فصل پنجم

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

۵-۱ مقدمه

در این فصل مفاهیمی چون مقدار ویژه، بردار ویژه و معادله مشخصه و چگونگی بدست آوردن آنها مطرح می شود، در روش های محاسبه مقادیر ویژه، علاوه بر روش کلاسیک دو روش مبتنی بر الگوریتم های تکراری نیز مطرح و الگوریتم ها همراه با کدنویسی آنها در MATLAB ارائه شده است. در انتها کاربرد بردارهای ویژه در قطری سازی ماتریس ها با استفاده از تبدیل های همانندی مطرح و نحوه محاسبه ماتریس قطری و فرم کانونیکال جردن بیان می شود.

۵-۲ مقدار ویژه، بردار ویژه و معادله مشخصه

دستگاه معادلات $A_{n\times n}\mathbf{x}_{n\times 1}=\mathbf{b}_{n\times 1}$ را در نظر بگیرید. این سیستم را می توان بصورت نگاشتی در فضای برداری $\Re^n$ در نظر گرفت، که هر بردار $\mathbf{x}$ را به یک بردار $\mathbf{b}$ تبدیل می کند،

$$\mathbf{x} \longrightarrow \boxed{\;A\;} \longrightarrow A\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

در بین این نگاشت ها مواردی وجود دارند که تنها اندازه بردار $\mathbf{x}$ را تغییر می کند و امتداد آن حفظ می گردد، به عبارتی بردار $\mathbf{b}$ بصورت مضربی از بردار $\mathbf{x}$ تعریف می گردد. در اینصورت نگاشت حاصل به شکل زیر تعریف می شود،

$$A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x} \qquad (۵-۱)$$

به بردارهای $\mathbf{x}_i$ غیر صفر که چنین خاصیتی را دارند **بردار ویژه**[1] ماتریس $A_{n\times n}$ گویند و ضریب ثابت λ_i را **مقدار ویژه**[2] ماتریس $A_{n\times n}$ می نامند. با توجه به تعریف داریم،

$$(\lambda_i I-A)\mathbf{x}_i=\mathbf{0}$$

لذا بردارهای ویژه $\mathbf{x}_i$ متعلق به فضای پوچی ماتریس $(\lambda_i I-A)$ بوده و مقادیر ویژه λ_i ریشه های چندجمله ای **مونیک**[3] و مرتبه n حاصل از $|\lambda I-A|$ هستند. حال اگر $|\lambda I-A|$ را بسط دهیم، چند جمله ای بصورت زیر بیان می گردد،

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}=\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+\cdots+c_{n-1}\lambda+c_n \qquad (۵-۲)$$

که به آن **چندجمله ای مشخصه**[4] ماتریس $A_{n\times n}$ می گویند. ریشه های چندجمله ای مشخصه همان مقادیر ویژه خواهند بود که به تعداد n تا هستند.

نکته۱: برای ماتریس حقیقی $A_{n\times n}$ معادله مشخصه $|\lambda I-A|=0$ یک چند جمله ای با ضرایب حقیقی است. بنابراین کلیه مقادیر ویژه بصورت حقیقی یا به فرم مختلط مزدوج $\alpha\pm j\beta$ هستند.

نکته۲: اگر بردار $\mathbf{v}_i$ یک بردار ویژه باشد، آنگاه برای هر اسکالر مخالف صفر مانند α، حاصل $\alpha\mathbf{v}_i$ نیز یک بردار ویژه خواهد بود.

[1] Eigenvector
[2] Eigenvalues
[3] Monic
[4] Characteristic Polynomial

نکته۳: اگر λ یک مقدار ویژه برای ماتریس A و بردار $\mathbf{v}$ بردار ویژه متناظر با آن باشد، در اینصورت λ^k نیز یک مقدار ویژه برای ماتریس A^k با بردار ویژه متناظر $\mathbf{v}$ خواهد بود. (k مقدار صحیح مثبت می باشد).

$$\begin{aligned} A^k\mathbf{v} &= A^{k-1}(A\mathbf{v}) = A^{k-1}(\lambda\mathbf{v}) = \lambda A^{k-2}(A\mathbf{v}) \\ &= \lambda A^{k-2}(\lambda\mathbf{v}) = \cdots = \lambda^{k-1}(A\mathbf{v}) = \lambda^{k-1}(\lambda\mathbf{v}) = \lambda^k\mathbf{v} \end{aligned}$$

نکته۴: برای ماتریس $A_{n\times n}$ با مقادیر ویژه $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ دترمینان و اثر ماتریس بصورت زیر قابل محاسبه است،

$$|A| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \quad \text{و} \quad \operatorname{trace}(A) = \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n \qquad (۳\text{-}۵)$$

می دانیم چندجمله ای مشخصه برای ماتریس $A_{n\times n}$ یک چندجمله ای مرتبه n و مونیک است،

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0$$

این چندجمله ای را می توان بصورت زیر نمایش داد،

$$|\lambda I - A| = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_{n-1})(\lambda-\lambda_n)$$

$\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ مقادیر ویژه هستند که می توانند حقیقی یا مختلط مزدوج و متمایز یا تکراری باشند. حال اگر در رابطه بالا $\lambda = 0$ قرار دهیم مقدار $|A|$ بدست می آید،

$$|A| = (\lambda_1)(\lambda_2)\cdots(\lambda_{n-1})(\lambda_n) = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i$$

برای اثبات اثر ماتریس بصورت زیر عمل می کنیم،

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

حال دترمینان را برحسب ستون اول بسط می دهیم،

$$|\lambda I - A| = (\lambda - a_{11})|M_{11}| - \sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}|M_{i1}|$$

اگر حاصل $|M_{11}|$ را بدست آوریم داریم،

$$|M_{11}| = (\lambda - a_{22})|M'_{11}| - \sum_{i=3}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}|M'_{i1}|$$

به همین ترتیب اگر بسط را ادامه دهیم داریم،

$$|\lambda I - A| = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})\cdots(\lambda - a_{nn}) + P(\lambda)$$

$P(\lambda)$ یک چندجمله ای با درجه $n-2$ است. لذا ضریب بزرگترین درجه یک و ضریب درجه بعدی $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$ خواهد بود. از طرفی داریم،

$$\left|\lambda I - A\right| = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_{n-1})(\lambda-\lambda_n)$$

و در اینجا ضریب دومین جمله $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$ است. پس داریم،

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n = a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn} = \mathrm{trace}(A)$$

نکته۵: اگر λ_i یک مقدار ویژه برای ماتریس A باشد، λ_i^{-1} مقدار ویژه ماتریس A^{-1} خواهد بود.

$$\left|\lambda I - A\right| = \left|\lambda A^{-1}A - A\right| = \left|(\lambda A^{-1}-I)A\right| = \left|\lambda A^{-1}-I\right|\ \left|A\right| = \left|\lambda\right|\ \left|A^{-1}-\lambda^{-1}I\right|\ \left|A\right| = 0$$

$$\left|\lambda^{-1}I_n - A^{-1}\right| = 0$$

نکته۶: ستون های غیر صفر ماتریس $adj(\lambda_i I - A)$ بردارهای ویژه ماتریس A هستند.

$$adj(\lambda I - A) = (\lambda I - A)^{-1}\left|\lambda I - A\right|$$

$$(\lambda I - A)adj(\lambda I - A) = \left|\lambda I - A\right| I$$

$$(\lambda_i I - A)adj(\lambda_i I - A) = \left|\lambda_i I - A\right| I = \mathbf{0}$$

رابطه اخیر نشان می دهد که ستون های غیر صفر ماتریس $adj(\lambda_i I - A)$ باید متعلق به فضای پوچی ماتریس $(\lambda_i I - A)$ باشند، لذا همان بردارهای ویژه ماتریس A هستند.

نکته۷: ضرایب معادله مشخصه یک ماتریس را می توان با استفاده از الگوریتم بازگشتی زیر بدست آورد،

$$\left|\lambda I - A\right| = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0$$

$$\begin{aligned} c_{n-1} &= -W_1 \\ c_{n-2} &= -\frac{1}{2}(c_{n-1}W_1 + W_2) \\ c_{n-3} &= -\frac{1}{3}(c_{n-2}W_1 + c_{n-1}W_2 + W_3) \\ &\vdots \\ c_0 &= -\frac{1}{n}(c_1W_1 + c_2W_2 + \cdots + c_{n-1}W_{n-1} + W_n) \end{aligned} \qquad (۴-۵)$$

در اینجا $W_k = \mathrm{trace}(A^k)$ است. اثبات به عنوان تمرین به خواننده واگذار می شود.

نکته۹: در ماتریس های قطری، بالا مثلثی و پایین مثلثی عناصر روی قطر اصلی همان مقادیر ویژه ماتریس هستند. در مورد ماتریس های خاص شرایط ویژه ای برای مقادیر ویژه و بردارهای ویژه وجود دارد،

- ماتریس متقارن و هرمیتی($A = A^T, A = A^*$) مقادیر ویژه حقیقی و بردارهای ویژه متعامد،
- ماتریس متعامد و یکین($A^{-1} = A^T, A^{-1} = A^*$) مقادیر ویژه $|\lambda_i| = 1$ و بردارهای ویژه متعامد،
- ماتریس شبه متقارن ($A = -A^T$) مقادیر ویژه موهومی و بردارهای ویژه متعامد،
- ماتریس تصویر ($A = A^2 = A^T$) مقادیر ویژه صفر و یک و بردارهای ویژه پایه های فضای گستره و فضای پوچی ماتریس،
- ماتریس مثبت معین ($\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$) مقادیر ویژه مثبت و بردارهای ویژه متعامد،
- ماتریس مثبت نیمه معین ($\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \geq 0$) مقادیر ویژه مثبت و صفر و بردارهای ویژه متعامد،
- ماتریس منفی معین ($\mathbf{x}^T A\mathbf{x} < 0$) مقادیر ویژه منفی و بردارهای ویژه متعامد،
- ماتریس منفی نیمه معین ($\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \leq 0$) مقادیر ویژه منفی و صفر و بردارهای ویژه متعامد،

لذا یکی از راه های تشخیص مثبت معین بودن یک ماتریس متقارن بررسی علامت مقادیر ویژه آن است.

مثال۵-۱

مثبت معین بودن ماتریس زیر را بررسی نمایید.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & -4 \\ -2 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

ابتدا از روش سیلوستر بررسی می نماییم سپس مقادیر ویژه آن را بدست می آوریم،

$$3 > 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 17 > 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & -4 \\ -2 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 46 > 0$$

لذا ماتریس مثبت معین است. حال مقادیر ویژه ماتریس را بررسی می کنیم،

معادله مشخصه ماتریس بصورت زیر است،

$$|\lambda I - A| = \lambda^3 - 15\lambda^2 + 51\lambda - 46 = 0$$

مقادیر ویژه بصورت زیر بدست می آید،

$$\lambda_1 = 2.9128, \quad \lambda_2 = 1.4903, \quad \lambda_3 = 10.5969$$

تمامی مقادیر ویژه مثبت هستند.

□

مثال۵-۲

معادله مشخصه ماتریس زیر را با استفاده از الگوریتم ارائه شده بر حسب اثر ماتریس بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}-1 & -4 & 2\\ -1 & -5 & 2\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

معادله مشخصه ماتریس بصورت زیر است،

$$|\lambda I-A|=\lambda^3+c_2\lambda^2+c_1\lambda+c_0$$

و ضرایب c_1 و c_0 بصورت زیر بدست می آیند،

$$\begin{aligned}c_2&=-W_1\\ c_1&=-\frac{1}{2}(c_2W_1+W_2)\\ c_0&=-\frac{1}{3}(c_1W_1+c_2W_2+W_3)\end{aligned}$$

لذا ماتریس های A^2 و A^3 را تشکیل می دهیم،

$$A^2=\begin{bmatrix}7 & 24 & -12\\ 8 & 29 & -14\\ -2 & -4 & 3\end{bmatrix}\quad,\quad A^3=\begin{bmatrix}-43 & -148 & 74\\ -51 & -177 & 88\\ 9 & 28 & -15\end{bmatrix}$$

$$W_1=\text{trace}(A)=-7,\quad W_2=\text{trace}(A^2)=39,\quad W_3=\text{trace}(A_3)=-235$$

$$\begin{aligned}c_2&=7\\ c_1&=-\frac{1}{2}(7\times(-7)+39)=5\\ c_0&=-\frac{1}{3}(5\times(-7)+7\times 39+(-235))=-1\end{aligned}$$

بنابراین معادله مشخصه بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I-A|=\lambda^3+7\lambda^2+5\lambda-1$$

در نرم افزار MATLAB برای بدست آوردن ضرایب چندجمله ای مشخصه از دستور poly(A) استفاده می شود،

```
A =[-1 -4 2;-1 -5 2;1 0 -1];
poly(A)
ans =
    1.0000    7.0000    5.0000   -1.0000
```

□

مثال۵-۳

ثابت کنید برای یک ماتریس متقارن(هرمیتی) تمامی مقادیر ویژه حقیقی و بردارهای ویژه متعامد هستند.

- فرض کنید A یک ماتریس متقارن یا هرمیتی ($A^T = A$ و $A^* = A$) و $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس A باشند،

$$A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \rightarrow (A\mathbf{v}_i)^* = (\lambda_i \mathbf{v}_i)^* \rightarrow \mathbf{v}_i^* A^* = \overline{\lambda}_i \mathbf{v}_i^* \rightarrow \mathbf{v}_i^* A = \overline{\lambda}_i \mathbf{v}_i^*$$
$$\mathbf{v}_i^* A\mathbf{v}_i = \overline{\lambda}_i \mathbf{v}_i^* \mathbf{v}_i \rightarrow \mathbf{v}_i^* \lambda_i \mathbf{v}_i = \overline{\lambda}_i \|\mathbf{v}_i\|^2 \rightarrow \lambda_i \mathbf{v}_i^* \mathbf{v}_i = \overline{\lambda}_i \|\mathbf{v}_i\|^2$$
$$\lambda_i \|\mathbf{v}_i\|^2 = \overline{\lambda}_i \|\mathbf{v}_i\|^2 \quad , \quad \mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$$
$$\lambda_i = \overline{\lambda}_i$$

لذا مقادیر ویژه $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ اعدادی حقیقی هستند.

- فرض کنید $\mathbf{v}_i$ و $\mathbf{v}_j$ ($i \neq j$) دو بردار ویژه برای ماتریس متقارن A و λ_i و λ_j دو مقدار ویژه متمایز متناظر با آنها هستند،

$$\lambda_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \langle \lambda_i \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \langle A\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \langle \mathbf{v}_i, A^T \mathbf{v}_j \rangle$$
$$= \langle \mathbf{v}_i, A\mathbf{v}_j \rangle = \langle \mathbf{v}_i, \lambda_j \mathbf{v}_j \rangle = \lambda_j \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle$$

لذا داریم $(\lambda_i - \lambda_j)\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$ و از آنجاییکه $\lambda_i \neq \lambda_j$ است، پس باید $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$ باشد و دو بردار ویژه متعامد هستند.

