ریاضیات مهندسی پیشرفته

جلسه اول

مقدمه و تعاریف

فهرست مطالب

بسم الله الرحمن الرحیم

۱-چکیده مطالب:

برای نوشتن معادلات حاکم بر یک سیستم، ابتدا باید محورهای مختصات را انتخاب کرد. دستگاه مختصات انتخابی با توجه به هندسه سیستم می‌تواند کارتزین، استوانه‌ای و یا کروی باشد. معادلات حاصل می‌توانند از هر مرتبه و از هر درجه‌ای باشند. مرتبه یک معادله مرتبه بالاترین مشتق موجود در آن و درجه هر معادله توان بالاترین مرتبه مشتق موجود در آن است. معادله دیفرانسیل حاصل می‌تواند همگن یا ناهمگن باشد و در نهایت شرایط مرزی سیستم می‌توانند یکی از انواع دریکله، نیومن و یا روبین باشد.

۲-اهداف:

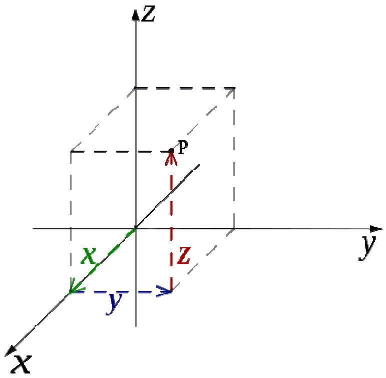
آشنایی با سیستم‌های مختصات مختلف و تبدیل محورها، آشنایی با مفاهیم و تعاریف اولیه مربوط به معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و آشنایی با انواع شرایط مرزی.

۳-دستگاه‌های مختصات

در مباحث مهندسی زمانی که معادلات حاکم بر سیستم‌ها نوشته می‌شوند، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ظاهر می‌شوند. برای نوشتن معادلات حاکم بر هر سیستم باید از هندسه سیستم آگاهی داشت. با آگاهی از هندسه سیستم مورد بررسی می‌توان سیستم مختصات مناسب برای حل مسأله را انتخاب کرد. به عنوان مثال زمانی که در مکانیک سیالات معادله مومنتم برای بدست آوردن توزیع سرعت در یک لوله نوشته می‌شود، با توجه به هندسه سیستم، مختصات استوانه‌ای برای انجام محاسبات انتخاب می‌شود. در این بخش با سیستم‌های مختصات آشنا می‌شویم.

۳.۱-سیستم مختصات کارتزین

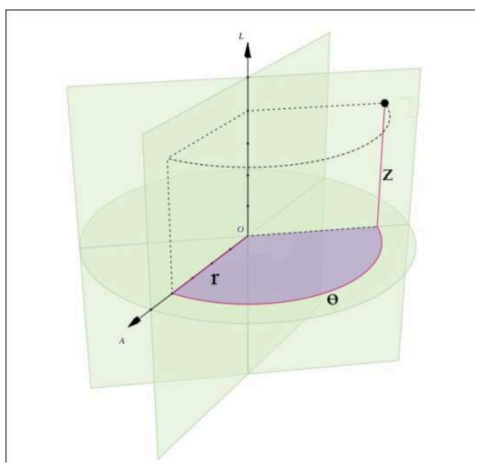
در سیستم مختصات کارتزین، سه صفحه عمود بر هم انتخاب می‌شوند و مختصات هر نقطه در فضا برابر با فواصل این نقطه از این صفحات خواهد بود (شکل ۳-۱).



شکل ۳-۱ مختصات نقطه‌ای در فضا در دستگاه مختصات کارتزین

۳.۲-سیستم مختصات استوانه‌ای

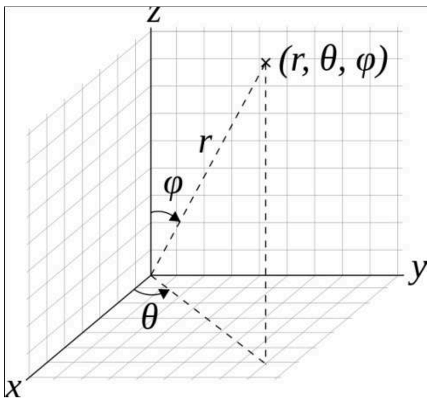
مختصات هر نقطه از فضا توسط سه مؤلفه **r**، θ و **z** مشخص می‌شود (شکل ۳-۲).



شکل ۳-۲مختصات نقطه‌ای در فضا در دستگاه مختصات استوانه‌ای

۳.۳-سیستم مختصات کروی

در این سیستم از سه مؤلفه **r**، θ و φ برای مشخص کردن یک نقطه در فضا استفاده می‌شود (شکل ۳-۳).



شکل ۳-۳مختصات نقطه‌ای در فضا در دستگاه مختصات کروی

۳.۴-تبدیل مختصات کارتزینبه استوانه‌ای و بلعکس

برای تبدیل مختصات استوانه‌ای به کارتزین از روابط زیر استفاده می‌کنیم.

$$\boldsymbol{x = r\cos\theta}$$

$$\boldsymbol{y = r\sin\theta}$$

و برای تبدیل مختصات کارتزین به استوانه‌ای از روابط زیر استفاده می‌کنیم.

$$\boldsymbol{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\varphi = \begin{cases} 0 & \text{if } x = 0 \text{ and } y = 0 \\ \arcsin(\frac{y}{\rho}) & \text{if } x \geq 0 \\ -\arcsin(\frac{y}{\rho}) + \pi & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

ρ در روابط بالا همان **r**، فاصله از مرکز مختصات می‌باشد.

۳.۵-تبدیل مختصات کارتزین به کروی و بلعکس

برای تبدیل مختصات کروی به کارتزین از روابط زیر استفاده می‌کنیم.

$$x = r\,\cos\phi\,\sin\theta$$

$$y = r\,\sin\phi\,\sin\theta$$

$$z = r\,\cos\theta$$

و برای تبدیل مختصات کارتزین به کروی از روابط زیر استفاده می‌کنیم.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right)$$

۳.۶-اپراتور لاپلاس

یکی از اپراتورهایی که در معادلات با آن برخورد می‌کنیم، اپراتور لاپلاس و یا لاپلاسین می‌باشد، که در مختصات کارتزین به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

در مختصات استوانه‌ای،لاپلاسین تابع **u** به صورت زیر می‌باشد.

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

و در مختصات کروی،

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

٤-معادلات دیفرانسیل جزئی

معادله‌ای که شامل یک متغیر وابسته و دو یا بیشتر متغیر مستقل باشد، معادله دیفرانسیل جزئی نامیده می‌شود. به عنوان مثال در مسأله انتقال حرارت در یک میله، دما متغیر وابسته و زمان و طول متغیرهای مستقل می‌باشند.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

در یک معادله با مشتقات جزئی، بالاترین مشتق موجود در معادله، مرتبه آن می‌باشد. در معادله بالا، بالاترین مشتق، مشتق از مرتبه دو می‌باشد، بنابراین مرتبه معادله، دو می‌باشد.

در یک معادله، توان بالاترین مشتق، درجه معادله محسوب می‌شود. به عنوان مثال

معادله درجه یک $a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial u}{\partial y}+u=0$

معادله درجه دو $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial T}{\partial t}=0$

٤.١.١-فرم کلی معادلات مرتبه اول و دوم

معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه اول را می‌توان به فرم کلی زیر نوشت.

$$a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+c\frac{\partial u}{\partial z}+d\frac{\partial u}{\partial t}+fu=g \qquad (۱-۴)$$

و فرم کلی معادلات مرتبه دوم به صورت زیر است.

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}+fu=g \qquad (۲-۴)$$

با توجه به ضرایب معادلات ۴-۱ و ۴-۲، معادله می‌تواند خطی یا غیر خطی باشد.

اگر این ضرایب ثابت و یا تابعی از **x**، **y**، **z** و **t** باشند، آنگاه معادلات خطی، اگر تابعی از **x**، **y**، **u**، $\frac{\partial u}{\partial x}$، $\frac{\partial u}{\partial y}$ شبه خطی و اگر تابعی از **x**، **y**، **u**، $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$، $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ باشند، معادله غیر خطی می‌باشد.

مثال:

معادله خطی $\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

معادله شبه‌خطی $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u\frac{\partial u}{\partial y}=0$

معادله غیرخطی $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$

اگر در معادلات ۴-۱ و ۴-۲، **g** برابر با صفر باشد، معادله همگن و در غیر این صورت معادله ناهمگن خواهد بود.

٤.١.٢-دسته‌بندی معادلات دیفرانسیل جزئی خطی مرتبه دوم

با توجه به معادله ۴-۲،

معادله بیضوی $b^2 - 4ac < 0$

معادله سهموی $b^2 - 4ac = 0$

معادله هذلولی $b^2 - 4ac > 0$

به عنوان مثال اگر معادله لاپلاس را در نظر بگیریم،

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

با مقایسه با معادله ۴-۲، این معادله دارای ثوابت زیر می‌باشد.

$$a = 1, b = 0, c = 1$$

و در نتیجه،

$$b^2 - 4ac = -4 < 0$$

بنابراین معادله لاپلاس جزء معادلات بیضوی می‌باشد.

و یا در معادله نفوذ،

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$a = \alpha , b = 0, c = 0$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

بنابراین معادله نفوذ یک معادله سهموی می‌باشد.

