ \frac{3}{2}r_1 + r_3 \rightarrow r_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 15 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & 5 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

گام دوم- حذف مجهول x_2 از تمامی معادلات به جز معادله دوم،

$$\left.\begin{array}{l} \frac{-2}{5}r_2 + r_1 \rightarrow r_1 \\ \frac{-3}{5}r_2 + r_3 \rightarrow r_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 15 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

گام سوم - حذف مجهول x_3 از تمامی معادلات به جز معادله سوم،

$$\left.\begin{array}{l} -r_3 + r_1 \rightarrow r_1 \\ \frac{5}{4}r_3 + r_2 \rightarrow r_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

گام چهارم- تبدیل عناصر قطری به عدد یک و بدست آوردن جوابها،

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \rightarrow E_7 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

$$x_1 = -1 \quad , \quad x_2 = 4 \quad , \quad x_3 = 2$$

□

مثال۲-۱۹

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7 \end{cases}$$

فرم ماتریس افزوده این دستگاه معادلات بصورت زیر می باشد،

$$[A|\mathbf{b}] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & -7 \end{array}\right]$$

گام اول- حذف مجهول x_1 از تمامی معادلات به جز معادله اول،

$$\left.\begin{array}{l} r_1 + r_2 \rightarrow r_2 \\ -2r_1 + r_3 \rightarrow r_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

گام دوم- جابجایی معادلات دوم و سوم حذف مجهول x_2 از تمامی معادلات به جز معادله دوم،

$$r_2 \leftrightarrow r_3 \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \rightarrow E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\frac{2}{3}r_2 + r_1 \rightarrow r_1\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \rightarrow E_4 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

گام سوم- حذف مجهول x_3 از تمامی معادلات به جز معادله سوم،

$$\left.\begin{array}{l} -r_3+r_1\rightarrow r_1 \\ 3r_3+r_2\rightarrow r_2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$E_5=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_6=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

گام چهارم- تبدیل عناصر قطری به عدد یک و بدست آوردن جوابها،

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \quad E_7=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1=-5 \quad , \quad x_2=0 \quad , \quad x_3=1$$

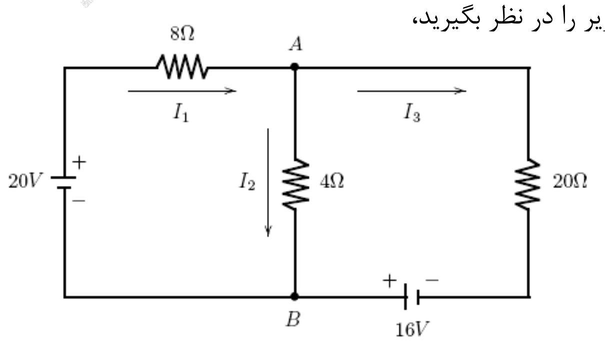
با اجرای برنامه gaussjordan نتایج بصورت زیر بدست می آید،

```
A =[1 -2 3;-1 2 -2;2 -1 3];
b =[-2;3;-7];
x = gaussjordan(A,b)
x =
    -5     0     1
AB =
     1     0     0    -5
     0     1     0     0
     0     0     1     1
```

□

مثال۲-۲۰

مدار الکتریکی ساده زیر را در نظر بگیرید،



هدف در این مدار یافتن مقدار جریانهای I_1، I_2 و I_3 می باشد. با اعمال قوانین مداری معادلات زیر بدست می آیند،

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \\ 8I_1 + 4I_2 &= 20 \\ 4I_2 - 20I_3 &= -16 \end{aligned}$$

برای این دستگاه معادلات خطی ماتریس افزوده زیر قابل نوشتن است،

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \end{array}\right]\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

که با اعمال روش گاوس- جردن به صورت زیر بیان می گردد،

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

بنابراین جوابها بصورت زیر خواهند بود،

$$I_1 = 2A, \quad I_2 = I_3 = 1A,$$

□

۲-۳-۲-۱- حجم محاسبات جبری الگوریتم گوس- جردن

حجم محاسبات جبری برای الگوریتم گوس- جردن بصورت زیر است،

$$\frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{2} \rightarrow$$ عملیات ضرب یا تقسیم

$$\frac{n^3}{2} - \frac{n}{2} \rightarrow$$ عملیات جمع یا تفریق

برای ($n \to \infty$) می توان هر یک را $\frac{n^3}{2}$ عملیات و در مجموع n^3 در نظر گرفت. لذا برای دستگاه معادلات با ابعاد بزرگ استفاده از روش گوس- جردن نیازمند عملیات بسیار بیشتری نسبت به روش حذفی گوسی است. بطور مثال برای $n = 100$ داریم،

روش حذفی گوسی: $\frac{2n^3}{3} = 0.67 \times 10^6$

روش گوس- جردن: $n^3 = 10^6$

اختلاف در حجم محاسبات دو روش معادل 300000 عملیات جمع و ضرب است.

۲-۳-۲-۲- کاربرد در محاسبه ماتریس معکوس

یکی از کاربردهای روش گوس- جردن در محاسبه ماتریس معکوس می باشد،

$$AA^{-1} = I \quad \rightarrow \quad [A|I] \Rightarrow [I|A^{-1}] \tag{۲-۷}$$

مثال۲-۲۱

معکوس ماتریس A را با استفاده از روش گوس- جردن بدست آورید،

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

با استفاده از رابطه(۲-۷) داریم،

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

حال روش گوس- جردن را بر روی این ماتریس افزوده پیاده می کنیم،

$$\left.\begin{array}{l} r_1 + r_2 \to r_2 \\ -2r_1 + r_3 \to r_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{-2}{3} r_2 + r_1 \to r_1 \\ \frac{5}{3} r_2 + r_3 \to r_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-4}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{5}{3} & 1 \end{array}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{7}{4} r_3 + r_1 \to r_1 \\ \frac{3}{4} r_3 + r_2 \to r_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{9}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 3 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{-4}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{5}{3} & 1 \end{array}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{3} r_2 \to r_2 \\ \frac{-3}{4} r_3 \to r_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{9}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{-5}{3} & \frac{-3}{4} \end{array}\right] = [I|A^{-1}]$$

لذا به راحتی و بدون نیاز به محاسبه ماتریس الحاقی معکوس ماتریس A بدست می آید. می توان با اجرای برنامه gaussjordan و دستور inv نتیجه را بررسی نمود،

```
A =[1 2 3;-1 1 -2;2 -1 3];
I = eye(3);
[x AB]= gaussjordan(A,I)
AB =
    1.0000         0         0   -0.2500    2.2500    1.7500
         0    1.0000         0    0.2500    0.7500    0.2500
         0         0    1.0000    0.2500   -1.2500   -0.7500
inv(A)
ans =
   -0.2500    2.2500    1.7500
    0.2500    0.7500    0.2500
    0.2500   -1.2500   -0.7500
```

در خروجی برنامه ماتریس افزوده $\left[I \middle| A^{-1}\right]$ ظاهر می شود، که با حاصل دستور inv مطابقت دارد.

□

۲-۳-۲-۳- فرم سطری پلکانی کاهش یافته

در صورتیکه ماتریس A مربعی نباشد و $m \neq n$ باشد دیگر نمی توان معادلات را به شکل رابطه (۲-۵) در آورد، در این صورت سعی می شود تا ماتریس A را به **فرم سطری پلکانی کاهش یافته**[1] درآورد، یک نمونه از فرم سطری پلکانی کاهش یافته در رابطه زیر نشان داده شده است. در اینجا *ها می توانند عددی صفر یا غیر صفر باشند،

$$\begin{bmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۲-۸)$$

نمایش سطری پلکانی دارای خصوصیات زیر می باشد،

۱- سطرهایی که تمامی عناصر آنها صفر می باشد در بخش پایین ماتریس قرار دارند.

۲- در سطرهایی که شامل عناصر غیر صفر هستند، اولین عنصر غیر صفر در سمت چپ آن سطر، عدد یک می باشد، که به آن، عنصر محوری گفته می شود.

۳- در ستون هایی که دارای عنصر محوری است، کلیه عناصر بالای عنصر محوری صفر می باشد.

[1] Reduced Row Echelon Form

فرایند تبدیل ماتریس ضرایب $m \times n$ به فرم سطری پلکانی کاهش یافته بصورت زیر است،

گام اول- در صورتیکه ضریب x_1 در معادله اول یک نباشد،

$$\frac{1}{a_{11}} r_1 \rightarrow r_1$$

حذف مجهول x_1 از معادلات دوم تا mام،

$$-a_{i1} r_1 + r_i \rightarrow r_i \quad , \quad i = 2, \ldots, m$$

گام دوم- در صورتیکه ضریب x_2 در معادله دوم یک نباشد،

$$\frac{1}{a_{22}} r_2 \rightarrow r_2$$

حذف مجهول x_2 از تمامی معادلات به جز معادله دوم،

$$-a_{i2} r_2 + r_i \rightarrow r_i \quad , \quad i = 1, \ldots, m, \quad i \neq 2$$

گام سوم- به همین ترتیب تا گام $m-1$ ادامه می دهیم.

