فصل هفتم

تجزیه مقادیر منفرد

۷-۱ مقدمه

این فصل به طور اختصاصی به تجزیه مقادیر منفرد ماتریس ها می پردازد. در ابتدای فصل تعریفی از مقادیر منفرد و نحوه محاسبه تجزیه مقادیر منفرد یک ماتریس و نگاشت حاصل از این تجزیه بررسی می گردد. سپس در رابطه با کاربردهای تجزیه مقادیر منفرد در محاسبه شبه معکوس و حل مسئله حداقل مربعات مثال های کاربردی و کدنویسی های مربوطه در MATLAB بیان می شود. در انتهای این فصل در مورد کاربرد تجزیه مقادیر ویژه در حذف نویز سیگنال ها و فشرده سازی داده های تصویری مثال های کاربردی آورده شده است.

۲-۷ مقادیر منفرد

برای ماتریس مختلط $A_{m\times n}$ ماتریس A^*A و AA^* یک ماتریس هرمیتی و مثبت معین است. اگر $m < n$ باشد، جذر مقادیر ویژه AA^* و اگر $m > n$ باشد جذر مقادیر ویژه A^*A را **مقادیر منفرد**[۱] ماتریس A می نامند. برای ماتریس حقیقی $A_{m\times n}$ جذر مقادیر ویژه ماتریس های متقارن A^TA و AA^T در نظر گرفته می شود.

مثال۷-۱

مقادیر منفرد ماتریس A را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

از آنجائیکه ماتریس A حقیقی است، لذا مقادیر منفرد بصورت جذر مقادیر ویژه ماتریس AA^T تعریف می شود.

$$AA^T=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$$

حال مقادیر ویژه ماتریس AA^T را بدست می آوریم،

$$\left|\lambda I-AA^T\right|=\begin{vmatrix} \lambda-11 & -1 \\ -1 & \lambda-11 \end{vmatrix}=(\lambda-10)(\lambda-12)$$

لذا مقادیر ویژه ماتریس AA^T عبارتند از،

$$\lambda_1=12,\qquad \lambda_2=10$$

از این رو مقادیر منفرد برای ماتریس A بصورت زیر بدست می آیند،

$$\sigma_1=\sqrt{12},\qquad \sigma_2=\sqrt{10}$$

در نرم افزار MATLAB از دستور svd(A) برای محاسبه مقادیر منفرد ماتریس استفاده می شود،

```
A =[3 1 1;-1 3 1];
svd(A)
ans =
    3.4641
    3.1623
```

[۱] Singular Value

علاوه بر دستور svd(A) در نرم افزار MATLAB دستور های زیر نیز وجود دارند که هر یک عملکرد خاصی دارند،

svds(A) : حداکثر شش مقدار منفرد بزرگ ماتریس را ارائه می دهد.

svds(A,k) : k تا بزرگترین مقادیر منفرد ماتریس را می دهد.

svds(A,k,0) : k تا کوچکترین مقادیر منفرد ماتریس را می دهد.

به کاربرد دستور ها توجه نمایید،

```
A = magic(10);
svd(A)
ans =
  505.0000
  254.8589
  122.9542
   36.8347
   30.5167
   23.3508
   20.5153
    0.0000
    0.0000
    0.0000

svds(A)
ans =
  505.0000
  254.8589
  122.9542
   36.8347
   30.5167
   23.3508
```

```
svds(A,3)
ans =
  505.0000
  254.8589
  122.9542

svds(A,3,0)
ans =
  1.0e-013 *
    0.1470
    0.0527
    0.0166
```

□

۷-۲-۱- تعیین رتبه ماتریس

از جمله کاربردهای مقادیر منفرد تعیین رتبه ماتریس است. رتبه یک ماتریس برابر با تعداد مقادیر منفرد غیر صفر آن ماتریس است.

مثال۷-۲

با توجه به مقادیر منفرد هر ماتریس رتبه آن را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 4 & 1\end{bmatrix}$$

- برای ماتریس A داریم،

$$\left|\lambda I-A^T A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-6 & -1\\ -1 & \lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-7)(\lambda-5)\rightarrow \lambda_1=7, \quad \lambda_2=5$$

مقادیر منفرد برای ماتریس A عبارتند از، $\sigma_1=\sqrt{7},\sigma_2=\sqrt{5}$ لذا رتبه ماتریس A دو است.

- برای ماتریس B داریم،

$$\left|\lambda I-B^T B\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -3\\ 0 & -4 & \lambda-1\end{vmatrix} \quad \rightarrow \quad \lambda_1=18, \quad \lambda_2=8, \quad \lambda_3=1$$

مقادیر منفرد ماتریس B عبارتند از، $\sigma_1=\sqrt{18},\sigma_2=\sqrt{8},\sigma_3=1$ لذا رتبه ماتریس B سه است.

□

۷-۲-۲- محاسبه نُرم دو و عدد حالت ماتریس

با توجه به مطالب فصل اول و دوم، نُرم دو و عدد حالت یک ماتریس بصورت زیر بدست می آیند،

$$\|A\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1}\|A\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}}$$

که در آن $\lambda_{\max}$ بزرگترین مقدار عددی است، که سبب می شود ماتریس $A^T A-\lambda I$ منفرد گردد. در واقع $\lambda_{\max}$ همان بزرگترین مقدار ویژه ماتریس $A^T A$ است، لذا جذر آن بزرگترین مقدار منفرد ماتریس A خواهد بود. پس داریم،

$$\|A\|_2 = \sigma_{\max} \tag{۱-۷}$$

از طرفی در تعریف عدد حالت یک ماتریس داریم،

$$\kappa = \|A\|\|A^{-1}\| \quad , \quad \kappa \ge 1$$

لذا عدد حالت را می توان بصورت زیر نیز بیان نمود،

$$\kappa = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} \quad , \quad \kappa \ge 1 \tag{۲-۷}$$

می دانیم اگر عدد حالت مقدار خیلی بزرگی باشد بیانگر آن است که ماتریس نزدیک به منفرد شدن است، لذا آن ماتریس را بد حالت می نامند و خطای محاسباتی در معکوس کردن ماتریس A زیاد است.

مثال۷-۳

عدد حالت ماتریس زیر را بیابید و بد حالت بودن آن را بررسی نمایید.

$$A = \begin{bmatrix} 93.477 & 10.202 & -28.832 \\ 1.963 & 32.816 & 62.414 \\ 26.821 & 36.816 & 57.234 \end{bmatrix}$$

ابتدا مقادیر منفرد ماتریس را بدست می آوریم،

$$\sigma_1 = 100.0004, \quad \sigma_2 = 100.0000, \quad \sigma_3 = 0.0002$$

حال عدد حالت را حساب می کنیم،

$$\kappa_A = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{100.0004}{0.0002} = 5.2164\times 10^5 >> 1$$

عدد شرطی مقدار بسیار بزرگی است، لذا ماتریس A بد حالت و نزدیک به منفرد شدن است.

□

مثال ۷-۴

با محاسبه عدد حالت، ماتریس های زیر را براساس درجه ill conditioning مرتب کنید.

$$A=\begin{bmatrix}100 & 0 & -100\\ 0 & 100 & -100\\ -100 & -100 & 300\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 8 & -1\\ -9 & -71 & 11\\ 1 & 17 & 18\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & 22 & -42\\ 0 & 1 & -45\\ -45 & -948 & 1\end{bmatrix}$$

برای ماتریس A داریم،

$$\sigma_1 = 373.2051 \quad , \quad \sigma_2 = 100.0000 \quad , \quad \sigma_3 = 26.7949$$

$$\kappa_A = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{373.2051}{26.7949} = 13.9282$$

ماتریس A خوش حالت یا well condition است.

برای ماتریس B داریم،

$$\sigma_1 = 74.3164 \quad , \quad \sigma_2 = 20.0016 \quad , \quad \sigma_3 = 0.0007$$

$$\kappa_B = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{74.3164}{0.0007} = 1.1047\times 10^5 >> 1$$

برای ماتریس C داریم،

$$\sigma_1 = 949.3256 \quad , \quad \sigma_2 = 61.5297 \quad , \quad \sigma_3 = 0.00000017$$

$$\kappa_C = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{949.3256}{0.00000017} = 5.5452\times 10^7 >> 1$$

با توجه به عدد حالت بدست آمده هر یک از ماتریس های C و B به شدت بد حالت هستند.

□

مثال ۷-۵

ماتریس A را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 4\\ -4 & 0 & 3\\ 0 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

الف) اگر برای ماتریس A نگاشت $A\mathbf{x}=\mathbf{y}$ را در نظر بگیریم، رابطه ای بین مؤلفه های بردار $\mathbf{x}$ بیابید که $\frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\|}=\sqrt{17}$ گردد.

ب) آیا می توان بردار $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ بدست آورد که $\frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\|}=\sqrt{50}$ گردد؟ چرا؟

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} \quad \rightarrow \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 + 4x_3 \\ -4x_1 + 3x_3 \\ 3x_2 \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{y}\| = \sqrt{(3x_1 + 4x_3)^2 + (-4x_1 + 3x_3)^2 + (3x_2)^2}$$

$$\frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\sqrt{(3x_1 + 4x_3)^2 + (-4x_1 + 3x_3)^2 + (3x_2)^2}}{\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2}} = \sqrt{17}$$

$$25x_1^2 + 25x_2^2 + 9x_3^2 = 17x_1^2 + 17x_2^2 + 17x_3^2 \quad \rightarrow \quad x_1^2 + x_3^2 = x_2^2$$

بنابراین رابطه بین مؤلفه های بردار $\mathbf{x}$ بدست می آید.

- با توجه به مقدار مقادیر منفرد ماتریس A رابطه زیر را داریم،

$$\sigma_3 \le \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le \sigma_1 \quad \rightarrow \quad 3 \le \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le 5$$

لذا حداکثر بزرگنمایی نگاشت $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ برابر با $\sigma_1 = 5$ است و $\sqrt{50} > 5$ می باشد، پس رابطه $\frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \sqrt{50}$ برقرار نمی باشد.

□

مثال۷-۶

ماتریس A را در نظر بگیرید،

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الف) نشان دهید به ازای $\varepsilon = 0$ ماتریس A یک ماتریس منفرد است.

به ازای $\varepsilon = 0$ رتبه ماتریس A را بررسی می نماییم،

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{rank}(A) = 2$$

لذا با توجه به نقص رتبه، ماتریس A به ازای $\varepsilon = 0$ یک ماتریس منفرد است.

ب) برای $\varepsilon = 1$ مقدار A^{-1} و κ را بدست آورید و نشان دهید $\kappa = \|A\| \; \|A^{-1}\|$است.

به ازای $\varepsilon = 1$ ماتریس معکوس را بدست می آوریم،

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{rank}(A) = 3, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

برای محاسبه عدد حالت مقادیر منفرد ماتریس A را بدست می آوریم،

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda I - A^T A\right| = \begin{vmatrix} \lambda - 6 & -1 & -5 \\ -1 & \lambda - 2 & -2 \\ -5 & -2 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = 11.0101, \lambda_2 = 1.9432, \lambda_3 = 0.0467$$

$$\sigma_1 = \sqrt{11.0101} \quad , \quad \sigma_2 = \sqrt{1.9432} \quad , \quad \sigma_3 = \sqrt{0.0467}$$

$$\kappa_A = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{\sqrt{11.0101}}{\sqrt{0.0467}} = 15.3478$$

با توجه به تعریفی که برای نُرم داشتیم بصورت زیر می توان نوشت،

$$\|A\| = \sigma_1 , \quad \|A^{-1}\| = \frac{1}{\sigma_3} \quad \rightarrow \quad \kappa_A = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \|A\| \|A^{-1}\|$$

ج) نشان دهید که به ازای مقادیر بسیار کوچک(غیر صفر) ε، مثلاً $\varepsilon = 0.0001$ معادله $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ یک سیستم بد حالت است. برای این منظور جواب معادله را برای بردار $\mathbf{b} = [1.1 \quad 1 \quad 1]^T$ بررسی کنید.

به ازای $\varepsilon = 0.0001$ عدد حالت ماتریس A را بدست می آوریم،

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1.0001 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0001 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.0002 & 0.0001 & 3.0002 \\ 0.0001 & 2 & 2 \\ 3.0002 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda I - A^T A\right| = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 7.6460, \lambda_2 = 2.3542, \lambda_3 = 0.0000000055555$$

$$\sigma_1 = 2.7651 \quad , \quad \sigma_2 = 1.5343 \quad , \quad \sigma_3 = 0.00002357$$

$$\kappa_A = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{2.7651}{0.00002357} = 1.1732\times 10^5 \;>> 1$$

با توجه به عدد حالت بزرگی که ماتریس A دارد، معادله $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ یک سیستم بد حالت است.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1.0001 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1.0001 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1000.0 \\ 999.0 \\ -999.0 \end{bmatrix}$$

مشخص است سیستم به دلیل بد حالت بودن نسبت به تغییرات هر چند کوچک در بردار $\mathbf{b}$ بسیار حساس است.

□

۷-۳ تجزیه ماتریس ها بر اساس مقادیر منفرد

یکی از مهمترین روشهای تجزیه ماتریس ها **تجزیه بر اساس مقادیر منفرد**[1] است. در این روش یک ماتریس مانند $A_{m\times n}$ با رتبه k را می توان بصورت زیر تجزیه کرد،

$$A = U\Sigma V^T \qquad (۷-۳)$$

که در آن $U_{m\times m} = [\mathbf{u}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_m]$ و $V_{n\times n} = [\mathbf{v}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n]$ ماتریس های متعامد هستند.

