فصل چهارم

متعامد سازی
و
مسئله حداقل مربعات

۴-۱ مقدمه

در فصل چهارم به مفهوم متعامد سازی، تصاویر متعامد و اهمیت آنها پرداخته شده است و الگوریتم فرایند گرام اشمیت همراه با کد نویسی های MATLAB به عنوان یک روش متداول جهت متعامد سازی معرفی می گردد. سپس مسئله حداقل مربعات و کاربرد آن در حل دستگاه معادلات ناسازگار مطرح شده و نحوه بدست آوردن معادلات نرمال و روش های حل آنها بطور مستقیم و با استفاده از تجزیه چالسکی و تجزیه QR ارائه می شود. در انتهای فصل به موضوع کاربرد روش حداقل مربعات در برازش داده ها، که یکی از مباحث پایه ای در تخمین و شناسایی سیستم ها می باشد پرداخته شده و چند مثال کاربردی همراه با کد نویسی های مربوطه آورده شده است.

۴-۲ متعامد سازی

بردار $\mathbf{u}$ را بر زیرفضای V_1 متعامد گویند، اگر بردار $\mathbf{u}$ بر هر بردار در زیرفضای V_1 متعامد باشد و به مجموعه ای که شامل تمامی بردارهای متعامد بر زیرفضای V_1 باشد، **مکمل متعامد**[1] زیرفضای V_1 گویند و آن را با نماد $V_1^{\perp}$ نشان می دهند.

دو زیرفضای V_1 و V_2 را متعامد گویند، اگر هر بردار در زیرفضای V_1 با هر بردار در زیرفضای V_2 متعامد باشد.

مثال۴-۱

چهار زیرفضای اصلی ماتریس A بصورت زیر تعریف می گردند،

- فضای گستره
$$R(A) = \left\{ \mathbf{b} \in \Re^m \;\middle|\; \exists \mathbf{x} \in \Re^n \to A\mathbf{x} = \mathbf{b} \right\}$$

- فضای پوچی
$$N(A) = \{ \mathbf{x} \in \Re^n \to A\mathbf{x} = \mathbf{0} \}$$

- فضای سطرها
$$R(A^T) = \left\{ \mathbf{b} \in \Re^n \;\middle|\; \exists \mathbf{x} \in \Re^m \to A^T\mathbf{x} = \mathbf{b} \right\}$$

- فضای پوچی چپ
$$N(A^T) = \{ \mathbf{x} \in \Re^m \to A^T\mathbf{x} = \mathbf{0} \}$$

از مطالب فصل قبل داریم فضای سطرها و فضای پوچی ماتریس A متعامد هستند،

$$R(A^T) \perp N(A)$$

لذا می توان نوشت، $R(A^T)^{\perp} = N(A)$

همچنین فضای ستون ها و فضای پوچی چپ ماتریس A نیز متعامد هستند،

$$R(A) \perp N(A^T)$$

لذا می توان نوشت، $R(A)^{\perp} = N(A^T)$

□

مثال۴-۲

ثابت کنید تمامی بردارهای یک مجموعه متعامد، مستقل خطی هستند.

یک مجموعه متعامد با بردارهای غیر صفر $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ را در نظر بگیرید. با استفاده از اسکالرهای $c_1, c_2, \ldots, c_m \in \Re$ یک ترکیب خطی از این بردارها را بصورت زیر می توان نوشت،

[1] Orthogonal Complement

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$$

برای هر $i = 1,2,\ldots,m$ داریم،

$$\begin{aligned} 0 = \langle \mathbf{0}, \mathbf{v}_i \rangle &= \langle c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_m\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_i \rangle \\ &= c_1\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_i \rangle + c_2\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_i \rangle + \ldots + c_m\langle \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_i \rangle \\ &= c_i\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle \end{aligned}$$

از آنجائیکه بردارها متعامد هستند، بنابراین برای $i \neq j$ داریم $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$ و از آنجائیکه $\mathbf{v}_i \neq 0$ است، پس $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle \neq 0$، لذا باید $c_i = 0$ باشد. بدین ترتیب نشان دادیم که،

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$$

پس بردارهای $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ مستقل خطی هستند.

□

۴-۲-۱- فرآیند یکامتعامد سازی گرام – اشمیت

فرض کنید بردارهای $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ بردارهای پایه فضای برداری nبعدی V_1 هستند، اگر بردارهای پایه $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ متعامد باشند، به آن مجموعه **پایه های متعامد**[1] گویند و هر بردار مانند $\mathbf{u}$ متعلق به فضای برداری nبعدی V_1 را می توان بصورت ترکیب خطی زیر نمایش داد،

$$\mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle}{\|\mathbf{v}_n\|^2}\mathbf{v}_n \qquad (۴-۱)$$

اگر بردارهای پایه $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ یکامتعامد باشند به آن **پایه های یکامتعامد**[2] گویند، در اینصورت هر بردار مانند $\mathbf{u}$ متعلق به فضای برداری nبعدی V_1 را می توان بصورت ترکیب خطی زیر نمایش داد،

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n \qquad (۴-۲)$$

بطور نمونه بردارهای پایه استاندارد $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ در فضای برداری $\Re^n$ تشکیل یک مجموعه پایه های یکامتعامد را می دهند.

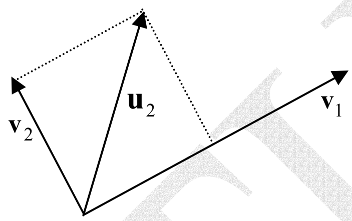
حال چگونه می توان بردارهای پایه موجود را بصورت پایه های متعامد و یکامتعامد تبدیل کرد. یکی از روش هایی که برای تبدیل بردارهای پایه به بردارهای پایه متعامد و یکامتعامد استفاده می شود به **فرآیند گرام – اشمیت**[3] معروف است، در ادامه به شرح آن می پردازیم.

[1] Orthogonal Basis
[2] Orthonormal Basis
[3] Gram-Schmidt Process

ایده اساسی بکار گرفته شده در این فرآیند را می توان بصورت زیر خلاصه کرد، دو بردار مخالف صفر $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{u}_2$ را در فضای برداری V_1 در نظر بگیرید، که لزوماً متعامد نیستند. هدف این است که با زدودن برخی از بردارهایی به شکل $\alpha_1\mathbf{v}_1$ از بردار $\mathbf{u}_2$ آن را به یک بردار $\mathbf{v}_2$ بصورت $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \alpha_1\mathbf{v}_1$ تبدیل کنیم، به نحوی که بردارهای $\mathbf{v}_2$ و $\mathbf{v}_1$ متعامد باشند. به عبارتی ما به دنبال یافتن اعداد حقیقی مناسبی مانند α_1 هستیم، بطوریکه شرط زیر برقرار گردد،

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 - \alpha_1\mathbf{v}_1 \rangle = 0$$

تعبیر هندسی مسئله بصورت زیر مطرح می گردد،



شکل(۴-۱)- نمایش هندسی دو بردار عمود بر یکدیگر

از این رو می توان نوشت،

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 \rangle - \alpha_1\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle} = \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}$$

بنابراین انتخاب α_1 بصورت بالا مناسب خواهد بود و نتیجتاً دو بردار $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ متعامد خواهند بود،

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1$$

در حالت کلی بردارهای غیر صفر $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ و بردار غیر صفر $\mathbf{u}_{m+1}$ را در فضای برداری V_1 در نظر بگیرید. می خواهیم یک ترکیب خطی بصورت $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_m\mathbf{v}_m$ بیابیم، بطوریکه بردار $\mathbf{v}_{m+1}$ که بصورت زیر تعریف می گردد، بر هر یک از بردارهای $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ عمود باشد،

$$\mathbf{v}_{m+1} = \mathbf{u}_{m+1} - \alpha_1\mathbf{v}_1 - \alpha_2\mathbf{v}_2 - \cdots - \alpha_m\mathbf{v}_m \qquad (۳-۴)$$

به عبارتی در اینجا باید اسکالرهای حقیقی مناسب $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ را بیابیم، به طوریکه شرط زیر برقرار باشد،

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{m+1} \rangle = \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{u}_{m+1} - \alpha_1\mathbf{v}_1 - \alpha_2\mathbf{v}_2 - \cdots - \alpha_m\mathbf{v}_m \rangle = 0 \quad , \quad i = 1,2,\ldots,m$$

بدین ترتیب رابطه بالا به شکل زیر قابل بیان است،

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{u}_{m+1} \rangle - \alpha_1\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_1 \rangle - \alpha_2\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_2 \rangle - \cdots - \alpha_m\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_m \rangle = 0$$

بنابراین هر یک از α_iها بصورت زیر تعریف می شوند،

$$\alpha_i = \frac{\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{u}_{m+1} \rangle}{\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle} = \frac{\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{u}_{m+1} \rangle}{\|\mathbf{v}_i\|^2} \qquad (۴-۴)$$

به این ترتیب بردار $\mathbf{v}_{m+1}$ با تعریف زیر بر هر یک از بردارهای $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ عمود خواهد بود،

$$\mathbf{v}_{m+1} = \mathbf{u}_{m+1} - \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_{m+1} \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_{m+1} \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 - \cdots - \frac{\langle \mathbf{v}_m, \mathbf{u}_{m+1} \rangle}{\|\mathbf{v}_m\|^2}\mathbf{v}_m \qquad (۵-۴)$$

مثال۴-۳

بردارهای زیر را در نظر بگیرید،

$$\mathbf{u}_1 = [1,2,1,0], \quad \mathbf{u}_2 = [3,3,3,0], \quad \mathbf{u}_3 = [2,-10,0,0], \quad \mathbf{u}_4 = [-2,1,-6,2]$$

از آنجائیکه $|\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3 \quad \mathbf{u}_4| \neq 0$ است، این بردارها مستقل خطی می باشند، لذا مجموعه $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ تشکیل یک پایه برای فضای برداری $\Re^4$ می دهند. حال می خواهیم با استفاده از فرآیند گرام - اشمیت این بردارهای پایه را به بردارهای پایه متعامد تبدیل نماییم.

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 = [1,2,1,0],$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 = [3,3,3,0] - \frac{\langle [1,2,1,0],[3,3,3,0] \rangle}{\|[1,2,1,0]\|^2}[1,2,1,0] \\
&= [3,3,3,0] - \frac{12}{6}[1,2,1,0] = [3,3,3,0] + [-2,-4,-2,0] = [1,-1,1,0]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_3 &= \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_3 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 \\
&= [2,-10,0,0] - \frac{\langle [1,2,1,0],[2,-10,0,0] \rangle}{\|[1,2,1,0]\|^2}[1,2,1,0] - \frac{\langle [1,-1,1,0],[2,-10,0,0] \rangle}{\|[1,-1,1,0]\|^2}[1,-1,1,0] \\
&= [2,-10,0,0] - \frac{18}{6}[1,2,1,0] - \frac{13}{3}[1,-1,1,0] \\
&= [2,-10,0,0] + [3,6,3,0] + [-4,4,-4,0] = [1,0,-1,0]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_4 &= \mathbf{u}_4 - \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_4 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_4 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_4 \rangle}{\|\mathbf{v}_3\|^2}\mathbf{v}_3 \\ &= [-2,1,-6,2] - \frac{\langle [1,2,1,0],[-2,1,-6,2] \rangle}{\|[1,2,1,0]\|^2}[1,2,1,0] - \frac{\langle [1,-1,1,0],[-2,1,-6,2] \rangle}{\|[1,-1,1,0]\|^2}[1,-1,1,0] \\ &- \frac{\langle [1,0,-1,0],[-2,1,-6,2] \rangle}{[1,0,-1,0]^2}[1,0,-1,0] = \\ &= [-2,1,-6,2] - \frac{6}{6}[1,2,1,0] - \frac{9}{3}[1,-1,1,0] - \frac{4}{2}[1,0,-1,0] \\ &= [-2,1,-6,2] + [1,2,1,0] + [3,-3,3,0] + [-2,0,2,0] = [0,0,0,2]\end{aligned}$$

به این ترتیب بردارهای بدست آمده بصورت زیر دو به دو متعامد هستند،

$$\mathbf{v}_1 = [1,2,1,0], \quad \mathbf{v}_2 = [1,-1,1,0], \quad \mathbf{v}_3 = [1,0,-1,0], \quad \mathbf{v}_4 = [0,0,0,2]$$

لذا مجموعه $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ بردارهای پایه متعامد برای فضای برداری $\Re^4$ می باشد. با نرمالیزه کردن این بردارها می توان بردارهای پایه یکا متعامد را نیز بدست آورد،

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_1 &= \frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1,0) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right) \\ \mathbf{w}_2 &= \frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|}\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1,0) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) \\ \mathbf{w}_3 &= \frac{1}{\|\mathbf{v}_3\|}\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right) \\ \mathbf{w}_4 &= \frac{1}{\|\mathbf{v}_4\|}\mathbf{v}_4 = \frac{1}{2}(0,0,0,2) = (0,0,0,1)\end{aligned}$$

بنابراین، مجموعه $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ بردارهای پایه یکامتعامد برای فضای برداری $\Re^4$ هستند.
□

برنامه gramsch.m در نرم افزار MATLAB برای یکامتعامدسازی یک دسته بردار هم مرتبه بر اساس روش گرام- اشمیت نوشته شده است. در این برنامه بردارهای مذکور بصورت ستون های یک ماتریس ارائه می شوند.

```
% Gram-Schmidt orthogonalization method
function V = gramsch(A)
[m,n] = size(A);
for k = 1:n
V(:,k) = A(:,k);
for j = 1:k-1
V(:,k) = V(:,k) - (V(:,j)'*A(:,k))*V(:,j);
end
V(:,k) = V(:,k)/norm(V(:,k));
end
```

اجرای برنامه بصورت زیر است،

```
u1 =[1;2;1;0]; u2 =[3;3;3;0]; u3 =[2;-10;0;0]; u4 =[-2;1;-6;2];
A =[u1 u2 u3 u4];
V = gramsch(A)
V =
    0.4082    0.5774    0.7071    0.0000
    0.8165   -0.5774   -0.0000    0.0000
    0.4082    0.5774   -0.7071    0.0000
         0         0         0    1.0000
```

در اینجا ماتریس V حاصل یک ماتریس متعامد است، این موضوع را می توان بصورت زیر بررسی نمود،

```
 V'*V
ans =
    1.0000    0.0000   -0.0000    0.0000
    0.0000    1.0000    0.0000   -0.0000
   -0.0000    0.0000    1.0000    0.0000
    0.0000   -0.0000    0.0000    1.0000
```

□

مثال۴-۴

ماتریس A را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}2&1&-1&1\\1&0&1&2\\3&1&2&5\end{bmatrix}$$

پایه های فضای گستره ماتریس A را بدست آورید، سپس با استفاده از روش گرام- اشمیت پایه ها را به پایه های یکامتعامد تبدیل نمایید.

