فصل ۱۲: «آنالیز مختلط و نگاشت»

بخش اول:

تعریف -

عدد مختلط z بصورت زوج مرتب (x,y) از اعداد حقیقی x و y تعریف می شود. در مورد اعداد مختلط خصوصیات آنها می توان موارد زیر را بیان کرد: ⟵ $(z = x+iy)$

1) $(x,y) = x + iy$,   * Complex Number: $Z(x,y)$ *

2) $(0,y) = iy$ ⟶ عدد موهومی محض

3) $z=(x,y) \Rightarrow x = \mathrm{Re}\,z\,,\ y = \mathrm{Im}\,z$

4) $(x_1,y_1) = (x_2,y_2) \rightleftharpoons x_1 = x_2\,,\ y_1 = y_2$

5) $z_1 = (x_1,y_1)\,,\ z_2 = (x_2,y_2) \Longrightarrow z_1 + z_2 = (x_1+x_2\,,\ y_1+y_2)$

$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2\,,\ y_1x_2 + x_1y_2)$

6) $(0,1) = i \Rightarrow z = x+iy$

$i^2 = -1$

بخش اول: «معادلات و روابط اساسی»

قوانین جبری اعداد مختلط:

7) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

8) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ و $(z_1 z_2)z_3 = z_1(z_2 z_3)$

9) $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$

10) $-z = (-x,-y) \Rightarrow z + (-z) = 0$ قرینه جمعی

⟶ $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ انجام عمل تفریق

11) $z = (x,y) \Rightarrow z^{-1} = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\,,\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} \right)$ ⟶ معکوس ضربی z

$z z^{-1} = 1$

12) $z_1/z_2 = z_1 z_2^{-1} \Longrightarrow \frac{1}{z_2} = z_2^{-1}$

- بنابراین جهت یافتن حاصل تقسیم باید صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب کرد.

- در ضمن ترتیب معمولی اعداد حقیقی را نمی توان به دستگاه اعداد مختلط بسط داد. یعنی عبارتی مانند $z_1 < z_2$ تنها وقتی معنی دارد که z_1 و z_2 حقیقی باشند.

__نکات تکمیلی :__

13) $1/i = -i$

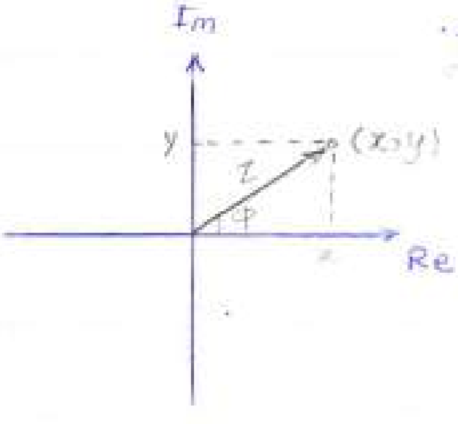
14) $Im(iz) = Re\,z$, $Re(iz) = -Im(z)$

15) $(1+z)^n = 1 + \frac{n}{1!}.z + \frac{n(n-1)}{2!}z^2 + \cdots \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}z^k + \cdots + z^n.$

بسط نیوتن

(که در آن n عددی صحیح و مثبت است.)

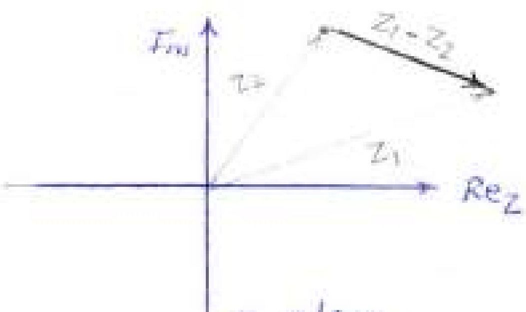
- هر عدد مختلط در صفحه مختصات با یک نقطه متناظر است و برعکس. در واقع z بعنوان یک بردار از مبداء تا نقطه مزبور مطرح می شود. در صفحه مختلط، محور x را محور حقیقی و محور y را محور موهومی می گویند. بنابراین هر عدد مختلط z را می توان با یک نقطه یا یک بردار مکان مربوط کرد.



z-plane

$Tan\,\varphi = \frac{y}{x}$

16) $|z| = \sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow$ «قدر مطلق عدد مختلط» یا طول بردار z



z-plane

17) $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$

فاصله دو نقطه از هم در صفحه مختلط

17) $\bar{z} = x - iy \rightarrow$ (مزدوج عدد مختلط) $\Rightarrow z\bar{z} = |z|^2$

$\rightarrow \quad |z| = |\bar{z}|$

$\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad , \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

$\overline{(z_1 - z_2)} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2 \quad , \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

$\rightarrow \quad z + \bar{z} = 2\,Re_z \quad , \quad z - \bar{z} = i(2\,Im_z) \quad , \quad z\bar{z} = |z|^2$

$\rightarrow \quad Re_z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \ , \ Im z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

خواص نامساوی مثلث :

18) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

$\longrightarrow \quad |z_1 + z_2 + z_3 + \cdots| \leqslant |z_1| + |z_2| + |z_3| + \cdots$

19) $\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

- نقطه‌ی وسط پاره‌خطی که ابتدا و انتهای آن z_1 و z_2 باشند، برابر است با : $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$

20) $\sqrt{2}\,|z| \geqslant |Re_z| + |Im z|$?

21) if $(\bar{z})^2 = z^2 \longrightarrow$ z موهومی محض یا حقیقی محض

- اگر R عددی ثابت و مثبت و z_0 یک عدد مختلط معلوم باشد آنگاه معادله‌ی دایره به شعاع R و مرکز $-z_0$ را می‌توان چنین نوشت :

$$* \quad |z|^2 + 2Re(\bar{z}_0 z) + |z_0|^2 = R^2 \quad *$$

22) $|z_1 - z_2| \geqslant |z_1| - |z_2|$

23) $|z| \geqslant |Re_z| \geqslant Re_z \quad , \quad |z| \geqslant |Im_z| \geqslant Im_z$

معادلات اشکال هندسی مهم در دستگاه مختلط.

۱) دایره

(فاصله هر نقطه روی محیط تا مرکز عددی است ثابت) ←

$$\underbrace{|z-a|}_{\text{مختصات مرکز}} = \underbrace{R}_{\text{شعاع}}$$

معادله دایره‌ای مماس بر محور y ها به شعاع 2 و متقارن نسبت به محور x ها ←

$|z-2| = 2$ یا $|z+2| = 2$

۲) بیضی

(مجموع فواصل هر نقطه روی محیط از دو کانون مقداری است ثابت)

$$|z-a| + |z-b| = c$$

(a و b مختصات کانون‌ها و c مقداری است ثابت)

۳) هذلولی

تفاضل فواصل هر نقطه روی محیط از دو کانون مقداری است ثابت.

$$|z-a| - |z-b| = c$$

۴) عمود منصف.

(هر نقطه واقع بر عمود منصف یک پاره‌خط از دو سر آن به یک فاصله است.)

$|z-a| = |z-b|$ ⟵ (a و b مختصات ابتدا و انتهای پاره‌خط)

۵) خط واصل بین ۲ نقطه:

اگر z_1 و z_2 دو نقطه دلخواه از صفحه مختلط باشند. آنگاه مکان هندسی نقاطی که روی خط واصل بین آن ها هستند عبارتست از:

$$z = \alpha z_1 + \beta z_2 \xrightarrow{\text{به شرط}} \alpha + \beta = 1$$

توجه: اگر ۳ نقطه z_1 و z_2 و z_3 در رابطه $\alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3$ صدق کنند که در آن α، β و γ اعداد حقیقی باشند به شرط $\alpha + \beta + \gamma = 0$ باشند، در این حالت حتماً این ۳ نقطه در یک امتداد هستند.

تست کنکور کارشناسی ارشد عمران سال ۷۱

ناحیه $Re(\frac{1}{z})>1$ چه مکانی از صفحه مختلط را مشخص میکند؟

1) خارج دایره ای به شعاع 2 و مرکز $(\frac{1}{2}, 0)$

2) داخل دایره ای به شعاع $\frac{1}{2}$ به مرکز $(-\frac{1}{2}, 0)$

3) داخل دایره ای به شعاع $\frac{1}{2}$ و به مرکز $(\frac{1}{2}, 0)$ ✓

4) خارج دایره ای به شعاع $\frac{1}{2}$ و به مرکز $(-\frac{1}{2}, 0)$

روش حل: اگر $Z = x + iy$ فرض گردد:

$$Re\left(\frac{1}{z}\right) = Re\left(\frac{1}{x+iy}\right)$$

$$\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \Rightarrow Re\left(\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} > 1$$

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2 < x \Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 < \frac{1}{4}$$

داخل دایره ای به شعاع $\frac{1}{2}$ و مرکز $(+\frac{1}{2}, 0)$ یا گزینه "3"

حل و بررسی مثال :

فرض کنید که $f(z)=x^2-y^2-2y+i(2x-2xy)$ یک تابع مختلط باشد . با کمک روابط اعداد مختلط این تابع را برحسب متغیر z بیان کنید .

روش حل : با کمک روابط ذکر شده می توان به جای x و y معادل مختلط آن ها را قرار داد :

$$x=\frac{1}{2}(z+\bar{z}) \quad , \quad y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$$

$$\Rightarrow f(z)=\left[\frac{1}{2}(z+\bar{z})\right]^2-\left[\frac{z-\bar{z}}{2i}\right]^2-2\left[\frac{z-\bar{z}}{2i}\right]+i\left\{2\left[\frac{1}{2}(z+\bar{z})\right.\right. -$$

$$2\left[\frac{1}{2}(z+\bar{z})\right]\left[\frac{z-\bar{z}}{2i}\right]$$

$$=\frac{1}{4}(z^2+\bar{z}^2+2z\bar{z})+\frac{1}{4}(z^2+\bar{z}^2-2z\bar{z})+zi-\bar{z}i$$

$$+zi+\bar{z}i-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}\bar{z}^2$$

$$\Rightarrow * f(z)=\bar{z}^2+2iz *$$

حل و بررسی یک مثال : (کنکور کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک سال ۸۲)

هرگاه $z=x+iy$ و $\bar{z}$ مزدوج آن باشد ، معادله $z\bar{z}=36$ معرف چه شکلی در صفحه خواهد بود ؟

۱) دایره ✓ 2) هذلولی 3) بیضی 4) سهمی

روش حل : براساس تعریف $z\bar{z}=|z|^2$:

$$z\bar{z}=|z|^2=x^2+y^2=36$$

جواب دایره است .

حل و بررسی یک مثال: (تست کنکور کارشناسی ارشد مکانیک سال ۸۲)

معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $(-2,1)$ و شعاع 4 کدام است؟

1) $|z+2-i|=4$ ✓   2) $|z+2+i|=4$

3) $|z-2+i|=4$ 4) $|z-2-i|=4$

روش حل: بطور کلی مکان هندسی دایره در صفحهٔ مختلط فرم $|z-a|=R$ است که در آن a عدد مختلط بیانگر مرکز و R عدد حقیقی بیانگر شعاع است پس:

$$|z-(-2+i)|=4 \Rightarrow |z+2-i|=4 \Rightarrow$$ گزینهٔ "1"

حل و بررسی یک مثال: (تست کنکور کارشناسی ارشد برق سال ۷۵)

اگر z_1 و z_2 دو نقطه از صفحهٔ دلخواه باشند، آنگاه مکان هندسی نقاط $z=\alpha z_1+\beta z_2$ با شرط $\alpha+\beta=1$ عبارت است از:

1) پاره‌خطی که نقطهٔ αz_1 را به βz_2 متصل می‌کند

2) پاره‌خطی که مبداء را به نقطهٔ $\alpha z_1+\beta z_2$ متصل می‌کند

3) پاره‌خطی که نقاط z_1 و z_2 را باهم وصل می‌کند ✓

4) پاره‌خطی که مبداء را به نقطهٔ z_1+z_2 متصل می‌کند

روش حل: با فرض $\alpha=t$ و $\beta=1-\alpha=1-t$ داریم: $z=tz_1+(1-t)z_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=1-x \end{cases} \Rightarrow$$ معادلهٔ خط واصل بین z_1, z_2.

می‌توان با رسم نمایش داد.

مسائل اثباتی :

ثابت کنید نامساوی مثلث در اعداد مختلط هم برقرار میبود

یعنی : $|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$

اثبات : این نامساوی صرفاً بیان میکند که طول یک ضلع مثلث کوچکتر یا مساوی مجموع ۲ ضلع دیگر است :

$|z|^2 = z\bar{z}$

$$|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) = (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)$$

$$= z_1\bar{z}_1 + (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) + z_2\bar{z}_2$$

$z+\bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z$

$$z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2} = 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \leqslant ۲\,|z_1\bar{z}_2| = 2|z_1||z_2|$$

و بنابراین :

$$|z_1+z_2|^2 \leqslant |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2$$

و یا :

$$|z_1+z_2|^2 \leqslant (|z_1|+|z_2|)^2 \Rightarrow |z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$$

توجه ۱ : نامساوی مثلث را می‌توان به هر تعداد عامل جمع تعمیم داد مثلاً :

$$|z_1+z_2+z_3| \leqslant |z_1+z_2| + |z_3| \leqslant |z_1|+|z_2|+|z_3|$$

$$\Rightarrow \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

توجه ۲ : با توجه به این نامساوی که می‌توان کران پایینی برای $|z_1+z_2|$ پیدا کرد :

$$|z_1| = |(z_1+z_2)+(-z_2)| \leqslant |z_1+z_2| + |-z_2|$$

بافرض $|z_1| \geqslant |z_2|$

$$\Rightarrow |z_1+z_2| \geqslant |z_1|-|z_2|$$

$$\Rightarrow * \; |z_1|-|z_2| \leqslant |z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2| \; *$$

نکته 1: نقطهٔ نمایش $\frac{1}{2}(z_1+z_2)$، نقطهٔ وسط پاره‌خطی است که z_1 را به z_2 در صفحهٔ مختلط متصل می‌کند.

نکته 2: اگر $\bar{z} = z$ باشد، در اینصورت z حتماً یک عدد حقیقی است و در صورتی که $z^2 = (\bar{z})^2$ باشد آنگاه حتماً z یک عدد حقیقی محض یا موهومی محض خواهد بود.

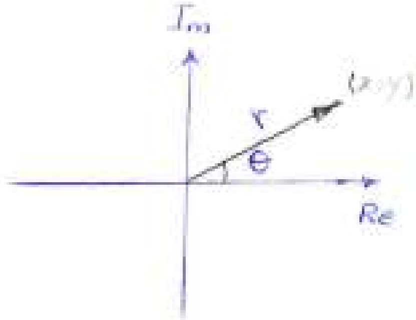
نکته 3: نامساوی مثلث در حالت تفاضلی هم در اعداد مختلط کاربرد دارد. در یک مثلث هر ضلع از تفاضل ۲ ضلع دیگر بزرگتر یا مساوی است. پس:

$$||z_1|-|z_2|| \leq |z_1-z_2| \leq |z_1|+|z_2|$$

اعداد مختلط در دستگاه قطبی -

$$Z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\longrightarrow \tan\theta = y/x \Rightarrow \theta = \arctan(y/x)$$



$$(\text{Main Value of } \theta) \Rightarrow -\pi < \theta < +\pi$$

فرمول اویلر : $\longrightarrow$ $* \; e^{i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta) \; *$

$$\longrightarrow Z = re^{i\theta} \; * \quad \text{و} \quad Z^{-1} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$$

تعبیر هندسی ضرب و تقسیم دو عدد مختلط :

$$Z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad Z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \longrightarrow \begin{cases} Z_1 Z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \\ \dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \end{cases} *$$

تئوری دموآور :

$$* \; (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \; *$$

ریشه nام عدد مختلط Z -

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$* \; Z_K = \sqrt[n]{r} \left(\cos\frac{2K\pi + \theta}{n} + i\sin\frac{2K\pi + \theta}{n} \right) *$$

$$(K = 0, 1, \ldots, n-1)$$

$\longleftarrow$ (بنابراین تعداد ریشه‌های nام واحد، n تا است. از نظر هندسی این ریشه‌ها با نقاط واقع بر رئوس یک n ضلعی منتظم متناظرند. این چندضلعی بر دایره واحد به مرکز مبدأ محاط است و یک رأس آن در نقطه متناظر با ریشه $Z = 1$ واقع است.

- اگر بنویسیم: $\omega_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ آنگاه بنا بر قضیهٔ دموآور ریشه‌های n ام واحد تنها عبارتند از: $1, \omega_n, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-1}$.

- اگر آرگومان یکی از ریشه‌ها θ/n است بقیهٔ آرگومان‌ها با افزودن مضارب صحیح $\frac{2\pi}{n}$ بدست می‌آید. اگر یکی از ریشه‌ها z_0 باشد بقیهٔ ریشه‌ها برابرند با: $z_0, z_0\omega_n, z_0\omega_n^2, \dots, z_0\omega_n^{n-1}$.

$$23)\quad |z_1w_1 + z_2w_2 + \dots z_nw_n| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots |z_n|^2} * \sqrt{|w_1|^2 + |w_2|^2 + \dots |w_n|^2}$$

- اگر $\arg z_1$ ، $\arg z_2$ آرگومان‌های z_1 ، z_2 باشند:

$$\begin{cases} \operatorname{Arg} z_1/z_2 = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 \\ \operatorname{Arg} z_1^{\,n} = n\operatorname{Arg} z_1 \\ \operatorname{Arg} z_1^{-1} = -\operatorname{Arg} z_1 \end{cases}$$

if $z \neq 0 \Longrightarrow \arg\bar{z} = -\arg z$

- حالت تساوی در نامساوی $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ فقط وقتی برقرار است که:

[illegible]

$$* \;\; \theta_1 - \theta_2 = 2n\pi \;\; * \quad , \quad n = 0, \pm1, \pm2, \dots$$

- در صورت برقراری این ارتباط بین آرگومان‌ها داریم: $\longrightarrow Re(z_1 \cdot \bar{z}_2) = |z_1| \cdot |z_2|$

توان و ریشه های یک عدد مختلط :

- توان های صحیح عدد مختلط ناصفر $z = re^{i\theta}$ با فرمول زیر داده می شوند :

$$z^n = r^n e^{in\theta} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

که در آن به ازای $r = 1$ به فرمول دموآور می رسیم : $e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta$

یکی از کاربرد اصلی این رابطه در محاسبه ریشه های اعداد مختلط ناصفر مفید است. برای بیان مطلب معادله $z^n = 1$ را حل کرده از آنجا ریشه های n ام عدد یک را بدست می آوریم :

$$z^n = 1$$

$$\Rightarrow (re^{i\theta})^n = 1 = 1e^{i(0)} \Rightarrow r^n = 1$$

$$n\theta = 0 + 2k\pi$$

حداکثر اختلاف آرگومان های دو عدد مختلط مساوی و قطبی برابر مضرب صحیحی از 2π است.

$$\Rightarrow r = 1 \ , \ \theta = \frac{2k\pi}{n}$$

و جواب های معادله $z^n = 1$ چنین عبارتند :

$$z = e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \ , \ k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

بنابراین تعداد ریشه های n ام عدد یک برابر n تا است. از نظر هندسی این ریشه ها با نقاط واقع بر رئوس یک n ضلعی منتظم تناسبند. این چندضلعی در دایره ای به شعاع یک به مرکز مبداء محاط است و یک رأس آن روی نقطه $z = 1$ واقع است.

حال با همین متد می توان ریشه n ام هر عدد مختلط ناصفر $w = \rho e^{i\varphi}$ را بدست آورد که عبارتند از:

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) \qquad k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$

از نظر هندسی $\sqrt[n]{\rho}$ نمایش مقدار طول هر یک از بردارهای نمایش ریشه است. آرگومان یکی از این ریشه $\frac{\varphi}{n}$ بوده و آرگومان بقیه ریشه با افزودن مضارب صحیح $\frac{2\pi}{n}$ به این مقدار بدست می آید.

نکته 1:

همانطور که دیدیم ریشه n ام عدد یک به کمک معادله $\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ داده شد. اگر یکی از ریشه به ازای $k = 1$ بصورت $w_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ تعریف شود، بقیه ریشه را می توان بر حسب w_n نوشت:

ریشه n ام عدد یک $\Rightarrow 1, w_n, w_n^2, \dots, w_n^{n-1}$

نکته 2:

اگر z_0 یک ریشه n ام دلخواه از عدد مختلط w باشد، مجموعه همه ریشه n ام این عدد را می توان بترتیب زیر بدست آورد که در آن $w_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ می باشد:

ریشه n ام عدد مختلط $w \Rightarrow z_0, z_0 w_n, z_0 w_n^2, \dots, z_0 w_n^{n-1}$

علت این امر و این ارتباط این است که ضرب هر عدد مختلط ناصفر در w_n معادل است با افزایش آرگومان آن عدد مختلط به مقدار $\frac{2\pi}{n}$.

حل و بررسی یک مثال:

یک مقدار از z و $Arg\, z$ را در معادلهٔ زیر بدست آورید:

1) $z = (\sqrt{3} - i)^{\frac{1}{6}} \Longrightarrow \rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = 2$

$\Longrightarrow \sqrt{3}-i$ ریشه‌های ششم $= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{2k\pi}{6} + i\sin\frac{2k\pi}{6}\right)$, $k=0,1,\cdots,5$

$$w_1 = \sqrt[6]{2}\,(1)$$
$$w_2 = \sqrt[6]{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$w_3 = \sqrt[6]{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$w_4 = \sqrt[6]{2}\,(-1)$$
$$w_5 = \sqrt[6]{2}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$w_6 = \sqrt[6]{2}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

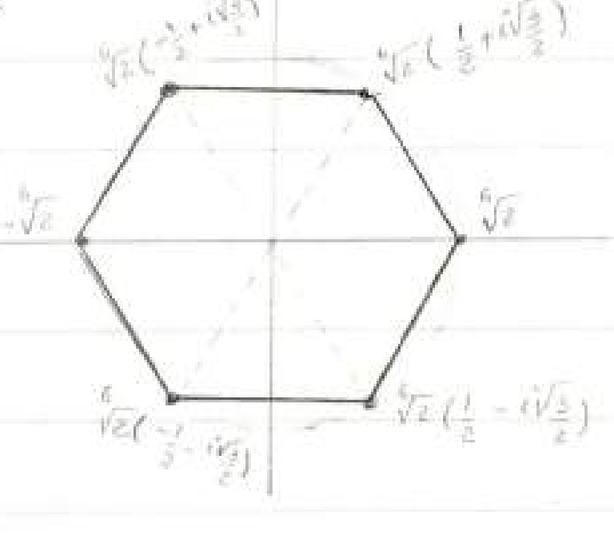
آرگومان ریشه‌های ششم عدد $(\sqrt{3} - i)$ همگی مضارب صحیح $\frac{\pi}{3}$ هستند و خود ریشه‌ها رئوس یک ۶ ضلعی منتظم‌اند که در دایره‌ای به شعاع $\sqrt[6]{2}$ و به مرکز مبدأ محاط است.

توجه: ریشه‌ی w_2 را با بعدی‌ها را می‌توانیم با توجه به نکتهٔ (2) صفحهٔ قبل هم بدست آوریم:

$$w_n = \cos\frac{2\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi}{6} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Longrightarrow w_2 = \underbrace{\sqrt[6]{2}}_{w_1}\underbrace{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{w_n}$$

$$w_3 = w_1 (w_n)^2$$
$$w_4 = w_1 (w_n)^3$$
$$w_5 = w_1 (w_n)^4$$
$$w_6 = w_1 (w_n)^5$$



2) $8^{\frac{1}{6}} = ?$

$$\Longrightarrow \sqrt[6]{8} = ? \quad , \quad w = 8 \Rightarrow \rho = 8$$

ریشه‌های ۶ام عدد 8 $= \sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{2k\pi}{6} + i\sin\frac{2k\pi}{6}\right) \quad , \; k = 0, 1, \dots, 5$

$$w_1 = \sqrt[6]{8}\,(1) = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$$
$$w_2 = \sqrt[6]{8}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$$
$$w_3 = \sqrt[6]{8}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$$
$$w_4 = \sqrt[6]{8}\,(-1) = -\sqrt{2}$$
$$w_5 = \sqrt[6]{8}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$$
$$w_6 = \sqrt[6]{8}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

ریشه‌ها $= \pm\sqrt{2} \;,\; \dfrac{(-1 \pm i\sqrt{3})}{\sqrt{2}} \;,\; \dfrac{(1 \pm i\sqrt{3})}{\sqrt{2}}$

تست کنکور کارشناسی ارشد مکانیک - سال ۷۶

مقدار $\sqrt{i}$ برابر است با:

1) $e^{i(\frac{\pi}{4} + k\pi)}$ ✓   2) $e^{i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)}$

3) $e^{i(\frac{\pi}{2} + k\pi)}$ 4) $e^{i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}$

روش حل: $w = \rho e^{i\varphi} = i \;,\; n = 2 \;,\; \rho = 1 \;,\; \varphi = \frac{\pi}{2}$

$$Z = \sqrt[2]{1}\left(\cos\frac{2k\pi + \pi/2}{2} + i\sin\frac{2k\pi + \pi/2}{2}\right) \Rightarrow Z = e^{i(k\pi + \pi/4)}$$

(گزینه 1 صحیح است)

بخش دوم: «توابع تحلیلی مختلط» {Complex Analytical functions}

فرض کنید S مجموعه‌ای از اعداد مختلط باشد.

تابع f که بر S تعریف شده عبارت از قاعده‌ای است که به هر z در S عدد مختلطی مانند w مربوط می‌سازد. عدد w را یک مقدار f در z می‌نامند و با $f(z)$ نمایش می‌دهند. یعنی: $w=f(z)$

نکته 1:

در نظریهٔ توابع مختلط، توابع چندمقداری یا توابعی که در یک نقطهٔ معین بیش از یک مقدار می‌گیرند، مطرح می‌شوند. یک مثال $w = z^{\frac{1}{2}}$ است که در هر نقطهٔ ناصفر در صفحهٔ مختلط دو مقدار دارد.

نکته 2:

اگر فرض کنیم که $w = u+iv$ مقدار تابع f در $z = x+iy$ باشد یعنی $u+iv = f(x+iy)$ آنگاه هر یک از اعداد حقیقی u و v بستگی به متغیرهای x و y دارند، مثلاً اگر $f(z) = z^2$ باشد:

$$f(z) = (x+iy)^2 = x^2-y^2+i(2xy) \Rightarrow \begin{cases} u = x^2-y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

این مثال نشان می‌دهد که چگونه باید یک تابع مختلط از متغیر مختلط z را برحسب زوج توابع حقیقی از متغیرهای x و y نوشت. این عمل در بحث اعداد مختلط بسیار فراوان انجام می‌شود.

$$\Rightarrow f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

نکته 3:

خواص تابع حقیقی از متغیر حقیقی اغلب با رسم نمودار آن بهتر معرفی می‌شود ولی درمورد $w = f(z)$ که در آن z و w مختلط هستند چنین نموداری وجود ندارد چون z و w هر یک به طور جداگانه در ۲ صفحهٔ مختلط

واقع‌اند. اما با وجود این، می‌توانیم با نمایش زوج نقاط متناظر $z=(x,y)$ و $w=(u,v)$ نمایشی از تابع را نمایان کنیم، که به آن نگاشت یا (Mapping) گفته می‌شود.

تصویر نقطهٔ z از حوزهٔ تعریف S (z-plane)، نقطهٔ $w=f(z)$ از صفحهٔ (W-plane) است که به آن نبرد f هم گفته می‌شود.

تصویر معکوس نقطهٔ w مجموعهٔ همهٔ نقاط z در محیطی S است که دارای تصویر w هستند. تصویر معکوس یک نقطهٔ ممکن است شامل یک نقطه یا چند نقطه باشد و یا اصلاً شامل هیچ نقطه‌ای نباشد.

دو اتحاد مهم:

$$1)\quad 1+z+z^2+\cdots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\quad *$$

$$2)\quad 1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta=\frac{1}{2}+\frac{\sin\theta(n+\frac{1}{2})}{2\sin\frac{\theta}{2}}\quad *$$

شرط: $\rightarrow$ $0<\theta<2\pi$

اتحاد مثلثاتی لاگرانژ

نکته:

- معادله درجه دوم $az^2+bz+c=0$ که در آن a، b، c اعداد مختلط اند، درست با همان روش حل معمولی این معادله حل می‌شود.