□

مثال۵-۴

ثابت کنید که برای ماتریس های مربعی $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$ داریم،

$$|\lambda I - AB| = |\lambda I - BA|$$

برای اثبات بصورت زیر عمل می کنیم، می دانیم $AA^{-1} = I$ است،

$$|\lambda I - AB| = |\lambda AA^{-1} - ABAA^{-1}| = |A(\lambda I - BA)A^{-1}| = |A||\lambda I - BA||A^{-1}|$$
$$= |A||\lambda I - BA|\frac{1}{|A|} = |\lambda I - BA|$$

□

مثال۵-۵

ماتریس A را در حالتهای مختلف در نظر بگیرید برای هر حالت معادله مشخصه، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را بدست آورید.

الف) $A=\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 3 & -5\end{bmatrix}$

- معادله مشخصه ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix}\lambda+4 & -2\\ -3 & \lambda+5\end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda^2+9\lambda+14=0$$

- با حل معادله مشخصه مقادیر ویژه را بدست می آوریم،

$$\lambda^2+9\lambda+14=(\lambda+7)(\lambda+2)=0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1=-7, \lambda_2=-2$$

بنابراین ماتریس A دو مقدار ویژه حقیقی متمایز یا غیر تکراری دارد.

- حال بردارهای ویژه متناظر با هر یک از مقادیر ویژه را محاسبه می کنیم،

روش اول: استفاده از تعریف بردار ویژه،

$$A\mathbf{v}_i=\lambda_i\mathbf{v}_i \rightarrow (\lambda_i I - A)\mathbf{v}_i = 0 \rightarrow \begin{bmatrix}\lambda_i+4 & -2\\ -3 & \lambda_i+5\end{bmatrix}\mathbf{v}_i=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1=-7 \rightarrow \begin{bmatrix}-3 & -2\\ -3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \rightarrow -3x_1-2x_2=0 \rightarrow x_1=\frac{-2}{3}x_2 \rightarrow \mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=-2 \rightarrow \begin{bmatrix}2 & -2\\ -3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \rightarrow 2x_3-2x_4=0 \rightarrow x_3=x_4 \rightarrow \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$$

روش دوم: استفاده از ماتریس الحاقی،

$$\mathrm{Adj}(\lambda I - A)=\mathrm{Adj}\begin{bmatrix}\lambda+4 & -2\\ -3 & \lambda+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda+5 & 2\\ 3 & \lambda+4\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1=-7 \quad \rightarrow \quad \mathrm{Adj}(-7I-A)=\begin{bmatrix}-2 & \boxed{\begin{matrix}2\\-3\end{matrix}}\\ 3 & \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=-2 \quad \rightarrow \quad \mathrm{Adj}(-2I-A)=\begin{bmatrix}3 & \boxed{\begin{matrix}2\\2\end{matrix}}\\ 3 & \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$$

می توان نشان داد که در این حالت بردارهای ویژه $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ مستقل خطی هستند،

$$\begin{vmatrix}2 & 2\\ -3 & 2\end{vmatrix}=4-(-6)=10$$

از آنجائیکه مقدار دترمینان مخالف صفر است، لذا بردارهای ویژه $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ مستقل خطی هستند.

در نرم افزار MATLAB از تابع eig(A) و [V, D] = eig(A) برای محاسبه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه یکامتعامد شده ماتریس A استفاده می شود.

به اجرای این دو دستور توجه نمایید،

```
A =[-4 2;3 -5];
eig(A)
ans =
    -2
    -7
[V,D]= eig(A)
V =
    0.7071   -0.5547
    0.7071    0.8321
D =
    -2     0
     0    -7
```

این دستور بردارهای ویژه یکامتعامد شده ماتریس A را می دهد. اگر بخواهیم بردارهای ویژه را همانند محاسبات دستی بدست آوریم می توان از برنامه myeig.m استفاده نمود،

```
% Calculate Eigenvalue and Eigenvectors
function [V,l]= myeig(A)
l = eig(A);
n = size(l,1);
V = zeros(size(A));
for i = 1:n
    V(:,i)= null(l(i)* eye(size(A))- A,'r');
end
```

اجرای برنامه بصورت زیر است،

```
A =[-4 2;3 -5];
[V,l]= myeig(A)
V =
    1.0000   -0.6667
    1.0000    1.0000
l =
    -2
    -7
```

در اینجا بردارهای ویژه فرم یکا متعامد ندارند.

برای بدست آوردن فرم پارامتری معادله مشخصه می توان بصورت زیر عمل نمود،

```
A =[-4 2;3 -5];
l = sym('l');
det(l* eye(2)- A)
 ans =
l^2+9*l+14
```

همچنین می توان با دستور poly(A) ضرایب معادله مشخصه ماتریس را بدست آورد سپس با دستور roots(p) ریشه های آن را محاسبه نمود،

```
A =[-4 2;3 -5];
p = poly(A)
p =
     1     9    14
roots(p)
ans =
    -7
    -2
```

ب) $A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -8 & -6 \end{bmatrix}$

- معادله مشخصه ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda-6 & -5 \\ 8 & \lambda+6 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda^2 + 4 = 0$$

- با حل معادله مشخصه مقادیر ویژه را بدست می آوریم،

$$\lambda^2 + 4 = (\lambda - j2)(\lambda + j2) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = j2, \lambda_2 = -j2$$

بنابراین ماتریس A دو مقدار ویژه مزدوج موهومی دارد.

- بردارهای ویژه متناظر با هر یک از مقادیر ویژه بصورت زیر بدست می آیند،

$$\lambda_1 = j2 \rightarrow A\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = j2 \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} \rightarrow v_{11} = (\frac{-3}{4} - j\frac{1}{4}) v_{21}$$

$$\lambda_2 = -j2 \rightarrow A\mathbf{v}_2 = \lambda_2 \mathbf{v}_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = -j2 \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} \rightarrow v_{12} = (\frac{-3}{4} + j\frac{1}{4}) v_{22}$$

از این رو بردار ویژه $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ را می توان بدین صورت نوشت،

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{-3}{4} - j\frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{-3}{4} + j\frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

می توان نشان داد که در این حالت بردارهای ویژه $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ مستقل خطی هستند،

$$\begin{vmatrix} \frac{-3}{4} - j\frac{1}{4} & \frac{-3}{4} + j\frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[6 5;-8 -6];
poly(A)
ans =
     1     0     4
[V,D]= eig(A)
V =
   0.1961 - 0.5883i   0.1961 + 0.5883i
        0 + 0.7845i        0 - 0.7845i
D =
        0 + 2.0000i        0
        0                   0 - 2.0000i
```

و یا با استفاده از برنامه myeig.m داریم،

```
A =[6 5;-8 -6];
[V,l]= myeig(A)
V =
  -0.7500 - 0.2500i  -0.7500 + 0.2500i
   1.0000             1.0000
l =
        0 + 2.0000i
        0 - 2.0000i
```

□

قضیه۱: اگر یک ماتریس $A_{n\times n}$ دارای n مقدار ویژه متمایز $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ باشد، آنگاه n بردار ویژه مستقل خطی $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ وجود خواهد داشت.

اثبات: فرض کنیم فقط kتا از این بردارها مستقل خطی باشند،

$$\mathbf{v}_{k+1}=\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\cdots+\alpha_k\mathbf{v}_k \tag{۵-۵}$$

طرفین رابطه بالا را در A ضرب کنیم،

$$A\mathbf{v}_{k+1}=\alpha_1 A\mathbf{v}_1+\alpha_2 A\mathbf{v}_2+\cdots+\alpha_k A\mathbf{v}_k$$

می دانیم $A\mathbf{v}_i=\lambda_i\mathbf{v}_i$،

$$\lambda_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}=\alpha_1\lambda_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\lambda_2\mathbf{v}_2+\cdots+\alpha_k\lambda_k\mathbf{v}_k \tag{۶-۵}$$

اگر طرفین رابطه(۵-۵) را در λ_{k+1} ضرب می کنیم،

$$\lambda_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}=\alpha_1\lambda_{k+1}\mathbf{v}_1+\alpha_2\lambda_{k+1}\mathbf{v}_2+\cdots+\alpha_k\lambda_{k+1}\mathbf{v}_k \tag{۷-۵}$$

با تفاضل رابطه(۵-۶) و (۵-۷) داریم،

$$\alpha_1(\lambda_{k+1}-\lambda_1)\mathbf{v}_1+\alpha_2(\lambda_{k+1}-\lambda_2)\mathbf{v}_2+\cdots+\alpha_k(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\mathbf{v}_k=\mathbf{0}$$

طبق فرض $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k$ مستقل خطی و مقادیر ویژه مجزا هستند، لذا باید،

$$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_k=0$$

بنابراین طبق رابطه(۵-۵) باید $\mathbf{v}_{k+1}=\mathbf{0}$ باشد که با شرط $\mathbf{v}_{k+1}\neq\mathbf{0}$ بردار ویژه منافات دارد. پس نمی توان $\mathbf{v}_{k+1}$ را بصورت ترکیب خطی از $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k$ نوشت و $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ مستقل خطی هستند.

□

نکته: اگر ماتریس $A_{n\times n}$ یک مقدار ویژه تکراری از مرتبه k داشته باشد، آنگاه حداقل یک و حداکثر k بردار ویژه مستقل خطی متناظر با این مقدار ویژه تکراری λ_i وجود خواهد داشت و تعداد بردارهای مستقل خطی در این حالت برابر با $n-\operatorname{rank}(A-\lambda_i I)$ است.

مثال۵-۶

برای ماتریس A معادله مشخصه، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را بدست آورید.

الف) $$A=\begin{bmatrix}4&-2&0\\1&2&0\\0&0&6\end{bmatrix}$$

- معادله مشخصه ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4&2&0\\-1&\lambda-2&0\\0&0&\lambda-6\end{vmatrix}=0\quad\rightarrow\quad\lambda^3-12\lambda^2+46\lambda-60=0$$

- پس از حل معادله مشخصه مقادیر ویژه بصورت زیر بدست می آیند،

$$\lambda^3 - 12\lambda^2 + 46\lambda - 60 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 6, \lambda_{2,3} = 3 \pm j$$

بنابراین ماتریس A یک مقدار ویژه حقیقی و دو مقدار ویژه مختلط مزدوج دارد.

- بردارهای ویژه متناظر با این مقادیر ویژه را با استفاده از تعریف بردار ویژه بدست می آوریم،

$$A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda-4 & 2 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-6 \end{bmatrix} \mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 6 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3 + j \rightarrow \begin{bmatrix} -1+j & 2 & 0 \\ -1 & 1+j & 0 \\ 0 & 0 & -3+j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1+j \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 3 - j \rightarrow \begin{bmatrix} -1-j & 2 & 0 \\ -1 & 1-j & 0 \\ 0 & 0 & -3-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1-j \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[4 -2 0;1 2 0;0 0 6];
[V,D]= eig(A)
V =
  -0.5774 + 0.5774i  -0.5774 - 0.5774i        0
        0 + 0.5774i        0 - 0.5774i        0
        0                  0             1.0000
D =
   3.0000 + 1.0000i        0                  0
        0              3.0000 - 1.0000i       0
        0                  0             6.0000
```

و یا با استفاده از برنامه myeig.m داریم،

```
A =[4 -2 0;1 2 0;0 0 6];
[V,l]= myeig(A)
V =
   1.0000 + 1.0000i   1.0000 - 1.0000i        0
   1.0000             1.0000                  0
        0                  0             1.0000
l =
   3.0000 + 1.0000i
   3.0000 - 1.0000i
   6.0000
```

نتایج بدست آمده با این برنامه مطابق با محاسبات دستی انجام شده می باشد.

ب) $A=\begin{bmatrix}6 & 3 & -8\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & 0 & -3\end{bmatrix}$

- معادله مشخصه ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I_3-A|=\begin{vmatrix}\lambda-6 & -3 & 8\\ 0 & \lambda+2 & 0\\ -1 & 0 & \lambda+3\end{vmatrix}=0 \quad\rightarrow\quad \lambda^3-\lambda^2-16\lambda-20=0$$

- با حل معادله مشخصه مقادیر ویژه را بدست می آوریم،

$$\lambda^3-\lambda^2-16\lambda-20=(\lambda+2)^2(\lambda-5)=0 \quad\rightarrow\quad \lambda_{1,2}=-2, \lambda_3=5$$

بنابراین ماتریس A دو مقدار ویژه حقیقی تکراری و یک مقدار ویژه متمایز دارد.

- حال بردارهای ویژه متناظر با هر یک از مقادیر ویژه را محاسبه می کنیم، از آنجاییکه $n-\text{rank}(A-\lambda_1 I)=3-2=1$ است، لذا برای مقدار ویژه تکراری $\lambda_{1,2}=-2$ فقط یک بردار ویژه مستقل خطی داریم. با استفاده از تعریف بردار ویژه داریم،

$$\lambda_1=-2\rightarrow A\mathbf{v}_1=\lambda_1\mathbf{v}_1\rightarrow\begin{bmatrix}6 & 3 & -8\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{21}\\ v_{31}\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{21}\\ v_{31}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}v_{11}=v_{31}\\ v_{21}=0\end{cases}$$

$$\lambda_3=5\rightarrow A\mathbf{v}_3=\lambda_3\mathbf{v}_3\rightarrow\begin{bmatrix}6 & 3 & -8\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{13}\\ v_{23}\\ v_{33}\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}v_{13}\\ v_{23}\\ v_{33}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}v_{13}=8v_{33}\\ v_{23}=0\end{cases}$$

از این رو بردار ویژه $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_3$ را می توان بدین صورت نوشت،

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\quad,\quad \mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}8\\0\\1\end{bmatrix}$$

بطور مشابه با روش ماتریس الحاقی نیز می توان محاسبه کرد،

$$\mathrm{Adj}(\lambda I-A)=\mathrm{Adj}\begin{bmatrix}\lambda-6 & -3 & 8\\ 0 & \lambda+2 & 0\\ -1 & 0 & \lambda+3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda^2+5\lambda+6 & 3\lambda+9 & -8\lambda-16\\ 0 & \lambda^2-3\lambda-10 & 0\\ \lambda+2 & 3 & \lambda^2-4\lambda-12\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1=-2\quad\rightarrow\quad \mathrm{Adj}(\text{-2I - }A)=\begin{bmatrix}0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad \mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}3\\0\\3\end{bmatrix}$$

$$\lambda_3=5\quad\rightarrow\quad \mathrm{Adj}(\text{5I - }A)=\begin{bmatrix}56 & 24 & -56\\ 0 & 0 & 0\\ 7 & 3 & -7\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad \mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}24\\0\\3\end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[6 3 -8;0 -2 0;1 0 -3];
poly(A)
ans =
     1    -1   -16   -20
[V,D]= eig(A)
V =
    0.9923    0.7071    0.7071
         0         0    0.0000
    0.1240    0.7071    0.7071
D =
     5     0     0
     0    -2     0
     0     0    -2
```

و با استفاده از برنامه myeig.m داریم،