ستون های ماتریس $U_{m\times m}$ از بردارهای ویژه یکامتعامد ماتریس AA^T و ستون های ماتریس $V_{n\times n}$ از بردارهای ویژه یکامتعامد ماتریس A^TA تشکیل می شوند و $\Sigma_{m\times n}$ یک ماتریس قطری است که عناصر روی قطر آن مقادیر منفرد غیر صفر ماتریس AA^T یا A^TA می باشند،

$$\begin{aligned} &\Sigma_{m\times n} = \mathrm{diag}(\sigma_1,\ldots,\sigma_p) \quad , \quad p = \min\{m,n\} \\ &\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \cdots \ge \sigma_k > 0 \quad , \quad \sigma_{k+1} = \cdots = \sigma_p = 0 \end{aligned} \qquad (۷-۴)$$

در اینجا σ_1 و σ_k به ترتیب بزرگترین و کوچکترین مقادیر منفرد غیرصفر ماتریس A هستند.

[1] Singular Value Decomposition (SVD)

مثال۷-۷

ماتریس A داده شده را توسط مقادیر منفرد تجزیه نمایید.

$$A_{2\times3}=\begin{bmatrix}3&1&1\\-1&3&1\end{bmatrix}$$

باید ماتریس $A_{2\times3}$ را بصورت $A=U\Sigma V^T$ تجزیه کنیم. برای بدست آوردن ماتریس $U_{2\times2}$ باید بردارهای ویژه یکامتعامد ماتریس AA^T را بیابیم.

$$A^T=\begin{bmatrix}3&-1\\1&3\\1&1\end{bmatrix}\rightarrow AA^T=\begin{bmatrix}3&1&1\\-1&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-1\\1&3\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11&1\\1&11\end{bmatrix}$$

ابتدا مقادیر ویژه ماتریس AA^T را بدست می آوریم،

$$\left|\lambda I_2-AA^T\right|=\begin{vmatrix}\lambda-11&-1\\-1&\lambda-11\end{vmatrix}=(\lambda-12)(\lambda-10)$$

لذا مقادیر ویژه ماتریس AA^T عبارتند از،

$$\lambda_1=12,\qquad \lambda_2=10$$

ماتریس AA^T دو مقدار ویژه حقیقی و متمایز دارد. حال بردارهای ویژه متناظر با هر یک از آنها را بدست می آوریم،

$$(AA^T-\lambda_1 I_2)\mathbf{u}_1=\mathbf{0}\rightarrow\begin{bmatrix}-1&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11}\\u_{21}\end{bmatrix}=\mathbf{0}\rightarrow\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$(AA^T-\lambda_2 I_2)\mathbf{u}_2=\mathbf{0}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{12}\\u_{22}\end{bmatrix}=\mathbf{0}\rightarrow\mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1&\mathbf{u}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}$$

می توان با اعمال فرآیند گرام- اشمیت این دو بردار را بصورت یکامتعامد تبدیل کرد. لذا ماتریس $U_{2\times2}$ بشکل زیر بدست می آید،

$$U=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{-1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$$

ماتریس $V_{3\times3}$ نیز باید از بردارهای ویژه یکامتعامد ماتریس A^TA بدست آید. مقادیر ویژه ماتریس A^TA عبارتند از،

$$\lambda_1=12,\qquad \lambda_2=10,\qquad \lambda_3=0$$

ماتریس $A^T A$ سه مقدار ویژه حقیقی و متمایز دارد. حال بردارهای ویژه متناظر با هر یک از آنها را بدست می آوریم،

$$(A^T A-\lambda_1 I_3)\mathbf{v}_1=\mathbf{0}\rightarrow\begin{bmatrix}-2&0&2\\0&-2&4\\2&4&-10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\v_{21}\\v_{31}\end{bmatrix}=\mathbf{0}\rightarrow\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$$

$$(A^T A-\lambda_2 I_3)\mathbf{v}_2=\mathbf{0}\rightarrow\begin{bmatrix}0&0&2\\0&0&4\\2&4&-8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{12}\\v_{22}\\v_{32}\end{bmatrix}=\mathbf{0}\rightarrow\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}$$

$$(A^T A-\lambda_3 I_3)\mathbf{v}_3=\mathbf{0}\rightarrow\begin{bmatrix}10&0&2\\0&10&4\\2&4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{13}\\v_{23}\\v_{33}\end{bmatrix}=\mathbf{0}\rightarrow\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}1\\2\\-5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1&\mathbf{v}_2&\mathbf{v}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&-1&2\\1&0&-5\end{bmatrix}$$

با اعمال فرآیند یکامتعامد سازی گرام- اشمیت بردارهای ویژه یکامتعامد را می توان بدست آورد. لذا، ماتریس $V_{3\times3}$ بصورت زیر بدست می آید،

$$V=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt6}&\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt{30}}\\\frac{2}{\sqrt6}&\frac{-1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt{30}}\\\frac{1}{\sqrt6}&0&\frac{-5}{\sqrt{30}}\end{bmatrix}$$

نهایتاً ماتریس $\Sigma_{2\times3}$ با استفاده از مقادیر منفرد محاسبه شده بصورت زیر بدست می آید،

$$\Sigma_{2\times3}=\begin{bmatrix}\sigma_1&0&0\\0&\sigma_2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{12}&0&0\\0&\sqrt{10}&0\end{bmatrix}$$

بنابراین، تجزیه به مقادیر منفرد ماتریس A بشکل زیر بدست می آید،

$$A=U\Sigma V^T=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{-1}{\sqrt2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{12}&0&0\\0&\sqrt{10}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt6}&\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{2}{\sqrt5}&\frac{-1}{\sqrt5}&0\\\frac{1}{\sqrt{30}}&\frac{2}{\sqrt{30}}&\frac{-5}{\sqrt{30}}\end{bmatrix}$$

در نرم افزار MATLAB از دستور [U,S,V]=svd(A) برای بدست آوردن ماتریس های تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A استفاده می شود. به اجرای دستور توجه نمایید،

```
A =[3 1 1;-1 3 1];
[U,S,V]= svd(A)
U =
    0.7071    0.7071
    0.7071   -0.7071
S =
    3.4641         0         0
         0    3.1623         0
V =
    0.4082    0.8944    0.1826
    0.8165   -0.4472    0.3651
    0.4082   -0.0000   -0.9129
```

□

مثال ۷-۸

ماتریس A را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A را بیابید.

- ابتدا ماتریس U را بدست می آوریم،

$$AA^T=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda I-AA^T\right|=\begin{vmatrix} \lambda-25 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-25 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-9 \end{vmatrix}=0 \quad \to \quad \lambda_{1,2}=25, \lambda_3=9$$

ماتریس AA^T دو مقدار ویژه حقیقی تکراری و یک مقدار ویژه حقیقی متمایز دارد. ابتدا بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه تکراری را بدست می آوریم.

از آنجاییکه $n-\mathrm{rank}(AA^T-\lambda_1 I)=3-1=2$ است، لذا برای مقدار ویژه تکراری $\lambda_{1,2}=25$ دو بردار ویژه مستقل خطی داریم و نیازی به بدست آوردن بردار ویژه تعمیم یافته نیست،

$$(AA^T - \lambda_1 I)\mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \to \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(AA^T - \lambda_3 I)\mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \to \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \to \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

چون نُرم بردارهای ویژه یک است، لذا نیازی به یکامتعامد سازی نداریم. بنابراین ماتریس $U_{3\times 3}$ بصورت زیر بدست می آید،

$$U = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- حال ماتریس V را بدست می آوریم،

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda I - A^T A\right| = \begin{vmatrix} \lambda - 25 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 9 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 25 \end{vmatrix} = 0 \quad \to \quad \lambda_{1,2} = 25, \lambda_3 = 9$$

ماتریس $A^T A$ دو مقدار ویژه حقیقی تکراری و یک مقدار ویژه حقیقی متمایز دارد. ابتدا بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه تکراری را بدست می آوریم.

از آنجاییکه $n - \mathrm{rank}(A^T A - \lambda_1 I) = 3 - 1 = 2$ است، لذا برای مقدار ویژه تکراری $\lambda_{1,2} = 25$ دو بردار ویژه مستقل خطی داریم و نیازی به بدست آوردن بردار ویژه تعمیم یافته نیست،

$$(A^T A - \lambda_1 I)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \to \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0 \\ 0.8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -0.8 \\ 0 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

$$(A^T A - \lambda_3 I)\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \to \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \to \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس $V_{3\times3}$ بصورت زیر بدست می آید و باز هم نیازی به یکامتعامد سازی نداریم،

$$V = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.8 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}$$

لذا تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A به شکل زیر بدست می آید،

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0.8 \\ -0.8 & 0 & 0.6 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

زمانیکه ماتریس $A^T A$ یک ماتریس قطری باشد، می توان روش ساده تری بصورت زیر در نظر گرفت،

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 = 5 \quad , \quad \sigma_2 = 3 \quad , \quad \sigma_3 = 5$$

چون $A^T A$ یک ماتریس قطری است، می توان $V = I$ انتخاب کرد، با این کار فقط محاسبه ماتریس U را داریم که آن هم بسیار ساده است،

$$A = U\Sigma V^T \quad \rightarrow \quad AV = U\Sigma \quad \rightarrow \quad AV\Sigma^{-1} = U \quad \rightarrow \quad A\mathbf{v}_i \frac{1}{\sigma_i} = \mathbf{u}_i$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = \dfrac{1}{\sigma_1} A\mathbf{v}_1 = \dfrac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ -0.8 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}_2 = \dfrac{1}{\sigma_2} A\mathbf{v}_2 = \dfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}_3 = \dfrac{1}{\sigma_3} A\mathbf{v}_3 = \dfrac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad \rightarrow \quad U = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0.8 \\ -0.8 & 0 & 0.6 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

لذا تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A با رعایت چینش مقادیر منفرد از بزرگترین مقدار تا کوچکترین مقدار به شکل زیر بدست می آید،