برای بدست آوردن پایه های فضای گستره فرم سطری پلکانی کاهش یافته ماتریس A را بدست می آوریم،

$$\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

با توجه به محل عناصر محوری پایه های فضای گستره بصورت زیر بدست می آید،

$$R(A)=\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$$

حال با اعمال فرایند گرام-اشمیت این پایه ها را به پایه های یکامتعامد تبدیل می نماییم،

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{a}_1=[2,1,3]$$

$$\mathbf{v}_2=\mathbf{a}_2-\frac{\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{a}_2\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1=[1,0,1]-\frac{\langle [2,1,3],[1,0,1]\rangle}{\|[2,1,3]\|^2}[2,1,3]$$

$$=[1,0,1]-\frac{5}{14}[2,1,3]=[1,0,1]+[\frac{-10}{14},\frac{-5}{14},\frac{-15}{14}]=[\frac{4}{14},\frac{-5}{14},\frac{-1}{14}]$$

$$\mathbf{v}_3=\mathbf{a}_3-\frac{\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{a}_3\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1-\frac{\langle \mathbf{v}_2,\mathbf{a}_3\rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2$$

$$=[-1,1,2]-\frac{\langle [2,1,3],[-1,1,2]\rangle}{\|[2,1,3]\|^2}[2,1,3]-\frac{\langle [\frac{4}{14},\frac{-5}{14},\frac{-1}{14}],[-1,1,2]\rangle}{\|[\frac{4}{14},\frac{-5}{14},\frac{-1}{14}]\|^2}[\frac{4}{14},\frac{-5}{14},\frac{-1}{14}]$$

$$=[-1,1,2]-\frac{5}{14}[2,1,3]+\frac{11}{3}[\frac{4}{14},\frac{-5}{14},\frac{-1}{14}]$$

$$=[-1,1,2]+[\frac{-10}{14},\frac{-5}{14},\frac{-15}{14}]+[\frac{44}{42},\frac{-55}{42},\frac{-11}{42}]=[\frac{-2}{3},\frac{-2}{3},\frac{2}{3}]$$

به این ترتیب پایه های متعامد بصورت زیر بدست می آیند،

$$\mathbf{v}_1 = [2,1,3], \qquad \mathbf{v}_2 = [\frac{4}{14}, \frac{-5}{14}, \frac{-1}{14}], \qquad \mathbf{v}_3 = [\frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3}]$$

با نرمالیزه کردن این بردارها می توان بردارهای پایه یکا متعامد را بدست آورد،

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}[2,1,3] = [\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}]$$

$$\mathbf{w}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|}\mathbf{v}_2 = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}}[\frac{4}{14}, \frac{-5}{14}, \frac{-1}{14}] = [\frac{4}{\sqrt{42}}, \frac{-5}{\sqrt{42}}, \frac{-1}{\sqrt{42}}]$$

$$\mathbf{w}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_3\|}\mathbf{v}_3 = \frac{3}{2\sqrt{3}}[\frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3}] = [\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB نیز پاسخ چنین بدست می آید،

```
A =[2 1 -1 1;1 0 1 2;3 1 2 5];
[R,p]= rref(A);
Rs = A(:,p)
Rs =
     2     1    -1
     1     0     1
     3     1     2
V = gramsch(Rs)
V =
    0.5345    0.6172   -0.5774
    0.2673   -0.7715   -0.5774
    0.8018   -0.1543    0.5774
```

در اینجا ابتدا پایه های فضای گستره ماتریس A را بدست می آوریم، سپس با استفاده از برنامه gramsch آنها را یکامتعامدسازی می کنیم.

□

مثال ۴-۵

اگر فرایند گرام- اشمیت را به یک دسته بردار یکامتعامد اعمال نماییم، نتیجه نهایی چه خواهد شد؟ با انتخاب سه بردار یکا متعامد پاسخ خود را بررسی نمایید.

سه بردار یکامتعامد $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ را در نظر بگیرید،

$$\mathbf{u}_1 = [\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{5}}], \qquad \mathbf{u}_2 = [0,-1,0], \qquad \mathbf{u}_3 = [\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}]$$

حال فرایند گرام- اشمیت را بر این سه بردار اعمال می نماییم،

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{u}_1=[\frac{2}{\sqrt5},0,\frac{-1}{\sqrt5}]$$

$$\mathbf{v}_2=\mathbf{u}_2-\frac{\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{u}_2\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1=[0,-1,0]-\frac{\langle[\frac{2}{\sqrt5},0,\frac{-1}{\sqrt5}],[0,-1,0]\rangle}{\|[\frac{2}{\sqrt5},0,\frac{-1}{\sqrt5}]\|^2}[\frac{2}{\sqrt5},0,\frac{-1}{\sqrt5}]=[0,-1,0]$$

$$\mathbf{v}_3=\mathbf{u}_3-\frac{\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{u}_3\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1-\frac{\langle\mathbf{v}_2,\mathbf{u}_3\rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2$$

$$=[\frac{1}{\sqrt5},0,\frac{2}{\sqrt5}]-\frac{\langle[\frac{2}{\sqrt5},0,\frac{-1}{\sqrt5}],[\frac{1}{\sqrt5},0,\frac{2}{\sqrt5}]\rangle}{\|[\frac{2}{\sqrt5},0,\frac{-1}{\sqrt5}]\|^2}[\frac{2}{\sqrt5},0,\frac{-1}{\sqrt5}]-\frac{\langle[0,-1,0],[\frac{1}{\sqrt5},0,\frac{2}{\sqrt5}]\rangle}{\|[0,-1,0]\|^2}[0,-1,0]$$

$$=[\frac{1}{\sqrt5},0,\frac{2}{\sqrt5}]$$

لذا با اعمال فرایند گرام اشمیت به یک دسته بردار یکامتعامد مجدداً خود بردارها بدست می آیند.

□

مثال۴-۶

اگر فرایند گرام- اشمیت را به یک دسته بردار وابسته خطی اعمال نماییم، نتیجه نهایی چه خواهد شد؟ با انتخاب سه بردار وابسته خطی پاسخ خود را بررسی نمایید.

سه بردار وابسته خطی $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ را در نظر بگیرید،

$$\mathbf{u}_1=[1,0,-1],\qquad \mathbf{u}_2=[2,0,-2],\qquad \mathbf{u}_3=[-1,0,1]$$

حال فرایند گرام- اشمیت را بر این سه بردار اعمال می نماییم،

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{u}_1=[1,0,-1]$$

$$\mathbf{v}_2=\mathbf{u}_2-\frac{\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{u}_2\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1=[2,0,-2]-\frac{\langle[1,0,-1],[2,0,-2]\rangle}{\|[1,0,-1]\|^2}[1,0,-1]$$

$$=[2,0,-2]-\frac{4}{2}[1,0,-1]=[0,0,0]$$

مشاهده می شود که بردار $\mathbf{v}_2$ صفر بدست می آید، لذا فرایند متوقف می شود زیرا $\|\mathbf{v}_2\|=0$ است. بنابراین برای اجرای صحیح فرایند متعامد سازی گرام- اشمیت باید بردارها مستقل خطی باشند.

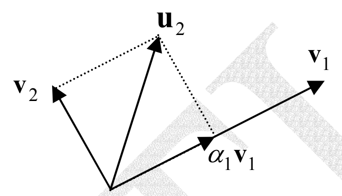
□

۴-۲-۲- تصاویر متعامد

فرض کنید V_2 یک زیرفضای برداری از فضای V_1 باشد. در اینصورت برای هر بردار مانند $\mathbf{u}$ در فضای برداری V_1 می توان عبارت زیر را نوشت،

$$\mathbf{u} = \text{proj}_{V_2}\mathbf{u} + \text{proj}_{V_2^{\perp}}\mathbf{u} \qquad (۶-۴)$$

که در آن $\text{proj}_{V_2}\mathbf{u}$ یک بردار در زیر فضای V_2 است، که به آن **تصویر متعامد**[۱] بردار $\mathbf{u}$ بر روی V_2 گفته می شود و همینطور $\text{proj}_{V_2^{\perp}}\mathbf{u}$ یک بردار در $V_2^{\perp}$ (مکمل متعامد V_2) است، که به آن **مؤلفه عمودی**[۲] بردار $\mathbf{u}$ عمود بر V_2 می گویند. یک تعبیر هندسی ساده از این گفته در شکل زیر نشان داده شده است،



شکل(۴-۲)- نمایش هندسی تصویر متعامد یک بردار

بردار $\mathbf{u}_2$ را می توان بصورت مجموع مؤلفه های عمودی و افقی آن نسبت به بردار $\mathbf{v}_1$ نوشت،

$$\mathbf{u}_2 = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \text{proj}_{\mathbf{v}_1}\mathbf{u}_2 + \text{proj}_{\mathbf{v}_1^{\perp}}\mathbf{u}_2$$

از طرفی با توجه به فرآیند گرام-اشمیت می توان نوشت،

$$\text{proj}_{\mathbf{v}_1}\mathbf{u}_2 = \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 \qquad (۷-۴)$$

حال اگر زیر فضای V_2 مجموعه ای از بردارهای پایه متعامد بصورت $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ داشته باشد، در اینصورت رابطه بالا را بصورت زیر می توان نوشت،

$$\text{proj}_{V_2}\mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{v}_n\|^2}\mathbf{v}_n \qquad (۸-۴)$$

در واقع هر یک از اجزای عبارت سمت راست رابطه بالا تصویر بردار $\mathbf{u}$ بر روی یک یک بردارهای پایه متعامد $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ می باشد و مجموع این تصاویر تصویر بردار $\mathbf{u}$ بر روی زیرفضای V_2 را نتیجه می دهد. حال اگر بردارهای پایه $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ یکامتعامد باشند داریم،

$$\text{proj}_{V_2}\mathbf{u} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u} \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u} \rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{u} \rangle \mathbf{v}_n \qquad (۹-۴)$$

---
[۱] Orthogonal Projection
[۲] Orthogonal Component

مثال۴-۷

ماتریس A و بردار $\mathbf{b}$ را در نظر بگیرید، تصویر متعامد بردار $\mathbf{b}$ بر روی $R(A)$ را بدست آورید

الف) $$A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$$

ابتدا پایه های یکامتعامد $R(A)$ را بدست می آوریم،

$$R(A)=sp\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$$

باید از فرایند گرام- اشمیت استفاده کنیم،

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad \mathbf{w}_1=\mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{v}_2=\mathbf{a}_2-\frac{\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{a}_2\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}-\frac{1}{1}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad \mathbf{w}_2=\mathbf{v}_2$$

حال تصویر بردار $\mathbf{b}$ را بر روی پایه های یکامتعامد $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2$ بدست می آوریم،

$$\text{proj}_{R(A)}\mathbf{b}=\langle\mathbf{w}_1,\mathbf{b}\rangle\mathbf{w}_1+\langle\mathbf{w}_2,\mathbf{b}\rangle\mathbf{w}_2=(2)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+(3)\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix}$$

ب) $$A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\\0&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}4\\4\\6\end{bmatrix}$$

ابتدا با استفاده از فرایند گرام- اشمیت پایه های یکامتعامد $R(A)$ را بدست می آوریم،

$$R(A)=sp\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad \mathbf{w}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{a}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{2}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2$$

حال تصویر بردار $\mathbf{b}$ را بر روی پایه های یکامتعامد $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ بدست می آوریم،

$$\operatorname{proj}_{R(A)}\mathbf{b} = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{b} \rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{b} \rangle \mathbf{w}_2 = (\frac{8}{\sqrt{2}})\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{bmatrix} + (6)\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\4\\6\end{bmatrix}$$

می توان نتیجه گرفت که $\mathbf{b} \in R(A)$ بوده، لذا تصویر متعامد آن بر روی $R(A)$ خود بردار است.

ج) $A = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix}3\\2\\7\end{bmatrix}$

ابتدا با استفاده از فرایند گرام- اشمیت پایه های یکامتعامد $R(A)$ را بدست می آوریم،

$$R(A) = sp\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{a}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{0}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

حال تصویر بردار $\mathbf{b}$ را بر روی پایه های یکامتعامد $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ بدست می آوریم،

$$\operatorname{proj}_{R(A)}\mathbf{b} = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{b} \rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{b} \rangle \mathbf{w}_2 = (\frac{-4}{\sqrt{2}})\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} + (\frac{12}{\sqrt{3}})\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}$$

با کمی تغییر در برنامه gramsch به راحتی می توان آن را به برنامه ای تبدیل کرد که تصویر متعامد یک بردار را بر روی فضای گستره یک ماتریس بدست آورد،

□

۴-۳ مسئله حداقل مربعات

یکی از مهمترین کاربردهای تصاویر متعامد در حل دستگاه معادلات خطی ناسازگار است. از آنجائیکه دستگاه معادلات خطی ناسازگار جواب ندارد، این سؤال در ذهن ایجاد شود که چرا ما به این موضوع می پردازیم؟ برای روشن تر شدن مطلب به دو مثال زیر توجه کنید،

مثال۴-۸

معادله خطی را بیابید که از چهار نقطه زیر عبور کند،

$$(1,-1),\quad (4,11),\quad (-1,-9),\quad (-2,-13)$$

فرم کلی معادله خط را بصورت $y = mx + n$ در نظر می گیریم. برای اینکه خط مذکور از این نقاط عبور کند باید مختصات نقاط در آن صدق نماید. با قرار دادن هر یک از نقاط بالا در معادله خط، معادلات زیر بدست می آیند،

$$\left.\begin{array}{l} m+n=-1 \\ 4m+n=11 \\ -m+n=-9 \\ -2m+n=-13 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 11 \\ -9 \\ -13 \end{bmatrix}$$

با حل معادلات بالا جواب $m = 4$ و $n = -5$ بدست می آید. بنابراین معادله خط مذکور بصورت $y = 4x - 5$ می باشد. لازم به ذکر است که این نمونه ای از یک دستگاه معادلات سازگار است. سازگار بودن سیستم را می توان بصورت زیر بررسی کرد،

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A\,|\,\mathbf{b}) = 2$$

□

مثال۴-۹

معادله خطی را بیابید که از چهار نقطه زیر عبور کند،

$$(-3,70),\quad (1,21),\quad (-7,110),\quad (5,-35)$$

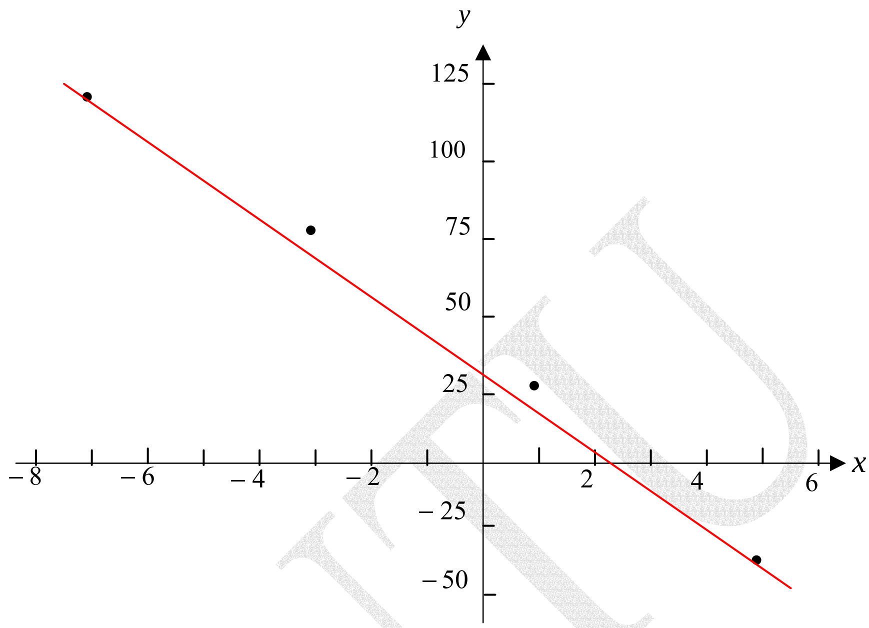
همانند آنچه که در مثال قبل انجام شد، با قرار دادن هر یک از نقاط در معادله خط، معادلات زیر بدست می آیند،

$$\left.\begin{array}{l} -3m+n=70 \\ m+n=21 \\ -7m+n=110 \\ 5m+n=-35 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \\ -7 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 \\ 21 \\ 110 \\ -35 \end{bmatrix}$$