و معادله موج یک بعدی،

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$a = c^2, b = 0, c = -1$$

$$b^2 - 4ac = 4c^2 > 0$$

بنابراین معادله موج یک معادله هذلولی است.

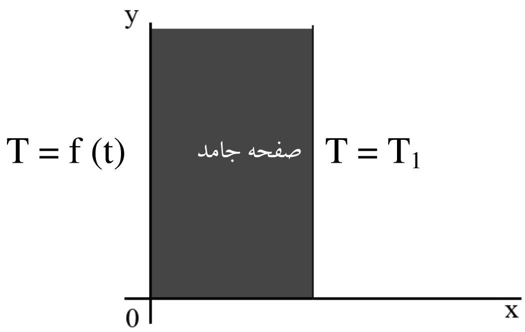
۵-انواع شرایط مرزی

۵.۱.۱-شرط مرزی نوع اول (دریکله)

مقدار متغیر وابسته روی مرز مشخص است.

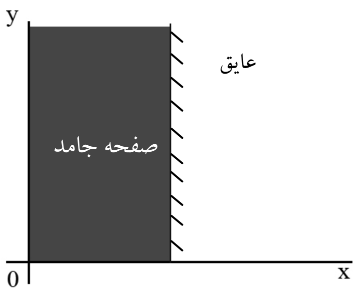
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

T(x, t) =?



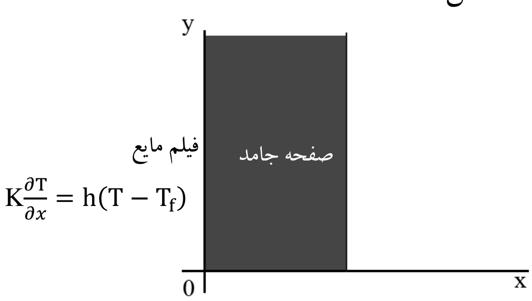
۵.۱.۲-شرط مرزی نوع دوم (نیومن)

مقدار مشتق متغیر وابسته عددی ثابت و یا تابعی از متغیر مستقل باشد. به عبارت دیگر تغییرات متغیر وابسته روی مرز مشخص است.



۵.۱.۳-شرط مرزی نوع سوم (روبین)

ترکیبی خطی از مقادیر متغیر وابسته و مشتق آن روی مرز مشخص است.



۵.۱.٤-شرایط مرزی همگن و ناهمگن

شرط مرزی همگن به آن دسته از شرایط مرزی می‌گوییم که در آن تمامی جملات بر حسب تابع و یا مشتقات آن باشد.در صورتیکه در شرایط مرزی، جمله یا جملاتی غیر از تابع و مشتقات آن وجود داشته باشد، آن شرط غیر همگن نامیده می‌شود.

مثال:

$T(x,t) = 0$ (شرط مرزی همگن)

$C(x, 0) = 0$ (شرط مرزی همگن)

$C(0, t) = C_0$ (شرط مرزی ناهمگن)

$-K\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = hT(0,T)$ (شرط مرزی همگن)

$-K\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = h[T(0,T) - T_\infty]$ (شرط مرزی ناهمگن)

$T(0,y,z) = 100$ (شرط مرزی ناهمگن)

$\frac{\partial T(x,0)}{\partial y} = 0$ (شرط مرزی همگن)

ریاضیات مهندسی پیشرفته

جلسه دوم

معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه اول خطی و شبه خطی

فهرست مطالب

بسم الله الرحمن الرحیم

۱-چکیده مطالب:

برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه اول خطی و شبه خطی از روش لاگرانژ استفاده می‌شود. با استفاده از این روش می‌توان جواب عمومی معادله را بدست آورد. اگر منحنی اولیه داده شده باسد، می‌توان جواب خصوصی معادله را بدست آورد.

۲-اهداف:

آشنایی با روش حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه اول خطی و شبه خطی.

۳-معادلات دیفرانیل جزئی مرتبه اول خطی و شبه‌خطی

همانطور که در جلسه قبل در مورد انواع معادلات دیفرانسیل توضیح داده شد، فرم کلی معادلات جزئی مرتبه اول خطی به شکل زیر می‌باشد.

$$\alpha(x,y,u)\frac{du}{dx}+b(x,y,u)\frac{du}{dy}=C(x,y,u) \qquad (۱-۳)$$

۳.۱-روش لاگرانژ

معادله ۳-۱ را می‌توان به شکل کلی $au_x+bu_y=c$نوشت، که در آن $u=u(x,y)$،بنابراین،

$$\frac{du}{dt}=\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{du}{dy}\frac{dy}{dt}\Longrightarrow a\frac{du}{dx}+b\frac{du}{du}=C \qquad (۲-۳)$$

از مقایسه معادلات ۳-۱ و ۳-۲ داریم،

$$\begin{cases} a = \dfrac{dx}{dt} \\ b = \dfrac{d_y}{d_t} \\ C = \dfrac{d_u}{d_t} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{a} = dt \\ \dfrac{dy}{c} = dt \\ \dfrac{du}{c} = dt \end{cases} \qquad (۳-۳)$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت،

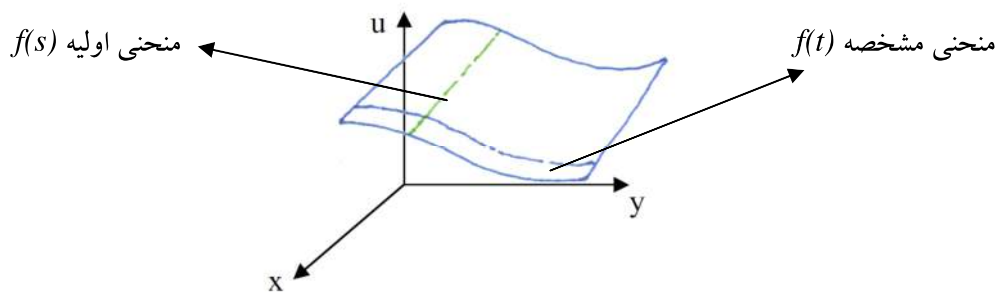
$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{c} \qquad (۴-۳)$$

به این ترتیب یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی تبدیل به معادلات دیفرانسیل معمولی می‌شود.

$$\begin{cases} \dfrac{d_x}{a} = \dfrac{d_y}{b} \Longrightarrow y = f_1(x) + c_1 \Longrightarrow C_1 = y - f_1(x) \\ \dfrac{d_y}{b} = \dfrac{d_u}{c} \Longrightarrow u = f_2(y) + C_2 \Longrightarrow C_2 = u - f_2(y) \end{cases} \Longrightarrow \boxed{C_1 = f(C_2)}$$

جواب عمومی معادله

fهر تابعی می‌تواند باشد، بنابراین، این جواب حل عمومی معادله ۳-۱ نامیده می‌شود. اگر یک منحنی اولیه داده شود، می‌توان جواب خصوصی معادله را بدست آورد.



مثال: با توجه به شرایط داده شده، جواب خصوصی معادله را بدست آورید.

$$x^2 u_x + u u_y = 1$$

$$\begin{cases} u = 0 \\ y = 1 - x \end{cases}$$

حل- ابتدا با استفاده از روش لاگرانژ جواب عمومی معادله را بدست می‌آوریم.

$$\frac{d_x}{x^2} = \frac{d_y}{u} = \frac{d_u}{1} \Longrightarrow \begin{cases} d_u = \frac{d_y}{u} \Longrightarrow d_y = ud_u \Longrightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}u^2 + C_1} \\ d_u = \frac{d_x}{x^2} \Longrightarrow \int \frac{d_x}{x^2} = \int d_u \Longrightarrow \boxed{-\frac{1}{x} = u + C_2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{C_1 = y - \frac{1}{2}x^2} \\ \boldsymbol{C_2 = -\frac{1}{x} - u} \end{cases} \boxed{\boldsymbol{y - \frac{1}{2}u^2 = F\left(-\frac{1}{x} - u\right)}}$$ جواب عمومی

منحنی اولیه را به صورت پارامتری درمی‌آوریم. در $\boldsymbol{t = 0}$داریم:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_0 = S} \\ \boldsymbol{y_0 = 1 - S} \\ \boldsymbol{u_0 = 0} \end{cases}$$

منحنی اولیه به این فرم در جواب عمومی معادله صدق می‌کند،

$$\boldsymbol{1 - S - \frac{1}{2}(0)^2 = F\left(-\frac{1}{S} - 0\right) \Longrightarrow 1 - S = F\left(-\frac{1}{S}\right)}$$

اگر $\boldsymbol{\alpha = -\frac{1}{S}}$ آنگاه:

$$S = -\frac{1}{\alpha}$$

$$\boxed{1 + \frac{1}{\alpha} = F(\alpha)}$$

و در نهایت اگر $\alpha = -\frac{1}{x} - u$جواب خصوصی معادله به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\boxed{y-\frac{1}{2}u^2=1+\frac{1}{-u-\frac{1}{x}}}$$

باید توجه داشت که منحنی اولیه به صورت پارامتری در معادلات ۳-۳ صدق می‌کند. بنابراین،

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{x^2}=dt\Longrightarrow\boxed{-\dfrac{1}{x}=t+C_1}\\ \dfrac{dy}{u}=dt\\ du=dt\Longrightarrow\boxed{u=t+C_2}\end{cases}$$

$$\boldsymbol{\frac{d_y}{u}=dt\Longrightarrow\frac{d_y}{ttc_2}=dt\Longrightarrow\boxed{y=\frac{1}{2}t^2+C_2t+C_3}}$$

منحنی اولیه به صورت

$$\begin{cases}\mathbf{t=0}\\ \mathbf{x=s}\\ \mathbf{u=0}\\ \mathbf{y=1-s}\end{cases}$$

در معادلات بالا صدق می‌کند، بنابراین

$$\mathbf{-\frac{1}{S}=C_1}$$

$$\boldsymbol{1-S=C_3}$$

$$\boldsymbol{C_2=0}$$

و فرم پارامتری جواب به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{x} = \mathrm{t} - \dfrac{1}{\mathrm{S}} \\ \mathrm{u} = \mathrm{t} \\ \mathrm{y} = \dfrac{1}{2}\mathrm{t}^2 + 1 - \mathrm{S} \end{cases}$$

که با حذف **t** و **s** به جواب **u = u(x,y)** می‌رسیم.