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 \\ -0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[3 0 4;-4 0 3;0 3 0];
[U,S,V]= svd(A)
U =
    0.6000    0.8000         0
   -0.8000    0.6000         0
         0         0    1.0000
S =
     5     0     0
     0     5     0
     0     0     3
V =
     1     0     0
     0     0     1
     0     1     0
```

□

۷-۳-۱- تعیین زیر فضاهای اساسی ماتریس

فرم گسترده تجزیه مقادیر منفرد بصورت زیر می باشد،

$$AV = U\Sigma \quad \rightarrow \quad A\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i \qquad (۵-۷)$$

یعنی هر بردار $\mathbf{v}_i$ به یک بردار متناظر مانند $\mathbf{u}_i$ نگاشت می شود، که اندازه این نگاشت برابر با σ_i است.

$$\mathbf{v}_i \longrightarrow \boxed{A} \longrightarrow \sigma_i \mathbf{u}_i$$

$\mathbf{u}_i$ و $\mathbf{v}_i$ به ترتیب **بردارهای منفرد چپ و راست**[۱] نامیده می شود. با در نظر گرفتن مقادیر منفرد صفر ماتریس $A_{m\times n}$، تجزیه مقادیر ویژه را می توان بصورت زیر نمایش داد،

$$A = U\Sigma V^T$$

[۱] Left and Right Singular Vectors

$$A=\left[\underbrace{u_1 \;\cdots\; u_k}_{Basis\ for\ R(A)} \,\Big|\, \underbrace{u_{k+1} \;\cdots\; u_m}_{Basis\ for\ N(A^T)}\right]\left[\begin{array}{ccc:c}\sigma_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \sigma_k & \\ \hdashline & 0 & & 0\end{array}\right]\left[\underbrace{v_1 \;\cdots\; v_k}_{Basis\ for\ R(A^T)} \,\Big|\, \underbrace{v_{k+1} \;\cdots\; v_n}_{Basis\ for\ N(A)}\right]^T$$

بر روی تجزیه حاصل بردارهای پایه هر یک از چهار زیر فضای اصلی ماتریس مشخص شده اند. این موضوع را می توان بصورت زیر ثابت کرد،

$$A=\mathbf{u}_i\sigma_i\mathbf{v}_i^T$$

- برای $i=1,\dots,k$ داریم،

$$A\mathbf{v}_i=\mathbf{u}_i\sigma_i\neq\mathbf{0} \quad\rightarrow\quad \mathbf{u}_i\in R(A)$$
$$\mathbf{u}_i^TA=\sigma_i\mathbf{v}_i^T\neq\mathbf{0}\rightarrow A^T\mathbf{u}_i=\sigma_i\mathbf{v}_i\neq\mathbf{0} \quad\rightarrow\quad \mathbf{v}_i\in R(A^T)$$

- برای $i=k+1,\dots,m$ داریم،

$$\mathbf{u}_i^TA=\sigma_i\mathbf{v}_i^T=\mathbf{0}\rightarrow A^T\mathbf{u}_i=\mathbf{0} \quad\rightarrow\quad \mathbf{u}_i\in N(A^T)$$
$$A\mathbf{v}_i=\mathbf{u}_i\sigma_i=\mathbf{0} \quad\rightarrow\quad \mathbf{v}_i\in N(A)$$

ماتریس A به مانند تبدیلی است که فضای سطرها $R(A^T)$ را به فضای ستون ها $R(A)$ و فضای پوچی $N(A)$ را به فضای پوچی چپ $N(A^T)$ می نگارد.

مثال۷-۹

با استفاده از تجزیه مقادیر منفرد پایه های چهار زیر فضای اساسی ماتریس A را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -5 & 1 & 5\\ 1 & 4 & -7 & 3 & -2\\ 1 & 5 & -9 & 5 & -9\\ 0 & 3 & -6 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

تجزیه مقادیر منفرد ماتریس بصورت زیر است،

$$A=U\Sigma V^T$$

$$U=\left[\begin{array}{ccc:c} 0.1815 & -0.8445 & 0.2953 & 0.4082\\ 0.4784 & -0.2043 & 0.2504 & -0.8165\\ 0.7753 & 0.4359 & 0.2055 & 0.4082\\ \multicolumn{3}{c:}{\underbrace{0.3701 \quad -0.2347 \quad -0.8988}_{R(A)}} & \underbrace{0.0000}_{N(A^T)}\end{array}\right]$$

$$\Sigma = \left[\begin{array}{ccc|cc} 18.2244 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8.3717 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8875 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0.0000 & 0 \end{array}\right]$$

$$V = \left[\begin{array}{c} \begin{array}{ccc|cc} 0.0788 & -0.0732 & 0.8463 & -0.5050 & 0.1313 \\ 0.4085 & -0.2240 & 0.2457 & 0.6504 & 0.5473 \\ -0.7383 & 0.3748 & 0.3548 & 0.4331 & 0.0307 \\ 0.3421 & 0.0302 & 0.3110 & 0.3596 & -0.8100 \\ -0.4059 & -0.8961 & 0.0283 & 0.0719 & -0.1620 \end{array} \\ \underbrace{\hspace{5cm}}_{R(A^T)} \quad \underbrace{\hspace{3cm}}_{N(A)} \end{array}\right]$$

دقت کنید در اینجا ماتریس V را داریم، اگر ماتریس V^T را داشتیم بردارهای پایه را بصورت زیر باید انتخاب می کردیم و ترانهاده بردارهای سطری هر بخش را در نظر می گرفتیم.

$$V^T = \left[\begin{array}{ccccc} 0.0788 & 0.4085 & -0.7383 & 0.3421 & -0.4059 \\ -0.0732 & -0.2240 & 0.3748 & 0.0302 & -0.8961 \\ 0.8463 & 0.2457 & 0.3548 & 0.3110 & 0.0283 \\ \hline -0.5050 & 0.6504 & 0.4331 & 0.3596 & 0.0719 \\ 0.1313 & 0.5473 & 0.0307 & -0.8100 & -0.1620 \end{array}\right]$$

لذا چهار زیرفضای اساسی ماتریس را بصورت زیر می توان بیان نمود،

$$R(A) = sp\left\{\begin{bmatrix} 0.1815 \\ 0.4784 \\ 0.7753 \\ 0.3701 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.8445 \\ -0.2043 \\ 0.4359 \\ -0.2347 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.2953 \\ 0.2504 \\ 0.2055 \\ -0.8988 \end{bmatrix}\right\}, \qquad N(A^T) = sp\left\{\begin{bmatrix} 0.4082 \\ -0.8165 \\ 0.4082 \\ 0.0000 \end{bmatrix}\right\}$$

$$R(A^T) = sp\left\{\begin{bmatrix} 0.0788 \\ 0.4085 \\ -0.7383 \\ 0.3421 \\ -0.4059 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.0732 \\ -0.2240 \\ 0.3748 \\ 0.0302 \\ -0.8961 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.8463 \\ 0.2457 \\ 0.3548 \\ 0.3110 \\ 0.0283 \end{bmatrix}\right\}, \qquad N(A) = sp\left\{\begin{bmatrix} -0.5050 \\ 0.6504 \\ 0.4331 \\ 0.3596 \\ 0.0719 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.1313 \\ 0.5473 \\ 0.0307 \\ -0.8100 \\ -0.1620 \end{bmatrix}\right\}$$

□

مثال۷-۱۰

تجزیه SVD ماتریس A را در نظر بگیرید،

$$A = U\Sigma V^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.61 & -0.34 & 0.27 & 0.54 \\ 0.31 & 0.87 & 0.15 & -0.00 \\ 0.08 & -0.17 & 0.74 & -0.54 \\ 0.63 & -0.17 & -0.56 & -0.54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15.28 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11.35 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.77 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.00 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.10 & 0.42 & 0.85 & 0.04 & 0.27 \\ -0.66 & -0.23 & -0.02 & -0.04 & 0.71 \\ 0.37 & -0.62 & 0.16 & 0.63 & 0.19 \\ -0.29 & -0.56 & 0.48 & -0.36 & -0.46 \\ 0.56 & -0.22 & -0.05 & -0.67 & 0.40 \end{bmatrix}$$

الف) مقادیر منفرد ماتریس را تعیین کنید. رتبه و نُرم دو ماتریس A چند است؟

$$\sigma_1 = 15.28, \quad \sigma_2 = 11.35, \quad \sigma_3 = 1.77, \quad \sigma_4 = 0.00$$

از آنجاییکه سه مقدار منفرد غیر صفر دارد، لذا رتبه ماتریس سه است.

$$\|A\|_2 = \sigma_{\max} = 15.28$$

ب) پایه های یکامتعامد زیرفضاهای $R(A), N(A), R(A^T), N(A^T)$ را تعیین کنید.

باید دقت شود که در اینجا ماتریس V^T داده شده است.

$$R(A) = sp\left\{\begin{bmatrix} 0.61 \\ 0.31 \\ 0.08 \\ 0.63 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.34 \\ 0.87 \\ -0.17 \\ -0.17 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.27 \\ 0.15 \\ 0.74 \\ -0.56 \end{bmatrix}\right\}, N(A^T) = sp\left\{\begin{bmatrix} 0.54 \\ -0.00 \\ -0.54 \\ -0.54 \end{bmatrix}\right\}$$

$$R(A^T) = sp\left\{\begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.42 \\ 0.85 \\ 0.04 \\ 0.27 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.66 \\ -0.23 \\ -0.02 \\ -0.04 \\ 0.71 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.37 \\ -0.62 \\ 0.16 \\ 0.63 \\ 0.19 \end{bmatrix}\right\}, N(A) = sp\left\{\begin{bmatrix} -0.29 \\ -0.56 \\ 0.48 \\ -0.36 \\ -0.46 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.56 \\ -0.22 \\ -0.05 \\ -0.67 \\ 0.40 \end{bmatrix}\right\}$$

ج) عدد حالت ماتریس A را بدست آورید. آیا ماتریس A یک ماتریس بد حالت است؟

$$\kappa = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} = \frac{15.28}{0.00} = \infty$$

با توجه به عدد حالت بسیار بزرگ ماتریس، این ماتریس بد حالت است.

□

۷-۳-۲- محاسبه دترمینان و معکوس ماتریس

از تجزیه مقادیر منفرد یک ماتریس می توان برای محاسبه دترمینان و معکوس آن ماتریس استفاده نمود. برای یک ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ دترمینان بصورت زیر بدست می آید،

$$|A| = \pm \prod_{i=1}^{n} \sigma_i \qquad (۶-۷)$$

با توجه به اینکه ماتریس های U و V متعامد هستند داریم،

$$|A| = \left|U\Sigma V^T\right| = |U|\ |\Sigma|\ \left|V^T\right| = (\pm 1)|\Sigma|(\pm 1) = \pm|\Sigma| = \pm\prod_{i=1}^{n}\sigma_i$$

برای ماتریس مربعی و رتبه کامل $A_{n\times n}$ معکوس ماتریس بصورت زیر تعریف می شود،

$$A^{-1} = (U\Sigma V^T)^{-1} = (V^T)^{-1}\Sigma^{-1}U^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T \qquad (۷-۷)$$

که در آن $\Sigma^{-1} = \operatorname{diag}(1/\sigma_1, 1/\sigma_2, \ldots, 1/\sigma_n)$ می باشد.

مثال ۷-۱۱

با استفاده از تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A دترمینان و معکوس آن را محاسبه نمایید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

مقادیر منفرد ماتریس A بصورت زیر هستند،

$$\sigma_1 = 3.9577, \qquad \sigma_2 = 1.1345, \qquad \sigma_3 = 0.2227$$

لذا داریم،

$$|A| = \prod_{i=1}^{3}\sigma_i = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 3.9577 \times 1.1345 \times 0.2227 = 1$$

تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$A = U\Sigma V^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.2253 & -0.9674 & 0.1156 \\ 0.9095 & 0.1662 & -0.3810 \\ 0.3493 & 0.1910 & 0.9173 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.9577 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1345 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2227 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0569 & -0.8527 & 0.5192 \\ 0.8346 & -0.2448 & -0.4935 \\ 0.5479 & 0.4614 & 0.6978 \end{bmatrix}^T$$

با توجه به تعریف معکوس ماتریس بصورت زیر بدست می آید،

$$A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0569 & -0.8527 & 0.5192 \\ 0.8346 & -0.2448 & -0.4935 \\ 0.5479 & 0.4614 & 0.6978 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3.9577 & 0 & 0 \\ 0 & 1/1.1345 & 0 \\ 0 & 0 & 1/0.2227 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2253 & -0.9674 & 0.1156 \\ 0.9095 & 0.1662 & -0.3810 \\ 0.3493 & 0.1910 & 0.9173 \end{bmatrix}^T$$

بنابراین داریم،

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1.0000 & -1.0000 & 2.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & -2.0000 \\ -0.0000 & -1.0000 & 3.0000 \end{bmatrix}$$

□

۴-۷ ماتریس شبه معکوس و حل مسئله حداقل مربعات

در مسئله حداقل مربعات هدف یافتن بهترین پاسخ $\hat{\mathbf{x}}$ برای دستگاه معادلات ناسازگار $A_{m\times n}\mathbf{x}_{n\times 1} = \mathbf{b}_{m\times 1}$ است، بطوریکه $\|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|$ حداقل گردد. همانطور که در فصول قبلی صحبت شد زمانیکه ماتریس A رتبه کامل داشته باشد، می توان بوسیله حل مستقیم معادلات نرمال و یا با استفاده از تجزیه QR و تجزیه چالسکی پاسخ مسئله حداقل مربعات را بدست آورد. لیکن روش های یاد شده در مواقعی که ماتریس A نقص رتبه دارد و یا زمانیکه ماتریس $A^T A$ یک ماتریس بد حالت باشد قابل استفاده نیستند. در چنین مواقعی می توان از روشی مبتنی بر تجزیه مقادیر منفرد ماتریس استفاده نمود.

برای ماتریس $A_{m\times n}$ با رتبه k ماتریس **شبه معکوس**[۱] $A^{\#}$ بصورت زیر تعریف نمود،

$$A_{m\times n} = U\Sigma V^T \quad \rightarrow \quad A^{\#}_{n\times m} = V\Sigma^{\#}U^T \qquad (۸-۷)$$

که در آن داریم،

$$\Sigma^{\#}_{n\times m} = \mathrm{diag}(1/\sigma_1, 1/\sigma_2, \ldots, 1/\sigma_k, 0, \ldots, 0) \quad , \quad \sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \cdots \ge \sigma_k > 0$$

ماتریس شبه معکوس تعریف شده دارای شرایط زیر است،

۱- $AA^{\#}A = A$

۲- $A^{\#}AA^{\#} = A^{\#}$

۳- $(AA^{\#})^T = AA^{\#}$

۴- $(A^{\#}A)^T = A^{\#}A$

این چهار شرط را **شرایط مور- پِنرُس**[۱] می نامند. علاوه بر این برخی از خواص ماتریس شبه معکوس عبارتند از،

[۱] Pseudo - Inverse

- برای ماتریس $A_{m\times n}$ شبه معکوس $A^{\#}_{n\times m}$ منحصر بفرد است.
- $(A^{\#})^{\#} = A$ و $(A^T)^{\#} = (A^{\#})^T$.
- $A^{\#} = (A^T A)^{\#} A^T = A^T (AA^T)^{\#}$.
- ماتریس های $I - AA^{\#}$, $I - A^{\#}A$, $A^{\#}A, AA^{\#}$ متقارن هستند.

از ماتریس شبه معکوس برای حل مسئله حداقل مربعات استفاده می شود،

نکته۱: اگر ماتریس $A^T A$ منفرد یا بد حالت باشد، $\hat{\mathbf{x}} = A^{\#}\mathbf{b}$ جواب مسئله حداقل مربعات است.

نکته۲: اگر ماتریس $A_{m\times n}$ رتبه کامل داشته باشد، $A^{\#} = (A^T A)^{-1} A^T$ معکوس چپ است.

نکته۳: اگر ماتریس $A_{n\times n}$ رتبه کامل داشته باشد، $A^{\#} = A^{-1}$ است.

حال ثابت می کنیم که اگر شبه معکوس بصورت $A^{\#} = V\Sigma^{\#}U^T$ معرفی گردد، $\mathbf{x} = A^{\#}\mathbf{b}$ جواب مسئله حداقل مربعات برای دستگاه معادلات ناسازگار $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ است.

اثبات: برای ماتریس $A_{m\times n}$ با رتبه k می توان نوشت،

$$\begin{aligned}\|A\mathbf{x}-\mathbf{b}\| &= \|U\Sigma V^T\mathbf{x}-\mathbf{b}\| = \|U^T\|\|U\Sigma V^T\mathbf{x}-\mathbf{b}\| \\ &= \|U^T U\Sigma V^T\mathbf{x} - U^T\mathbf{b}\| = \|\Sigma V^T\mathbf{x} - U^T\mathbf{b}\| \\ &= \|\Sigma\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}_0\|\end{aligned}$$

که در آن $\mathbf{b}_0 = U^T\mathbf{b}$ و $\mathbf{x}_0 = V^T\mathbf{x}$ تعریف شده است.

حال می توان نوشت،

$$\min\|A\mathbf{x}-\mathbf{b}\| = \min\|\Sigma\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}_0\|$$

$$\Sigma\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}_0 = \left[\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \sigma_k & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \vdots \\ x_{0n}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{01} \\ b_{02} \\ \vdots \\ b_{0m}\end{bmatrix}$$

$$\|\Sigma\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}_0\| = \sqrt{|\sigma_1 x_{01} - b_{01}|^2 + |\sigma_2 x_{02} - b_{02}|^2 + \cdots + |\sigma_k x_{0k} - b_{0k}|^2 + |-b_{0(k+1)}|^2 + \cdots + |-b_{0m}|^2}$$

مشخص است که $\min\|\Sigma\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}_0\|$ زمانی بدست می آید که بردار $\mathbf{x}_0$ بصورت زیر تعریف گردد،

---

[1] Moore - Penrose Conditions

$$\mathbf{x}_0=\begin{bmatrix}x_{01}\\x_{02}\\\vdots\\x_{0n}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc:c}1/\sigma_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0\\ 0 & & 1/\sigma_k & \\ \hdashline & 0 & & 0\end{array}\right]\begin{bmatrix}b_{01}\\b_{02}\\\vdots\\b_{0m}\end{bmatrix}=\Sigma^{\#}\mathbf{b}_0$$

بنابراین $\mathbf{x}_0=\Sigma^{\#}\mathbf{b}_0$ برداری است که مقدار $\|\Sigma\mathbf{x}_0-\mathbf{b}_0\|$ به ازای آن حداقل می شود.

با توجه به اینکه $\mathbf{b}_0=U^T\mathbf{b}$ و $\mathbf{x}_0=V^T\mathbf{x}$ است و $\min\|A\mathbf{x}-\mathbf{b}\|=\min\|\Sigma\mathbf{x}_0-\mathbf{b}_0\|$ است، می توان جواب حداقل مربعات برای $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ را هم بدست آورد،

$$\mathbf{x}_0=\Sigma^{\#}\mathbf{b}_0 \quad\rightarrow\quad V^T\mathbf{x}=\Sigma^{\#}U^T\mathbf{b} \quad\rightarrow\quad \mathbf{x}=V\Sigma^{\#}U^T\mathbf{b}$$

لذا $\mathbf{x}=V\Sigma^{\#}U^T\mathbf{b}$ جواب حداقل مربعات برای $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ می باشد و $A^{\#}=V\Sigma^{\#}U^T$ همان شبه معکوس ماتریس A است.

□

مثال۷-۱۲

ماتریس A را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\end{bmatrix} \quad,\quad R=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\\1&-1\end{bmatrix}$$

با استفاده از شرایط مور-پِنرُس شبه معکوس بودن ماتریس R را بررسی نمایید.

به ترتیب شرایط مور- پِنرُس را بررسی می نماییم،

1. $$ARA=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\end{bmatrix}\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\end{bmatrix}=A$$

2. $$RAR=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\end{bmatrix}\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\\1&-1\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\\1&-1\end{bmatrix}=R$$

3. $$(AR)^T=\left(\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\end{bmatrix}\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\\1&-1\end{bmatrix}\right)^T=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}=AR$$

$$4. \qquad (RA)^T = \left(\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \right)^T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = RA$$

لذا ماتریس R یک شبه معکوس برای ماتریس A می باشد.

□

مثال۷-۱۳

با استفاده از روش تجزیه مقادیر منفرد، یک شبه معکوس برای ماتریس A بیابید و نشان دهید $AA^\#$ یک ماتریس متقارن است.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A بصورت زیر می باشد،

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} 0.5774 & 0.7071 & -0.4082 \\ -0.5774 & 0.7071 & 0.4082 \\ -0.5774 & 0 & -0.8165 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.4495 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.5774 & 0.1066 & -0.8095 \\ -0.5774 & 0.5774 & 0.3515 & 0.4581 \\ -0.5774 & 0 & -0.8095 & -0.1066 \\ -0.5774 & -0.5774 & 0.4581 & -0.3515 \end{bmatrix}^T$$

لذا $\operatorname{rank}(A) = 2$ است، بنابراین $\Sigma^\#$ و $A^\#$ بصورت زیر بدست می آیند،

$$\Sigma^\# = \begin{bmatrix} 0.3333 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4082 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad A^\# = \begin{bmatrix} 0.1667 & 0.1667 & 0 \\ 0.0556 & 0.2778 & 0.1111 \\ -0.1111 & 0.1111 & 0.1111 \\ -0.2778 & -0.0556 & 0.1111 \end{bmatrix}$$

حال می توان نشان داد که $AA^\#$ یک ماتریس متقارن است،

$$AA^{\#}=\begin{bmatrix}1&0&-1&-2\\1&2&1&0\\0&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.1667&0.1667&0\\0.0556&0.2778&0.1111\\-0.1111&0.1111&0.1111\\-0.2778&-0.0556&0.1111\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}0.8333&0.1667&-0.3333\\0.1667&0.8333&0.3333\\-0.3333&0.3333&0.3333\end{bmatrix}$$

در نرم افزار MATLAB از دستور pinv(A) برای محاسبه شبه معکوس یک ماتریس استفاده می شود،