از آنجائیکه این دستگاه معادلات ناسازگار است، لذا پاسخی برای آن وجود ندارد. پس بر خلاف مثال قبل در این حالت نمی توان خطی را از این چهار نقطه عبور داد. ناسازگار بودن سیستم را بررسی کرد،

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \text{rank}(A)=2 \quad , \quad \text{rank}(A|\mathbf{b})=3$$

لذا $\mathbf{b} \notin R(A)$ و سیستم ناسازگار است. برای اینکه این سیستم ناسازگار را بیشتر بررسی نماییم نمودار مختصات نقاط را رسم می نماییم،



شکل(۴-۳)- چهار نقطه از سیستم نازگار

با توجه به شکل بالا چهار نقطه مذکور بر روی یک خط راست قرار ندارند و همانطور که گفته شد، دستگاه معادلات حاصل نیز ناسازگار می باشد. لیکن ممکن است این چهار نقطه از نتایج تجربی یک سری آزمایشات بدست آمده و به خاطر برخی خطاهای فیزیکی و اندازه گیری از مقدار واقعی خود منحرف شده بر راستای یک خط راست قرار نگرفته باشند. در اینجا مسئله ای که مطرح می شود آن است که آیا می توان معادله خطی را بدست آورد که این چهار نقطه بطور تقریبی بر روی آن قرار گیرد؟

□

۴-۳-۱- تعریف مسئله حداقل مربعات[۱]

دستگاه معادلات خطی ناسازگار زیر را در نظر بگیرید،

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

چون سیستم ناسازگار است $\mathbf{b} \notin R(A)$ و برای هیچ مقدار از $\mathbf{x}$ تساوی مذکور برقرار نیست. لذا داریم،

$$\varepsilon=\mathbf{b}-A\mathbf{x} \qquad (۴-۱۰)$$

[۱] Least Square Problem

که در آن ε **بردار خطا**[۱] می باشد، اندازه خطا با استفاده از نُرم دو بصورت زیر تعریف می شود،

$$\|\varepsilon\| = \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\| \tag{۱۱-۴}$$

برای یک سیستم ناسازگار $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$، هدف یافتن برداری مانند $\hat{\mathbf{x}}$ است، بطوریکه خطای محاسبه شده بصورت $\|\hat{\varepsilon}\| = \|\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}\|$ کوچکترین مقدار خطای ممکن باشد. در اینصورت بردار $\hat{\mathbf{x}}$ را **جواب حداقل مربعات**[۲] می گویند. در واقع باید بردار $\hat{\mathbf{b}} = A\hat{\mathbf{x}}$ تا حد ممکن به بردار $\mathbf{b}$ شبیه باشد و مسخص است که باید $\hat{\mathbf{b}} \in R(A)$ باشد. پس به دنبال بهترین تقریب برای بردار $\mathbf{b}$ در $R(A)$ هستیم. برای این منظور باید $\hat{\mathbf{b}}$ را بصورت زیر انتخاب نماییم،

$$\hat{\mathbf{b}} = \mathrm{proj}_{R(A)}\mathbf{b} \tag{۱۲-۴}$$

یعنی تصویر متعامد بردار $\mathbf{b}$ بر روی فضای گستره ماتریس A بهترین تقریب ممکن است. لذا برای حل مسئله حداقل مربعات باید ابتدا $\hat{\mathbf{b}} = \mathrm{proj}_{R(A)}\mathbf{b}$ را بیابیم و سپس معادله $\hat{\mathbf{b}} = A\hat{\mathbf{x}}$ را حل کنیم.

قضیه: اگر V_2 یک زیرفضای برداری از فضای برداری V_1 و $\mathbf{u} \in V_1$ باشد، بهترین تقریب برای بردار $\mathbf{u}$ در زیرفضای V_2 تصویر متعامد آن بر V_2، یعنی $\mathrm{proj}_{V_2}\mathbf{u}$ می باشد و برای هر تقریب دیگری مانند بردار $\mathbf{w}$ (غیر از $\mathrm{proj}_{V_2}\mathbf{u}$) اندازه خطا بزرگتر خواهد بود،

$$\|\mathbf{u} - \mathrm{proj}_{V_2}\mathbf{u}\| < \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\| \tag{۱۳-۴}$$

اثبات: برای هر بردار $\mathbf{w} \in V_2$ می توان نوشت،

$$\mathbf{u} - \mathbf{w} = (\mathbf{u} - \mathrm{proj}_{V_2}\mathbf{u}) + (\mathrm{proj}_{V_2}\mathbf{u} - \mathbf{w})$$

در عبارت اخیر جزء $(\mathrm{proj}_{V_2}\mathbf{u} - \mathbf{w})$ تفاضل دو بردار در زیر فضای V_2 را نشان می دهد، که حاصل آن نیز در همان زیر فضای V_2 قرار دارد. لیکن جزء $(\mathbf{u} - \mathrm{proj}_{V_2}\mathbf{u})$ در واقع همان $\mathrm{proj}_{V_2^\perp}\mathbf{u}$ است، که مؤلفه عمودی بردار $\mathbf{u}$ بر زیر فضای V_2 می باشد، لذا با هر بردار در زیرفضای V_2 متعامد می باشد. از این رو بردارهای $(\mathrm{proj}_{V_2}\mathbf{u} - \mathbf{w})$ و $(\mathbf{u} - \mathrm{proj}_{V_2}\mathbf{u})$ متعامد هستند. بنابر رابطه فیثاغورث می توان نوشت،

$$\|\mathbf{u}\text{-}\mathbf{w}\|^2 = \|(\mathbf{u} - \mathrm{proj}_{V_2}\mathbf{u}) + (\mathrm{proj}_{V_2}\mathbf{u} - \mathbf{w})\|^2 = \|(\mathbf{u} - \mathrm{proj}_{V_2}\mathbf{u})\|^2 + \|(\mathrm{proj}_{V_2}\mathbf{u} - \mathbf{w})\|^2$$

حال اگر $\mathbf{w} \neq \mathrm{proj}_{V_2}\mathbf{u}$ باشد در اینصورت $\|(\mathrm{proj}_{V_2}\mathbf{u} - \mathbf{w})\|^2 > 0$ است. بنابراین داریم،

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|^2 > \|(\mathbf{u} - \mathrm{proj}_{V_2}\mathbf{u})\|^2 \quad \rightarrow \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\| > \|(\mathbf{u} - \mathrm{proj}_{V_2}\mathbf{u})\|$$

□

[۱] Error Vector
[۲] Least Square Solution

مثال۴-۱۰

برای سیستم ناسازگار زیر پاسخ مسئله حداقل مربعات را با استفاده از تصاویر متعامد بیابید.

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}\rightarrow \begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & 1\\ -7 & 1\\ 5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\ n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}70\\ 21\\ 110\\ -35\end{bmatrix}\xrightarrow{rref}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\ n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

ابتدا با استفاده از فرایند گرام- اشمیت پایه های یکامتعامد $R(A)$ را بدست می آوریم سپس تصویر متعامد بردار $\mathbf{b}$ را بر روی پایه ها بدست آوریم،

$$R(A)=\left\{\begin{bmatrix}-3\\ 1\\ -7\\ 5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}\right\}$$

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{a}_1=[-3,1,-7,5] \quad\rightarrow\quad \mathbf{w}_1=\left[\tfrac{-3}{2\sqrt{21}},\tfrac{1}{2\sqrt{21}},\tfrac{-7}{2\sqrt{21}},\tfrac{5}{2\sqrt{21}}\right]$$

$$\mathbf{v}_2=\mathbf{a}_2-\frac{\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{a}_2\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1=[1,1,1,1]-\frac{-4}{84}[-3,1,-7,5]=\left[\tfrac{18}{21},\tfrac{22}{21},\tfrac{14}{21},\tfrac{26}{21}\right]$$

$$\mathbf{w}_2=\left[\tfrac{18}{4\sqrt{105}},\tfrac{22}{4\sqrt{105}},\tfrac{14}{4\sqrt{105}},\tfrac{26}{4\sqrt{105}}\right]$$

حال تصویر بردار $\mathbf{b}$ را بر روی پایه های یکامتعامد $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2$ بدست می آوریم،

$$\hat{\mathbf{b}}=\mathrm{proj}_{R(A)}\mathbf{b}=\langle \mathbf{w}_1,\mathbf{b}\rangle\mathbf{w}_1+\langle \mathbf{w}_2,\mathbf{b}\rangle\mathbf{w}_2$$

$$\hat{\mathbf{b}}=\left(\frac{-567}{\sqrt{21}}\right)\begin{bmatrix}\frac{-3}{2\sqrt{21}}\\ \frac{1}{2\sqrt{21}}\\ \frac{-7}{2\sqrt{21}}\\ \frac{5}{2\sqrt{21}}\end{bmatrix}+\left(\frac{588}{\sqrt{105}}\right)\begin{bmatrix}\frac{18}{4\sqrt{105}}\\ \frac{22}{4\sqrt{105}}\\ \frac{14}{4\sqrt{105}}\\ \frac{26}{4\sqrt{105}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}65.7\\ 17.3\\ 114.1\\ -31.1\end{bmatrix}$$

حال با حل معادله $A\hat{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{b}}$ جواب مسئله حداقل مربعات را بدست می آوریم،

$$A\hat{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{b}}\rightarrow \begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & 1\\ -7 & 1\\ 5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\ n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}65.7\\ 17.3\\ 114.1\\ -31.1\end{bmatrix}\xrightarrow{rref}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\ n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-12.1\\ 29.4\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

بنابراین بهترین تقریب برای خطی که از چهار نقطه $(-3,70),(1,21),(-7,110),(5,-35)$ بگذرد بصورت زیر می باشد،

$$y=mx+n=-12.1x+29.4$$

□

۴-۳-۲- استفاده از معادلات نرمال

یکی از روش های حل مسئله حداقل مربعات با ماتریس A رتبه کامل و خوش حالت، استفاده از معادلات نرمال است.

قضیه: اگر بردار $\hat{\mathbf{x}}$ جواب مسئله حداقل مربعات برای یک دستگاه معادلات خطی ناسازگار بصورت $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ باشد، می تواند جواب دستگاه معادلات خطی زیر نیز باشد،

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b} \tag{۱۴-۴}$$

که به آن **معادلات نرمال**[۱] گفته می شود، از این رو اگر ماتریس A رتبه کامل و خوش حالت باشد، در اینصورت می توان یک پاسخ حداقل مربعات منحصر بفرد بصورت زیر بدست آورد،

$$\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T\mathbf{b} \tag{۱۵-۴}$$

این جوابی است که $\|A\mathbf{x}-\mathbf{b}\|$ را مینیمم می نماید.

اثبات: فرض کنید بردار $\hat{\mathbf{x}}$ جواب مسئله حداقل مربعات باشد، لذا داریم،

$$A\hat{\mathbf{x}} = \mathrm{proj}_{R(A)}\mathbf{b}$$

این رابطه را می توان بصورت زیر بازنویسی کرد،

$$\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b} - \mathrm{proj}_{R(A)}\mathbf{b}$$

می دانیم بردار $\mathbf{b}-\mathrm{proj}_{R(A)}\mathbf{b}$ متعلق به زیر فضای $R(A)^{\perp}$ یا همان $N(A^T)$ می باشد. طبق تعریف $N(A^T)$ داریم،

$$N(A^T) = \{\mathbf{x}\in\Re^m \to A^T\mathbf{x}=\mathbf{0}\}$$

لذا باید داشته باشیم،

$$A^T(\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}) = A^T(\mathbf{b} - \mathrm{proj}_{R(A)}\mathbf{b}) = \mathbf{0} \quad \to \quad A^T\mathbf{b} = A^T A\hat{\mathbf{x}}$$

حال اگر ماتریس A رتبه کامل باشند ماتریس $A^T A$ معکوس پذیراست. لذا جواب منحصر بفرد این معادله بصورت زیر بدست می آید،

$$\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T\mathbf{b}$$

که همان جواب حداقل مربعات است. بنابراین می توان گفت که $\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T\mathbf{b}$ مقدار $\|A\mathbf{x}-\mathbf{b}\|$ را مینیمم می کند.

□

با توجه به نتیجه بدست آمده بردار $\hat{\mathbf{b}} = \mathrm{proj}_{R(A)}\mathbf{b}$ را می توان بصورت زیر نیز بیان کرد،

$$A\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{b}} \quad \to \quad \hat{\mathbf{b}} = A(A^T A)^{-1}A^T\mathbf{b} = P\mathbf{b} \tag{۱۶-۴}$$

[۱] Normal Equations

ماتریس P را، **ماتریس تصویر**[۱] $R(A)$ گویند. با استفاده از این ماتریس می توان تصویر متعامد هر بردار $\mathbf{b}_{m\times 1}$ را بر روی $R(A_{m\times n})$ بدست آورد. همچنین ماتریس $A^L=(A^TA)^{-1}A^T$ را **معکوس چپ**[۲] ماتریس A گویند،

$$A^L=(A^TA)^{-1}A^T \qquad (۱۷\text{-}۴)$$

زیرا اگر از سمت چپ در A ضرب شود ماتریس واحد I_n را می دهد،

$$A^{LM}A=(A^TA)^{-1}A^TA=(A^TA)^{-1}(A^TA)=I_n$$

مثال۴-۱۱

حال دستگاه معادلات ناسازگار مثال قبل را با استفاده از معادلات نرمال حل می کنیم،

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}\rightarrow \quad \begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & 1\\ -7 & 1\\ 5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\ n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}70\\ 21\\ 110\\ -35\end{bmatrix}$$

با توجه به معادلات نرمال داریم،

$$A^TA\hat{\mathbf{x}}=A^T\mathbf{b} \quad \rightarrow \begin{bmatrix}-3 & 1 & -7 & 5\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & 1\\ -7 & 1\\ 5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{m}\\ \hat{n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 1 & -7 & 5\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}70\\ 21\\ 110\\ -35\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}84 & -4\\ -4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{m}\\ \hat{n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1134\\ 166\end{bmatrix}\rightarrow \quad \hat{m}=\frac{-121}{10}=-12.1, \quad \hat{n}=\frac{147}{5}=29.4$$

$$\hat{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}\hat{m}\\ \hat{n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-12.1\\ 29.4\end{bmatrix}$$

بنابراین بهترین تقریب برای خطی که از چهار نقطه $(5,-35),(-7,110),(1,21),(-3,70)$ بگذرد بصورت زیر می باشد، که همان نتیجه مثال قبل است،

$$y=-12.1x+29.4$$

حال می توان در صورت نیاز خطای تقریب را نیز محاسبه کرد،

[۱] Projection Matrix
[۲] Left Inverse

$$\varepsilon = \mathbf{b} - A\mathbf{x} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 \\ 21 \\ 110 \\ -35 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \\ -7 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70-(-3m+n) \\ 21-(m+n) \\ 110-(-7m+n) \\ -35-(5m+n) \end{bmatrix}$$

با در نظر گرفتن مقدار تقریب $\hat{\mathbf{x}}$ می توان نوشت،

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12.1 \\ 29.4 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \hat{\varepsilon}_1 = 70-(-12.1(-3)+29.4) = 4.3 \\ \hat{\varepsilon}_2 = 21-(-12.1(1)+29.4) = 3.7 \\ \hat{\varepsilon}_3 = 110-(-12.1(-7)+29.4) = -4.1 \\ \hat{\varepsilon}_4 = -35-(-12.1(5)+29.4) = -3.9 \end{cases}$$

بنابراین بردار خطا بصورت زیر بدست می آید،

$$\begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \hat{\varepsilon}_3 \\ \hat{\varepsilon}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.3 \\ 3.7 \\ -4.1 \\ -3.9 \end{bmatrix}$$

مقدار نُرم خطا را می توان به شکل زیر محاسبه کرد،

$$\|\hat{\varepsilon}\|^2 = (4.3)^2 + (3.7)^2 + (-4.1)^2 + (-3.9)^2 = 64.2 \quad , \quad \|\varepsilon\| = \sqrt{64.2} = 8.0125$$

در واقع هر مقدار دیگری برای m و n انتخاب گردد نُرم خطا بزرگتر از 8.0125 خواهد شد.