```
A =[6 3 -8;0 -2 0;1 0 -3];
[V,l]= myeig(A)
V =
     8     1     1
     0     0     0
     1     1     1
l =
     5
    -2
    -2
```

توجه کنید که برای مقدار ویژه تکراری یک بردار ویژه ارائه می دهد و این موضوع تحلیل های دستی انجام شده را تایید می کند.

□

۵-۳ محاسبه مقادیر ویژه با روش های تکراری

استفاده از روش کلاسیک برای محاسبه مقادیر ویژه برای ماتریس هایی با ابعاد بزرگ مقرون به صرفه نیست. لذا در چنین شرایطی اغلب از روش های عددی یا تکراری برای بدست آوردن مقادیر ویژه استفاده می شود. در این بخش به دو روش توانی و تجزیه QR اشاره شده است.

۵-۳-۱- استفاده از روش توانی

یکی از معروف ترین روش های تکراری برای محاسبه مقادیر ویژه **روش توانی**[۱] یا **روش به توان رسانی** است. در این روش که یک روش تکراری است در هر مرحله بزرگترین مقدار ویژه از نظر قدرمطلق و بردار ویژه متناظر با آن با توجه به معیار دقت مورد نظر تعیین می گردد. این روش زمانی کاربرد دارد که ماتریس دارای مقادیر ویژه تکراری نباشد. اگر این روش را برای ماتریس معکوس اجرا کنیم کوچکترین مقدار ویژه به لحاظ قدر مطلق بدست می آید.

ماتریس $A_{n\times n}$ را با مقادیر ویژه متمایز $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ و بردارهای ویژه مستقل خطی $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ در نظر بگیرید. لذا بردارهای ویژه تشکیل یک دسته پایه برای $\Re^n$ می دهند. الگوریتم تکراری بصورت زیر قابل اجرا است،

[۱] Power Method

مرحله۱- بردار دلخواه $\mathbf{u}_0 \in \Re^n$ را چنان در نظر بگیرید که $\|\mathbf{u}_0\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\{|u_i|\} = 1$ باشد.

مرحله۲- بردار $\mathbf{u}_1 = \dfrac{A\mathbf{u}_0}{\|A\mathbf{u}_0\|_\infty}$ را بدست آورید.

مرحله۳- بردار $\mathbf{u}_2 = \dfrac{A\mathbf{u}_1}{\|A\mathbf{u}_1\|_\infty}$ را بدست آورید.

$\vdots$

مرحله۴- بردار $\mathbf{u}_k = \dfrac{A\mathbf{u}_{k-1}}{\|A\mathbf{u}_{k-1}\|_\infty}$ را بدست آورید.

مرحله۵- $\lambda_1 = \dfrac{\mathbf{u}_k^T A\mathbf{u}_k}{\mathbf{u}_k^T\mathbf{u}_k}$ بزرگترین مقدار ویژه به لحاظ قدر مطلق و $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_k$ بردار ویژه متناظر با آن است.

زمان خاتمه الگوریتم به دقت مورد نظر بستگی دارد. اگر دقت مورد نظر را ε در نظر بگیریم می توان چنین معیاری را برای خاتمه الگوریتم در نظر گرفت،

$$\left|\frac{\lambda^{(i+1)} - \lambda^{(i)}}{\lambda^{(i+1)}}\right| \le \varepsilon$$

برای اجرای این الگوریتم تکراری برنامه powereig.m در نرم افزار MATLAB نوشته شده است،

```
% Calculate  largest  absolute  eigenvalue  by Power  Method
function  [V, D] = powereig(A  ,err)
n  = size(A,1);
ee  = 10;
u  = randn(n,1)  ;
u  = u/norm(u, 'inf' );
u  = (A * u)/norm(A  * u,'inf' );
l1  = (u'*A * u)/(u'*u);
while(ee  > err)
   u  = (A * u)/norm(A  * u,'inf' );
   l2  = (u'*A * u)/(u'*u);
   ee  = abs((l2  - l1)/l2);
   l1  = l2;
end
V  = u;
D  = l2;
```

برنامه invpowereig.m کوچکترین مقدار ویژه را به لحاظ قدرمطلق محاسبه می کند. در این برنامه الگوریتم برای ماتریس معکوس اجرا شده و بزرگترین مقدار ویژه آن محاسبه می شود که معکوس آن برابر با کوچکترین مقدار ویژه ماتریس اصلی است.

```
% Calculate smallest absolute eigenvalues by Power Method
function [V,D] = invpowereig(A,err)
n = size(A,1);
ee = 10;
u = randn(n,1);
u = u/norm(u,'inf');
u = (A\u)/norm(A\u,'inf');
l1 = (u'*(A\u))/(u'*u);
while(ee > err)
   u = (A\u)/norm(A\u,'inf');
   l2 = (u'*(A\u))/(u'*u);
   ee = abs((l2-l1)/l2);
   l1 = l2;
end
V = u;
D = l2;
```

مثال۵-۷

با استفاده از روش توانی مقادیر ویژه ماتریس A را با توجه به دقت خواسته شده بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}5 & -6\\ 4 & -6\end{bmatrix} \quad , \quad \varepsilon = 10^{-2}$$

۱- بردار دلخواه $\mathbf{u}_0=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ را انتخاب می کنیم.

۲- بردار $\mathbf{u}_1=\dfrac{A\mathbf{u}_0}{\|A\mathbf{u}_0\|_\infty}$ را بدست می آوریم.

$$A\mathbf{u}_0=\begin{bmatrix}5 & -6\\ 4 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix} \quad \to \quad \mathbf{u}_1=\frac{A\mathbf{u}_0}{2}=\begin{bmatrix}-0.5\\-1\end{bmatrix}$$

مقدار ویژه را در مرحله اول بدست می آوریم،

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{\mathbf{u}_1^T A \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1} = -4.6000$$

۳- بردار $\mathbf{u}_2 = \dfrac{A\mathbf{u}_1}{\|A\mathbf{u}_1\|_\infty}$ را بدست می آوریم.

$$A\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{u}_2 = \frac{A\mathbf{u}_1}{4} = \begin{bmatrix} 0.8750 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مقدار ویژه را در مرحله دوم بدست می آوریم،

$$\lambda_1^{(2)} = \frac{\mathbf{u}_2^T A \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2^T \mathbf{u}_2} = -2.2212$$

حال برای ادامه کار خطا را بررسی می کنیم،

$$\left| \frac{\lambda_1^{(2)} - \lambda_1^{(1)}}{\lambda_1^{(2)}} \right| = \left| \frac{-2.2212 + 4.600}{-2.2212} \right| = 1.0710 > 10^{-2}$$

لذا مرحله بعدی را ادامه می دهیم،

۴- بردار $\mathbf{u}_3 = \dfrac{A\mathbf{u}_2}{\|A\mathbf{u}_2\|_\infty}$ را بدست می آوریم.

$$A\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8750 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.6250 \\ -2.5000 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{u}_3 = \frac{A\mathbf{u}_2}{2.5} = \begin{bmatrix} -0.6500 \\ -1 \end{bmatrix}$$

مقدار ویژه را در مرحله سوم بدست می آوریم،

$$\lambda_1^{(3)} = \frac{\mathbf{u}_3^T A \mathbf{u}_3}{\mathbf{u}_3^T \mathbf{u}_3} = -3.6467$$

حال برای ادامه کار خطا را بررسی می کنیم،

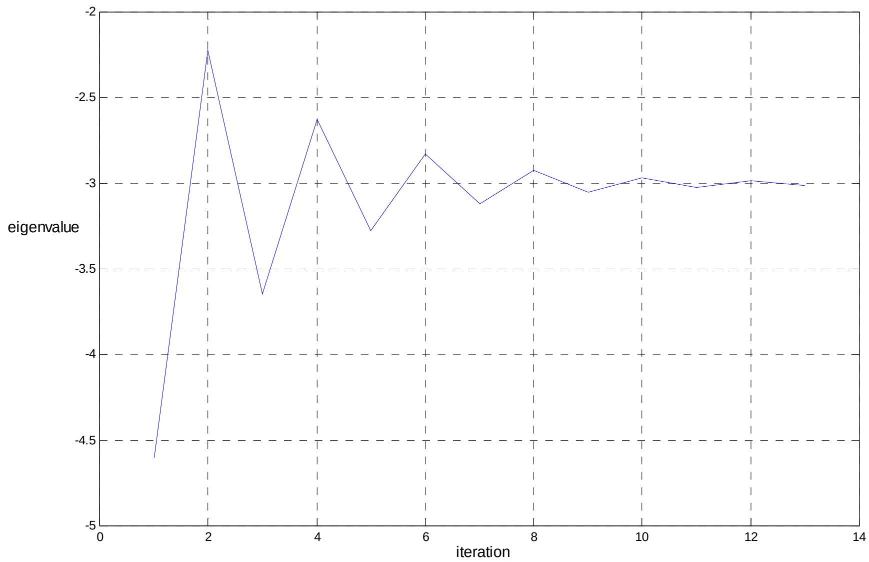
$$\left| \frac{\lambda_1^{(3)} - \lambda_1^{(2)}}{\lambda_1^{(3)}} \right| = \left| \frac{-3.6467 + 2.2212}{-3.6467} \right| = 0.3909 > 10^{-2}$$

با ادامه الگوریتم نهایتاً به جواب می رسیم. به دلیل طولانی بودن محاسبات دستی نتایج کلی توسط نرم افزار MATLAB بدست آمده است. در اجرای برنامه powereig برای این مثال خاص به جای استفاده از تابع randn برای تولید بردار $\mathbf{u}$ اولیه آن را بردار $[1,1]$ در نظر گرفته ایم.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \varepsilon = 10^{-2}$$

step	$\mathbf{u}$	λ	ε
1	$\begin{bmatrix}-0.5\\-1\end{bmatrix}$	-4.6000	
2	$\begin{bmatrix}0.875\\1\end{bmatrix}$	-2.2212	1.0709
3	$\begin{bmatrix}-0.6500\\-1\end{bmatrix}$	-3.6467	0.3909
4	$\begin{bmatrix}0.8088\\1\end{bmatrix}$	-2.6277	0.3878
5	$\begin{bmatrix}-0.7074\\-1\end{bmatrix}$	-3.2739	0.1974
6	$\begin{bmatrix}0.7768\\1\end{bmatrix}$	-2.8290	0.1575
7	$\begin{bmatrix}-0.7314\\-1\end{bmatrix}$	-3.1191	0.0930
8	$\begin{bmatrix}0.7621\\1\end{bmatrix}$	-2.9229	0.0671
9	$\begin{bmatrix}-0.7418\\-1\end{bmatrix}$	-3.0524	0.0424
10	$\begin{bmatrix}0.7554\\1\end{bmatrix}$	-2.9655	0.0293
11	$\begin{bmatrix}-0.7464\\-1\end{bmatrix}$	-3.0232	0.0191
12	$\begin{bmatrix}0.7524\\1\end{bmatrix}$	-2.9846	0.0129
13	$\begin{bmatrix}-0.7484\\-1\end{bmatrix}$	-3.0103	0.0085

لذا مقدار ویژه غالب $\lambda_1 = -3.0103$ و بردار ویژه متناظر با آن $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}-0.7484\\-1\end{bmatrix}$ است. در شکل زیر نحوه همگرایی مقدار ویژه λ_1 رسم شده است،



شکل(۵-۱) - نحوه همگرایی مقدار ویژه λ_1 برای ماتریس A

به منظور مقایسه نتایج ابتدا مقادیر ویژه و بردار ویژه ماتریس را با استفاده از دستور eig نرم افزار MATLAB بدست می آوریم،

```
A =[5 -6;4 -6];
[V,D]= eig(A)
V =
    0.8944    0.6000
    0.4472    0.8000
D =
     2     0
     0    -3
```

نتیجه نرم افزار با محاسبات الگوریتم مطابقت دارد.

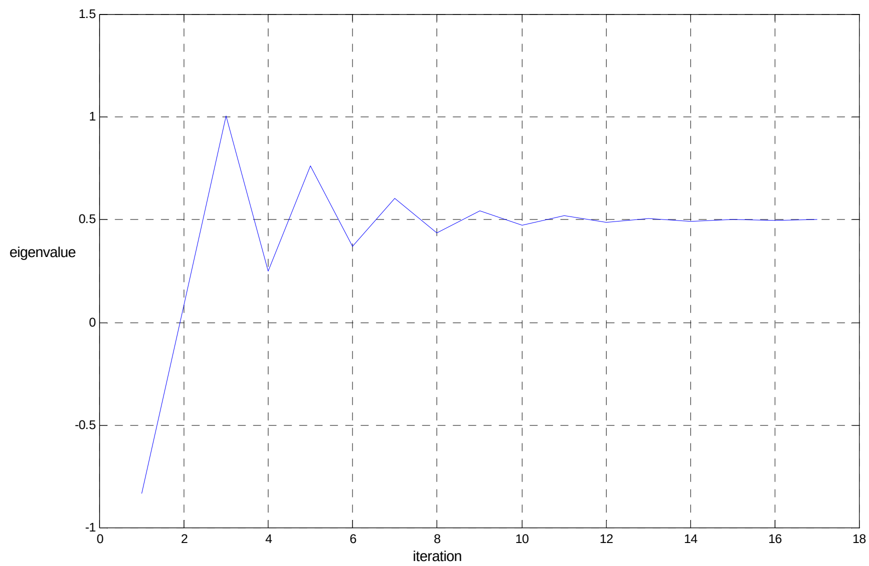
حال برنامه را برای معکوس ماتریس اجرا می کنیم تا کوچکترین مقدار ویژه ماتریس بدست آید. در اینجا هم بردار $\mathbf{u}$ اولیه آن را بردار $[1,1]$ در نظر گرفته ایم.