```
A =[1 0 -1 -2;1 2 1 0;0 1 1 1];
pinv(A)
ans =
    0.1667    0.1667   -0.0000
    0.0556    0.2778    0.1111
   -0.1111    0.1111    0.1111
   -0.2778   -0.0556    0.1111
```

□

مثال۷-۱۴

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\0&1&1\end{bmatrix}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

ابتدا سازگار یا ناسازگار بودن دستگاه را بررسی نمایید، سپس جواب حداقل مربعات را با استفاده از تجزیه مقادیر منفرد بدست آورید و نُرم خطا را بررسی نمایید.

- ابتدا سازگار یا ناسازگار بودن سیستم را بررسی می نماییم. از آنجاییکه $\mathrm{rank}(A)=2$ و $\mathrm{rank}(A\,|\,\mathbf{b})=3$ است، لذا سیستم ناسازگار است و باید جواب حداقل مربعات را برای آن بدست آورد. از آنجاییکه ماتریس A نقص رتبه دارد، نمی توان جواب حداقل مربعات را با استفاده از معادله نُرمال بصورت $\hat{\mathbf{x}}=(A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}$ بدست آورد، لذا در چنین مواقعی از شبه معکوس مور- پنرُز و تجزیه مقادیر منفرد برای حل مسئله حداقل مربعات استفاده می نماییم.

- تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A بصورت زیر می باشد،

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} -0.0849 & 0.9089 & 0.4082 \\ 0.8736 & 0.2650 & -0.4082 \\ 0.4792 & -0.3220 & 0.8165 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.7651 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5344 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.2852 & 0.7651 & 0.5774 \\ 0.8052 & 0.1355 & -0.5774 \\ 0.5199 & -0.6295 & 0.5774 \end{bmatrix}^T$$

- حال شبه معکوس را بدست می آوریم،

$$A^{\#} = V\Sigma^{\#}U^T$$

$$\Sigma^{\#} = \begin{bmatrix} 1/2.7651 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5344 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad A^{\#} = \begin{bmatrix} 0.4444 & 0.2222 & -0.1111 \\ 0.0556 & 0.2778 & 0.1111 \\ -0.3889 & 0.0556 & 0.2222 \end{bmatrix}$$

لذا جواب حداقل مربعات بصورت زیر بدست می آید،

$$\hat{\mathbf{x}} = A^{\#}\mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0.5556 \\ 0.4444 \\ -0.1111 \end{bmatrix}$$

حل مسئله حداقل مربعات با استفاده از تجزیه مقادیر منفرد روشی با محاسبات بالا ولی پایداری بسیار خوب است و در مواقعی که ماتریس A نقص رتبه دارد یا $A^T A$ بد حالت است کارایی خوبی دارد.

- حال نُرم خطا را محاسبه می کنیم،

$$\|\varepsilon\| = \|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\| \quad \rightarrow \quad \|\varepsilon\| = \left\| \begin{bmatrix} -0.3333 \\ 0.3333 \\ -0.6667 \end{bmatrix} \right\| = 0.8165$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[1 0 -1;1 2 1;0 1 1];
b =[1;1;1];
x = pinv(A)* b
x =
    0.5556
    0.4444
   -0.1111
```

```
norm_e = norm(A * x - b)
norm_e =
    0.8165
```

□

مثال۷-۱۵

برای دستگاه معادلات ناسازگار زیر جواب حداقل مربعات را بدست آورید،

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 5 \\ -2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 = 4 \end{cases}$$

- ابتدا سازگار یا ناسازگار بودن سیستم را بررسی می نماییم.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

از آنجاییکه $\operatorname{rank}(A) = 1$ و $\operatorname{rank}(A \mid \mathbf{b}) = 2$ است، لذا سیستم ناسازگار است و باید جواب حداقل مربعات را برای آن بدست آورد. با توجه به رتبه کامل نبودن ماتریس A برای حل مسئله حداقل مربعات باید از شبه معکوس استفاده کرد.

- مقادیر منفرد ماتریس A برابر با جذر مقادیر ویژه ماتریس $A^T A$ است،

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -28 \\ -28 & 56 \end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda I - A^T A\right| = \begin{vmatrix} \lambda - 14 & 28 \\ 28 & \lambda - 56 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 70) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 70, \lambda_2 = 0$$

پس مقادیر منفرد ماتریس A برابر است با،

$$\sigma_1 = \sqrt{70}, \qquad \sigma_2 = 0$$

- حال تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A را بدست می آوریم،

$$A = U\Sigma V^T$$

ستون های ماتریس U بردارهای ویژه یکامتعامد ماتریس AA^T هستند. برای محاسبه ماتریس U به شکل زیر عمل می نماییم،

$$AA^T=\begin{bmatrix}1&-2\\-2&4\\3&-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&3\\-2&4&-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-10&15\\-10&20&-30\\15&-30&45\end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda I-AA^T\right|=\begin{vmatrix}\lambda-5&10&-15\\10&\lambda-20&30\\-15&30&\lambda-45\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-70)=0\rightarrow\lambda_1=70,\lambda_2=0,\lambda_3=0$$

ماتریس AA^T یک مقدار ویژه حقیقی متمایز و یک مقدار ویژه حقیقی تکراری مرتبه دو دارد.
ابتدا بردار ویژه متناظر با مقدار حقیقی متمایز را بدست می آوریم،

$$\lambda_1=70\rightarrow(\lambda_1 I-AA^T)\mathbf{u}_1=\mathbf{0}\rightarrow\begin{bmatrix}65&10&-15\\10&50&30\\-15&30&25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11}\\u_{21}\\u_{31}\end{bmatrix}=\mathbf{0}\rightarrow\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}$$

برای مقدار ویژه تکراری $n-\text{rank}(\lambda_2 I-AA^T)=3-1=2$ است لذا دو بردار ویژه مستقل خطی داریم و نیازی به محاسبه بردار ویژه تعمیم یافته نیست.

$$\lambda_2=0\rightarrow(\lambda_2 I-AA^T)\mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}-5&10&-15\\10&-20&30\\-15&30&-45\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{12}\\u_{22}\\u_{32}\end{bmatrix}=\mathbf{0}\rightarrow\mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\mathbf{u}_3=\begin{bmatrix}3\\3\\1\end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس $U_{3\times3}$ با یکامتعامد سازی بصورت زیر بدست می آید،

$$\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1&\mathbf{u}_2&\mathbf{u}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&3\\-2&2&3\\3&1&1\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad U=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{14}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{3}{\sqrt{19}}\\\frac{-2}{\sqrt{14}}&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{3}{\sqrt{19}}\\\frac{3}{\sqrt{14}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{19}}\end{bmatrix}$$

حال ماتریس V را بدست می آوریم، ستون های ماتریس V بردارهای ویژه ماتریس A^TA است،

$$A^TA=\begin{bmatrix}1&-2&3\\-2&4&-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\-2&4\\3&-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14&-28\\-28&56\end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda I-A^TA\right|=\begin{vmatrix}\lambda-14&28\\28&\lambda-56\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-70)=0\quad\rightarrow\quad\lambda_1=70,\lambda_2=0$$

ماتریس A^TA دو مقدار ویژه حقیقی و متمایز دارد و بردارهای ویژه متناظر با هر یک از آنها را بدست می آوریم،

$$\lambda_1=70\rightarrow(\lambda_1 I-A^TA)\mathbf{v}_1=\mathbf{0}\rightarrow\begin{bmatrix}56&28\\28&14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\v_{21}\end{bmatrix}=\mathbf{0}\rightarrow\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 0 \rightarrow (\lambda_2 I - A^T A)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} -14 & 28 \\ 28 & -56 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس $V_{2\times 2}$ بایکا متعامد سازی بصورت زیر بدست می آید،

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

- لذا تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A به شکل زیر بدست می آید،

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{19}} \\ \frac{-2}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{19}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{19}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{70} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}^T$$