مثال۲-۲۲

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 = 5 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$$

ماتریس افزوده این معادلات به فرم زیر می باشد،

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 7 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

حال می خواهیم آن را به فرم سطری پلکانی کاهش یافته در آوریم.

(۱) ضریب x_1 در معادله اول یک و در معادله دوم صفر می باشد، لذا باید x_1 را از سطر سوم حذف نماییم،

$$-2r_1 + r_3 \rightarrow r_3 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -3 & -1 & -7 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

(۲) ضریب x_2 در معادله دوم یک می باشد، لذا x_2 را از سطر اول و دوم حذف می نماییم،

$$\left.\begin{array}{l} -3r_2+r_1\to r_1 \\ 2r_2+r_3\to r_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

(۳) از آنجاییکه ضریب x_3 در سطر سوم صفر می باشد، سراغ x_4 می رویم. ضریب x_4 یک است، پس کافی است که x_4 را از معادلات اول و دوم حذف نماییم،

$$\left.\begin{array}{l} r_3+r_1\to r_1 \\ -2r_3+r_2\to r_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

به این ترتیب فرم سطری پلکانی کاهش یافته معادلات بدست می آید، با توجه به معادلات بدست آمده نتایج زیر حاصل می شود،

$$x_1=-6+x_5+2x_3,\quad x_2=2+x_5-x_3,\quad x_4=1-x_5$$

با کمی دقت متوجه می شویم که متغیرهای x_1, x_2, x_4 مربوط به ستون هایی هستند که عناصر محوری در آن قرار دارند.

برای بدست آوردن فرم سطری پلکانی کاهش یافته در نرم افزار MATLAB می توان از دستور rref(A) استفاده نمود،

```
A =[1 3 1 5 1;0 1 1 2 1;2 4 0 7 1];
b =[5;4;3];
rref([A b])
ans =
     1     0    -2     0    -1    -6
     0     1     1     0    -1     2
     0     0     0     1     1     1
```

دستور [A b] فرم ماتریس افزوده را نتیجه می دهد.

□

مثال۲-۲۳

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} 7x_1+2x_2-2x_3-4x_4+3x_5=8 \\ -3x_1-3x_2+2x_4+x_5=-1 \\ 4x_1-x_2-8x_3+20x_5=1 \end{cases}$$

ماتریس افزوده این معادلات به فرم زیر است،

$$[A|\mathbf{b}] \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 7 & 2 & -2 & -4 & 3 & 8 \\ -3 & -3 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -8 & 0 & 20 & 1 \end{array}\right]$$

<u>گام اول</u>- ابتدا ضریب x_1 را در معادله اول به یک تبدیل می کنیم،

$$\frac{1}{7}r_1 \rightarrow r_1 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{2}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{-4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{8}{7} \\ -3 & -3 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -8 & 0 & 20 & 1 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

حذف مجهول x_1 از تمامی معادلات به جز معادله اول،

$$\left.\begin{array}{l} 3r_1+r_2 \rightarrow r_2 \\ -4r_1+r_3 \rightarrow r_3 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{2}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{-4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{8}{7} \\ 0 & \frac{-15}{7} & \frac{-6}{7} & \frac{2}{7} & \frac{16}{7} & \frac{17}{7} \\ 0 & \frac{-15}{7} & \frac{-48}{7} & \frac{16}{7} & \frac{128}{7} & \frac{-25}{7} \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

<u>گام دوم</u>- از آنجاییکه ضریب x_2 در معادله دوم یک نیست داریم،

$$\frac{-7}{15}r_2 \rightarrow r_2 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{2}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{-4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{8}{7} \\ 0 & 1 & \frac{6}{15} & \frac{-2}{15} & \frac{-16}{15} & \frac{-17}{15} \\ 0 & \frac{-15}{7} & \frac{-48}{7} & \frac{16}{7} & \frac{128}{7} & \frac{-25}{7} \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

حذف مجهول x_2 از تمامی معادلات به جز معادله دوم،

$$\left.\begin{array}{l}\frac{15}{7}r_2+r_3\to r_3\\ \frac{-2}{7}r_2+r_1\to r_1\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{ccccc|c}1&0&\frac{-6}{15}&\frac{-8}{15}&\frac{11}{15}&\frac{22}{15}\\0&1&\frac{6}{15}&\frac{-2}{15}&\frac{-16}{15}&\frac{-17}{15}\\0&0&-6&2&16&-6\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}$$

<u>گام سوم</u>- ضریب x_3 را در معادله سوم به یک تبدیل می کنیم،

$$\frac{-1}{6}r_3\to r_3\quad\Rightarrow\left[\begin{array}{ccccc|c}1&0&\frac{-6}{15}&\frac{-8}{15}&\frac{11}{15}&\frac{22}{15}\\0&1&\frac{6}{15}&\frac{-2}{15}&\frac{-16}{15}&\frac{-17}{15}\\0&0&1&\frac{-1}{3}&\frac{-8}{3}&1\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}$$

<u>گام چهارم</u> - حذف مجهول x_3 از تمامی معادلات به جز معادله سوم،

$$\left.\begin{array}{l}\frac{6}{15}r_3+r_1\to r_1\\ \frac{-6}{15}r_3+r_2\to r_2\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{ccccc|c}1&0&0&\frac{-2}{3}&\frac{-1}{3}&\frac{28}{15}\\0&1&0&0&0&\frac{-23}{15}\\0&0&1&\frac{-1}{3}&\frac{-8}{3}&1\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}$$

<u>گام پنجم</u>- با توجه به اینکه x_4 و x_5 متغیرهای آزاد هستند، دستگاه معادلات حاصل را حل می کنیم،

$$\left.\begin{array}{r}x_1-\frac{2}{3}x_4-\frac{1}{3}x_5=\frac{28}{15}\\ x_2=\frac{-23}{15}\\ x_3-\frac{1}{3}x_4-\frac{8}{3}x_5=1\end{array}\right\}\to\left\{\begin{array}{l}x_1=\frac{28}{15}+\frac{2}{3}x_4+\frac{1}{3}x_5\\ x_2=\frac{-23}{15}\\ x_3=1+\frac{1}{3}x_4+\frac{8}{3}x_5\end{array}\right.$$

□

مثال۲-۲۴

دستگاه معادلات جبری خطی زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases}3x_1-4x_2=10\\-5x_1+8x_2=-17\\-3x_1+12x_2=-12\end{cases}$$

فرم ماتریس افزوده این معادلات بصورت زیر می باشد،

$$[A|\mathbf{b}] \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 10 \\ -5 & 8 & -17 \\ -3 & 12 & -12 \end{array}\right]$$

گام اول- از آنجاییکه ضریب x_1 در معادله اول یک نیست داریم،

$$\frac{1}{3}r_1 \rightarrow r_1 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{-4}{3} & \frac{10}{3} \\ -5 & 8 & -17 \\ -3 & 12 & -12 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

حذف مجهول x_1 از تمام معادلات به جز معادله اول،

$$\left.\begin{array}{l} 5r_1 + r_2 \rightarrow r_2 \\ 3r_1 + r_3 \rightarrow r_3 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{-4}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 8 & -2 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

گام دوم- از آنجاییکه ضریب x_2 در معادله دوم یک نیست داریم،

$$\frac{3}{4}r_2 \rightarrow r_2 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{-4}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{4} \\ 0 & 8 & -2 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

حذف مجهول x_2 از تمام معادلات به جز معادله دوم،

$$\left.\begin{array}{l} -8r_2 + r_3 \rightarrow r_3 \\ \frac{4}{3}r_2 + r_1 \rightarrow r_1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