۳.۲-شرط وجود جواب

$$\frac{\frac{dx_0}{\mathrm{ds}}}{\mathrm{a}} = \frac{\frac{\mathrm{dy}_0}{\mathrm{ds}}}{\mathrm{b}} = \frac{\frac{\mathrm{du}_0}{\mathrm{ds}}}{\mathrm{C}} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \frac{dx_0}{\mathrm{ds}} & \frac{\mathrm{dy}_0}{\mathrm{ds}} \\ \mathrm{a} & \mathrm{b} \end{vmatrix}$$

با توجه به دترمینان بالا می‌توان وجود جواب را به صورت زیر چک کرد.

$\boldsymbol{\Delta \neq 0 \Longrightarrow}$ یک جواب داریم

$\Delta = \mathbf{0} \Longrightarrow$ یا بی‌نهایت جواب داریم و یا اصلا جواب نداریم

$$\Delta = \mathbf{0} \begin{cases} \dfrac{\frac{\mathbf{dx_0}}{\mathbf{ds}}}{\mathbf{a}} = \dfrac{\frac{\mathbf{dy_0}}{\mathbf{ds}}}{\mathbf{b}} = \dfrac{\frac{\mathbf{du_0}}{\mathbf{ds}}}{\mathbf{C}} & \text{بی‌نهایت جواب} \\ \dfrac{\frac{\mathbf{dx_0}}{\mathbf{ds}}}{\mathbf{a}} = \dfrac{\frac{\mathbf{dy_0}}{\mathbf{ds}}}{\mathbf{b}} \neq \dfrac{\frac{\mathbf{du_0}}{\mathbf{ds}}}{\mathbf{C}} & \text{جواب نداریم} \end{cases}$$

برای مثال قبل،

$$x^2\mathrm{u_x} + \mathrm{uu_y} = 1$$

$$\pi = \begin{cases} u = 0 \\ y = 1 - x \end{cases} \Delta = \begin{bmatrix} \frac{dx_0}{\mathrm{ds}} & \frac{\mathrm{dy}_0}{\mathrm{ds}} \\ \mathrm{a} & \mathrm{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ S^2 & 0 \end{bmatrix} = S^2 \neq\Longrightarrow 0 \Longrightarrow$$ یک جواب داریم

۳.۳-مسائل حل شده

مسأله ۳-۱: معادله دیفرانسیل جزئی زیر را حل کنید.

$$\frac{\partial z}{\partial x}+(x+2)\frac{\partial z}{\partial y}=x$$

حل: با استفاده از روش لاگرانژ،

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{x+2}=\frac{dz}{x}$$

آسانترین و بهترین دستگاه را انتخاب می‌کنیم. داریم:

$$\begin{cases}(x+2)dx=dy\\ \quad xdx=dz\end{cases}$$

معادلات بالا را حل می‌کنیم،

$$(x+2)dx=dy\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}x^2+2x=y+c_1\Rightarrow c_1=\frac{1}{2}x^2+2x-y$$

$$xdx=dz\ \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}x^2=z+c_2\Rightarrow c_2=\frac{1}{2}x^2-z$$

جواب عمومی به صورت $c_2=f(c_1)$می‌باشد:

$$\frac{1}{2}x^2-z=f\left(\frac{1}{2}x^2+2x-y\right)\Rightarrow z=\frac{1}{2}x^2-f\left(\frac{1}{2}x^2+2x-y\right)$$

مسأله ۳-۲: حل عمومی معادله زیر را بدست آورید.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}+2\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}}=\mathbf{x}$$

حل:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2} = \frac{du}{x}$$

$$dy = 2dx \Longrightarrow c_1 = y - 2x$$

$$du = xdx \Longrightarrow c_2 = u - \frac{1}{2}x^2$$

بنابراین جواب عمومی به صورت زیر خواهد بود.

$$u - \frac{1}{2}x^2 = f(y - 2x)$$

مسأله ۳-۳: حل عمومی معادله دیفرانسیل جزئی زیر را بیابید.

$$(y - u)u_x + (u - x)u_y = x - y$$

حل:

$$\frac{dx}{y - u} = \frac{dy}{u - x} = \frac{du}{x - y} = dt$$

$$\frac{d(x + y + u)}{(y - u) + (u - x) + (x - y)} = dt \Longrightarrow \frac{d(x + y + u)}{dt} = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{u + x + y = C_1}$$

$$\frac{dx}{y - u} = \frac{dy}{u - x} \Longrightarrow \frac{dx}{y - c_1 + x + y} = \frac{dy}{c_1 - 2x - y}$$

$$\Longrightarrow c_1dx - 2xdx - ydx = ydy - c_1dy + xdy + ydy$$

$$\Longrightarrow c_1x - x^2 = y^2 - c_1y + xy + c_2 \Longrightarrow c_1(x + y)$$

$$= y^2 + x^2 + xy + c_2$$

$$\Longrightarrow (x + y + u)(x + y) = y^2 + x^2 + xy + c_2$$

$$\Longrightarrow \boxed{c_2 = ux + uy + xy}$$

$$c_1 = f(c_2) \Longrightarrow \boxed{x + y + u = F(ux + uy + xy)}$$

مسأله ۳-۴: حل عمومی معادله دیفرانسیل جزئی زیر را بیابید. برای یافتن جواب خصوصی از شرط **z(x,2) = x** استفاده کنید.

$$\mathbf{z\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = y}$$

حل:

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{y}$$

$$\frac{dy}{1} = \frac{dz}{y} \Longrightarrow ydy = dz \Longrightarrow c_1 = \frac{1}{2}y^2 - z$$

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{1} \Longrightarrow \frac{dx}{c_1 - \frac{1}{2}y^2} = \frac{dy}{1} \Longrightarrow dx = \frac{1}{2}y^2dy - c_1dy \Longrightarrow$$

$$c_2 = x - \frac{1}{6}y^3 + c_1y$$

بنابراین،

$$x - \frac{1}{6}y^3 + c_1y = f\left(\frac{1}{2}y^2 - z\right)$$

و با توجه به اینکه $c_1 = \frac{1}{2}y^2 - z$ خواهیم داشت،

$$x - \frac{1}{6}y^3 + y\left(\frac{1}{2}y^2 - z\right) = f\left(\frac{1}{2}y^2 - z\right)$$

$$\boxed{x + \frac{1}{3}y^3 - yz = f\left(\frac{1}{2}y^2 - z\right)}$$

شرط z(x,2) = x در جواب عمومی معادله صدق می‌کند،

$$x+\frac{1}{3}(2)^3-2x=f\left(\frac{1}{2}(2)^2-x\right)$$

$$x+\frac{8}{3}-2x=f(2-x)\Rightarrow f(2-x)=-x+\frac{8}{3}$$

اگر $\alpha=2-x$، آنگاه،

$$x=2-\alpha$$

بنابراین،

$$f(\alpha)=\frac{2}{3}+\alpha$$

به این ترتیب فرم تابع f در جواب عمومی بدست می‌آید.

$$x+\frac{1}{3}y^3-yz=\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{2}y^2-z\right)$$

$$x+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2-\frac{2}{3}=z(y-1)$$

$$\boxed{z=\frac{x+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2-\frac{2}{3}}{y-1}}$$

مسأله ۳-۵: معادله زیر را حل کنید.

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$$

حل:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Longrightarrow \ln x = \ln y + \ln c_1 \Longrightarrow \ln x = \ln c_1 y \Longrightarrow x = c_1 y$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z} \Longrightarrow \ln x = \ln z + \ln c_2 \Longrightarrow \ln x = \ln c_2 z \Longrightarrow x = c_2 z$$

بنابراین جواب عمومی به صورت $\left(\frac{x}{z}\right) = f\left(\frac{x}{y}\right)$ خواهد بود.

ریاضیات مهندسی پیشرفته

جلسه سوم

معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه اول غیرخطی و فرم کانونیک معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم

فهرست مطالب

بسم الله الرحمن الرحیم

۱-چکیده مطالب:

برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه اول غیرخطی از روش مشخصه[1] استفاده می‌کنیم. برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم به روش مشخصه یا دالامبر، ابتدا باید فرم کانونیک آن‌ها را بدست آورد.

۲-اهداف:

آشنایی با روش حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه اول غیرخطی. بدست آوردن فرم کانونیک معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم.