حال ماتریس شبه معکوس را بدست می آوریم،

$$A^\# = V\Sigma^\# U^T$$

$$\Sigma^\# = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{70}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^\# = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{70}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{19}} \\ \frac{-2}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{19}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{19}} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{70} & \frac{-2}{70} & \frac{3}{70} \\ \frac{-2}{70} & \frac{4}{70} & \frac{-6}{70} \end{bmatrix}$$

لذا جواب حداقل مربعات بصورت زیر بدست می آید،

$$\hat{\mathbf{x}} = A^\#\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{70} & \frac{-2}{70} & \frac{3}{70} \\ \frac{-2}{70} & \frac{4}{70} & \frac{-6}{70} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{17}{70} \\ \frac{-34}{70} \end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[1 -2;-2 4;3 -6];
b =[5;0;4];
x = pinv(A)* b
x =
    0.2429
   -0.4857
```

□

مثال ۷-۱۶

در جدول زیر آمار جمعیت کشوری هر ۱۰ سال یکبار آورده شده است.

سال (x)	۱۹۰۰	۱۹۱۰	۱۹۲۰	۱۹۳۰	۱۹۴۰	۱۹۵۰	۱۹۶۰	۱۹۷۰	۱۹۸۰
جمعیت (y) میلیون	۷۶/۰	۹۲/۰	۱۰۵/۷	۱۲۳/۲	۱۳۱/۷	۱۵۰/۷	۱۷۹/۳	۲۰۳/۲	۲۲۶/۵

الف) با محاسبه شبه معکوس یک مدل مرتبه دوم بصورت $y = ax^2 + bx + c$ بر اساس روش حداقل مربعات برای افزایش جمعیت بدست آورید.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} (1900)^2 & 1900 & 1 \\ (1910)^2 & 1910 & 1 \\ (1920)^2 & 1920 & 1 \\ (1930)^2 & 1930 & 1 \\ (1940)^2 & 1940 & 1 \\ (1950)^2 & 1950 & 1 \\ (1960)^2 & 1960 & 1 \\ (1970)^2 & 1970 & 1 \\ (1980)^2 & 1980 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 76.0 \\ 92.0 \\ 105.7 \\ 123.2 \\ 131.7 \\ 150.7 \\ 179.3 \\ 203.2 \\ 226.5 \end{bmatrix}$$

بدیهی است که دستگاه معادلات بدست آمده ناسازگار است و جواب مسئله حداقل مربعات با استفاده از شبه معکوس بصورت زیر بدست می آید،

$$\hat{\mathbf{x}} = A^{\#}\mathbf{y} \quad , \quad A^{\#} = V\Sigma^{\#}U^T$$

لذا ابتدا تجزیه SVD ماتریس A را بدست می آوریم،

$$A = U\Sigma V^T$$

$$U = \begin{bmatrix} 0.3196 & 0.5188 & 0.5379 & -0.0168 & 0.0408 & 0.0198 & -0.0796 & -0.2576 & -0.5141 \\ 0.3229 & 0.3945 & 0.1375 & 0.0359 & 0.1864 & 0.3061 & 0.3949 & 0.4529 & 0.4800 \\ 0.3263 & 0.2687 & -0.1489 & -0.4555 & -0.4854 & -0.4221 & -0.2655 & -0.0157 & 0.3273 \\ 0.3297 & 0.1417 & -0.3213 & 0.8342 & -0.1712 & -0.1558 & -0.1196 & -0.0627 & 0.0149 \\ 0.3332 & 0.0133 & -0.3798 & -0.1910 & 0.7871 & -0.2078 & -0.1757 & -0.1166 & -0.0305 \\ 0.3366 & -0.1164 & -0.3243 & -0.1757 & -0.2091 & 0.7807 & -0.2064 & -0.1703 & -0.1110 \\ 0.3401 & -0.2474 & -0.1549 & -0.1200 & -0.1597 & -0.1902 & 0.7885 & -0.2236 & -0.2266 \\ 0.3435 & -0.3798 & 0.1285 & -0.0239 & -0.0647 & -0.1205 & -0.1912 & 0.7233 & -0.3772 \\ 0.3470 & -0.5135 & 0.5258 & 0.1128 & 0.0758 & -0.0102 & -0.1454 & -0.3296 & 0.4371 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3\\ 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11296800.2191956 & 0 & 0\\ 0 & 77.4101337 & 0\\ 0 & 0 & 0.0004664\\ 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$V=\begin{bmatrix}1.0000 & -0.0005 & 0.0000\\ 0.0005 & 1.0000 & -0.0010\\ 0.0000 & 0.0010 & 1.0000\end{bmatrix}$$

حال ماتریس $\Sigma^{\#}$ را بدست می آوریم،

$$\Sigma^{\#}=\begin{bmatrix}1/\sigma_1 & 0 & 0 & 0&0&0&0&0&0\\ 0 & 1/\sigma_2 & 0 & 0&0&0&0&0&0\\ 0 & 0 & 1/\sigma3 & 0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(11296800.2191956)^{-1} & 0 & 0 & 0&0&0&0&0&0\\ 0 & (77.4101337)^{-1} & 0 & 0&0&0&0&0&0\\ 0 & 0 & (0.0004664)^{-1} & 0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

و جواب مسئله حداقل مربعات بصورت زیر بدست می آید،

$$\hat{\mathbf{x}}=A^{\#}\mathbf{y}=V\Sigma^{\#}U^{T}\mathbf{y}$$

$$\hat{\mathrm{x}}=\begin{bmatrix}\mathrm{a}\\ \mathrm{b}\\ \mathrm{c}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.0104556277\\ -38.7173354979\\ 35897.0044588966\end{bmatrix}$$

بنابراین ضرایب منحنی مرتبه دوم $y=ax^2+bx+c$ بدست می آید. مدل بدست آمده به شکل زیر است،

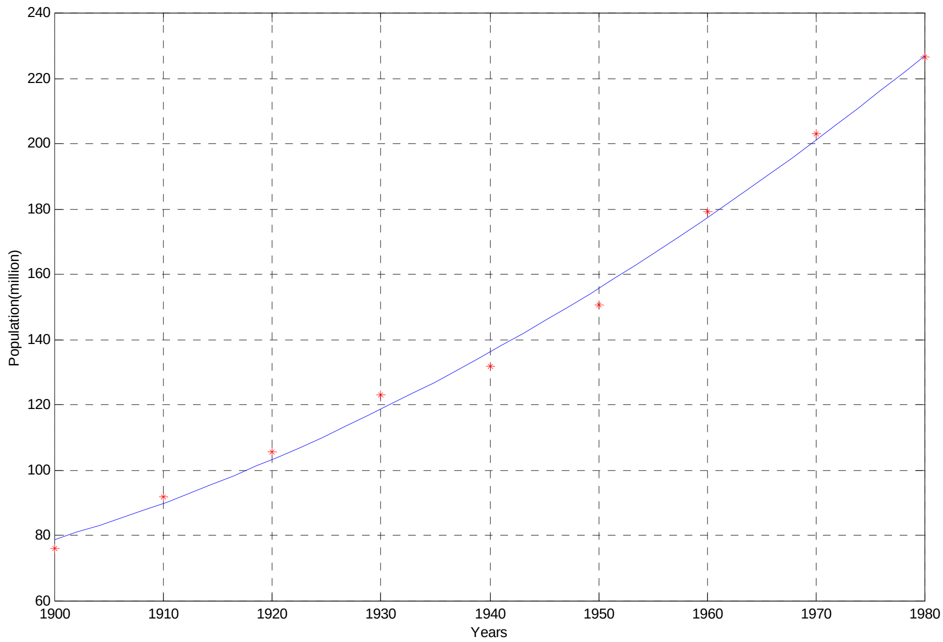
$$y=0.0104556277x^2-38.7173354979x+35897.0044588966$$

ب) بر اساس مدل بدست آمده میزان جمعیت را در سال ۱۹۹۰ تخمین بزنید.

$$y=0.0104556277\times(1990)^2-38.7173354979\times1900+35897.0044588966$$

$$y=254.838\ \ million$$

منحنی بدست آمده همراه با نقاط داده شده در شکل زیر رسم شده است،



شکل(۵-۱) نمودار نرخ تغییرات جمعیت بر حسب سال

برنامه مربوطه در نرم افزار MATLAB بصورت زیر است،

```
x = [1900 1910 1920 1930 1940 1950 1960 1970 1980];
y = [76.0 92.0 105.7 123.2 131.7 150.7 179.3 203.2 226.5];
NA = size(x,2);
A = zeros(NA,3);
for i=1:NA
   A(i,:)=[x(i)^2 x(i) 1];
end
z=pinv(A)*y'
plot(x,y,'r*'),grid on
hold on
xx=linspace(1900,1980,40);
yy = (xx.^2)*z(1)+xx.*z(2)+z(3);
plot(xx,yy),grid on,xlabel('Years'),ylabel('Population(million)')
```

نتیجه اجرای برنامه بصورت زیر است،