در نرم افزار MATLAB اگر ماتریس A رتبه کامل و خوش حالت باشد از عملگر تقسیم چپ (\ ) می توان برای حل مسئله حداقل مربعات سیستم ناسازگار $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ استفاده نمود.

```
A =[-3 1;1 1;-7 1;5 1];
b =[70;21;110;-35];
x = A \ b
x =
  -12.1000
   29.4000
e = norm(A * x - b)
e =
   8.0125
```

اگر نقص رتبه وجود داشته باشد پیغام اخطار مربوطه ظاهر می گردد، در اینصورت می توان از دستور pinv(A) استفاده نمود این دستور شبه معکوس ماتریس A را محاسبه می نماید. البته تعداد

محاسباتی که در این حالت انجام می شود بیشتر از حالتی است که از عملگر تقسیم چپ(\ ) استفاده می شود. تعریف شبه معکوس و نحوه محاسبه آن در مباحث بعدی آورده شده است. به مثال زیر توجه نمایید،

```
A = [2 1; 1 10; 1 2];
b = [1 2 3]';
flops(0)
x = A \ b
nflps = flops
x =
     0.9151
     0.1509
nflps =
        92
flops(0)
x = pinv(A)* b
nflps = flops
x =
     0.9151
     0.1509
nflps =
        196
```

□

مثال۴-۱۲

ماتریس A و بردار $\mathbf{b}$ را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}2\\ 3\\ 4\end{bmatrix}$$

الف) سازگار یا ناسازگار بودن دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ را بررسی نمایید.

- از آنجاییکه $\mathrm{rank}(A)=2$ و $\mathrm{rank}(A\,|\,\mathbf{b})=3$ است، لذا سیستم ناسازگار است. این را می توان از روی فرم سطری پلکانی کاهش یافته سیستم نتیجه گرفت،

$$[A|\mathbf{b}]=\left[\begin{array}{cc|c}1&1&2\\0&1&3\\0&0&4\end{array}\right]\xrightarrow{rref}\left[\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]$$

ب) بردار $\hat{\mathbf{b}}$ یعنی تصویر متعامد بردار $\mathbf{b}$ بر روی $R(A)$ و ماتریس تصویر $R(A)$ را بدست آورید.

- برای بدست آوردن بردار $\hat{\mathbf{b}}$ دو روش را می توان بکار برد،

۱- با استفاده از متعامد سازی و روش گرام- اشمیت می توان تصویر متعامد بردار $\mathbf{b}$ بر روی $R(A)$ را محاسبه کرد، ابتدا پایه های یکامتعامد $R(A)$ را بدست می آوریم،

$$R(A)=sp\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$$

$$\text{پایه های یکامتعامد با روش گرام- اشمیت}\rightarrow\quad \mathbf{w}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\mathbf{w}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

حال تصویر بردار $\mathbf{b}$ را بر روی پایه های $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2$ بدست می آوریم،

$$\hat{\mathbf{b}}=\langle\mathbf{w}_1,\mathbf{b}\rangle\mathbf{w}_1+\langle\mathbf{w}_2,\mathbf{b}\rangle\mathbf{w}_2\quad\rightarrow\quad\hat{\mathbf{b}}=\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix}$$

۲- با استفاده از معادلات نرمال بردار $\hat{\mathbf{b}}$ بصورت زیر بدست می آید،

$$\hat{\mathbf{b}}=A\hat{\mathbf{x}}=A(A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}\quad\rightarrow\quad\hat{\mathbf{b}}=\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix}$$

- ماتریس تصویر $R(A)$ در واقع ارتباط بین بردار $\mathbf{b}$ و $\hat{\mathbf{b}}$ است که بصورت زیر بدست می آید،

$$\hat{\mathbf{b}}=A(A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}=P\mathbf{b}\quad\rightarrow\quad P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

ج) یک معکوس چپ برای ماتریس A بیابید.

- معکوس چپ ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$A^L=(A^TA)^{-1}A^T\quad\rightarrow\quad A^L=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

□

مثال۴-۱۳

ناسازگار بودن دستگاه معادلات را بررسی نمایید و جواب حداقل مربعات را با روش معادلات نرمال محاسبه کنید.

الف) $\begin{cases} 2x_1 = 1 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_2 = -1 \end{cases}$

ابتدا سازگار یا ناسازگار بودن را بررسی می کنیم،

$$\mathrm{rank}(A) = 2, \quad \mathrm{rank}(A\,|\,\mathbf{b}) = 3 \quad \rightarrow$$ سیستم ناسازگار است

حال جواب حداقل مربعات را بدست می آوریم،

$$A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b} \quad \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \rightarrow \quad \hat{x}_1 = 0.333, \quad \hat{x}_2 = -0.333$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.333 \\ -0.333 \end{bmatrix}$$

به حل مسئله در نرم افزار MATLAB توجه نمایید،

```
A =[2 0;-1 1;0 2];
b =[1;0;-1];
flops(0)
x = inv(A'*A)* A'*b
x =
    0.3333
   -0.3333
nflops = flops
nflops =
   105
```

در اینجا از دستور inv برای بدست آوردن جواب استفاده کردیم و تعداد محاسبات را نیز بدست آوردیم. حال یکبار هم با استفاده از عملگر (\\) مسئله را حل می کنیم و تعداد محاسبات را مقایسه می نماییم،

```
flops(0)
x =(A'*A)\(A'*b)
x =
    0.3333
   -0.3333
nflops = flops
nflops =
   57
```

تعداد محاسبات در این حالت بسیار کمتر است و برای ماتریس های با ابعاد بالا استفاده از دستور inv اکیداً توصیه نمی شود.

ب)
$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

ابتدا سازگار یا ناسازگار بودن را بررسی می کنیم،

$\mathrm{rank}(A) = 3, \quad \mathrm{rank}(A\,|\,\mathbf{b}) = 4 \quad \rightarrow$ سیستم ناسازگار است

حال جواب حداقل مربعات را بدست می آوریم،

$$A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 4 & 10 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 10 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 4 & 10 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 24 \\ 0 & 12 & 20 \\ 24 & 20 & 124 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 0 \\ 92 \end{bmatrix} \rightarrow \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5455 \\ -1.9318 \\ 1.1591 \end{bmatrix}$$

به حل مسئله در نرم افزار MATLAB توجه نمایید،

```
A =[1 0 4;2 2 10;1 -2 2;1 -2 -2];
b =[3;7;6;1];
x =(A'*A)\(A'*b)
x =
   -0.5455
   -1.9318
    1.1591
```

□

۴-۳-۳- استفاده از تجزیه چالسکی

یکی از کاربردهای تجزیه چالسکی استفاده از آن در حل مسئله حداقل مربعات می باشد. معادلات نرمال را در نظر بگیرید،

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

می دانیم زمانیکه ماتریس A رتبه کامل باشد، ماتریس $A^T A$ یک ماتریس مثبت معین است. برای نشان دادن این موضوع می توان از تعریف ماتریس مثبت معین استفاده نمود،

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(A^T A)\mathbf{x} = (A\mathbf{x})^{\mathrm{T}}(A\mathbf{x}) = \begin{cases} \|A\mathbf{x}\|^2 > 0 & , \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ \|A\mathbf{x}\|^2 = 0 & , \quad \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases}$$

لذا می توان تجزیه چالسکی $A^T A$ را بدست آورد و برای بدست آوردن جواب مسئله حداقل مربعات از طریق تجزیه چالسکی روند زیر را طی نمود،

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b} \quad \overset{C=A^T A}{\rightarrow} \quad C\mathbf{x} = A^T\mathbf{b} \quad \overset{\mathbf{d}=C\mathbf{x}}{\rightarrow} \quad \mathbf{d} = A^T\mathbf{b}$$

سپس تجزیه چالسکی ماتریس C را بصورت $C = LL^T$ بدست آورده و معادلات زیر را حل نمود،

$$\begin{cases} L\mathbf{z} = \mathbf{d} \\ L^T\mathbf{x} = \mathbf{z} \end{cases} \qquad (۱۸-۴)$$

مثال۴-۱۴

برای دستگاه معادلات زیر مسئله حداقل مربعات را با استفاده از تجزیه چالسکی حل نمایید،

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -6 & 26 \\ 4 & -8 & -7 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

از آنجاییکه $\mathrm{rank}(A) = 3$ و $\mathrm{rank}(A\,|\,\mathbf{b}) = 4$ است، لذا سیستم ناسازگار است.

ابتدا مقدارهای $C = A^T A$ و $\mathbf{d} = A^T\mathbf{b}$ را بدست می آوریم،

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 30 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{-13}{5} \\ 4 \end{bmatrix}$$

سپس معادله نرمال را حل می نماییم،

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b} \rightarrow C\mathbf{x} = \mathbf{d} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 30 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{-13}{5} \\ 4 \end{bmatrix}$$

تجزیه چالسکی ماتریس C بصورت زیر می باشد،

$$C = LL^T \quad \rightarrow \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

حال باید دستگاه معادلات را حل نمائیم،

$$L\mathbf{z} = \mathbf{d} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{-13}{5} \\ 4 \end{bmatrix}$$

از این معادلات مقدار $[z_1, z_2, z_3] = [\frac{7}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}]$ بدست می آید و سرانجام با حل دستگاه معادلات آخر پاسخ مسئله حداقل مربعات محاسبه می گردد،

$$L^T\mathbf{x} = \mathbf{z} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

و از اینجا $[x_1, x_2, x_3] = [\frac{41}{25}, \frac{4}{25}, \frac{1}{25}]$ بدست می آید.

با استفاده از نرم افزار MATLAB می توان برنامه ای بصورت زیر نوشت، در این برنامه ابتدا تجزیه چالسکی ماتریس $A^T A$ محاسبه و سپس با توجه به الگوریتم موجود پاسخ حداقل مربعات و نرم دو خطای حاصل از تقریب محاسبه می گردد،

```
A =(1/5)*[3 -6 26;4 -8 -7;0 4 4;0 -3 -3];
b =[1;1;1;1];
U = chol(A'*A);
x = U \(U'\(A'*b))
x =
    1.6400
    0.1600
    0.0400
e = norm(A * x - b)
e =
    1.4000
```

□

مثال۴-۱۵

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ابتدا سازگار یا ناسازگار بودن دستگاه معادلات را بررسی نمایید. سپس جواب حداقل مربعات را تجزیه چالسکی بدست آورید.

- از آنجاییکه $\operatorname{rank}(A) = 2$ و $\operatorname{rank}(A\,|\,\mathbf{b}) = 3$ است، لذا سیستم ناسازگار است.

- ابتدا مقدارهای $C = A^T A$ و $\mathbf{d} = A^T\mathbf{b}$ را بدست می آوریم،

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 21 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 5 \\ 13 \end{bmatrix}$$

- سپس معادلات نرمال را با استفاده از تجزیه چالسکی حل می نماییم،

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b} \rightarrow C\mathbf{x} = \mathbf{d} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 21 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 13 \end{bmatrix}$$

تجزیه چالسکی ماتریس C بصورت زیر می باشد،

$$C = LL^T \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} \\ 0 & l_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{21} \\ l_{21}l_{11} & l_{21}^2 + l_{22}^2 \end{bmatrix}$$

$$l_{11}^2 = 3 \quad \rightarrow \quad l_{11} = \sqrt{3}$$

$$l_{11}l_{21} = 7 \quad \rightarrow \quad l_{21} = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

$$l_{21}^2 + l_{22}^2 = 21 \quad \rightarrow \quad l_{22} = \sqrt{21 - \frac{49}{3}} = \sqrt{\frac{14}{3}}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ \frac{7}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{14}{3}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{7}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{14}{3}} \end{bmatrix}$$

- حال باید دستگاه معادلات را حل نمائیم،

$$L\mathbf{z} = \mathbf{d} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ \frac{7}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{14}{3}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 13 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad z_1 = \frac{5}{\sqrt{3}}, \quad z_2 = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{14}}$$

$$L^T\mathbf{x} = \mathbf{z} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{7}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{14}{3}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{3}} \\ \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{14}} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{2}{7}$$

لذا جواب حداقل مربعات بصورت $[x_1, x_2] = [1, \frac{2}{7}]$ بدست می آید.