۳-معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه اول غیرخطی

همانطور که قبلا اشاره شد، فرم کلی معادلات جزئی مرتبه اول غیرخطی به شکل زیر می‌باشد.

$$\boldsymbol{F(x,y,u,p,q)=0} \qquad (۱-۳)$$

که در آن،

$$\boldsymbol{u=u(x,y)}$$

$$\boldsymbol{p=\frac{\partial u}{\partial x}=u_x}$$

$$\boldsymbol{q=\frac{\partial u}{\partial y}=u_y}$$

و تابع $\boldsymbol{F}$ **به گونه‌ای است که،**

$$\boldsymbol{F_p^2+F_q^2\neq 0}$$

۳.۱- حل به روش مشخصه

معادلات مشخصه معادله ۳-۱ به صورت زیر می‌باشند،

[1] method of characteristics

$$\frac{dx}{dt} = F_p$$

$$\frac{dy}{dt} = F_q$$

$$\frac{dp}{dt} = -F_x - pF_u$$

$$\frac{dq}{dt} = -F_y - qF_u$$

حل معادلات مشخصه به صورت $\big(x(t), y(t), u(t), p(t), q(t)\big)$، **منحنی مونگ[2] نام دارد.**

مثال (۱): معادله دیفرانسیل جزئی زیر را با استفاده از منحنی اولیه داده شده حل کنید.

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 x + y\frac{du}{dy} - u = 0$$

$u(x, 1) = -x$ **منحنی اولیه**

حل-

$$p^2x + yq - u = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = F_p = 2px \Rightarrow x = x(t) + C_3$$

$$\frac{dy}{dt} = F_q = y \Rightarrow y = y(t) + C_4$$

$$\frac{dp}{dt} = -F_x - pF_u = p^2 + p \Rightarrow p = p(t) + C_1$$

$$\frac{dq}{dt} = -q + q = 0 \Rightarrow q = C_2$$

حال باید ثوابت C_1 تا C_5 را بدست آوریم. منحنی اولیه را پارامتری می‌کنیم.

[2] Monge Curve

$$t = 0 \qquad \pi: \begin{cases} x_0 = S \\ y_0 = 1 \\ u_0 = -S \\ q_0 \\ p_0 \end{cases}$$

منحنی اولیه در معادله ۳-۱ صدق می‌کند، بنابراین

$$F(x_0, y_0, p_0, q_0, u_0) = 0$$
$$\frac{du_0}{ds} = p_0 \frac{dx_0}{ds} + q_0 \frac{dy_0}{ds}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} P_0^2 S + q_0 - (-S) = 0 \Rightarrow \boxed{q_0 = -2S} \\ -1 = p_0 + q_0(0) \Rightarrow \boxed{p_0 = -1} \end{cases}$$

شرط داشتن جواب را چک می‌کنیم.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{dx_0}{dS} & \frac{dy_0}{dS} \\ F_{p_0} & F_{q_0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2S & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$$ یک جواب دارد

$$\left.\begin{aligned} x = x(t) + C_3 \\ t = 0 \Rightarrow x_0 = S \end{aligned}\right\} \qquad S = x(0) + C_3 \Rightarrow \boxed{C_3 = S - x(0)}$$

مابقی ثوابت نیز به همین ترتیب بدست می‌آیند.

مثال (۲): معادله دیفرانسیل زیر را با استفاده از منحنی اولیه داده شده حل کنید.

$$\begin{cases} x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy} - \left(\frac{du}{dx}\right)^2 \frac{du}{dy} - u = 0 \\ u(x, z) = 1 + x \end{cases}$$

حل-

$$px + qy - p^2 q - u = 0$$
$$\frac{dx}{dt} = F_p = x - 2pq \Rightarrow \frac{dx}{dt} = x - 2c_1c_2 \Rightarrow x - 2c_1c_2 = c_4 e^t$$

$$\frac{dy}{dt} = F_q = y - p^2 \Longrightarrow \frac{dy}{dt} = y - c_1^2 \Longrightarrow In(y - c_1^2) = t + Inc_3$$

$$\Longrightarrow y - c_1^2 = c_3 e^t$$

$$\frac{dp}{dt} = -F_x - pF_u = -p + p = 0 \Longrightarrow p = c_1$$

$$\frac{dq}{dt} = -F_y - qF_u = 0 \Longrightarrow q = c_2$$

$$\frac{du}{dt} = xp - 2p^2q + yq - qp^2 = xp + yq - 3pq^2$$

$$\Longrightarrow \frac{du}{dt} = c_1(c_4 e^t) + c_2 c_3 e^t \Longrightarrow \frac{du}{dt} = (c_1 c_4 + c_2 c_3)e^t$$

$$\frac{du_0}{ds} = p_0 \frac{dx_0}{ds} + q_0 \frac{dy_0}{ds}$$

$$\left.\begin{array}{l} Sp_0 + 2q_0 - P_0^2 q_0 - 1 - S = 0 \\ \dfrac{du_0}{ds} = p_0 \dfrac{dx_0}{ds} + q_0 \dfrac{dy_0}{ds} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} p_0 = 1 \\ q_0 = 1 \end{array}$$

شرط داشتن جواب را چک می‌کنیم.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{dx_0}{dS} & \frac{dy_0}{dS} \\ F_{p_0} & F_{q_0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S-2} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{1} \neq \mathbf{0} \Longrightarrow$$ یک جواب دارد

$$\boxed{c_1 = 1; c_2 = 1; c_3 = 1; c_5 = 2; c_4 = S - 2}$$

$$\begin{cases} x = (S-2)e^t + 2 \\ y = e^t + 1 \\ u = (S-1)e^t + 2 \end{cases}$$

۳.۲-تمرین

معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه اول غیرخطی زیر را حل کنید. منحنی مشخصه داده شده است.

1. $\left(u_x^2+u_y^2\right)x-u_x u=0$

$$u=2S^2 \qquad on\begin{cases}x=0\\ y=S\end{cases}$$

2. $u_x u_y=u$

$$u(0,y)=y^2$$

3. $u=u_x^2+u_y^2$

$$u=x^2 \quad on \quad 1+y+x=0$$

٤- معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم

معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم خطی را به طور عمومی می‌توان به صورت زیر نشان داد.

$$\boldsymbol{P\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+Q\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+R\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=S} \tag{۱-۴}$$

که در آن ضرایب P، Q و R توابعی از x و y هستند و S تابعی از x، y، u، $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$ است. برای طبقه‌بندی این دسته از معادلات، **P، Q و R را ضرایب ثابتی درنظر می‌گیریم که به ترتیب مقادیر a، b و c را اختیار کرده‌اند. از این رو معادله ٤-١ را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.**

$$\boldsymbol{a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=S} \tag{۲-۴}$$

حال Δ را به صورت $\Delta=\boldsymbol{b^2-4ac}$ تعریف می‌کنیم و طبقه‌بندی را بر اساس مثبت، منفی و یا صفر بودن Δ ارائه می‌دهیم.

معادله بیضوی $\Delta<0$

معادله سهموی $\Delta = \mathbf{0}$

معادله هذلولی $\Delta > 0$

که در مورد این طبقه‌بندی قبلا بحث شده و مثال‌هایی نیز در جلسه اول ارائه شده‌است.

۴.۱- معادلات دیفرانسیل جزئی خطی همگن مرتبه دو

این نوع معادلات در موارد بسیاری بکار برده می‌شوند. از این رو توجه خود را به این دسته از معادلات معطوف می‌کنیم. این دسته از معادلات حالت خاصی از معادله عمومی ۴-۲ می‌باشند که در آن **S=0** است.

$$\boldsymbol{a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0} \qquad (۴-۳)$$

معادله ۴-۳ تنها شامل مشتقات مرتبه دوم می‌باشد و یک معادله همگن نامیده می‌شود. در حالت کلی اگر $\boldsymbol{b \neq 0}$ باشد، معادله ۴-۳ با استفاده از روش تفکیک متغیرها حل نمی‌شود بنابراین باید از روش حل دالامبر و یا مشخصه استفاده کرد.

٤.١.١- بدست آوردن شکل کانونیک معادلات

تغییر متغیرهای لازم برای استفاده از روش دالامبر را می‌توان از این واقعیت بدست آورد که شیب $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}}$ منحنی $\boldsymbol{u = u(x, y)}$ در صفحه **x-y** در معادله مشخصه زیر صدق می‌کند.

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - b\frac{dy}{dx} + c = 0 \qquad (۴-۴)$$

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \lambda = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Longrightarrow y = \lambda_1 x + C_1 \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Longrightarrow y = \lambda_2 x + C_2 \end{cases}}$$

با جایگزینی **مقادیر a، b و c و انتگرال‌گیری دو رابطه به شکل زیر بدست می‌آیند.**

$$\begin{cases}\xi = y - \lambda_1 x \\ \eta = y - \lambda_2 x\end{cases}$$

به این ترتیب محورهای قدیمی **x** و **y** را به محورهای جدید ξ و η تبدیل می‌شوند که همان تغییر متغیرهای روش دالامبر یا مشخصه می‌باشند. سه حالت پیش می‌آید.