```
A =[5 -6;4 -6];
err =.01;
[V,D] = invpowereig(A,err)
V =
    1.0000
    0.4987
D =
    0.5017
```

لذا بزرگترین مقدار ویژه ماتریس A^{-1} برابر با 0.5017 است، پس کوچکترین مقدار ویژه ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$\lambda_2 = \frac{1}{0.5017} = 1.9932 \approx 2$$

در شکل زیر نحوه همگرایی مقدار ویژه ماتریس معکوس نشان داده شده است،



شکل(۵-۲) - نحوه همگرایی مقدار ویژه λ_1 برای ماتریس A^{-1}

□

مثال۵-۸

با استفاده از روش توانی بزگترین و کوچکترین مقادیر ویژه ماتریس A را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}4 & 0 & 1\\ -1 & -6 & -2\\ 5 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad , \quad \varepsilon=10^{-3}$$

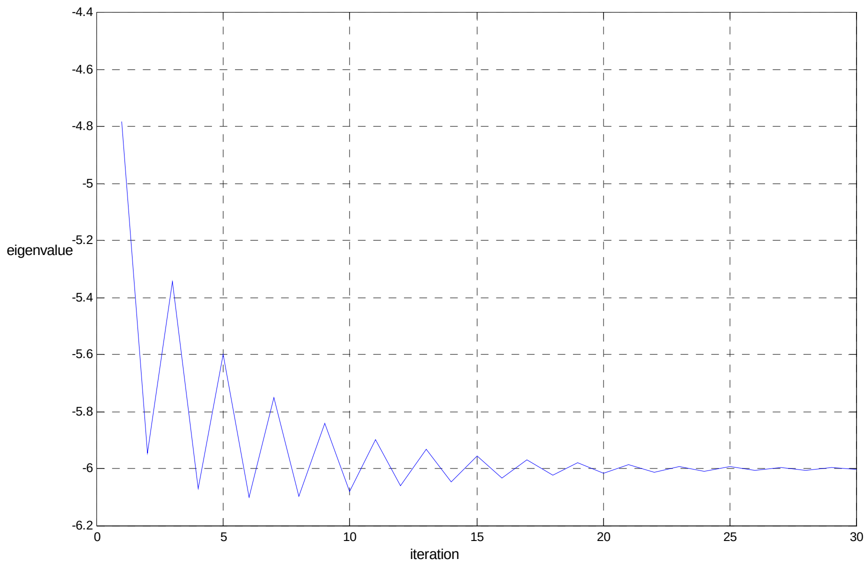
جهت مقایسه نتایج ابتدا با استفاده از دستور eig مقادیر ویژه ماتریس را بدست می آوریم،

```
A =[4 0 1;-1 -6 -2;5 0 0];
eig(A)'
ans =
    -6    5    -1
```

با اجرای برنامه powereig داریم،

```
A =[4 0 1;-1 -6 -2;5 0 0];
err =.001;
[V,D] = powereig(A,err)
V =
   -0.0009
   -1.0000
   -0.0009
D =
   -6.0027
```

در شکل(۵-۳) نحوه همگرایی مقدار ویژه λ_1 رسم شده است،



شکل(۵-۳) - نحوه همگرایی مقدار ویژه λ_1 برای ماتریس A

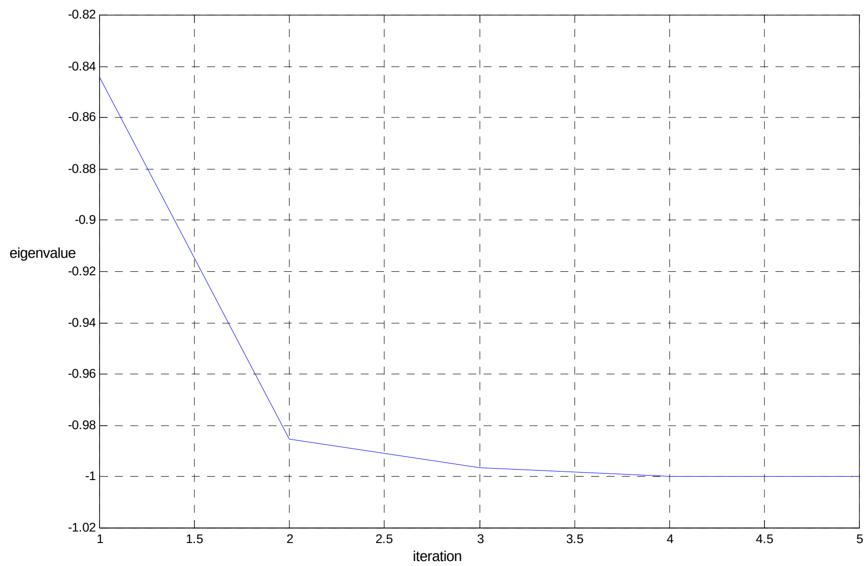
همچنین با اجرای برنامه invpowereig.m داریم،

```
A =[4 0 1;-1 -6 -2;5 0 0];
err =.001;
[V,D] = invpowereig(A,err)
V =
    0.2000
    0.3603
   -1.0000
D =
   -0.9999
```

لذا بزرگترین مقدار ویژه ماتریس A^{-1} برابر با -0.9999 است، پس کوچکترین مقدار ویژه ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$\lambda_3 = \frac{1}{-0.9999} = -1.0001$$

در شکل زیر نحوه همگرایی مقدار ویژه ماتریس معکوس نشان داده شده است،



شکل(۵-۴) - نحوه همگرایی مقدار ویژه λ_1 برای ماتریس A^{-1}

در اجرای برنامه از آنجاییکه مقدار بردار **u** اولیه توسط تابع randn انتخاب می شود، لذا سرعت همگرایی می تواند تغییر کند.

□

۵-۳-۲- استفاده از تجزیه QR

یک روش دیگر برای بدست آوردن مقادیر ویژه استفاده از تجزیه QR است. در این روش سعی می شود تا با استفاده از تجزیه QR ماتریس $A_{n\times n}$ به یک ماتریس بالا مثلثی تبدیل گردد، که در این صورت عناصر روی قطر اصلی همان مقادیر ویژه خواهند بود. این روش برای ماتریس هایی کاربرد دارد که مقادیر ویژه متمایز و حقیقی داشته باشند. الگوریتم مذکور بصورت زیر است،

مرحله ۱- تجزیه $A = Q_0 R_0$ را بدست آورید. سپس ماتریس $A_1 = R_0 Q_0$ را محاسبه نمایید.
مرحله ۲- تجزیه $A_1 = Q_1 R_1$ را بدست آورید. سپس ماتریس $A_2 = R_1 Q_1$ را محاسبه نمایید.
مرحله ۳- به همین ترتیب تا k مرحله ادامه دهید.

الگوریتم زمانی پایان می یابد که عناصر زیر قطر اصلی ماتریس A_m به صفر نزدیک شده باشند. در اینصورت عناصر روی قطر اصلی ماتریس A_m همان مقادیر ویژه ماتریس A خواهند بود.

مثال۵-۹

با استفاده از الگوریتم بالا ثابت کنید، ماتریس های A, A_1, A_2 تا A_k مقادیر ویژه یکسانی دارند.

ابتدا ثابت می کنیم $A = Q_0 A_1 Q_0^T$ و $A_1 = Q_0 A_2 Q_0^T$ است.

$$A_1 = R_0 Q_0 \to A_1 Q_0^T = R_0 \underbrace{Q_0 Q_0^T}_{I} \to A_1 Q_0^T = R_0$$

$$A_2 = R_1 Q_1 \to A_2 Q_1^T = R_1 \underbrace{Q_1 Q_1^T}_{I} \to A_2 Q_1^T = R_1$$

حال با توجه با اینکه $A = Q_0 R_0$ و $A_1 = Q_1 R_1$ است داریم،

$$A = Q_0 R_0 = Q_0 A_1 Q_0^T \qquad , \qquad A_1 = Q_1 R_1 = Q_1 A_2 Q_1^T$$

حال به اثبات مسئله اصلی می پردازیم،

$$|\lambda I - A| = |\lambda Q_0 Q_0^T - Q_0 A_1 Q_0^T| = |Q_0(\lambda I - A_1)Q_0^T| = \underbrace{|Q_0|}_{1}|\lambda I - A_1|\underbrace{|Q_0^T|}_{1} = |\lambda I - A_1|$$

$$|\lambda I - A_1| = |\lambda Q_1 Q_1^T - Q_1 A_2 Q_1^T| = |Q_1(\lambda I - A_2)Q_1^T| = \underbrace{|Q_1|}_{1}|\lambda I - A_2|\underbrace{|Q_1^T|}_{1} = |\lambda I - A_2|$$

لذا $|\lambda I - A| = |\lambda I - A_1| = |\lambda I - A_2|$ است و ماتریس های A, A_1, A_2 مقادیر ویژه یکسانی دارند. می توان با ادامه همین روش بقیه ماتریس ها را نیز بدست آورد.

□

برنامه QReig.m در نرم افزار MATLAB برای اجرای این الگوریتم نوشته شده است. این برنامه ماتریس A و تعداد تکرار برای الگوریتم را به عنوان ورودی گرفته و مقادیر ویژه ماتریس A را در خروجی ارائه می دهد.

```
% Calculate eigenvalues by QR method
function L = QReig(A,k)
for i = 1:k
   [Q0,R0] = qr(A,0);
    A1 = R0*Q0;
    A = A1;
end
L = diag(A);
```

می توان به جای تعیین تعداد تکرارها یک حدی برای خاتمه الگوریتم قرار داد. در اینصورت می توان برنامه را به شکل زیر اصلاح نمود،

```
% Calculate eigenvalues by QR method
function L = QReig(A)
k = 1;
while(abs(k)> 0.0001)
   [Q0,R0] = qr(A,0);
    A1 = R0*Q0;
    A = A1;
    B = tril(A,-1);
    k = sum(B(:));
end
L = diag(A);
```

در اینجا نیازی به وارد کردن تعداد دفعات تکرار نیست.

مثال۵-۱۰

با استفاده از الگوریتم تجزیه QR مقادیر ویژه ماتریس زیر را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

برای مقایسه نتایج ابتدا با استفاده از دستور eig مقادیر ویژه را بدست می آوریم،

```
A =[-4 2;3 -5];
eig(A)
ans =
    -2
    -7
```

حال با استفاده از برنامه QReig.m اصلاح شده مقادیر ویژه را حساب می کنیم،

```
A =[-4 2;3 -5];
L = QReig(A)
L =
   -7.0000
   -2.0000
```

روند اجرا در جدول زیر آورده شده است،

step i	$A_i = R_{i-1}Q_{i-1}$
1	$\begin{bmatrix} -6.76 & -0.68 \\ -1.68 & -2.24 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} -7.0495 & -0.5153 \\ 0.4847 & -1.9505 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} -7.0234 & 0.8641 \\ -0.1359 & -1.9766 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} -7.0074 & -0.9614 \\ 0.0386 & -1.9926 \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} -7.0022 & 0.9890 \\ -0.0110 & -1.9978 \end{bmatrix}$
6	$\begin{bmatrix} -7.0006 & -0.9969 \\ 0.0031 & -1.9994 \end{bmatrix}$
7	$\begin{bmatrix} -7.0002 & 0.9991 \\ -0.0009 & -1.9998 \end{bmatrix}$
8	$\begin{bmatrix} -7.0001 & -0.9997 \\ 0.0003 & -1.9999 \end{bmatrix}$
9	$\begin{bmatrix} -7.0000 & 0.9999 \\ -0.0001 & -2.0000 \end{bmatrix}$

در این مثال پس از ۹ مرحله تکرار ماتریس بالامثلثی به دقت مورد نظر 10^{-4} رسیده و عناصر روی قطر اصلی ماتریس A_9 نیز بیانگر مقادیر ویژه ماتریس A شدند.

□

مثال۵-۱۱

با استفاده از الگوریتم تجزیه QR مقادیر ویژه ماتریس های زیر را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 8\\ 7 & -7 & 6\\ 5 & 7 & -8\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}4 & -2 & 3 & -7\\ 1 & 2 & 6 & 8\\ 8 & 5 & 1 & -5\\ -5 & 8 & -5 & 3\end{bmatrix}$$

برای مقایسه نتایج با استفاده از دستور eig نیز مقادیر ویژه را بدست می آوریم،

```
A =[1 -2 8;7 -7 6;5 7 -8];
eig(A)
ans =
    5.8191
   -6.7680
  -13.0512
L = QReig(A)
L =
  -13.0512
   -6.7679
    5.8191