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[1 1;1 2;1 4];
b =[1;2;2];
U = chol(A'*A);
x = U \(U'\(A'*b))
x =
    1.0000
    0.2857
e = norm(A * x - b)
e =
    0.5345
```

□

۴-۳-۴- استفاده از تجزیه QR

یکی دیگر از روش های حل مسئله حداقل مربعات استفاده از **تجزیه QR**[۱] ماتریس ها است. در این روش ماتریس $A_{m\times n}$ رتبه کامل به حاصلضرب دو ماتریس $A=QR$ تجزیه می گردد، که در آن، $Q_{m\times n}$ یک ماتریس متعامد و $R_{n\times n}$ یک ماتریس معکوس پذیر بالا مثلثی با عناصر قطری مثبت است. با استفاده از این تجزیه معادلات نرمال را بصورت زیر می توان حل نمود،

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

$$(QR)^T QR\mathbf{x} = (QR)^T\mathbf{b}$$

$$R^T Q^T QR\mathbf{x} = R^T Q^T\mathbf{b}$$

از آنجائیکه $Q_{m\times n}$ یک ماتریس متعامد است، $Q^T Q = I_n$ می باشد. لذا،

$$R^T I_n R\mathbf{x} = R^T Q^T\mathbf{b} \quad \rightarrow \quad R^T R\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

از طرفی چون $R_{n\times n}$ یک ماتریس معکوس پذیر است، R^T نیز معکوس پذیر می باشد. بنابراین داریم،

$$R\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b} \tag{۱۹-۴}$$

لذا برای بدست آوردن بردار $\mathbf{x}$ باید ابتدا تجزیه $A=QR$ را بدست آورده و سپس دستگاه معادلات زیر را حل نماییم،

$$\begin{cases}\mathbf{y} = Q^T\mathbf{b} \\ R\mathbf{x} = \mathbf{y}\end{cases} \tag{۲۰-۴}$$

[۱] QR Factorization

مثال۴-۱۶

برای دستگاه معادلات زیر مسئله حداقل مربعات را با استفاده از تجزیه QR حل نمایید،

$$\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & -6 & 26\\ 4 & -8 & -7\\ 0 & 4 & 4\\ 0 & -3 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

تجزیه $A=QR$ بفرم زیر می باشد،

$$A=QR\rightarrow\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{-6}{5} & \frac{26}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{-8}{5} & \frac{-7}{5}\\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{4}{5}\\ 0 & \frac{-3}{5} & \frac{-3}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{-3}{5}\\ 0 & \frac{4}{5} & 0\\ 0 & \frac{-3}{5} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

بردار $\mathbf{y}=Q^T\mathbf{b}$ بصورت زیر بدست می آید،

$$\mathbf{y}=Q^T\mathbf{b}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{-3}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{7}{5}\\ \frac{1}{5}\\ \frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

حال با حل معادله $R\mathbf{x}=\mathbf{y}$ مقدار $\mathbf{x}$ را بدست می آوریم،

$$R\mathbf{x}=Q^T\mathbf{b}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{7}{5}\\ \frac{1}{5}\\ \frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

لذا جواب حداقل مربعات بصورت $\mathbf{x}=[\frac{41}{25},\frac{4}{25},\frac{1}{25}]$ بدست می آید.

□

برای بدست آوردن ماتریس Q و R از فرایند گرام- اشمیت استفاده می نماییم. ماتریس رتبه کامل $A_{m\times n}=[\mathbf{a}_1\,|\,\mathbf{a}_2\,|\cdots|\,\mathbf{a}_n]$ را در نظر بگیرید، از آنجائیکه رتبه ماتریس کامل است، ستون های ماتریس $A_{m\times n}$ مستقل خطی می باشند، لذا می توان آنها را به عنوان بردارهای پایه برای فضای گستره ماتریس $A_{m\times n}$، یعنی $R(A)$، در نظر گرفت. از طرفی می توان با اعمال فرآیند گرام – اشمیت این بردارهای پایه را به بردارهای پایه متعامد تبدیل کرد، بنابراین داریم،

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \mathbf{a}_1 \\
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{a}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{a}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 \\
\mathbf{v}_3 &= \mathbf{a}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{a}_3 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{a}_3 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 \\
&\vdots \\
\mathbf{v}_n &= \mathbf{a}_n - \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{a}_n \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{a}_n \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 - \cdots - \frac{\langle \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{a}_n \rangle}{\|\mathbf{v}_{n-1}\|^2}\mathbf{v}_{n-1}
\end{aligned}
$$

لذا بردارهای $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ پایه های متعامد هستند. حال می توان معادلات بالا را بصورت زیر بازنویسی کرد،

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= \mathbf{v}_1 \\
\mathbf{a}_2 &= \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{a}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \\
\mathbf{a}_3 &= \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{a}_3 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{a}_3 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \\
&\vdots \\
\mathbf{a}_n &= \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{a}_n \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{a}_n \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{\langle \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{a}_n \rangle}{\|\mathbf{v}_{n-1}\|^2}\mathbf{v}_{n-1} + \mathbf{v}_n
\end{aligned}
$$

نمایش ماتریسی این معادلات به فرم زیر خواهد بود،

$$
A = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n]
\begin{bmatrix}
1 & \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{a}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} & \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{a}_3 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} & \cdots & \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{a}_n \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \\
0 & 1 & \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{a}_3 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2} & \cdots & \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{a}_n \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2} \\
0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{a}_n \rangle}{\|\mathbf{v}_3\|^2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\langle \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{a}_n \rangle}{\|\mathbf{v}_{n-1}\|^2} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{bmatrix}
$$

در این مرحله ماتریس $A_{m\times n}$ را بصورت حاصلضرب یک ماتریس با بردارهای ستونی متعامد در یک ماتریس بالا مثلثی با عناصر قطری یک نمایش دادیم. لذا برای بدست آوردن ماتریس $Q_{m\times n}$ کافی است که بردارهای ستونی متعامد را به بردارهای یکامتعامد تبدیل نماییم. به این ترتیب معادلات به فرم زیر در می آیند،

$$A=[\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \mathbf{q}_3 \quad \cdots \quad \mathbf{q}_n]\begin{bmatrix} \|\mathbf{v}_1\| & \dfrac{\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{a}_2\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|} & \dfrac{\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{a}_3\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|} & \cdots & \dfrac{\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{a}_n\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|} \\ 0 & \|\mathbf{v}_2\| & \dfrac{\langle \mathbf{v}_2,\mathbf{a}_3\rangle}{\|\mathbf{v}_2\|} & \cdots & \dfrac{\langle \mathbf{v}_2,\mathbf{a}_n\rangle}{\|\mathbf{v}_2\|} \\ 0 & 0 & \|\mathbf{v}_3\| & \cdots & \dfrac{\langle \mathbf{v}_3,\mathbf{a}_n\rangle}{\|\mathbf{v}_3\|} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \dfrac{\langle \mathbf{v}_{n-1},\mathbf{a}_n\rangle}{\|\mathbf{v}_{n-1}\|} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \|\mathbf{v}_n\| \end{bmatrix}$$

که در آن $\mathbf{q}_i=\dfrac{\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|}$ می باشد. بنابراین توانستیم تجزیه $A=QR$ را بدست آوریم، که در آن ستون های ماتریس $Q_{m\times n}=[\mathbf{q}_1\,|\,\mathbf{q}_2\,|\cdots|\,\mathbf{q}_n]$ همان پایه های یکامتعامد شده می باشند و $R_{n\times n}$ یک ماتریس معکوس پذیر بالا مثلثی با عناصر قطری مثبت می باشد. حال می توان نشان داد که ماتریس بالا مثلثی $R_{n\times n}$ بصورت زیر قابل ساده سازی است،

$$R_{n\times n}=\begin{bmatrix} \|\mathbf{v}_1\| & \langle \mathbf{q}_1,\mathbf{a}_2\rangle & \langle \mathbf{q}_1,\mathbf{a}_3\rangle & \cdots & \langle \mathbf{q}_1,\mathbf{a}_n\rangle \\ 0 & \|\mathbf{v}_2\| & \langle \mathbf{q}_2,\mathbf{a}_3\rangle & \cdots & \langle \mathbf{q}_2,\mathbf{a}_n\rangle \\ 0 & 0 & \|\mathbf{v}_3\| & \cdots & \langle \mathbf{q}_3,\mathbf{a}_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \langle \mathbf{q}_{n-1},\mathbf{a}_n\rangle \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \|\mathbf{v}_n\| \end{bmatrix} \qquad (۲۱-۴)$$

تعداد عملیات محاسباتی در حل دستگاه معادلات $A_{m\times n}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ با استفاده از تجزیه QR بصورت زیر بدست می آید،

۱- تجزیه QR ماتریس A بصورت $A=QR$: $2mn^2 \to \text{flops}$

۲- بدست آوردن بردار $\mathbf{y}=Q^T\mathbf{b}$: $2mn \to \text{flops}$

۳- حل معادله $R\mathbf{x}=\mathbf{y}$ با روش جایگزینی پسرو: $n^2 \to \text{flops}$

مثال۴-۱۷

برای ماتریس A معرفی شده در زیر تجزیه QR را با استفاده از فرایند گرام- اشمیت بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

با توجه به اینکه $|A| \neq 0$ است، پس ستون های ماتریس A مستقل خطی هستند. اگر ماتریس A را بصورت $A=[\mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{a}_3]$ در نظر بگیریم، ستون های آن بصورت زیر بدست می آیند،

$$\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3=\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

با اعمال فرآیند گرام-اشمیت بردارهای یکامتعامد زیر بدست می آیند،

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3=\begin{bmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{16}{3} \\ \frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_1=\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{v}_1\|=\sqrt{5}, \quad \|\mathbf{v}_2\|=\frac{\sqrt{30}}{5}, \quad \|\mathbf{v}_3\|=\frac{8\sqrt{6}}{3}$$

بنابراین، ماتریس Q بصورت $Q=[\mathbf{q}_1 \mid \mathbf{q}_2 \mid \mathbf{q}_3]$ بدست می آید. حال ماتریس R را بدست می آوریم،

$$R=\begin{bmatrix} \|\mathbf{v}_1\| & \langle \mathbf{q}_1,\mathbf{a}_2 \rangle & \langle \mathbf{q}_1,\mathbf{a}_3 \rangle \\ 0 & \|\mathbf{v}_2\| & \langle \mathbf{q}_2,\mathbf{a}_3 \rangle \\ 0 & 0 & \|\mathbf{v}_3\| \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{5} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{6}{\sqrt{30}} & \frac{22}{\sqrt{30}} \\ 0 & 0 & \frac{16}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

بنابراین تجزیه QR ماتریس A بصورت زیر خواهد بود،

$$A=QR \rightarrow A=\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{-5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{5} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{6}{\sqrt{30}} & \frac{22}{\sqrt{30}} \\ 0 & 0 & \frac{16}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

در نرم افزار MATLAB از دستور qr برای بدست آوردن تجزیهQR ماتریس A استفاده می شود. زمانیکه ماتریس A غیر مربعی باشد دستور $[Q,R]=\mathrm{qr}(A)$ تجزیه QR کامل[۱] و دستور $[Q,R]=\mathrm{qr}(A,0)$ تجزیه QR کاهش یافته[۲] را برای ماتریس A ارائه می دهد. در تجزیه کامل QR ماتریس $R_{m\times n}$ یک ماتریس بالا مثلثی هم اندازه با ماتریس A است و ماتریس متعامد $Q_{m\times m}$ به گونه ای محاسبه می شود که $A=QR$ باشد. در تجزیه کاهش یافته QR ماتریس متعامد $Q_{m\times n}$ هم اندازه با ماتریس A و ماتریس $R_{n\times n}$ یک ماتریس بالا مثلثی می باشد.

```
A =[2 1 3;-1 0 7;0 -1 -1];
[Q,R]= qr(A)     % Full QR factorization of A
Q =
   -0.8944   -0.1826    0.4082
    0.4472   -0.3651    0.8165
         0    0.9129    0.4082
R =
   -2.2361   -0.8944    0.4472
         0   -1.0954   -4.0166
         0         0    6.5320
```

□

مثال ۴-۱۸

برای ماتریس A تجزیه QR را با استفاده از فرایند گرام- اشمیت بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}3 & -6\\ 4 & -8\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

با توجه به اینکه $\mathrm{rank}(A)=2$ است، پس ستون های ماتریس A مستقل خطی هستند.

اگر ماتریس A را بصورت $A=[\mathbf{a}_1\,|\,\mathbf{a}_2]$ در نظر بگیریم، ستون های آن بصورت زیر بدست می آیند،

$$\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}3\\4\\0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{a}_2=\begin{bmatrix}-6\\-8\\1\end{bmatrix}$$

با اعمال فرآیند گرام-اشمیت مطابق بخش بردارهای یکامتعامد زیر بدست می آیند،

$\mathbf{v}_1=\mathbf{a}_1=[3,4,0],$

---
[۱] Full Factorization
[۲] Reduced Factorization

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{a}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 = [-6,-8,1] - \frac{\langle [3,4,0],[-6,-8,1] \rangle}{\|[3,4,0]\|^2}[3,4,0]$$

$$= [-6,-8,1] - \frac{-50}{25}[3,4,0] = [-6,-8,1] + [6,8,0] = [0,0,1]$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{v}_1\| = 5, \quad \|\mathbf{v}_2\| = 1$$

بنابراین، ماتریس Q بصورت $Q = [\mathbf{q}_1 \mid \mathbf{q}_2]$ بدست می آید. حال ماتریس R را بدست می آوریم،

$$R = \begin{bmatrix} \|\mathbf{v}_1\| & \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{a}_2 \rangle \\ 0 & \|\mathbf{v}_2\| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین تجزیه QR ماتریس A بصورت زیر خواهد بود،

$$A = QR \rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[3 -6;4 -8;0 1];
[Q,R] = qr(A)        % Full QR factorization of A
Q =
   -0.6000          0    0.8000
   -0.8000          0   -0.6000
         0    -1.0000         0
R =
    -5    10
     0    -1
     0     0
[Q,R] = qr(A,0)         % Reduced QR factorization of A
Q =
   -0.6000          0
   -0.8000          0
         0    -1.0000
R =
    -5    10
     0    -1
```

□

مثال۴-۲۰

برای دستگاه معادلات زیر سازگار یا ناسازگار بودن دستگاه را بررسی نمایید، سپس جواب حداقل مربعات خطا را با استفاده از تجزیه QR بدست آورید.

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 2\end{bmatrix}$$

از آنجاییکه $\mathrm{rank}(A)=2$ و $\mathrm{rank}(A\,|\,\mathbf{b})=3$ است، لذا سیستم ناسازگار است. حال جواب حداقل مربعات را با استفاده از تجزیه QR بدست می آوریم،

- تجزیه QR ماتریس A :

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{a}_1=[1,1,1],$$

$$\mathbf{v}_2=\mathbf{a}_2-\frac{\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{a}_2\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1=[1,2,4]-\frac{\langle [1,1,1],[1,2,4]\rangle}{\|[1,1,1]\|^2}[1,1,1]$$

$$=[1,2,4]-\frac{7}{3}[1,1,1]=[\frac{-4}{3},\frac{-1}{3},\frac{5}{3}]$$

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}\frac{-4}{3}\\ \frac{-1}{3}\\ \frac{5}{3}\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{q}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix},\quad \mathbf{q}_2=\begin{bmatrix}\frac{-4}{\sqrt{42}}\\ \frac{-1}{\sqrt{42}}\\ \frac{5}{\sqrt{42}}\end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{v}_1\|=\sqrt{3},\qquad \|\mathbf{v}_2\|=\frac{\sqrt{42}}{3}$$

$$Q=\begin{bmatrix}\mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-4}{\sqrt{42}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{42}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{5}{\sqrt{42}}\end{bmatrix},\qquad R=\begin{bmatrix}\|\mathbf{v}_1\| & \langle \mathbf{q}_1,\mathbf{a}_2\rangle\\ 0 & \|\mathbf{v}_2\|\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{3} & \frac{7}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{\sqrt{42}}{3}\end{bmatrix}$$

- محاسبه بردار $\mathbf{y}=Q^T\mathbf{b}$:

$$\mathbf{y}=Q^T\mathbf{b} \quad \rightarrow \quad y=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{-4}{\sqrt{42}} & \frac{-1}{\sqrt{42}} & \frac{5}{\sqrt{42}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{\sqrt{3}}\\ \frac{4}{\sqrt{42}}\end{bmatrix}$$

- حل دستگاه معادلات $R\mathbf{x}=\mathbf{y}$ با روش جایگزینی پسرو:

$$R\mathbf{x}=\mathbf{y} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix}\sqrt{3} & \frac{7}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{\sqrt{42}}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{\sqrt{3}}\\ \frac{4}{\sqrt{42}}\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad x_1=1,\quad x_2=\frac{2}{7}$$

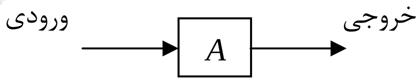
با استفاده از نرم افزار MATLAB ابتدا تجزیه QR ماتریس A را بدست می آوریم، پاسخ حداقل مربعات برای $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ از معادله $R^TR\mathbf{x}=A^T\mathbf{b}$ بدست می آید،

```
A =[1 1;1 2;1 4];
b =[1;2;2];
[Q,R]= qr(A,0)
Q =
   -0.5774    0.6172
   -0.5774    0.1543
   -0.5774   -0.7715
R =
   -1.7321   -4.0415
         0   -2.1602
x = R \(R'\(A'*b))
x =
    1.0000
    0.2857
norm(b - A * x)
ans =
    0.5345
```

□

۴-۳-۵- برازش داده ها با روش حداقل مربعات

شناسایی سیستم های فیزیکی از مباحث پر کاربرد در علوم تجربی و مهندسی است. در اینگونه مباحث طی آزمایشاتی داده هایی به عنوان ورودی و خروجی از سیستم مذکور بدست می آید و سعی می شود بر اساس این داده ها بهترین مدل ممکن برای سیستم تخمین زده شود و معمولاً جهت سادگی در محاسبات مدل مذکور خطی در نظر گرفته می شود. سیستم زیر را در نظر بگیرید،



با فرض خطی بودن، رابطه بین داده های ورودی و خروجی را بصورت زیر می توان بیان کرد،

$$A\mathbf{x}=\mathbf{y}$$

هدف بدست آوردن مدلی برای سیستم است، بطوریکه رابطه بالا برقرار گردد. در تخمین مدل سیستم انتخاب درجه مناسب برای تقریب در میزان دقت مدل تخمین زده شده تاثیر دارد. به مثال زیر توجه نمایید.

