Computational Fluid Dynamic

Finite Difference Method
Lassonen Scheme (implicit)

CFD

Hamid Pourbagheri
M.Sc. Civil Engineering
Mail: pourbagheri.hamid@gmail.com

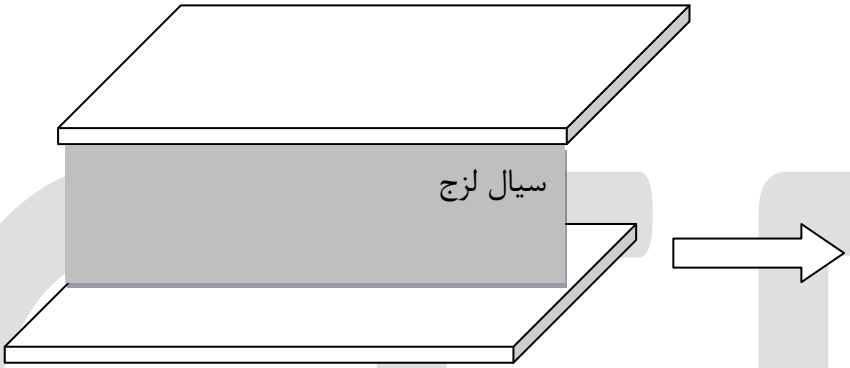
Lecturer: Dr. behrouz mirzaei
Mohaghegh_e Ardabili University

- حل معادله ناویر استوکس
- روش تفاضل محدود
- روش ضمنی لاسونن

- مرجع: دینامیک سیالات محاسباتی برای مهندسان
- تالیف: هافمن – چیانگ
- ترجمه: احمدرضا عظیمیان

شرح مسئله

دو صفحه موازی نامحدود، به فاصله h از یکدیگر قرار دارند. در زمان t=0 صفحه پایین با سرعت u=40 متر بر ثانیه شروع به حرکت می‌کند. توزیع سرعت در ارتفاع h را برای مدت زمان 1.08 ثانیه به دست آورید.



معادله حاکم

معادله حاکم بر مسئله، معادله ناویر – استوکس به صورت زیر است:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \upsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1.0)$$

حل تفاضل محدود: روش FTCS

پس از گسسته کردن معادله حاکم به روش فوق، معادله جبری زیر حاصل خواهد شد:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \upsilon \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right) \qquad (2.0)$$

شرط پایداری این معادله چنین خواهد بود:

$$d = \upsilon \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \le 0.5 \qquad (3\text{-}0)$$

شرایط مرزی و اولیه

با ترسیم مختصات محاسباتی برای مسئله و تعریف گام های مکانی و زمانی مشخص، شرایط اولیه و مرزی به صورت زیر تعریف می گردند:

شرایط اولیه:

$$for\ t=0 \rightarrow \begin{cases} u=40\ {}^{m}\!/_{s}\ \ at\ \ y=0 \\ u=0\ \ {}^{m}\!/_{s}\ at\ \ 0<y\le h \end{cases} \qquad (4\text{–}0)$$

شرایط مرزی:

$$for\ t\ge 0 \rightarrow \begin{cases} u=40\ {}^{m}\!/_{s}\ \ at\ \ y=0 \\ u=0\ \ {}^{m}\!/_{s}\ at\ \ y=h \end{cases} \qquad (5\text{–}0)$$

توضیحات:

- ✓ مسئله برای دو گاه زمانی مختلف حل می شود. گام های زمانی به گونه ای انتخاب شده اند که در حالت اول معادله پایدار و در حالت دوم معادله ناپایدار باشد.
- ✓ فقط قسمتی از جدول محاسباتی برای مقایسه نتایج در اینجا آورده شده است و بقیه در فایل اکسل محفوظ است.
- ✓ نوشتن شرایط مرزی و درک صحیح مسئله اهمیت ویژه ای دارد از این رو شرایط اولیه و مرزی که در ابتدا بایستی تعیین شوند با رنگ های مشخصی نمایان شده اند.