B =[4 -2 3 -7;1 2 6 8;8 5 1 -5;-5 8 -5 3];
eig(B)
ans =
   13.8299
   -2.5011
    8.9167
  -10.2455
L = QReig(B)
L =
   13.8299
  -10.2455
    8.9168
   -2.5011
```

□

۵-۴ قطری سازی ماتریس های مربعی

یکی از کاربردهای مهم مقادیر ویژه و بردارهای ویژه در قطری سازی ماتریس های مربعی است. اگر یک ماتریس $A_{n\times n}$ دارای n بردار ویژه مستقل خطی باشد، این ماتریس را با تبدیل همانندی می توان قطری نمود. ولی ماتریسی که مجموعه کاملی از n بردار ویژه مستقل خطی را نداشته باشد نمی تواند قطری گردد، چنین ماتریسی را باید به فرم کانونیکال جردن تبدیل کرد.

۵-۴-۱- ماتریس های همانند

ماتریس های $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$ را **همانند**[۱] گویند اگر یک ماتریس غیرمنفرد مانند T وجود داشته باشد، چنانکه عبارت زیر برقرار گردد،

$$T^{-1}AT = B \tag{۸-۵}$$

در اینصورت می گوییم ماتریس B با یک **تبدیل همانندی**[۲] از ماتریس A بدست آمده است و ماتریس غیرمنفرد T را **ماتریس تبدیل** گویند. همچنین ماتریس A را می توان از طریق ماتریس تبدیل T^{-1} بدست آورد،

$$A = TBT^{-1} \tag{۹-۵}$$

نکته۱: دترمینان دو ماتریس همانند $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$ یکسان می باشد،

$$|B| = |T^{-1}AT| = |T^{-1}|\ |A|\ |T| = \frac{1}{|T|}|A|\ |T| = |A|$$

لذا با اعمال یک تبدیل همانندی دترمینان ماتریس تغییر نمی کند.

نکته۲: معادله مشخصه یک ماتریس مانند $A_{n\times n}$ تحت تبدیل همانندی تغییر نمی یابد،

$$|\lambda I - A| = |\lambda I - B| = 0$$

این موضوع را می توان به این شکل نشان داد،

$$|\lambda I - B| = |\lambda I - T^{-1}AT| = |\lambda T^{-1}T - T^{-1}AT| = |T^{-1}(\lambda I - A)T|$$

$$= |T^{-1}|\ |\lambda I - A|\ |T| = \frac{1}{|T|}|\lambda I - A|\ |T| = |\lambda I - A|$$

لذا با اعمال یک تبدیل همانندی مقادیر ویژه ماتریس تغییر نمی کند.

---
[۱] Similar
[۲] Similarity Transformation

نکته۳: یک خاصیت از یک ماتریس را **تغییرناپذیر** گویند، اگر کلیه ماتریس های همانند ماتریس A، آن خاصیت را دارا باشند. این خواص عبارتند از اثر، دترمینان، رتبه، مقادیر ویژه، تعداد بردارهای مستقل خطی و فرم جردن یک ماتریس که تمامی این موارد تحت تبدیل های همانندی تغییرناپذیر هستند.

مثال۵-۱۲

ماتریس های A و B تحت ماتریس تبدیل T همانند هستند،

$$A=\begin{bmatrix}6 & -2\\ -4 & 3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}8 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix},\quad T=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}1 & \frac{-1}{2}\\ 0 & \frac{-1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & -2\\ -4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}=B$$

$$TBT^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{-1}{2}\\ 0 & \frac{-1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -2\\ -4 & 3\end{bmatrix}=A$$

حال برخی از خواص تغییر ناپذیر تحت تبدیل های همانندی را بررسی می نماییم،

$$\mathrm{trace}(A)=6+3=9 \qquad \mathrm{trace}(B)=8+1=9$$

$$\det(A)=18-8=10 \qquad \det(B)=8+2=10$$

$$\mathrm{rank}(A)=2 \qquad \mathrm{rank}(B)=2$$

$$\lambda_{1A}=7.7016, \lambda_{2A}=1.298 \quad \lambda_{1B}=7.7016, \lambda_{2B}=1.2984$$

□

۵-۴-۲- قطری سازی ماتریس ها با مقادیر ویژه متمایز و حقیقی

اگر مقادیر ویژه یک ماتریس $A_{n\times n}$ متمایز باشند، آنگاه دقیقاً n بردار ویژه مستقل خطی وجود دارد که می توان با استفاده از آنها یک ماتریس تبدیل T بدست آورد که می تواند ماتریس $A_{n\times n}$ را به یک ماتریس قطری تبدیل کند. اگر $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ بردارهای ویژه مستقل خطی برای ماتریس $A_{n\times n}$ باشند، در اینصورت ماتریس تبدیل T را بصورت زیر تعریف می کنیم،

$$A\mathbf{v}_i=\lambda_i\mathbf{v}_i \quad , \quad i=1,\ldots,n$$

$$A\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n\end{bmatrix}$$

$$AT=T\Lambda$$

$$T=[\mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n] \qquad (۱۰-۵)$$

به این ماتریس تبدیل T که ماتریس $A_{n\times n}$ را به فرم قطری تبدیل می کند، **ماتریس مُدال** [۱] گویند و فرم قطری سازی شده ماتریس $A_{n\times n}$ بصورت زیر نمایش داده می شود،

$$\Lambda=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix} \qquad (۱۱-۵)$$

λ_iها مقادیر ویژه ماتریس A هستند و به ماتریس Λ **صورت قطری** [۲] ماتریس A گفته می شود.

نکته۱: اگر ماتریس A بصورت $\Lambda=T^{-1}AT$ قطری سازی شده باشد،

۱- برای هر مقدار صحیح مثبت k داریم، $A^k=T\Lambda^kT^{-1}$.

۲- اگر کلیه عناصر قطری Λ غیر صفر باشند، در اینصورت A معکوس پذیر بوده و داریم،

$$A^{-1}=T\Lambda^{-1}T^{-1}$$

نکته۲: ماتریس $A_{n\times n}$ بصورت زیر را **فرم همبسته** [۳] می نامند،

$$A_C=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1}\end{bmatrix} \qquad (۱۲-۵)$$

برای یک ماتریس به فرم همبسته معادله مشخصه بصورت زیر قابل بیان است،

$$|\lambda I-A|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0 \qquad (۱۳-۵)$$

که ریشه های آن همان مقادیر ویژه ماتریس A هستند. همچنین بردار ویژه $\mathbf{v}_i$ متناظر با هر مقدار ویژه متمایز λ_i بشکل زیر بدست می آید،

$$\mathbf{v}_i=\begin{bmatrix}1 & \lambda_i & \lambda_i^2 & \cdots & \lambda_i^{n-1}\end{bmatrix}^T \qquad (۱۴-۵)$$

[۱] Modal Matrix
[۲] Diagonal Form
[۳] Companion Form

در این صورت ماتریس مُدال T به شکل زیر خواهد بود، که به آن **ماتریس وندرموند**[۱] گویند،

$$T=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \qquad (۱۵\text{-}۵)$$

فرم دیگری از ماتریس همبسته به شکل زیر می باشد،

$$A_C=\begin{bmatrix} -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۱۶\text{-}۵)$$

در اینصورت بردار ویژه $\mathbf{v}_i$ متناظر با هر مقدار ویژه متمایز λ_i بشکل زیر بدست می آید،

$$\mathbf{v}_i=\begin{bmatrix} \lambda_i^{n-1} & \lambda_i^{n-2} & \cdots & \lambda_i & 1 \end{bmatrix}^T \qquad (۱۷\text{-}۵)$$

و ماتریس وندرموند به صورت زیر محاسبه می شود،

$$T=\begin{bmatrix} \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & & \lambda_n^2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad (۱۸\text{-}۵)$$

می توان نشان داد که در ماتریس وندرموند، دترمینان ماتریس T بصورت زیر قابل محاسبه است،

$$|T|=\prod_{1<i<j<n}(\lambda_i-\lambda_j) \qquad (۱۹\text{-}۵)$$

[۱] Vandermonde

مثال۵-۱۳

فرم قطری سازی شده ماتریس A را بدست آورید، سپس مقدار A^{-1} و A^{20} را محاسبه نمایید.

$$A=\begin{bmatrix}4 & 0 & 1\\ -1 & -6 & -2\\ 5 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

معادله مشخصه ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I_3 - A| = \begin{vmatrix}\lambda-4 & 0 & -1\\ 1 & \lambda+6 & 2\\ -5 & 0 & \lambda\end{vmatrix} = 0 \quad \to \quad \lambda^3+2\lambda^2-29\lambda-30=0$$

با حل معادله مشخصه مقادیر ویژه بصورت زیر بدست می آیند،

$$\lambda^3+2\lambda^2-29\lambda-30=(\lambda+6)(\lambda+1)(\lambda-5)=0 \to \quad \lambda_1=-6, \lambda_2=-1, \lambda_3=5$$

لذا ماتریس A سه مقدار ویژه متمایز دارد. حال می توان سه بردار ویژه مستقل خطی متناظر با هر یک از مقادیر ویژه بدست آورد.

$$\lambda_1=-6 \to A\mathbf{v}_1=\lambda_1\mathbf{v}_1 \to \begin{bmatrix}4 & 0 & 1\\ -1 & -6 & -2\\ 5 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{21}\\ v_{31}\end{bmatrix}=-6\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{21}\\ v_{31}\end{bmatrix} \to \mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=-1 \to A\mathbf{v}_2=\lambda_2\mathbf{v}_2 \to \begin{bmatrix}4 & 0 & 1\\ -1 & -6 & -2\\ 5 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{12}\\ v_{22}\\ v_{32}\end{bmatrix}=-1\begin{bmatrix}v_{12}\\ v_{22}\\ v_{32}\end{bmatrix} \to \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}\frac{-1}{5}\\ \frac{-9}{25}\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\lambda_3=5 \to A\mathbf{v}_3=\lambda_3\mathbf{v}_3 \to \begin{bmatrix}4 & 0 & 1\\ -1 & -6 & -2\\ 5 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{13}\\ v_{23}\\ v_{33}\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}v_{13}\\ v_{23}\\ v_{33}\end{bmatrix} \to \mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}1\\ \frac{-3}{11}\\ 1\end{bmatrix}$$

توجه کنید، از آنجائیکه $A(\alpha\mathbf{v}_i)=\lambda_i(\alpha\mathbf{v}_i)$ می باشد، یعنی مضارب اسکالر یک بردار ویژه نیز خود یک بردار ویژه است، لذا می توان مقدار α را چنان انتخاب کرد که ماتریس مُدال T حدالامکان ساده باشد. لذا ماتریس مُدال T بصورت زیر بدست می آید،

$$T=[\mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \mid \mathbf{v}_3]=\begin{bmatrix}0 & \frac{-1}{5} & 1\\ 1 & \frac{-9}{25} & \frac{-3}{11}\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

حال می توان ماتریس قطری سازی شده را بدست آورد.

$$\Lambda = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \frac{-4}{55} & 1 & \frac{19}{55} \\ \frac{-5}{6} & 0 & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & -6 & -2 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{5} & 1 \\ 1 & \frac{-9}{25} & \frac{-3}{11} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

همانطور که دیده می شود عناصر قطری ماتریس همان مقادیر ویژه ماتریس A هستند.

$$A^{-1} = T\Lambda^{-1}T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{5} & 1 \\ 1 & \frac{-9}{25} & \frac{-3}{11} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-4}{55} & 1 & \frac{19}{55} \\ \frac{-5}{6} & 0 & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{6} & \frac{7}{30} \\ 1 & 0 & \frac{-4}{5} \end{bmatrix}$$

$$A^{20} = T\Lambda^{20}T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{5} & 1 \\ 1 & \frac{-9}{25} & \frac{-3}{11} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-6)^{20} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{20} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-4}{55} & 1 & \frac{19}{55} \\ \frac{-5}{6} & 0 & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

با استفاده از برنامه myeig.m می توان ماتریس مُدال را همانند محاسبات دستی بدست آورد و با استفاده از آن فرم قطری سازی شده ماتریس را بدست آورد،

```
A =[4 0 1;-1 -6 -2;5 0 0];
[V,l]= myeig(A);
T = V
T =
         0    1.0000   -0.2000
    1.0000   -0.2727   -0.3600
         0    1.0000    1.0000
L = T \ A * T
L =
   -6.0000         0         0
         0    5.0000   -0.0000
         0         0   -1.0000
```

البته ماتریس V در دستور [V,D]=eig(A) نیز همان ماتریس مُدال را می دهد، لیکن ستون های ماتریس به فرم یکامتعامد هستند.

□

مثال۵-۱۴

فرم قطری سازی شده و ماتریس مدال ماتریس A را بدست آورید،

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 10 & -2 \\ 10 & 5 & 8 \\ -2 & 8 & 11 \end{bmatrix}$$

ابتدا مقادیر ویژه ماتریس A را بدست می آوریم،

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -10 & 2 \\ -10 & \lambda-5 & -8 \\ 2 & -8 & \lambda-11 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-18)(\lambda-9)(\lambda+9)=0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1=18, \lambda_2=9, \lambda_3=-9$$

از آنجاییکه سه مقدار ویژه حقیقی و متمایز دارد می توان فرم قطری کامل را بدست آورد. فرم قطری کامل به صورت زیر است،

$$\Lambda=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

حال ماتریس تبدیل همانندی را می یابیم که رابطه $\Lambda=T^{-1}AT$ را برآورده سازد. برای این منظور باید بردارهای ویژه نظیر هر یک از مقادیر ویژه را بدست آوریم،

$$\mathrm{Adj}(\lambda I-A)=\mathrm{Adj}\begin{bmatrix} \lambda-2 & -10 & 2 \\ -10 & \lambda-5 & -8 \\ 2 & -8 & \lambda-11 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \lambda^2-16\lambda-9 & 10\lambda-126 & 90-2\lambda \\ 10\lambda-126 & \lambda^2-13\lambda+18 & 8\lambda-36 \\ 90-2\lambda & 8\lambda-36 & \lambda^2-7\lambda-90 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1=18 \quad \rightarrow \quad \mathrm{Adj}(18I\text{-}A)=\begin{bmatrix} 27 & 54 & 54 \\ 54 & 108 & 108 \\ 54 & 108 & 108 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{v}_1=\begin{bmatrix} 27 \\ 54 \\ 54 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=9 \quad \rightarrow \quad \mathrm{Adj}(9I\text{-}A)=\begin{bmatrix} -72 & -36 & 72 \\ -36 & -18 & 36 \\ 72 & 36 & -72 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix} -72 \\ -36 \\ 72 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = -9 \quad \rightarrow \quad \mathrm{Adj}(-9I\text{-}A) = \begin{bmatrix} 216 & -216 & 108 \\ -216 & 216 & -108 \\ 108 & -108 & 54 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 216 \\ -216 \\ 108 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

دقت کنید برای ایجاد ماتریس مُدال در انتخاب بردار ویژه باید ستون های همسان را در ماتریس الحاقی انتخاب نمود . لذا ماتریس مُدال T به شکل زیر خواهد بود،

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

با استفاده از برنامه myeig.m داریم،

```
A =[2 10 -2;10 5 8;-2 8 11];
[V,l]= myeig(A);
T = V
T =
    0.5000   -1.0000    1.0000
    1.0000   -0.5000   -1.0000
    1.0000    1.0000    0.5000
L = T\A*T
L =
    18      0      0
     0      9      0
     0      0     -9
```

□

مثال۵-۱۵

فرم قطری سازی شده ماتریس همبسته A_C را بدست آورید،

$$A_C = \begin{bmatrix} -9 & -26 & -24 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

معادله مشخصه ماتریس A_C بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+9 & 26 & 24 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \to \quad \lambda^3 + 24\lambda^2 + 26\lambda + 9 = 0$$

مقادیر ویژه بصورت زیر بدست می آیند،

$$\lambda^3 + 24\lambda^2 + 26\lambda + 9 = (\lambda+4)(\lambda+3)(\lambda+2) = 0 \to \quad \lambda_1 = -4, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = -2$$

از آنجائیکه ماتریس A_C همبسته بوده و سه مقدار ویژه متمایز دارد، لذا می توان برای قطری سازی آن ماتریس وندرموند را بدست آورد،

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 9 & 4 \\ -4 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

فرم قطری ماتریس A_C به شکل زیر می باشد،

$$\Lambda = T^{-1} A_C T$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0.5 & 2.5 & 3 \\ -1 & -6 & -8 \\ 0.5 & 3.5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 & -26 & -24 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 9 & 4 \\ -4 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

با استفاده از برنامه myeig.m ماتریس مُدال بدست می آید،

```
A =[-9 -26 -24;1 0 0;0 1 0];
[V,l]= myeig(A);
T = V
T =
   16.0000    9.0000    4.0000
   -4.0000   -3.0000   -2.0000
    1.0000    1.0000    1.0000
```

همچنین فرم قطری سازی شده نیز قابل محاسبه است،