همانطور که پیداست سیستم سازگار است و جواب دارد، لذا جواب ها را بدست می آوریم،

$$x_1 = 3, \qquad x_2 = \frac{-1}{4}$$

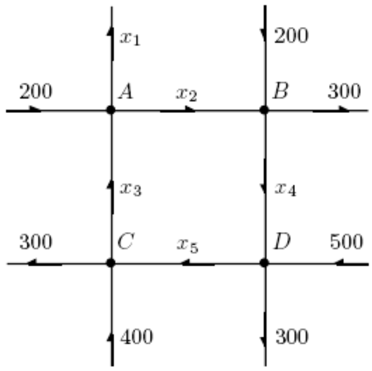
با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[3 -4;-5 8;-3 12];
b =[10;-17;-12];
rref([A b])
ans =
    1.0000         0    3.0000
         0    1.0000   -0.2500
         0         0         0
```

□

مثال۲-۲۵

شکل زیر بیانگر روند ترافیک در طول خیابانهای بخشی از یک شهر می باشد. تمامی خیابان ها یکطرفه بوده و محل تقاطع ها با گره ها نمایش داده شده است،



معادلات را برای هر یک از گره ها بصورت زیر می توان نوشت،

$$A:\quad 200 + x_3 = x_1 + x_2$$
$$B:\quad 200 + x_2 = 300 + x_4$$
$$C:\quad 400 + x_5 = 300 + x_3$$
$$D:\quad 500 + x_4 = 300 + x_5$$

فرض کنید که کل بار وارد شده در شبکه برابر با کل بار خارج شده از شبکه است،

$$400 + 200 + 200 + 500 = 300 + 300 + x_1 + 300$$

بنابراین دستگاه معادلات خطی با پنج معادله و پنج مجهول زیر بدست می آید،

$$x_1 + x_2 - x_3 = 200$$
$$x_2 - x_4 = 100$$
$$x_3 - x_5 = 100$$
$$x_4 - x_5 = -200$$
$$x_1 = 400$$

برای این دستگاه معادلات خطی ماتریس افزوده زیر قابل نوشتن است،

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -200 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

با تبدیل به فرم سطری پلکانی کاهش یافته خواهیم داشت،

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

بنابراین جواب کلی بصورت زیر بدست می آید،

$$x_1 = 400, \quad x_2 = x_5 - 100, \quad x_3 = x_5 + 100, \quad x_4 = x_5 - 200$$

از آنجائیکه خیابانها یکطرفه می باشند مقدار بار نمی تواند منفی باشد، پس باید $x_5 \geq 200$ انتخاب گردد.

□

یکی از کاربردهای دستور rref(A) در تشخیص سازگار یا ناسازگار بودن دستگاه معادلات است. معادلات معرفی شده با ماتریس افزوده $[A|\mathbf{b}]$ زمانی سازگار است، که در فرم سطری پلکانی کاهش یافته یا فرم سطری پلکانی آن، سطری به شکل زیر ظاهر نشده باشد،

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 | \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \neq 0 \qquad (۲-۸)$$

در غیر اینصورت معادله حاصل از سطر مذکور بصورت زیر در خواهد آمد،

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = \alpha$$

که برای $\alpha \neq 0$ این معادله راه حلی ندارد و نتیجتاً دستگاه معادلات خطی اصلی ناسازگار خواهد بود.

مثال۲-۲۶

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

این دستگاه معادلات نمونه ای از یک سیستم ناسازگار است. زیرا فرم سطری پلکانی آن به شکل زیر می باشد،

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

□

مثال۲-۲۷

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید و در صورت سازگار بودن جواب آن را بدست آورید،

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = 10 \\ -5x_1 + 8x_2 = -17 \\ -3x_1 + 12x_2 = -12 \end{cases}$$

این دستگاه یک سیستم فرامعین است، فرم ماتریس افزوده این معادلات بصورت زیر می باشد،

$$[A|\mathbf{b}] \quad \to \quad \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 10 \\ -5 & 8 & -17 \\ -3 & 12 & -12 \end{array}\right]$$

گام اول- از آنجاییکه ضریب x_1 در معادله اول یک نیست داریم،

$$\frac{1}{3}r_1 \to r_1 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{-4}{3} & \frac{10}{3} \\ -5 & 8 & -17 \\ -3 & 12 & -12 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

حذف مجهول x_1 از معادلات دوم و سوم،

$$\left.\begin{array}{l} 5r_1 + r_2 \to r_2 \\ 3r_1 + r_3 \to r_3 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{-4}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 8 & -2 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

گام دوم- از آنجاییکه ضریب x_2 در معادله دوم یک نیست داریم،

$$\frac{3}{4}r_2 \to r_2 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{-4}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{4} \\ 0 & 8 & -2 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

حذف مجهول x_2 از معادله سوم،

$$-8r_2 + r_3 \to r_3 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{-4}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

همانطور که پیداست سیستم سازگار بوده و دستگاه معادلات جواب دارد. لذا جواب ها را بدست می آوریم،

$$\left.\begin{array}{l} x_1-\frac{4}{3}x_2=\frac{10}{3} \\ x_2=\frac{-1}{4} \end{array}\right\} \quad\rightarrow\quad x_1=3,\quad x_2=\frac{-1}{4}$$

□

مثال۲-۲۸

نشان دهید سیستم زیر به شرطی سازگار است که $c=2a-3b$ باشد.

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=a \\ 3x_1+x_2-5x_3=b \\ -5x_1-5x_2+21x_3=c \end{cases}$$

فرم ماتریس افزوده این معادلات بصورت زیر می باشد،

$$[A|\mathbf{b}] \quad\rightarrow\quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & a \\ 3 & 1 & -5 & b \\ -5 & -5 & 21 & c \end{array}\right]$$

با اعمال روش حذفی- گوسی، فرم سطری پلکانی را بدست می آوریم،

$$\frac{1}{2}r_1\rightarrow r_1 \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{a}{2} \\ 3 & 1 & -5 & b \\ -5 & -5 & 21 & c \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} -3r_1+r_2\rightarrow r_2 \\ 5r_1+r_3\rightarrow r_3 \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{-19}{2} & \frac{-3}{2}a+b \\ 0 & \frac{-15}{2} & \frac{57}{2} & \frac{5}{2}a+c \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{2}{5}r_2\rightarrow r_2 \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-19}{5} & \frac{-3}{5}a+\frac{2}{5}b \\ 0 & \frac{-15}{2} & \frac{57}{2} & \frac{5}{2}a+c \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{15}{2}r_2+r_3\rightarrow r_3 \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-19}{5} & \frac{-3}{5}a+\frac{2}{5}b \\ 0 & 0 & 0 & -2a+3b+c \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

لذا برای سازگار بودن دستگاه معادلات باید $-2a+3b+c=0$ باشد. بنابراین، $c=2a-3b$ است.

□

نمونه ای دستگاه معادلات که همواره سازگار است دستگاه معادلات **همگن**[1] می باشد. فرم کلی دستگاه معادلات جبری خطی همگن بصورت زیر می باشد،

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \tag{۲-۹}$$

همانطور که از معادلات بالا بر می آید دستگاه معادلات خطی همگن سازگار می باشد، زیرا شرط ناسازگاری هرگز رخ نخواهد داد، همچنین یک مجموعه جواب **پاسخ بدیهی**[2] یعنی $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ برای حل این معادلات همواره وجود دارد. البته گاهی دستگاه معادلات خطی همگن می تواند علاوه بر پاسخ بدیهی بیشمار جواب دیگر هم داشته باشد.

مثال ۲-۲۹

دستگاه معادلات همگن زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$$

ماتریس افزوده و تبدیل آن با روش خذفی گوسی بصورت زیر بدست می آید،

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

با حل این معادلات در می یابیم که تنها جواب ممکن پاسخ بدیهی $(x_1, x_2, x_3) = (0,0,0)$ می باشد.

□

مثال ۲-۳۰

دستگاه معادلات همگن زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

[1] Homogeneous Systems
[2] Trivial Solution

ماتریس افزوده و تبدیل آن با روش سطری پلکانی بصورت زیر بدست می آید،

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

با توجه به محل عناصر محوری x_1 و x_3 متغیرهای وابسته و x_2 و x_4 متغیرهای آزاد هستند.

$$x_1 = -2x_2 - x_4 \qquad , \qquad x_3 = -x_4$$

همانطور که مشاهده می شود در این حالت دستگاه معادلات علاوه بر پاسخ بدیهی، بینهایت جواب دیگر هم خواهد داشت.

□

۲-۴- حل دستگاه معادلات جبری خطی بر پایه تجزیه ماتریس ها

یکی دیگر از روش های حل دستگاه معادلات تجزیه ماتریس ضرایب به حاصلضرب چند ماتریس ساده تر است که معمولاً به فرم قطری یا مثلثی هستند. در حل دستگاه معادلات $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ماتریس ضرایب A بصورت حاصلضرب $A = A_1 A_2 \cdots A_{k-1} A_k$ تجزیه می گردد و حل دستگاه معادلات به فرم زیر در می آید،

$$(A_1 A_2 \cdots A_k)\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

که در واقع شامل حل k معادله ساده به فرم زیر است، که معمولاً برای حل از روش های جایگزینی پیشرو و پسرو استفاده می گردد،

$$A_1\mathbf{z}_1 = \mathbf{b}, \quad A_2\mathbf{z}_2 = \mathbf{z}_1, \quad \cdots, \quad A_{k-1}\mathbf{z}_{k-1} = \mathbf{z}_{k-2}, \quad A_k\mathbf{x} = \mathbf{z}_{k-1}$$

بنابراین در این روش محاسبات را می توان به دو بخش تقسیم کرد،

۱- محاسبات لازم برای بدست آوردن تجزیه ماتریس A

۲- محاسبات لازم برای حل k دستگاه معادلات ساده

در واقع عمده محاسبات مربوط به تجزیه ماتریس است. یکی از کاربردهای این روش زمانی است که بخواهیم جواب دستگاه معادلات $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ را برای چندین بردار $\mathbf{b}$ مختلف بدست آوریم. در اینصورت عمل تجزیه ماتریس که بیشترین حجم محاسبات را دارد فقط یکبار صورت می گیرد و بخش تکراری فقط مربوط به حل دستگاه معادلات ساده می باشد.

در این راستا دو روش **تجزیه LU**[۱] و **تجزیه چالسکی**[۲] ماتریس ها معرفی می گردد. این دو روش برای حل دستگاه معادلات مربعی کاربرد دارند.

---

۱ LU Factorization

۲ Cholesky Factorization

۲-۴-۱- تجزیه LU ماتریس ها

در این روش ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ بصورت حاصلضرب دو ماتریس L و U تجزیه می گردد،

$$A = LU$$

به طوریکه L یک ماتریس پایین مثلثی با عناصر قطری واحد و U یک ماتریس بالا مثلثی باشد. برای بدست آوردن تجزیه LU یک ماتریس مربعی می توان از **روش حذفی گوسی** و **روش ماتریس های بلوکی** استفاده نمود.

۲-۴-۱-۱- حل دستگاه معادلات جبری خطی با تجزیه LU

برای حل دستگاه معادلات ابتدا تجزیه $A = LU$ را بدست می آوریم، سپس با جایگذاری در معادله دستگاه داریم،

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \overset{A=LU}{\rightarrow} \quad LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

با فرض اینکه $\mathbf{y} = U\mathbf{x}$ باشد داریم،

$$LU\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \overset{\mathbf{y}=U\mathbf{x}}{\rightarrow} \quad L\mathbf{y} = \mathbf{b}$$

بنابراین جواب دستگاه معادلات اصلی با حل یک سری معادلات ساده بصورت زیر بدست می آید،

$$\begin{cases} L\mathbf{y} = \mathbf{b} \\ \mathbf{y} = U\mathbf{x} \end{cases} \qquad (۲-۱۰)$$

که در حل این دو معادله از الگوریتم جایگزینی پیشرو و جایگزینی پسرو استفاده می شود.

مثال۲-۳۱

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -4 \\ -4x_1 + x_2 + 10x_3 = 3 \end{cases}$$

با استفاده از روش تجزیه LU جواب دستگاه معادلات را بیابید.

فرم ماتریسی این معادلات به شکل زیر می باشد،

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 2 & 5 & -3 \\ -4 & 1 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

تجزیه LU ماتریس A به شکل زیر است،

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{-4}{3} & 9 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -29 \end{bmatrix}$$

با توجه به معادلات داریم،

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{-4}{3} & 9 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

با حل معادلات ماتریسی بوسیله الگوریتم جایگزینی پیشرو جوابها بصورت زیر بدست می آیند،

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ \frac{2}{3} y_1 + y_2 = -4 \\ \frac{-4}{3} y_1 + 9y_2 + y_3 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = -4 \\ y_3 = 39 \end{cases}$$

با جایگذاری این مقادیر در معادلات ماتریس دوم پاسخ نهایی با یک الگوریتم جایگزینی پسرو محاسبه می گردد،

$$\mathbf{y} = U\mathbf{x} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -29 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = -4 \\ -29x_3 = 39 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -119/29 \\ x_2 = 1/29 \\ x_3 = -39/29 \end{cases}$$

□

۲-۴-۱-۲- تجزیه LU با روش حذفی گوسی بدون محورگیری

همانطور که توضیح داده شده است، هدف از روش حذفی گوسی تبدیل یک ماتریس مربعی به فرم بالا مثلثی است، بنابراین اگر بتوان ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ را بدون جابجا کردن سطرها و ستونهای آن یعنی بدون محورگیری، به فرم بالا مثلثی درآورد، ماتریس U به راحتی بدست خواهد آمد. از طرفی می دانیم روش حذفی گوسی را می توان بصورت یک سری عملیات ماتریس های مقدماتی مانند $E_1, E_2, \ldots, E_k$ نشان داد، بنابراین داریم،

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = U \qquad (۱۱\text{-}۲)$$

از آنجائیکه ماتریس های مقدماتی مربعی و معکوس پذیر هستند می توان نوشت،

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} U = LU \qquad (۱۲\text{-}۲)$$

که در آن $L = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$ یک ماتریس پایین مثلثی با عناصر قطری یک می باشد.

مثال۲-۳۲

تجزیه LU ماتریس مربعی A را بیابید،

$$A=\begin{bmatrix}3 & 6 & -9\\ 2 & 5 & -3\\ -4 & 1 & 10\end{bmatrix}$$

همانند آنچه که در روش حذفی گوسی انجام دادیم سعی می کنیم تا ماتریس مذکور را با انجام یک سری عملیات سطری به صورت بالا مثلثی در آوریم.

$$\frac{-2}{3}r_1+r_2\to r_2 \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}3 & 6 & -9\\ 0 & 1 & 3\\ -4 & 1 & 10\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad E_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{-2}{3} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\frac{4}{3}r_1+r_3\to r_3 \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}3 & 6 & -9\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 9 & -2\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad E_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{4}{3} & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$-9r_2+r_3\to r_3 \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}3 & 6 & -9\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -29\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad E_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -9 & 1\end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس بالا مثلثی U بصورت زیر بدست می آید،

$$U=\begin{bmatrix}3 & 6 & -9\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -29\end{bmatrix}$$

حال برای بدست آوردن ماتریس L ابتدا معکوس ماتریس های مقدماتی E_1، E_2 و E_3 را بدست می آوریم که با توجه به خواص ماتریس های مقدماتی به راحتی قابل محاسبه هستند و سپس با توجه به رابطه (۲-۱۱) ماتریس پایین مثلثی L را محاسبه می کنیم،

$$L=E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{2}{3} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{-4}{3} & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 9 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{2}{3} & 1 & 0\\ \frac{-4}{3} & 9 & 1\end{bmatrix}$$

بنابراین تجزیه LU ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$A=LU=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{2}{3} & 1 & 0\\ \frac{-4}{3} & 9 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 6 & -9\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -29\end{bmatrix}$$

در ادامه با استفاده از نرم افزار MATLAB برنامه LUfactor(A) برای محاسبه تجزیه LU ماتریس ها بر اساس الگوریتم حذفی گوسی نوشته شده است،