حالت اول- معادله ۴-۳ هذلولی بوده و بنابراین معادله ۴-۴ دارای دو ریشه متمایز λ_1 و λ_2 است. در این صورت حل همگن معادله ۴-۳ به صورت زیر است.

$$u = f(y - \lambda_1 x) + g(y - \lambda_2 x)$$

و فرم کانونیک معادله به شکل زیر خواهد بود.

$$u_{\eta\xi} = f(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

حالت دوم- معادله ۴-۳ سهموی بوده و بنابراین معادله ۴-۴ دارای یک ریشه مضاعف λ می‌باشد. در این صورت حل همگن معادله ۴-۳ به صورت زیر است.

$$u = f(y - \lambda x) + xg(y - \lambda x)$$

در این حالت

$$\xi = y - \lambda_1 x$$
$$\eta = \text{دلخواه}$$

فرم کانونیک معادله به یکی از دو شکل زیر در می‌آید.

$$u_{\eta\eta} = f(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$
$$u_{\xi\xi} = f(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

حالت سوم- معادله ۴-۳ بیضوی بوده و بنابراین معادله ۴-۴ دارای دو ریشه مختلط و مزدوج است.

$$u = f[y - (u + i\omega)x] + g[y - (u - i\omega)x]$$

که در آن $\lambda_1 = u + i\omega$ و $\lambda_1 = u - i\omega$ ریشه‌های مختلط معادلـه ۴-۴ مـی‌باشـند. بـرای بدسـت آوردن یک فرم کانونیک حقیقی، تبدیل متغیر دیگری انجام می‌دهیم.

$$\alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$$

$$\beta = \frac{1}{2}i(\eta - \xi)$$

می‌توان نشان داد که

$$u_{\xi\eta} = \frac{1}{4}\left(u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta}\right)$$

بنابراین فرم کانونیک معادله به صورت زیر می‌شود.

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = f\left(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta\right)$$

با درنظر گرفتن مثال‌های زیر دستورالعمل‌های بالا را بهتر می‌توان درک کرد.

مثال (۳): معادله

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

را به فرم کانونیک درآورید.

حل – با مقایسه این معادله با معادله ٤-۳ داریم

$$a = 1$$

$$b = 1$$

$$c = -2$$

بنابراین،

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{dy}{\mathbf{dx}} = 2 \ \Rightarrow \mathbf{y = 2x + \xi} \ \Rightarrow \mathbf{\xi = y - 2x}\\ \dfrac{dy}{\mathbf{dx}} = -1 \Rightarrow \ \mathbf{y = -x + \eta} \ \Rightarrow \ \mathbf{\eta = y + x}\end{cases}$$

با استفاده از تغییر متغیرهای بدست آمده،

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial \xi} + 2\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi}\left(-2\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(-2\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

با توجه به محورهای جدید:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -2$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = 1$$

بنابراین،

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \qquad (۱)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-2\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi}\left(-2\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(-2\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

با توجه به محورهای جدید:

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = 1$$

بنابراین،

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \tag{۲}$$

و به همین ترتیب،

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \tag{۳}$$

با جایگزینی (۱)، (۲) و (۳) در معادله اصلی فرم کانونی معادله بدست می‌آید.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\left(\left(4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) + \left(-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right) - 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) = 0$$

بعد از ساده سازی، فرم کانونی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$-9\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

مثال(٤) معادله

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

را به فرم کانونیک درآورید.

با مقایسه این معادله با معادله ٤-۳ داریم

$$a = 1$$

$$b = 2$$

$$c = 1$$

$$\frac{dy}{\mathrm{dx}} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} \Longrightarrow \frac{dy}{\mathrm{dx}} = 1 \Longrightarrow y = x + \xi \Longrightarrow \xi = \mathrm{y} - \mathrm{x}$$

و به صورت دلخواه،

$$\eta = y$$

بنابراین،

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -1$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi}\left(-\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(-\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

به همین ترتیب،

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

در معادله اصلی قرار می‌دهیم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$$

بنابراین، فرم کانونیک معادله به شکل زیر خواهد بود.

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$$

۴.۲- تمرین

معادله زیر را به فرم کانونیک درآورید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

ریاضیات مهندسی پیشرفته

جلسه چهارم

حل دالامبر برای معادله موج

فهرست مطالب

بسم الله الرحمن الرحیم

۱-چکیده مطالب:

برای حل معادله یک بعدی موج که یک معادله هذلولی می‌باشد، می‌توان از روش دالامبر استفاده کرد، در این روش با اعمال تغییر متغیر، فرم کانونیک معادله موج را بدست آورده و آن را حل می‌کنیم.

۲-اهداف:

آشنایی با روش حل معادله موج یک بعدی با استفاده از روش دالامبر.

۳-معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم هایپربولیک (هذلولی)

همانطور که در جلسات قبل اشاره شد، معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم خطی را می‌توان به سه دسته بیضوی، سهموی و هذلولی طبقه‌بندی کرد. معادله موج یک‌بعدی به صورت زیر می‌باشد.

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \qquad (۱-۳)$$

و یا

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (۲-۳)$$

که در آن $a = 1$، $b = 0$ و $c = c^2$ بنابراین طبق تعریف $\Delta > 0$ بنابراین، معادله موج یک معادله هذلولی و یا هایپربولیک است که برای حل آن می‌توان از روش دالامبر استفاده کرد.

۳.۱- روش دالامبر برای حل معادله موج همگن با دامنه بی‌نهایت

در این روش ابتدا باید فرم کانونیک معادله را با توجه به روشی که جلسه قبل گفته شد، بدست آورد و سپس معادله کانونیک را حل کرد. در این روش تغییر متغیرهایی به شکل زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\xi = x - ct \qquad (۳-۳)$$

$$\boldsymbol{\eta = x + ct} \tag{۴-۳}$$

این تغییر متغیرها به صورت زیر بدست آمده‌اند:

$$\Delta = B^2 - 4AC > 0$$

$$A\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - B\frac{dx}{dt} + C = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm C\begin{cases} x = ct + c_1 \\ x = -ct + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi = x - ct \\ \eta = x + ct \end{cases}$$

با استفاده از این تغییر متغیرها معادله موج را به فرم کانونیک درمی‌آوریم:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t} = c\frac{\partial u}{\partial \eta} - c\frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(c\frac{\partial u}{\partial \eta} - c\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \eta}\left(c\frac{\partial u}{\partial \eta} - c\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\cdot\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi}\left(c\frac{\partial u}{\partial \eta} - c\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 2c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi} + c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \tag{۴-۳}$$

و بطور مشابه،

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \tag{۵-۳}$$

با جایگذاری معادلات ۳-٤ و ۳-۵ در معادله ۳-۲ داریم،

$$c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 2c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi} + c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi} + c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$

بعد از خلاصه کردن، فرم کانونیک معادله یک‌بعدی موج به صورت زیر بدست خواهد آمد.

$$-4c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi} = 0 \tag{۵-۳}$$

حل معادله دیفرانسیل جزئی ۳-۵ بسیار ساده می‌باشد،

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)=0 \xrightarrow{\text{با انتگرال گیری نسبت به } \eta \text{ داریم}} \frac{\partial u}{\partial\xi}=f(\eta)$$

و این بار با انتگرال‌گیری بر حسب ξ داریم:

$$u(\xi,\eta)=\int f(\xi)d\xi+\psi(\eta)$$

$$\boxed{u(\xi,\eta)=\phi(\xi)+\psi(\eta)}$$

این جواب به جواب دالامبر معادله موج معروف است. توابع ψ و ϕ را می‌توان با توجه به شرایط داده شده مسأله تعیین کرد.

مثال(۱): معادله موج بی‌نهایت را با شرایط داده شده زیر حل کنید.

$$u_{tt}-c^2u_{xx}=0 \quad -\infty<x<+\infty$$

$$\begin{cases} u(x,0)=f(x) & \quad t\geq 0 \\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$$

حل-

از آنجا که شرایط داده شده تنها مربوط به زمان هستند، بنابراین شرایط کوشی، محسوب می‌شوند. حل دالامبر برای معادله موج به صورت زیر است:

$$u(\xi,\eta)=\phi(\xi)+\psi(\eta)$$

بنابراین،

$$u(x,t)=\phi(x-ct)+\psi(x+ct)$$

$$u(x,0)=f(x)\Longrightarrow f(x)=\phi(x)+\psi(x) \qquad (۶-۳)$$

$$u_t(x,0)=g(x)\Longrightarrow g(x)=-c\phi'(x)+c\psi'(x)$$

$$\int_{x_0}^{x} \boldsymbol{g(x)dx + k = -c\phi(x) + c\psi(x)} \qquad (۷-۳)$$

معادله ۳-۶ و ۳-۷ تشکیل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول می‌دهند که با حل آن داریم،

$$\begin{cases} \phi(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(x)dx - {}^{k}/_{2} \\ \psi(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(x)dx + {}^{k}/_{2} \end{cases}$$

بنابراین،

$$u = \frac{1}{2}f(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x-ct} g(x-ct)dx + \frac{1}{2}f(x+ct) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x+ct} g(x+ct)dx$$

$$\boxed{u = \frac{1}{2}[f(x-ct) + f(x+ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(x)dx} \qquad (۷-۳)$$

معادله ۳-۷ حل یک موج بینهایت با شرایط کوشی می‌باشد. در مثال (۲) حل یک موج بینهایت با شرایط کوشی را با استفاده از معادله ۳-۷ می‌بینیم.