مشخصات مسئله

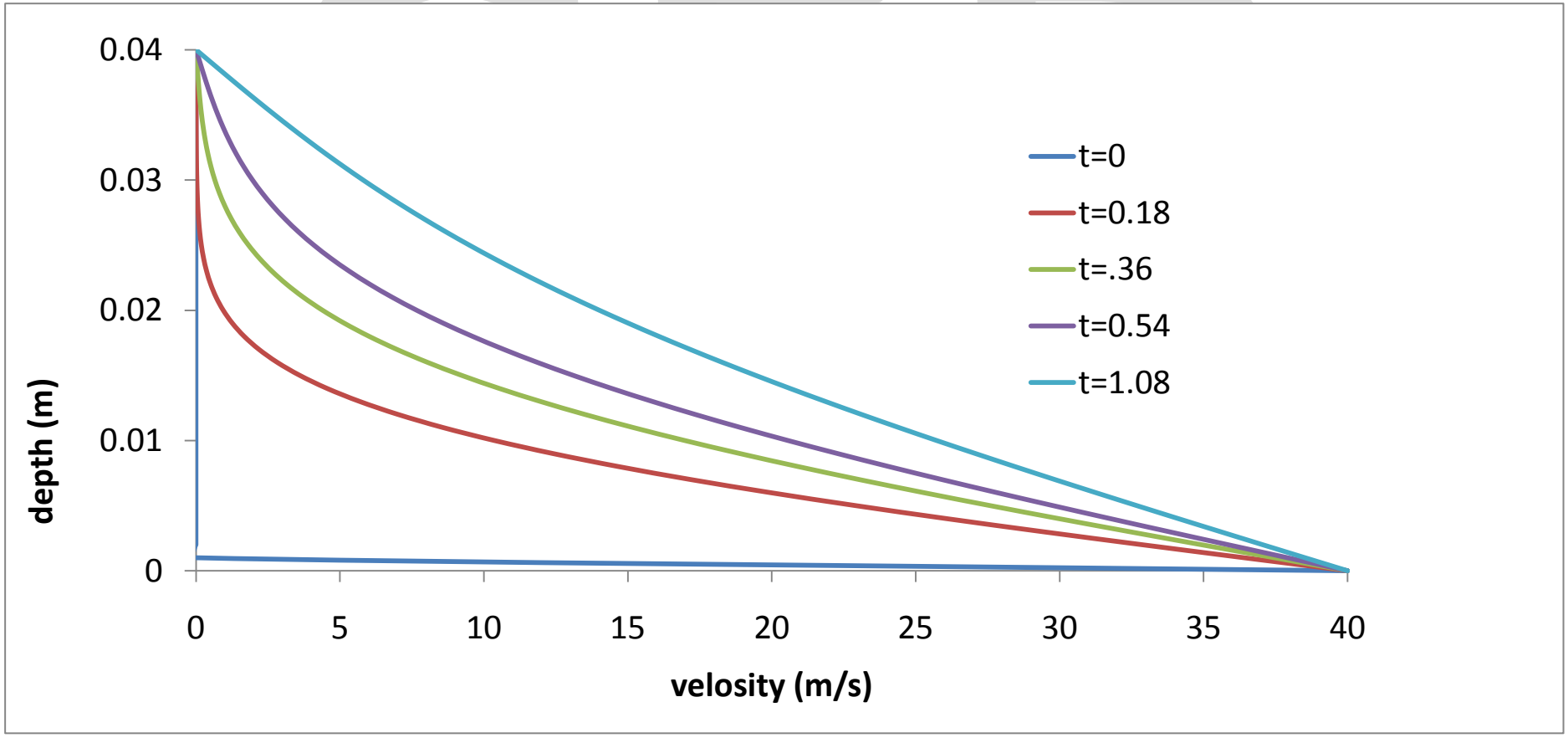
مشخصات مسئله			
مشخصه	مقدار	نماد	واحد
فاصله دو صفحه نامحدود	0.04	h	[m]
سرعت اولیه	40	b	[m/s]
لزجت سینماتیکی	0.000217	ν	$[m^2/s]$
زمان تحلیل	1.08	T	sec

مقادیر ثابت		
اندازه گام مکانی	0.001	y
اندازه گام زمانی	0.002	t
عدد انتشار	0.434	
حد ناپایداری	0.5	
تعداد گام مکانی	41	
تعداد گام زمانی	541	

قسمتی از جدول محاسبات که مطابق صفحه **148** مرجع است.