```
% LU factorization without pivoting
function [L,U] = LUfactor(A)
NA = size(A,2);
E = eye(NA,NA);
L = eye(NA,NA);
for j = 1:NA-1
for i = j+1:NA
      if A(j,j) ~= 0
      E(i,j) = -A(i,j) / A(j,j);
         A = E * A;
         L = L * inv(E);
         E = eye(NA,NA);
      else
         error('algorithm needs pivoting')
      end
   end
end
U = A(:,1:NA);
```

اجرای برنامه بصورت زیر خواهد بود،

```
A =[3  6 -9;2  5 -3;-4  1  10];
[L,U]= LUfactor(A,b)
L =
    1.0000         0         0
    0.6667    1.0000         0
   -1.3333    9.0000    1.0000
U =
     3     6    -9
     0     1     3
     0     0    -2
```

□

مثال۲-۳۳

ماتریس A را در نظر بگیرید،

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 18 & 26 \\ 3 & 16 & 30 \end{bmatrix}$$

الف) ماتریس های مقدماتی E_1، E_2 و E_3 را طوری بدست آورید که ماتریس A را به فرم بالا مثلثی $U = E_3 E_2 E_1 A$ تبدیل نماید و با استفاده از آن تجزیه $A = LU$ ماتریس را بدست آورید.

ب) با استفاده از این تجزیه دستگاه معادلات $A\mathbf{x} = \mathbf{b_1}$ و $A\mathbf{x} = \mathbf{b_2}$ را حل نمایید.

$$\mathbf{b_1} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b_2} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}$$

الف) ماتریس های مقدماتی E_1، E_2 و E_3 را با اعمال الگوریتم حذفی گوسی می توان بدست آورد

گام اول- حذف مجهول x_1 از معادلات دوم و سوم،

$$-4r_1 + r_2 \to r_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 3 & 16 & 30 \end{bmatrix} \quad \to \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-3r_1 + r_3 \to r_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 15 \end{bmatrix} \quad \to \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

گام دوم- حذف مجهول x_2 از معادله سوم،

$$-2r_2 + r_3 \to r_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \to \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

به این ترتیب ماتریس بالا مثلثی U بصورت زیر بدست می آید،

$$E_3 E_2 E_1 A = U \quad \to \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$A = LU$ ماتریس پایین مثلثی L نیز بشکل زیر قابل محاسبه است،

$$E_3 E_2 E_1 A = U \quad \to \quad A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} U = LU$$

$$E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&0\\3&2&1\end{bmatrix}=L$$

لذا تجزیه $A=LU$ بشکل زیر بدست می آید،

$$A=LU \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}1&4&5\\4&18&26\\3&16&30\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&0\\3&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4&5\\0&2&6\\0&0&3\end{bmatrix}$$

اجرای برنامه LUfactor برای این ماتریس بصورت زیر است،

```
A =[1 4 5;4 18 26;3 16 30];
[L,U]= LUfactor(A)
L =
     1     0     0
     4     1     0
     3     2     1
U =
     1     4     5
     0     2     6
     0     0     3
```

ب) برای حل دستگاه معادلات بصورت زیر عمل می کنیم،

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b} \quad \rightarrow \quad LU\mathbf{x}=\mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{cases}L\mathbf{y}=\mathbf{b}\\U\mathbf{x}=\mathbf{y}\end{cases}$$

ابتدا مجهول $\mathbf{y}$ و سپس مجهول $\mathbf{x}$ را بدست می آوریم،

برای بردار $\mathbf{b}_1$:

$$L\mathbf{y}=\mathbf{b}_1 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&0\\3&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\0\\-6\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases}y_1=6\\y_2=-24\\y_3=24\end{cases}$$

$$U\mathbf{x}=\mathbf{y} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix}1&4&5\\0&2&6\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-24\\24\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases}x_1=110\\x_2=-36\\x_3=8\end{cases}$$

برای بردار $\mathbf{b}_2$:

$$L\mathbf{y}=\mathbf{b}_2 \rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 4 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 6\\ 12\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad y_1=6,\ \ y_2=-18,\ \ y_3=30$$

$$U\mathbf{x}=\mathbf{y} \rightarrow \begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ 0 & 2 & 6\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ -24\\ 24\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad x_1=112,\ \ x_2=-39,\ \ x_3=10$$

دستگاه معادلات خطی $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ معادل با $LU\mathbf{x}=\mathbf{b}$ می باشد و با حل دو معادله $\mathbf{y}=L\setminus\mathbf{b}$ و $\mathbf{x}=U\setminus\mathbf{y}$ پاسخ بدست می آید. می توان برنامه LUsolve را بصورت زیر در نظر گرفت،