مثال(۲):

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad -\infty < x < +\infty$$
$$u(x,0) = \sin x \qquad t \geq 0$$
$$\boldsymbol{u_t(x,0) = \cos x}$$

حل- با توجه به معادله ۳-۷ حل معادله فوق به صورت زیر می‌باشد.

$$\boldsymbol{u = \frac{1}{2}[\sin(x-ct) + \sin xt(t)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \cos x\, dx}$$

۳.۲- روش مشخصه برای حل معادله موج ناهمگن با دامنه بی‌نهایت

معادله موج ناهمگن با شرایط کوشی به صورت زیر می‌باشد.

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = E(x,t) \qquad -\infty < x < +\infty \tag{۸-۳}$$

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) & t \geq 0 \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

با تغییر متغیر **y=ct**، **c** را از معادله حذف می‌کنیم.

$$u_t = u_y y_t + u_x x_t = c u_y$$

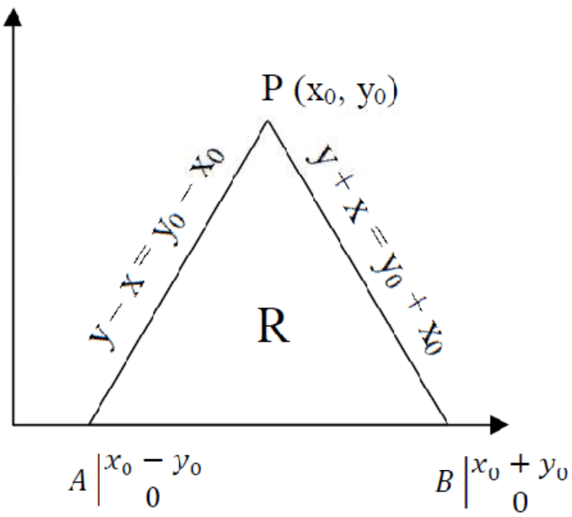
$$u_{tt} = \left(u_{yy} y_t + u_{yx} x_t\right) y_t + y_{tt}$$

$$u_{tt} = c^2 u_{yy} \Longrightarrow \begin{cases} u_{xx} - u_{yy} = -\dfrac{1}{c^2}\epsilon(x,t) \\ u(x,0) = f(x) \\ u_y(x,0) = \dfrac{P(x)}{c} = g(x) \end{cases}$$

محورهای مشخصه به صورت زیر بدست می‌آیند.

$$\boldsymbol{y = x + \eta}$$

$$\boldsymbol{y = -x + \xi}$$



معادله دیفرانسیل باید در منطقه **R** برقرار باشد.

$$u_{xx}-u_{yy}=-\frac{1}{c^2}\epsilon(x,y)=h(x,y)$$

روی **R** دوبار انتگرال می گیریم،

$$\underbrace{\iint(\boldsymbol{u_{xx}}-\boldsymbol{u_{yy}})\boldsymbol{dR}}_{\text{با استفاده از تابع این، انتگرال را باز می کنیم}}\quad=\iint \boldsymbol{h(x,y)dR} \tag{۳-۹}$$

تابع گرین:

$$\iint_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{u_{xx}}-\boldsymbol{u_{yy}})\boldsymbol{dR}=\oint_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{vdy}+\boldsymbol{udx}$$

بنابراین طرف اول معادله ۳-۹ به صورت زیر در می‌آید،

$$\oint_{c}(u_x d_y+u_y d_x)=\iint_{R}h(x,y)dR$$

که **C** همان منحنی **ABPA** می‌باشد.

$$\int_{AB}\underbrace{(u_x d_y+u_y d_x)}_{I}+\int_{BP_0}\underbrace{(u_x d_y+u_y d_x)}_{II}+\int_{P_0A}\underbrace{(u_x d_y+u_y d_x)}_{III}=\iint_{R}h(x,y)dR \tag{۳-۱۰}$$

انتگرال‌های سمت چپ معادله (۳-۹) که با اعداد **I**، **II** و **III** مشخص شده‌اند به صورت زیر باز می‌شوند.

$$I: \int_{AB} \left(u_x d_y + u_y d_x\right) = \int_{AB} u_y d_x = \int_{AB} u_y(x,0)dx = \int_{AB} g(x)dx$$

$$= \int_{x_0-y_0}^{x_0+y_0} g(x)dx$$

روی $\mathbf{BP_0}$ داریم $\boldsymbol{dy = -dx}$،

$$II: \int_{BP_0} \left(u_x d_y + u_y d_x\right) = \int_{BP_0} \left(-u_x d_x - u_y d_y\right) = -\int_{BP_0} \left(u_x d_x + u_y d_y\right)$$

$$= -\int_{BP_0} du = -u \Big|_{B}^{P_0} = -[u(x_0,y_0) - u(x_0+y_0,0)]$$

$$= -u(x_0,y_0) + f(x_0+y_0)$$

$$III: \int_{P_0A} \left(u_x d_y + u_y d_x\right) = \int_{P_0A} \left(u_x d_x + u_y d_y\right) == -\int_{P_0A} du = -u \Big|_{P_0}^{A}$$

$$= u(x_0-y_0,0) - u(x_0,y_0) = f(x_0-y_0) - u(x_0,y_0)$$

این سه انتگرال را در معادله ۳-۹ قرار می‌دهیم،

$$f(x_0,y_0) - u(x_0,y_0) + f(x_0+y_0) - u(x_0,y_0)$$

$$+ \int_{x_0-y_0}^{x_0+y_0} g(x)dx = \iint_R h(x,y)dR$$

$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{2}[f(x_0+y_0) + f(x_0-y_0)]$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{x_0-y_0}^{x_0+y_0} g(x)dx - \frac{1}{2}\iint_R h(x,y)dR$$

ابتدا انتگرال‌ها را محاسبه کرده و سپس x_0 و y_0 را به x و y تبدیل می‌کنیم. در نهایت تغییر متغیر $y=ct$ را نیز بر می‌گردانیم و جواب نهایی به صورت زیر می‌شود.

$$\boldsymbol{u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)]}$$
$$+\frac{1}{2}\int_{x-ct}^{x+ct} \mathbf{p(\tau)d\tau} + \frac{1}{2c}\iint_{y=0}^{y_0-y+x_0+y_0} \mathbf{\epsilon(x,y)dxdy}$$

مثال (۳):

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(x,y) = f(x) \quad on \quad x+ct = 0 \\ u(x,t) = g(x) \quad on \quad x-ct = 0 \end{cases}$$

حل-

حل معادله تغییری نمی کند:

$$u = \phi(x+ct) + \psi(x-ct)$$

دو شرط مرزی را برای به دست آوردن ϕ و ψ اعمال می کنیم:

$$x = -ct \quad , \quad u = f(x)$$

$$f(x) = \phi(0) + \psi(2x) \overset{x=0}{\Longrightarrow} \psi(0) + \phi(0) = f(0)$$

$$x = ct \quad , \quad u = g(x)$$

$$g(x) = \phi(2x) + \psi(0)$$

$$f(x) + g(x) = \phi(2x) + \psi(0) + \phi(0) + \psi(2x) \Longrightarrow \phi(2x) + \psi(2x)$$
$$= f(x) + g(x) - f(0)$$

$$u = \phi(x+ct) + \psi(x-ct)$$

$$\psi(2x) = f(x) - \phi(0)$$
$$\phi(2x) = g(x) - \psi(0)$$
$$u = g\left(\frac{x+ct}{2}\right) - \psi(0) + \left(f\left(\frac{x-ct}{2}\right) - \phi(0)\right)$$
$$= g\left(\frac{x+ct}{2}\right) + f\left(\frac{x-ct}{2}\right) - f(0)$$

۳.۳- حل معادله موج با شرایط نیمه‌بینهایت

$$c^2u_{xx} - u_{tt} = 0 \qquad x \geq 0 \;\;, \;\; t \geq 0$$
$$u(x,0) = f(x)$$
$$u_t(x,0) = g(x)$$
$$u(0,t) = 0$$

با استفاده از تغییر متغیر معادله را به فرم کانونیک در می‌آوریم.

$$\xi = x + ct$$
$$\eta = x - ct$$

فرم کانونیک مسأله و حل آن به صورت زیر خواهد بود.

$$u_{\xi\eta} = 0 \;\Longrightarrow u = \phi(\xi) + \psi(\eta) \;\Longrightarrow\; u = \phi(x+ct) + \psi(x-ct)$$

$$\phi(\xi) = \frac{1}{2}f(\xi) + \frac{1}{2c}\int_0^{\xi} g(\xi)d_{\xi} + k \qquad (۳-۱۱)$$

$$\psi(\eta) = \frac{1}{2}f(\eta) + \frac{1}{2c}\int_0^{\eta} g(\eta)d_{\eta} - k \qquad (۳-۱۲)$$

با این شرایط مرزی جدید و شرایط نیمه بینهایت داریم:

$\xi \geq 0$

$$\begin{cases} x > ct & \eta > 0 \\ x \leq ct & \eta \leq 0 \end{cases}$$

معادله ۳-۱۱ را با توجه به اینکه ۰≤ξ می‌توان بکار برد. اما چون η مثبت و منفی دارد، معادله ۳-۱۲ برای η های منفی قابل قبول نیست.