	0	0.001	0.002	0.003	0.004	0.018	0.019	0.02	0.036	0.037	0.038	0.039	0.04
0	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.18	40	36.4097	32.8645	29.4077	26.0795	1.669	1.261	0.942	0.002	0.001	0.000	0.000	0
0.36	40	37.454	34.924	32.426	29.976	6.009	5.153	4.394	0.140	0.098	0.063	0.030	0
0.54	40	37.919	35.847	33.793	31.764	9.601	8.594	7.666	0.586	0.427	0.279	0.138	0
0.72	40	38.197	36.400	34.614	32.845	12.338	11.289	10.300	1.157	0.855	0.564	0.280	0
0.9	40	38.386	36.776	35.175	33.585	14.440	13.386	12.378	1.704	1.266	0.839	0.418	0
1.08	40	38.524	37.051	35.584	34.127	16.073	15.023	14.011	2.172	1.619	1.075	0.536	0

نمودار محاسبات که مطابق صفحه **103** مرجع است.



مشخصات مسئله در حالت ناپایدار

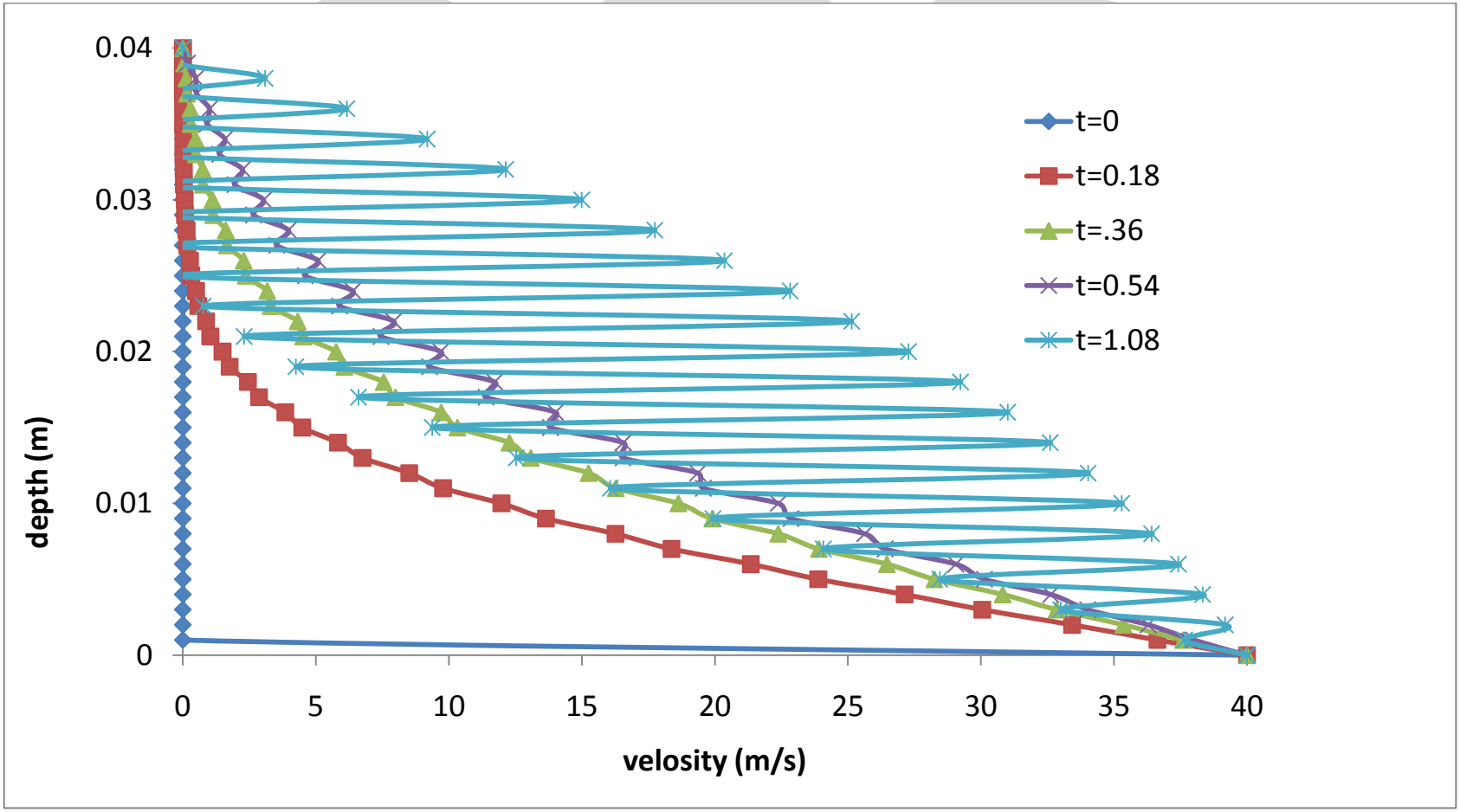
مشخصات مسئله			
مشخصه	مقدار	نماد	واحد
فاصله دو صفحه نامحدود	0.04	h	[m]
سرعت اولیه	40	b	[m/s]
لزجت سینماتیکی	0.000217	ν	$[m^2/s]$
زمان تحلیل	1.08	T	sec