```
L = T\A*T
L =
   -4.0000   -0.0000   -0.0000
    0.0000   -3.0000    0.0000
   -0.0000   -0.0000   -2.0000
```

□

۵-۴-۳- قطری سازی ماتریس ها با مقادیر ویژه متمایز مختلط

اگر ماتریس $A_{n\times n}$ دارای مقادیر ویژه مختلط غیر تکراری باشد می توان روش گفته شده برای مقادیر ویژه متمایز حقیقی را اجرا نمود. لیکن در اینصورت ماتریس تبدیل T و ماتریس قطری Λ شامل عناصری با اعداد مختلط خواهد بود که ممکن است در کاربردهای بعدی این ماتریس مشکل ساز گردد. برای اجتناب از حضور اعداد مختلط می توان ماتریس تبدیل T را بصورتی تغییر داد که فقط اعداد حقیقی در آن ظاهر شوند.

فرض کنید مقادیر ویژه ماتریس $A_{n\times n}$ بصورت زیر باشند،

$$\underbrace{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \lambda_{m+1}}_{complex\ conjugate}, \underbrace{\lambda_{m+2}, \ldots, \lambda_n}_{real}$$

که در آن $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \lambda_{m+1}$ مقادیر ویژه مختلط مزدوج بفرم $\sigma_m \pm j\omega_m$ و $\lambda_{m+2}, \ldots, \lambda_n$ مقادیر ویژه حقیقی باشند. حال بردارهای ویژه متناظر با این مقادیر ویژه را بصورت زیر در نظر بگیرید،

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_{m+2}, \ldots, \mathbf{v}_n$$

یک ماتریس تبدیل T با عناصر حقیقی را بشکل زیر می توان تعریف کرد،

$$\mathrm{T} = [\mathrm{Re}\{\mathbf{v}_1\} \mid \mathrm{Im}\{\mathbf{v}_1\} \mid \mathrm{Re}\{\mathbf{v}_3\} \mid \mathrm{Im}\{\mathbf{v}_3\} \mid \cdots \mid \mathrm{Re}\{\mathbf{v}_m\} \mid \mathrm{Im}\{\mathbf{v}_m\} \mid \mathbf{v}_{m+2} \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n] \quad (۲۰\text{-}۵)$$

با استفاده از این ماتریس تبدیل ماتریس A به فرم **قطری بلوکی**[۱] زیر تبدیل می گردد، در این حالت ماتریس قطری کامل نخواهد بود.

$$\Lambda = T^{-1}AT$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \omega_1 \\ -\omega_1 & \sigma_1 \end{bmatrix} & & & & & & \\ & \begin{bmatrix} \sigma_3 & \omega_3 \\ -\omega_3 & \sigma_3 \end{bmatrix} & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \begin{bmatrix} \sigma_m & \omega_m \\ -\omega_m & \sigma_m \end{bmatrix} & & & \\ & 0 & & & \lambda_{m+2} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (۲۱\text{-}۵)$$

مثال۵-۱۶

[۱] Block-Diagonal

اگر مقادیر ویژه ماتریس A بصورت زیر باشد،

$$\lambda_{1,2}=1\pm 3j,\qquad \lambda_{3,4}=-2\pm 5j,\qquad \lambda_5=-4$$

فرم قطری بلوکی شده این ماتریس بصورت زیر خواهد بود،

$$\begin{bmatrix}1+3j&0&0&0&0\\0&1-3j&0&0&0\\0&0&-2+5j&0&0\\0&0&0&-2-5j&0\\0&0&0&0&-4\end{bmatrix}\rightarrow\quad \Lambda=\left[\begin{array}{cc|cc|c}1&3&0&0&0\\-3&1&0&0&0\\\hline 0&0&-2&5&0\\0&0&-5&-2&0\\\hline 0&0&0&0&-4\end{array}\right]$$

به جای قطری کامل با عناصر مختلط به فرم قطری بلوکی تبدیل می شود.

□

مثال۵-۱۷

فرم قطری سازی شده ماتریس A و ماتریس تبدیل را بدست آورید،

$$A=\begin{bmatrix}-1&2&-1\\0&-2&0\\1&0&-2\end{bmatrix}$$

معادله مشخصه ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I_3-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1&2&1\\0&\lambda+2&0\\-1&0&\lambda+2\end{vmatrix}=0\quad\rightarrow\quad \lambda^3+5\lambda^2+9\lambda+6=0$$

پس از حل معادله مشخصه مقادیر ویژه بصورت زیر بدست می آیند،

$$\lambda^3+5\lambda^2+9\lambda+6=(\lambda+2)(\lambda^2+3\lambda+3)=0\qquad\rightarrow\qquad \lambda_1=-2,\lambda_{2,3}=\tfrac{-3}{2}\pm j\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین ماتریس A یک مقدار ویژه حقیقی و دو مقدار ویژه مختلط مزدوج دارد. بردارهای ویژه متناظر با این مقادیر ویژه را بدست می آوریم،

$$A\mathbf{v}_i=\lambda_i\mathbf{v}_i$$

$$\lambda_1=-2\rightarrow\begin{bmatrix}-1&2&-1\\0&-2&0\\1&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\v_{21}\\v_{31}\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}v_{11}\\v_{21}\\v_{31}\end{bmatrix}\rightarrow\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=\tfrac{-3}{2}+j\tfrac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow\begin{bmatrix}-1&2&-1\\0&-2&0\\1&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{12}\\v_{22}\\v_{32}\end{bmatrix}=(\tfrac{-3}{2}+j\tfrac{\sqrt{3}}{2})\begin{bmatrix}v_{12}\\v_{22}\\v_{32}\end{bmatrix}\rightarrow\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\\tfrac{1}{2}-j\tfrac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$$

$$\lambda_3=\tfrac{-3}{2}-j\tfrac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow\begin{bmatrix}-1&2&-1\\0&-2&0\\1&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{13}\\v_{23}\\v_{33}\end{bmatrix}=(\tfrac{-3}{2}-j\tfrac{\sqrt{3}}{2})\begin{bmatrix}v_{13}\\v_{23}\\v_{33}\end{bmatrix}\rightarrow\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\\tfrac{1}{2}+j\tfrac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$$

لذا ماتریس تبدیل T بصورت زیر بدست می آید،

$$\mathrm{T}=[\mathbf{v}_1\,|\,\mathrm{Re}\{\mathbf{v}_2\}\,|\,\mathrm{Im}\{\mathbf{v}_2\}]=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\2&\tfrac{1}{2}&\tfrac{-\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$$

حال ماتریس قطری- بلوکی شده Λ را بدست می آوریم،

$$\Lambda=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\\tfrac{1}{\sqrt{3}}&\tfrac{4}{\sqrt{3}}&\tfrac{-2}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&2&-1\\0&-2&0\\1&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\2&\tfrac{1}{2}&\tfrac{-\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c:cc}-2&0&0\\\hdashline 0&\tfrac{-3}{2}&\tfrac{\sqrt{3}}{2}\\0&\tfrac{-\sqrt{3}}{2}&\tfrac{-3}{2}\end{array}\right]$$

برای بدست آوردن ماتریس تبدیل در این حالت اگر از دستور [V,D]=eig(A) در نرم افزار MATLAB و یا از برنامه myeig.m استفاده نماییم، از آنجاییکه بردارهای ویژه بطور مختلط محاسبه می شوند، لذا ماتریس تبدیل بدست آمده نیز فرم مختلط خواهد داشت. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه مختلط بصورت زیر بدست می آید،

```
A =[-1 2 -1;0 -2 0;1 0 -2];
[V,l]= myeig(A)
V =
   0.5000 + 0.8660i   0.5000 - 0.8660i        0
   0.0000             0.0000             0.5000
   1.0000             1.0000             1.0000
l =
  -1.5000 + 0.8660i
  -1.5000 - 0.8660i
  -2.0000
```

لذا برای بدست آوردن ماتریس تبدیل به فرم حقیقی و فرم قطری بلوکی ماتریس مورد نظر برنامه را بصورت زیر تغییر می دهیم،

```
%Calculate modal matrix and block diagonal form for complex eigenvalues
function [T,L] = complexeig(A)
l = eig(A);
n = size(l,1);
T = zeros(size(A));
f = 1;
for i = 1:n
   T(:,i) = null(l(i)*eye(size(A))- A,'r');
   if isreal(T(:,i)) == 0 & f == 1
      T(:,i) = real(T(:,i));
      f = 0;
   elseif isreal(T(:,i)) == 0 & f == 0
      T(:,i) = -imag(T(:,i));
      f = 1;
   end
end
L = T \ A * T;
```

اجرای برنامه بصورت زیر است،

```
A =[-1 2 -1;0 -2 0;1 0 -2];
[T,L]= complexeig(A)
T =
    0.5000   -0.8660         0
    0.0000         0    0.5000
    1.0000         0    1.0000
L =
   -1.5000    0.8660         0
   -0.8660   -1.5000   -0.0000
   -0.0000   -0.0000   -2.0000
```

با دقت مشاهده می شود که ماتریس تبدیل عناصر حقیقی دارند و ماتریس قطری بلوکی حاصل نیز با فرم گفت شده مطابقت دارد.

□

مثال۵-۱۸

فرم قطری سازی شده ماتریس A و ماتریس تبدیل را بدست آورید،

$$A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & -4 & 8\end{bmatrix}$$

ابتدا مقادیر ویژه، بردارهای ویژه و سپس فرم قطری سازی شده ماتریس A را بدست می آوریم،

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & -2 & -1\\ -1 & \lambda-2 & -1\\ 1 & 4 & \lambda-8\end{vmatrix}=\lambda^3-14\lambda^2+59\lambda-60=0$$

$$\lambda_1=1.4843, \lambda_{2,3}=6.2578\pm j1.1235$$

ماتریس یک مقدار ویژه حقیقی و دو مقدار ویژه مختلط مزدوج دارد، باید به فرم قطری بلوکی تبدیل گردد. فرم قطری بلوکی به صورت زیر است،

$$\Lambda=\left[\begin{array}{c|cc}\lambda_1 & 0 & 0\\ \hline 0 & \sigma_2 & \omega_2\\ 0 & -\omega_2 & \sigma_2\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|cc}1.4843 & 0 & 0\\ \hline 0 & 6.2578 & 1.1235\\ 0 & -1.1235 & 6.2578\end{array}\right]$$

حال ماتریس تبدیل همانندی را می یابیم که رابطه $\Lambda=T^{-1}AT$ را برآورده سازد. برای این منظور بردارهای ویژه نظیر هر یک از مقادیر ویژه را بدست می آوریم،

$$A\mathbf{v}_i=\lambda_i\mathbf{v}_i\rightarrow\begin{bmatrix}\lambda-4 & -2 & -1\\ -1 & \lambda-2 & -1\\ 1 & 4 & \lambda-8\end{bmatrix}\mathbf{v}_i=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

در اینجا از دستور [V,D]=eig(A) نرم افزار MATLAB برای محاسبه بردارهای ویژه استفاده شده است،

$$\lambda_1=1.4843 \quad\rightarrow\quad \mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}-0.6642\\ 0.6782\\ 0.3144\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=6.2578+j1.1235 \quad\rightarrow\quad \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}0.3757+j0.3678\\ 0.1706+j0.2283\\ 0.0940+j0.7959\end{bmatrix}$$

$$\lambda_3=6.2578-j1.1235 \quad\rightarrow\quad \mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}0.3757-j0.3678\\ 0.1706-j0.2283\\ 0.0940-j0.7959\end{bmatrix}$$

لذا ماتریس تبدیل T به شکل زیر خواهد بود،

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathrm{Re}\{\mathbf{v}_2\} & \mathrm{Im}\{\mathbf{v}_2\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6642 & 0.3757 & 0.3678 \\ 0.6782 & 0.1706 & 0.2283 \\ 0.3144 & 0.0940 & 0.7959 \end{bmatrix}$$

با استفاده از برنامه complexeig.m می توان نتایج را مقایسه نمود،