- توابع تحلیلی مختلط

- توسط تابع مختلط $w=f(z)$ هر نقطه از صفحهٔ z به نقطه‌ای از صفحهٔ w می‌رود. در اصطلاح گفته می‌شود که تصویر خاصی در z-plane به تصویر خاص دیگری در w-plane نگاشت پیدا می‌کند.

متغیر مختلط: $z=x+iy$ $\Longrightarrow$ $w=f(z)$ یا $f(x+iy)=u+iv$

تابع مختلط: $w=u+iv$

$$\longrightarrow f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

حل و بررسی یک مثال - (توابع مختلط)

$$w = z^2$$

Exp 1 : $z_1 = 1+i \Rightarrow w_1 = (1+i)^2 = 2i$

Exp 2 : $z_2 = (-1+iy) \Rightarrow w_2 = (-1+iy)^2 = (1-y^2) - 2iy$

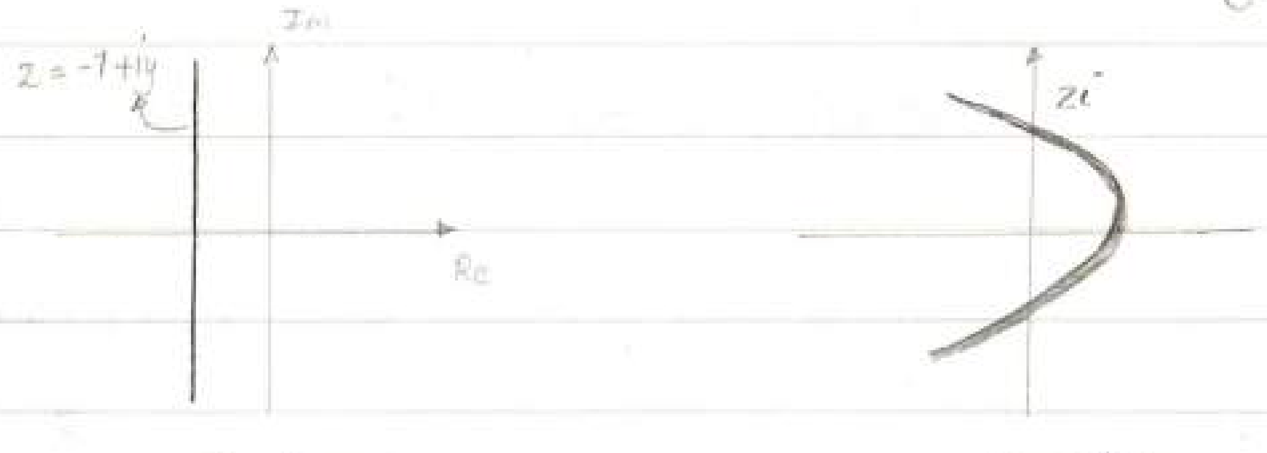
$$\Rightarrow \underset{\text{z-plane}}{(x+iy)} \longrightarrow \underset{\text{w-plane}}{(x+iy)^2} = \underbrace{(x^2-y^2)}_{u(x,y)} + \underbrace{2iy}_{v(x,y)}$$

طبق مثال: خط $z=-1+iy$ توسط این تابع به یک سهمی نگاشته می شود:

$$w = (-1+iy)^2 = (1-y^2) - 2iy$$

$$\left.\begin{array}{l} u = 1-y^2 \\ v = -2y \end{array}\right\} \Rightarrow u = 1 - \frac{v^2}{4} \quad \text{یا} \quad v^2 = -4(u-1)$$

سهمی



z-plane w-plane

حد و پیوستگی در توابع مختلط:

Complex functions Continuity And Limits

حد تابع $w = f(z)$ وقتی z به سوی z_0 میل میکند، عددی است مانند w_0 و می‌نویسیم:

$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$. این حد بدان معنی است که نقطهٔ $w = f(z)$ را می‌توان به دلخواه نزدیک w_0 گرفت اگر z ای به قدر کافی نزدیک به z_0 در z-plane اما متمایز از آن انتخاب کنیم، یا به عبارتی مطابق تعریف کلاسیک حد در توابع حقیقی:

$$0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

از نظر هندسی و ترسیمی، این تعریف بیانگر این است که به ازای هر ε همسایگی w_0 در w-plane، ($|w - w_0| < \varepsilon$)، δ همسایگی از z_0 ($|z - z_0| < \delta$) موجود است بطوری که تصاویر همهٔ نقاط δ همسایگی بجز احتمالاً خود z_0، در ε همسایگی واقع باشد. توجه کنید که حتماً نباید این نقاط تصویر، تمام ε همسایگی را تشکیل دهند، همچنین z مجاز است به هر طریق به z_0 میل کند، نه از مسیری خاص به طور مطلق.

در تعریف حد لازم است که f در همهٔ نقاط همسایگی δ تعریف شده باشد. این تعریف ابزاری برای آزمون حد بودن یک نقطه فراهم می‌آورد ولی مستقیماً روشی برای تعیین حد ارائه نمی‌کند. قضایایی برای حد تابع مختلط وجود دارد که عملاً اکثر حدها به کمک آن‌ها بدست می‌آید.

نکته ۱:

- وقتی حد تابع f در نقطهٔ z_0 موجود باشد، این حد یکتاست.

قضایای حد :

قضیهٔ ۱ :

فرض کنیم $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ و $z_0=x_0+iy_0$ و $w_0=u_0+iv_0$

درانیصورت $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=w_0$

اگر و فقط اگر :

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=u_0$$

و

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=v_0$$

قضیهٔ ۲ :

فرض کنیم $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=w_0$ و $\lim\limits_{z\to z_0} F(z)=W_0$

درانیصورت :

1) $$\lim_{z\to z_0}\left[f(z)+F(z)\right]=w_0+W_0$$

2) $$\lim_{z\to z_0}\left[f(z)F(z)\right]=w_0W_0$$

3) $$\lim_{z\to z_0} f(z)/F(z)=w_0/W_0$$

نکته 2 :

اگر $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ در اینصورت $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = |w_0|$

نکته 3 :

حد چند جمله ای $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$ وقتی z به سوی z_0 میل کند برابر مقدار چند جمله ای در آن نقطه است :

$$\lim_{z \to z_0} P(z) = P(z_0)$$

پیوستگی تابع مختلط :

- تابع f در نقطهٔ z_0 پیوسته است اگر :

1) $f(z_0)$ موجود باشد و 2) $\lim_{z \to z_0} f(z)$ موجود باشد و 3) $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

- یک تابع یک متغیرهٔ مختلط را در ناحیه R پیوسته می گوییم اگر در هر نقطهٔ R پیوسته باشد.
- اگر دو تابع در نقطه ای پیوسته باشند ، مجموع و حاصلضرب آن ها هم در آن نقطه پیوسته است و حتی خارج قسمت آن ها هم در چنین نقطه ای پیوسته است مشروط بر آنکه مخرج در این نقطه صفر نگردد.
- ترکیب توابع پیوسته ، باز هم پیوسته است.

نکته 1 :

تابع یک متغیرهٔ مختلط f در نقطهٔ $z_0 = (x_0, y_0)$ پیوسته است اگر و تنها اگر توابع مولفه آن یعنی u و v در آن نقطه پیوسته باشند.

بطور مثال تابع $f(z) = xy^2 + i(2x-y)$ در همه جای صفحه مختلط پیوسته بوده چون مولفه‌های تابعی u و v آن چندجمله‌ای‌ها همواره پیوسته‌اند.

نکته ۲ :

خواص متعددی از توابع پیوسته یک متغیره مختلط را می‌توان از خواص متناظر توابع حقیقی و پیوسته دو متغیره حقیقی نتیجه گیری کرد. مثلاً فرض کنید که تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در ناحیه R، که هم بسته است و هم کراندار پیوسته باشد. پس تابع $\sqrt{[u(x,y)]^2+[v(x,y)]^2}$ در R پیوسته است و بنابراین در نقطه‌ای از آن ناحیه به یک مقدار ماکزیمم می‌رسد. یعنی تابع f در R کراندار خواهد بود و $|f(z)|$ در نقطه‌ای از آن ناحیه Max دارد. به بیان دقیق‌تر پیوستگی تابع f در یک ناحیه R باعث کراندار شدن آن می‌گردد و عدد مثبت M ای هست که به ازای آن:

$|f(z)| \leq M$ به ازای هر z در R

نکته 3 : بعضی از روش‌های حدگیری مانند قضیه هوپیتال در حد توابع مختلط هم کاربرد دارند علاوه براین روابط هم ارزی و یا جانشینی سری هم می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند.

تست کنکور کارشناسی ارشد (مهندسی پلیمر) سال ۷۴

حد $\lim\limits_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{\sin z^2}$ کدام است؟

1) $-\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{2}$ ✓

3) $\frac{1}{4}$ 4) $-\frac{1}{4}$

روش حل:

ابتدا با کمک هم ارزی $1-\cos z \approx \frac{1}{2}z^2$ و $\sin z^2 \approx z^2$ وقتی $z \to 0$ (z خیلی کوچک) و سپس با ۲ بار استفاده از قاعده هوپیتال مقدار حد برابر $\frac{1}{2}$ بدست می‌آید. گزینه (۲)

$$\frac{1-\cos(0)}{\sin 0} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{1-\cos z}{\sin z^2} \approx \frac{2\sin^2 z/2}{\sin z^2} \approx \frac{2\left(\frac{1}{2}z\right)^2}{z^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{\sin z^2} \approx \lim_{z\to 0}\frac{\frac{1}{2}z^2}{z^2} = \frac{1}{2}$$

حل و بررسی یک مثال:

ثابت کنید تابع $f(z) = \frac{Re\, z}{z}$ در $z=0$ مشتق ندارد و $f'(0)$ وجود نیست.

روش حل: اگر تابعی در جمیع نقطه‌ای حد نداشته باشد پس در جمیع نقطه‌ای مشتق پذیر نیست.

$$\lim_{z \to 0} \frac{Re\, z}{z}$$

برای میل کردن z به سوی صفر دو مسیر جداگانه اختیار می‌گردد:

۱) اگر از محور Real نزدیک شویم:

$$\lim_{z \to 0} \frac{Re\, z}{z} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$$

۲) اگر از محور موهومی محض نزدیک شویم:

$$z = iy \Rightarrow \lim_{z \to 0} \frac{Re\, z}{z} = \lim_{y \to 0} \frac{Re\,(iy)}{iy} = 0$$

چون از دو مسیر مختلف به ۲ مقدار مختلف رسیدیم پس تابع $f(z)$ در $z=0$ حد ندارد و در نتیجه در آنجا مشتق پذیر نیست.

حل و بررسی یک مثال :

با استفاده از قضیه‌های اثباتی حد ، مقدار حد توابع زیر را بدست آورید.

a) $\lim\limits_{z \to i} \dfrac{iz^3 - 1}{z + i}$ b) $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{1}{z^n}$

روش حل : با کمک نکته مربوط به حد توابع چند جمله‌ای می‌توان توابع a , b

را به فرم $S(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ در نظر گرفت و حد صورت و مخرج را با جایگذاری z_0 به جای z

بدست آورد :

a) $\lim\limits_{z \to i} \dfrac{iz^3 - 1}{z + i} = \dfrac{i(i)^3 - 1}{i + i} = \dfrac{-i^2 - 1}{2i} = 0$

b) $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{1}{z^n} = \dfrac{1}{z_0^n}$, $z_0 \neq 0$

تست کنکور کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک سال ۸۰

اگر $z = x + iy$ باشد، در اینصورت $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ چیست؟

1) 0 2) $\frac{1}{2}$

3) ∞ 4) وجود ندارد ✓

روش حل : برای نمایش اینکه تابع ای حد ندارد کافی است نشان دهیم از ۲ مسیر متفاوت وقتی $z \to z_0$ میل می‌کند آن تابع هم به ۲ مقدار متفاوت می‌رسد.

$\lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ x = y \text{ از مسیر}}} f(z) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ \text{از مسیر محور حقیقی} \\ y = 0}} f(z) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(0)}{x^2 + 0} = 0$

پس تابع حد ندارد یعنی گزینه $\underline{4}$

مشتق تابع مختلط: {derivatives of complex function}

فرض می‌کنیم f تابعی باشد که دامنهٔ تعریف اش شامل یک همسایگی از z_0 است مشتق f در z_0 که به صورت $f'(z_0)$ نوشته می‌شود، به فرم زیر بیان می‌کنیم:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \qquad (1)$$

البته به شرطی که این حد موجود باشد می‌گوییم تابع f در z_0 مشتق پذیر است.

نکته ۱:

تعریف مشتق که توسط رابطهٔ (۱) بیان کردیم را می‌توان با بیان همسایگی حول z به صورت جبری بنویسیم $\Delta z = z - z_0$ هم نوشت:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

دقت کنید که چون f در همسایگی z_0 تعریف شده، پس عدد $f(z_0 + \Delta z)$ هم همواره برای $|\Delta z|$ کوچک تعریف شده می‌ماند. اگر بجای $f'(z)$ از نماد مرسوم $d(\ )$ استفاده کنیم:

$w = f(z)$

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$$

Δw تغییر تابع در w-plane و متناظر با تغییر متغیر Δz در z-plane است:

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

بطور مثال فرض کنید $f(z)=z^2$ باشد، در این صورت به ازای هر نقطهٔ z :

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}(2z+\Delta z)=2z$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dw}{dz}=2z \quad \text{یا} \quad f'(z)=2z$$

حال تابع $f(z)=|z|^2$ را به کمک تعریف مشتق بررسی کرده و مشتق پذیری آن را مورد مطالعه قرار میدهیم. نتایج بدست آمده از این روش بسیار مفید هستند.

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{|z+\Delta z|^2-|z|^2}{\Delta z}\xrightarrow{z\bar z=|z|^2}=\frac{(z+\Delta z)(\bar z+\overline{\Delta z})-z\bar z}{\Delta z}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta w}{\Delta z}=\bar z+\overline{\Delta z}+z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

در این حالت وقتی $z=0$ شود $\frac{\Delta w}{\Delta z}=\overline{\Delta z}$ می گردد. بنابراین در نقطهٔ $z=0$، $dw/dz=0$ است. اما وقتی $z\neq 0$، حد $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ از مسیرهای مختلف به مقادیر مختلف منتهی می شود. بطور مثال:

1) اگر Δz با مقادیر حقیقی به سوی صفر میل کند $\xrightarrow[\Delta z=\overline{\Delta z}]{z=\bar z}$ $\quad \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=z+\bar z=2z$

2) اگر Δz با مقادیر موهومی محض به سوی صفر میل کند $\xrightarrow{\overline{\Delta z}=-\Delta z}$ $\quad \lim\frac{\Delta w}{\Delta z}=\bar z-z$

در نتیجه باید گفت که dw/dz یا مشتق تابع f وقتی $z\neq 0$ موجود نیست و در $z=0$ این تابع مشتق دارد.

نتیجه ۱:

- این مثال نشان میدهد که یک تابع می‌تواند در نقطه‌ای خاص مشتق‌پذیر باشد اما هیچ جای دیگری در همسایگی آن نقطه مشتق نداشته باشد. علاوه بر این، می‌توان به این نکته رسید که ممکن است بخش‌های مولفه‌ای حقیقی و موهومی یک تابع مختلط، یعنی u و v در نقطه‌ای مشتق‌پذیر باشند ولی با این حال خود تابع $f = u + iv$ در آن جا مشتق نداشته باشد. این وضعیت دقیقاً برای تابع $f(z) = |z|^2$ رخ داده است، دقت کنید:

$$f(z) = |z|^2 \Rightarrow f(x,y) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = x^2 + y^2 \\ v(x,y) = 0 \end{cases}$$

ملاحظه می‌شود که مولفه‌های u و v در هر نقطه‌ای دارای مشتق اند ولی تابع $f(z)$ در $z \neq 0$ مشتق ندارد.

نتیجه ۲:

پیوستگی یک تابع در یک نقطه مستلزم وجود مشتق در آن نقطه نیست ولی وجود مشتق در یک نقطه پیوستگی تابع در آن نقطه را لازم می‌کند. برای اثبات:

$$\lim_{z \to z_0} [f(z) - f(z_0)] = \underbrace{\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}_{\text{شرط مشتق‌پذیری}} \cdot \lim_{z \to z_0} (z - z_0) = 0$$

$$\Rightarrow \lim [f(z) - f(z_0)] = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

که این همان شرط پیوستگی f در z_0 است.

فرمول‌های مشتق‌گیری:

تعریف ما از مشتق با تعریف مشتق تابع‌های حقیقی یک متغیره به صورت یکی است. در واقع فرمول‌های اساسی مشتق‌گیری را می‌توان با همان فرم مرسوم حساب دیفرانسیل توابع حقیقی بدست آورد:

1) $\dfrac{dC}{dz} = 0$ (عدد مختلط ثابت) , $\dfrac{dz}{dz} = 1$, $\dfrac{d[cf(z)]}{dz} = c f'(z)$

2) $$\frac{d}{dz}\left[f(z) + F(z)\right] = f'(z) + F'(z)$$

3) $$\frac{d}{dz}\left[f(z)\,F(z)\right] = f(z)\,F'(z) + f'(z)\,F(z)$$

4) $$\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{F(z)}\right] = \frac{F(z)f'(z) - F'(z)f(z)}{\left[F(z)\right]^2} \quad , \quad F(z) \neq 0$$

5) $\dfrac{d}{dz} z^n = n z^{n-1}$ $\longrightarrow$ این فرم در حالت n عدد صحیح مثبت همواره صحیح و برای حالت n عدد صحیح منفی باید $z \neq 0$ باشد.

نکته 1:

یک قاعده زنجیری برای مشتق توابع مرکب وجود دارد. فرض کنید f در z_0 و g در $f(z_0)$ تعریف شده و مشتق داشته باشند، در این حالت تابع $F(z) = g[f(z)]$ در نقطه z_0 مشتق دارد و:

$$* \quad F'(z_0) = g'[f(z_0)]\,f'(z_0) \quad *$$

اگر $w = f(z)$, $W = g(w) \Longrightarrow \dfrac{dW}{dz} = \dfrac{dW}{dw} \cdot \dfrac{dw}{dz}$

معادلات کوشی-ریمان: {Cauchy-Reimen Equations}

قضیه: فرض کنید که تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ و $f'(z_0)$ در نقطه‌ای مانند $z_0=x_0+iy_0$ تعریف شده باشند. در اینصورت مشتق‌های جزئی مرتبه اول u, v نسبت به x و y در (x_0,y_0) موجودند و در معادلات زیر بنام روابط کوشی-ریمان صدق می‌کنند:

$$* \quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \quad * \longrightarrow \text{Cauchy-Reimen Condition}$$

اثبات: فرض کنیم که تابع f در یک همسایگی حول z_0 با رابطهٔ $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ تعریف شده باشد. در این حالت برای اینکه مشتق f در z_0 موجود باشد باید:

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

موجود باشد. اگر $z_0=x_0+iy_0$ و $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ باشند در اینصورت:

$$Re\left[f'(z_0)\right]=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} Re\left[\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}\right]$$

$$Im\left[f'(z_0)\right]=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} Im\left[\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}\right]$$

عبارت $\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ را می‌توان برحسب مؤلفه‌های u و v هم نوشت:

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = \frac{u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)+i\left[v(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)\right]}{\Delta x+i\Delta y}$$

در اینحالت Δz می‌تواند هر مسیری حول z_0 باشد خصوصاً:

اگر $\Delta z=\Delta x+0i$، در اینصورت نقطهٔ $z_0+\Delta z$ برابر است با $(x_0+\Delta x, y_0)$:

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\left[f'(z_0)\right] = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x, y_0)-u(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$\operatorname{Im}\left[f'(z_0)\right] = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x_0+\Delta x, y_0)-v(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

تعریف مشتق جزئی

$$\Rightarrow f'(z_0) = u_x(x_0,y_0)+i\,v_x(x_0,y_0) \qquad (I)$$

که در آن $u_x(x_0,y_0)$ و $v_x(x_0,y_0)$ مشتق‌های جزئی مرتبه اول توابع u و v نسبت به x در نقطهٔ (x_0,y_0) هستند.

اگر $\Delta z=0+i\Delta y$، در اینصورت نقطهٔ $z_0+\Delta z$ برابر است با $(x_0, y_0+\Delta y)$. در اینحالت و با روشی مشابه از وجود بودن $f'(z_0)$ نتیجه می‌شود که مشتقات جزئی مرتبه اول $u_y(x_0,y_0)$ و $v_y(x_0,y_0)$ موجودند و:

$$f'(z_0) = v_y(x_0,y_0)-i\,u_y(x_0,y_0) \qquad (II)$$

روابط (I) و (II) نه تنها فرمول‌هایی برای یافتن $f'(z_0)$ برحسب مشتق‌های جزئی توابع مؤلفه

u و v ارائه می‌دهند، بلکه شرایط لازم برای وجود $f'(z)$ نیز فراهم می‌کنند. چون باید این دو رابطه (I) و (II) با هم مساوی گردند تا مقدار یکتایی برای $f'(z)$ حاصل آید:

$$\Rightarrow \quad u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0)$$
$$u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0)$$

نکته 1:

- برقراری معادلات کوشی - ریمان در نقطهٔ $z_0=(x_0,y_0)$ به معنای وجود $f'(z_0)$ نیست. یعنی شرط لازم و کافی برقرار نیست. به این ترتیب که:

اگر u_x و u_y و v_x و v_y در z_0 موجود باشند و تابع در z_0 مشتق داشته باشد $\Longrightarrow$ شرایط کوشی - ریمان برقرار است

ولی عکس این قضیه شرطی حتما صحیح و برقرار نمی‌باشد. اما توجه داشته باشید که عدم برقراری شرایط کوشی - ریمان متضمن مشتق نداشتن تابع هست.

نکته 2:

برای اینکه قضیهٔ فوق را در جهت عکس برقرار نماییم، یعنی برقراری شرایط کوشی - ریمان معیاری از مشتق داشتن تابع باشد، قضیهٔ تکمیلی زیر را بیان می‌کنیم.

قضیه: فرض کنید تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در سراسر همسایگی ε حول نقطهٔ $z_0=x_0+iy_0$ تعریف شده و مشتق‌های جزئی مرتبه اول u و v نسبت به x و y در آن همسایگی موجود و در z_0 پیوسته باشند. در این صورت اگر معادلات کوشی - ریمان برقرار باشند، مشتق $f'(z_0)$ موجود است.

نکته 3:

فرم قطبی شرایط کوشی - ریمان به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$w = f(z) = u(r,\theta) + i v(r,\theta)$$

$$r = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \theta = \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}$$

$$* \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{و} \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r} \quad *$$

توجه 1:

برای اثبات شرایط کوشی - ریمان در دستگاه قطبی از مشتق زنجیره‌ای فرم زیر استفاده می‌گردد:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\sin\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\cos\theta$$

برای $\frac{\partial v}{\partial x}$ و $\frac{\partial v}{\partial y}$ هم روابط مشابه برقرار است.

حل و بررسی مثال:

نشان دهید تابع $f(z)=\bar{z}$ در هیچ نقطه ای مشتق ندارد:

عدم برقراری شرط کوشی-ریمان $\Leftarrow$ نداشتن مشتق

$$f(z)=x-iy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow 1 \neq -1$$

تابع در هیچ جا مشتق ندارد

حل و بررسی مثال:

نشان دهید تابع $f(z)=e^{x}e^{iy}$، در همه جا مشتق پذیر است:

برقراری شرط کوشی-ریمان و
پیوستگی مشتق های جزئی مرتبه اول $\Leftarrow$ مشتق پذیری تابع در همه جا
u و v نسبت به x و y در همه جا

$$f(z)=e^{x}(\cos y+i\sin y)$$

$$\Rightarrow u(x,y)=e^{x}\cos y \quad , \quad v(x,y)=e^{x}\sin y$$

$$\text{I)} \quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow e^{x}\cos y = e^{x}\cos y$$ و پیوسته $e^{x}\cos y$ همه جا پیوسته است

$$\text{II)} \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow -e^{x}\sin y = -e^{x}\sin y$$ و $e^{x}\sin y$ همه جا پیوسته

بنابراین تابع $f(z)=e^{x}e^{iy}$ همه جا مشتق پذیر است.

حل و بررسی یک مثال:

فرمول های شرط کشی - ریمان در دستگاه قطبی را ثابت کنید:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad , \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}$$

روش اثبات:

$$f(z) = u(r,\theta) + i\,v(r,\theta)$$

$$r = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \theta = \operatorname{Arctg}\frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\underbrace{\frac{\partial r}{\partial x}} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\underbrace{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}_{=\cos\theta} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\underbrace{\frac{-y/x^2}{1+y^2/x^2}}_{-\frac{1}{r}\sin\theta}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\sin\theta\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r}\cdot\underbrace{\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}_{\sin\theta} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\underbrace{\frac{\frac{1}{x}}{1+y^2/x^2}}_{\frac{\cos\theta}{r}}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial r}\sin\theta + \frac{1}{r}\cos\theta\,\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial r}\sin\theta + \frac{1}{r}\cos\theta\,\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\Rightarrow \cos\theta\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r}\right)\sin\theta$$

برای برقراری این رابطه باید عبارات داخل پرانتز صفر گردند:

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad , \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}$$

نکته 4:

در صورتی که ضابطهٔ تابع مختلط $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ داده شده و بخواهیم مشتق آن را محاسبه نماییم ($f'(z)$) می‌توان از یکی از فرمول‌های زیر استفاده کرد:

$$(I) \qquad f'(z)=u_x(x,y)+i\,v_x(x,y)$$

$$(II) \qquad f'(z)=v_y(x,y)-i\,u_y(x,y)$$

نکته 5:

اگر توابع $f(z)=u+iv$ و $\overline{f(z)}$ هر ۲ تحلیلی باشند (مشتق‌پذیر باشند) آنگاه حتماً $f(z)$ تابعی ثابت است.

نکته 6:

در بسیاری از حالات برای بررسی اینکه آیا تابع در نقطهٔ z_0 در شرایط کوشی - ریمان صدق می‌کند یا خیر، مقدار $f'(z_0)$ را با کمک تعریف مشتق و حدگیری روی دو مسیر $\Delta x=0$ و $\Delta y=0$ محاسبه می‌کنیم. برابری این دو حد روی دو مسیر مذکور بیانگر صدق کردن تابع در شرایط کوشی - ریمان است.

تست کنکور کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک سال ۸۰

اگر $z=x+iy$ و $\bar{z}=x-iy$ و $f(z)=z\bar{z}$ باشد، کدام عبارت صحیح است؟

1) $f(z)$ در صفحهٔ z تحلیلی نیست

2) $f(z)$ فقط در $z=0$ مشتق‌پذیر نیست

3) $f(z)$ در همهٔ نقاط صفحهٔ z تحلیلی است

4) $f(z)$ در همهٔ نقاط صفحهٔ z دارای مشتق نسبت به z است

روش حل: $f(z)=z\bar{z}=|z|^2$ ⇐ قضیه: مشتق‌پذیر نبودن تابع (تحلیلی نبودن) ⇐ عدم برقراری شرایط کوشی - ریمان

$$f(z)=u+iv=x^2+y^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(x,y)=x^2+y^2 \\ v(x,y)=0 \end{cases} \Rightarrow$$ گزینهٔ (1) صحیح است $\quad \partial u/\partial x \neq \partial v/\partial y$

تست کنکور کارشناسی ارشد مکانیک سال ۸۰

اگر R تمام صفحهٔ مختلط و $f(z)=y^2-x^2+i(x^2+y^2)$ باشد، در اینصورت:

1) $f(z)$ در R تحلیلی نیست

2) $f'(z)$ در امتداد خطوط $y=\pm x$ موجود است

3) $f'(z)$ در R وجود دارد

4) $f'(z)$ در R موجود و $f(z)$ در R تحلیلی است.

روش حل: $y=-x$ یا $-2x\neq 2y$ یا $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$ ⇐ قضیه: مشتق نداشتن و تحلیلی نبودن ⇐ عدم برقراری شرایط کوشی - ریمان

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow 2y=-2x \quad y=-x$$

گزینهٔ (1) صحیح است.