```
z =
  1.0e+004 *
   0.00000104556277
  -0.00387173354979
   3.58970044588966
```

□

۷-۵ تقریب رتبه پایین ماتریس ها[۱]

یکی از کاربردهای تجزیه مقادیر منفی در تقریب یک ماتریس با یک ماتریس رتبه پایین تر می باشد. تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A با رتبه r را در نظر بگیرید،

$$A = U\Sigma V^T$$

$$A = \left[U_1 \;\middle|\; U_2\right] \left[\begin{array}{ccc:c} \sigma_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \sigma_r & \\ \hdashline & 0 & & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} V_1^T \\ \hline V_2^T \end{array}\right], \qquad \operatorname{rank}(A) = r \tag{۷-۹}$$

مسئله، یافتن ماتریس B با رتبه $k < r$ است، بطوریکه $\|A-B\|_2$ مقدار کوچکی گردد، تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A را می توان بصورت زیر نمایش داد،

$$A = \mathbf{u}_1\sigma_1\mathbf{v}_1^T + \mathbf{u}_2\sigma_2\mathbf{v}_2^T + \cdots + \mathbf{u}_r\sigma_r\mathbf{v}_r^T \qquad , \qquad \sigma_1 > \sigma_2 > \cdots > \sigma_r$$

برای یافتن پاسخ این مسئله ماتریس A را بصورت زیر بیان می کنیم،

$$A = \left[U_{1a} \;\middle|\; U_{1b} \;\middle|\; U_2\right] \left[\begin{array}{ccc:ccc:c} \sigma_1 & & 0 & & & & \\ & \ddots & & & 0 & & 0 \\ 0 & & \sigma_k & & & & \\ \hdashline & & & \sigma_{k+1} & & 0 & \\ & 0 & & & \ddots & & 0 \\ & & & 0 & & \sigma_r & \\ \hdashline & 0 & & & 0 & & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} V_{1a}^T \\ \hline V_{1b}^T \\ \hline V_2^T \end{array}\right] \tag{۷-۱۰}$$

و یا بصورت زیر می توان بیان کرد،

$$A = \mathbf{u}_1\sigma_1\mathbf{v}_1^T + \mathbf{u}_2\sigma_2\mathbf{v}_2^T + \cdots + \mathbf{u}_k\sigma_k\mathbf{v}_k^T + \mathbf{u}_{k+1}\sigma_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}^T + \cdots + \mathbf{u}_r\sigma_r\mathbf{v}_r^T$$

[۱] Low Rank Approximation

از آنجاییکه $\sigma_1 > \sigma_2 > \cdots > \sigma_r$ است، جملاتی که شامل مقادیر منفرد غالب تری هستند نقش بیشتری در ساختار ماتریس A دارند. حال اگر اختلاف بین σ_k و σ_{k+1} زیاد باشد، به راحتی می توان از جملات $k+1$ به بعد صرفنظر نمود و ماتریس را فقط برحسب جملات غالب تر بیان کرد. بنابراین ماتریس B را می توان بصورت زیر انتخاب نمود،

$$B = \mathbf{u}_1\sigma_1\mathbf{v}_1^T + \mathbf{u}_2\sigma_2\mathbf{v}_2^T + \cdots + \mathbf{u}_k\sigma_k\mathbf{v}_k^T$$

$$B = \left[U_{1a} \middle| \; U_{1b} \middle| \; U_2\right] \left[\begin{array}{ccc:c:c} \sigma_1 & & 0 & & \\ & \ddots & & 0 & 0 \\ 0 & & \sigma_k & & \\ \hdashline & 0 & & 0 & 0 \\ \hdashline & 0 & & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} V_{1a}^T \\ \hline V_{1b}^T \\ \hline V_2^T \end{array}\right] \qquad (۱۱\text{-}۷)$$

بنابراین داریم،

$$B = U_{1a}\begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_k \end{bmatrix} V_{1a}^T \qquad (۱۲\text{-}۷)$$

تفاوت بین این دو ماتریس بصورت زیر بیان می شود،

$$A - B = \mathbf{u}_{k+1}\sigma_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}^T + \cdots + \mathbf{u}_r\sigma_r\mathbf{v}_r^T$$

$$A - B = U_{1b}\begin{bmatrix} \sigma_{k+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_r \end{bmatrix} V_{1b}^T \qquad (۱۳\text{-}۷)$$

رابطه بالا خود یک تجزیه مقادیر منفرد می باشد، لذا $\|A - B\|_2 \le \sigma_{k+1}$ خواهد بود و به این ترتیب خطای تقریب نیز بدست می آید،

مثال۷-۱۷

ماتریس A را در نظر بگیرید،

$$A = \begin{bmatrix} 11.0800 & 6.8200 & 1.7600 & -6.8200 \\ 2.5000 & -1.0100 & -2.6000 & 1.1900 \\ -4.8800 & -5.0700 & -3.2100 & 5.2000 \\ -0.4900 & 1.5200 & 2.0700 & -1.6600 \\ -14.0400 & -12.4000 & -6.6600 & 12.6500 \\ 0.2700 & -8.5100 & -10.1900 & 9.1500 \\ 9.5300 & -9.8400 & -17.0000 & 11.0000 \\ -12.0100 & 3.6400 & 11.1000 & -4.4800 \end{bmatrix}$$

تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A بصورت زیر است،

$$V = \begin{bmatrix} 0.0356 & 0.9208 & 0.1392 & -0.3627 \\ 0.5382 & 0.1662 & 0.4922 & 0.6637 \\ 0.6143 & -0.3260 & 0.3116 & -0.6476 \\ -0.5760 & -0.1354 & 0.8008 & -0.0929 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0.2464 & 0.4454 & -0.6206 & 0.3274 & 0.4099 & -0.1105 & -0.2439 & 0.0943 \\ -0.0743 & 0.1075 & -0.2834 & -0.7780 & -0.0872 & 0.2922 & -0.4377 & 0.1125 \\ -0.2137 & -0.1903 & -0.4949 & 0.1104 & -0.5595 & -0.3406 & -0.1220 & -0.4659 \\ 0.0822 & -0.0247 & -0.2006 & 0.0615 & 0.1320 & 0.7188 & 0.3088 & -0.5649 \\ -0.5038 & -0.5538 & -0.1374 & -0.0235 & 0.6265 & -0.0990 & -0.1235 & -0.0500 \\ -0.4372 & 0.0350 & 0.0550 & 0.5017 & -0.2648 & 0.4844 & -0.3881 & 0.3123 \\ -0.5902 & 0.4266 & -0.2108 & -0.1367 & -0.0236 & -0.0597 & 0.6012 & 0.2025 \\ 0.2968 & -0.5132 & -0.4279 & 0.0232 & -0.1751 & 0.1472 & 0.3336 & 0.5489 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 36.8258 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 26.2369 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0220 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0051 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

با توجه به مقادیر منفرد ماتریس A رتبه ماتریس چهار است

$$\sigma_1 = 36.8258, \quad \sigma_2 = 26.2369, \quad \sigma_3 = 0.0220, \quad \sigma_4 = 0.0051$$

حال می خواهیم یک تقریب رتبه پایین از ماتریس A بدست آوریم. مشخص است که مقادیر منفرد اول و دوم غالب هستند و به راحتی می توان از بقیه مقادیر منفرد صرفنظر نموده و یک تقریب رتبه دو برای ماتری A بدست آورد،

$$B = \begin{bmatrix} 0.2464 & 0.4454 \\ -0.0743 & 0.1075 \\ -0.2137 & -0.1903 \\ 0.0822 & -0.0247 \\ -0.5038 & -0.5538 \\ -0.4372 & 0.0350 \\ -0.5902 & 0.4266 \\ 0.2968 & -0.5132 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 36.8258 & 0 \\ 0 & 26.2369 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0356 & 0.5382 & 0.6143 & -0.5760 \\ 0.9208 & 0.1662 & -0.3260 & -0.1354 \end{bmatrix}$$

اندازه خطای تقریب در این مثال بصورت زیر بدست می آید،

$$\|A - B\|_2 \le \sigma_3 \approx 0.0220$$

حال می توان ماتریس B را بدست آورده عناصر آن را با ماتریس A مقایسه نمود،

$$B = \begin{bmatrix} 11.0825 & 6.8256 & 1.7653 & -6.8089 \\ 2.4994 & -1.0043 & -2.6006 & 1.1946 \\ -4.8783 & -5.0650 & -3.2062 & 5.2088 \\ -0.4893 & 1.5220 & 2.0716 & -1.6564 \\ -14.0396 & -12.3984 & -6.6591 & 12.6524 \\ 0.2708 & -8.5123 & -10.1887 & 9.1493 \\ 9.5304 & -9.8373 & -16.9990 & 11.0037 \\ -12.0086 & 3.6446 & 11.1030 & -4.4724 \end{bmatrix}$$

□

۷-۵-۱- کاهش نویز سیگنال ها

یکی از کاربردهای تقریب رتبه پایین ماتریس ها در کاهش نویز سیگنال ها به ویژه سیگنال های صوتی و تصویری است. فرض کنید از سیگنال زمان پیوسته $X(t)$ نمونه برداری کرده و آن را بصورت بردار زیر نمایش دهیم،

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

حال می توان نمونه ها را با یک ترتیب مناسب دسته بندی کرد و آن ها را در قالب یک ماتریس نمایش داد،

$$A_{m\times n}=\begin{bmatrix} x_1 & x_{m+1} & x_{2m+1} & \cdots \\ x_2 & x_{m+2} & x_{2m+2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_m & x_{2m} & x_{3m} & \cdots \end{bmatrix}$$

حال اگر مقادیر منفرد ماتریس A را بدست آوریم، خواهیم دید که برخی از آنها نسبت به دیگر مقادیر منفرد غالب تر هستند، لذا جملات آخر نقش کمتری در ایجاد ساختار ماتریس و سیگنال دارند،

$$A=\mathbf{u}_1\sigma_1\mathbf{v}_1^T+\mathbf{u}_2\sigma_2\mathbf{v}_2^T+\cdots+\mathbf{u}_k\sigma_k\mathbf{v}_k^T+\mathbf{u}_{k+1}\sigma_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}^T+\cdots+\mathbf{u}_r\sigma_r\mathbf{v}_r^T$$

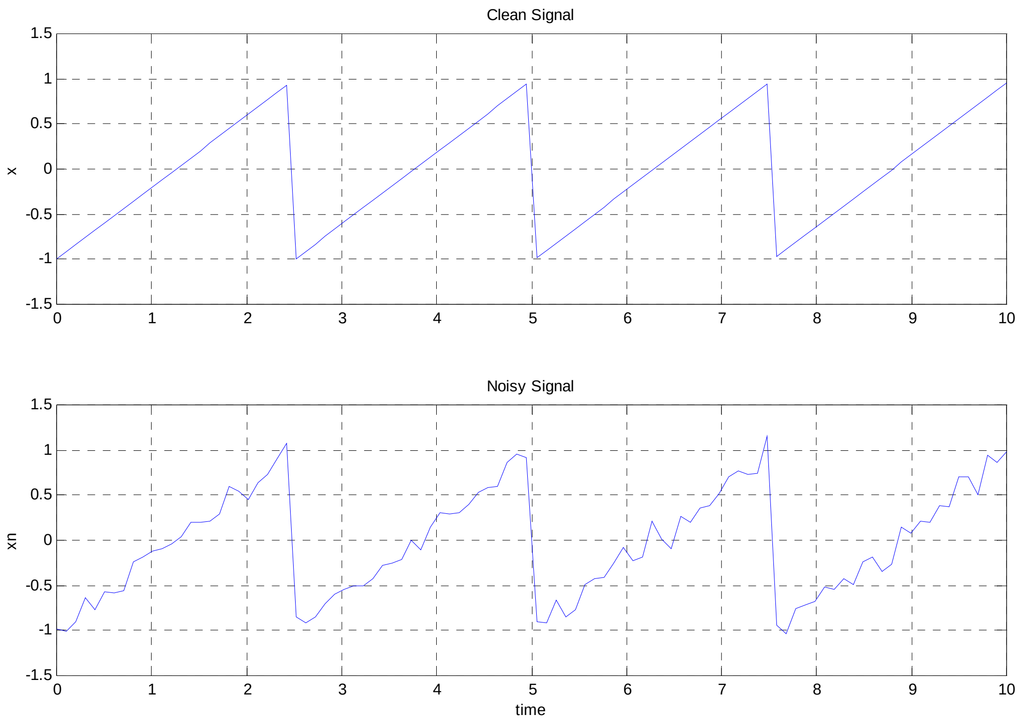
حال سیگنال نویزی زیر را در نظر بگیرید،

$$\mathbf{x}_n=\mathbf{x}+\mathbf{n}$$

نویز سبب افزایش اندازه مقادیر منفرد کوچک تر ماتریس شده و جملات آخر را پر اهمیت تر جلوه می دهد و دخالت این جملات سبب تخریب ساختار اصلی ماتریس و سیگنال می شود. حال اگر با استفاده از روش تقریب رتبه پایین ماتریس بتوان این جملات را حذف نمود به نوعی می توان نویز را کاهش داد. در این روش جهت بهتر شدن وضعیت سیگنال گاهی از روش وزن دهی برای مقادیر ویژه میانی نیز استفاده می شود.

مثال ۷-۱۸

سیگنال بدون نویز و سیگنال نویزی زیر را در نظر بگیرید،



شکل(۵-۲)- سیگنال بدون نویز و سیگنال نویزی

برای ایجاد چنین سیگنال هایی در نرم افزار MATLAB از دستور زیر استفاده می نماییم،

```
t = linspace(0,10,100);
x = sawtooth(2.5*t);
xn = x + 0.1*randn(size(x));
figure(1)
subplot(211),plot(t,x)
grid on,title('Clean Signal'),ylabel('x')
subplot(212),plot(t,xn)
grid on,title('Noisy Signal'),xlabel('time'),ylabel('xn')
```

ابتدا هر یک از سیگنال ها را بصورت یک ماتریس 10×10 نمایش می دهیم، سپس مقادیر منفرد هر یک از ماتریس ها را بدست آورده مقایسه می کنیم،

```
Ax = zeros(10,10);
Axn = zeros(10,10);
j = 1;
for i = 1:10:100
   Ax(:,j) = x(:,i:i+9)';
   Axn(:,j) = xn(:,i:i+9)';
   j = j+1;
end
clean_sv = svd(Ax)
noisy_sv = svd(Axn)
```

اجرای برنامه بصورت زیر است،

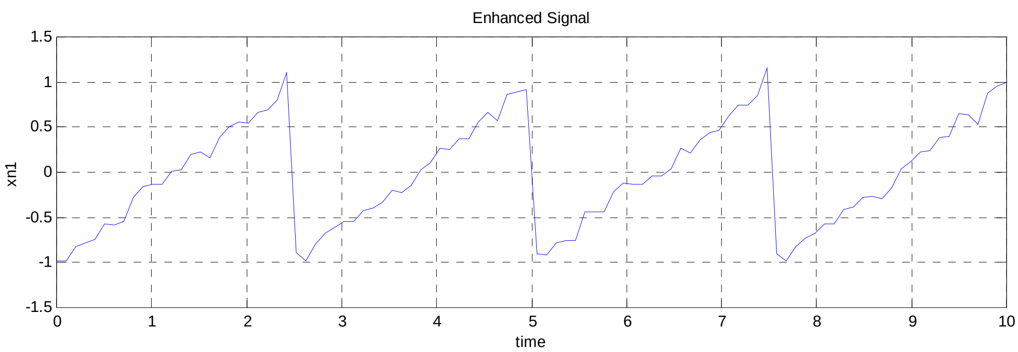
```
clean_sv =
    4.0454
    4.0000
    1.1351
    0.0000
    0.0000
    0.0000
    0.0000
    0.0000
    0.0000
    0.0000
```

```
noisy_sv =
    4.1071
    3.9563
    1.2883
    0.3958
    0.3306
    0.2784
    0.1880
    0.1264
    0.0425
    0.0069
```

رتبه ماتریس بدون نویز سه و رتبه ماتریس نویزی ده است. از مقایسه مقادیر منفرد سیگنال بدون نویز و سیگنال نویزی مشخص است که نویز بر روی مقادیر منفرد کوچک تر سیگنال تاثیر گذاشته مقدار آنها را افزایش می دهند و سبب بروز تغییرات در ساختار داده ها می شوند. حال اگر در سیگنال نویزی یک تقریب رتبه پایین ایجاد کنیم می توانیم اثر مقادیر منفرد کوچک را از بین ببریم. برای این منظور برنامه را بصورت زیر ادامه می دهیم،