```
A =[4 2 1;1 2 1;-1 -4 8];
[T,L]= complexeig(A)
T =
   -2.1124    0.5107    0.4117
    2.1570    0.3079    0.1779
    1.0000    1.0000         0
L =
    1.4843    0.0000    0.0000
   -0.0000    6.2578    1.1235
   -0.0000   -1.1235    6.2578
```

□

۵-۴-۴- قطری سازی ماتریس ها با مقادیر ویژه تکراری

اگر ماتریسی مقادیر ویژه تکراری داشته باشد ممکن است که مجموعه کاملی از n بردار ویژه مستقل خطی را نداشته باشد، لذا در اینصورت نمی توان آن را با روشهای مطرح شده ماتریس را قطری سازی کرد و برای کمبود بردارهای ویژه باید جایگزینی بدست آورد.

فرض کنید ماتریس $A_{n\times n}$ یک مقدار ویژه مکرر مرتبه k مانند λ_1 و تعدادی مقادیر ویژه متمایز و متفاوت از λ_1 بصورت $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \ldots, \lambda_n$ داشته باشد.

$$\underbrace{\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{k}, \lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \ldots, \lambda_n$$

در اینصورت ماتریس $A_{n\times n}$ حداقل یک و حداکثر k بردار ویژه مستقل خطی متناظر با مقدار ویژه تکراری λ_1 خواهد داشت. اگر $\mathrm{rank}(\lambda_1 I - A) = n - \alpha$ باشد، تعداد α بردار ویژه مستقل خطی متناظر با این مقدار ویژه مکرر وجود دارد و باید تعداد $k-\alpha$ بردار دیگر حساب شوند. این بردار های اضافی باید چنان باشند که هم به این مقدار ویژه مربوط بوده و هم نسبت به بردارهای ویژه دیگر مستقل خطی باشد، به چنین بردارهایی **بردارهای ویژه تعمیم یافته**[۱] گویند .

[۱] Generalized Eigenvectors

فرض کنید تعداد α بردار ویژه مستقل خطی $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_\alpha$ باشند، آنها را می توان بصورت زیر بدست آورد،

$$\begin{aligned}(A-\lambda_1 I_n)\mathbf{v}_1 &= \mathbf{0}\\ (A-\lambda_1 I_n)\mathbf{v}_2 &= \mathbf{0}\\ &\vdots\\ (A-\lambda_1 I_n)\mathbf{v}_\alpha &= \mathbf{0}\end{aligned} \qquad (۲۲-۵)$$

حال می توان برای هریک از بردارهای ویژه تعدادی بردار ویژه تعمیم یافته بدست آورد. بردار ویژه تعمیم یافته متناظر با یک بردار ویژه $\mathbf{v}_i$ بصورت زیر تعریف می گردد،

$$A\varphi_i = \lambda_i\varphi_i + \mathbf{v}_i \rightarrow (A-\lambda_i I)\varphi_i = \mathbf{v}_i \qquad (۲۳-۵)$$

برای بدست آوردن بردارهای ویژه تعمیم یافته دیگر به همین ترتیب عمل می کنیم.

$$(A-\lambda_i I)\varphi_{i+1} = \varphi_i \qquad (۲۴-۵)$$

لذا بردارهای ویژه تعمیم یافته به شکل زیر محاسبه می گردند.

- برای بردار ویژه $\mathbf{v}_1$:

$$\begin{aligned}(A-\lambda_1 I_n)\varphi_1 &= \mathbf{v}_1\\ (A-\lambda_1 I_n)\varphi_2 &= \varphi_1\\ &\vdots\\ (A-\lambda_1 I_n)\varphi_{P_1-1} &= \varphi_{P_1-2}\end{aligned}$$

- برای بردار ویژه $\mathbf{v}_2$:

$$\begin{aligned}(A-\lambda_1 I_n)\xi_1 &= \mathbf{v}_2\\ (A-\lambda_1 I_n)\xi_2 &= \xi_1\\ &\vdots\\ (A-\lambda_1 I_n)\xi_{P_2-1} &= \xi_{P_2-2}\end{aligned}$$

و نهایتاً برای بردار ویژه $\mathbf{v}_\alpha$:

$$\begin{aligned}(A-\lambda_1 I_n)\eta_1 &= \mathbf{v}_\alpha\\ (A-\lambda_1 I_n)\eta_2 &= \eta_1\\ &\vdots\\ (A-\lambda_1 I_n)\eta_{P_\alpha-1} &= \eta_{P_\alpha-2}\end{aligned}$$

با استفاده از این بردارها ماتریس تبدیل T بصورت زیر بدست می آید،

$$T=[\mathbf{v}_1\,|\,\varphi_1\,|\,\varphi_2\,|\cdots|\,\varphi_{P_1-1}\,|\,\mathbf{v}_2\,|\,\xi_1\,|\,\xi_2\,|\cdots|\,\xi_{P_2-1}\,|\cdots|\,\mathbf{v}_\alpha\,|\,\eta_1\,|\,\eta_2\,|\cdots|\,\eta_{P_\alpha-1}\,|\,\mathbf{v}_{k+1}\,|\,\mathbf{v}_{k+2}\,|\cdots|\,\mathbf{v}_n] \qquad (۲۵-۵)$$

در هنگام چینش بردارهای ویژه تعمیم یافته باید دقت کرد که آنها به ترتیب پس از بردار ویژه مربوطه قرار گیرند. با رعایت این نکته ماتری $\Lambda = T^{-1}AT$ بدست آمده فرم خاصی پیدا می کند که به آن

فرم کانونیکال جردن[1] می گویند. در این فرم هم ماتریس Λ به شکل قطری کامل نیست بلکه بلوکی است که به آنها **بلوک های جردن** می گویند. صورت کلی یک ماتریس کانونیکال جردن به شکل زیر است،

$$J_{k\times k}=\begin{bmatrix} J_{P1} & & & & & & \\ & J_{P2} & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & J_{P\alpha} & & & \\ & & & & \lambda_{k+1} & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad (۲۶\text{-}۵)$$

که هر یک از J_{P_i}ها خود ماتریس های $P_i\times P_i$ هستند، که به آنها **بلوک های جردن** گفته می شود و بصورت زیر تعریف می گردند،

$$J_{P_i}=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}_{P_i\times P_i} \qquad (۲۷\text{-}۵)$$

خواص بلوکهای جردن به شرح زیر است،

۱- کلیه عناصر روی قطر اصلی ماتریس مقادیر ویژه ماتریس A هستند.

۲- کلیه عناصر زیر قطر اصلی صفر هستند.

۳- عناصر بلافاصله بالای قطر اصلی یک یا صفر هستند.

۴- تعداد بلوک های جردن متناظر با یک مقدار ویژه داده شده مانند λ_i، برابر با تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی متناظر با آن مقدار ویژه است.

قضیه: ثابت کنید بردارهای ویژه تعمیم یافته با تعریف زیر استقلال خطی دارند.

$$\begin{aligned} A\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1 + \mathbf{v}_1 \rightarrow (A-\lambda_1 I)\varphi_1 &= \mathbf{v}_1 \\ (A-\lambda_1 I)\varphi_2 &= \varphi_1 \\ &\vdots \\ (A-\lambda_1 I)\varphi_{k-1} &= \varphi_{k-2} \end{aligned}$$

[1] Jordan Canonical Form

اثبات: فرض کنید λ_1 یک مقدار ویژه تکراری مرتبه k و $\mathbf{v}_1$ بردار ویژه نظیر آن و $\varphi_1,\ldots,\varphi_{k-1}$ بردارهای ویژه تعمیم یافته نظیر باشند. طبق تعریف می توان نوشت،

$$\left.\begin{array}{l}(A-\lambda_1 I)\varphi_1 = \mathbf{v}_1\\ (A-\lambda_1 I)\varphi_2 = \varphi_1\\ \vdots \\ (A-\lambda_1 I)\varphi_{k-1} = \varphi_{k-2}\end{array}\right\}\rightarrow \quad (A-\lambda_1 I)^{k-1}\varphi_{k-1} = \mathbf{v}_1 \qquad (۵\text{-}۲۸)$$

اگر بردارهای $\varphi_1,\ldots,\varphi_{k-1}$ و $\mathbf{v}_1$ وابسته خطی باشند، ضرایب $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ غیرصفری وجود دارد که رابطه زیر را برآورده کند.

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\varphi_1 + \alpha_3\varphi + \cdots + \alpha_k\varphi_{k-1} = \mathbf{0} \qquad (۵\text{-}۲۹)$$

طرفین رابطه(۵-۲۹) را در $(A-\lambda_1 I)^{k-1}$ ضرب می کنیم،

$$\alpha_1(A-\lambda_1 I)^{k-1}\mathbf{v}_1 + \alpha_2(A-\lambda_1 I)^{k-1}\varphi_1 + \alpha_3(A-\lambda_1 I)^{k-1}\varphi_2 + \cdots + \alpha_k(A-\lambda_1 I)^{k-1}\varphi_{k-1} = \mathbf{0} \qquad (۵\text{-}۳۰)$$

در رابطه(۵-۳۰) جمله $(A-\lambda_1 I)^{k-1}\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ و جمله $(A-\lambda_1 I)^{k-1}\varphi_{k-1} = \mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ است و سایر جملات را می توان بصورت زیر خلاصه کرد،

$$\begin{aligned}(A-\lambda_1 I)^{k-1}\varphi_i &= (A-\lambda_1 I)^{k-1-i}(A-\lambda_1 I)^i\varphi_i = (A-\lambda_1 I)^{k-1-i}\mathbf{v}_1\\ &= (A-\lambda_1 I)^{k-2-i}(A-\lambda_1 I)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}\end{aligned}$$

لذا در رابطه(۵-۳۰) باید $\alpha_k = 0$ باشد.

حال اگر طرفین رابطه(۵-۲۹) را در $(A-\lambda_1 I)^{k-2}$ ضرب کنیم،

$$\alpha_1(A-\lambda_1 I)^{k-2}\mathbf{v}_1 + \alpha_2(A-\lambda_1 I)^{k-2}\varphi_1 + \cdots + \alpha_{k-1}(A-\lambda_1 I)^{k-2}\varphi_{k-2} + \alpha_k(A-\lambda_1 I)^{k-2}\varphi_{k-1} = \mathbf{0} \qquad (۵\text{-}۳۱)$$

در رابطه(۵-۳۱) جمله $(A-\lambda_1 I)^{k-2}\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ و جمله $(A-\lambda_1 I)^{k-2}\varphi_{k-2} = \mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ است و سایر جملات را می توان بصورت زیر خلاصه کرد،

$$\begin{aligned}(A-\lambda_1 I)^{k-2}\varphi_i &= (A-\lambda_1 I)^{k-2-i}(A-\lambda_1 I)^i\varphi_i = (A-\lambda_1 I)^{k-2-i}\mathbf{v}_1\\ &= (A-\lambda_1 I)^{k-3-i}(A-\lambda_1 I)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}\end{aligned}$$

لذا در رابطه(۵-۳۱) باید $\alpha_{k-1} = 0$ باشد.

به همین ترتیب می توان نشان داد که تمامی ضرایب $\alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_k = 0$ است. از آنجاییکه $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ می باشد، باید $\alpha_1 = 0$ گردد. لذا بردارهای $\varphi_1,\ldots,\varphi_{k-1}$ و $\mathbf{v}_1$ مستقل خطی هستند.
□

مثال۵-۱۹

فرم کانونیکال جردن ماتریس های زیر را بیابید.

الف) $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$

ابتدا مقادیر ویژه ماتریس A را بدست می آوریم،

$$|\lambda I_3-A|=0\rightarrow\begin{vmatrix}\lambda&-1&0\\1&\lambda-2&0\\-1&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3=0\rightarrow\lambda_{1,2,3}=1$$

لذا ماتریس A یک مقدار ویژه مکرر مرتبه سه دارد $(k=3)$. حال تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی متناسب با این مقدار ویژه را تعیین می نماییم، برای این منظور داریم،

$$\text{rank}(\lambda_1 I_3-A)=\text{rank}\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}=2$$

لذا تنها یک بردار ویژه مستقل خطی $\mathbf{v}_1$ متناظر با مقدار ویژه $\lambda_1=1$ وجود دارد. پس فقط یک بلوک جردن وجود دارد، که مرتبه آن سه می باشد. برای بدست آوردن بردارهای ویژه دو روش را می توان پیش گرفت،

<u>روش اول: استفاده از تعریف بردار ویژه،</u>

ابتدا بردار ویژه $\mathbf{v}_1$ را بدست می آوریم،

$$(\lambda_1 I-A)\mathbf{v}_1=\mathbf{0}\rightarrow\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&-1&0\\-1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\mathbf{0}\rightarrow\begin{cases}x_1-x_2=0\\-x_1=0\end{cases}\rightarrow\quad\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

برای تشکیل ماتریس تبدیل باید دو بردار ویژه تعمیم یافته دیگر نیز بیابیم. برای این منظور از تعریف بردارهای تعمیم یافته استفاده می کنیم،

$$(A-\lambda_1 I)\varphi_1=\mathbf{v}_1\rightarrow\begin{bmatrix}-1&1&0\\-1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}-x_4+x_5=0\\x_4=1\end{cases}\rightarrow\quad\varphi_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$(A-\lambda_1 I)\varphi_2=\varphi_1\rightarrow\begin{bmatrix}-1&1&0\\-1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_7\\x_8\\x_9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}-x_7+x_8=1\\x_7=0\end{cases}\rightarrow\quad\varphi_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

روش دوم: استفاده از ماتریس الحاقی،

$$\mathrm{Adj}(\lambda I - A) = \mathrm{Adj}\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 1 & \lambda-2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^2-3\lambda+2 & \lambda-1 & 0 \\ 1-\lambda & \lambda^2-\lambda & 0 \\ \lambda-2 & 1 & \lambda^2-2\lambda+1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \rightarrow \quad \mathrm{Adj}(1I - A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

برای بدست آوردن دو بردار ویژه تعمیم یافته دیگر از مشتقات اول و دوم ماتریس الحاقی استفاده می کنیم،

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\mathrm{Adj}(\lambda I - A)\right] = \begin{bmatrix} 2\lambda-3 & 1 & 0 \\ -1 & 2\lambda-1 & 0 \\ 1 & 0 & 2\lambda-2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{d\lambda}\left[\mathrm{Adj}(1I - A)\right] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}[Adj(\lambda I - A)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \varphi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

لذا ماتریس تبدیل T بصورت زیر بدست می آید،

$$T = [v_1 \mid \varphi_1 \mid \varphi_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حال فرم کانونیکال جردن ماتریس A را بدست می آوریم،

$$\Lambda = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

همانطور که پیشتر گفته شد فرم کانونیکال جردن فقط یک بلوک جردن با مرتبه سه دارد.

در نرم افزار MATLAB از دستور $\mathrm{jordan(A)}$ و $\mathrm{[T,J] = jordan(A)}$ می توان برای بدست آوردن فرم کانونیکال جردن ماتریس A استفاده نمود. دستور $\mathrm{jordan(A)}$ فقط ماتریس کانونیکال جردن حاصل را ارائه می دهد و در دستور $\mathrm{[T,J] = jordan(A)}$ ماتریس T ماتریس تبدیل مربوطه و J ماتریس فرم کانونیکال جردن ماتریس A است. این دستور برای ریشه های غیر تکراری و مختلط نیز قابل اعمال است و فرم قطری کامل را ارائه می دهد.
به اجرای دستور $\mathrm{[T,J] = jordan(A)}$ توجه نمایید،

```
A =[0 1 0;-1 2 0;1 0 1];
[T,J]= jordan(A)
T =
      0    -1     1
      0    -1     0
     -1     1     0
J =
      1     1     0
      0     1     1
      0     0     1
```

ب) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ -0.5 & -3 & 1 & 0.5 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ابتدا مقادیر ویژه، بردارهای ویژه و سپس فرم قطری سازی شده ماتریس A را بدست می آوریم،

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \lambda-1 & 3 & 0 \\ 0.5 & 3 & \lambda-1 & -0.5 \\ 3 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$
$$= \lambda^4 - 4\lambda^3 - 12\lambda^2 + 32\lambda + 64 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = 4, \lambda_{3,4} = -2$$

ماتریس دو مقدار ویژه حقیقی تکراری مرتبه دو دارد، باید به فرم قطری بلوکی جردن تبدیل گردد. حال باید بدانیم برای هر یک از مقادیر ویژه تکراری چند تا بلوک جردن داریم،

$$\nu(\lambda_1 I - A) = n - \mathrm{rank}(\lambda_1 I - A) = 4 - \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0.5 & 3 & 3 & -0.5 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 4 - 3 = 1$$

برای بردار $\lambda_{1,2} = 4$ یک بردار ویژه مستقل خطی داریم، پس یک بلوک جردن برای $\lambda_{1,2} = 4$ خواهیم داشت.

$$\nu(\lambda_3 I - A) = n - \mathrm{rank}(\lambda_3 I - A) = 4 - \mathrm{rank}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0.5 & 3 & -3 & -0.5 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = 4 - 2 = 2$$

برای بردار $\lambda_{3,4} = -2$ دو بردار ویژه مستقل خطی داریم، پس دو بلوک جردن خواهیم داشت.

فرم قطری بلوکی جردن به صورت زیر است،

$$\Lambda = \left[\begin{array}{cc:c:c} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc:c:c} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -2 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

حال ماتریس تبدیل همانندی را می یابیم که رابطه $\Lambda = T^{-1}AT$ را برآورده سازد.

$$A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \to \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \lambda - 1 & 3 & 0 \\ 0.5 & 3 & \lambda - 1 & -0.5 \\ 3 & 0 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ابتدا دو بردار ویژه مستقل خطی $\mathbf{v}_1$ را برای $\lambda_{1,2} = 4$ بدست می آوریم،

$$\lambda_{1,2} = 4 \to \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0.5 & 3 & 3 & -0.5 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}3x_1+3x_4=0\\3x_2+3x_3=0\\0.5x_1+3x_2+3x_3-0.5x_4=0\end{cases}\quad\rightarrow\quad \mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

سپس بردار ویژه تعمیم یافته φ_1 را محاسبه می کنیم،

$$(A-\lambda_1 I)\varphi_1=\mathbf{v}_1\rightarrow\begin{bmatrix}-3&0&0&-3\\0&-3&-3&0\\-0.5&-3&-3&0.5\\-3&0&0&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_5\\x_6\\x_7\\x_8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}-3x_5-3x_8=0\\-3x_6-3x_7=1\\-0.5x_5-3x_6-3x_7+0.5x_8=-1\end{cases}\rightarrow\varphi_1=\begin{bmatrix}2\\0\\\frac{-1}{3}\\-2\end{bmatrix}$$

حال دو بردار ویژه مستقل خطی $\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4$ را برای $\lambda_{3,4}=-2$ محاسبه می کنیم،

$$\lambda_{3,4}=-2\rightarrow\begin{bmatrix}-3&0&0&3\\0&-3&3&0\\0.5&3&-3&-0.5\\3&0&0&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_9\\x_{10}\\x_{11}\\x_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}-3x_9+3x_{12}=0\\-3x_{10}+3x_{11}=0\\0.5x_9+3x_{10}-3x_{11}-0.5x_{12}=0\end{cases}\rightarrow\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix},\mathbf{v}_4=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

لذا ماتریس تبدیل T به شکل زیر خواهد بود،

$$T=\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1&\varphi_1&\mathbf{v}_3&\mathbf{v}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2&0&1\\1&0&1&1\\-1&\frac{-1}{3}&1&1\\0&-2&0&1\end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[1 0 0 -3;0 1 -3 0;-0.5 -3 1 0.5;-3 0 0 1];
[T,J]= jordan(A)
T =
    1.5000         0    0.5000    1.0000
    0.0417    0.2500   -0.0417         0
    0.0417   -0.2500   -0.0417         0
    1.5000         0   -0.5000    1.0000
J =
    -2     0     0     0
     0     4     1     0
     0     0     4     0
     0     0     0    -2
```

چ) $A=\begin{bmatrix}0&1&0&3\\0&-1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&-1&-2\end{bmatrix}$

معادله مشخصه ماتریس A بصورت زیر قابل محاسبه است،

$$|\lambda I_4-A|=0\rightarrow\begin{vmatrix}\lambda&-1&0&-3\\0&\lambda+1&-1&-1\\0&0&\lambda&-1\\0&0&1&\lambda+2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)^3=0\rightarrow\lambda_{1,2,3}=-1,\lambda_4=0$$

لذا ماتریس A یک مقدار ویژه متمایز و یک مقدار ویژه مکرر مرتبه سه دارد $(k=3)$.