```
% Solving Ax = b  by  LU factorization without pivoting
function [x,L,U] = LUsolve(A,B)
NA = size(A,2);
[NB1,NB] = size(B);
if NB1 ~= NA,
   error('A and B must have compatible dimensions');
end
AB = [A B];
E = eye(NA,NA);
L = eye(NA,NA);
for j = 1:NA-1
for i = j+1:NA
      if AB(j,j) ~= 0
      E(i,j) = - AB(i,j) / AB(j,j);
         AB = E * AB;
         L = L * inv(E);
         E = eye(NA,NA);
      else
         error('algorithm needs pivoting')
      end
   end
end
U = AB(:,1:NA);
x = (U\(L\B))';
```

اجرای برنامه بصورت زیر است،

```
A =[1 4 5;4 18 26;3 16 30];
b1 =[6;0;-6];
b2 =[6;6;12];
[x1,L,U]= LUsolve(A,b1)
x1 =
   110   -36     8
L =
     1     0     0
     4     1     0
     3     2     1
U =
     1     4     5
     0     2     6
     0     0     3
x2 = LUsolve(A,b2)
x2 =
   112   -39    10
```

□

۲-۴-۱-۳- تجزیه LU با روش ماتریس های بلوکی

الگوریتم دیگری که برای بدست آوردن تجزیه LU ماتریس ها وجود دارد استفاده از ماتریس های بلوکی است. اگر صورت کلی ماتریس های بلوکی $A_{n\times n}$، U و L را بشکل زیر در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad , \quad L=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \quad , \quad U=\begin{bmatrix} u_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{bmatrix} \qquad (۲-۱۳)$$

در اینصورت داریم،

$$A=LU \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_{11} & U_{12} \\ u_{11}L_{21} & L_{21}U_{12}+L_{22}U_{22} \end{bmatrix}$$

بنابراین می توان نوشت،

$$\begin{aligned} u_{11} &= a_{11} \\ U_{12} &= A_{12} \\ L_{21} &= \frac{1}{a_{11}} A_{21} \\ A_{22} - L_{21}U_{12} &= L_{22}U_{22} \end{aligned} \tag{۱۴-۲}$$

مثال۲-۳۴

ماتریس مربعی A را در نظر بگیرید

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 2 & 5 & -3 \\ -4 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

تجزیه LU ماتریس را با استفاده از روش ماتریس های بلوکی بدست آورید،

اگر ماتریس $A = LU$ را بصورت زیر بنویسیم،

$$A = \left[\begin{array}{c:cc} 3 & 6 & -9 \\ \hdashline 2 & 5 & -3 \\ -4 & 1 & 10 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:cc} 1 & 0 & 0 \\ \hdashline l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c:cc} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ \hdashline 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{array}\right]$$

با توجه به روابط(۲-۱۲) و (۲-۱۳) داریم،

$$\begin{aligned} & u_{11} = a_{11} \rightarrow u_{11} = 3 \\ & U_{12} = A_{12} \rightarrow U_{12} = \begin{bmatrix} 6 & -9 \end{bmatrix} \rightarrow u_{12} = 6, \quad u_{13} = -9 \\ & L_{21} = \frac{1}{a_{11}} A_{21} \rightarrow L_{21} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} \rightarrow l_{21} = \frac{2}{3}, \quad l_{31} = \frac{-4}{3} \end{aligned}$$

$$A_{22} - L_{21}U_{12} = L_{22}U_{22}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{-4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{22} & 0 \\ l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{22} & u_{23} \\ 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{22}u_{22} & l_{22}u_{23} \\ l_{32}u_{22} & l_{32}u_{23} + l_{33}u_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} l_{22}u_{22} = 1 \xrightarrow{l_{22}=1} u_{22} = 1 \\ l_{32}u_{22} = 9 \xrightarrow{u_{22}=1} l_{32} = 9 \\ l_{22}u_{23} = 3 \xrightarrow{l_{22}=1} u_{23} = 3 \\ l_{32}u_{32} + l_{33}u_{33} = -2 \xrightarrow{l_{33}=1} u_{33} = -29 \end{cases}$$

به این ترتیب تجزیه LU ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$A = LU \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 2 & 5 & -3 \\ -4 & 1 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{-4}{3} & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -29 \end{bmatrix}$$

□

مثال۲-۳۵

ماتریس مربعی A را در نظر بگیرید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

تجزیه LU ماتریس را با استفاده از روش ماتریس های بلوکی بدست آورید،

اگر ماتریس $A = LU$ را بصورت زیر بنویسیم،

$$A = \left[\begin{array}{c:cc} 1 & 1 & 1 \\ \hdashline 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:cc} 1 & 0 & 0 \\ \hdashline l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c:cc} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ \hdashline 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{array}\right]$$

با توجه به روابط الگوریتم بلوکی بالا داریم،

$$u_{11} = a_{11} \rightarrow u_{11} = 1$$

$$U_{12} = A_{12} \rightarrow U_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow u_{12} = 1, \quad u_{13} = 1$$

$$L_{21} = \frac{1}{a_{11}} A_{21} \rightarrow L_{21} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow l_{21} = 1, \quad l_{31} = 1$$

$$A_{22} - L_{21}U_{12} = L_{22}U_{22}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{32} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{22} & u_{23} \\ 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{22} & u_{23} \\ l_{32}u_{22} & l_{32}u_{23} + u_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} u_{22} = 3 \\ l_{32}u_{22} = 3 \quad \overset{u_{22}=3}{\rightarrow} \quad l_{32} = 1 \\ u_{23} = 3 \\ l_{32}u_{23} + u_{33} = 7 \quad \rightarrow \quad u_{33} = 4 \end{cases}$$

لذا تجزیه $A = LU$ بشکل زیر بدست می آید،

$$A = LU \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

□

۲-۴-۱-۴- تجزیه PLU با روش حذفی گوسی با محورگیری

برای ماتریس مربعی A زمانی تجزیه LU وجود دارد که بتوان روش حذفی گوسی را بدون محورگیری یعنی بدون نیاز به جابجا کردن سطرهای ماتریس اعمال کرد. در غیر این صورت تجزیه LU امکان پذیر نخواهد بود. این موضوع معادل با آن است که هیچ یک از عناصر قطری ماتریس مربعی A در حین انجام عملیات حذفی گوسی برابر صفر نگردند. در چنین مواردی لازم است همانند آنچه که در روش حذفی گوسی بیان گردید، عمل محورگیری صورت گیرد که در اینصورت به آن تجزیه $A = PLU$ [1] گفته می شود، که ماتریس P در اینجا یک **ماتریس جایگشت** است.

مثال۲-۳۶

تجزیه $A = PLU$ ماتریس زیر را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 10 & 12 & 3 \\ 20 & 17 & 19 \end{bmatrix}$$

با اعمال روش حذفی گوسی ابتدا ماتریس A را به یک ماتریس بالا مثلثی تبدیل می نماییم و ماتریس مقدماتی هر مرحله را بدست می آوریم،

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 10 & 12 & 3 \\ 20 & 17 & 19 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2r_1+r_2 \to r_2} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & -11 \\ 20 & 17 & 19 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & -11 \\ 20 & 17 & 19 \end{bmatrix} \xrightarrow{-4r_1+r_3 \to r_3} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & -11 \\ 0 & -7 & -9 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[1] LU Factorization with Pivoting

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & -11 \\ 0 & -7 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & -7 & -9 \\ 0 & 0 & -11 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

به این ترتیب ماتریس بالا مثلثی U بصورت زیر بدست می آید،

$$U = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & -7 & -9 \\ 0 & 0 & -11 \end{bmatrix}$$

ماتریس پایین مثلثی L نیز بشکل زیر قابل محاسبه است،

$$E_3E_2E_1A = U \quad \rightarrow \quad A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}U = PLU$$

$$E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = PL$$

لذا تجزیه $A = PLU$ بشکل زیر بدست می آید،

$$A = PLU \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 10 & 12 & 3 \\ 20 & 17 & 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & -7 & -9 \\ 0 & 0 & -11 \end{bmatrix}$$

در نرم افزار $MATLAB$ از تابع $\mathrm{lu(A)}$ برای تجزیه ماتریس A به فرم $PA = LU$ استفاده می شود، که در آن L و U به ترتیب ماتریس های پایین و بالا مثلثی هستند و P ماتریس جایگشت است. از آنجائیکه P یک ماتریس متعامد است، لذا دستگاه معادلات خطی $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ معادل با $LU\mathbf{x} = P^T\mathbf{b}$ می باشد و با حل دو معادله $\mathbf{y} = L \backslash (P^T\mathbf{b})$ و $\mathbf{x} = U \backslash \mathbf{y}$ پاسخ بدست می آید.

به اجرای این دستور توجه نمایید،