```
[Un,Sn,Vn] = svd(Axn);
Axn1 = Un(:,1:3)*Sn(1:3,1:3)*Vn(:,1:3)';
xn1 = Axn1(:);
figure(2)
subplot(211),plot(t,xn1),
grid on,title('Enhanced Signal'),xlabel('time'),ylabel('xn1')
```

سیگنال حاصل بصورت زیر است،



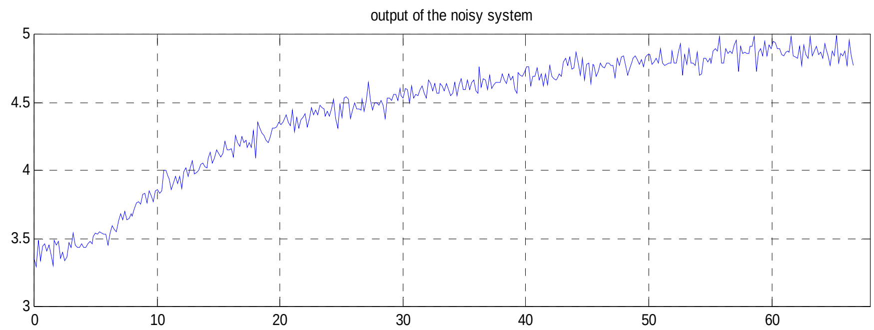
شکل(۵-۳)- سیگنال بهبود یافته

در اینجا با توجه به اینکه از مقدار منفرد چهارم به بعد مقدار مقادیر منفرد به شدت افت می کند، لذا سه مقدار منفرد اول را نگه داشته بقیه را صفر نمودیم. بهبود وضعیت سیگنال در شکل حاصل به وضوح دیده می شود.

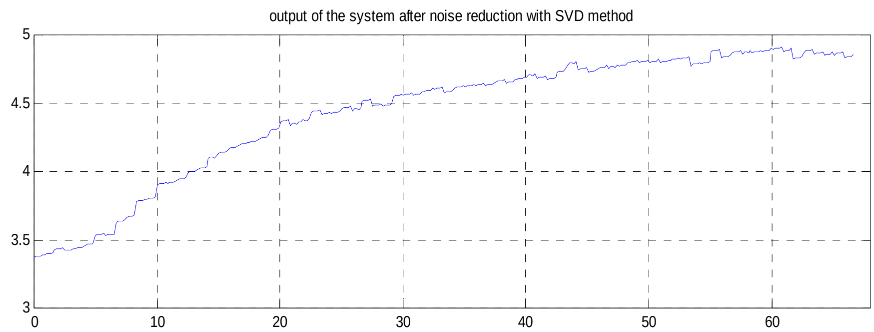
□

مثال ۷-۱۹

به منظور مدلسازی یک فرایند حرارتی آزمایشگاهی پاسخ پله فرایند توسط سامانه نمونه برداری داده بدست آمده است که در شکل (الف) نمایش داده شده است. همان طور که پیداست نویز اندازه گیری سبب مخدوش شدن سیستم شده و کار شناسایی را دشوار می کند. حال می خواهیم با استفاده از روش یاد شده نویز موجود در این سیگنال را کاهش دهیم،



شکل (الف)



شکل(ب)

شکل(۵-۵)- پاسخ پله فرایند حرارتی آزمایشگاهی

برای این منظور ابتدا داده های ورودی را بصورت یک ماتریس 5×80 در نظر می گیریم. مقادیر منفرد ماتریس مذکور در زیر آورده شده است،

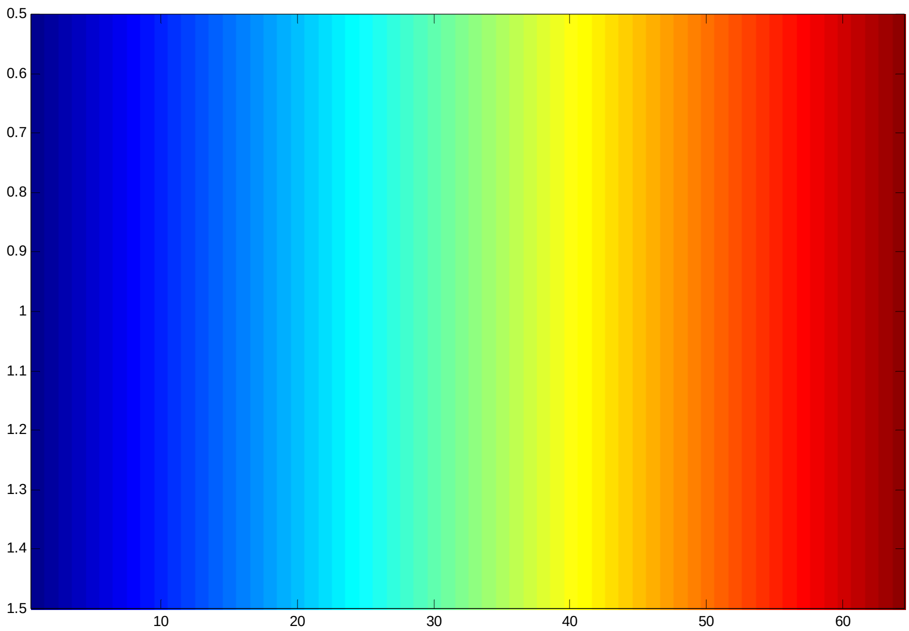
$$\sigma_1 = 89.1145, \quad \sigma_2 = 0.5418, \quad \sigma_3 = 0.5069, \quad \sigma_4 = 0.4875, \quad \sigma_5 = 0.3941$$

با توجه به اینکه اندازه اولین مقدار منفرد بسیار بزرگتر از بقیه می باشد، می توان از تقریب رتبه یک جهت کاهش نویز استفاده کرد، لذا نُرم خطای تقریب در اینجا 0.5418 می باشد. نتیجه حاصل در شکل(ب) رسم شده است که بیانگر موفقیت روش مذکور است.
□

۷-۵-۲- فشرده سازی داده های تصویری[1]

کاربرد دیگری از تقریب رتبه پایین ماتریس ها در فشرده سازی داده های تصویری است. در سیستم کامپیوتری هر تصویر در قالب یک ماتریس ذخیره می گردد که ابعاد این ماتریس به حجم و کیفیت تصویر بستگی دارد. برای هر یک از رنگ های طیف رنگی عددی اختصاص داده می شود. بطور نمونه در نرم افزار MATLAB با استفاده از دستور image می توان یک طیف رنگی ایجاد نمود

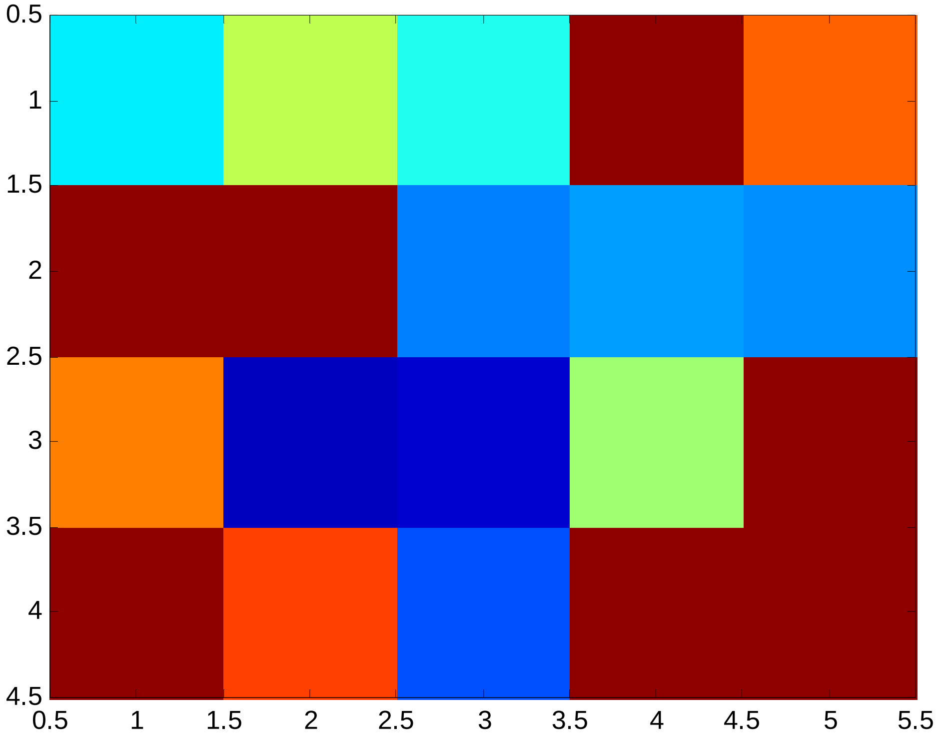
```
x = 1:64;
image(x)
```



شکل(۵-۶) - طیف رنگی ۶۴ تایی

هر چه اعداد بزرگتر از ۶۴ باشند رنگ حاصل قرمز پر رنگ یا قهوه ای و هر چه اعداد کوچکتر از یک باشند رنگ حاصل آبی پر رنگ و سورمه ای خواهد شد. بنابراین در نرم افزار MATLAB هر بردار یا ماتریس را می توان بصورت یک تصویر با خانه های رنگی ذخیره نمود. تصویر زیر را در نظر بگیرید،

[1] Data Compression



شکل(۵-۱)- تصویر حاصل از ماتریس A

این تصویر توسط ماتریسی بصورت زیر ذخیره می گردد،