مثال۴-۲۱

پنج نقطه زیر را در نظر بگیرید،

$$(0,0) \quad (5,8) \quad (10,15) \quad (15,19) \quad (20,20)$$

با استفاده از روش حداقل مربعات معادله خطی به صورت $y = m_1 x + m_2$ برای تقریب از نقاط بیابید. سپس معادله منحنی مرتبه دومی به شکل $y = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$ را بیابید که از این پنج نقطه بگذرد. با محاسبه بردار خطا و نُرم خطا برای هر دو حالت خطای برازش را با هم مقایسه کنید.

- ابتدا معادله خطی به فرم $y = m_1 x + m_2$ را پیدا می کنیم که از این پنج نقطه بگذرد،

$$\left.\begin{array}{l} 0m+n=0 \\ 5m+n=8 \\ 10m+n=15 \\ 15m+n=19 \\ 20m+n=20 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \\ 10 & 1 \\ 15 & 1 \\ 20 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \\ 19 \\ 20 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad A\mathbf{m} = \mathbf{y}$$

$\operatorname{rank}(A) = 2, \quad \operatorname{rank}(A|\mathbf{y}) = 3 \quad \rightarrow$ سیستم ناسازگار است

با استفاده از روش حداقل مربعات می توان معادله خط $y = mx + n$ را بدست آورد.

$$A^T A\hat{\mathbf{m}} = A^T\mathbf{y} \rightarrow \begin{bmatrix} 750 & 50 \\ 50 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{m}_1 \\ \hat{m}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 875 \\ 62 \end{bmatrix} \rightarrow \hat{m}_1 = 1.02, \quad \hat{m}_2 = 2.2$$

بنابراین بهترین تقریب برای خطی که از این چهار نقطه می گذرد بصورت زیر است،

$$y = 1.02x + 2.2$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
x =[0;5;10;15;20];
y =[0;8;15;19;20];
A = zeros(5,2);
for i =1:5
   A(i,:) = [x(i)  1];
end
m = A \(A'\(A'*y))
m =
    1.0200
    2.2000
```

- حال معادله منحنی دوم به فرم $y=\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0$ را پیدا می کنیم که از این پنج نقطه بگذرد،

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0+0\alpha_1+0\alpha_2&=0\\ \alpha_0+5\alpha_1+25\alpha_2&=8\\ \alpha_0+10\alpha_1+100\alpha_2&=15\\ \alpha_0+15\alpha_1+225\alpha_2&=19\\ \alpha_0+20\alpha_1+400\alpha_2&=20\end{aligned}\right\}\rightarrow \begin{bmatrix}1&0&0\\1&5&25\\1&10&100\\1&15&225\\1&20&400\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\8\\15\\19\\20\end{bmatrix}\rightarrow \quad A\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{y}$$

$\text{rank}(A)=3,\quad \text{rank}(A\,|\,\mathbf{y})=4 \quad \rightarrow$ سیستم ناسازگار است

با استفاده از روش حداقل مربعات می توان معادله منحنی مرتبه دوم $y=\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0$ را بدست آورد.

$$A^TA\hat{\boldsymbol{\alpha}}=A^T\mathbf{y}\quad\rightarrow\quad \begin{bmatrix}5&50&750\\50&750&12500\\750&12500&221250\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\alpha}_0\\ \hat{\alpha}_1\\ \hat{\alpha}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}62\\875\\13975\end{bmatrix}$$

$$\hat{\alpha}_0=-0.2286,\quad \hat{\alpha}_1=1.9914,\quad \hat{\alpha}_2=-0.0486$$

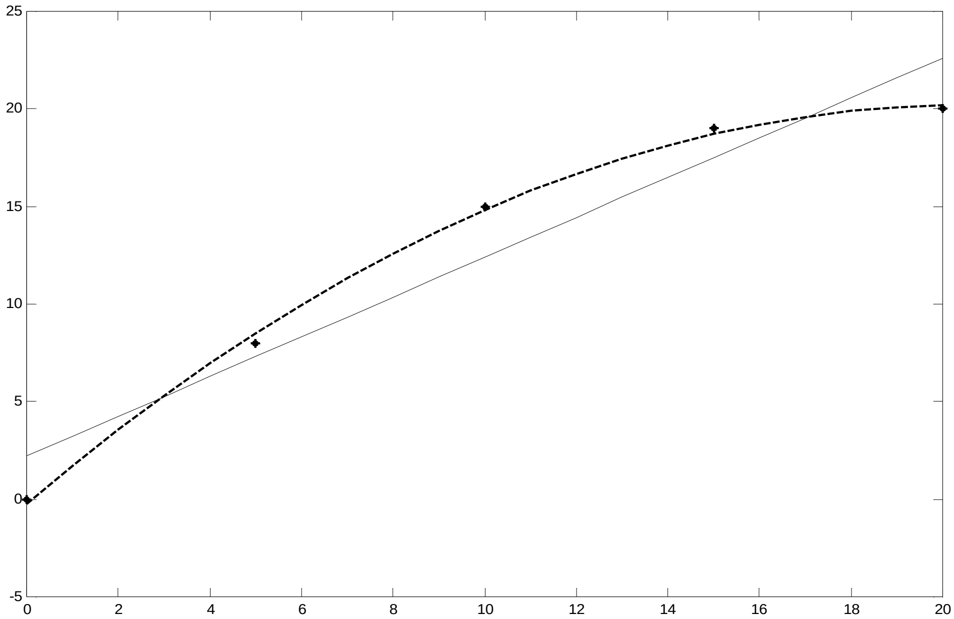
بنابراین بهترین تقریب برای منحنی مرتبه دوم بصورت زیر است،

$$y=-0.0486x^2+1.9914x-0.2286$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
x =[0;5;10;15;20];
y =[0;8;15;19;20];
A = zeros(5,3);
for i =1:5
   A(i,:) = [x(i)^2  x(i)  1];
end
a = A \(A'\(A'*y))
a =
   -0.0486
    1.9914
   -0.2286
```

نمودارهای خط و منحنی بدست به همراه نقاط مذکور در شکل زیر آورده شده است،



شکل(۴-۴)- خط و منحنی بدست آمده از تخمین حداقل مربعات

بردار خطا و نُرم خطا نیز بصورت زیر بدست می آیند،

۱- خطا برای تقریب $y = 1.02x + 2.2$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{b} - A\mathbf{x} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \\ 19 \\ 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \\ 10 & 1 \\ 15 & 1 \\ 20 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-(0m+n) \\ 8-(5m+n) \\ 15-(10m+n) \\ 19-(15m+n) \\ 20-(20m+n) \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.02 \\ 2.2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \hat{\varepsilon}_3 \\ \hat{\varepsilon}_4 \\ \hat{\varepsilon}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.2 \\ 0.7 \\ 2.6 \\ 1.5 \\ -2.6 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}\| = 4.5935$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
norm_e = norm(A * m - y)
norm_e =
    4.5935
```

۲- خطا برای تقریب $y = -0.0486x^2 + 1.9914x - 0.2286$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \\ 19 \\ 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 10 & 100 \\ 1 & 15 & 225 \\ 1 & 20 & 400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-(\alpha_0 + 0\alpha_1 + 0\alpha_2) \\ 8-(\alpha_0 + 5\alpha_1 + 25\alpha_2) \\ 15-(\alpha_0 + 10\alpha_1 + 100\alpha_2) \\ 19-(\alpha_0 + 15\alpha_1 + 225\alpha_2) \\ 20-(\alpha_0 + 20\alpha_1 + 400\alpha_2) \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_0 \\ \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2286 \\ 1.9914 \\ -0.0486 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \hat{\varepsilon}_3 \\ \hat{\varepsilon}_4 \\ \hat{\varepsilon}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2286 \\ -0.5143 \\ 0.1714 \\ 0.2857 \\ -0.1714 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}\| = 0.6761$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
norm_e = norm(A * a - y)
norm_e =
    0.6761
```

با توجه به اینکه نُرم خطا در این حالت کمتر است لذا منحنی مرتبه دوم تقریب بهتری برای برازش این پنج نقطه است.

□

علاوه بر انتخاب درجه مناسب منحنی برازش، اثر نویز در داده ها و خطاهای اندازه گیری هم می تواند یکی از عوامل تاثیر گذار در دقت تخمین باشد. در این جا می توان دو حالت مختلف را در نظر گرفت،

۱- تعداد داده ها با مجهولات تخمین برابر باشد. در چنین حالتی دستگاه معادلات مذکور مربعی است و پاسخ سیستم از حل مستقیم دستگاه $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ بدست می آید. این روش هر چند خطای کمتری دارد لیکن چون از طریق حل مستقیم بدست می آید نسبت به نویز و خطاهای محاسباتی حساس است.

۲- تعداد داده ها بیشتر از مجهولات تخمین باشد. در این حالت دستگاه معادلات $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ فرامعین بوده و معمولاً ناسازگار است، لذا برای بدست آوردن پاسخ مناسب از روش حداقل مربعات استفاده می شود. این روش در برابر نویزی شدن داده ها و خطاهای اندازه گیری مقاوم تر است.

مثال۴-۲۲

برای سیستمی داده های ورودی و خروجی بصورت زیر بدست آمده است،

x	0	5	10	15	20
y	0	8	15	19	20

الف) یک مدل مرتبه چهار برای این سیستم تخمین بزنید.

$$y = \alpha_4 x^4 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$$

دستگاه معادلات حاصل بصورت زیر بدست می آید،

$$A\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{y} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 625 & 125 & 25 & 5 & 1 \\ 10000 & 1000 & 100 & 10 & 1 \\ 50625 & 3375 & 225 & 15 & 1 \\ 160000 & 8000 & 400 & 20 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_3 \\ \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \\ 19 \\ 20 \end{bmatrix}$$

حال می توان دستگاه معادلات 5×5 حاصل را بصورت مستقیم حل نمود و جواب ها را بدست آورد،

$$\alpha_4 = 0.0001, \quad \alpha_3 = -0.0067, \quad \alpha_2 = 0.0567, \quad \alpha_1 = 1.4667, \quad \alpha_0 = 0$$

در این حالت خطای برازش در حد صفر است،

$$\boldsymbol{\varepsilon} = A\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{y} \quad \rightarrow \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}\| = 1.7764 \times 10^{-15}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
x =[0;5;10;15;20];
y =[0;8;15;19;20];
A = zeros(5);
for i =1:5
   A(i,:) = [x(i)^4 x(i)^3 x(i)^2 x(i) 1];
end
a = A \ y
a =
    0.0001
   -0.0067
    0.0567
    1.4667
         0
norm_e = norm(A * a - y)
norm_e =
    1.7764e-015
```

ب) یک مدل مرتبه دو برای این سیستم تخمین بزنید.

$$y = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$$

دستگاه معادلات حاصل بصورت زیر بدست می آید،

$$A\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{y} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \\ 100 & 10 & 1 \\ 225 & 15 & 1 \\ 400 & 20 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \\ 19 \\ 20 \end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات حاصل فرامعین و ناسازگار است، لذا برای بدست آوردن جواب از روش حداقل مربعات استفاده می نماییم،

$$A^T A\hat{\boldsymbol{\alpha}} = A^T \mathbf{y} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 221250 & 12500 & 750 \\ 12500 & 750 & 50 \\ 750 & 50 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_2 \\ \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13975 \\ 875 \\ 62 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\alpha}_2 = -0.0486, \quad \hat{\alpha}_1 = 1.9914, \quad \hat{\alpha}_0 = -0.2286$$

خطای برازش در این حالت بیشتر از قبل است،

$$\boldsymbol{\varepsilon} = A\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{y} \quad \rightarrow \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}\| = 0.6761$$

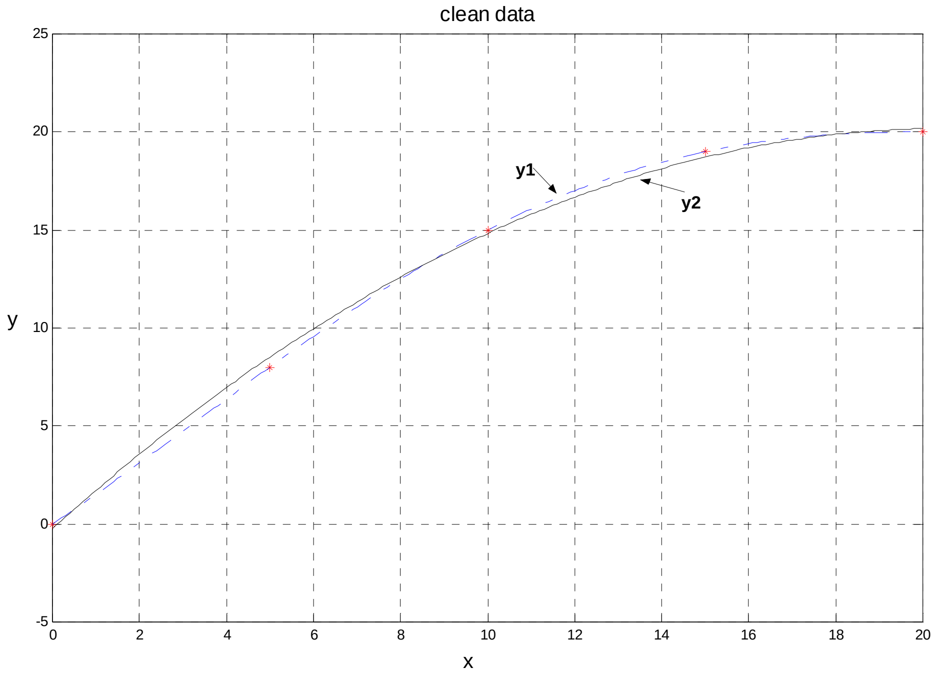
با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
x =[0;5;10;15;20];
y =[0;8;15;19;20];
A = zeros(5,3);
for i = 1:5
   A(i,:) = [x(i)^2  x(i)  1];
end
a = A \(A'\(A'*y))
a =
   -0.0486
    1.9914
   -0.2286
norm_e = norm(y - A * a)
norm_e =
    0.6761
```

حال داده های ورودی- خروجی و منحنی های برازش شده را رسم می نماییم، برای این منظور از دستور plot در نرم افزارMATLAB استفاده می کنیم،

```
x =[0;5;10;15;20];
y =[0;8;15;19;20];
plot(x,y,'r*')
A1 = zeros(5);
for i = 1:5
   A1(i,:) = [x(i)^4 x(i)^3 x(i)^2 x(i) 1];
end
a1 = A1 \ y;
A2 = zeros(5,3);
for i = 1:5
   A2(i,:) = [ x(i)^2 x(i) 1];
end
a2 = A2\(A2'\(A2'*y));
j = 1;
for i = 0:0.1:20
   y1(j) = a1(1)*i^4 + a1(2)*i^3 + a1(3)*i^2 + a1(4)*i + a1(5);
   y2(j) = a2(1)*i^2 + a2(2)*i + a2(3);
   j = j + 1;
end
hold on
i = 0:0.1:20;
plot(i,y1)
plot(i,y2,'k')
```

در شکل حاصل پنج نقطه اندازه گیری شده به همراه منحنی های برازش داده شده رسم گردیده است. y_1 منحنی حاصل از برازش مستقیم داده ها و y_2 منحنی حاصل از تقریب حداقل مربعات می باشد. با توجه به نتایج و شکل های رسم شده مشخص است است که روش اول خطای کمتری دارد لیکن این روش در برابر نویز حساس می باشد و با ایجاد نویز برازش حاصل به شدت دچار خطا می گردد.