برای زمانی که x>ct، تمام شرایط حالت قبل برقرار می شود و می توان هم از رابطه ۳-۱۱ و هم از رابطه ۳-۱۲ استفاده کرد.

$$x > ct: \quad \left[u = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau)d\tau\right]$$

در محدوده $x < ct$ از شرط u(0,t)=0 برای به دست آوردن ψ استفاده می کنیم:

$$u(0,t) = 0$$

$$u = \phi(x+ct) + \psi(x-ct) \Longrightarrow \phi(ct) + \psi(-ct) = 0$$

$$-ct = \alpha$$

$$\phi(-\alpha) + \psi(\alpha) = 0 \Longrightarrow \psi(\alpha) = -\phi(\alpha)$$

$$\psi(\propto) = -\left[\frac{1}{2}f(-\alpha) + \frac{1}{2c}\int_{0}^{-\alpha} g(\xi)d\xi\right]$$

$$\left[u = \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{0}^{x+ct} g(\xi)d\xi - \frac{1}{2}f(ct-x) - \frac{1}{2c}\int_{0}^{-x+ct} g(\tau)d\tau\right]$$

مثال (۴):

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad\qquad x \geq 0 \ \ , \ \ t \geq 0$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$u_t(x,0) = g(x)$$

$$u_x(0,t) = 0$$

حل-

$$\phi(\xi) = \frac{1}{2} f(\xi) + \frac{1}{2c} \int_0^{\xi} g(\xi) d_{\xi}$$

$$\boldsymbol{\psi(\eta) = \frac{1}{2} f(\eta) + \frac{1}{2c} \int_0^{\eta} g(\eta) d_{\eta}}$$

$$\boldsymbol{x} > ct \ \Rightarrow \ \eta = x - ct > 0$$

در این حالت هر دو رابطه $\boldsymbol{\xi}$ و $\boldsymbol{\eta}$ برقرارند و شرط مرزی $\boldsymbol{u_x(0,t) = 0}$ در محدوده ما نیست.

$$\boldsymbol{x \leq ct \ \Rightarrow \ \eta = x - ct \leq 0}$$

تابع $\boldsymbol{\psi}$ دیگر به صورت بالا برقرار نخواهد بود.

$$u = \phi(\xi) + \psi(\eta) \ \Longrightarrow \ \ u = \phi(x + ct) + \psi(x - ct)$$

$$u_x = \phi_\xi \psi_x + \psi_\eta \eta_x = \phi_\xi + \psi_\eta = 0 \ \Rightarrow \ \frac{\partial \psi}{\partial(x - ct)} = -\frac{\partial \phi}{\partial(x + ct)}$$

$$\overset{x=0}{\Longrightarrow} \ \phi(ct) + \psi(-ct) = k$$

$$-ct = \alpha \ \Rightarrow \psi(\alpha) = \ \phi(-\alpha) - k$$

$$\psi(\alpha) = \frac{1}{2} f(-\alpha) + \frac{1}{2c} \int_0^{-\alpha} g(\tau) d\tau - k$$

$$u = \phi(x+ct) + \psi(x-ct)$$
$$= \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} g(\tau)d\tau + \frac{1}{2}f(ct-x)$$
$$+ \frac{1}{2c}\int_0^{ct-x} g(\tau)d\tau$$

۳.۴-تمرین

معادله زیر را با شرایط داده شده حل کنید.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad x \geq 0 \quad , \quad t \geq 0$$
$$u(x,0) = f(x)$$
$$u_t(x,0) = g(x)$$
$$u_x(0,t) = h(t)$$

معادله زیر را با استفاده از روش مشخصه حل کنید.

$$4u_{tt} = 25u_{xx}$$
$$u(x,0) = sin2x$$
$$u_t(x,0) = 0$$

ریاضیات مهندسی پیشرفته

جلسه پنجم

توابع متعامد و مسأله اشتروم-لیویل

فهرست مطالب

بسم الله الرحمن الرحیم

۱-چکیده مطالب:

توابع سینوس، کسینوس، بسل و لژاندر در مباحث مهندسی شیمی ظاهر می‌شوند و بحث تعامد این توابع و بسط توابع مختلف بر حسب این توابع متعامد در حل معادلات دیفرانسیل کاربرد اهمیت زیادی دارد. در این جلسه با این توابع و بحث تعامد آن‌ها و نحوه بسط توابع بر حسب آن‌ها آشنا می‌شویم.

۲-اهداف:

آشنایی با مفاهیم تعامد و مجموعه توابع متعامد و آشنایی با مسأله اشتروم-لیویل و استفاده از این مفاهیم به عنوان اصولی کمکی در حل معادلات دیفرانسیل

۳-تعامد

با بحث تعامد در مورد بردارها آشنا هستیم، دو بردار را زمانی متعامد گویند که ضرب نقطه‌ای آن دو بردار صفر شود.

$$\vec{X} \cdot \vec{Y} = 0 \qquad (۱-۳)$$

اگر مؤلفه‌های دو بردار در فضای سه بعدی، x_1، x_2، x_3 و y_1، y_2 و y_3 باشند، آنگاه:

$$\vec{X} \cdot \vec{Y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0 \qquad (۲-۳)$$

این موضوع برای بردارهایی با بیش از سه مؤلفه نیز صادق است. یعنی در یک فضای **n** بعدی، دو بردار **X** و **Y** به شرط زیر بر هم عمودند.

$$\vec{X}\cdot\vec{Y}=\sum_{i=1}^{N}x_i y_i \qquad (۳-۳)$$

۳.۱-مجموعه توابع متعامد

فرض می‌کنیم تابعی مانند **F(x)** مانند برداری است که بی‌نهایت مؤلفه دارد و مقدار هر مؤلفه آن با قرار دادن مقدار $a \le x \le b$ در تابع **F(x)**، بدست می‌آید. اگر تابع **G(x)** را نیز به همین صورت تعریف کنیم، بنابر آنچه که در بحث تعامد گفته شد، دو تابع **F(x)** و **G(x)** در بازه **[a,b]** متعامدند اگر:

$$\int_a^b F(x)G(x)dx=0 \qquad (۴-۳)$$

از آنجا که فرض کردیم دو تابع **F** و **G** دارای بی‌نهایت مؤلفه می‌باشند علامت جمع به انتگرال تبدیل شده است.

اگر در بازه **[a,b]** مجموعه‌ای از توابع به صورت زیر داشته باشیم:

$$\phi=\{\phi_1(x),\phi_2(x),\dots,\phi_n(x)\}=\{\phi_k(x),k=1,2,3,\dots,n\} \qquad (۵-۳)$$

این مجموعه را، مجموعه‌ای از توابع متعامد می‌نامیم اگر برای $m \neq n$ داشته باشیم:

$$\int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)dx=0 \qquad (۶-۳)$$

مثال (۱): آیا مجموعه زیر، مجوعه‌ای از توابع متعامد است؟

$$\phi=\left\{1,x,\frac{3x^2}{2}-\frac{1}{2},\frac{5x^3}{2}-\frac{3x}{2}\right\}, \qquad -1\le x\le 1$$

حل: برای اثبات تعامد باید رابطه ۳-۴ برقرار باشد.

$$\int_{-1}^{1}(1)xdx=\frac{1}{2}\mathrm{x}^2\Big]_{-1}^{1}=0$$

$$\int_{-1}^{1}(1)\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{1}{2}\right)dx=\left[\frac{1}{2}\mathrm{x}^3-\frac{1}{2}\mathrm{x}\right]_{-1}^{1}=0$$

$$\int_{-1}^{1}(\mathbf{1})\left(\frac{5x^3}{2}-\frac{3x}{2}\right)dx=\left[\frac{5}{8}\mathrm{x}^4-\frac{3}{4}\mathrm{x}^2\right]_{-1}^{1}\ =0$$

$$\int_{-1}^{1}(\mathbf{x})\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{1}{2}\right)dx=0$$

$$\int_{-1}^{1}(\mathbf{x})\left(\frac{5x^3}{2}-\frac{3x}{2}\right)dx=0$$

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5x^3}{2}-\frac{3x}{2}\right)dx=0$$

بنابراین، مجموعه فوق، مجموعه‌ای از توابع متعامد می‌باشد.

۳.۲-مجموعه توابع اورتونرمال

برای باز کردن این بحث بار دیگر به سراغ مفاهیم برداری می‌رویم. بردار **V** را بردار نرمال می‌گوییم اگر:

$$\vec{V}\cdot\vec{V}=\mathbf{V}^2=1 \qquad (۷-۳)$$

در مورد تابع **F(x)** هم می‌توان گفت، اگر داشته باشیم:

$$\int_{a}^{\mathbf{b}}\{\mathbf{F(x)}\}^2\mathbf{dx}=1 \qquad (۸-۳)$$

تابع **F(x)** در بازه **[a,b]**، یک تابع نرمال است.