مقادیر ثابت		
اندازه گام مکانی	0.001	Δy
اندازه گام زمانی	0.00232	Δt
عدد انتشار	0.50344	d
حد ناپایداری	0.5	T
تعداد گام مکانی	41	
تعداد گام زمانی	466.517241	

قسمتی از جدول محاسبات که مطابق صفحه **149** مرجع است.

	0	0.001	0.002	0.003	0.004	0.018	0.019	0.02	0.036	0.037	0.038	0.039	0.04
0	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.2088	40	36.634	33.430	30.049	27.134	2.445	1.756	1.492	0.006	0.003	0.002	0.001	0
0.4176	40	37.597	35.361	32.845	30.820	7.550	6.071	5.764	0.284	0.160	0.131	0.050	0
0.6264	40	37.996	36.287	34.018	32.623	11.721	9.274	9.694	1.004	0.519	0.487	0.168	0
0.8352	40	38.165	36.975	34.519	33.975	15.549	10.894	13.473	1.992	0.765	0.983	0.250	0
1.044	40	38.114	37.772	34.365	35.548	20.400	10.088	18.349	3.432	0.539	1.711	0.173	0
1.2528	40	37.656	39.184	33.002	38.336	29.233	4.248	27.276	6.161	-0.835	3.092	-0.288	0