تست کنکور کارشناسی ارشد برق - سال ۸۲

اگر u و v دارای مشتق‌های جزئی مرتبه دوم پیوسته باشند، آنگاه شرط لازم برای آنکه تابع $w=\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)+i\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)$ تابعی تحلیلی باشد کدام است؟

1) $u_{xx}-u_{yy}=0$ و $v_{xx}+v_{yy}=0$

2) $u_{xx}+u_{yy}=0$ و $v_{xx}+v_{yy}=0$ ✓

3) $u_{xx}+u_{yy}=0$ و $v_{xx}-v_{yy}=0$

4) $u_{xx}-u_{yy}=0$ و $v_{xx}-v_{yy}=0$

روش حل: اگر تابعی جدید بگیریم $w=w_1(x,y)+i\,w_2(x,y)$ تحلیلی باشد، با توجه به پیوستگی مشتق‌های جزئی مرتبه دوم فقط شرایط کوشی - ریمان بررسی می‌گردد:

$$\begin{cases} w_1=\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ w_2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial w_1}{\partial x}=\frac{\partial w_2}{\partial y} \text{ And } \frac{\partial w_1}{\partial y}=-\frac{\partial w_2}{\partial x}$$

بنابراین:

$$u_{xy}-v_{xx}=u_{yx}+v_{yy} \text{ And } u_{yy}-v_{yx}=-(u_{xx}+v_{xy})$$

$$\Rightarrow v_{xx}+v_{yy}=0 \quad \text{و} \quad u_{xx}+u_{yy}=0 \Rightarrow$$ گزینه ۲ صحیح است

حل و بررسی یک مثال:

مثال ۱: برای تابع $f(z)$ نشان دهید مشتق‌پذیر است و رابطهٔ $f'(z)$ را پیدا کنید:

$$f(z) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

روش حل: با استفاده از روابط (I) یا (II) بحث قبل و قضیهٔ مشتق‌پذیری توابع مختلط داریم:

$$u(x,y) = \cos x \cosh y$$
$$v(x,y) = -\sin x \sinh y$$

توابع u و v مؤلفه‌های تابع $f(z)$ دارای مشتق‌های مرتبه اول پیوسته‌اند:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin x \cosh y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\sin x \cosh y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = +\cos x \sinh y \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\cos x \sinh y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial u/\partial x = \partial v/\partial y \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\partial v/\partial x \end{cases}$$

$\Leftarrow$ شرایط برقرار و مشتق‌های جزئی پیوسته‌اند پس تابع $f(z)$ مشتق‌پذیر است.

$$f'(z) = u_x(x,y) + i\, v_x(x,y)$$
$$f'(z) = -\sin x \cosh y + i(-\cos x \sinh y)$$
$$\Rightarrow f'(z) = -(\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y)$$

مثال ۲: برای تابع $f(z) = \frac{1}{z}$ بگویید در کجا مشتق‌پذیر است و $f'(z)$ را پیدا کنید.

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ v(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

شرایط کوشی-ریمان (ج) نقطه در $Z=0$ برقرار نبوده و مشتق‌های جزئی هم در نقطه در همین نقطه پیوسته نیستند پس تابع در نقطهٔ $Z=0$ مشتق ندارد.

$$f'(z) = u_x + i\, v_x = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + i\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$
$$= -\frac{1}{z^2}$$

تست کنکور کارشناسی ارشد مهندسی کامپیوتر سال ۷۵

تابع f از متغیر z به صورت زیر مفروض است:

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{(\bar{z})^2}{z}, & z\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}$$

1) f در $z=0$ پیوسته نمی‌باشد

2) در $z=0$ روابط کوشی - ریمان برقرار نبوده تابع مشتق دارد

3) در $z=0$ تابع f پیوسته و روابط کوشی - ریمان برقرارند

4) در $z=0$، تابع f مشتق ندارد و روابط کوشی - ریمان برقرار نیستند.

روش حل: با کمک نکته کلام درس (درس) و (تعریف) تحلیلی اعداد مختلط:

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{(\bar{z})^2}{z}=\lim_{r\to 0}\frac{r^2e^{-2i\theta}}{re^{i\theta}}=0$$

$$f(0)=\lim_{z\to 0} f(z)=0 \Longrightarrow$$ تابع پیوسته است در $z=0$

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\Rightarrow f'(0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z}$$

$$\Rightarrow f'(0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(\Delta\bar{z})^2}{(\Delta z)^2}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{(\Delta x-i\Delta y)^2}{(\Delta x+i\Delta y)^2}$$

حد این تابع بر روی هر ۲ مسیر $\Delta x=0$ و $\Delta y=0$ برابر مقدار 1 می‌شود پس تابع f در شرایط کوشی - ریمان صدق می‌کند. گزینه (3)

تعریف تابع تحلیلی : {Analytical function}

- تابع f از متغیر مختلط z در نقطهٔ z_0 تحلیلی است اگر مشتق آن نه تنها در z_0 بلکه در هر نقطهٔ z از یک همسایگی z_0 موجود باشد. تابع f در ناحیهٔ R تحلیلی است اگر در هر نقطهٔ R تحلیلی باشد.

مثلاً تابع $f(z)=|z|^2$ در هیچ نقطه‌ای تحلیلی نیست زیرا مشتق آن فقط در $z=0$ موجود است و در تمامی هیچ همسایگی صفر، مشتق ندارد.

تعریف تابع تام : Entire function

یک تابع تام، تابعی است که در هر نقطه در تمام صفحهٔ مختلط تحلیلی باشد. مثلاً توابع چند جمله‌ای به دلیل اینکه همه‌جا مشتق دارند، توابع تام هستند.

تعریف نقطهٔ تکین : Singularity point

اگر تابع f در z_0 تحلیلی نبوده اما در نقطه‌ای از همسایگی z_0 تحلیلی باشد. آنگاه z_0 یک نقطهٔ تکین تابع f است. مثلاً نقطهٔ $z=0$ یک نقطهٔ تکین تابع $f(z)=\frac{1}{z}$ است چون $f'(z)=\frac{-1}{z^2}$ همه‌جا جز در نقطهٔ مذکور وجود دارد. از طرف دیگر تابع $f(z)=|z|^2$ دارای نقطهٔ تکین نیست چون هیچ جا تحلیلی نمی‌باشد.

نکته ۱:

اگر دو تابع f و g در یک ناحیه تحلیلی باشند، مجموع و حاصلضرب آن‌ها هم در همان ناحیه تحلیلی است و در صورتی مخرج صفر نگردد خارج قسمت آن‌ها هم تحلیلی می‌گردد.

نکته ۲:

از قاعده زنجیره‌ای برای مشتق تابع مرکب در می‌یابیم که ترکیب دو تابع تحلیلی خود تابع تحلیلی خواهد شد.

تعریف توابع همساز: Harmonic function

تابع حقیقی $h(x,y)$ از دو متغیر حقیقی x و y را در صفحهٔ x-y همساز می‌گویند اگر در سراسر حوزهٔ تعریف دارای مشتق‌های جزئی مرتبه اول و دوم پیوسته باشد و در معادلهٔ لاپلاس صدق کرده و جواب آن باشد.

$$\nabla^2 h = 0 \Rightarrow h_{xx}(x,y) + h_{yy}(x,y) = 0$$

نکته ۱:

اگر تابع $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ در ناحیه D تحلیلی باشد. آنگاه توابع مولفه آن یعنی u و v در ناحیه D همساز هستند. چون اگر f در D تحلیلی باشد مشتقات جزئی مرتبه اول آن در معادلات کوشی - ریمان صدق می‌کنند، پس:

$$u_x = v_y \quad , \quad u_y = -v_x$$

با مشتق‌گیری از طرفین نسبت به x

$$u_{xx} = v_{yx} \quad , \quad u_{yx} = -v_{xx}$$

و نسبت به y

$$u_{xy} = v_{yy} \quad , \quad u_{yy} = -v_{xy}$$

حال بنابر قضیه‌ای در حساب دیفرانسیل و انتگرال متغیرهای حقیقی، پیوستگی مشتقات جزئی متضمن این است که $v_{xy} = v_{yx}$ و $u_{yx} = u_{xy}$. بنابراین:

$$\Rightarrow \quad u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0$$
$$v_{xx}(x,y) + v_{yy}(x,y) = 0$$

یعنی توابع u و v همساز اند.

نکته ۲:

اگر توابعی مؤلفه‌ای u و v از تابع مختلط $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ در ناحیهٔ D همساز باشند و مشتق‌های جزئی مرتبه اولشان در روابط کوشی ـ ریمان صدق کنند، در اینصورت v را مزدوج همساز u (Conjugate harmonic) می‌نامند.

بنابراین اگر $f(z)$ در ناحیهٔ D تحلیلی باشد، v مزدوج همساز u است و برعکس. اگر v یک مزدوج همساز u باشد، تابع $f(z)$ تحلیلی است. بنابراین شرط لازم و کافی برای آنکه تابع $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ در دامنهٔ D تحلیلی باشد این است که v مزدوج همساز u در ناحیهٔ D باشد.

$$v \text{ مزدوج همساز } u \iff \text{ تابع } f(z) \text{ تحلیلی}$$

توجه ۱:

اگر v یک مزدوج همساز u باشد، در حالت کلی لازم نیست که u هم مزدوج همساز v باشد. یعنی اگر تابع $f(z) = u + iv$ تحلیلی باشد حتماً تابع $f(z) = v + iu$ نباید تحلیلی شود. برای روشن شدن موضوع توابع $u(x,y) = x^2 - y^2$ و $v(x,y) = 2xy$ را در نظر می‌گیریم:

$$f(z) = (x^2 - y^2) + i(2xy) \Rightarrow v \text{ مزدوج همساز } u \text{ است}$$

$$f(z) = 2xy + i(x^2 - y^2) \Rightarrow u \text{ مزدوج همساز } v \text{ نیست}$$

$$u_x = 2y \neq v_y = -2y$$

یعنی تابع مذکور تحلیلی نیست پس u مزدوج v نمی‌باشد.

توجه 2 :

اگر دو تابع u و v مزدوج همساز یکدیگر باشند ، باید حتماً این دو توابع ثابتی باشند .

توجه 3 :

اگر v یک مزدوج همساز u در دامنهٔ D باشد . آنگاه $-u$ یک مزدوج همساز v در D است و برعکس . این نکته از اینجا ناشی شده که تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ تحلیلی است اگر و فقط اگر تابع $-if(z)=v(x,y)-iu(x,y)$ تحلیلی باشد .

توجه 4 :

جهت پیدا کردن مزدوج همساز یک تابع همساز ، به بیان مثالی می‌پردازیم ، به سادگی دیده می‌شود که تابع $u(x,y)=y^3-3x^2y$ در تمام صفحهٔ $x-y$ همساز است ، بنابراین مزدوج همسازی باشد $v(x,y)$ را برای آن می‌یابیم :

$$u_x(x,y) = -6xy \Rightarrow \text{از طرفی} \quad u_x = v_y = -6xy$$

$$\Rightarrow v_y = -6xy \xrightarrow{\text{انتگرال نسبت به } y} v(x,y) = -3xy^2 + \varphi(x)$$

$$u_y = -v_x \Rightarrow 3y^2 - 3x^2 = -(-3y^2 + \varphi'(x))$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = 3x^2$$

$$\varphi(x) = x^3 + C$$

$$\Rightarrow v(x,y) = x^3 - 3xy^2 + C$$

$$\Rightarrow f(z) = (y^3 - 3x^2y) + i(x^3 - 3xy^2 + C) = i(z^3 + C)$$

نکته 3 :

با استفاده از بحث همسازی و تحلیلی بودن توابع (نکته 1) اگر تابعی تحلیلی باشد باید مؤلفه‌های $u(x,y)$ و $v(x,y)$ آن توابعی هارمونیک بوده و در معادلهٔ لاپلاس صدق کنند. بنابراین روش خوبی جهت کنترل تحلیلی بودن یک تابع مانند $f(z) = u + iv$، بررسی هارمونیک بودن توابع مؤلفه‌ای u و v است.

نکته 4 :

در مورد توابع مختلط تفاوت عمده‌ای بین مشتق‌پذیری تابع و تحلیلی بودن آن وجود دارد که با در نظر داشتن تعریف تابع تحلیلی مشخص می‌گردد. تحلیلی بودن در نقطهٔ z_0 مستلزم داشتن مشتق در همسایگی حول z_0 علاوه بر در خود $z = z_0$ است. (به مثال‌های صفحهٔ بعد توجه کنید)

نکته 5 :

اگر توابع $f(z)$ و $\overline{f(z)}$ هر 2 توابعی تام باشند، آنگاه حتماً $f(z)$ تابعی ثابت خواهد بود.

نکته 6 : اگر $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ باشد، با جابجا کردن بخش‌های حقیقی و موهومی آن تابعی جدید بنام $g(z) = v(x,y) + iu(x,y)$ بدست می‌آید که با $i\overline{f(z)}$ برابر است. و همانطوریکه در نکتهٔ 5 گفته شد اگر توابع f و g تحلیلی باشند حتماً هر 2 ثابت اند. البته اگر $f(z)$ تحلیلی باشد، حتماً تابع $R(z) = -if(z)$ هم تحلیلی است. (توجه 3 در صفحهٔ قبل)

تست کنکور کارشناسی ارشد مکانیک - سال ۸۳

برای کدام $U(x,y)=x^3+\alpha x y^2+\beta x y^2+y^3$، همساز (هارمونیک) باشد، باید:

1) $\beta=\alpha=-3$ 2) $\alpha=-2=\beta$

3) $\beta=-3,\ \alpha=3$ 4) $\beta=3,\ \alpha=-3$

روش حل: باید تابع u جواب معادله لاپلاس و دارای مشتق‌های جزئی مرتبه اول و دوم پیوسته نسبت به x و y باشد و چون چندجمله‌ای است شرط پیوستگی خود به خود برقرار است. برای شرط لاپلاس:

$$\nabla^2 u=0 \Rightarrow u_x=3x^2+2\alpha yx+\beta y^2$$

$$u_{xx}=6x+2\alpha y$$

$$u_y=\alpha x^2+2\beta xy+3y^2 \Rightarrow 6x+2\alpha y+2\beta x+6y=0$$

$$u_{yy}=2\beta x+6y \qquad x(6+2\beta)+y(6+2\alpha)=0$$

$$\begin{cases}6+2\beta=0\\6+2\alpha=0\end{cases} \Rightarrow \{\ \alpha=\beta=-3$$ گزینه ۱ صحیح

تست کنکور کارشناسی ارشد مکانیک - سال ۸۰

اگر تابع v مزدوج هارمونیک تابع $u=\ln(x^2+y^2)$ باشد، این تابع کدام است؟

1) $v=\frac{1}{2}\mathrm{Arc\,Cotg}\,\frac{x}{y}+C$ 2) $v=\frac{1}{2}\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{x}{y}+C$

3) $v=2\,\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{y}{x}+C$ ✓ 4) $v=2\,\mathrm{Arc\,Cotg}\,\frac{y}{x}+C$

روش حل: بر اساس تعریف $\ln z$ که در دامنهٔ $r>0$ و $-\pi<\theta<\pi$ تحلیلی است: $\ln z=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+i\theta$

$$\ln z=\underbrace{\ln(x^2+y^2)}_{u(x,y)}+\underbrace{2i\left(\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{y}{x}\right)}_{v(x,y)} \rightarrow v(x,y)=2\,\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{y}{x}+C$$

تست کنکور کارشناسی ارشد مهندسی برق - سال ۷۵

تابع $f(z)=x^2+iy^2$ مفروض است. کدام عبارت زیر صحیح نیست؟

1) تابع $f(z)$ بر $x=y$ تحلیلی است.

2) تابع $f(z)$ بر $x=y$ مشتق پذیر است.

3) روابط کوشی - ریمان در $x=y$ برقرار است.

4) این تابع پیوسته است.

روش حل: در یک تابع مختلط مانند $w=u(x,y)+iv(x,y)$ اگر توابع مؤلفه‌ای u و v پیوسته باشند، خود تابع مختلط هم پیوسته خواهد شد پس گزینه ۴ صحیح است. علاوه بر این موضوع روابط کوشی - ریمان این تابع به ازای $y=x$ برقرار است و در نتیجه گزینه ۳ هم جمله‌ای صحیح می‌باشد:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0 \quad , \quad -\frac{\partial v}{\partial x}=0 \quad \xrightarrow{x=y}$$ روابط کوشی - ریمان برقرارند.

تابع مذکور دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته u و v نسبت به x و y بوده و روابط کوشی - ریمان هم به ازای $y=x$ برقرار است پس تابع به ازای خط $y=x$ مشتق پذیر است اما به ازای هر همسایگی نقاط روی این خط مشتق ندارد. بنابراین این تابع بر خط $y=x$ تحلیلی نخواهد بود و گزینه ۲ صحیح و گزینه (۱) جمله‌ای نادرست خواهد شد.

تست کنکور کارشناسی ارشد مهندسی پلیمر سال ۷۴

اگر $f(z) = Im\, z$ ، آنگاه f :

1) در $z = 0$ تحلیلی است 2) فقط در $z = 0$ تحلیلی نیست

3) در هیچ نقطه‌ای تحلیلی نیست 4) هیچ کدام

روش حل :

این تابع بیانگر خط محور موهومی است و در همسایگی اطراف این محور تعریف نشده و در نتیجه مشتق‌پذیر نخواهد بود. بنابراین در هیچ نقطه‌ای تحلیلی نخواهد شد.

$$f(z) = Im\, z \Rightarrow f(z) = y \quad \text{یا} \quad \begin{cases} u(x,y) = y \\ v(x,y) = 0 \end{cases}$$

تست کنکور کارشناسی ارشد مکانیک سال ۷۵

اگر تابع $f(z) = u + iv$ تحلیلی باشد، تحت چه شرایطی تابع $v + iu$ هم تحلیلی است؟

1) اگر u فقط تابعی از x و v فقط تابعی از y باشند

2) اگر u فقط تابعی از y و v فقط تابعی از x باشند

3) اگر u و v هر ۲ مقداری ثابت باشند ✓

4) همواره تحلیلی است.

روش حل : بر اساس نکات ذکر شده فقط در حالتی توابع $f(z) = u + iv$ و $g(z) = v + iu$ تحلیلی اند که هر ۲ ثابت باشند یعنی تابع $f(z)$ ثابت باشد. گزینه ۳

حل و بررسی یک مثال - توابع همساز

نشان دهید تابع $u(r,\theta) = \log r$ در حوزهٔ $r>0$ و $0<\theta<2\pi$ همساز بوده و تزویج همساز آن را پیدا کنید.

راه حل: معادلهٔ لاپلاس در مختصات قطبی عبارت است از:

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0$$

$$u(r,\theta) = \log r \Rightarrow r^2\left(-\frac{1}{r^2}\right) + r\left(\frac{1}{r}\right) + 0 = 0$$

پس $u(r,\theta)$ چون در معادلهٔ لاپلاس صدق میکند، یک تابع هارمونیک است.

برای یافتن مزدوج همساز از روابط کوشی-ریمان در مختصات قطبی کمک می‌گیریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \theta} = -r\dfrac{\partial v}{\partial r} \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial \theta} = 1 \quad ; \quad v = \theta + \varphi(r)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -r[\varphi'(r)] \Rightarrow 0 = \varphi'(r) \quad ; \quad \varphi(r) = c$$

$$\Rightarrow v(r,\theta) = \theta + c$$

$$\Rightarrow f(z) = u(r,\theta) + i v(r,\theta)$$
$$= \log r + i(\theta + c)$$

$$\Rightarrow f(z) = \log z$$

حل دو روش مثال: (تست کنکور کارشناسی ارشد مکانیک سال ۸۲)

اگر $u = x^2 - y^2 + 2x$ باشد، مزدوج همساز و تابع تحلیلی $f(z)$ متناظر آن کدام است؟

1) $f(z) = 2z(z-1)$ ، $v = 2xy$

2) $f(z) = 2z(z+1)$ ، $v = xy + 2y$

3) $f(z) = z(z+2)$ ، $v = 2xy - 2y$

4) $f(z) = z^2 + 2z$ ، $v = y(2x+2)$

روش حل:

$$u(x,y) = x^2 - y^2 + 2x \xRightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2 = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\xRightarrow[y]{\text{انتگرال نسبت به}} 2xy + 2y + \varphi(x) = v(x,y) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = -\partial u/\partial y$$

$$2y + \varphi'(x) = -(-2y) \Rightarrow \varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = C$$

$$\Rightarrow v(x,y) = 2xy + 2y \Rightarrow \text{گزینه } \underline{4}$$

$$\Rightarrow f(z) = (x^2 - y^2 + 2x) + i(2xy + 2y)$$

برای یافتن $f(z)$ برحسب z روش‌های خاصی وجود دارد: مثلاً:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = Re(z^2), \quad x = Re\, z \\ u(x,y) = Re(z^2 + 2z) \\ 2xy = Im(z^2), \quad y = Im\, z \\ v(x,y) = Im(z^2 + 2z) \end{cases} \Rightarrow f(z) = z^2 + 2z$$

روش دوم جایگذاری $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ ، $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ می‌باشد.

تست کنکور کارشناسی ارشد برق سال ۸۱

اگر $u(x,y) = 2^{x} \cos(y \ln 2)$ داده شده باشد، مزدوج همساز و تابع مختلط تحلیلی متناظر $f(z)$ کدام است؟ (λ عدد ثابت است)

1) $v(x,y) = 2^{x} . i \sin(y \ln 2) + \lambda$ و $f(z) = 2^{z} + i\lambda$

2) $v(x,y) = 2^{x} \cos(y \ln 2) + \lambda$, $f(z) = 2^{z} \sin(z \ln 2) + i\lambda$

3) $v(x,y) = 2^{x} \sin(y \ln 2) + \lambda$, $f(z) = 2^{z} + i\lambda$ ✓

4) $v(x,y) = -2^{x} \sin(y \ln 2) + \lambda$ و $f(z) = 2^{z} \cos(z \ln 2) + i\lambda$

روش حل: در حل این تست به معرفی تابع $f(x) = a^{x}$ و مشتق آن احتیاج داریم:

$$y = a^{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = a^{x} \ln a$$

$$\Rightarrow u(x,y) = 2^{x} \cos(y \ln 2) \xRightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} \frac{\partial u}{\partial x} = (2^{x} \ln 2) \cos(y \ln 2) = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = (2^{x} \ln 2) \cos(y \ln 2) \xRightarrow[y \text{ به}]{\text{انتگرال نسبت}} v(x,y) = (2^{x} \ln 2) \left[\frac{1}{\ln 2} \sin(y \ln 2) \right] + \underbrace{q(x)}_{\lambda \text{ ثابت}}$$

$$\Rightarrow v(x,y) = 2^{x} \sin(y \ln 2) + \lambda \Rightarrow \text{گزینه } ۳$$

در این تست u و v مؤلفه‌های تابعی $f(z) = 2^{z} + i\lambda$ هستند. البته توجه کنید که گزینه ۱ به دلیل داشتن i کاملاً اشتباه، گزینه ۲ به دلیل برقراری $u(x,y) = v(x,y)$ اشتباه هستند.

تست کنکور کارشناسی ارشد مکانیک سال ۷۶

تابع $\frac{f(z,\bar{z})}{g(z)}$ را وقتی $|g(z)|$ مخالف صفر است را درنظر بگیرید. تابع:

1) پیوسته ولی تحلیلی نیست
2) تحلیلی ولی پیوسته نمی باشد
3) نه پیوسته و نه تحلیلی است
4) هم پیوسته و هم تحلیلی است.

روش حل: بدلیل اینکه $|g(z)| \neq 0$ است پس تابع مذکور حتماً پیوسته هست ولی از طرفی چون در $f(z,\bar{z})$ از $\bar{z}$ استفاده شده و $\bar{z}$ تحلیلی نیست بنابراین حتماً تابع مورد نظر تحلیلی نمی باشد یعنی تابع $\frac{f(z,\bar{z})}{g(z)}$ پیوسته بوده ولی تحلیلی نمی باشد. گزینه (1)

توابع مختلط مقدماتی : {Elementary Complex function}

دراین بخش به بررسی توابع مختلط مقدماتی می پردازیم. درک شباهت ها و تفاوت های این توابع با توابع مشابه حقیقی بسیار مهم است. در ضمن بحث نگاشت این توابع که معمولاً توابعی چون e^z، $\log z$، z^c، $\sin z$ و ... هستند در بخش ها بعدی مطرح می گردد.

۱) تابع نمایی e^z : Exponential Function

تابع نمایی آنالیز مختلط به ازای هر z با رابطهٔ زیر تعریف می گردد :

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

نکته 1 :

تابع e^z یک تابع تام است و به ازای هر z مشتق آن برابر است با :

$$\frac{d}{dz}e^z = e^z$$

نکته 2 :

تعریف $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$ عدد e^z را به صورت قطبی بیان میکند :

$$e^z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Rightarrow \rho = e^x \;,\; \varphi = y$$

بنابراین e^x معدل e^z و یک آوند یا آرگومان آن است :

$$|e^z| = e^x \;,\quad \arg e^z = y$$

نکته 3 :

تحت نگاشت $w = e^z$ ، نقطه $w = 0$ نمی تواند تصویر هیچ نقطه ای در صفحه z باشد.

بنابراین برد تابع نمایی تمام صفحه مختلط است به استثنای مبداء.

هر نقطه در برد تابع نمایی عملاً تصویر تعدادی نامتناهی نقطه در z-plane است زیرا بنابر تعریف تابع e^z هر دو نقطه در z-plane در w-plane دارای یک تصویرند هرگاه دارای قسمت حقیقی مساوی و تفاضل قسمت های موهومی برابر مضرب صحیحی از 2π باشند. به عبارت دیگر تابع e^z یک تابع متناوب با دوره موهومی محض $2\pi i$ است.

$$z_1 = x + iy_1 \Rightarrow e^{z_1} = e^x(\cos y_1 + i\sin y_1)$$

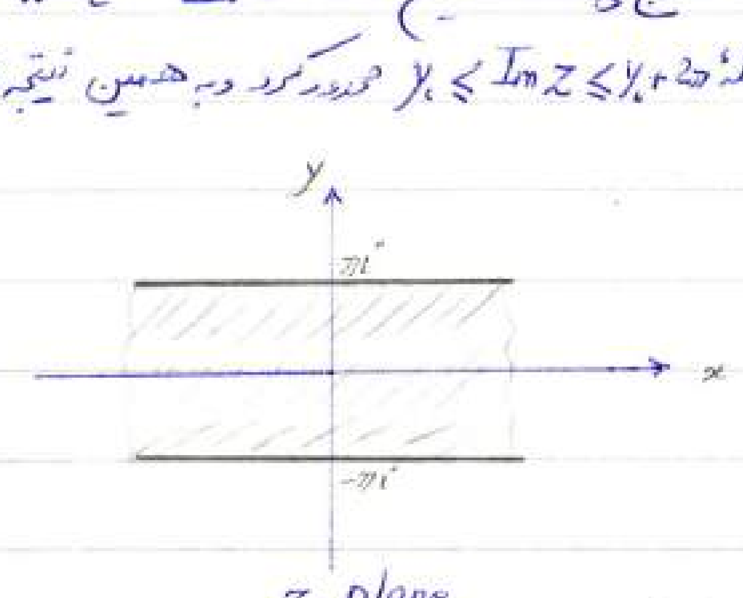
$$z_2 = x + i(y_1 + 2\pi n) \Rightarrow e^{z_2} = e^x[\underbrace{\cos(y + 2n\pi)}_{\cos y} + i\underbrace{\sin(y + 2n\pi)}_{\sin y}]$$

$$\Rightarrow e^{z_1} = e^{z_2} \quad \text{یا} \quad e^{z + 2\pi n i} = e^z$$

پس در واقع تابع e^z یک تابع چندمقداری است.