```
A =[5 6 7;10 12 3;20 17 19];
[L,U,P]= lu(A)
L =
    1.0000         0         0
    0.5000    1.0000         0
    0.2500    0.5000    1.0000
```

```
U =
   20.0000   17.0000   19.0000
         0    3.5000   -6.5000
         0         0    5.5000
P =
     0     0     1
     0     1     0
     1     0     0
```

نرم افزار MATLAB در اجرای دستور lu(A) برای پایداری بیشتر الگوریتم، همواره سعی می کند عناصر ستون ها را بصورت نزولی مرتب نماید. لذا نیاز به جایگشت های بیشتری دارد در حالیکه در الگوریتم معرفی شده فقط در صورت صفر شدن عناصر قطری عمل جایگشت صورت می گیرد.
□

مثال۲-۳۷

تجزیه $A = PLU$ ماتریس زیر را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\2&3&4\end{bmatrix}$$

ابتدا ماتریس های مقدماتی E_1، E_2 و E_3 را با اعمال الگوریتم حذفی گوسی بدست می آوریم.

<u>گام اول</u>- جابجایی سطر اول با سوم و حذف مجهول x_1 از معادله دوم،

$$r_1 \leftrightarrow r_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}2&3&4\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad E_1=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

$$\tfrac{-1}{2}r_1 + r_2 \rightarrow r_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}2&3&4\\0&\frac{-3}{2}&-1\\0&1&1\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad E_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{-1}{2}&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

<u>گام دوم</u>- حذف مجهول x_2 از معادله سوم،

$$\tfrac{2}{3}r_2 + r_3 \rightarrow r_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}2&3&4\\0&\frac{-3}{2}&-1\\0&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad E_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&\frac{2}{3}&1\end{bmatrix}$$

به این ترتیب ماتریس بالا مثلثی U بصورت زیر بدست می آید،

$$E_3E_2E_1A=U \quad \rightarrow \quad U=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 0 & \frac{-3}{2} & -1\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

برای بدست آوردن تجزیه $A=LU$ بصورت زیر عمل می کنیم. ماتریس پایین مثلثی L نیز بشکل زیر قابل محاسبه است،

$$E_3E_2E_1A=U \quad \rightarrow \quad A=E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}U=LU$$

$$E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & \frac{-2}{3} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & \frac{-2}{3} & 1\end{bmatrix}=PL$$

لذا تجزیه $A=PLU$ بشکل زیر بدست می آید،

$$A=PLU \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & \frac{-2}{3} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 0 & \frac{-3}{2} & -1\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

با استفاده از دستور lu(A) برای تجزیه ماتریس A به فرم $PA=LU$ داریم،

```
A =[0 1 1;1 0 1;2 3 4];
[L,U,P]= lu(A)
L =
    1.0000         0         0
    0.5000    1.0000         0
         0   -0.6667    1.0000
U =
    2.0000    3.0000    4.0000
         0   -1.5000   -1.0000
         0         0    0.3333
P =
     0     0     1
     0     1     0
     1     0     0
```

□

۲-۴-۱-۵- تجزیه PLU با استفاده از ماتریس های بلوکی

الگوریتم تجزیه $A=PLU$ را می توان با استفاده از ماتریس های بلوکی نیز بیان کرد، در این روش الگوریتم را همانند قبل انجام می دهیم و هرجا که نیاز بود عمل جابجایی سطرها را انجام داده و آن را بصورت یک ماتریس جایگشت نشان می دهیم.

مثال۲-۳۸

تجزیه $A=PLU$ ماتریس زیر را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&2\\0&1&-1\end{bmatrix}$$

در این ماتریس اگر صورت کلی تجزیه LU را اجرا نماییم داریم،

$$A=\left[\begin{array}{c:cc}1&0&0\\\hdashline 0&0&2\\0&1&-1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:cc}1&0&0\\\hdashline l_{21}&1&0\\l_{31}&l_{32}&1\end{array}\right]\left[\begin{array}{c:cc}u_{11}&u_{12}&u_{13}\\\hdashline 0&u_{22}&u_{23}\\0&0&u_{33}\end{array}\right]$$

$$u_{11}=a_{11}\to u_{11}=1$$
$$U_{12}=A_{12}\to u_{12}=0,\quad u_{13}=0$$
$$L_{21}=\frac{1}{a_{11}}A_{21}\to l_{21}=0,\quad l_{31}=0$$

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&2\\0&1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&l_{32}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&u_{22}&u_{23}\\0&0&u_{33}\end{bmatrix}$$

دقت کنید عنصر $a_{22}=0$ است،

$$A_{22}-L_{21}U_{12}=L_{22}U_{22}$$

$$\begin{bmatrix}0&2\\1&-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\l_{32}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{22}&u_{23}\\0&u_{33}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0&2\\1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_{22}&u_{23}\\l_{32}u_{22}&l_{32}u_{23}+u_{33}\end{bmatrix}\to\begin{cases}u_{22}=0\\l_{32}u_{22}=1\quad\overset{u_{22}=0}{\to}\quad l_{32}.0=1\to ?\\u_{23}=2\\l_{32}u_{32}+u_{33}=-1\end{cases}$$

لذا مشخص است که در حل دچار تناقض می گردیم .

حال برای رفع این مشکل همانند روش حذفی گوسی باید یک عمل جایگشت انجام گیرد،

$$A_{22} - L_{21}U_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{A} = P_1\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

حال تجزیه LU را برای ماتریس $\widetilde{A}$ ادامه می دهیم،

$$\widetilde{A} = L_{22}U_{22} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{32} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{22} & u_{23} \\ 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{22} & u_{23} \\ l_{32}u_{22} & l_{32}u_{23} + u_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} u_{22} = 1 \\ l_{32}u_{22} = 0 \quad \xrightarrow{u_{22}=1} \quad l_{32} = 0 \\ u_{23} = -1 \\ l_{32}u_{32} + u_{33} = 2 \quad \rightarrow \quad u_{33} = 2 \end{cases}$$

لذا تجزیه $A = PLU$ بصورت زیر بدست می آید،

$$A = PLU \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

□

مثال۲-۳۹

تجزیه $A = PLU$ ماتریس زیر را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

ابتدا ماتریس $A = LU$ را بصورت زیر می نویسیم،

$$A = \left[\begin{array}{c:cc} 0 & 5 & 5 \\ \hdashline 2 & 3 & 0 \\ 6 & 9 & 8 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:cc} 1 & 0 & 0 \\ \hdashline l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c:cc} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ \hdashline 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{array}\right]$$

از آنجاییکه $a_{11} = 0$ می باشد، از ابتدا یک ماتریس جایگشت P_1 را در نظر می گیریم،

$$\widetilde{A}=P_1A \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix}6&9&8\\2&3&0\\0&5&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&5&5\\2&3&0\\6&9&8\end{bmatrix}$$

با این کار سطر اول و سوم را جابجا می نماییم. حال تجزیه LU را برای ماتریس $\widetilde{A}$ بدست می آوریم،

$$\widetilde{A}=\begin{bmatrix}\widetilde{a}_{11}&\widetilde{A}_{12}\\\widetilde{A}_{21}&\widetilde{A}_{22}\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{c:cc}6&9&8\\\hdashline 2&3&0\\0&5&5\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:cc}1&0&0\\\hdashline l_{21}&1&0\\l_{31}&l_{32}&1\end{array}\right]\left[\begin{array}{c:cc}u_{11}&u_{12}&u_{13}\\\hdashline 0&u_{22}&u_{23}\\0&0&u_{33}\end{array}\right]$$

$$u_{11}=\widetilde{a}_{11}\rightarrow u_{11}=6$$

$$U_{12}=\widetilde{A}_{12}\rightarrow U_{12}=\begin{bmatrix}9&8\end{bmatrix}\rightarrow u_{12}=9, \quad u_{13}=8$$

$$L_{21}=\frac{1}{\widetilde{a}_{11}}\widetilde{A}_{21}\rightarrow L_{21}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\rightarrow l_{21}=\frac{1}{3}, \quad l_{31}=0$$

$$\widetilde{A}_{22}-L_{21}U_{12}=L_{22}U_{22}$$

$$\begin{bmatrix}3&0\\5&5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\l_{32}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{22}&u_{23}\\0&u_{33}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0&\frac{-8}{3}\\5&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_{22}&u_{23}\\l_{32}u_{22}&l_{32}u_{23}+u_{33}\end{bmatrix}$$

عنصر (۱،۱) صفر است، لذا نیاز به یک جایگشت دیگر داریم،

$$\widetilde{\widetilde{A}}=P_2\begin{bmatrix}0&\frac{-8}{3}\\5&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\frac{-8}{3}\\5&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&5\\0&\frac{-8}{3}\end{bmatrix}$$

با اینکار سطر دوم و سوم در ماتریس اصلی را جابجا می کنیم، حال تجزیه LU را برای ماتریس $\widetilde{\widetilde{A}}$ ادامه می دهیم،

$$\widetilde{\widetilde{A}}=L_{22}U_{22} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix}5&5\\0&\frac{-8}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\l_{32}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{22}&u_{23}\\0&u_{33}\end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\widetilde{A}}=L_{22}\begin{bmatrix}5&5\\0&\frac{-8}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_{22}&u_{23}\\l_{32}u_{22}&l_{32}u_{23}+u_{33}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}u_{22}=5\\ l_{32}u_{22}=0 \quad \xrightarrow{u_{22}=5} \quad l_{32}=0\\ u_{23}=5\\ l_{32}u_{32}+u_{33}=\dfrac{-8}{3} \quad \rightarrow \quad u_{33}=\dfrac{-8}{3}\end{cases}$$

لذا تجزیه $A=PLU$ بشکل زیر بدست می آید،

$$P=P_1\begin{bmatrix}1&0\\0&P_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$$

$$L=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{\tilde{a}_{11}}P_2^T\tilde{A}_{21} & L_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\frac{1}{3}&0&1\end{bmatrix}$$

$$U=\begin{bmatrix}\tilde{a}_{11} & \tilde{A}_{12}\\ 0 & U_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&9&8\\0&5&5\\0&0&\frac{-8}{3}\end{bmatrix}$$

$$A=PLU\Rightarrow\begin{bmatrix}0&5&5\\2&3&0\\6&9&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\frac{1}{3}&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&9&8\\0&5&5\\0&0&\frac{-8}{3}\end{bmatrix}$$

با استفاده از تابع lu(A) برای تجزیه ماتریس A به فرم $PA=LU$ داریم،