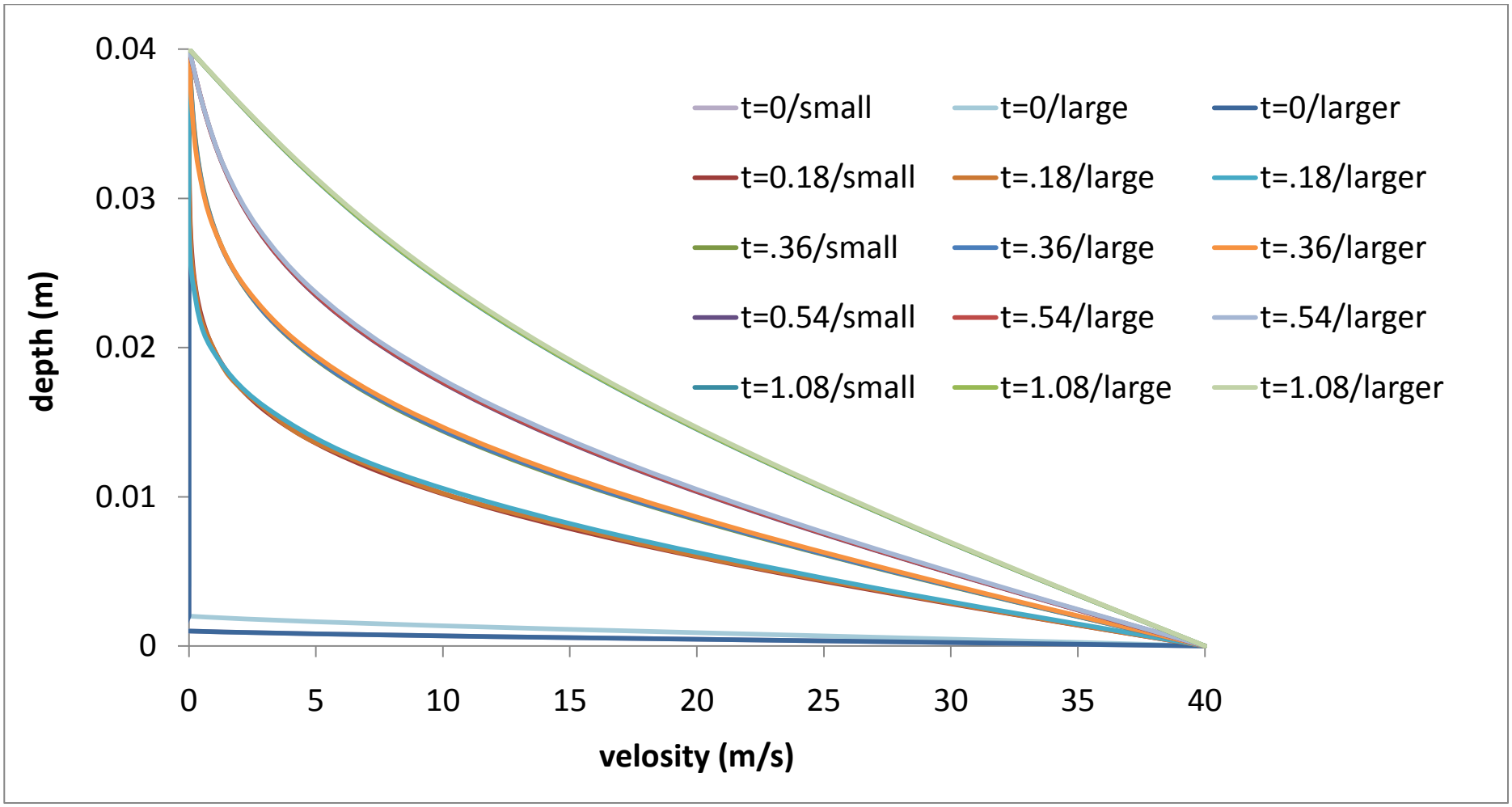
نمودار محاسبات که مطابق صفحه **104** مرجع است.



بررسی میزان دقت در گام های مکانی و زمانی مختلف

در این قسمت، نمودار سرعت، برای مقادیر مختلف $\Delta t, \Delta y$ که حد پایداری را رعایت می‌کنند ترسیم شده است که نمایان‌گر تطابق بسیار زیاد نایج است.

$$\text{small}:\begin{cases}\Delta t = 0.002\\ \Delta y = 0.001\end{cases},\ \text{large}:\begin{cases}\Delta t = 0.009\\ \Delta y = 0.002\end{cases},\ \text{small}:\begin{cases}\Delta t = 0.03\\ \Delta y = 0.004\end{cases} \tag{6-0}$$


0.04
0.03
0.02
0.01
0
depth (m)
0
5
10
15
20
25
30
35
40
velosity (m/s)
t=0/small
t=0/large
t=0/larger
t=0.18/small
t=.18/large
t=.18/larger
t=.36/small
t=.36/large
t=.36/larger
t=0.54/small
t=.54/large
t=.54/larger
t=1.08/small
t=1.08/large
t=1.08/larger