توجه 1 :

اگر دامنه تعریف متغیر مختلط z به محدوده $-\pi \le \mathrm{Im}\, z \le \pi$ کاهش یابد، تابع e^z از حالت چندمقداری بودن خارج می گردد. در این حالت نگاشت $w = e^z$ یک به یک می گردد. البته دامنه را می توان در هر نوار $y_0 \le \mathrm{Im}\, z \le y_0 + 2\pi$ محدود کرد و به همین نتیجه رسید.



z-plane

توابع مختلط مقدماتی -

الف) تابع اکسپوننشیال یا نمایی : $\exp(z)$

$$f(z) = e^{z} = e^{(x+iy)} = e^{x}(\cos y + i \sin y) \quad *$$

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \cos y + i \sin y \\ e^{-iy} &= \cos y - i \sin y \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad * \quad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \quad * \qquad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

بجای y میتوان عدد مختلط z را قرار داد و $\cos z$ و $\sin z$ را محاسبه کرد.

$$\rightarrow * \quad \sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \quad , \quad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \quad *$$

$$* \quad \cosh iz = \cos z \quad , \quad \cos iz = \cosh z \quad *$$

$$* \quad \sinh iz = i \sin z \quad , \quad \sin iz = i \sinh z \quad *$$

$$* \quad |e^{z}| = e^{x} \quad , \quad |e^{iy}| = 1 \quad *$$

- تابع e^{z}، تابعی است متناوب با دوره تناوب $(2\pi i)$.

$$e^{z} = e^{z+w} \Longrightarrow w = 2n\pi i \quad *$$

(n عددی است صحیح)

نکته :

۱. تحت نگاشت $f(z) = e^z$ ، هیچ نقطه‌ای از z-plane به مبدأ w-plane نمی‌رود. بنابراین برد تابع نمایی تمام صفحه‌ی مختلط است غیر از مبدأ.

۲. هر نقطه در برد تابع e^z می‌تواند عملاً تصویر بی‌نهایت نقطه در z-plane باشد چون همانطور که گفته شد، هر دو نقطه از z-plane با قسمت حقیقی برابر و تفاضل قسمت‌های موهومی با مضرب صحیحی از 2π ، دارای یک تصویرند. یعنی تابع نمایی، تابعی است دوره‌ای با دوره تناوب موهومی $2\pi i$.

نکته :

اگر $z = re^{i\theta}$ ، عدد مختلط ناصفری باشد :

I) $\bar{z} = re^{-i\theta}$

II) $\exp(\operatorname{Log} r + i\theta) = z$

III) $\exp \bar{z} = \overline{\exp z}$

IV) $\exp(i\bar{z}) = \overline{\exp(iz)}$, if and if $z = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \dots$

نکته ۹:

خواص دیگر تابع e^z بصورت زیر می‌باشد:

1) $(\exp z_1)(\exp z_2) = \exp(z_1 + z_2)$

2) $\dfrac{\exp(z_1)}{\exp(z_2)} = \exp(z_1 - z_2)$

3) $(e^z)^n = e^{nz}$

4) $\operatorname{Re} z > 0 \implies |e^{-2z}| < 1$

5) $e^{-nz} = \dfrac{1}{(e^z)^n}$

6) $\exp(\operatorname{Log} r + i\theta) = z$ یا $\exp(\operatorname{Log} z) = z$

7) $\exp \bar{z} = \overline{\exp z}$, $z = n\pi \implies \exp(i\bar{z}) = \overline{\exp iz}$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

8) اگر e^z حقیقی باشد $\implies \operatorname{Im} z = n\pi$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

حل چند مثال از تابع نمایی (exp z):

معادلات زیر را حل کنید:

$\exp(3z) = 8$

$$e^{3z} = e^{3(x+iy)} = e^{3x}\cdot(\cos 3y + i\sin 3y) = 8$$

$$\begin{cases} e^{3x}\cos 3y = 8 \\ e^{3x}\sin 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \tan 3y = 0 \text{ یا } 3y = k\pi$$

$$y = \frac{k\pi}{3}$$

$$e^{3x}(-1)^n = 8 \Rightarrow e^{3x} = 8 \text{ یا } 3x = \ln 8$$

$$x = \frac{1}{3}\ln 8$$

$$z = \frac{1}{3}\ln 8 + i\left(\frac{k\pi}{3}\right)$$

$\exp(z^2) = 1$

$$e^{(x+iy)^2} = 1 \Rightarrow e^{(x^2+2ixy-y^2)} = 1$$

$$e^{x^2-y^2}\cdot\left[\cos(2xy) + i\sin(2xy)\right] = 1$$

$$\begin{cases} e^{(x^2-y^2)}\cos 2xy = 1 \\ e^{(x^2-y^2)}\sin(2xy) = 0 \end{cases} \Rightarrow \tan 2xy = 0 \text{ یا } 2xy = k\pi$$

$$e^{(x^2-y^2)}\cdot(-1)^n = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = 0 \text{ یا } \begin{cases} x = y \\ 2xy = k\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = x + iy = \sqrt{\frac{k\pi}{2}} + i\sqrt{\frac{k\pi}{2}}$$

حل و بررسی یک مثال: (تست کنکور کارشناسی ارشد مکانیک سال ۸۰)

اگر $z = x + iy$ باشد، می‌توان گفت معادله $e^z = -2$ ....

الف) دارای ریشه نمی‌باشد ب) فقط ریشه حقیقی دارد

ج) فقط ریشه موهومی دارد د) دارای بی‌نهایت ریشه است

روش حل: از تعریف e^z و ارتباط متقابل e^z با $\ln z$ استفاده می‌کنیم: $\ln e^z = z + 2n\pi i$

$\ln e^z$ یک تابع چندمقداری است

$$\Rightarrow \ln(e^z) = \ln(-2) \Rightarrow z = \ln(-2) + i(2k\pi)$$

$$z = [\ln|-2| + i\pi] + i(2k\pi)$$

$$z = \ln 2 + i(\pi + 2k\pi) \Rightarrow \text{گزینه ج}$$

حل و بررسی یک مثال: (تست کنکور کارشناسی ارشد مکانیک سال ۷۵)

اگر z یک عدد مختلط باشد، طول و آرگومان عدد e^{z+i} کدام است؟

1) e^{x+1} ، $y+1$ 2) e^x ، y

3) e^{x+1} ، y 4) e^x ، $y+1$

روش حل:

$$e^{z+i} = e^{x+iy+i} = e^x \cdot e^{i(y+1)}$$

$$= e^x \cdot (\cos(y+1) + i\sin(y+1)) \Rightarrow \text{گزینه } 4$$

ب) تابع لگاریتم مختلط : $\operatorname{Ln} z$

$z = re^{i\theta} \rightarrow \ast \log z = \operatorname{Log} r + i\theta \ast$

$\ast \begin{cases} \theta = \operatorname{Arg} z \\ r = |z| \end{cases}$

تابع لگاریتم یک تابع چندمقداری است که برای تمام اعداد مختلط غیرصفر تعریف می‌شود.

$\text{if } (-\pi < \theta \leq \pi) \Rightarrow \log z = \log r + i(\theta + 2n\pi) \quad I$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

- تابع $\log z$ به ازاء هر مقدار z، دارای یک بخش موهومی است که تفاضل بین دو مقدار آن مضرب صحیح از 2π است و دارای یک قسمت حقیقی $(\log r)$ است.

- مقدار اصلی $\log z$ مقداری است که از معادله‌ی I به ازاء $n=0$ بدست می‌آید.

یعنی : $\longleftarrow \operatorname{Log} z = \operatorname{Log} r + i\theta$

- نگاشت $f(z) = \operatorname{Log} z$ تک مقداری و حوزه‌ی تعریف آن مجموعه‌ی همه‌ی اعداد مختلط غیر صفر است و برد آن نوار $-\pi < \operatorname{Im} w \leq \pi$

- تابع $\operatorname{Log} z$ معکوس تابع e^z است لذا بین دامنه و برد آنها رابطه‌ای نزدیک برقرار است و در مبحث نگاشت این امر اهمیت خاص دارد.

نکته :

مؤلفه‌های u و v تابع $\operatorname{Log} z$ در دامنهٔ $r>0$ ، $-\pi < \theta < \pi$ دارای مشتق جزئی مرتبه اول پیوسته نسبت به r و θ هستند و همه جا در شرایط کوشی - ریمان صادقند، پس تابع لگاریتم در حوزهٔ مذکور تحلیلی است :

$$z = re^{i\theta} \longrightarrow \operatorname{Log} z = \operatorname{Log} r + i\theta$$

$$\frac{d}{dz}(\operatorname{Log} z) = \frac{1}{z}$$

خواص دیگر تابع لگاریتم :

1) $$e^{\log z} = z$$

- رابطهٔ $\log e^z = z$ همیشه برقرار نمی‌باشد چون $\log e^z$ چندمقداری است در واقع اگر $z = x+iy$:

$$\log e^z = \operatorname{Log}|e^z| + i \arg e^z = x + i(y+2n\pi)$$
$$= z + 2n\pi i \ , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

2) $$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \ , \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

$$\longrightarrow \quad \log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$$

3) $$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$
$$\operatorname{Log}(r_1 r_2) = \operatorname{Log} r_1 + \operatorname{Log} r_2$$
$$\log \frac{z_1}{z_2} = \log z_1 - \log z_2$$

ج) توابع مثلثاتی :

بر طبق تعریف داریم :

1) $* \sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} * \quad , \quad * \cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} *$

- توابع $\sin z$ و $\cos z$ تام هستند چون از ترکیب خطی e^{iz} و e^{-iz} بدست آمده اند.

سایر روابط عبارتند از :

2) $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z} = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}$,

3) $\cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z} \Rightarrow \sec z = \dfrac{1}{\cos z} \quad , \quad \csc z = \dfrac{1}{\sin z}$

4) $\dfrac{d}{dz}(\sec z) = \sec z \tan z$

5) $\dfrac{d}{dz}(\csc z) = -\csc z \cot z$

6) $* \sin z = \sin x \left(\frac{1}{2}(e^{y} + e^{-y}) \right) + i \cos x \left(\frac{1}{2}(e^{y} - e^{-y}) \right) *$

$\Rightarrow * \sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y *$

$\sin(iy) = i \sinh y \quad , \quad \cos(iy) = \cosh y$

توابع $\sin z$ و $\cos z$ دوره‌ای و متناوب هستند:

$$\sin(z+2\pi) = \sin z \quad , \quad \sin(z+\pi) = -\sin z$$
$$\cos(z+2\pi) = \cos z \quad , \quad \cos(z+\pi) = -\cos z$$

روابط بیشتری در توابع مثلثاتی:

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$$
$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$$

نکته: مدول $\sin z$ و $\cos z$ مطابق روابط بالا کراندار نیستند، حال آنکه در متغیرهای حقیقی، سینوس و کسینوس هیچگاه بزرگتر از واحد نیستند.

اتحادهای مثلثاتی:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

$$\sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$$
$$\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$
$$\sin(-z) = -\sin z \quad , \quad \cos(-z) = \cos z$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$$

$$\sin 2z = 2\sin z \cos z \quad , \quad \cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$$

روابط توابع هیپربولیک :

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \quad , \quad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

توابع sinh و cosh تام هستند، چون ترکیب خطی از e^{z} و e^{-z} .

$$\frac{d}{dz}(\sinh z) = \cosh z \quad , \quad \frac{d}{dz}(\cosh z) = \sinh z$$

$$\frac{d}{dz}(\tanh z) = \operatorname{sech}^2 z \quad , \quad \frac{d}{dz}(\coth z) = -\operatorname{csch}^2 z$$

$$\frac{d}{dz}(\operatorname{sech} z) = -\operatorname{sech} z \tanh z \quad , \quad \frac{d}{dz}(\operatorname{csch} z) = -\operatorname{csch} z \coth z$$

اتحادهای مثلثاتی :

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

$$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$$

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$$

$$\sinh(-z) = -\sinh z \quad , \quad \cosh(-z) = \cosh z$$

$$\sinh(iz) = i \sin z \quad , \quad \cosh(iz) = \cos z$$

$$\sin(iz) = i \sinh z \quad , \quad \cos(iz) = \cosh z$$

$$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$$

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

روابط برای توابع معکوس مثلثاتی :

$$* \quad \sin^{-1} z = -i \log\left[iz + (1-z^2)^{\frac{1}{2}} \right] \quad *$$

$$* \quad \cos^{-1} z = -i \log\left[z + i(1-z^2)^{\frac{1}{2}} \right] \quad *$$

$$* \quad \tan^{-1} z = \frac{i}{2} \log \frac{i+z}{i-z} \quad *$$

$$\frac{d}{dz} \sin^{-1} z = \frac{1}{(1-z^2)^{1/2}}$$

$$\frac{d}{dz} \cos^{-1} z = \frac{-1}{(1-z^2)^{1/2}}$$

$$\frac{d}{dz} \tan^{-1} z = \frac{1}{1+z^2}$$

$$\sinh^{-1} z = \log\left(z + (z^2+1)^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$\cosh^{-1} z = \log\left[z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}$$

حل و بررسی یک مثال:

نشان دهید:

$$\cosh^{-1} z = \ln\left(z \pm \sqrt{z^2-1}\right)$$

$$\cosh^{-1} z = w \Rightarrow \cosh w = z$$

$$\frac{1}{2}\left(e^{w}+e^{-w}\right) = z \rightarrow e^{2w} - 2z e^{w} + 1 = 0$$

$$e^{w} = \frac{2z \pm \sqrt{4z^2-4}}{2} = z \pm \sqrt{z^2-1}$$

$$* \quad w = \ln e^{w} = \ln\left(z \pm \sqrt{z^2-1}\right) \quad *$$

$$\longrightarrow \cosh^{-1} z = \ln\left(z \pm \sqrt{z^2-1}\right)$$

حل و بررسی یک مثال: (تست کنکور کارشناسی ارشد مکانیک سال ۸۴)

معادله $tg\, z = i$ ......

۱) جواب ندارد ✓ ۲) جواب آن $z = 1 + n\pi i$, $n = 1, 2, \dots$

۳) $z = 1 - n\pi i$ ۴) $z = 2n\pi i$

روش حل: برای حل معادلات مثلثاتی بهتر است از e^z استفاده گردد:

$$tg\, z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)/2i}{\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)/2} = i \Rightarrow \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}} = -1$$

$$\Rightarrow 2e^{iz} = 0 \xrightarrow{e^{z} \neq 0}$$ جواب ندارد گزینه (۱)

4) $\log\left(z^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\log z$

$\longrightarrow \quad z^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\log z\right)$

$\xrightarrow{\text{در حالت کلی}} \quad \log(z^n) \neq n\log z$

حل و بررسی چند مثال -

نشان دهید:

$\mathrm{Log}(-ei) = 1 - \left(\frac{\pi}{2}\right)i$

$\mathrm{Log}(-ei) = \mathrm{Log}|-ei| + i\,\mathrm{Arg}(-ei)$

$= \mathrm{Log}\, e + i\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - i\pi/2$

$\mathrm{Log}(1-i) = \frac{1}{2}\log 2 - (\pi/4)i$

$\mathrm{Log}(1-i) = \mathrm{Log}|1-i| + i\,\mathrm{Arg}(1-i)$

$= \log\sqrt{2} + i(-\pi/4) = \frac{1}{2}\log 2 - \frac{\pi}{4}i$

نکته ۱: برای تابع لگاریتم، مزدوج دارای خاصیت عملگری لازم زیر نیست:

$\overline{\mathrm{Ln}\, z} \neq \ln \bar{z}$

حل و بررسی مثال:

معادله زیر را حل کنید:

$$\operatorname{Log} z = \frac{\pi}{2} i$$

$$e^{\operatorname{Log} z} = e^{\pi/2\, i} \Rightarrow z = \cos \pi/2 + i \sin \pi/2 = i$$

$$z_0 = i$$

$$e^{z} = -3$$

$$\log e^{z} = \log(-3) \Rightarrow z + (2n\pi i) = \log|3| + i \arg(-3)$$

$$z = \log 3 + (2n+1)\pi i$$

حل و بررسی یک مثال: (کنکور کارشناسی ارشد مکانیک سال ۸۲)

مقدار اصلی $\ln(-4)$ کدام است؟

1) $2\ln 2$ 2) $2\ln 2 - i\pi$

3) $2\ln 2 + i\pi$ 4) $2\ln 2 - i\pi/2$

روش حل:

$$\ln z = \ln|z| + i\theta$$

$$\ln(-4) = \ln 4 + i\pi$$

$$= 2\ln 2 + i\pi$$

تست کنکور کارشناسی ارشد مهندسی برق - سال ۷۱

اگر $z = e^{i(\frac{3\pi}{4})}$ باشد، آنگاه $w = \operatorname{Ln} z^2$ کدام است؟

۱) $-\frac{i\pi}{2}$ ۲) $\frac{i3\pi}{2}$ ✓ ۳) $i\pi$ ۴) $-i\pi$

روش حل:

$\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln}|z| + i\theta$

$$\Rightarrow z^2 = e^{\frac{3\pi}{2}i}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Ln} e^{\frac{3\pi}{2}i} = \operatorname{Ln}\left|e^{\frac{3\pi}{2}i}\right| + i\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\left|e^{i\theta}\right| = 1 \Rightarrow \operatorname{Ln} z^2 = 0 + i\left(\frac{3\pi}{2}\right) = i\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \text{گزینه } 2$$

حل و بررسی یک مثال: (بحث پیوستگی تابع لگاریتم)

نقاط ناپیوستگی تابع $\operatorname{Ln}(z-i)$ شامل چه محدوده‌ای است؟

روش حل: براساس تعریف تابع لگاریتم $w = \operatorname{Log} z$، این تابع

برای مقادیر غیر صفر z تعریف می‌گردد پس باید ← $z - i \neq 0$

$$x + iy - i \neq 0 \Rightarrow x + i(y-1) \neq 0 \text{ یا } \begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$$

$$\operatorname{Ln}(z-i) = \ln|z-i| + i\arg(z-i)$$

$$= \ln\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + i\left(\operatorname{Arctg}\frac{y-1}{x}\right)$$

بخش حقیقی تابع $\log z$ خود باید حقیقی باشد $\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2}\ln\left[x^2 + (y-1)^2\right] + i\theta$

$$f(z) = \frac{1}{2}\left[\ln x^2 \cdot \ln(y-1)^2\right] = 2\ln x \cdot \ln(y-1)$$

$$\ln x = \text{نامعین} \Rightarrow x < 0 \ , \quad \ln(y-1) = \text{نامعین} \xrightarrow{y-1<0} y < 1$$

حل و بررسی یک مثال:

معادلات زیر را حل نمایید:

الف) $\sin z = \sinh 1$

$$\Rightarrow \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{1}-e^{-1}}{2} \Rightarrow e^{iz}-e^{-iz} = i(e^{1}-e^{-1})$$

$$e^{2iz} + i(e^{-1}-e^{1})e^{iz} - 1 = 0 \longrightarrow$$ معادله درجه ۲

$$e^{iz} = \frac{i(e^{1}-e^{-1}) \pm \sqrt{i^{2}(e^{-1}-e^{1})^{2}+4}}{2} \begin{cases} \rightarrow 1.175i + \frac{i}{2}(1.235) \\ \rightarrow 1.175i - \frac{i}{2}(1.235) \end{cases}$$

$$e^{iz} = \begin{cases} 1.8i \\ 0.56i \end{cases} \Rightarrow iz = \ln(1.8i)$$

$$z = -i\left[\ln|1.8i| + i\left(\arctan\frac{1.8}{0} + 2k\pi\right)\right]$$

$$z = -i\left[0.587 + i\left(\pi/2 + 2k\pi\right)\right] \Rightarrow z = -0.58i + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$iz = \ln(0.56i)$$

$$z = -i\left[\ln|0.56| + i\left(\arctan\frac{0.56}{0} + 2k\pi\right)\right]$$

$$= -0.579i + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

ب) $\sin z = 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = 2 \Rightarrow e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0$$

$$e^{iz} = \frac{4i \pm \sqrt{-16+4}}{2} = \begin{cases} (2+\sqrt{3})i \\ (2-\sqrt{3})i \end{cases}$$

$$e^{iz} = (2+\sqrt{3})i \Rightarrow iz_1 = \ln(2+\sqrt{3})i$$

$$z_1 = -i\left[\ln|(2+\sqrt{3})i| + i(\mathrm{Arctan}\sqrt{\tfrac{3}{2}} + 2k\pi)\right]$$

$$z_1 = -i\left[(1.317) + i(0.713 + 2k\pi)_{rad}\right]$$

$$z_1 = -1.317i + (0.713 + 2k\pi)$$

$$iz_2 = \ln(2-\sqrt{3})i$$

$$z_2 = -i \ln\left[\ln|(2-\sqrt{3})i| + i(\mathrm{Arctan} -\sqrt{\tfrac{3}{2}} + 2k\pi)\right]$$

$$z_2 = -i\left[(-1.317) + i(-0.713 + 2k\pi)\right]$$
$$= +1.317i + (2k\pi - 0.713)$$

د) توانهای مختلط : z^c

با استفاده از تعریف همیشه داریم : $* \; z^c = \exp(c \log z) \; *$

تابع z^c یک تابع چندمقداری است به دلیل این امر این است که $\log z$ تابعی چند مقداری است .

مثال :

$$i^{-2i} = \exp(-2i \log i) =$$

$$= \exp\left[-2i\left(\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i\right]$$

$$= \exp\left[(4k+1)\pi\right]$$

نکته :

بنابر خاصیت $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$ می توان نوشت : $* \; z^{-c} = \dfrac{1}{z^c} \; *$

$$\frac{d}{dz}\left(z^c\right) = \frac{d}{dz}\exp(c\log z) = \exp(c\log z)\,\frac{c}{z}$$

$$= c\,\frac{\exp(c\log z)}{\exp(\log z)} = c\,\exp\left[(c-1)\log z\right]$$

$$\Rightarrow * \; \frac{d}{dz}\left(z^c\right) = c z^{c-1} \; *$$

برای تابع نمایی با مبنای c ، توانی از z داریم:

$$* \quad c^{z} = \exp(z \log c) \quad *$$

$$\frac{d}{dz}(c^{z}) = c^{z} \log c \rightarrow \boxed{\text{مشتق } c^{z}}$$

نکته —: بر اساس تعریف تابع نمای مختلط، اگر z_1 و z_2 هر ۲ متغیر باشند:

$$z_1^{z_2} = e^{z_2 \ln(z_1)}$$

حل و بررسی چند مثال - تابع نمایی مختلط

$3^{(3-i)} = ? \Rightarrow z = 3, \quad c = 3 - i$

$$z^{c} = \exp(c \log z)$$

$$3^{(3-i)} = \exp((3-i)\log 3)$$
$$= e^{(3-i)\log 3} = e^{3\log 3} \cdot e^{-i\log 3}$$
$$= e^{3\log 3}\left[\cos(\log 3) - i \sin(\log 3)\right]$$
$$= 9(\cos 0.478 - i \sin 0.478)$$
$$= 9(0.88 - 0.46i)$$

$(1-i)^{4i} = ? \Rightarrow z = 1-i, \quad c = 4i$

$$(1-i)^{4i} = \exp\left[4i \log(1-i)\right]$$
$$= \exp\left[4i\left(\log\sqrt{2} + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2K\pi\right)\right)\right]$$
$$= \exp\left[0.6i + \pi - 8K\pi\right]$$
$$= e^{0.6i} \cdot e^{\pi(1-8K)} = e^{\pi(1-8K)}\underbrace{\left[\cos 0.6 + i \sin 0.6\right]}$$

$$e^{\pi} \cdot e^{0.6i} = \text{مقدار اصلی}$$

$i^{i} = ? \Rightarrow z = i, \quad c = i$

$$i^{i} = \exp\left[i \log(i)\right] = \exp\left[i\left(\ln 1 + \left(\frac{\pi}{2} + 2K\pi\right)i\right)\right]$$
$$= \exp\left(-\frac{\pi}{2} - 2K\pi\right)$$

$$\text{مقدار اصلی} = \exp\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

حل و بررسی یک مثال: (تست کنکور کارشناسی ارشد مواد - سال ۸۰)

مقدار اصلی عدد مختلط $(-1)^i$ برابر است با:

1) -1 2) $e^{-\pi}$ ✓

3) 1 4) e^{π}

روش حل: $z^c = \exp(c \log z)$

$z = -1, \quad c = i$

$$\Rightarrow (-1)^i = \exp(i \log(-1))$$

$$= \exp\left[i\left\{\ln|-1| + i\pi\right\}\right]$$

$$= e^{-\pi} \Rightarrow (2)$$

حل و بررسی یک مثال: (تست کنکور کارشناسی ارشد مهندسی مواد - سال ۸۳)

حاصل $(i)^i$ در محدوده $(0 < \theta < 2\pi)$ کدام است؟

1) -1 2) $e^{\pi/2}$

3) $-i$ 4) $e^{-\pi/2}$ ✓

روش حل: $z^c = \exp(c \log z)$

$$c = i, \quad z = i \Rightarrow (i)^i = \exp(i \ln i)$$

$$= \exp\left[i\left\{\ln 1 + i\frac{\pi}{2}\right\}\right]$$

$$= e^{-\pi/2}$$

حل و بررسی یک مثال: (کنکور کارشناسی ارشد مهندسی مواد - سال ۷۹)

هرگاه $f(z) = z^{\ln z}$ باشد، مقدار $f(-1)$ کدام است؟

1) 1 2) e^{π^2}

3) $e^{-\pi^2}$ ✓ 4) وجود ندارد

روش حل: از تعریف تابع نمایی $f(z) = z^c$ کمک می‌گیریم:

$$z^c = \exp(c \ln z) \Rightarrow \begin{cases} z = z \\ c = \ln z \end{cases}$$

$$f(z) = z^{\ln z} = \exp(\ln z)^2 = \exp\left\{(\ln|z| + i\theta)^2\right\} \Rightarrow f(-1) = \exp\left\{(i\pi)^2\right\} = e^{-\pi^2} \Rightarrow$$ گزینه 3 درست

حل و بررسی یک مثال: (تست کارشناسی ارشد مکانیک سال ۷۵)

مقدار i^i کدام است؟

الف) ۰ ب) $e^{-\frac{\pi}{2}}$

ج) $e^{-\pi}$ د) $\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}$

روش حل: $z^c = \exp(c\ln z)$

$$z^c = i^i \Rightarrow z=i,\ c=i \Rightarrow i^i = \exp(i\ln i)$$

$$= \exp\left(i\left\{\ln|i| + i\frac{\pi}{2}\right\}\right)$$

$$\Rightarrow i^i = e^{-i\pi/2} = e^{-\pi/2}$$ گزینه "ب"

تئوری نگاشت بوسیلهٔ توابع مقدماتی مختلط:

{ Mapping theory By
Elementary Complex functions

مقدمه:

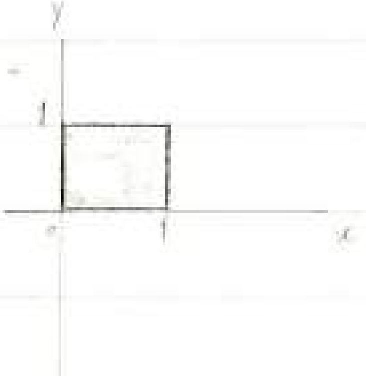
- نگاشت در واقع تغییر متغیر توابع مختلط است و ابزاری است برای تبدیل موقت فضای فیزیکی پیچیده به یک فضای ساده‌تر که امکان حل ریاضی در این فضای جدید وجود داشته باشد. در این بخش خواهیم دید که چگونه منحنی‌ها و نواحی مختلف به وسیلهٔ توابع مقدماتی مختلط به فضای جدید نگاشت پیدا می‌کنند. کاربردهای متنوعی از تئوری نگاشت را می‌توان در درس‌های انتقال حرارت و مکانیک سیالات پیشرفته جستجو کرد. در این جزوه هم مثال‌های مختلفی از مسائل فیزیکی و کاربرد نگاشت‌ها در حل آن‌ها ارائه خواهد شد.

تئوری نگاشت ها -

نگاشت در واقع تعبیر هندسی توابع تحلیلی می باشد. تحت عمل نگاشت نمودار در سطح وابسته به آن در z-plane به نمودار در سطحی وابسته در w-plane تبدیل می شود. ره مورد کاربردهای این ابزار ریاضی بعداً بطور مشروح بحث خواهیم کرد.

در ابتدا فرآیند کلی بدست آوردن نگاشت تحت تابع $w = f(z)$ بررسی شده و سپس توابع خاصی مانند e^z، $\ln z$، c^z و ... را مطالعه خواهیم کرد.