شکل(۴-۵) - نتیجه برازش با داده های بدون نویز

برای بررسی این موضوع داده های اندازه گیری شده را بصورت نویزی در نظر می گیریم و نتایج دو تخمین را مجدداً بررسی می کنیم. بدین منظور از تابع randn در نرم افزار MATLAB استفاده می نماییم. از این تابع برای تولید یک سری اعداد تصادفی با توزیع نرمال استفاده می شود. نویز را بصورت زیر تعریف می کنیم و آن را به خروجی اندازه گیری شده از سیستم اضافه می کنیم،

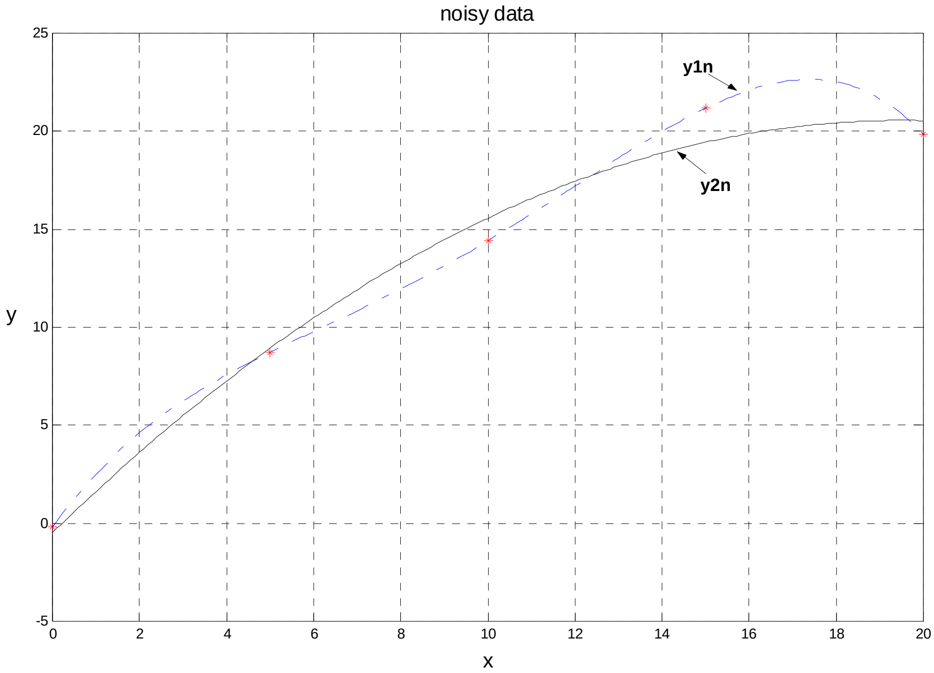
```
n = 0.01*randn(size(y));
yn = y + n;
```

با اعمال این نویز داده های اندازه گیری شده بصورت زیر تغییر می یابند،

```
yn = -0.1867,    8.7258,    14.4117,    21.1832,    19.8636
```

نتایج برازش مرتبه چهار و تقریب حداقل مربعات مرتبه دو حاصل در شکل بعدی آورده شده است. در این شکل پنج نقطه نویزی و منحنی های حاصل از برازش رسم شده است. منحنی y_{1n} حاصل برازش مستقیم مرتبه چهارم می باشد و منحنی y_{2n} منحنی مرتبه دو حاصل از تقریب حداقل مربعات است. مشخص است که در برازش مستقیم سیستم سعی می کند منحنی حاصل از تمام نقاط عبور کند، لذا نتیجه حاصل از واقعیت دور شده و خطای زیادی حاصل می گردد. در حالیکه تقریب با حداقل مربعات به مدل سیستم واقعی نزدیک تر است. از آنجاییکه وجود نویز و خطاهای اندازه گیری

همواره در سیستم های واقعی اجتناب ناپذیر می باشد، لذا استفاده از روش حداقل مربعات به منظور قوام بیشتر محاسبات و بدست آوردن نتایج دقیق تر توصیه می گردد.



شکل(۴-۶) - نتیجه برازش با داده های نویزی

□

مثال۴-۲۳

منحنی $f(t)$ را در نظر بگیرید،

$$f(t)=\frac{1}{1+25t^2}$$

با استفاده از روش حداقل مربعات توسط یک چند جمله ای به فرم زیر تقریب بزنید،

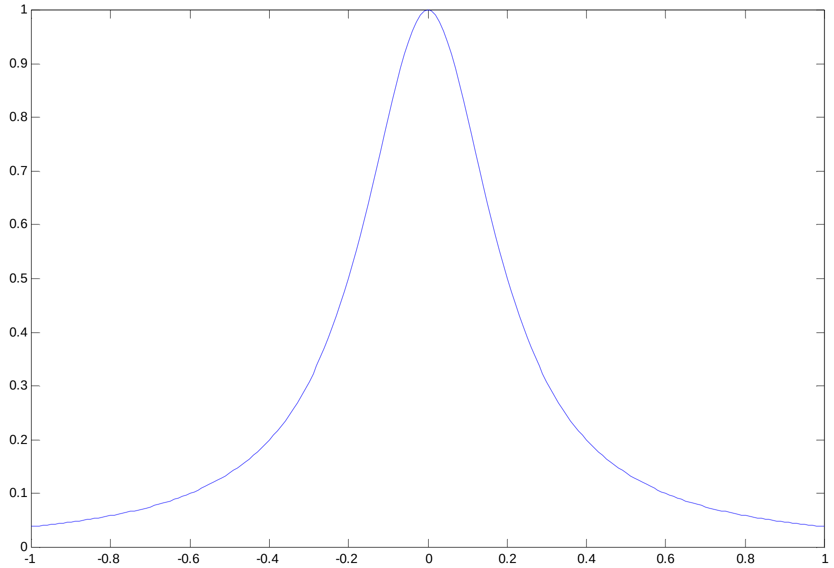
$$g(t)=\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+\cdots+\alpha_n t^n$$

مرتبه تخمین را چنان انتخاب کنید که خطای تخمین در حد 0.1 گردد.

منحنی $f(t)$ با استفاده از کد زیر در شکل بعدی رسم شده است،

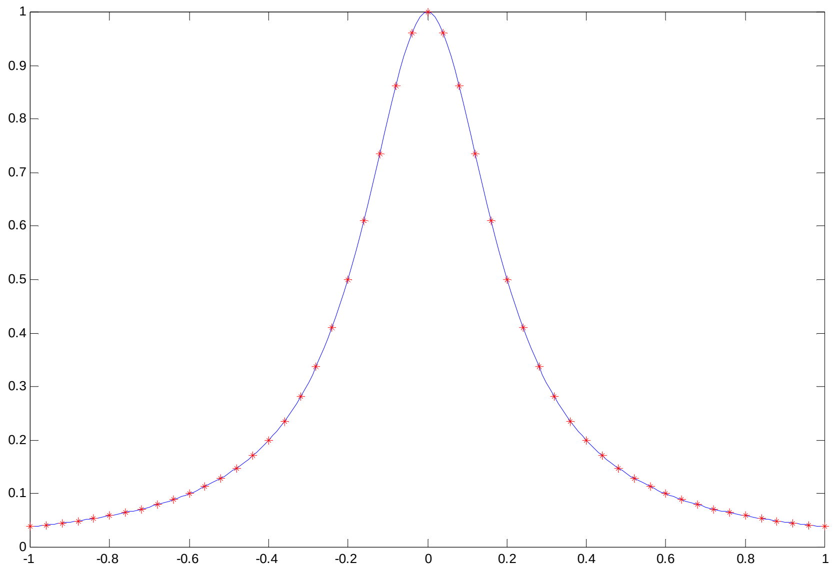
```
t = linspace(- 1,1);
f = 1./(1 + 25 * t.^2);
plot(t, f)
```

دستور linspace(a,b) فاصله اعداد a تا b را به صد قسمت مساوی تقسیم می نماید.



شکل(۴-۷)- منحنی $f(t)=\dfrac{1}{1+25t^2}$

ابتدا باید یک دسته نقاط بر روی منحنی $f(t)$ در نظر بگیریم. انتخاب تعداد نقاط و مرتبه منحنی در دقت برازش تاثیر دارد. در اینجا ۵۱ نقطه بصورت زیر انتخاب می کنیم،

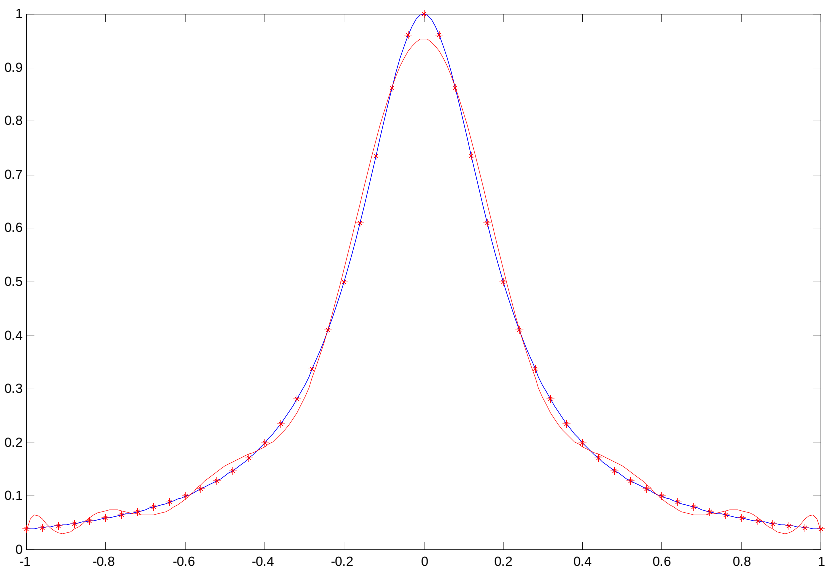


شکل(۴-۸)- منحنی $f(t)$ به همراه پنجاه و یک نقطه تعیین شده بر روی آن

برای تعیین این ۵۱ نقطه می توان از کد زیر استفاده نمود،

```
t = linspace(-1,1,51);
f = 1./(1+25*t.^2);
data = [t' f'];
```

حال برای افزایش دقت تقریب یک منحنی مرتبه ۱۴ را در نظر می گیریم، تقریب حاصل چنین خواهد بود،



شکل(۴-۹)- منحنی $f(t)$ به همراه منحنی $g(t)$ مرتبه چهاردهم برازش داده شده از ۵۱ نقطه مذکور

همانطور که پیداست تقریب حاصل بسیار بهتر است و خطای تقریب $\|\varepsilon\| = \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\| = 0.1275$ می باشد.

□

۴-۳-۶- سری فوریه

یکی دیگر از روش های تقریب زدن توابع تکه ای پیوسته مانند $f(x)$ استفاده از بسط فوریه آن تابع است. از دیدگاه فضاهای برداری سری فوریه را بدین بصورت می توان تحلیل کرد. اگر فضای برداری E را به نحوی تعریف نماییم که شامل توابع حقیقی تکه ای پیوسته بصورت $f:[-\pi,\pi] \to \Re$ باشد و ضرب داخلی در این فضا نیز به شکل زیر تعریف شده باشد،

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx \qquad (۲۲\text{-}۴)$$

می توان نشان داد که مجموعه نامتناهی زیر پایه های یکامتعامد این فضا هستند،

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \sin 3x, \cos 3x, \dots\right\} \tag{۲۳-۴}$$

برای بررسی یکامتعامد بودن می توان ضرب داخلی آنها را بررسی کرد،

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} dx = 1$$

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin kx \right\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin kx dx = 0$$

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos kx \right\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos kx dx = 0$$

همچنین،

$$\begin{aligned}\langle \sin kx, \sin mx \rangle &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mx dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(\cos(k-m)x - \cos(k+m)x) dx = \begin{cases} 1 & k = m \\ 0 & k \neq m \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \cos kx, \cos mx \rangle &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(\cos(k-m)x + \cos(k+m)x) dx = \begin{cases} 1 & k = m \\ 0 & k \neq m \end{cases}\end{aligned}$$

و داریم،

$$\begin{aligned}\langle \sin kx, \cos mx \rangle &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos mx dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(\sin(k-m)x + \sin(k+m)x) dx = 0\end{aligned}$$

بنابراین هر تابع $f \in E$ را می توان بصورت یک ترکیب خطی از این پایه های یکامتعامد نوشت،

$$\begin{aligned}f(x) = a_0 \frac{1}{\sqrt{2}} + b_1 \sin x + a_1 \cos x + b_2 \sin 2x + a_2 \cos 2x \\ + b_3 \sin 3x + a_3 \cos 3x + \cdots\end{aligned} \tag{۲۴-۴}$$

با استفاده از فرآیند گرام- اشمیت ضرایب بصورت زیر قابل محاسبه هستند،

$$\begin{aligned}&a_0 = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle, \quad b_1 = \langle f, \sin x \rangle, \quad a_1 = \langle f, \cos x \rangle, \\ &b_2 = \langle f, \sin 2x \rangle, \quad a_2 = \langle f, \cos x \rangle, \dots\end{aligned} \tag{۲۵-۴}$$

حال رابطه(۴-۲۴) را می توان بصورت یک مجموع بشکل زیر بازنویسی کرد،

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (۴\text{-}۲۶)$$

که ضرایب در آن بصورت زیر محاسبه می گردند،

$$a_0=\sqrt{2}\left\langle f,\frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$a_n=\langle f,\cos nx\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx \qquad (۴\text{-}۲۷)$$

$$b_n=\langle f,\sin nx\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$$

که معادل با روابط بسط سری فوریه می باشد. در واقع در تحلیل فضای برداری زمانیکه تابع $f(x)$ را بصورت سری فوریه نمایش می دهیم، در حقیقت تصویر متعامد آن را بر روی فضای برداری E بدست می آوریم و برای این منظور از پایه های یکامتعامد این فضا استفاده می کنیم. مشخص است که بُعد فضای برداری مذکور نامتناهی است و هر چه تعداد پایه های انتخاب شده بیشتر باشد تصویر حاصل به تابع اصلی شبیه تر خواهد بود.

مثال۴-۲۴

بسط فوریه تابع $f:[-\pi,\pi]\to\Re$ ، $f(x)=x$ و $x\in[-\pi,\pi]$ را بدست آورید.