برای مقدار ویژه مکرر $\lambda_1=-1$ داریم،

$$\text{rank}(\lambda_1 I_4-A)=\text{rank}\begin{pmatrix}-1&-1&0&-3\\0&0&-1&-1\\0&0&-1&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}=2\quad\rightarrow\quad\alpha=2$$

لذا $\alpha=2$ است، پس دو بلوک جردن برای مقدار ویژه مکرر $\lambda_1=-1$ وجود دارد و دو بردار ویژه مستقل خطی متناظر آن داریم.

$$(A-\lambda_1 I)\mathbf{v}_1=\mathbf{0}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&3\\0&0&1&1\\0&0&1&1\\0&0&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\mathbf{0}\rightarrow\begin{cases}x_1+x_2+3x_4=0\\x_3+x_4=0\end{cases}\rightarrow\quad \mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}2\\1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

$$(A-\lambda_1 I)\mathbf{v}_2=\mathbf{0}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&3\\0&0&1&1\\0&0&1&1\\0&0&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\mathbf{0}\rightarrow\begin{cases}x_1+x_2+3x_4=0\\x_3+x_4=0\end{cases}\rightarrow\quad \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}$$

حال یک بردار ویژه تعمیم یافته متناظر با بردار ویژه $\mathbf{v}_1$ بدست می آوریم،

$$(A-\lambda_1 I_4)\varphi_1=\mathbf{v}_1\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&3\\0&0&1&1\\0&0&1&1\\0&0&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_{12}\\\varphi_{22}\\\varphi_{32}\\\varphi_{42}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\1\\-1\end{bmatrix}\rightarrow\varphi_1=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

برای مقدار ویژه متمایز $\lambda_4=0$ یک بردار ویژه $\mathbf{v}_4$ بصورت زیر بدست می آید،

$$(A-\lambda_4 I)\mathbf{v}_4=\mathbf{0}\rightarrow\begin{bmatrix}0&1&0&3\\0&-1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_9\\x_{10}\\x_{11}\\x_{12}\end{bmatrix}=\mathbf{0}\rightarrow\begin{cases}x_{10}+3x_{12}=0\\-x_{10}+x_{11}+x_{12}=0\\x_{12}=0\\-x_{11}+2x_{12}=0\end{cases}\rightarrow\quad \mathbf{v}_4=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس تبدیل T بصورت زیر بدست می آید،

$$T=[\mathbf{v}_1\,|\,\varphi_1\,|\,\mathbf{v}_2\,|\,\mathbf{v}_4]=\begin{bmatrix}2&-1&1&1\\1&0&-1&0\\1&0&0&0\\-1&1&0&0\end{bmatrix}$$

سپس فرم کانونیکال جردن ماتریس A را بدست می آوریم،

$$\Lambda=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&1\\0&-1&1&0\\1&1&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&3\\0&-1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1&1&1\\1&0&-1&0\\1&0&0&0\\-1&1&0&0\end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \left[\begin{array}{cc:c:c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} J_{P_1}(-1) & & 0 \\ & J_{P_2}(-1) & \\ 0 & & J_1(0) \end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[0 1 0 3;0 -1 1 1;0 0 0 1;0 0 -1 -2];
[T,J]= jordan(A)
T =
    -2     2     2     0
     0     1    -3    -3
     0     1     0    -1
     0    -1     1     1
J =
     0     0     0     0
     0    -1     1     0
     0     0    -1     0
     0     0     0    -1
```

□

مثال۵-۲۰

اگر در یک ماتریس A مقادیر ویژه بصورت $\lambda_7, \lambda_6, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_1$ باشند و برای پنج مقدار ویژه تکراری فقط دو بردار ویژه مستقل خطی داشته باشیم، آنگاه فرم کانونیکال جردن می تواند به شکل زیر بیان گردد،

$$J_{7\times 7} = \begin{bmatrix} J_3(\lambda_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_1(\lambda_6) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_1(\lambda_7) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:cc:c:c} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 \end{array}\right]$$

در واقع یک ماتریس قطری حالت خاصی از فرم کانونیکال جردن است. تعیین شکل بلوک های جردن ممکن است ساده نباشد. ماتریس $A_{3\times3}$ با یک مقدار ویژه مکرر مرتبه سوم مانند λ_1 را در نظر بگیرید. برای این ماتریس هر یک از صورتهای کانونیکال جردن زیر امکان پذیر است،

$$a)\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1\\ 0 & 0 & \lambda_1\end{bmatrix},\quad b)\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1\end{bmatrix},\quad c)\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1\end{bmatrix}$$

هر یک از این سه ماتریس معادله مشخصه یکسانی بصورت $(\lambda-\lambda_1)^3=0$ دارند. لیکن ماتریس (a) متناظر با حالتی است که فقط یک بردار ویژه مستقل خطی وجود دارد و ماتریس های (b) و (c) به ترتیب دارای دو و سه بردار ویژه مستقل خطی هستند. لذا حتی اگر مرتبه تکرار مقدار ویژه یکسان باشد، تعداد بلوک های جردن و ترتیب آنها ممکن است بسته به ساختار ماتریس اصلی متفاوت باشد.

□

مثال۵-۲۱

ماتریس زیر را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -2 & -2\end{bmatrix}$$

فرم قطری سازی شده آن را بدست آورید.

ابتدا معادله مشخصه و مقادیر ویژه ماتریس حالت را بدست می آوریم.

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & \lambda+1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & \lambda & -1\\ 0 & 0 & 2 & \lambda+2\end{vmatrix}=0\quad\rightarrow\quad(\lambda+1)^2(\lambda^2+2\lambda+2)=0$$

مقادیر ویژه عبارتند از، $\lambda_{1,2}=-1$ و $\lambda_{3,4}=-1\pm j$ لذا باید به فرم قطری بلوکی تبدیل نمود. برای بدست آوردن ماتریس تبدیل T بردارهای ویژه را بدست می آوریم،

$$\mathrm{rank}(\lambda_1 I-A)=rank\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix}=3$$

لذا فقط یک بردار ویژه مستقل خطی متناظر با $\lambda_1 = -1$ وجود دارد و باید یک بردار تعمیم یافته دیگر بدست آوریم.

$$A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$$

$$(\lambda_1 I - A)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{cases} -x_1 = 0 \\ -x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

حال یک بردار ویژه تعمیم یافته برای $\lambda_1 = -1$ محاسبه می کنیم،

$$(A - \lambda_1 I)\varphi_1 = \mathbf{v}_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_5 = 1 \\ x_6 + x_7 + x_8 = 1 \\ -2x_7 - x_8 = -2 \end{cases} \rightarrow \quad \varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بردارهای ویژه متناظر با $\lambda_{3,4} = -1 \pm j$ بصورت زیر است،

$$(\lambda_3 I - A)\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} j & 0 & 0 & 0 \\ -1 & j & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1+j & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1+j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{cases} -jx_1 = 0 \\ -x_1 + jx_2 = 0 \\ -x_2 + (-1+j)x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_3 + (1+j)x_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.5 - 0.5j \\ 1 \end{bmatrix}$$

بردار ویژه $\mathbf{v}_4$ هم مزدوج بردار ویژه $\mathbf{v}_3$ خواهد بود،

$$\mathbf{v}_4=\begin{bmatrix}0\\0\\-0.5+0.5j\\1\end{bmatrix}$$

ماتریس تبدیل T بصورت زیر بدست می آید،

$$T=\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \varphi_1 & \mathrm{Re}(\mathbf{v}_3) & \mathrm{Im}(\mathbf{v}_3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0\\1 & 1 & -0.5 & -0.5\\-2 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

حال باید فرم قطری بلوکی جردن را بدست آوریم.

$$\Lambda=T^{-1}AT$$

$$\Lambda=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0\\0 & 2 & 0 & 1\\2 & 0 & -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\1 & -1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & -2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0\\1 & 1 & -0.5 & -0.5\\-2 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\left[\begin{array}{cc:cc}-1 & 1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & -1 & 1\\0 & 0 & -1 & -1\end{array}\right]$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[-1 0 0 0;1 -1 0 0;0 1 0 1;0 0 -2 -2];
[T,J]= jordan(A)
T =
        0               0               0           1.00
        0               0            1.00              0
   -0.50 + 0.50i   -0.50 - 0.50i     1.00           1.00
        0 - 1.00i       0 + 1.00i   -2.00              0
  J =
   -1.00 + 1.00i        0               0              0
        0          -1.00 - 1.00i        0              0
        0               0           -1.00           1.00
        0               0               0          -1.00
```

همانطور که گفته شد دستور jordan(A) برای مقادیر ویژه غیر مختلط فرم قطری کامل ماتریس را ارائه می دهد و به فرم قطری بلوکی تبدیل نمی کند. لذا در چنین مواقعی می توان از برنامه myjordan.m برای بدست آوردن فرم حقیقی ماتریس تبدیل و فرم قطری بلوکی ماتریس جردن استفاده نمود،

```
%Calculate modal matrix and block jordan form
function [T,J]= myjordan(A)
n = size(A,1);
[T,J]= jordan(A);
f = 1;
for i = 1:n
   if isreal(T(:,i))== 0 & f == 1
      T(:,i)= real(T(:,i));
      f = 0;
   elseif isreal(T(:,i))== 0 & f == 0
      T(:,i)= -imag(T(:,i));
      f = 1;
   end
end
J = T\A*T;
```

اجرای برنامه بصورت زیر است،

```
A =[-1 0 0 0;1 -1 0 0;0 1 0 1;0 0 -2 -2];
[T,J]= myjordan(A)
T =
         0         0         0    1.0000
         0         0    1.0000         0
   -0.5000    0.5000    1.0000    1.0000
         0   -1.0000   -2.0000         0
J =
    -1     1     0     0
    -1    -1     0     0
     0     0    -1     1
     0     0     0    -1
```

□

مسائل

۵-۱- برای ماتریس های زیر مقادیر ویژه را بدست آورید و سپس آنها را به فرم قطری تبدیل کنید.

الف) $A=\begin{bmatrix}5 & -2 & 0\\ -2 & 6 & 2\\ 0 & 2 & 7\end{bmatrix}$ ب) $A=\begin{bmatrix}-1 & 6 & -12\\ 0 & -13 & 30\\ 0 & -9 & 20\end{bmatrix}$

ج) $A=\begin{bmatrix}1 & -4 & 2\\ -4 & 1 & -2\\ 2 & -2 & -2\end{bmatrix}$ د) $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 36\\ 0 & 3 & 0\\ 36 & 0 & 23\end{bmatrix}$

۵-۲- ماتریس های A و B را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}-10 & 6 & 3\\ -26 & 16 & 8\\ 16 & -10 & -5\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}0 & -6 & -16\\ 0 & 17 & 45\\ 0 & -6 & -16\end{bmatrix}$$

الف) نشان دهید که ماتریس های A و B مقادیر ویژه یکسانی دارند.

ب) ماتریسه های A و B را بصورت دو ماتریس یکسان قطری سازی کنید.

ج) نشان دهید ماتریس معکوس پذیری مانند R وجود دارد، بطوریکه $R^{-1}AR=B$ است.

د) مقدار A^8 و B^8 را بدست آورید.

۵-۳- فرض کنید λ یک مقدار ویژه برای یک ماتریس متعامد مانند A باشد، ثابت کنید $1/\lambda$ نیز یک مقدار ویژه برای ماتریس A است.

۵-۴- برای هر یک از ماتریس های زیر،

$$B=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 7 & 8\\ 0 & -4 & -5 & -5\end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -2\end{bmatrix}$$

الف) مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را تعیین کنید.

ب) ماتریس تبدیل همانندی را تشکیل دهید.

ج) ماتریس را به فرم قطری یا قطری بلوکی تبدیل کنید.

۵-۵- ثابت کنید ضرایب معادله مشخصه یک ماتریس را می توان با استفاده از الگوریتم بازگشتی زیر بدست آورد،

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0$$

$$\begin{aligned} c_{n-1} &= -W_1 \\ c_{n-2} &= -\frac{1}{2}(c_{n-1}W_1 + W_2) \\ c_{n-3} &= -\frac{1}{3}(c_{n-2}W_1 + c_{n-1}W_2 + W_3) \\ &\vdots \\ c_0 &= -\frac{1}{n}(c_1W_1 + c_2W_2 + \cdots + c_{n-1}W_{n-1} + W_n) \end{aligned}$$

در اینجا $W_k = \mathrm{trace}(A^k)$ است.

۵-۶- اگر T تبدیل همانندی باشد که ماتریس A را قطری سازی می کند، بردارهای ویژه ماتریس A^T را بدست آورید.

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۵-۷- ماتریس همبسته زیر را در نظر بگیرید،

$$A_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

الف) نشان دهید که معادله مشخصه آن بصورت زیر است،

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

ب) اگر λ_i یک مقدار ویژه برای آن باشد، نشان دهید بردار ویژه متناظر با آن بصورت زیر است،

$$\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_i & \lambda_i^2 & \cdots & \lambda_i^{n-1} \end{bmatrix}^T$$

۵-۸- نشان دهید برای یک ماتریس وندرموند A رابطه زیر برقرار است،

$$|A| = \prod_{1<i<j<n} (\lambda_i - \lambda_j)$$

۵-۹- نشان دهید که یک ماتریس مربعی مانند $A_{n\times n}$ غیر منفرد است، اگر و فقط اگر کلیه مقادیر ویژه آن غیر صفر باشند.

۵-۱۰- برای هر یک از ماتریس های زیر یک ماتریس تبدیل مناسب بیابید که آنها را به فرم کانونیکال جردن تبدیل کند و سپس فرم جردن آن را بنویسید.

الف) $A=\begin{bmatrix}1 & \frac{3}{5} & \frac{-4}{5}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ ب) $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

ج) $A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -4\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}$ د) $A=\begin{bmatrix}0 & 4 & 3\\ 0 & 20 & 16\\ 0 & -25 & -20\end{bmatrix}$

۵-۱۱- ثابت کنید برای یک ماتریس مربعی شبه متقارن حقیقی تمامی مقادیر ویژه مقداری حقیقی یا صفر یا موهومی هستند.

۵-۱۲- ماتریس A را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

الف) این ماتریس چند مقدار ویژه دارد؟ آنها را بیابید.
ب) چند بردار ویژه مستقل خطی برای ماتریس A وجود دارد؟
ج) چند بردار ویژه تعمیم یافته برای ماتریس A وجود دارد؟

۵-۱۳- ماتریس A را با شرایط زیر در نظر بگیرید،

$$\lambda_1=\lambda_2=2,\qquad \operatorname{rank}(A-2I)=4$$
$$\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=-2,\qquad \operatorname{rank}(A+2I)=3$$

فرم کانونیکال جردن ماتریس A را بدست آورید.