حل و بررسی یک مثال - نگاشت مربع واحد.



مربع $0 \le x \le 1$ ، $0 \le y \le 1$
تحت نگاشت $w = z^2$ به چه نوع شکلی تبدیل می شود؟

Solution : $w = u + iv = \underbrace{(x^2 - y^2)}_{u} + i\underbrace{(2xy)}_{v}$

الف) تصویر خط $x = 0$ ، $0 \le y \le 1$

$w = (0 - y^2) + i(0) = -y^2$

$\Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = -y^2 \\ v(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} -1 \le u \le 0 \\ v = 0 \end{matrix}$

ب) تصویر خط $y = 1$ ، $0 \le x \le 1$

$w = (x^2 - 1) + 2ix$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = x^2 - 1 & \Rightarrow \quad -1 \le u \le 0 \\ v(x,y) = 2x & \qquad\quad 0 \le v \le 2 \end{cases}$$

ج) تصویر خط $x = 1 \,,\, 0 \le y \le 1$

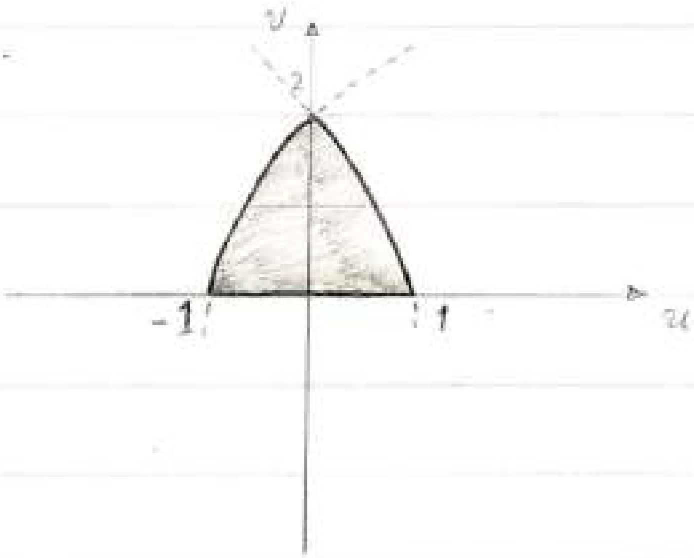
$$W = (1 - y^2) + 2iy$$

$$\begin{cases} u(x,y) = 1 - y^2 \\ v(x,y) = 2y \end{cases} \Longrightarrow \quad u = 1 - \frac{v^2}{4}$$ سهمی $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 2$

د) تصویر خط $y = 0 \,,\, 0 \le x \le 1$

$$W = (x^2 - 0) + i(0)$$

$$\begin{cases} u(x,y) = x^2 & \Longrightarrow \quad 0 \le u \le 1 \\ v(x,y) = 0 & \qquad\quad v = 0 \end{cases}$$



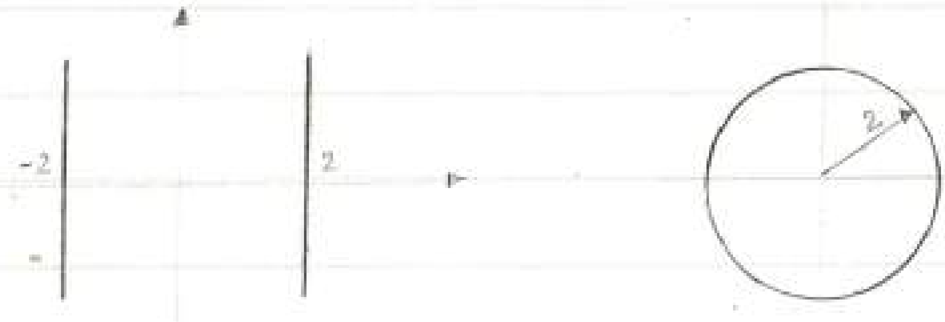
w - plane

حل و بررسی یک مثال -

الف) $|z| = 2$ تحت نگاشت $w = x e^{iy}$.

$|x| = 2 \Rightarrow x = \pm 2$ دو خط موازی

$|w| = |x e^{iy}| = |x||e^{iy}| = |x| = 2 \Rightarrow$ دایره‌ای به شعاع 2

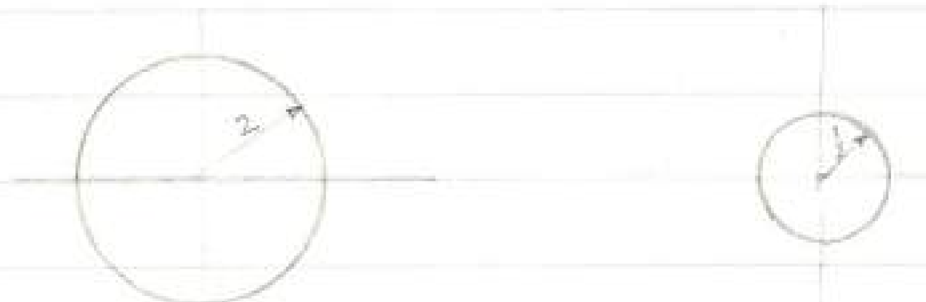


z-plane w-plane

ب) $|z| = 2$ تحت نگاشت $w = \frac{1}{z}$.

$|w| = \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{2}$

تحت این نگاشت هر نقطه از محیط دایره به شعاع 2 به روی محیط دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{2}$ می‌رود.



نگاشت بوسیله توابع مقدماتی.

الف) توابع خطی.

۱) نگاشت صفحه z بروی صفحه w توسط تابع $w = z + c$ یک انتقال خواهد بود

$$c = c_1 + ic_2 \qquad \Rightarrow \qquad (x + c_1, \; y + c_2)$$
$$z = x + iy$$

۲) نگاشت بوسیله $w = Bz$ که در آن B عددی مختلط است عبارتست از دوران حول مبداء و انقباض یا انبساط. درواقع:

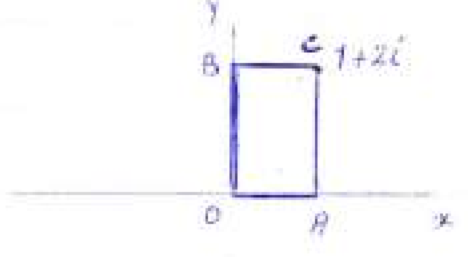
$$w = Bz$$
$$B = be^{i\beta} \qquad \Rightarrow \qquad w = bre^{i(\beta + \theta)}$$
$$z = re^{i\theta}$$

- بنابراین این تبدیل هر نقطه $z(r, \theta)$ را به نقطه $(br, \theta + \beta)$ می‌نگارد.
- میزان دوران شکل تحت این نگاشت برابر است با $\beta = \arg B$.
- میزان انبساط یا انقباض شکل تحت این نگاشت بستگی بمقدار $|B| = b$ دارد و تصویر حاصل در w-plane با شکل اولیه متشابه است.

۳) نگاشت بوسیله $w = Bz + c$ عبارتست از انتقال توأم با دوران و انقباض و انبساط.

حل و بررسی یک مثال - نگاشت بوسیله توابع خطی

مستطیل شکل زیر تحت نگاشت روبرو ← $w = (1+i)z + 2 - i$
چه تغییراتی میکند؟

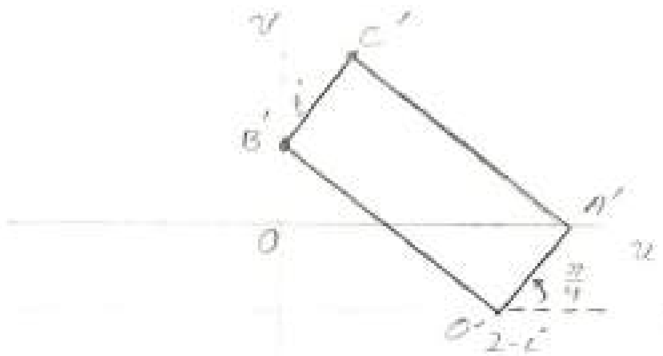


تبدیل حاصل از یک دوران به اندازه $\beta = \frac{\pi}{4}$
و انبساطی به اندازه $\sqrt{2} = |1+i|$ و یک انتقال به
وسیله بردار نمایش $(2-i)$.

$w = z_1 + z_2$

دوران و انبساط

انتقال



B: $(0,2) \longrightarrow (0,1)$: B'

C: $(1,2) \longrightarrow (1,2)$: C'

A: $(1,0) \longrightarrow (3,0)$: A'

O: $(0,0) \longrightarrow (2,-1)$: O'

حل و بررسی یک مثال : (توابع مختلط و کاربرد در نگاشت)

نگاشت دایره $x^2+y^2=c^2$ تحت تابع $f(z)=|z|-i\,\mathrm{Im}\,z$:

$$w=f(z)=|z|-i\,\mathrm{Im}\,z \qquad\qquad x^2+y^2=c^2$$

$$=\sqrt{x^2+y^2}-iy$$

$$\Rightarrow \quad u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}=c \quad \Rightarrow \quad u=\pm c$$

$v(x,y)=-y$ ، چون $-c\le y\le c \Rightarrow -c\le v\le c$

بنابراین دایره فوق به پاره خط عمود بر محور u در فاصله $-c\le v\le c$

در w-plane تبدیل می‌گردد.

z-plane　　　　w-plane

توجه :

c می‌تواند هر عدد ثابت نامنفی باشد، بنابراین برد تابع $f(z)$ باید شامل

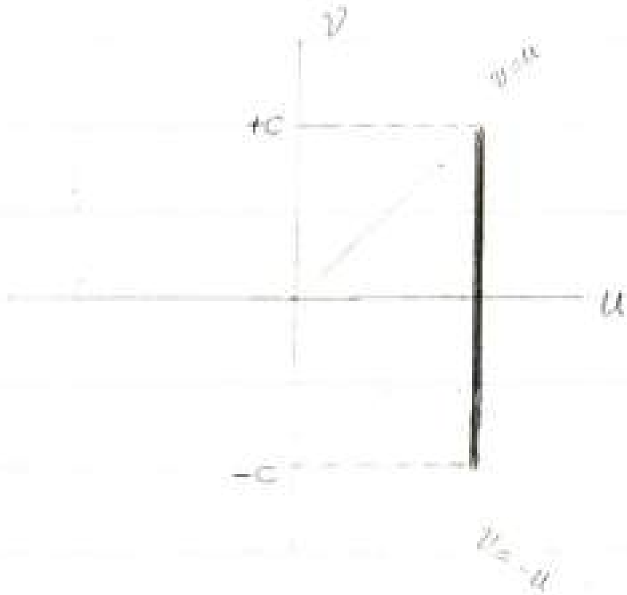
محدوده $u\geq 0$ و $-\infty\le v<\infty$ باشد. اما حوزه تعریف z شامل تمام

صفحه مختلط است. علاوه بر این نقاط $z=(x,y)$ و $-\bar{z}=(-x,y)$ هر دو

یک تصویر در w-plane دارند؛ می‌توان گفت که هر نقطه روی پاره خط نگاشت در

تصویر دو نقطه از دایره w-plane (به استثنای نقاط ابتدایی و انتهای پاره‌خط) در z-plane است. بنابراین نگاشت $w = Z\bar{z} - |z|$ هر دایره به مرکز مبداء را به یک پاره‌خط در سمت راست صفحهٔ w-plane مطابق شکل می‌برد و یا اینکه هر پاره‌خط با شرایط مذکور تصویر یک دایره به مرکز مبداء است.

z-plane



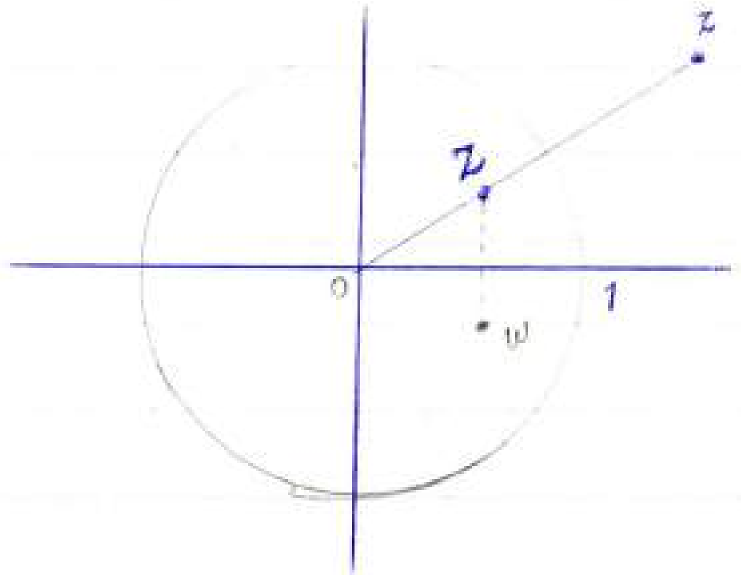
w-plane

برد تابع $f(z)$ شامل محدوده واقع در بین دو خط $v=u$ و $v=-u$ مطابق شکل است.

نکته 2:

نگاشت توسط تابع $w = \frac{1}{z}$ را می‌توان به کمک تبدیلات متوالی (1) و (2) در زیر هم بیان کرد. تبدیل (1) در واقع یک انعکاس نسبت به دایره $|z| = 1$ است، یعنی تصویر هر نقطه z در خارج دایره مذکور به داخل آن نگاشته می‌شود و برعکس. در این حالت هر نقطه بر روی دایره، بر روی خودش نگاشت می‌یابد. اما تبدیل (2) فقط یک انعکاس در محور حقیقی است: $(|z|^2 = z\bar{z})$

$$(1) \quad Z = \frac{1}{|z|^2} z \qquad , \qquad (2) \quad W = \bar{Z}$$



ملاحظه می‌شود که تصویر دایره $|z| = \varepsilon$ دایره $|w| = \frac{1}{\varepsilon}$ است. همچنین یک ε همسایگی $|z| < \varepsilon$ از مبداء که مبداء جزء آن نیست با یک ε همسایگی $\frac{1}{\varepsilon} < |w|$ از نقطه در بی‌نهایت متناظر است. پس منطقی است با نوشتن $T(0) = \infty$ و $T(\infty) = 0$ و به ازای بقیه مقادیر z، $T(z) = \frac{1}{z}$، تبدیل T را بر صفحه تکمیل شده یا توسعه یافته تعریف کنیم.

نکته 3 :

اگر a و b و c و d اعداد حقیقی باشند، معادله $a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$ بسته به اینکه $a\neq 0$ یا $a=0$ باشد، به ترتیب، نمایش دایره یا خط است. وقتی $w=\frac{1}{z}$ باشد این معادله به فرم $d(u^2+v^2)+bu-cv+a=0$ در می‌آید:

$$u+iv=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u=\dfrac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow u^2=\dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ v=\dfrac{-y}{x^2+y^2} \Rightarrow v^2=\dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$$

$$u^2+v^2=\frac{1}{x^2+y^2}=\frac{u}{x}=\frac{-v}{y} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{u}{u^2+v^2} \\ y=\dfrac{-v}{u^2+v^2} \end{cases}$$

حال به جای x و y در معادله پارامتری جاگذاری می‌کنیم:

$$a\left[\frac{u^2}{(u^2+v^2)^2}+\frac{v^2}{(u^2+v^2)}\right]+\frac{bu}{u^2+v^2}-\frac{cv}{u^2+v^2}+d=0$$

$$\Rightarrow d(u^2+v^2)+bu-cv+a=0$$

نکته ۱:

از معادلهٔ حاصل در w-plane پیداست که دایره‌ای $(a\neq 0)$ در z-plane که از مبداء نمی‌گذرد $(d\neq 0)$ تبدیل به دایره‌ای در صفحهٔ w می‌گردد که آن هم از مبداء نمی‌گذرد.

علاوه بر این دایرهٔ گذرنده از مبداء در z-plane تبدیل به خطی در w-plane می‌گردد که از مبداء عبور نمی‌کند.

خطی در z-plane که از مبداء نمی‌گذرد تبدیل به دایره‌ای گذرنده از مبداء در w-plane می‌گردد.

نکته ۲:

خط $x=c_1$ $(c_1\neq 0)$ تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ به دایره‌ای که در مبداء بر محور v مماس شده تبدیل می‌گردد.

$$x=c_1$$

$$\text{تحت } w=\frac{1}{z} \Rightarrow u+iv=\frac{1}{x+iy} \Longrightarrow x=\frac{u}{u^2+v^2}=c_1$$

$$\Rightarrow u^2+v^2-\frac{u}{c_1}=0 \quad \text{یا} \quad \left(u-\frac{1}{2c_1}\right)^2+v^2=\frac{1}{4c_1^2}$$

دایره‌ای به مرکز $(\frac{1}{2c_1}, 0)$ و شعاع $\frac{1}{2c}$ (مماس بر محور v و گذرنده از مبداء در w-plane)

نکته ۳:

خط $y=c_2$ $(c_2\neq 0)$ تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ به دایره‌ای که در مبداء بر محور u مماس شده تبدیل می‌گردد.

$$y=c_2$$

$$\text{تحت } w=\frac{1}{z} \Rightarrow u+iv=\frac{1}{x+iy} \Rightarrow y=\frac{-v}{u^2+v^2}=c_2$$

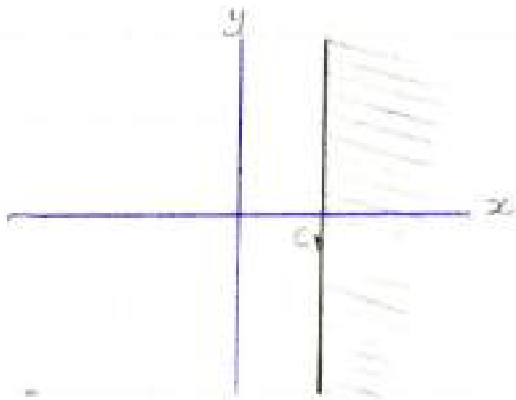
$$\Rightarrow u^2+v^2+\frac{v}{c_2}=0 \Rightarrow u^2+\left(v+\frac{1}{2c_2}\right)^2=\frac{1}{4c_2^2}$$

توجه ۱۹ :

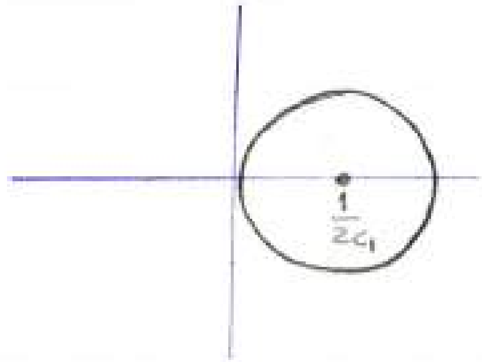
تصویر نیم صفحهٔ $x>c_1$ ، $(c_1>0)$ عبارت است از ناحیهٔ $\frac{u}{u^2+v^2}>c_1$ که آن را می‌توان

به فرم $\left(u-\frac{1}{2c_1}\right)^2+v^2<\left(\frac{1}{2c_1}\right)^2$ نوشت. در نتیجه تصویر هر نقطه در این نیم صفحه، در درون دایره

مماس بر محور v ها با شعاع $\frac{1}{2c_1}$ و مرکز $\left(\frac{1}{2c_1},0\right)$ واقع می‌شود و برعکس.



Z-plane

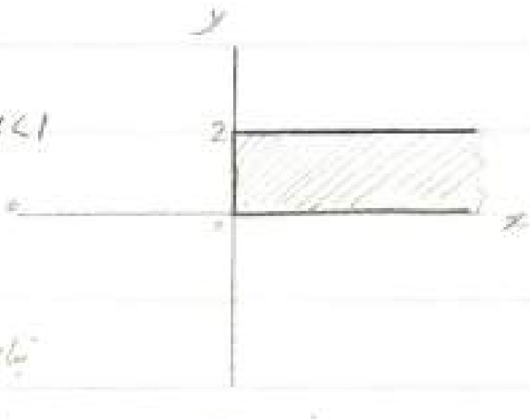


حل و بررسی یک مثال:

تصویر نوار نیمه نامتناهی $0<y<2$ و $x>0$ را تحت تبدیل $w=iz+1$ پیدا کنید.

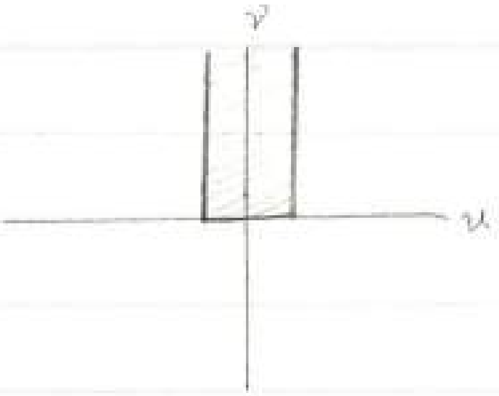
روش حل: ناحیه داده شده در z-plane نیم یک نوار موازی با محور x ها و نیمه راست است:

$$u+iv = i(x+iy)+1$$
$$= (1-y) + ix$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} u(x,y) = 1-y \xrightarrow{0<y<2} -1<u<1 \\ v(x,y) = x \xrightarrow{x>0} v>0 \end{cases}$$



z-plane

بنابراین نگاشت نیم نوار افقی در z-plane تحت تابع $w=iz+1$ شامل یک نوار عمودی موازی با محور v ها و البته با انتقال یک واحد به بالا است.



w-plane

روش دوم:

با توجه به اینکه نگاشت $w=iz+1$ شامل یک دوران به اندازه $\frac{\pi}{2}$ و یک انتقال به سوی محور مثبت است.

میزان مقابل هم شکل حاصل معلوم می‌گردد.

ب) تابع $\frac{1}{z}$

نگاشت $w=\frac{1}{z}$ نگاشتی یک به یک بین نقاط z, w را ایجاد میکند و درضمن محل هرنقطه را عکس میکند. یعنی هرنقطه از خارج دایرهٔ $z=r$ را به داخل دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{r}$ می‌برد.

$$z=re^{i\theta} \quad \& \quad w=Re^{i\varphi}$$

$$\Rightarrow \quad Re^{i\varphi}=\frac{1}{re^{i\theta}} \quad \text{یا} \quad * \; R=\frac{1}{r}, \quad \varphi=-\theta \; *$$

حل درس یک مثال - نگاشت توسط $w=\frac{1}{z}$

خطوط $x=c$ و $y=c_1$ تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ چه تغییراتی میکنند؟

$$w=\frac{1}{z} \Rightarrow u+iv=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow u=\frac{x}{x^2+y^2}, \quad v=\frac{-y}{x^2+y^2} \Longrightarrow u^2+v^2=\frac{u}{x}$$

خط عمودی $x=c$ به تبدیل می‌شود به:

$$x=\frac{u}{u^2+v^2}=c$$

$$u^2+v^2-\frac{u}{c}=0 \quad \text{یا} \quad \Longrightarrow \left(u-\frac{1}{2c}\right)^2+v^2=\frac{1}{4c^2}$$

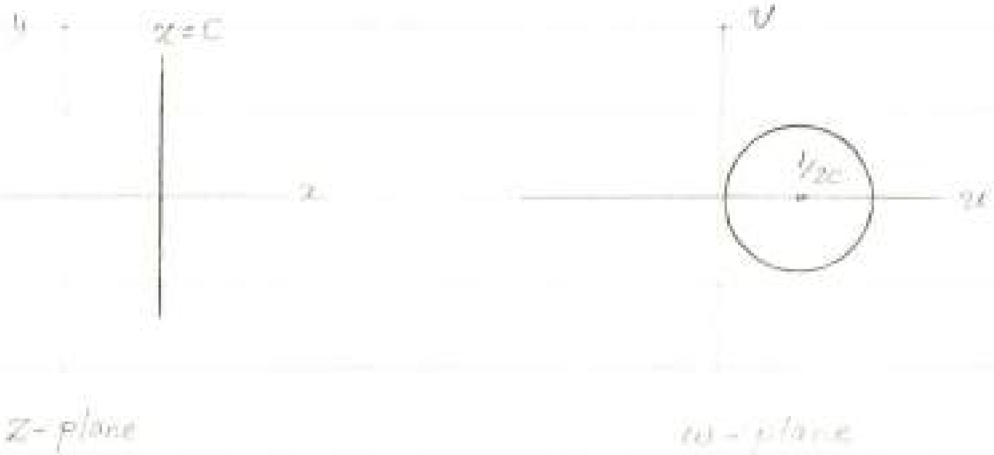
دایره‌ای به مرکز $(\frac{1}{2c}, 0)$ و شعاع $\frac{1}{2c}$.

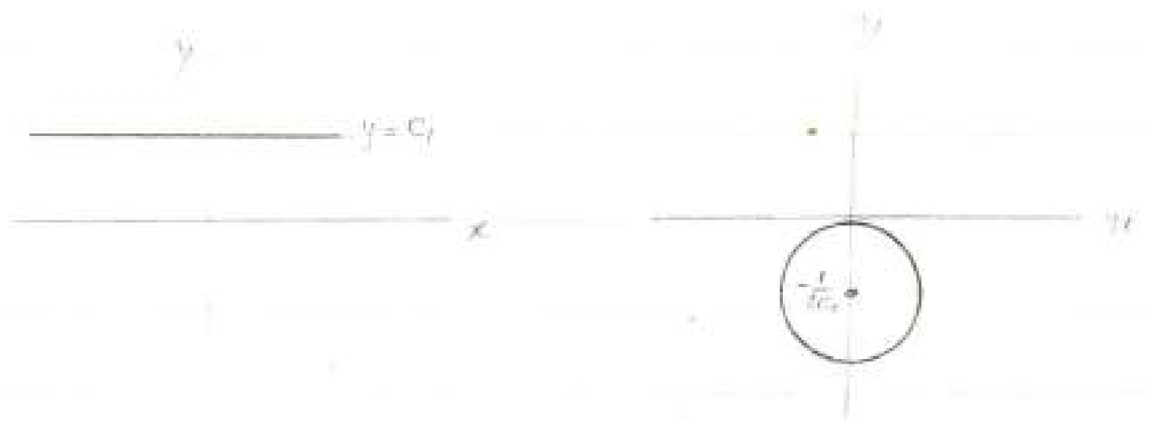
خط افقی $y=c_1$:

$$y = \frac{-v}{u^2+v^2} = c_1 \Rightarrow u^2+v^2+\frac{v}{c_1}=0$$

$$\Rightarrow u^2+\left(v+\frac{1}{2c_1}\right)^2=\frac{1}{4c_1^2}$$

دایره‌ای به مرکز $\left(0, -\frac{1}{2c_1}\right)$ و شعاع $\frac{1}{2c_1}$.





نکته !

تحت این نگاشت دایره‌ای که در صفحهٔ z از مبداء عبور کند، تبدیل به دایره‌ای در صفحهٔ w می‌شود که از مبداء عبور نمی‌کند. یک دایره مماس بر مبداء در صفحهٔ z تحت این تبدیل خطی در صفحهٔ w تبدیل می‌گردد که از مبداء نمی‌گذرد.

خطی که در z-plane از مبداء عبور نمی‌کند تحت این نگاشت تبدیل به دایره‌ای مماس بر مبداء در w-plane می‌شود.

ب) نگاشت بوسیله توابع خطی کسری.

تبدیل I) $(ad-bc\neq 0)$ و $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$

که در آن a، b، c، d اعداد مختلط ثابت هستند، تبدیل خطی کسری یا تبدیل (Mobius) می باشد. در حالتی خاص که $c=0$ است، این نگاشت به تبدیل خطی $\left(\frac{a}{d}z+\frac{b}{d}\right)$ تبدیل می گردد.
یعنی شامل یک دوران و یک انتقال می شود.

$$\longrightarrow \quad w = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c}\cdot\left(\frac{1}{cz+d}\right)$$

اگر $bc-ad=0 \Longrightarrow$ (تبدیل خطی کسری، تابعی ثابت می گردد)

یافتن نقطه ثابت: ← "fixed point"

(نقاطی از z-plane که هنگام تبدیل بروی خودش در w-plane منعکس می گردد)

$$\frac{az+b}{cz+d}=z \Rightarrow cz^2-(a-d)z-b=0 \qquad \text{II}$$

if: $b=c=0$, $a=d\neq 0 \Longrightarrow$ تبدیل ثابت صفر

که اگر این حالت رخ ندهد، تبدیل خطی کسری همواره دارای دو نقطه ثابت مطابق معادله درجه دوم II خواهد بود. اگر تبدیل خطی کسری بیش از ۲ یا دقیقاً ۳ نقطه ثابت داشته باشد، قطعاً تابع ثابت است. (identity Mapping)

قضیه :

نگاشت $T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ یک به یک و پوشا است. از:

$$A=\{z \mid cz+d\neq 0 \;\text{ یا }\; z\neq -d/c\} \quad \text{Onto} \quad B=\{w \mid w\neq \frac{a}{c}\}$$

تبدیل معکوس: $T(z)=\frac{az+b}{cz+d} \Rightarrow T^{-1}(z)=\frac{-dw+b}{cw-a}$ آنگاه

نکته :

ترکیب دو تبدیل خطی کسری باهم، تبدیلی است خطی کسری.