```
A =[0 5 5;2 3 0;6 9 8];
[L,U,P]= lu(A)
L =
    1.0000         0         0
         0    1.0000         0
    0.3333         0    1.0000
U =
    6.0000    9.0000    8.0000
         0    5.0000    5.0000
         0         0   -2.6667
P =
     0     0     1
     1     0     0
     0     1     0
```

□

۲-۴-۱-۶- حجم محاسبات جبری الگوریتم تجزیه LU

تعداد عملیات محاسباتی در حل دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ با استفاده از تجزیه LU بصورت زیر بدست می آید،

۱- تجزیه LU ماتریس A: $\frac{2n^3}{3}-\frac{n^2}{2}-\frac{n}{6}\approx\frac{2n^3}{3}$

۲- حل دستگاه معادلات با استفاده از الگوریتم های جایگزینی پیشرو و پسرو: $2n^2$

۲-۴-۲- تجزیه چالسکی ماتریس ها

تجزیه چالسکی حالت خاصی از تجزیه LU می باشد و زمانی کاربرد دارد که ماتریس A مورد نظر مثبت معین باشد.

بنابر تعریف می توان یک ماتریس مثبت معین $A_{n\times n}$ را بصورت حاصلضرب دو ماتریس به شکل $A = LL^T$ تجزیه کرد، به طوریکه L یک ماتریس پایین مثلثی با عناصر قطری مثبت باشد، به این روش **تجزیه چالسکی** ماتریس $A_{n\times n}$ گفته می شود. علاوه بر حل دستگاه معادلات جبری، یکی از مهمترین کاربردهای تجزیه چالسکی در حل مسئله حداقل مربعات می باشد که در فصل های آتی به آن می دازیم،

برای بدست آوردن این تجزیه همانند تجزیه LU می توان از الگوریتم حذفی گوسی و از ماتریس های بلوکی استفاده نمود. از بیان الگوریتم حذفی گوسی به دلیل تکراری بودن مطالب خودداری می شود و فقط روش ماتریس های بلوکی شرح داده می شود.

صورت کلی ماتریسهای بلوکی $A_{n\times n}$ و L را بشکل زیر در نظر بگیرید،

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & A_{21}^T \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad , \quad L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \tag{۲-۱۵}$$

که در آن،

$$\begin{aligned} l_{11} &= \sqrt{a_{11}} \\ L_{21} &= \frac{1}{l_{11}} A_{21} \\ A_{22} - L_{21}L_{21}^T &= L_{22}L_{22}^T \end{aligned} \tag{۲-۱۶}$$

به این ترتیب ماتریس مثبت معین مذکور بصورت $A = LL^T$ تجزیه می گردد.

مثال۲-۴۰

تجزیه چالسکی ماتریس مثبت معین $A_{3\times 3}$ را بیابید،

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

اگر ماتریس $A = LL^T$ را بصورت زیر بنویسیم،

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

با توجه به روابط گفته شده داریم،

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} \to l_{11} = 5$$
$$L_{21} = \frac{1}{l_{11}} A_{21} \to L_{21} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 15 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \to l_{21} = 3, \quad l_{31} = -1$$
$$A_{22} - L_{21}L_{21}^T = L_{22}L_{22}^T$$
$$\begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{22} & 0 \\ l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_{22} & l_{32} \\ 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{22}^2 & l_{22}l_{32} \\ l_{22}l_{32} & l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{bmatrix} \to l_{22} = 3, \quad l_{32} = 1, \quad l_{33} = 3$$

به این ترتیب تجزیه چالسکی ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

در نرم افزار MATLAB از دستور chol(A) برای بدست آوردن تجزیه چالسکی استفاده می شود،

```
A =[25 15 - 5;15 18 0;-5 0 11];
chol(A)
ans =
     5     3    -1
     0     3     1
     0     0     3
```

اگر ماتریس مذکور مثبت معین نباشد، پیغام خطا بصورت زیر حاضر می شود،

```
A =[0 5 5;2 3 0;6 9 8];
chol(A)
??? Error using ==> chol
Matrix must be positive definite.
```

□

۲-۴-۲-۱- حل دستگاه معادلات جبری خطی با تجزیه چالسکی

ابتدا تجزیه چالسکی ماتریس مثبت معین $A_{n\times n}$ را بصورت زیر بدست می آوریم،

$$A = LL^T$$

سپس با جایگذاری در معادله دستگاه داریم،

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \xrightarrow{A=LL^T} \quad LL^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

با فرض اینکه $\mathbf{y} = L^T\mathbf{x}$ باشد داریم،

$$LL^T\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \xrightarrow{\mathbf{y}=L^T\mathbf{x}} \quad L\mathbf{y} = \mathbf{b}$$

بنابراین جواب دستگاه معادلات اصلی با حل یک سری معادلات ساده بصورت زیر بدست می آید،

$$\begin{cases} L\mathbf{y} = \mathbf{b} \\ \mathbf{y} = L^T\mathbf{x} \end{cases} \qquad (۱۷-۲)$$

که در حل این دو معادله از الگوریتم جایگزینی پیشرو و جایگزینی پسرو استفاده می شود.

مثال۲-۴۱

دستگاه معادلات زیر را با استفاده از تجزیه چالسکی حل نمایید،

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 = -1 \end{cases}$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

برای استفاده از تجزیه چالسکی باید ماتریس مثبت معین باشد. پس ابتدا مثبت معین بودن ماتریس A را بررسی می نماییم،

$$1 > 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 5 > 0$$

با توجه به معیار سیلوستر ماتریس A مثبت معین است، لذا می توان از روش تجزیه چالسکی دستگاه را حل نمود. حال تجزیه چالسکی ماتریس A را بدست می آوریم،

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l_{11}&0&0\\l_{21}&l_{22}&0\\l_{31}&l_{32}&l_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}l_{11}&l_{21}&l_{31}\\0&l_{22}&l_{32}\\0&0&l_{33}\end{bmatrix}$$

$$l_{11}=\sqrt{a_{11}}\rightarrow l_{11}=1$$

$$L_{21}=\frac{1}{l_{11}}A_{21}\rightarrow L_{21}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\rightarrow l_{21}=1,\qquad l_{31}=1$$

$$A_{22}-L_{21}L_{21}^T=L_{22}L_{22}^T$$

$$\begin{bmatrix}2&2\\2&7\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l_{22}&0\\l_{32}&l_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}l_{22}&l_{32}\\0&l_{33}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&1\\1&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l_{22}^2&l_{22}l_{32}\\l_{22}l_{32}&l_{32}^2+l_{33}^2\end{bmatrix}\rightarrow l_{22}=1,\qquad l_{32}=1,\qquad l_{33}=\sqrt{5}$$

بنابراین تجزیه چالسکی ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&\sqrt{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&\sqrt{5}\end{bmatrix}=LL^T$$

دستگاه معادلات حاصل را همانند تجزیه LU بصورت زیر حل می کنیم،

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}\quad\rightarrow\quad LL^T\mathbf{x}=\mathbf{b}\quad\rightarrow\quad\begin{cases}L\mathbf{y}=\mathbf{b}\\L^T\mathbf{x}=\mathbf{y}\end{cases}$$

$$L\mathbf{y}=\mathbf{b}\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&\sqrt{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad y_1=2,\ \ y_2=-1,\ \ y_3=-\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$L^T\mathbf{x}=\mathbf{y}\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&\sqrt{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\\\frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad x_1=3,\ \ x_2=-\frac{3}{5},\ \ x_3=-\frac{2}{5}$$

در نرم افزار MATLAB می توان پاسخ دستگاه معادلات خطی $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ را با استفاده از دستور chol(A) و حل دو معادله بدست آورد،