```
B = rand(4,5);
A = image(100*B)
```

$$A = \begin{bmatrix} 23.3649 & 36.3295 & 26.9719 & 72.6078 & 51.1643 \\ 93.4402 & 89.2667 & 16.7493 & 18.6431 & 17.6336 \\ 49.7758 & 4.8464 & 5.4033 & 34.5255 & 67.9415 \\ 81.9026 & 53.5329 & 13.6772 & 70.2714 & 93.0307 \end{bmatrix}$$

تصاویر واقعی نیز در کامپیوتر توسط چنین ماتریس هایی ذخیره می شوند که با توجه به حجم و کیفیت این تصاویر حجم ماتریس ذخیره سازی شده بسیار بالاتر است. به عنوان نمونه تصویر نشان داده شده در شکل(۵-۷) را در نظر بگیرید. این تصویر توسط یک ماتریس 362×500 ذخیره می شود.

شکل(۵-۸)- نمونه ای از تصویر واقعی

روش تقریب رتبه پایین ماتریس این امکان را فراهم می کند تا بتوان تصاویر مذکور را با حفظ کیفیت آنها در حجم کمتری ذخیره سازی نمود. بطور مثال این موضوع بویژه در ارسال تصاویر گرفته شده توسط کاوشگرهای فضا پیما به زمین، اهمیت ویژه ای پیدا می کند زیرا تعداد تصاویر در چنین مواقعی بسیار بالا می باشد که حاکی از ارسال حجم داده های بالایی است.

مثال۷-۲۰

تصویر حاصل از ماتریس ماتریس A را در نظر بگیرید. ابتدا تجزیه مقادیر منفرد این ماتریس را بدست می آوریم،

$$A = U\Sigma V^T$$

$$U = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4063 & 0.3543 & -0.7843 & -0.3070 \\ 0.4981 & -0.8393 & -0.0371 & -0.2146 \\ 0.3649 & 0.3505 & 0.5927 & -0.6267 \\ 0.6736 & 0.2171 & 0.1795 & 0.6833 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 224.7721 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 85.0690 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 44.7287 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7.3295 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V=\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5755 & -0.4105 & 0.5009 & -0.3346 & 0.3706\\ 0.4318 & -0.5728 & -0.4321 & 0.4413 & -0.3225\\ 0.1356 & 0.0042 & -0.3604 & -0.8071 & -0.4475\\ 0.4392 & 0.4401 & -0.5492 & 0.0118 & 0.5583\\ 0.5206 & 0.5565 & 0.3617 & 0.2043 & -0.4967\end{bmatrix}$$

ماتربس A چهار مقدار منفرد غیرصفر دارد و $\operatorname{rank}(A)=4$ است.

$$\sigma_1=224.7721,\quad \sigma_2=85.0690,\quad \sigma_3=44.7287,\quad \sigma_4=7.3295$$

آیا می توان با صرفنظر کردن از برخی مقادیر منفرد رتبه ماتریس A را کاهش داده و یک تقریب رتبه پایین مناسب برای آن بدست آورد؟ برای این منظور حالت های مختلف را در نظر می گیریم.

فرض کنید فقط σ_1 را در نظر بگیریم و بقیه مقادیر منفرد صفر باشند. در اینصورت ماتریس A_1 بصورت زیر بدست می آید و تصویر حاصل از آن چنین خواهد بود،

$$A_1=\mathbf{u}_1\sigma_1\mathbf{v}_1^T$$

$$A_1=\begin{bmatrix}52.5564 & 39.4285 & 12.3849 & 40.1043 & 47.5420\\ 64.4383 & 48.3424 & 15.1849 & 49.1710 & 58.2902\\ 47.1990 & 35.4093 & 11.1225 & 36.0162 & 42.6958\\ 87.1385 & 65.3724 & 20.5342 & 66.4929 & 78.8247\end{bmatrix}$$

رتبه و مقادیر منفرد ماتریس A_1 بصورت زیر می باشد،

$$\operatorname{rank}(A_1)=1,\quad \sigma_1=224.7721,\quad \sigma_2=\sigma_3=\sigma_4=0$$

اگر دو مقدار منفرد σ_1 و σ_2 را در نظر بگیریم، ماتریس A_2 بصورت زیر خواهد بود،

$$A_2=\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & \sigma_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2\end{bmatrix}^T$$

$$A_2=\begin{bmatrix}40.1854 & 22.1638 & 12.5130 & 53.3675 & 64.3145\\ 93.7458 & 89.24.31 & 14.8816 & 17.7497 & 18.5555\\ 34.9594 & 18.3280 & 11.2491 & 49.1386 & 59.2901\\ 79.5569 & 54.7917 & 20.6127 & 74.6213 & 89.1037\end{bmatrix}$$

رتبه و مقادیر منفرد ماتریس A_2 بصورت زیر می باشد،

$$\operatorname{rank}(A_2)=2,\quad \sigma_1=224.7721,\quad \sigma_2=85.0690,\quad \sigma_3=\sigma_4=0$$

اگر سه مقدار منفرد σ_1، σ_2 و σ_3 را در نظر بگیریم، ماتریس A_3 بصورت زیر خواهد بود،

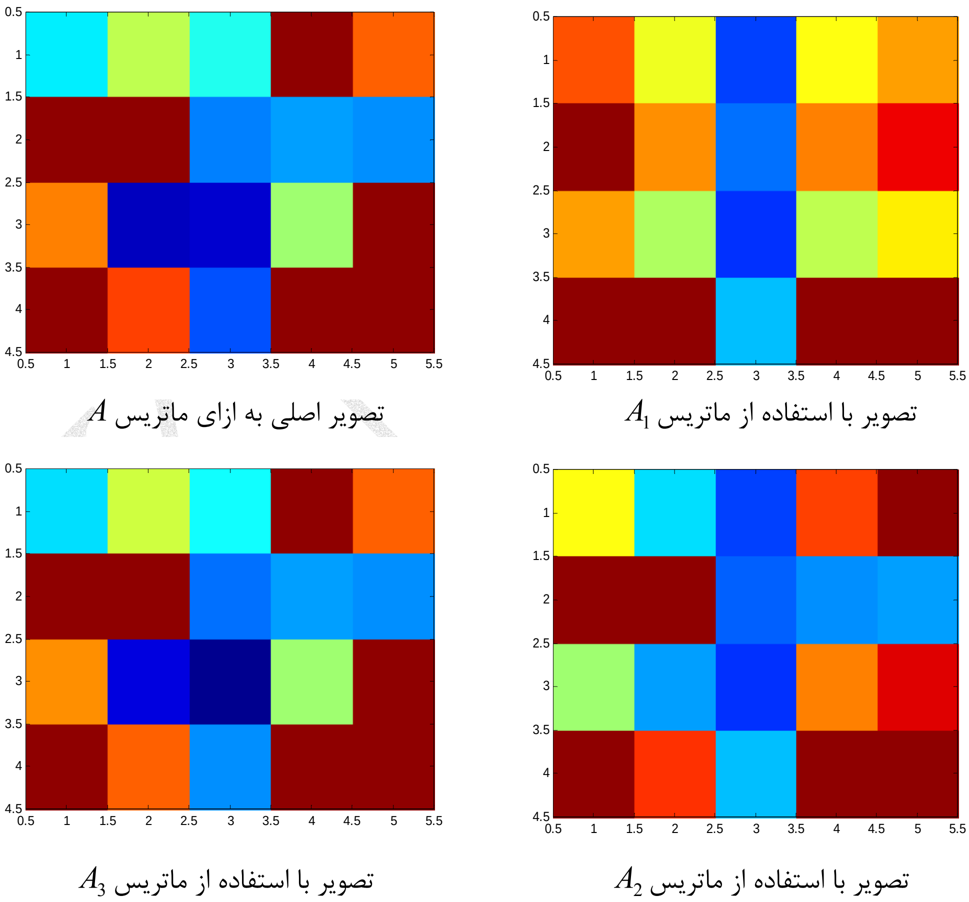
$$A_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}^T$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 22.6119 & 37.3225 & 25.1555 & 72.6343 & 51.6239 \\ 92.9140 & 89.9606 & 15.4799 & 18.6616 & 17.9548 \\ 48.2388 & 48.2388 & 1.6958 & 34.5797 & 68.8797 \\ 83.5784 & 83.5784 & 17.7196 & 70.2123 & 92.0078 \end{bmatrix}$$

رتبه و مقادیر منفرد ماتریس A_3 بصورت زیر می باشد،

$$\text{rank}(A_3) = 3, \quad \sigma_1 = 224.7721, \quad \sigma_2 = 85.0690, \quad \sigma_3 = 44.7287, \quad \sigma_4 = 0$$

تصاویر حاصل از ماتریس های A، A_1، A_2 و A_3 در شکل زیر آورده شده است،



تصویر با استفاده از ماتریس A_1

تصویر اصلی به ازای ماتریس A

تصویر با استفاده از ماتریس A_2

تصویر با استفاده از ماتریس A_3

شکل(۵-۹)- تصاویر حاصل از ماتریس های A، A_1، A_2 و A_3

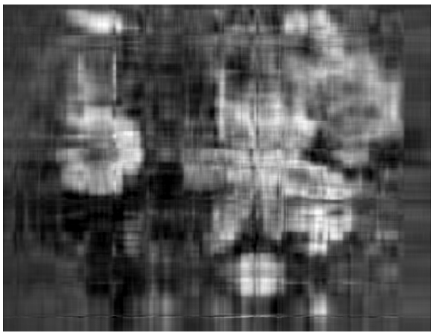
لذا فقط با استفاده از سه مقدار منفرد این شکل قابل بازسازی است و ماتریس A_3 بهترین تقریب با رتبه کمتر برای ماتریس A می باشد و نُرم دو خطای تقریب حداکثر برابر با $\sigma_4 = 7.3295$ است. این مسئله برای ماتریس هایی با ابعاد بالاتر بسیار قابل توجه است.
□

مثال۷-۲۱

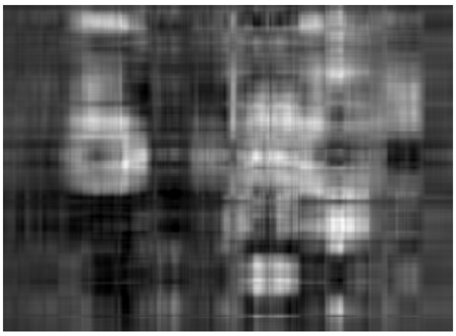
تصویر واقعی زیر را در نظر بگیرید، این تصویر توسط یک ماتریس 362×500 ذخیره می شود و دارای 362 مقدار منفرد است که بزرگترین آن $\sigma_1 = 150.2370$ و کوچکترین $\sigma_{362} = 0.1005$ می باشد.

شکل(۵-۶)- تصویر اصلی از گل

در شکلهای زیر تصاویر با درنظر گرفتن مقادیر منفرد مختلف نشان داده شده است،



$\sigma_1 = 150.2370, \ldots, \sigma_{10} = 11.2150$



$\sigma_1 = 150.2370, \ldots, \sigma_5 = 20.8949$

$\sigma_1 = 150.2370, \ldots, \sigma_{50} = 3.2094$

$\sigma_1 = 150.2370, \ldots, \sigma_{20} = 7.1647$

لذا مشاهده می شود که تنها با استفاده از 50 تا از مقادیر منفرد به راحتی می توان تصویر اصلی را به طرز قابل قبولی بازسازی کرد، البته این بستگی به کیفیت تصویر مورد نظر دارد. برای نمونه تصاویر حاصل برای 100 و 150 تا از مقادیر منفرد نیز آورده شده است،

$\sigma_1 = 150.2370, \ldots, \sigma_{150} = 1.0507$

$\sigma_1 = 150.2370, \ldots, \sigma_{100} = 1.6042$

□

مسائل

۷-۱- برای ماتریس های زیر مقادیر منفرد را بیابید و سپس آنها را توسط مقادیر منفرد تجزیه نمایید،

الف) $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 6 & 2\end{bmatrix}$ ب) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}$ ج) $A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 8\end{bmatrix}$

د) $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ ه) $A=\begin{bmatrix}1 & 10\\ 1 & 15\\ 1 & 20\end{bmatrix}$ و) $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$

۷-۲- برای هر یک از ماتریس های زیر یک شبه معکوس بیابید.

الف) $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ ب) $A=\begin{bmatrix}2 & 2 & -2\\ 4 & 1 & 2\\ -4 & 2 & 1\end{bmatrix}$ ج) $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & -2\end{bmatrix}$

۷-۳- در هر یک از حالتهای زیر با استفاده از تجزیه مقادیر منفرد، جواب حداقل مربعات معادله $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ را بیابید.

الف) $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix},\mathbf{b}=\begin{bmatrix}2\\ 8\end{bmatrix}$ ب) $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 3 & 1\end{bmatrix},\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$

ج) $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$ د) $A=\begin{bmatrix}2 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix},\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$

ه) $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix},\mathbf{b}=\begin{bmatrix}15\\ 15\\ -30\end{bmatrix}$ و) $A=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -2\end{bmatrix},\mathbf{b}=\begin{bmatrix}2\\ 3\\ -3\end{bmatrix}$

۷-۴- با استفاده از نرم افزار MATLAB هر یک از ماتریس های زیر را بصورت یک تصویر نمایش دهید. سپس با استفاده از تجزیه مقادیر منفرد سعی کنید تا حداکثر امکان تصویر را فشره سازی کنید به نحوی که کیفیت تصویر همچنان مطلوب باشد. میزان حافظه ذخیره سازی شده را با هم مقایسه کنید.

الف) $A=\begin{bmatrix} 1 & 12 & 51 & 89 & 34 & 22 \\ 23 & 65 & 9 & 37 & 46 & 14 \\ 45 & 39 & 79 & 16 & 5 & 61 \\ 63 & 80 & 12 & 35 & 54 & 2 \\ 98 & 5 & 36 & 46 & 19 & 25 \\ 13 & 29 & 65 & 38 & 64 & 9 \\ 34 & 46 & 1 & 52 & 17 & 28 \end{bmatrix}$ ب) $A=\begin{bmatrix} 13 & 50 & 33 & 42 & 29 & 65 \\ 20 & 39 & 14 & 62 & 40 & 55 \\ 70 & 18 & 21 & 39 & 51 & 47 \\ 45 & 22 & 65 & 50 & 17 & 39 \\ 2 & 60 & 28 & 39 & 57 & 44 \end{bmatrix}$

۷-۵- برای هر یک از دستگاه معادلات ناسازگار زیر جواب حداقل مربعات را بدست آورید،

الف) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 5 \\ -2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 = 4 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 15 \\ 2x_1 + 2x_2 = 15 \\ 2x_1 + 2x_2 = -30 \end{cases}$ ج) $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

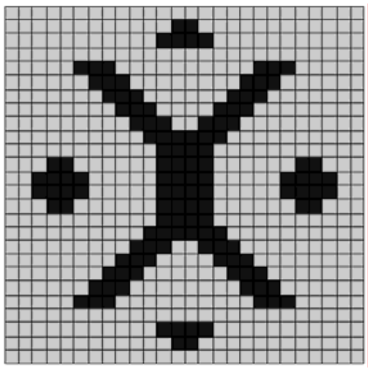
۷-۶- ثابت کنید،

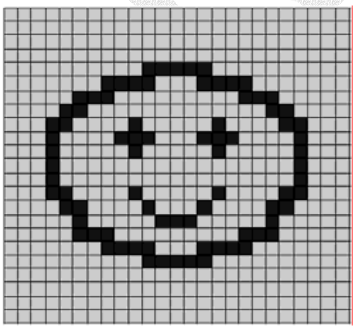
الف) زمانیکه ماتریس A غیرمنفرد باشد، $A^{\#} = A^{-1}$ است.

ب) $(A^{\#})^{\#} = A$ و $(A^{\#})^{T} = (A^{T})^{\#}$

ج) $AA^{\#}A = A$ و $A^{\#}AA^{\#} = A^{\#}$

۷-۷- هر یک از تصاویر زیر را بصورت یک ماتریس نمایش دهید. سپس با استفاده از تجزیه مقادیر منفرد سعی کنید تا حداکثر امکان تصویر را فشره سازی کنید به نحوی که کیفیت تصویر همچنان مطلوب باشد.

الف) 

ب) 

۷-۸- ماتریس A را در نظر بگیرید،

```
A =[ 1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1;
     1  1  1  1  1  1  1 40  1  1  1 40  1  1  1  1  1  1  1;
     1  1  1  1  1  1 40  1 40  1 40  1 40  1  1  1  1  1  1;
     1  1  1  1  1 40  1  1  1 40  1  1  1 40  1  1  1  1  1;
     1  1  1  1 40  1 40  1 40  1 40  1 40  1 40  1  1  1  1;
     1  1  1  1 40  1  1 40  1  1  1 40  1  1 40  1  1  1  1;
     1  1  1 40  1 40  1 40  1  1  1 40  1 40  1 40  1  1  1;
     1  1 40  1  1  1 40  1  1  1  1  1 40  1  1  1 40  1  1;
     1  1  1 40  1 40  1  1  1  1  1  1  1 40  1 40  1  1  1;
     1  1  1  1 40  1  1  1  1  1  1  1  1  1 40  1  1  1  1;
     1  1  1  1 40  1  1  1  1  1  1  1  1  1 40  1  1  1  1;
     1  1  1 40  1 40  1  1  1  1  1  1  1 40  1 40  1  1  1;
     1  1 40  1  1  1 40  1  1  1  1  1 40  1  1  1 40  1  1;
     1  1  1 40  1 40  1 40  1  1  1 40  1 40  1 40  1  1  1;
     1  1  1  1 40  1  1 40  1  1  1 40  1  1 40  1  1  1  1;
     1  1  1  1 40  1 40  1 40  1 40  1 40  1 40  1  1  1  1;
     1  1  1  1  1 40  1  1  1 40  1  1  1 40  1  1  1  1  1;
     1  1  1  1  1  1 40  1 40  1 40  1 40  1  1  1  1  1  1;
     1  1  1  1  1  1  1 40  1  1  1 40  1  1  1  1  1  1  1;
     1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1];
```

الف) با استفاده از دستور svd(A) در نرم افزار MATLAB مقادیر منفرد ماتریس A را بیابید. رتبه ماتریس A چند است؟

ب) با توجه به مقادیر منفرد بدست آمده یک تقریب رتبه پایین مناسب برای ماتریس A بدست آورید. خطای تقریب چند است؟

ج) با استفاده از دستور image(A) در نرم افزار MATLAB طیف رنگی ماتریس A و ماتریس تقریب زنده شده را رسم نمایید.