نکته :

اگر بخواهیم بدانیم تبدیل خطی کسری چه اعمالی را هنگام عمل نگاشت روی شکل مورد نظر انجام میدهد باید آن را اینطور تجزیه کرد :

1) $w_1=cz+d \rightarrow$ انقباض یا انبساط، دوران و انتقال به اندازه بردار d

2) $w_2=\frac{1}{w_1} \rightarrow$ عکس کردن مدول و قرینه کردن زاویه

3) $w_3=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}w_2 \rightarrow$ انقباض یا انبساط، دوران و انتقال دوباره

نکته -

اگر خطوط در صفحهٔ گسترش یافته را بعنوان دوایر مار بر نقطهٔ بی نهایت منظور کنیم، می‌توان گفت که تبدیل خطی کسری، دایره را به دایره تبدیل میکند.

$w = \frac{a}{c}$ Correspond to $z = \infty$

$w = \infty$ Correspond to $z = -d/c$

در حالت کلی می‌توان گفت که دایره‌ای که از مبداء نمی‌گذرد به دایره‌ای از w-plane که آن هم از مبداء نمی‌گذرد تبدیل می‌شود.

دایره‌ای که در z-plane از مبداء می‌گذرد، در w-plane به خطی تبدیل می‌شود که از مبداء عبور نمی‌کند.

خطی که در z-plane از مبداء نمی‌گذرد، در w-plane به دایره‌ای تبدیل می‌شود که از مبداء می‌گذرد.

خطی که در z-plane از مبداء می‌گذرد، در w-plane به خطی تبدیل می‌شود که از مبداء می‌گذرد.

نکته -

دقیقاً یک تبدیل خطی کسری موجود است که ۳ نقطهٔ مفروض متمایز z_1، z_2 و z_3 را به ترتیب بروی ۳ نقطهٔ مشخص متمایز w_1، w_2 و w_3 می نگارد و عبارتست از:

$$* \quad \frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)} \quad *$$

نکته:

اگر یکی از نقاط در بی نهایت باشد، کسر مربوط به آن نقطه برابر واحد در نظر گرفته می شود.

نکته:

با توجه به تعریف تبدیل معکوس در تبدیل خطی کسری، اگر $c=0$ باشد، در اینصورت هر نقطه در صفحه w تصویر یک و فقط یک نقطه در صفحه z است.

$$z = \frac{-dw+b}{cw-a} \xRightarrow{c=0} z = \frac{d}{a}w - \frac{b}{a}$$

و اگر $c \neq 0$ باشد، همین مطلب بجز برای حالت $w = \frac{a}{c}$ برقرار است.

حل دیگری یک مثال -

تبدیل خطی کسری بنویسید که نقاط $z_1=1$ ، $z_2=0$ ، $z_3=-1$ را به ترتیب بروی نقاط $w_1=i$ ، $w_2=\infty$ ، $w_3=1$ بنگارد.

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)}=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$$

$$\frac{w-i}{w-1}=\frac{(z-1)(0+1)}{(z+1)(0-1)} \Longrightarrow * \; w=\frac{(1+i)z+(i-1)}{2z} \; *$$

ج) تابع z^n.

تحت این نگاشت تمام نقاط صفحهٔ z به روی تمام صفحهٔ w تبدیل می‌یابد. هر نقطهٔ ناصفر در صفحهٔ w، تصویر n نقطهٔ متمایز در صفحهٔ z است.

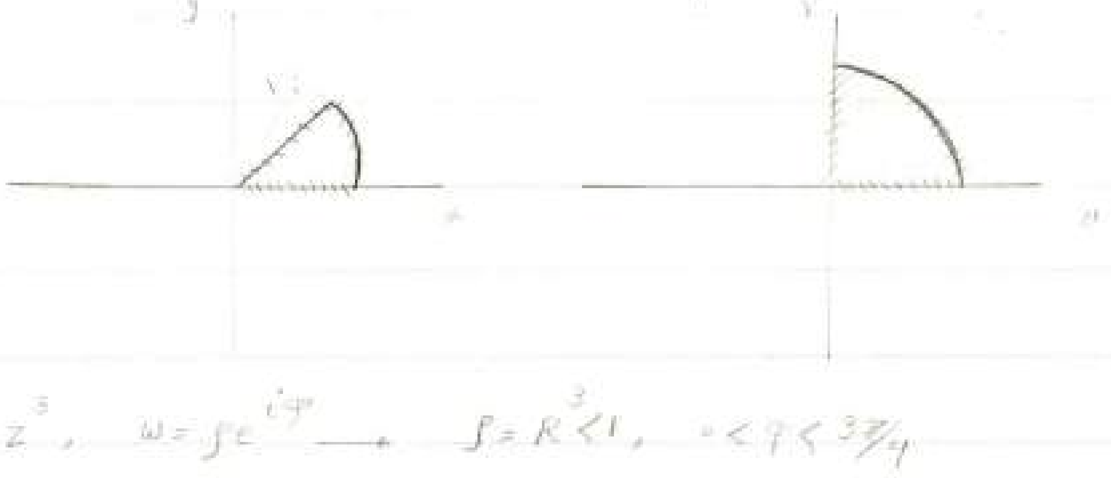
$$z = Re^{i\theta} \xrightarrow{z^n} w = R^n e^{in\theta}$$

حل در یک مثال:

ناحیه‌ای از قطاع $r<1$ و $0<\theta<\pi/4$ با تبدیل $w=z^2$ و $w=z^3$ به روی آن نگاشته می‌شود را پیدا کنید.

$$z = Re^{i\theta}, \quad \begin{cases} R<1 \\ 0<\theta<\pi/4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$w = z^2 \Rightarrow w = \rho e^{i\varphi} \longrightarrow \rho = R^2 < 1, \quad 0<\varphi<\pi/2$$



$$w = z^3, \quad w = \rho e^{i\varphi} \longrightarrow \rho = R^3 < 1, \quad 0<\varphi<3\pi/4$$

ج) نگاشت تابع $\exp(z)$:

مهم‌ترین نکته‌ای که در مسائل نگاشت به کمک e^z باید در نظر گرفت ، این است که این تابع پریودیک با دوره $2n\pi i$ است ولذا چند مقدار مختلف در z-plane به یک مقدار خاص در w-plane تبدیل می‌شوند .

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp z \cdot \exp(2\pi i)$$
$$= \exp z$$

- برد تابع نمایی $\exp(z)$ تمام صفحه مختلط w است غیر از مبداء آن . $e^z \neq 0$

- اگر حوزه تعریف نقاط در z-plane به $\{y_0 < \operatorname{Im} z \leq y_0 + 2\pi\}$ محدود شود، آنگاه نگاشت $w = e^z$ یک به یک است .

حل و بررسی یک مثال - نگاشت $\exp z$.

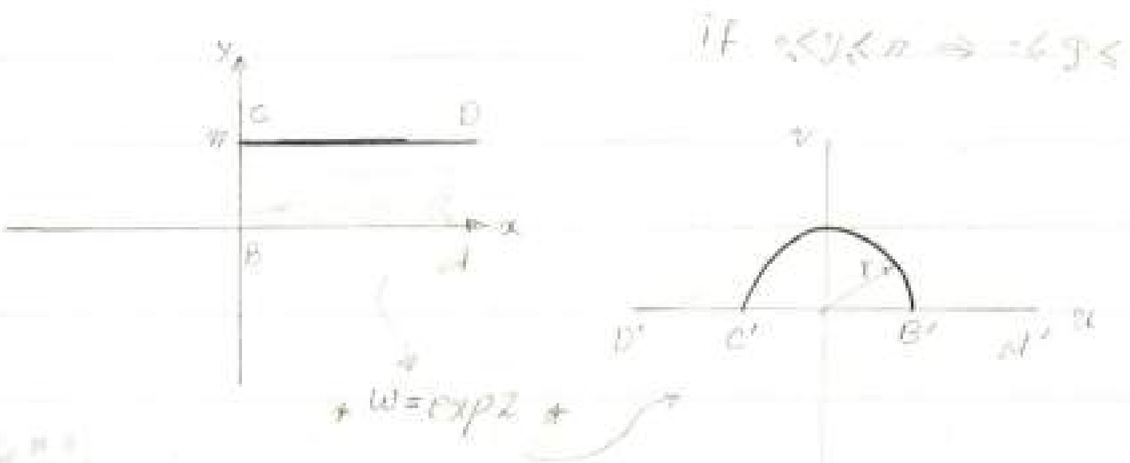
تصویر ناحیه $x \geq 0$ و $0 \leq y \leq \pi$!

تحت تبدیل $w = \exp z$ را پیدا کنید .

Solution : $\exp(z) = Re^{i\varphi}$

$\Rightarrow R = e^x$ & $\varphi = y$ پس if $x \geq 0 \Rightarrow R \geq 1$

if $0 \leq y \leq \pi \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq \pi$



نکته -

تحت نگاشت $w=\exp(z)$ خطوط عمود بر محور حقیقی به دوایر به مرکز مبدا و خطوط موازی با محور حقیقی به شعاع‌هایی که از مبدا می‌گذرند تبدیل می‌گردد. چون:

$$w=\exp z = e^{x}\cdot e^{iy}$$

$$|w| = e^{x} \quad , \quad \arg w = y$$

حل و بررسی یک مثال

تصویر ناحیه $a\le x\le b$ و $c\le y\le d$
تحت تبدیل $w=\exp z$.

Solution:

$x=a$ و $x=b$ $\xrightarrow{\exp z}$ $R=e^{a}$, $R=e^{b}$

دایره‌های به مرکز مبدا

$R=e^{a} = e^{a(2\pi i)}$ ... → دایره

$c\le y$ و $y\le d$ $\xrightarrow{\exp z}$ $\varphi=c$, $\varphi=d$ پرتوهایی که از مبدا می‌گذرند.

ه) تبدیل $w = \sin z$

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

تبدیل $\sin z$ = نگاشت یک به یکی است از نوار $y \geq 0$ و $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ در صفحه z بر روی نیم صفحه بالای صفحه w یعنی $v \geq 0$.

$$\begin{cases} u = \sin x \cosh y \\ v = \cos x \sinh y \end{cases}$$

مثال: تصویر خط عمودی $x = c$ که در آن $-\pi/2 < c < \pi/2$

(محور yها یعنی $x=0$ به طور یک به یک بر روی محور vها ($u=0$) نگاشته می‌شود)

$$u = \sin c \cosh y \ , \ v = \cos c \sinh y$$

$$\cosh y = \frac{u}{\sin c} \ , \ \sinh y = \frac{v}{\cos c}$$

$$\cosh^2 y - \sinh^2 y = \frac{u^2}{\sin^2 c} - \frac{v^2}{\cos^2 c} = 1$$

هذلولی

اگر ... [illegible] ... بالای ...

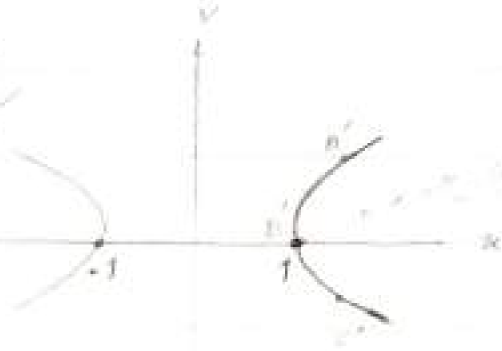
تبدیل ... تصویر ... ($c=0$) ... ($1,0$) واقع است ... [illegible]

... دارای ... [illegible] ... و $v=0$ ... $u = \cosh y$.

در واقع اگر $\frac{\pi}{2} < c < 0$ ... خط $x = c$ بار دیگر یک به یک بر روی منحنی $u = \sin c \cosh y$ و $v = \cos c \sinh y$ نگاشته می‌شود که شاخه راست هذلولی $\frac{u^2}{\sin^2 c} - \frac{v^2}{\cos^2 c} = 1$

با کانونی در ($\pm 1, 0$) است. تصویر $x = \frac{\pi}{2}$

شامل نقطه ($1,0$) و $u \geq 1$ است.



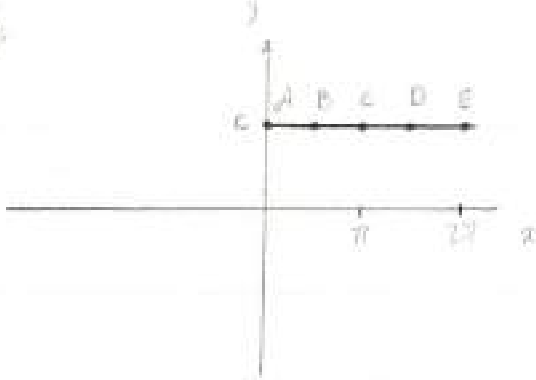
حل دیگری از مثال

تصویر خط افقی $y=c$ و $c\neq 0$ تحت $0<x<2\pi$

تبدیل $w=\sin z$ را پیدا کنید.

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

$$u = \sin x \cosh y \ , \quad v = \cos x \sinh y$$



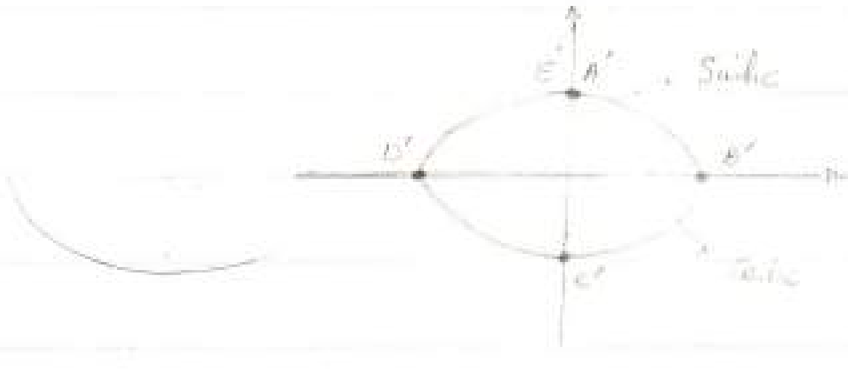
$$\begin{cases} 0<x<2\pi \\ y=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \sin x \cosh c \\ v = \cos x \sinh c \end{cases}$$

$$\frac{u^2}{\cosh^2 c} + \frac{v^2}{\sinh^2 c} = 1 \Longrightarrow$$ یک بیضی است

با خط $\{0<x<\pi ,\ y=c\}$ به روی یک بیضی برده می‌شود است این بیضی ... گذاشته می‌شود ...

که با خط $\pi<x<2\pi$ به روی ... برده ... گذاشته می‌شود.

تصویر ... که ...



بحث انتگرال در توابع مختلط : Integration of Complex functions

برای معرفی انتگرال $f(z)$، ابتدا انتگرال معین تابع مختلط F از متغیر حقیقی t را تعریف می‌کنیم:

$$F(t) = U(t) + iV(t) \qquad a \leq t \leq b$$

در این حالت U و V توابع حقیقی پیوسته‌ی تکه‌ای از t هستند که بر بازه‌ی بسته و کراندار $a \leq t \leq b$ تعریف شده‌اند. یعنی هر کدام از این دو تابع حقیقی بوده و همه جا در بازه‌ی مذکور پیوسته‌اند. بدین ترتیب انتگرال معین تابع مختلط F برحسب دو انتگرال معین از توابع حقیقی تعریف می‌شود:

$$\int_a^b F(t)\,dt = \int_a^b U(t)\,dt + i\int_a^b V(t)\,dt \qquad (I)$$

نکته 1:

شرط پیوستگی توابع U و V روی فاصله‌ی مذکور برای وجود انتگرال‌هایشان کافی است. انتگرال ناسره F بر یک بازه‌ی نامحدود با روشی مشابه تعریف می‌گردد و وقتی این انتگرال موجود است که انتگرال‌های ناسره U و V هر دو همگرا باشند.

نکته 2:

از تعریف (I) نتیجه می‌شود که:

$$Re\int_a^b F(t)\,dt = \int_a^b Re\left[F(t)\right] dt \qquad (2)$$

بعلاوه به ازای هر عدد مختلط ثابت γ داریم:

$$\int_a^b \gamma F(t)\,dt = \gamma\int_a^b F(t)\,dt \qquad (3)$$

نکته 3 :

قواعدی از قبیل انتگرال گیری مجموع، تعویض حدود انتگرال گیری و .... برای توابع مختلط هم درست مانند توابع حقیقی از متغیر t صادق اند.

نکته 4 :

برای تابع مختلط F از متغیر حقیقی t می توان نشان داد که :

$$(4) \qquad \left| \int_a^b F(t)\,dt \right| \leqslant \int_a^b |F(t)|\,dt \qquad (a<b)$$

اثبات :

فرض کنید مقدار انتگرال تعریف شده در رابطهٔ (I) یک عدد مختلط ناصفر $r_0 e^{i\theta_0}$ باشد، آنگاه :

$$\int_a^b F\,dt = r_0 e^{i\theta_0}$$

$$\overset{\text{خاصیت (3)}}{\Longrightarrow} \quad r_0 = e^{-i\theta_0}\int_a^b F\,dt = \int_a^b e^{-i\theta_0} F\,dt$$

هر طرف رابطهٔ اخیر حقیقی است و یادآوری می شود که وقتی یک عدد مختلط حقیقی باشد، با قسمت حقیقی خودش برابر است، پس :

$$\text{خاصیت (2)} \quad r_0 = \int_a^b Re\left(e^{-i\theta_0} F\right)\,dt$$

$$\text{و} \quad Re\left(e^{-i\theta_0} F\right) \leqslant \left| e^{-i\theta_0} F \right| = \left| e^{-i\theta_0} \right| \left| F \right| = \left| F \right|$$

$$\Longrightarrow \quad r_0 \leqslant \int_a^b |F|\,dt \longrightarrow \left| \int_a^b F(t)\,dt \right| \leqslant \int_a^b |F(t)|\,dt$$

و با تغییرات مناسبی می توان ثابت کرد که : $\longleftarrow$ $\left| \int_c^{\infty} F(t)\,dt \right| \leqslant \int_c^{\infty} |F(t)|\,dt$

بحث انتگرال روی خط :

انتگرال تابع $f(z)$ در امتداد مرز مفروض C که از نقطهٔ $z=\alpha$ تا $z=\beta$ در صفحهٔ مختلط ادامه دارد، یک انتگرال روی خط نامیده می‌شود و در حالت کلی مقدار آن به مرز C و تابع f وابسته است. چنین انتگرالی بفرم زیر نوشته می‌شود :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)\,dz \quad \text{یا} \quad \int_{C} f(z)\,dz$$

فرض کنید C مرزی باشد با رابطهٔ $z(t)=x(t)+iy(t)$ و $(a\leqslant t\leqslant b)$ که از نقطهٔ $\alpha=z(a)$ تا $\beta=z(b)$ ادامه دارد و همچنین فرض کنید که تابع f بفرم $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ بر مرز C بصورت تکه‌ای پیوسته باشد یعنی $u[x(t),y(t)]$ و $v[x(t),y(t)]$ که بخش‌های حقیقی و موهومی $f[z(t)]$ هستند توابعی پیوسته تکه‌ای از t باشند. در این صورت انتگرال روی خط f در امتداد C بصورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\int_{C} f(z)\,dz=\int_{a}^{b} f[z(t)]\,z'(t)\,dt \qquad (1)$$

نکته ۱ :

تعریف (۱) را می‌توان بصورت زیر هم نوشت :

$$f[z(t)]\,z'(t)=\left\{u[x(t),y(t)]+iv[x(t),y(t)]\right\}[x'(t)+iy'(t)]$$

$$\Longrightarrow \int_{C} f(z)\,dz=\int_{a}^{b}(ux'-vy')\,dt+i\int_{a}^{b}(vx'+uy')\,dt \qquad (2)$$

توجه کنید که چون C یک مرز است، علاوه بر توابع u و v، توابع x' و y' هم توابعی تکه‌ای پیوسته از t هستند. بنابراین انتگرال‌های سمت راست رابطهٔ (۲) موجودند.

توجه 1:

براساس رابطهٔ (2)، انتگرال روی خط $\int_C f(z)dz$ را می‌توان برحسب انتگرال‌های روی خط توابع حقیقی از دو متغیر حقیقی x و y هم نوشت:

$$* \int_C f(z)\,dz = \int_C u\,dx - v\,dy + i\int_C v\,dx + u\,dy \; * \qquad (3)$$

ملاحظه می‌شود که رابطهٔ (3) می‌توان با جایگذاری $u+iv$ بجای f و $dx+idy$ بجای dz و سپس بسط آن حاصلضرب بدست آورد

توجه 2:

به هر مرز C، مرز $-C$ شامل همان نقاط اما با ترتیب عکس را می‌توان نسبت داد بطوری که مرز جدید از نقطهٔ β تا α بدست آید. مرز $-C$ با رابطهٔ $z=z(-t)$ که در آن $-b \le t \le -a$: بیان می‌شود و :

$$\int_{-C} f(z)\,dz = \int_{-b}^{-a} f[z(-t)][-z'(-t)]\,dt \qquad (4)$$

که در آن $z'(-t)$ معرف مشتق $z(t)$ نسبت به t در $-t$ است. با بررسی دقیق رابطهٔ (4) در می‌یابیم که:

$$\int_{-C} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz \qquad (5)$$

نکته 2:

سه خاصیت دیگر از انتگرال‌های روی خط که مستقیماً از خواص انتگرال‌ها ناشی می‌شوند عبارتند از:

$$1) \quad \int_C \gamma f(z)\,dz = \gamma \int_C f(z)\,dz \qquad (6)$$

(γ عدد مختلط ثابت)

$$2)\quad \int_C \left[f(z) + g(z)\right] dz = \int_C f(z)\,dz + \int_C g(z)\,dz \qquad (7)$$

همچنین اگر C متشکل از مرز C_1 از α_1 به β_1 و مرز C_2 از α_2 به β_2 که $\alpha_2 = \beta_1$ است باشد:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz \qquad (8)$$

$$3)\quad \left| \int_C f(z)\,dz \right| \leqslant ML$$

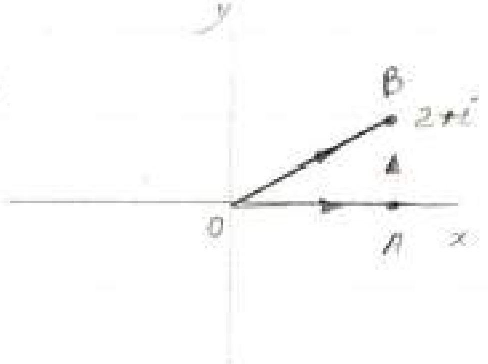
که در آن L طول منحنی C و $|f(z)| \leqslant M$ و M یک مدول حداکثر برای $f(z)$ در امتداد منحنی C است. بنابر خاصیت (3) مدول انتگرال f در امتداد منحنی C هیچ گاه از مقدار ML بیشتر نمی‌شود.

نکته 3:

انتگرال معین در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی را می‌توان به عنوان مساحت تعبیر کرد. بجز در حالات خاص، هیچ تعبیر هندسی یا فیزیکی برای انتگرال مختلط نداریم. ولی به هر حال کاربردهای جالبی می‌توان در نظریه انتگرال مختلط یافت. مثلاً یکی از آن‌ها محاسبه انتگرال‌های نامتعارف حقیقی به کمک انتگرال مختلط و یا محاسبه کمیت گردش سیال در مکانیک سیالات است.

حل و بررسی یک مثال:

مقدار انتگرال $I_1=\int_{C_1} z^2\,dz$ را وقتی که C_1 پاره‌خط OB از $z=0$ تا $z=2+i$ است، بدست آورید.



روش حل: ملاحظه می‌شود که مسیر C_1 بر خط $x=2y$ واقع است. لذا اگر متغیر y را بعنوان پارامتر بکار ببریم، معادلهٔ پارامتری C_1 بدست می‌آید:

$$z(y) = 2y + iy \qquad 0 \leq y \leq 1$$

$$z^2 = (x^2-y^2) + i(2xy) = 3y^2 + i\,4y^2$$

$$\Rightarrow \quad I_1 = \int \underbrace{(3y^2 + i\,4y^2)}_{f(z(t))}\underbrace{(2+i)}_{z'(t)}\underbrace{dy}_{dt}$$

$$= (3+4i)(2+i)\int_0^1 y^2\,dy = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i$$

توجه: می‌توان مسیر C_2، متشکل از مرزهای OA و AB را بعنوان مسیر انتگرال‌گیری انتخاب کرد و حاصل انتگرال I_2 را برابر همان مقدار $\frac{2}{3}+\frac{11}{3}i$ یافت. بزودی خواهیم دید که علت این موضوع تحلیلی بودن تابع انتگرال $f(z)=z^2$ در داخل و روی مرز است.

آشنایی با برخی و مسیرهای انتگرال گیری :

برای بررسی انتگرال تابع $f(z)$، آشنایی با برخی منحنی ها، مسیری انتگرال گیری ضروری بنظر می رسد. قوس C مجموعه ای از نقاط $z=(x,y)$ در صفحه مختلط است بطوری که :

$$(1) \qquad x = x(t) \,,\quad y = y(t) \qquad a \leq t \leq b$$

که در آن $x(t)$ و $y(t)$ توابع پیوسته ای از پارامتر حقیقی t هستند. در نتیجه مجاز است قوس C را با رابطه $z(t) = x(t) + iy(t)$ بیان نمایم.

$$(2) \quad z(t) = x(t) + iy(t)$$

تعریف قوس ساده یا قوس ژردان : (Jordan Curve)

قوس C یک قوس ساده یا ژردان است اگر خودش را قطع نکند، یعنی قوس C ساده است اگر $z(t_1) \neq z(t_2)$ وقتی که $t_1 \neq t_2$ باشد.

توجه ۱ :

اگر C قوس ساده باشد و نقطه ی یک نقطه $z(b) = z(a)$ شود، می گوییم C یک منحنی ساده بسته است (یا منحنی ژردان است) .

توجه ۲ :

بعنوان مثال خط شکسته $z(t) = \begin{cases} t+it & 0 \leq t \leq 1 \\ t+i & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$ تشکیل از پاره خطی از ۰ به $1+i$ و بدنبال آن از $1+i$ به $2+i$ نشانی از یک قوس ساده است و دایره ای به شعاع واحد با ضابطه $z(t) = \cos t + i\sin t$ و $0 \leq t \leq 2\pi$ نشانی از یک منحنی ساده بسته است.

توجه 3 :

منحنی C که با رابطه (2) تعریف شده است را هموار (Smooth) می‌نامند هرگاه $z'(t)$ در بازه $a \le t \le b$ وجود و پیوسته باشد و هیچ گاه در این بازه $=0$ نگردد. شرط وجود $z'(t)$ این است که هر دو تابع $x(t)$ و $y(t)$ توابعی مشتق‌پذیر از t باشند:

$$(3) \qquad z'(t) = x'(t) + i\,y'(t) \qquad a \le t \le b$$

البته مشتق‌های $x(t)$ و $y(t)$ در نقاط انتهای مسیر به ترتیب نقاط $t=a$ و $t=b$ مشتق راست و چپ آن توابع اند. منحنی هموار همیشه دارای مماس است که بطور پیوسته می‌چرخد.