ابتدا ضرایب a_0، a_n و b_n را بدست می آوریم،

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx \quad\rightarrow\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nxdx=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx \quad\rightarrow\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\left(-\left[\frac{x\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right)=\frac{2}{\pi}\left(-\left[\frac{x\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}+\left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}\right)=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

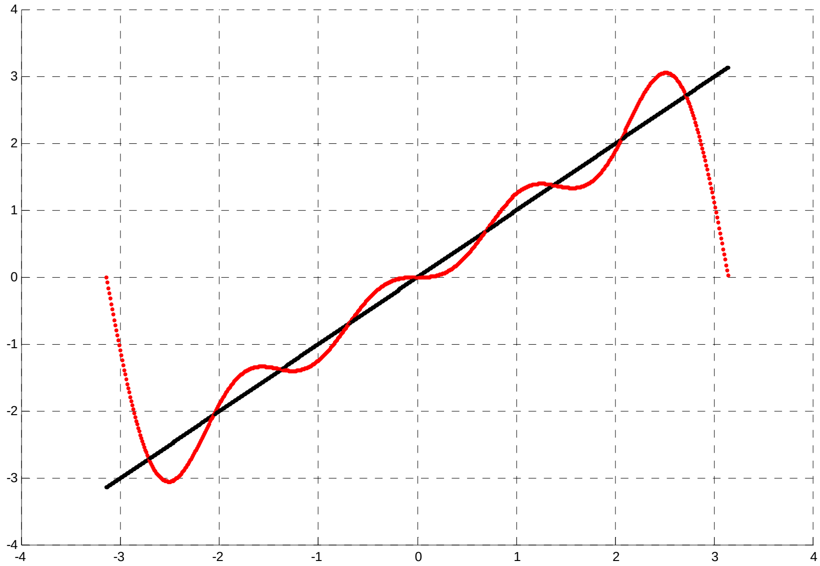
بنابراین سری فوریه بصورت زیر بدست می آید،

$$f(x)=x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

فرم گسترده این سری بشکل زیر است،

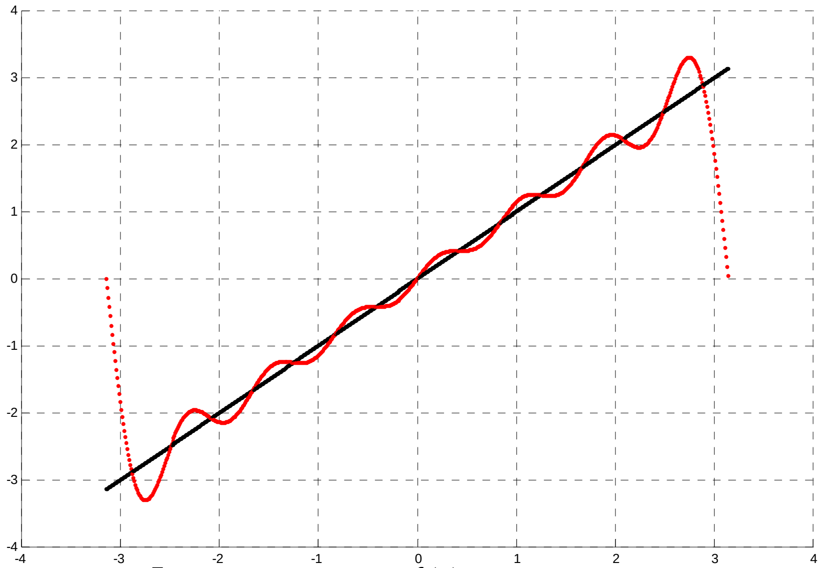
$$f(x)=x=2\sin x-\sin 2x+\frac{2}{3}\sin 3x-\frac{1}{2}\sin 4x+\frac{2}{5}\sin 5x-\frac{1}{3}\sin 6x+\cdots$$

مشخص است که بینهایت بردار پایه وجود دارد. اگر چهار بردار پایه اول را در نظر بگیریم یعنی تابع $f(x)=x$ را بر روی فضای اسپن شده توسط این چهار بردار تصویر نماییم نتیجه تقریبی مطابق شکل زیر خواهد بود،

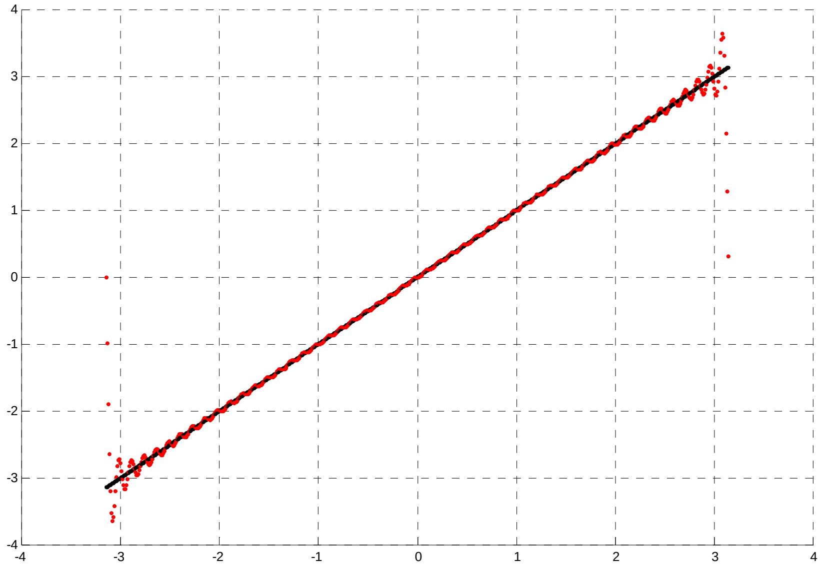


شکل(۴-۱۰)- منحنی $f(x)=x$ به همراه تقریب سری فوریه $n=4$

حال اگر تعداد بردارهای پایه بیشتری انتخاب نماییم دقت تصویر متعامد حاصل و نتیجتاً تقریب منحنی بهتر خواهد شد. نتیجه حاصل با انتخاب ۷ بردار پایه و سپس ۵۰ بردار پایه در شکل های بعدی نشان داده شده است.



شکل(۴-۱۱)- منحنی $f(x)=x$ به همراه تقریب سری فوریه $n=7$



شکل(۴-۱۵)- منحنی $f(x)=x$ به همراه تقریب سری فوریه $n=50$

□

مثال۴-۲۵

بسط فوریه تابع $f:[-\pi,\pi]\to\Re$ ، $f(x)=x^2$ و $x\in[-\pi,\pi]$ را بدست آورید.

ابتدا ضرایب a_0، a_n و b_n را بدست می آوریم،

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx \quad\to\quad a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{2\pi^2}{3}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx \quad\to\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin nxdx=0$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx \quad\to\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x^2\cos nxdx$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{x^2\sin nx}{n}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{2x\sin nx}{n}dx\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{x^2\sin nx}{n}\right]_0^{\pi}+\left[\frac{2x\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{2\cos nx}{n^2}dx\right)=\frac{4(-1)^n}{n^2}$$

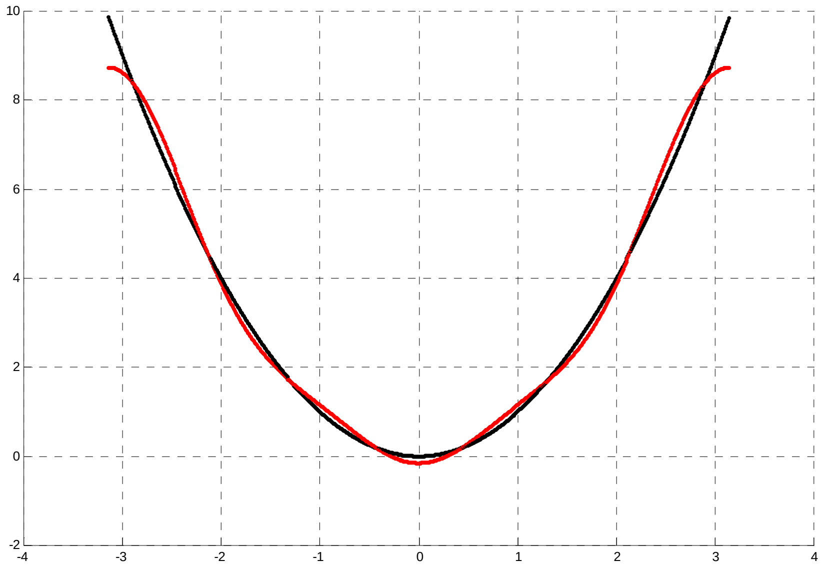
بنابراین سری فوریه بصورت زیر بدست می آید،

$$f(x)=x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

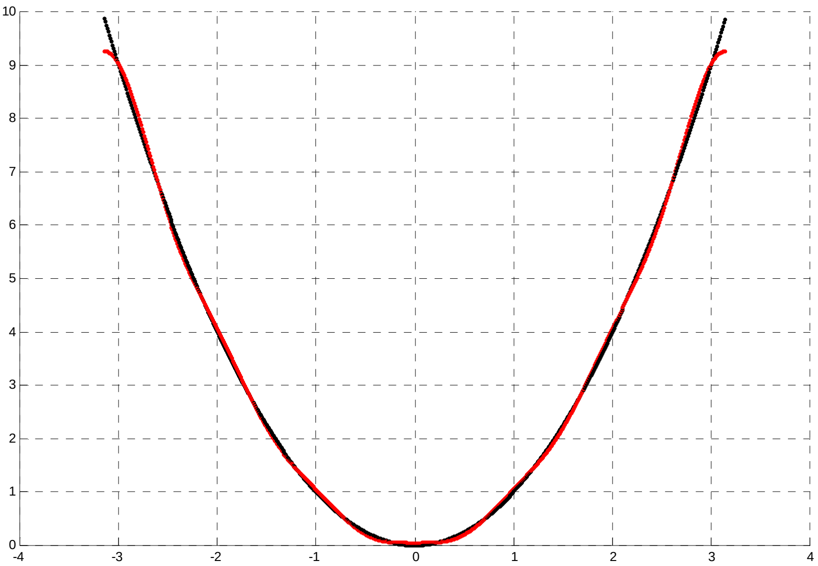
فرم گسترده این سری بشکل زیر است،

$$f(x)=x^2=\frac{\pi^2}{3}-4\cos x+\cos 2x-\frac{4}{9}\cos 3x+\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{4}{25}\cos 5x+\frac{1}{9}\cos 6x+\cdots$$

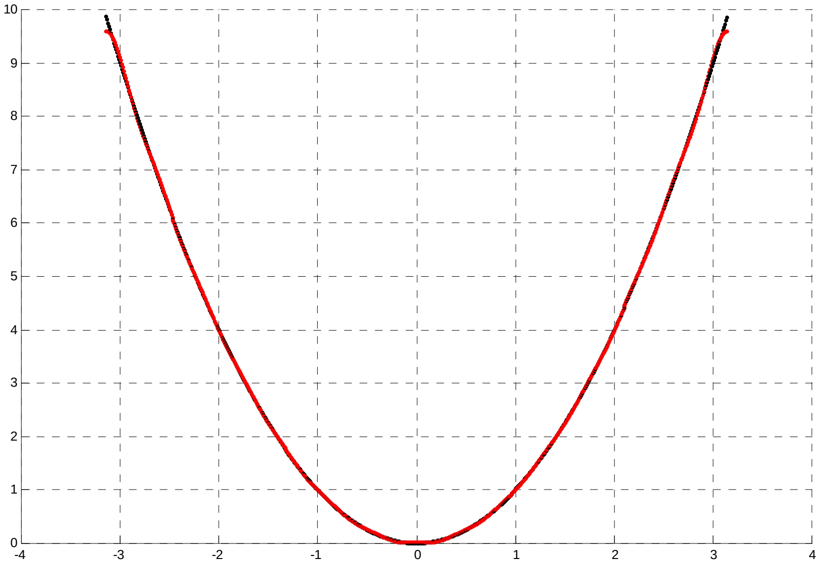
در اینجا نیز بُعد فضای برداری بینهایت است و برای نشان دادن اثر انتخاب تعداد بردارهای پایه تقریب های حاصل از انتخاب چهار، هفت و پانزده بردار پایه مطابق شکل های بعدی نشان داده شده است.



شکل(۴-۱۶)- منحنی $f(x)=x^2$ به همراه تقریب سری فوریه $n=3$



شکل(۴-۱۷)- منحنی $f(x)=x^2$ به همراه تقریب سری فوریه $n=6$



شکل(۴-۱۸)- منحنی $f(x)=x^2$ به همراه تقریب سری فوریه $n=14$

□

مسائل

۴-۱- برای هر یک از دسته بردارهای زیر،

الف) متعامد و یکامتعامد بودن بردارها را بررسی کنید.

ب) با استفاده از فرآیند یکامتعامد سازی گرام- اشمیت بردارها را یکا متعامد نمایید.

$$S:\left\{\mathbf{v}_1=[2,-1,0],\quad \mathbf{v}_2=[1,0,-1],\quad \mathbf{v}_3=[3,7,-1]\right\}$$

$$K:\left\{\mathbf{v}_1=[1,1,1,1],\quad \mathbf{v}_2=[1,1,1,0],\quad \mathbf{v}_3=[1,1,0,0],\quad \mathbf{v}_4=[1,0,0,0]\right\}$$

۴-۲- برای ماتریس های زیر تجزیه QR را بدست آورید، سپس با استفاده از آن جواب $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ را به روش حداقل مربعات بیابید. ($\mathbf{b}=[1,1,1]^{\mathrm{T}}$)

الف) $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}$ ب) $A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

۴-۳- معادله ماتریسی $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ زیر را در نظر بگیرید،

الف) $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 2\end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}4\\ 6\\ -1\\ 2\end{bmatrix}$

پاسخ $\mathbf{x}$ را چنان بیابید که $\|A\mathbf{x}-\mathbf{b}\|$ حداقل گردد.

۴-۴- مجموعه نقاط زیر را در نظر بگیرید،

t	0	1	2	3	4	1/2
$f(t)$	0	1	0	1	4	7

الف) با بکارگیری روش حداقل مربعات ضرایب منحنی $f(t)=ae^t+bt+ct^2+d\sin t$ را جهت برازش این نقاط تعیین نمایید.

ب) خطای برازش را بدست آورید.

۴-۵- بسط سری فوریه تابع $f:[-\pi,\pi]\to\Re$ را ابدست آورید.

الف) $f(x)=|x|$ برای $x\in[-\pi,\pi]$
ب) $f(x)=x|x|$ برای $x\in[-\pi,\pi]$
ج) $f(x)=|\sin x|$ برای $x\in[-\pi,\pi]$
د) $f(x)=\cos(x/2)$ برای $x\in[-\pi,\pi]$

۴-۶- مجموعه نقاط زیر را در نظر بگیرید،

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	2	7	9	12	13	14	14	13	10	8	4

الف) با بکارگیری روش حداقل مربعات خطا یک منحنی مناسب برای نقاط زیر برازش نمایید. یک بار منحنی مرتبه اول $y=mx+n$ را در نظر بگیرید و بار دیگر منحنی مرتبه دوم $y=\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0$ را استفاده کنید.
ب) با محاسبه خطا تعیین کنید کدام منحنی تخمین بهتری برای برازش این نقاط است؟
ج) با استفاده از نرم افزارMATLAB منحنی های بدست آمده را به همراه نقاط داده شده رسم نمایید.

۴-۷- پاسخ حداقل مربعات دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ را برای هر یک از سیستم های ناسازگار زیر بدست آورید.

الف) $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\5\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}1&2\\3&2\\1&-2\\8&4\end{bmatrix}$

ب) $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}3\\7\\6\\1\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}1&0&4\\2&2&10\\1&-2&2\\1&-2&-2\end{bmatrix}$

۴-۸- دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases}x_1=0\\x_2-1=0\\3x_1+x_2-1=0\end{cases}$$

الف) سازگار یا ناسازگار بودن دستگاه را بررسی نمایید.
ب) جواب حداقل مربعات را با استفاده از تجزیه چالسکی بدست آورید.