```
A =[1 1 1;1 2 2;1 2 7];
b =[2;1;-1];
U = chol(A);
x = U \(U'\b)
x =
    3.0000
   -0.6000
   -0.4000
```

□

۲-۴-۲-۲- حجم محاسبات جبری الگوریتم تجزیه چالسکی

تعداد عملیات محاسباتی در حل دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ با استفاده از تجزیه چالسکی بصورت زیر بدست می آید،

۱- تجزیه چالسکی ماتریس A: $\frac{n^3}{3}$ که تقریباً نصف محاسبات تجزیه LU را دارد.

۲- حل دستگاه معادلات با استفاده از الگوریتم های جایگزینی پیشرو و پسرو: $2n^2$

مسائل

۲- ۱- دستگاه معادلات جبری زیر را با روش حذفی گوسی و روش گوس- جردن حل نمایید.

الف) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$

۲-۲- دستگاه معادلات جبری زیر را به فرم سطری پلکانی در آورید و سپس حل نمایید.

الف) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 12x_4 = 2 \\ 7x_1 + x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 7 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 = 10 \\ x_1 + 8x_2 = 0 \\ x_1 + 12x_2 = -1 \end{cases}$

۲-۳- فرم سطری پلکانی کاهش یافته معادلات زیر را بدست آورید و سپس آنها را حل نمایید.

الف) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} 5x_3 + 15x_5 = 5 \\ 2x_2 + 4x_3 + 7x_4 + x_5 = 3 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$

۲-۴- سازگار و ناسازگار بودن دستگاه معادلات جبری زیر را بررسی نمایید.

الف) $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ 4x_1 + 4x_3 + 8x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

ج) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 7 \\ 4x_1 + 4x_3 + 8x_4 = 8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$ د) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

۲-۵- نشان دهید اگر $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ و $[\beta_1, \ldots, \beta_n]$ جواب های یک دستگاه معادلات خطی باشند، مجموعه زیر نیز یک جواب برای دستگاه معادلات مذکور خواهد بود،

$$[(1-t)\alpha_1 + t\beta_1, \ldots, (1-t)\alpha_n + t\beta_n]$$

که در آن t یک عدد صحیح است.

۲-۶- اگر A ماتریس ضرایب سیستم همگن n معادله n مجهول زیر باشد،

$$\begin{cases} (1-n)x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \\ x_1 + (1-n)x_2 + \cdots + x_n = 0 \\ \cdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + (1-n)x_n = 0 \end{cases}$$

فرم سطری پلکانی کاهش یافته آن را بیابید و نشان دهید، که پاسخ این سیستم بصورت زیر است،

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \alpha$$

۲-۷- دستگاه معادلات زیر را حل نمایید،

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 3 \end{cases}$$

حال جوابهایی را بیابید که شرایط زیر را برآورده سازند.

$$\begin{cases} (x_1 - x_2)^2 - 4x_5^2 = 0 \\ x_3^2 - x_5^2 = 0 \end{cases}$$

۲-۸- دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

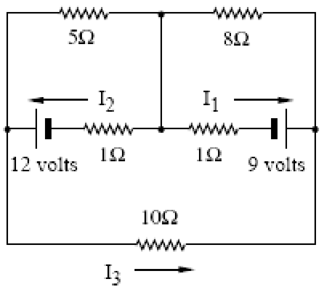
$$\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5\lambda + 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 4\lambda + 2 \\ x_1 - 2\lambda x_2 + 7x_3 = 10\lambda - 1 \end{cases}$$

الف) دستگاه معادلات را به فرم سطری پلکانی کاهش یافته در آورید.

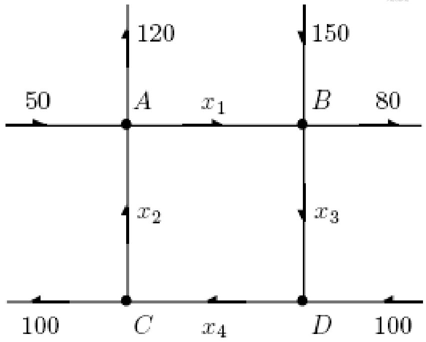
ب) به ازای چه مقادیری از λ دستگاه سازگار خواهد بود؟

ج) پاسخ کلی سیستم را بدست آورید.

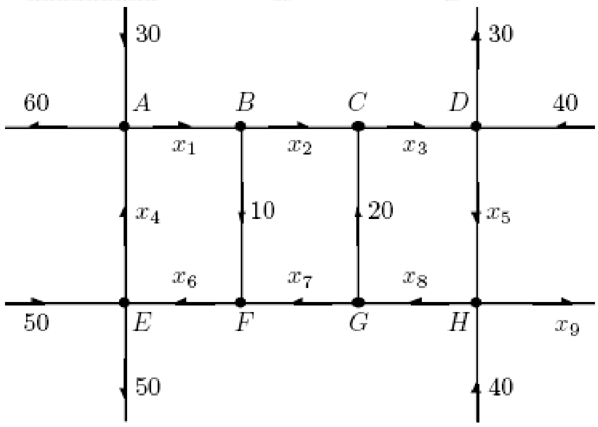
۲-۹- در مدار الکتریکی زیر با اعمال روش گوس- جردن جریانهای I_1، I_2 و I_3 را بدست آورید.



۲-۱۰- در شبکه ترافیک یکطرفه زیر حداقل مقدار x_4 را بیابید.



۲-۱۱- شبکه ترافیک یکطرفه زیر را در نظر بگیرید،



الف) جواب کلی سیستم را بیابید.

ب) محدوده هر یک از متغیرها بیابید.

۲-۱۳- در هر بخش تجزیه LU ماتریس A را بدست آورید و سپس از آن برای حل سیستم $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ استفاده نمایید.

الف) $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}6\\21\\24\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}2&1&2\\4&6&5\\4&6&8\end{bmatrix}$ ب) $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}5\\18\\9\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}3&1&3\\9&4&10\\6&-1&5\end{bmatrix}$

ج) $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\9\\18\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}2&1&2\\4&3&5\\4&3&5\end{bmatrix}$ د) $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\0\\3\\-2\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}1&2&4&17\\3&6&-12&3\\2&3&-3&2\\0&2&-2&6\end{bmatrix}$

۲-۱۴- ماتریس A و بردار $\mathbf{b}$ را در نظر بگیرید، فرض کنید ماتریس A را بصورت حاصلضرب سه ماتریس ساده تجزیه کردیم. به این روش تجزیه LDU گفته می شود،

$$A=LDU=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_1&0&0\\0&d_2&0\\0&0&d_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

الف) تحت چه شرایطی ماتریس A غیرمنفرد است؟

ب) با استفاده از تجزیه بالا دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ زیر را حل کنید.

۲-۱۵- با استفاده از اطلاعات زیر و بدون محاسبه A یا A^{-1} یا A^{-2} یا A^2 حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$A^{-1}\mathbf{x}+A^{-2}\mathbf{y}$$

$$L=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix},\quad U=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{y}=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

ماتریس های L و U حاصل تجزیه $A=LU$ می باشند.

۲-۱۶- ماتریس های متقارن زیر را در نظر بگیرید،

الف) $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$ ب) $A=\begin{bmatrix}4&2&-6\\2&10&9\\-6&9&26\end{bmatrix}$

ج) $A=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&4&5\\0&5&6\end{bmatrix}$ د) $A=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}$

مثبت معین بودن ماتریس های زیر را بررسی نمایید و برای ماتریس های مثبت معین تجزیه چالسکی را بدست آورید. نتیجه را با دستور chol(A) در نرم افزار MATLAB بررسی نمایید.

۲-۱۷- هر یک از دستگاه معادلات زیر را با استفاده از تجزیه چالسکی حل نمایید،

الف) $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$

۲-۱۸- دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

الف) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 5 \\ -2x_1 + 4x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ 6x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases}$ ج) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases}$

سازگار یا ناسازگار بودن دستگاه را بررسی نمایید.

۲-۱۹- ماتریس A را در نظر بگیرید،

$$A = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

الف) نشان دهید به ازای $\varepsilon = 0$ ماتریس A یک ماتریس منفرد است.

ب) برای $\varepsilon = 1$ مقدار A^{-1} و κ را بدست آورید و نشان دهید $\kappa = \|A\| \ \|A^{-1}\|$ است.

ج) با انتخاب $\varepsilon = 0.0001$ نشان دهید که معادله $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ یک سیستم بد حالت است. برای این منظور جواب معادله را برای بردار $\mathbf{b} = [1.1 \quad 1 \quad 1]^T$ بررسی کنید.

۲-۲۰- پاسخ مستقیم دستگاه معادلات زیر را یکبار برای $k = 15$ و یکبار برای $k = 14.9$ بدست آورید. آیا سیستم بد حالت است؟ عدد حالت ماتریس A را بدست آورید؟

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 21 & 19 & 16 \\ 39 & 48 & 53 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} k \\ 56 \\ 140 \end{bmatrix}$$