توجه 4 :

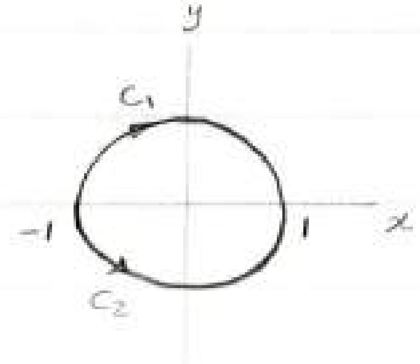
طول منحنی هموار C را می‌توان با فرمول زیر محاسبه کرد:

$$|z'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

$$(4) \implies * \; L = \int_a^b |z'(t)|\,dt \; *$$

حل و بررسی یک مثال:

انتگرال تابع $f(z)=\bar{z}$ روی مسیر شامل نیم دایرهٔ بالای $|z|=1$ را بدست آورید (از $z=-1$ تا $z=1$)



حل: یک معادلهٔ پارامتری برای مسیر C_1 عبارت است از:

$$z(\theta)=\cos\theta + i\sin\theta \quad \text{یا} \quad z(\theta)=e^{i\theta}$$
$$0\le\theta\le\pi$$

$$\Rightarrow I_1=\int_{C_1}\bar{z}\,dz = -\int_{-C_1}\bar{z}\,dz$$
$$= -\int_0^{\pi} e^{-i\theta}\,(i e^{i\theta})\,d\theta = -\pi i$$

توجه:

انتگرال I_2 بین همان دو نقطه در امتداد نیم دایرهٔ پایینی C_2

با معادلهٔ پارامتری $z(\theta)=e^{i\theta}$ ، $\pi\le\theta\le 2\pi$ برابر است با:

$$I_2=\int_{C_2}\bar{z}\,dz=\int_{\pi}^{2\pi} e^{-i\theta}\,(i e^{i\theta})\,d\theta = \pi i$$

ملاحظه می‌گردد که $I_1 \neq I_2$ است و انتگرال تابع $f(z)=\bar{z}$
حول تمام دایره C در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت صفر نیست.
علت این امر تحلیلی نبودن $\bar{z}$ است.

حل و بررسی یک مثال:

برای انتگرال $I = \int_C \frac{dz}{z^4}$ که در آن C نمایش پاره‌خطی از $z=i$ تا $z=1$ است یک کران حداکثر پیدا کنید.

روش حل: برای حل از رابطهٔ $\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leq ML$ استفاده می‌کنیم:

مسیر C قطعه‌ای از خط $y=1-x$ می‌باشد لذا اگر z روی مسیر C باشد باید:

$$|z^4| = (x^2+y^2)^2 = \left[x^2+(1-x)^2\right]^2$$

$$= (2x^2-2x+1)^2$$

$$|z^4| = \left[2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right]^2 \geqslant \frac{1}{4}$$

چون $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$ است در نتیجه به ازای هر z روی مسیر C: $\left|\frac{1}{z^4}\right| \leq 4$

و چون طول مسیر $L=\sqrt{2}$ است پس:

$$I = \int \frac{dz}{z^4} \Rightarrow |I| \leqslant 4\sqrt{2}$$

فرمول انتگرال کوشی :

قضیه :

فرض کنید f همه جا درون و بر روی مرز ساده بسته C که در جهت مثبت در نظر گرفته شده تحلیلی باشد. اگر z_0 یک نقطه داخلی دلخواه C باشد آنگاه:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-z_0} \qquad (1)$$

که به آن فرمول انتگرال کوشی می‌گویند. این فرمول بیان میکند که اگر تابع f درون و روی مرز ساده بسته C تحلیلی باشد آنگاه مقادیر f در درون C کاملاً به وسیله مقادیر f بر روی C قابل بیان هستند. بنابراین هر تغییر مقدار f در یک نقطه در درون C با تغییر مقدارش بر روی C همراه است.

نکته ۱ :

از کاربردهای اصلی فرمول انتگرال کوشی محاسبه انتگرال‌های مختلط است. به طور مثال :

$$\int_C \frac{z\,dz}{(9-z^2)(z+i)} \quad , \quad C: \ |z|=2$$

چون تابع $f(z) = \frac{z}{(9-z^2)}$ در درون و روی C تحلیلی است و نقطه $z_0=-i$ در درون مرز C واقع است پس:

$$f(-i) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{z\,dz}{(9-z^2)(z+i)} \Rightarrow \int \frac{z\,dz}{(9-z^2)(z+i)} = 2\pi i\, f(-i)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{-i}{10}\right) = \frac{\pi}{5}$$

نکته ۲ :

فرمول انتگرال کوشی را می‌توان به فرم گسترده‌تر هم تعمیم داد :

$$(2) \qquad f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}} \qquad , \quad n=0,1,2,\dots$$

که در آن $f^{(n)}(z_0)$ مشتق مرتبهٔ nام $f(z)$ در نقطهٔ $z=z_0$ است.

حل و بررسی یک مثال:

انتگرال $\int \frac{\sin z}{z}\,dz$ روی مسیر c با نرم $|z|=1$ را محاسبه کنید:

$$\int_C \sin z/z \, dz \qquad f(z)=\sin z \quad , \quad z_0=0$$

$$C:\ x^2+y^2=1$$

$$\Rightarrow \quad \sin(0)=\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\sin z}{z}\,dz \Rightarrow \int \frac{\sin z}{z}\,dz=0$$

این مثال نشان میدهد که قضیه کوشی-گورسات در جهت عکس همواره برقرار نیست. ما در اینجا تابعی داریم که انتگرال آن روی مسیر c صفر است ولی خود آن تابع در $z=0$ تحلیلی نیست.

حل و بررسی یک مثال:

انتگرال $\int \frac{e^z+\sin z}{z}\,dz$ را روی مسیر $|z|=1$ محاسبه کنید:

$$I=\int_C \frac{e^z+\sin z}{z}\,dz \quad , \quad C:\ |z|=1 \quad , \quad f(z)=e^z+\sin z$$

$$z_0=0$$

$$\Rightarrow \quad f(0)=\frac{1}{2\pi i}\int \frac{e^z+\sin z}{z}\,dz \Rightarrow I=2\pi i\, f(0)$$

$$=2\pi i\,(e^0)$$

$$=2\pi i$$

حل و بررسی یک مثال:

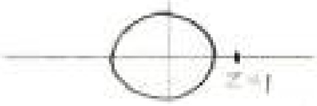
انتگرال $I=\int_C \frac{2\sin z^3}{(z-1)^4}\,dz$ که در آن C دایره‌ای است که از $z=1$ عبور نمی‌کند را محاسبه نمایید.

روش حل: C منحنی ساده‌ بسته‌ای است که از $z=1$ نمی‌گذرد.

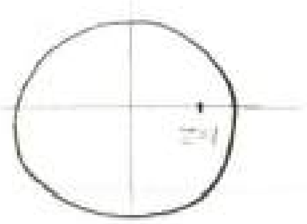
بنابراین یا شامل ۱ هست، یا نیست:

a) اگر C شامل $z=1$ نباشد $\Longrightarrow$ $f(z)$ همه جا درون و بر روی مرز C تحلیلی است $\Longrightarrow \int_C f(z)\,dz=0$

پس $I=0$



b) اگر C شامل $z=1$ باشد $\Longrightarrow g(z)=2\sin z^3,\quad z_0=1,\quad n=3$



$$\Longrightarrow \quad I=\frac{2\pi i}{3!}\,g'''(1)$$

$$g'(z)=2(3z^2)\cos z^3$$

$$g''(z)=6\left[2z\cos z^3-3z^2\sin z^3(z^2)\right]$$

$$g'''(z)=6\left[2\cos z^3-3z^2\sin z^3(2z)-\left\{12z^3\sin z^3+3z^2\cos z^3(3z^4)\right\}\right]$$

$$g'''(1)=3 \quad\Longrightarrow\quad I=\frac{2\pi i}{6}\times 3$$

$$\Longrightarrow I=\pi i$$

حل و بررسی یک مثال :

انتگرال $I=\int (z-\operatorname{Re}z)dz$ را روی مسیر $|z|=2$ محاسبه کنید :

$$I=\int_C (z-\operatorname{Re}z)dz=\int_C z\,dz-\int \operatorname{Re}z\,dz$$

تابع $f(z)=z$ همه‌جا تحلیلی است پس $\int_C z\,dz=0$ است ، اما تابع $f(z)=\operatorname{Re}z$ تحلیلی نیست چون شرایط کوشی-ریمان را برقرار نمی‌کند. معادله پارامتری مسیر عبارت است از :

$$C:\quad z(t)=2\left[\cos t+i\sin t\right]$$

$$\int \operatorname{Re}z\,dz=\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}\left[2(\cos t+i\sin t)\right]\left[-2\sin t+2i\cos t\right]dt$$

$$=\int_0^{2\pi}-4\left[\cos t\right]\left[\sin t-i\cos t\right]dt$$

$$=4\pi i$$

قضیهٔ کوشی - گورسات : {Cauchy-Goursat theorem}

فرض کنید که دو تابع حقیقی $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ و مشتق‌های جزئی مرتبه اول آن‌ها در سرتاسر ناحیهٔ بستهٔ R شامل نقاط درون و روی مرز سادهٔ بستهٔ C پیوسته باشند. مرز در جهت مثبت (عکس حرکت عقربه‌های ساعت) طی می‌شود بطوری که نقاط داخلی R در سمت چپ مرز C واقع می‌شوند. بنابر قضیهٔ گرین برای انتگرال‌های روی خط در حساب دیفرانسیل و انتگرال متغیرهای حقیقی داریم:

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R (Q_x - P_y)\,dx\,dy$$

حال تابع مختلط $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ را در نظر می‌گیریم که در سرتاسر چنین ناحیهٔ R ای در z-plane تحلیلی است. بعلاوه فرض کنید که $f'(z)$ در این ناحیه پیوسته باشد در نتیجه توابع مؤلفه‌ای u و v و مشتق‌های جزئی مرتبه اول آن‌ها در R پیوسته‌اند:

$$\int_C u\,dx - v\,dy = -\iint_R (v_x + u_y)\,dx\,dy$$

$$\int_C v\,dx + u\,dy = \iint_R (u_x - v_y)\,dx\,dy$$

با توجه به برقراری معادلات کوشی - ریمان، انتگران‌های این دو انتگرال دوگانه در سرتاسر R صفرند و در نتیجه انتگرال‌های روی خط سمت چپ که معرف بخش‌های حقیقی و موهومی مقدار انتگرال $f(z)$ در امتداد C هستند هم صفر خواهند بود. یعنی:

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

بعنوان مثال اگر C یک مرز سادهٔ بسته باشد، انتگرال‌های $\int_C z^2dz=0$ و $\int_C z\,dz=0$ و $\int_C dz=0$ همگی بدلیل تام بودن توابع 1، z و z^2 صفر خواهند شد.

قضیهٔ کوشی - گورسا :

« اگر تابع f در همهٔ نقاط درون و روی مرز سادهٔ بستهٔ C تحلیلی باشد آنگاه

$$\int_C f(z)dz = 0$$ »

نکته ۱ :

توجه داشته باشید که در حالت کلی ممکن است عکس این قضیه صادق نباشد. یعنی تابعی را پیدا کنیم که انتگرال آن روی مرز سادهٔ بستهٔ C صفر شود ولی در تمام نقاط درون و روی مرز C تحلیلی نباشد (حتی در آن نقاط تعریف نشده باشد. مثلاً انتگرال $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ روی مسیر $|z| = 1$ صفر می‌گردد ولی تابع در $z_0 = 0$ تعریف نشده است.

نکته ۲ :

با اضافه کردن شرط پیوستگی به تابع $f(z)$ در همهٔ نقاط درون و روی مرز C می‌توان قضیهٔ کوشی - گورسات را در جهت عکس بکار گرفت :

قضیهٔ عکس کوشی - گورسات : (قضیهٔ موررا (Morera theorem

« اگر تابع f در سراسر ناحیهٔ R پیوسته و به ازای هر مرز سادهٔ بستهٔ C واقع در R ، $\int_C f(z)dz = 0$ باشد، در اینصورت f در سراسر R تحلیلی است. »

نامساوی کوشی : Cauchy inequality

فرض کنید تابع $f(z)$ همه‌جا درون و روی مرز دایره‌ای C به مرکز z_0 و شعاع r تحلیلی باشد. در اینصورت اگر M کران بالایی برای $f(z)$ باشد آنگاه :

$$|f(z)| \leqslant M \Longrightarrow f^{n}(z_0) \leqslant \frac{M n!}{r^{n}}$$

یعنی در این حالت مشتق مرتبه n ام $f(z)$ در z_0 کراندار است.

اثبات :

از فرمول انتگرال کوشی می‌توان معادل $f^{n}(z_0)$ را به فرم زیر نوشت :

$$\left|f^{n}(z_0)\right| = \frac{n!}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \leqslant \frac{n!}{2\pi i}\int_C \left|\frac{f(z)\,dz}{(\underbrace{z-z_0}_{r})^{n+1}}\right|$$

$$\leqslant \frac{n!}{2\pi i} \times \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r i$$

$$\left|f^{n}(z_0)\right| \leqslant \frac{M n!}{r^{n}}$$

قضیه لیوویل : {Liovill's theorem}

«اگر تابع $f(z)$ یک تابع تام بوده و در صفحه مختلط کراندار باشد، آنگاه $f(z)$ یک تابع ثابت است»

اثبات:

چون تابع $f(z)$ کراندار است پس $|f(z)|<M$ و چون تام است پس مشتق آن در z_0 موجود است و طبق نامساوی کوشی کراندار بوده و کران آن $\frac{M}{r}$ است:

$$f(z) \text{ کراندار است } \Rightarrow |f(z)| < M$$

$$f(z) \text{ تام است } \Rightarrow f'(z_0) \text{ وجود دارد } \xrightarrow{\text{نامساوی کوشی}} |f'(z_0)| \leqslant \frac{M}{r}$$

r می‌تواند بزرگتر از هر مقدار معینی باشد یعنی ماکزیمم شود

در نتیجه $f'(z_0)=0$ شده و $f(z)$ ثابت می‌گردد.

نکته ۱:

در توابع حقیقی قضیه ای مانند قضیه لیوویل وجود ندارد.

حل و بررسی یک مثال:

برای $\int \frac{e^z}{z^2+1} dz$ وقتی z روی مسیر $C: |z| = 2$ حرکت میکند یک حد بالا
برای انتگرال بالا بدست آورید:

شرح حل:

$$\left| \int \frac{e^z}{z^2+1} dz \right| \leqslant ML$$

طول کل مسیر دایره برابر 4π می‌باشد. اما M
ماکزیمم تابع $f(z) = \frac{e^z}{z^2+1}$ است:

$$\frac{e^z}{z^2+1} = Max \Rightarrow \begin{cases} e^z : Max \\ z^2+1 : Min \end{cases}$$

$$e^z = Max \xrightarrow{z_{max}=2} e^z_{max} = e^2$$

$$z^2+1 = Min \Rightarrow |z^2+1| \geqslant |z^2| - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$\Rightarrow Min(z^2+1) = 3$$

$$\Rightarrow \left| \int \frac{e^z}{z^2+1} dz \right| \leqslant 4\pi \left(\frac{e^2}{3} \right) = \frac{4}{3}\pi e^2 \Rightarrow M = \frac{e^2}{3}$$

بحث سری های مختلط : Complex Series

درحالت کلی امکان نمایش توابع تحلیلی با سری های مختلط وجود دارد. دراین بخش به بررسی قضایایی می پردازیم که وجود چنین سری هایی را تضمین کنند و همچنین به کاربرد این سری ها در ریاضیات مهندسی هم اشاره هایی می شود.

همگرایی دنباله ها و سری ها : { Series Convergence }

دنباله نامتناهی $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ از اعداد مختلط دارای حد z است اگر به ازای هر عدد مثبت ε، عدد صحیح و مثبت n_0 ای موجود باشد، به طوری که :

$$\text{هرگاه} \quad n > n_0 \Rightarrow |z_n - z| < \varepsilon$$

از دیدگاه هندسی، این بدان معنی است که به ازای مقادیر به قدر کافی بزرگ n، نقطه z_n به دلخواه نزدیک به z است.

نکته 1 :

هر دنباله مفروض، حداکثر دارای یک حد است، یعنی حد دنباله ها یکتاست. درصورتی که این حد z وجود باشد می گوییم دنباله به z همگراست و می نویسیم :

$$\lim_{n \to \infty} z_n = z$$

اگر دنباله دارای حد نباشد، دنباله ای واگراست.

قضیه ۱:

فرض کنید $z_n = x_n + iy_n$ و $z = x+iy$.

در اینصورت $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ اگر و فقط اگر $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ و $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.

اثبات:

اگر $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ موجود باشد طبق تعریف کلاسیک حد داریم:

$$|x_n - x + i(y_n - y)| < \varepsilon \Longleftarrow n > n_0 \quad \text{هرگاه}$$

اما برای اثبات اینکه $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ و $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ داریم:

$$|x_n - x| \leqslant |x_n - x + i(y_n - y)| < \varepsilon$$

$$|y_n - y| \leqslant |x_n - x + i(y_n - y)| < \varepsilon$$

در نتیجه هرگاه $n > n_0$ اختیار گردد:

$$|x_n - x| < \varepsilon \quad \text{و} \quad |y_n - y| < \varepsilon$$

یعنی حدهای خواسته شده برقرارند.

تعریف سری مختلط:

سری نامتناهی $\dots + z_n + \dots + z_2 + z_1$ از اعداد مختلط به عدد S که مجموع سری نامیده می‌شود همگراست، اگر دنباله $S_N = \sum_{n=1}^{N} z_n$ از مجموعه‌های جزئی به S همگرا باشد. در اینصورت می‌نویسیم:

$$\sum_{n=1}^{N} z_n = S$$

توجه کنید که چون حد دنباله یکتاست، یک سری هم حداکثر یک مجموع دارد. وقتی سری همگرا نباشد، واگراست.

قضیه ۲:

فرض کنید که $z_n = x_n + iy_n$ و $S = X + iY$ ، $(n = 1, 2, \dots)$.

در اینصورت $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$ اگر و فقط اگر $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = X$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = Y$.

نکته مهم:

آنچه که در تئوری اعداد مختلط و در بحث سری‌ها اهمیت ویژه‌ای دارد، سری توانی است. این سری‌ها به فرم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ هستند که در آن a_0 و a_n ها اعداد مختلط ثابتی اند و z عدد دلخواهی در یک ناحیه معین است.

ویژگی‌های جبری سری‌های مختلط:

1) سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ کاربرد گسترده‌ای در تئوری سری‌های مختلط دارد. برای این سری:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z}$$

که در آن z عدد مختلط دلخواهی است که $|z| < 1$.

2) برای عدد مختلط $z = re^{i\theta}$ و $0 < r < 1$ با کمک سری $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ که در بالا توصیف گردید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{r\cos\theta - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\theta = \frac{r\sin\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

3) اگر $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$ باشد، در اینصورت $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}_n = \bar{S}$

4) اگر c عدد ثابت دلخواهی باشد و $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$ در اینصورت $\sum_{n=1}^{\infty} c z_n = cS$

سری تیلور و لوران -

قضیه. فرض کنید f همه جا درون دایره C_0 با مرکز z_0 و شعاع r_0 تحلیلی باشد. در اینصورت در هر نقطه z درون C_0 داریم.

$$* \quad f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \quad *$$

یعنی هرگاه $|z-z_0| < r_0$ این سری تابع به $f(z)$ همگراست و سری فوق را بسط تیلور حول z_0 برای تابع $f(z)$ می گویند

$$\Longrightarrow \left\{ \text{اگر } |z-z_0|<r \text{ آنگاه } f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} z^n \right\}$$

حالت خاص- سری مکلورن : Maclaurin Series

اگر در سری تیلور $z_0 = 0$ و یا بعبارتی بسط تابع $f(z)$ را حول صفر بدست آوریم، سری حاصل سری مکلورن تابع f نامیده می شود.

$$* \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \quad *$$

نکته ۱:

درصورتی که بدانیم f در همه نقاط داخل دایره ای به مرکز z_0 تحلیلی است، مطمئن می شویم که به ازای هر z در داخل آن دایره سری تیلور حول z_0 به $f(z)$ همگراست و هیچ آزمونی برای همگرایی سری لازم نیست.

سری های توابع تحلیلی -

بسط تابع $\exp z = f(z)$ در مقایسه با سایر توابع تحلیلی اهمیت ویژه ای دارد.

$f(z)=e^{z}$

چون e^{z} به ازای هر مقدار z تحلیلی است:

$f^{n}(z)=e^{z} \Rightarrow f^{n}(0)=1$ $\quad * \; e^{z}=1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n}}{n!} \; * \quad |z|<\infty$

$$\sin z=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}=z-\frac{z^{3}}{3!}+\frac{z^{5}}{5!}-\cdots \qquad |z|<\infty$$

$$\cos z=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad |z|<\infty$$

$$\sinh z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}=z+\frac{z^{3}}{3!}+\frac{z^{5}}{5!}+\cdots$$

$$\cosh z=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}=1+\frac{z^{2}}{2!}+\frac{z^{4}}{4!}+\cdots$$

نکته ۱:

یکی دیگر از سری های مکلورن مهم عبارت است از:

$$|z|<1 \Rightarrow \quad * \; \frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}z^{n}=1-z+z^{2}-z^{3}+\cdots \; *$$

و به کمک آن می توان نوشت: (z^{2} به جای z جایگزین می گردد)

$$|z|<1 \Rightarrow \quad * \; \frac{1}{1+z^{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}z^{2n} \; *$$

نکته ۲:

با کمک از سری ماکلورن تابع $f(z) = \frac{1}{1+z}$ و جایگذاری $z=-c$، این سری می‌تواند بسط مجموع یک سری هندسی نامتناهی با قدر نسبت c را به ما بدهد. یعنی:

هرگاه $|c|<1 \Rightarrow 1 + c + c^2 + \cdots + c^n + \cdots = \frac{1}{1-c}$

نکته ۳:

تابع $f(z) = e^z$ را می‌توان بفرم سری زیر هم بسط داد که در واقع بسط تیلور این تابع حول نقطهٔ $z=1$ است:

$$e^z = e + e\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!}$$

نکته ۴:

چند سری تیلور مهم دیگر که در محاسبهٔ سری تیلور توابع دیگر نقش مهمی دارند عبارتند از:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots \qquad |z|<1$$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \cdots \qquad |z|<1$$

$$\frac{1}{(1-z)^3} = 2 + 6z + \cdots \qquad |z|<1$$

$$\frac{1}{z^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(z+1)^n \qquad |z+1|<1$$

توجه ۱:

بسط سری تیلور $f(z)=\log z$ که به کمک آن بسط توابع $\log(1+z)$ ، $\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$
و ... همگی قابل محاسبه می‌شوند، حول نقطهٔ $z_0=+1$ به فرم زیر است:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \longrightarrow \text{tailor Series}$$

$$\Rightarrow f^{n}(z)=\frac{d^n(\log z)}{dz^n}=(-1)^{n+1}(n-1)!\,z^{-n}$$

$$\Rightarrow \log z = 0+(z-1)-\frac{1}{2}(z-1)^2+\frac{1}{3}(z-1)^3-\frac{1}{4}(z-1)^4+\cdots$$

$$|z|<1$$

$$\Rightarrow \log(1+z)=z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-\frac{1}{4}z^4+\cdots$$

$$\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=\log(1+z)-\log(1-z)$$

$$\log(1-z)=-\left(z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3+\frac{1}{4}z^4+\cdots\right)$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=2z+\frac{2}{3}z^3+\frac{2}{5}z^5+\frac{2}{7}z^7+\cdots$$

حل و بررسی یک مثال

۱) بسط تیلور تابع $f(z)=\frac{1}{z}$ حول $z=1$.

اگر $z\neq 0 \Rightarrow f^{(n)}(z)=(-1)^n n!\, z^{-n-1} \quad , \quad n=1,2,\dots$

این بسط وقتی برقرار است که $|z-1|<1$ باشد.

زیرا تابع در همه نقاط جز $z=0$ تحلیلی است.

$$f^{(n)}(1)=(-1)^n n!$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n \quad , \quad |z-1|<1$$

۲) بسط تابع $f(z)=\frac{1+2z}{z^2+z^3}$ حول صفر.

چون تابع در $z=0$ تحلیلی نیست، نمی‌توان سری تیلور آن را حول صفر نوشت، ولی می‌توان آن را به فرم یک سری شامل توان‌های مثبت و منفی z بسط داد.

$$\frac{1+2z}{z^2+z^3}=\frac{1}{z^2}\left(\frac{1+2z}{1+z}\right)=\frac{1}{z^2}\left(2-\frac{1}{1+z}\right)$$

$$=\frac{1}{z^2}\left(2-1+z-z^2+z^3-\cdots\right)$$

$$=\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}-1+z-z^2+z^3-\cdots\right)$$

حل و بررسی یک مثال :

بسط سری تیلور $\cos z$ را حول نقطه $z = \frac{\pi}{2}$ بدست آورید.

$$f(z) = \cos z \rightarrow f'(z) = -\sin z \rightarrow f''(z) = -\cos z \ , \ f'''(z) = \sin z$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \Rightarrow \cos z = f(z) \ , \ z_0 = \pi/2$$

$$\cos z = \cos\frac{\pi}{2} + (-1)(z-\frac{\pi}{2}) \sin\frac{\pi}{2} + (-1)^2 \frac{(z-\pi/2)^2}{2!} \cos\frac{\pi}{2} + \cdots \quad , \ \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\cos z = (-1)(z-\frac{\pi}{2}) + (-1)^3 \frac{(z-\pi/2)^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}(z-\pi/2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

حل و بررسی یک مثال :

بسط سری تیلور $\sinh z$ را حول نقطه $z = \pi i$ بدست آورید.

$$f(z) = \sinh z \ , \ f'(z) = \cosh z \ , \ f''(z) = \sinh z$$

$$f(z) = \sinh \pi i + (z-\pi i)\cosh \pi i + \frac{z-\pi i}{2!} \sinh \pi i$$

$$+ \frac{(z-\pi i)^3}{3!} \cosh \pi i + \cdots = -(z-\pi i) - \frac{(z-\pi i)^3}{3!} - \cdots$$

$$\sinh \pi i = 0 \ \text{And} \ \cosh \pi i = -1 \Rightarrow f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-\pi i)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

حل و بررسی یک مثال:

سری تیلوری برای تابع $f(z)=\frac{1}{z}$ بر حسب توان‌های $(z-1)$ بدست آورید که در محدوده $|z-1|<1$ برقرار باشد.

روش حل: برای یافتن این سری می‌توان از بسط تیلور تابع $f(z)=\frac{1}{1+z}$ استفاده کرد و بجای z، $Z-1=z$ را قرار داد و سپس نمایش سری تیلور $\frac{1}{Z}$ را بدست آورد:

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+(Z-1)}=\frac{1}{Z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (Z-1)^n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Z}=1-(Z-1)+(Z-1)^2-(Z-1)^3+\cdots$$

حل و بررسی یک مثال:

تابع $f(z)=\frac{z}{(z-1)(z-3)}$ را با سری‌ای شامل توان‌های مثبت و منفی $(z-3)$ بسط دهید که به $f(z)$ همگرا باشد هرگاه $0<|z-1|<2$.

روش حل: برای یافتن سری خواسته شده تغییر متغیری به فرم زیر انجام می‌دهیم: $z-3=u \rightarrow \begin{cases} z=u+3 \\ z-1=u+2 \end{cases}$

$$\Rightarrow f(z)=\frac{u+3}{u(u+2)}=\frac{1}{u+2}+\frac{3}{u(u+2)}=\frac{1}{2\left(1+\frac{u}{2}\right)}+\frac{3}{2u\left(1+\frac{u}{2}\right)}$$

حال از بسط $\frac{1}{1+z}$ که قبلاً معرفی شد استفاده می‌کنیم:

$$= \frac{1}{2}\left[1-\frac{u}{2}+\frac{u^2}{4}-\frac{u^3}{8}+\cdots\right]+\frac{3}{2u}\left[1-\frac{u}{2}+\frac{u^2}{4}-\frac{u^3}{8}+\cdots\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1-\frac{u}{2}+\frac{u^2}{4}-\frac{u^3}{8}+\cdots\right]+\frac{3}{2}\left[\frac{1}{u}-\frac{1}{2}+\frac{u}{4}-\frac{u^2}{8}+\cdots\right]$$

$$= \frac{1}{2}-\frac{u}{4}+\frac{u^2}{8}-\frac{u^3}{16}+\cdots+\frac{3}{2u}-\frac{3}{4}+\frac{3u}{8}-\frac{3u^2}{16}+\cdots$$

$$= \frac{3}{2u}-\frac{1}{4}+\frac{u}{8}-\frac{u^2}{16}+\cdots$$

حال u را برحسب z مرتب می‌کنیم:

$$\frac{z}{(z-1)(z-3)} = \frac{3}{2(z-3)}-\frac{1}{4}+\frac{(z-3)}{8}-\frac{(z-3)^2}{16}+\cdots$$

که همان بسط سری لوران تابع مورد نظر است.

سری لوران - Laurent Series

فرض کنید C_1 و C_2 دو دایرهٔ متحدالمرکز به مرکز z_0 و شعاع r_1 و r_2 که $r_2 < r_1$ است، باشند:

قضیه -

اگر f بر C_1 و C_2 و در سراسر ناحیه حلقوی شکل بین آن دو دایره تحلیلی باشد، آنگاه در هر نقطه z از این ناحیه $f(z)$ را می‌توان اینطور نوشت:

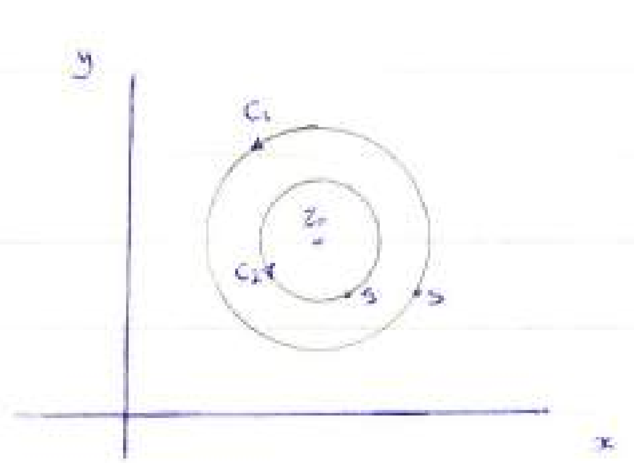
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

که در آن:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)\,ds}{(s-z_0)^{n+1}} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(s)\,ds}{(s-z_0)^{-n+1}} \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

سری فوق «سری لوران» می‌باشد.



نکته 1:

سری لوران در واقع بسط توابع مقدماتی بر حسب توان های مثبت و منفی توأم حول هر نقطه دلخواه z_0 است. اگر f در هر نقطه درون و روی c_1، بجز در خود نقطه z_0 تحلیلی باشد، آنگاه r_2 را می توان تا هر مقدار دلخواهی کوچک گرفت. در اینصورت بسط سری لوران برقرار است هرگاه $0 < |z-z_0| < r_1$ و داریم:

$$* \; f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^{-n} \; *$$

نکته 2:

اگر تابع f در همه نقاط درون و روی c_1 حتی در z_0 هم تحلیلی باشد، مقدار انتگرال مربوط به b_n مساوی صفر می گردد. چون تابع $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}}$ درون و روی c_2 تحلیلی شده است. بنابراین در این حالت سری لوران تابع f به سری تیلور آن تبدیل می گردد و می توان گفت بسط لوران یک تابع حول نقطه ای که در آنجا تابع تحلیلی است همان بسط تیلور آن تابع است.

علت تحلیلی شدن تابع $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}}$ در واقع تحلیلی بودن $f(z)$ در z_0 و $-n+1 \leq 0$ به ازای $n=1$ تا $n=\infty$ است.

توجه داشته باشید که مقدار انتگرال مربوط به ضریب a_n در این حالت هیچ گاه صفر نبوده چون تابع $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ در $z=z_0$ تحلیلی نیست. چون $n+1 \geq 1$ به ازای $n=0$ تا $n=\infty$.

نکته 3:

سری لوران امکان نمایش بسط تابع در نقاطی که تابع در آنجا تحلیلی نیست را فراهم میکند و در صورت تحلیلی بودن تابع در آن نقطه سری لوران به سری تیلور تبدیل می گردد.

بحث مانده‌ها و قطبها - {Poles & Residual}

تعریف صفر یک تابع : {Zero of a function}

اگر تابع $f(z)$ در دامنهٔ D تحلیلی باشد و در نقطهٔ مانند $z=a$ در داخل D ، $f(z)=0$ گردد ، در اینصورت گفته می‌شود که $f(z)$ در این نقطه دارای صفر است .

درحالتی که نه تنها f بلکه مشتق‌های f' ، f'' ، ... ، $f^{(n-1)}$ هم همگی در $z=a$ (غیر از $f^{(n)}$) صفر شوند ، در اینصورت گفته می‌شود که تابع $f(z)$ در $z=a$ دارای صفر مرتبه n است .

بطور مثال تابع $f(z) = \sin z$ در نقاط $z=n\pi$ دارای صفر است به علاوه صفرهای فوق مشتق این تابع یعنی $\cos z$ را صفر نمی‌کنند ، بنابراین نوع صفرها که فقط خود تابع را صفر می‌کنند صفرهای ساده می‌گویند .

تعریف صفر در بی‌نهایت : Zero at infinity

تابع تحلیلی $f(z)$ در ∞ دارای صفر مرتبهٔ n ام است اگر تابع $f(\frac{1}{z})$ در نقطهٔ $z=0$ دارای همین مرتبه صفر باشد ، بنابراین برای یافتن اینکه آیا تابع $f(z)$ دارای صفر در بی‌نهایت هست یا نه ، بجای z در $f(z)$ ، عبارت $\frac{1}{z}$ را قرار داده و بررسی می‌کنیم که آیا در $z=0$ ، $f(\frac{1}{z})=0$ می‌گردد یا نه . اگر صفر شد تابع $f(z)$ دارای صفر در ∞ است .

بطور مثال تابع $f(z) = \frac{1}{1-z^2}$ را در نظر می‌گیریم :

$$f(\tfrac{1}{z}) = \frac{1}{1-(\frac{1}{z})^2} = \frac{z^2}{z^2-1} ,$$

at $z=0 \implies f(\frac{1}{z}) = 0$ یا $f(z)$ صفر در ∞ دارد.

تعریف نقطهٔ تکین یا منفرد : Singularity point

- نقطهٔ تکین یک تابع، نقطه‌ای است که تابع در آن تحلیلی نباشد. بطور دقیق‌تر باید بگوییم که نقطهٔ $z=z_0$ نقطهٔ تکین تابع تحلیلی باشد $f(z)$ نقطه‌ای است که تابع در آن تحلیلی نیست و در هر همسایگی ε حول آن مشتق‌پذیر است. یعنی $f(z)$ فقط در z_0 مشتق‌پذیر نیست. به z_0 نقطهٔ تکین تنهای تابع $f(z)$ هم می‌گویند.

حل و بررسی یک مثال :

صفرها و نقاط تکین تابع $f(z)=tg\,\frac{\pi z}{2}$ را بدست آورید :

$$f(z)=tg\,\frac{\pi z}{2}$$

$$\Rightarrow f(z)=\frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{\cos\frac{\pi z}{2}} \Rightarrow \sin\frac{\pi z}{2}=0 \ \text{یا}\ \frac{\pi z}{2}=K\pi$$

$$\text{یا}\ z=2K$$

صفرها

$$\cos\frac{\pi z}{2}=0 \Rightarrow \frac{\pi z}{2}=(2K+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow z=2K+1$$

نقاط تکین

نکته ۱ :

اگر تابع $f(z)$ دارای یک نقطهٔ تکین در $z=a$ باشد (در آن نقطه تحلیلی نباشد) می‌توان آن را با یک سری لوران نمایش داد.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{(z-a)^n}$$

نکته 2 :

در سری لوران ذکر شده، سری دوم را بخش اصلی یا (Principal Part) $f(z)$ در حوالی $z=a$ می نامند و ممکن است از یک شماره n خاص به بعد ضرایب C_n صفر گردند. مثلاً $C_m \neq 0$ و $C_n = 0$ و $n > m$ ، یعنی :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n + \frac{c_1}{z-a} + \frac{c_2}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{c_m}{(z-a)^m} + 0$$

در اینصورت به نقطهٔ $z=a$ قطب (Pole) از مرتبهٔ m گفته می شود.

نکته 3 :

در برخی از توابع نقاط تکین ممکن است رفع شدنی (Removable Singularity) باشند. بنابراین در سری لوران آن ها، بخش اصلی یا (Principal Part) حذف شده و سری مذکور به سری تیلور تبدیل می گردد.

و در توابعی که نقاط تکین قابل رفع شدن نیستند، بخش اصلی یا سری لوران همواره وجود خواهد داشت که به این نقاط (Essential Singularity) گفته می شود.

بطور مثال تابع $f(z) = \frac{1}{z}\sin z$ دارای نقطهٔ تکین رفع شدنی است :

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right)$$

$$= 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots$$

حل و بررسی یک مثال:

در مورد نوع قطب‌های توابع زیر بحث کنید.

1) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2}$

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right)$$

$$= \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \frac{z}{3!} + \cdots\right)$$

در اینجا $z=0$ قطب مرتبه دوم است، چون ۲ جمله را ∞ می‌کند.

2) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \cdots$$

توان‌های z در مخرج همین طور رشد می‌کند پس $z=0$ یک Essential Singularity است در رفع شدنی نیست. (قطب از مرتبه ∞ است)

نکته ۴:

در شمارش تعداد صفرها و قطب‌های یک تابع، ریشه‌های تکراری هم در شمارش به حساب می‌آیند، بطور مثال، تابع $f(z)$ زیر را در نظر بگیرید که در محدوده $|z|<4$ تعریف شده است:

$$f(z) = \frac{z^3(z-8)^2}{(z-5)^4(z+2)^2(z-1)^5}$$

صفرها $\begin{cases} z=0 & n=3 \\ z=8 & n=2 \end{cases}$ قطب‌ها $\begin{cases} z=5, & m=4 \\ z=1, & m=5 \\ z=-2, & m=2 \end{cases}$

کلاً ۵ صفر دارد که ۳ تا از آن‌ها به حساب می‌آیند و ۱۱ قطب دارد که تا از آن‌ها در محدوده مناسب هستند.

تئوری مانده‌ها : Residual theory

قضیهٔ کوشی - گورسا بیان می‌کند که اگر تابعی همه‌جا در درون و روی مرز ساده و بستهٔ C تحلیلی باشد، آنگاه انتگرال تابع پیرامون آن مرز صفر است. ولی اگر تابع در تعدادی متناهی از نقاط درون C تحلیلی نباشد، همان‌طوری که در این بخش خواهیم دید، اثر این نقاط از طریق عدد مشخصی موسوم به مانده یا (Residue) در مقدار انتگرال ظاهر می‌گردد.

در این بخش تئوری مانده‌ها بیان شده و با استفاده از آن به محاسبهٔ برخی از انواع انتگرال‌های معین حقیقی در ریاضیات مهندسی می‌پردازیم.

تعریف مانده‌ها :

همانطوری که گفته شد، نقطهٔ z_0 یک نقطهٔ تکین تابع f نامیده می‌شود، اگر f در z_0 تحلیلی نباشد اما در نقطه‌ای از هر همسایگی z_0 تحلیلی باشد. نقطهٔ تکین z_0 را تنها می‌گوییم اگر علاوه بر این خاصیت، همسایگی‌ای از z_0 موجود باشد که f در سرتاسر آن بجز در خود z_0 تحلیلی باشد.

تابع $f(z)=\frac{1}{z}$ مثال ساده‌ای از یک تابع با نقطهٔ تکین تنها (Isolated Singularity) است. این تابع همه‌جا جز در $z=0$ تحلیلی است.

اگر z_0 یک نقطهٔ تکین تنهای f باشد، عدد مثبت r_1 ای هست به طوری که تابع در هر نقطهٔ z با خاصیت $0<|z-z_0|<r_1$ تحلیلی است. در این ناحیه تابع با سری لوران:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \cdots$$

بیان می‌گردد که در آن ضرائب با فرمول‌های بخش سری لوران تعیین می‌گردند. مخصوصاً b_1 که

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz$$

که در آن C مرز سادهٔ بسته‌ای حول z_0 است و f بر C و درون آن بجز در z_0 تحلیلی است. عدد مختلط b_1 که ضریب ترم $\frac{1}{z-z_0}$ در سری لوران تابع f است، ماندهٔ f در نقطهٔ تکین z_0 نامیده می‌شود.

نکته ۱:

فرمول بیان شده برای ماندهٔ b_1 روش قدرتمندی جهت محاسبهٔ انتگرال‌ها حول مسیرهای سادهٔ بسته ارائه می‌کند. بطور مثال انتگرال:

$$\int_c \frac{e^{-z}}{(z-1)^2}\,dz \qquad c: |z|=2$$

انتگرال این انتگرال تابع $f(z)=\frac{e^{-z}}{(z-1)^2}$ است که بر C و درون آن بجز در $z=1$ تحلیلی است. پس $z=1$ نقطهٔ تکین تنهای این تابع است. بنابر فرمول ماندهٔ b_1 حاصل این انتگرال برابر $2\pi i$ در ماندهٔ f در $z=1$ است

$$\int \frac{e^{-z}}{(z-1)^2}\,dz = 2\pi i\, b_1$$

با کمک سری تیلور e^{-z} حول $z=1$، سری لوران f برابر است با:

$$\frac{e^{-z}}{(z-1)^2}=\frac{e^{-1}}{(z-1)^2}-\frac{e^{-1}}{z-1}+e^{-1}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^{n-2}}{n!} \qquad (|z-1|>0)$$

از این سری بدست می‌آید که ماندهٔ f در $z=1$ عبارت $-\frac{1}{e}$ است لذا:

$$\int \frac{e^{-z}}{(z-1)^2}\,dz = -\frac{2\pi i}{e}$$

بعنوان مثال دیگری تابع $f(z)=\exp\left(\frac{1}{z^2}\right)$ را می‌نویسیم. سری لوران این تابع که به کمک سری ماکلورن $\exp(z)$ بدست می‌آید طوری است که $b_1=0$ می‌گردد. در نتیجه:

$$\int_c \exp\left(\frac{1}{z^2}\right)dz=0 \quad , \quad c: |z|=2 \quad , \quad z_0=0$$

قضیهٔ مانده‌ها : Residuals theorem

اگر تابع f فقط دارای تعدادی متناهی نقطهٔ تکینی در داخل مرز ساده و بستهٔ C باشد، در این حالت نقاط تکین بایستی تنها باشند. قضیهٔ زیر بیان دقیقی است از این امر که مقدار انتگرال f پیرامون C عبارت است از حاصلضرب $2\pi i$ در مجموع مانده‌های مربوط به آن نقطه‌های تکین.

قضیه :

فرض کنید C مرز ساده و بسته‌ای باشد که تابع f در درون و روی آن، بجز در تعدادی متناهی نقطهٔ تکین z_1 و z_2 و ... تا z_n که در داخل C هستند تحلیلی است. اگر B_1 و B_2 و ... و B_n معرف مانده‌های f در این نقاط باشند، آنگاه :

$$*\int_C f(z)dz = 2\pi i\left(B_1+B_2+\dots+B_n\right)*$$

برای روشن شدن قضیه، انتگرال $\int \frac{5z-2}{z(z-1)}dz$ روی مرز $|z|=2$ را محاسبه می‌کنیم. انتگرال موجود دارای ۲ نقطهٔ تکین در $z=0$ و $z=1$ است که هر دو در داخل C هستند. می‌توانیم برای این نقاط تکین مانده‌های B_1 در $z=0$ و B_2 در $z=1$ را به کمک سری لوران تابع $\frac{5z-2}{z(z-1)}$ که خود از طریق سری مکلورن $\frac{1}{1+z}$ بدست می‌آید، محاسبه نماییم :

$$\frac{1}{1+z} = 1-z+z^2-z^3+\dots \qquad |z|<1$$

$$\frac{5z-2}{z(z-1)} = \left(5-\frac{2}{z}\right)\left(\frac{-1}{1-z}\right) = \left(-5+\frac{2}{z}\right)\left(1+z+z^2+z^3+\dots\right)$$

$$= \frac{2}{z}-3-3z-3z^2-\dots$$

بنابراین معلوم می‌گردد که ضریب $\frac{1}{z}$ که برابر B_1 است مساوی 2 می‌باشد. $(B_1=2)$. سپس برای یافتن B_2 مربوط به $z=1$، تابع f را برحسب توان‌های $(z-1)$ بسط می‌دهیم:

$$\frac{5z-2}{z(z-1)} = \left(5+\frac{3}{z-1}\right)\left[\frac{1}{1+(z-1)}\right]$$

$$=\left(5+\frac{3}{z-1}\right)\left[1-(z-1)+(z-2)^2-\cdots\right]$$

بنابراین ضریب $\frac{1}{1-z}$ در سری فوق عدد $B_2=3$ می‌باشد، بنابراین:

$$\int \frac{5z-2}{z(z-1)}\,dz = 2\pi i\left(B_1+B_2\right) = 2\pi i(2+3)$$
$$=10\pi i$$

روش ساده‌تر حل این انتگرال، نوشتن انتگرال به صورت جمع کسرهای جزئی است:

$$\int \frac{5z-2}{z(z-1)}\,dz = \int \frac{2}{z}\,dz + \int \frac{3}{z-1}\,dz = 4\pi i + 6\pi i$$
$$=10\pi i$$

بخش اصلی تابع : principal part

دیدیم که اگر تابع f دارای نقطهٔ تکین تنهای z_0 باشد در ناحیه‌ای مانند $0<|z-z_0|<r_2$ به مرکز z_0، تابع با سری لوران : $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$ نمایش داده می‌شود. بخش از سری که شامل توان‌های منفی $(z-z_0)$ است را قسمت اصلی f در z_0 می‌نامند. حال با کمک بخش اصلی، سه نوع نقطهٔ تکین تنها را معرفی می‌کنیم، که رفتار f در نزدیکی هر نوع متفاوت است.

اگر بخش اصلی f در z_0 شامل حداقل یک جملهٔ ناصفر بوده اما تعداد آن‌ها متناهی باشد، عدد صحیح مثبتی مانند m هست بطوری که $b_m\neq 0$ و $b_{m+1}=b_{m+2}=\cdots=0$ است، یعنی بسط سری لوران فوق برابر می‌شود با:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n+\frac{b_1}{z-z_0}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\cdots+\frac{b_m}{(z-z_0)^m}$$

در این حالت، نقطهٔ تکین تنهای z_0 را قطب مرتبهٔ m می‌نامند و یک قطب مرتبهٔ $m=1$ را قطب ساده می‌گویند. (Simple pole)

مثلاً تابع

$$\frac{z^2-2z+3}{z-2}=2+(z-2)+\frac{3}{z-2}$$

دارای قطب ساده‌ای در $z=2$ است. ماندهٔ تابع در این نقطه برابر 3 می‌باشد. و یا تابع $\frac{\sinh z}{z^4}=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{6z}+\frac{1}{5!z}+\cdots$ در $z=0$ دارای یک قطب مرتبه 3 با مانده‌ای برابر $\frac{1}{6}$ است.

نکتهٔ ۱: هرگاه z به سوی یک قطب میل کند، $f(z)$ همواره به سوی ∞ میل خواهد کرد.

اگر بخش اصلی f در z_0 دارای تعدادی نامتناهی جملهٔ ناصفر باشد، این نقطه را یک نقطهٔ تکین اساسی (Essential Singularity) می‌نامند. بطور مثال تابع $\exp(\frac{1}{z})=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{z^n}$ مثال مناسب است، که در $z=0$ دارای نقطهٔ تکین اساسی است و مانده‌اش در آن نقطه برابر یک است.

و در نهایت اگر همهٔ ضرایب b_n در بخش اصلی تابع f در نقطهٔ تکین z_0 صفر باشند، نقطهٔ z_0 یک نقطهٔ تکین رفع شدنی f (Removable Singularity) نامیده می‌شود. در این حالت سری لوران تابع f، فقط شامل توان‌های مثبت $(z-z_0)$ شده و در واقع یک سری توانی است. اگر f را در z_0 مساوی a_0 فرض کنیم تابع f در z_0 تحلیلی خواهد شد. بنابراین تابع f با یک نقطهٔ تکین رفع شدنی را می‌توان با نسبت دادن مقداری مناسب، تابع در آن نقطه تحلیلی ساخت.

بطور مثال تابع $f(z)=\frac{e^z-1}{z}=1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\cdots$ ، که اگر $f(0)=1$ تعریف گردد، تابع تام می‌شود.

روش دوم برای محاسبهٔ باقیمانده (قطب از مرتبهٔ n)

فرض کنید f در z_0 دارای قطب مرتبهٔ m باشد. تابع جدید g را با رابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(z) = (z-z_0)^m f(z)$$

که با توجه به سری لوران این تابع (بدلیل اینکه تابع در z_0 قطب مرتبهٔ m دارد، ضرائب b_n تا b_m مخالف صفر و $b_{m+1} = b_{m+2} = \cdots = 0$ هستند) داریم:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{b_m}{(z-z_0)^m} \quad \text{لوران}$$

$$g(z) = b_m + b_{m-1}(z-z_0) + b_{m-2}(z-z_0)^2 + \cdots + b_1 (z-z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+m} \quad \text{تیلور}$$

که در آن $b_m \neq 0$ است و بنابراین z_0 یک نقطهٔ تکین رفع شدنی تابع $g(z)$ است. حال برای اینکه $g(z)$ را در z_0 تحلیلی کنیم می‌نویسیم: $g(z_0) = b_m$ و تحلیلی بودن $g(z)$ در z_0 باعث پیوسته بودن آن در z_0 است پس:

$$g(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0)^m f(z) = b_m$$

و چون این حد موجود است ($b_m \neq 0$) نتیجه می‌شود که اگر z به قطب میل کند تابع $f(z)$ به بی‌نهایت میل میکند. بعلاوه تابع g را می‌توان برای محاسبهٔ باقیماندهٔ f در قطب z_0 بکار برد که همان ضریب b_1 در سری لوران تابع است و در سری تیلور جدید $f(z)$ که در بالا بیان شده b_1 از فرمول ضرائب تیلور بدست می‌آید:

$$b_1 = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

وقتی $m=1$ است، این فرمول برای محاسبه مانده f در قطب ساده z_0 نیز به کار می‌رود:

$$b_1 = \varphi(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)$$

بنابراین اگر تابعی نظیر $(z-z_0)^m f(z)$ که در z_0 تعریف شده، بیان گردد:

$$f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{(z-z_0)^m} + \frac{\varphi'(z_0)}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{\varphi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}\left(\frac{1}{z-z_0}\right) + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-m}$$

قضیه:

تابع f مفروض است، فرض کنید به ازای هر عدد صحیح و مثبت m ای تابع $\varphi(z) = (z-z_0)^m f(z)$ را طوری در z_0 تعریف کنیم که $\varphi(z)$ در z_0 تحلیلی باشد و $\varphi(z_0) \neq 0$.

در اینصورت تابع f دارای یک قطب مرتبه m در z_0 است و مانده‌اش در z_0 اگر:

$$m>1 \Rightarrow b_1 = \frac{\varphi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left(f(z)(z-z_0)^m\right)$$

$$m=1 \Rightarrow b_1 = \varphi(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)$$

داده می‌شود.

حل و بررسی یک مثال:

مانده‌ی تابع $f(z) = \dfrac{e^{z}}{z(z+1)}$ را بدست آورید:

$$f(z) = \frac{e^{z}}{z(z+1)} \Rightarrow$$

این تابع دارای دو قطب ساده در $z=0$ و $z=-1$ است

پس:

$$Res(f;0) = \lim_{z \to 0} (z-z_0)\frac{e^{z}}{z(z+1)} = \lim_{z \to 0} \frac{e^{z}}{z+1} = 1$$

$$Res(f;-1) = \lim_{z \to -1} (z+1)\frac{e^{z}}{z(z+1)} = \lim_{z \to -1} \frac{e^{z}}{z} = -e^{-1}$$

حل و بررسی مثال:

مانده‌ی تابع $f(z)$ را در $z=1$ بدست آورید:

$$f(z) = \frac{2z}{(z+4)(z-1)^2}$$

راه حل: تابع در $z=1$ دارای قطب مرتبه 2 است: $(m=2)$

$$Res(f;1) = \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz}\left[(z-1)^2 \times \frac{2z}{(z+4)(z-1)^2}\right]$$

$$= \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz}\left[\frac{2z}{z+4}\right] = \lim_{z \to 1} \frac{2(z+4)-2z}{(z+4)^2}$$

$$= \lim_{z \to 1} \frac{8}{(z+1)^4} = \frac{8}{25}$$

روش سوم برای محاسبه مانده‌ها : (روش خارج قسمت)

روشی اساسی برای محاسبه مانده یک تابع در نقطهٔ تکین تنهای z_0 این است که مستقیماً از سری لوران مناسب استفاده گردد و ضریب $\frac{1}{z-z_0}$ بعنوان ماندهٔ آن تابع معرفی شود. این روش خصوصاً وقتی که z_0 یک نقطهٔ تکین اساسی است تنها روش مؤثر است.

درحالتی که تابع $\varphi(z)=(z-z_0)^m f(z)$ به قدر کافی جهت حدگیری یا مشتق‌گیری ساده باشد، روش دوم پیشنهاد می‌گردد.

اما روشی سوم هم برای یافتن ماندهٔ تابع f در قطب z_0 موجود است بشرط آنکه f را بتوان بصورت خارج قسمت $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ نوشت که در آن P و Q هر دو در z_0 تحلیلی‌اند و $P(z_0)\neq 0$ و ضمن z_0 قطب ساده‌ای برای تابع f است.

در ابتدا توجه داشته باشید که چون z_0 نقطهٔ تکین تابع f است پس $Q(z_0)=0$ می‌باشد. در این حالت ماندهٔ تابع f در قطب سادهٔ z_0 برابر است با :

$$b_1=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

نکته ۱ :

می‌توان نشان داد که اگر علاوه بر شرائطی که روی P و Q قرار دادیم، داشته باشیم :

$$Q(z_0)=Q'(z_0)=Q''(z_0)=\dots=Q^{(m-1)}(z_0)=0 \quad , \quad Q^{(m)}(z_0)\neq 0$$

آنگاه تابع f دارای یک قطب مرتبهٔ m در z_0 است. درحالت $m=2$ ماندهٔ f در قطب مرتبه دوم z_0 برابر است با :

$$b_1=2\,\frac{P'(z_0)}{Q''(z_0)}-\frac{2P(z_0)Q'''(z_0)}{3\left[Q''(z_0)\right]^2}$$

درحالت‌های $m>2$ ، فرمول ماندهٔ f بسیار طولانی‌تر می‌گردد.

حل و بررسی یک مثال:

ماندهٔ توابع f زیر را با روش خارج قسمت بدست آورید:

1) $f(z) = \cot z$

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} \Longrightarrow z = n\pi\ ,\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \rightarrow$$ نقاط تکین

اگر بنویسیم $P(z) = \cos z$ و $q(z) = \sin z$ درمی‌یابیم که هریک از نقاط تکین ذکر شده یک قطب ساده است، با مانده:

$$b_1 = \frac{P(n\pi)}{q'(n\pi)} = \frac{\cos n\pi}{\cos n\pi} = 1$$

2) $f(z) = \dfrac{1}{z(e^z - 1)}$

این تابع دارای یک قطب مرتبه دوم در $z = 0$ است

چون:

$$P(z) = 1\ ,\quad q(z) = z(e^z - 1) \Rightarrow q(0) = q'(0) = 0$$

$$,\ q''(0) = 2 \neq 0$$

$$q'''(0) = 3 \neq 0$$

بنابر فرمول مانده در نکته 1 بحث اصلی قطب مرتبه دوم مانده (قطب خارج قسمت)

$$b_1 = 2\,\frac{(0)}{2} - \frac{2(1)(3)}{3[2]^2} = -\frac{1}{2}$$

3) $f(z) = \dfrac{1}{z^4 - 1}$

شرح حل: تابع f در $z = i$ قطب ساده دارد:

$$b_1 = \frac{P(z_0)}{q'(z_0)} = \frac{1}{4z^3}\Big|_{z=i} = \frac{i}{4}$$