حال اگر مجموعه توابع ۳-۵ را طوری درنظر بگیریم که هر عضو این مجموعه یک تابع نرمال باشد و نسبت به تمام اعضای دیگر متعامد باشد، مجموعه این توابع را مجموعه‌ای از توابع اورتونرمال می‌گوییم. بنابراین شرط اینکه یک مجموعه، مجموعه‌ای از توابع اورتونرمال باشد، به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)dx = 0 & , \quad m \neq n \\ \int_a^b \{\phi_m(x)\}^2 dx = 1 & , \quad m = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \tag{۹-۳}$$

اگر از دلتای کرونکر استفاده شود، می‌توان دو شرط رابطه ۳-۹ را درغالب یک معادله خلاصه نشان داد.

$$\int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)dx = \delta_{mn} \tag{۱۰-۳}$$

که در آن،

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases} \tag{۱۱-۳}$$

۳.۳-تعامد نسبت به تابع وزنی

برخی از توابع در معادلات ۳-۶ و یا ۳-۹ صدق نمی‌کنند. اما اگر تابعی مانند $\omega(x)$ در حاصلضرب آن‌ها ضرب شود، در آن صورت در معادله ۳-۶ صدق می‌کنند، یعنی:

$$\int_a^b \omega(x)\phi_m(x)\phi_n(x)dx = 0 \tag{۱۲-۳}$$

به تابع $\omega(x)$، تابع دانسیته و یا تابع وزن می‌گویند. در این حالت توابع $\phi_m(x)$ و $\phi_n(x)$ با تابع وزنی $\omega(x)$ نسبت به هم متعامد هستند. اگر توابع فوق با تابع وزنی $\omega(x) \geq 0$، اورتونرمال باشند، خواهیم داشت:

$$\int_a^b \omega(x)\phi_m(x)\phi_n(x)dx = \delta_{mn} \tag{۱۳-۳}$$

در معادله ۳-۱۳ اگر فرض کنیم که $m = n$ باشد، آنگاه:

$$\int_a^b \left\{\sqrt{\omega(x)}\phi_m(x)\right\}^2 dx = 1 \tag{۱۴-۳}$$

بنابراین توابع $\sqrt{\omega(x)}\phi_m(x)$ **در بازه** [a,b]**، توابعی اورتونرمال هستند.**

۳.۴-تعامد توابع

توابع سینوس، کسینوس، بسل و لژاندر و بحث تعامد آنها در مباحث مهندسی شیمی اهمیت زیادی دارد، بنابراین در این قسمت در مورد آنها بحث می‌شود.

۳.٤.۱- تعامد توابع سینوس و کسینوس

توابع پریودیک $\sin\frac{m\pi x}{L}$ و $\cos\frac{m\pi x}{L}$ در محدوده $-L \le x \le L$ متعامد هستند.

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ L & m = n \end{cases} \qquad (۱۵\text{-}۳)$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ L & m = n \end{cases} \qquad (۱۶\text{-}۳)$$

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx = 0 \qquad (۱۷\text{-}۳)$$

۳.٤.۲- تعامد توابع بسل

برای معادله بسل که به صورت زیر می‌باشد، دو جواب به صورت سری در می‌آید. یکی از این سری‌ها $J_n(x)$ و دیگری $Y_n(x)$ می‌باشد.

معادله بسل

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \quad , \quad n > 0$$

جواب عمومی معادله به صورت زیر می‌باشد.

$$y = c_1J_n(x) + c_2Y_n(x) \qquad (۱۸\text{-}۳)$$

به $J_n(x)$ تابع بسل نوع اول مرتبه n و به $Y_n(x)$ تابع بسل نوع دوم مرتبه n، می گویند. که به صورت سری‌های زیر بیان می‌شوند.

$$J_n(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^2\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}}{r!\,\Gamma(n+r+1)} \qquad (۳-۱۹)$$

$$Y_n(x)=\begin{cases}\dfrac{J_n(x)\cos n\pi-J_{-n}(x)}{\sin n\pi} & n\neq 0,1,2,3,\ldots\\ \lim\limits_{p\to n}\dfrac{J_p(x)\cos p\pi-J_{-p}(x)}{\sin p\pi} & n=1,2,3,\ldots\end{cases} \qquad (۳-۲۰)$$

در معادله ۳-۱۹ داریم،

تابع گاما

$$\Gamma(\mathrm{n})=\int_0^{\infty}\mathrm{x}^{\mathrm{n}-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\mathrm{dx}$$

و در معادله ۳-۲۰،

$$J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x) \qquad (۳-۲۱)$$

اگر λ و μ دو ثابت مختلف باشند، برای توابع بسل می‌توان نشان داد:

$$\int_0^1 \mathrm{x}J_n(\lambda x)J_n(\mu x)\mathrm{dx}=0 \qquad (۳-۲۲)$$

رابطه ۳-۲۲ به این معنی است که دو تابع $J_n(\lambda x)$ و $J_n(\mu x)$ با تابع وزنی x در فاصله [۰،۱] متعامد می‌باشند.

۳.٤.۳- تعامد توابع لژاندر

چند جمله‌ای نوع اول درجه n لژاندر و چند جمله‌ای نوع دوم درجه n لژاندر به ترتیب در معادلات ۳-۲۳ تا ۳-۲۵ آورده شده‌اند.

$$P_{\mathrm{n}}(\mathrm{x})=\frac{1}{2^{\mathrm{n}}\mathrm{n}!}\frac{\mathrm{d}^{\mathrm{n}}}{\mathrm{dx}^{\mathrm{n}}}(\mathrm{x}^2-1)^{\mathrm{n}} \qquad (۳-۲۳)$$

$$Q_{\mathrm{n}}(\mathrm{x})=\frac{(-1)^{\frac{\mathrm{n}}{2}}2^{\mathrm{n}}\left[\left(\frac{\mathrm{n}}{2}\right)!\right]^2}{\mathrm{n}!}\left\{\mathrm{x}-\frac{(\mathrm{n}-1)(\mathrm{n}+2)}{3!}\mathrm{x}^3+\frac{(\mathrm{n}-1)(\mathrm{n}-3)(\mathrm{n}+2)(\mathrm{n}+4)}{5!}\mathrm{x}^5-\cdots\right\} \qquad (۳-۲۴)$$

$$Q_n(x) = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}} 2^{n-1} \left[\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right]^2}{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times n} \left\{1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!} x^4 - \cdots \right\} \qquad (۲۵-۳)$$

زمانیکه n زوج باشد از رابطه ۳-۲۴ و زمانیکه n فرد است از رابطه ۳-۲۵ استفاده می‌شود.

برای توابع لژاندر داریم:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1} & m = n \end{cases} \qquad (۲۶-۳)$$

رابطه ۳-۲۶ نشان می‌دهد که چند جمله‌های های لژاندر در فاصله ۱- تا ۱، متعامد هستند.

۳.۵-بسط توابع متعامد

هر تابع دلخواه f(x) را در محدوده $a < x < b$ می‌توان بر حسب توابع متعامد بسط داد.

$$f(x) = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x) \qquad (۲۷-۳)$$

که ضرایب بسط یعنی a_n عبارتست از:

$$a_n = \frac{\int_a^b f(x)\, \phi_n(x) dx}{\int_a^b \phi_n^2(x) dx} \qquad (۲۸-۳)$$

هرگاه سری توابع نسبت به یک تابع وزنی متعامد باشند، آنگاه ضرایب سری به صورت زیر خواهد بود.

$$a_n = \frac{\int_a^b f(x)\ .r(x)\phi_n(x) dx}{\int_a^b \omega(x)\phi_n^2(x)\, dx} \qquad (۲۹-۳)$$

بسط تابع f(x) بر حسب توابع سینوس و کسینوس، سری فوریه می‌شود.

در صورتیکه تابع f(x) دارای شرایط دریکله باشد، می‌توان در هر نقطه در فاصله $1 \geq x \geq 0$ آن را به صورت سری‌هایی از توابع بسل به شکل زیر بسط داد.

$$f(x) = A_1 J_n(\lambda_1 x) + A_2 J_n(\lambda_2 x) + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_n(\lambda_k x)$$

اگر مثلا در مختصات استوانه‌ای تابعی مانند **F(r)** را بر حسب جملات بسل بسط دهیم:

$$f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_n(\lambda_k r)$$

همانطور که از قبل می‌دانیم، توابع بسل نسبت به تابع وزنی **x** یا در این مورد **r**، نسبت به هم متعامدند، بنابراین ضرایب سری به صورت زیر خواهند بود.

$$A_k = \frac{\int_0^R r f(r).J_n(\lambda_k r) dr}{\int_a^b r J_n^2(\lambda_k r)\, dx}$$

اگر تابع **F(x)** در $-1 \le x \le 1$ دارای شرایط دریکله باشد، می‌توان آن را به صورت یک سری بر حسب چند جمله‌ای‌های لژاندر بسط داد:

$$f(x) = A_0 P_0(x) + A_1 P_1(x) + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} A_k P_k(x)$$

و ثابت بسط فوق به صورت زیر خواهد بود.

$$A_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_k(x) dx$$

مثال(۲): تابع زیر را بر حسب جملات لژاندر بسط دهید.

$$F(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & -1 < x < 0 \end{cases}$$

حل-

$$A_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx$$
$$= \left[\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{0}(0)P_n(x)dx + \frac{2n+1}{2}\int_{0}^{1}(1)P_n(x)dx\right]$$
$$A_n = \frac{2n+1}{2}\int_{0}^{1} P_n(x)dx$$
$$A_0 = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} P_0(x)dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{1}(1)dx = \frac{1}{2}$$
$$A_1 = \frac{3}{2}\int_{0}^{1} P_1(x)dx = \frac{3}{2}\int_{0}^{1} x\,dx = \frac{3}{4}$$
$$A_2 = \frac{5}{2}\int_{0}^{1} P_2(x)dx = \frac{5}{2}\int_{0}^{1}\left(\frac{3x^2-1}{2}\right)dx = 0$$
$$A_3 = -\frac{7}{16}$$
$$A_4 = 0$$
$$A_5 = \frac{11}{32}$$
$$\vdots$$

بنابراین،

$$F(x) = \frac{1}{2}P_0(x) + \frac{3}{4}P_1(x) - \frac{7}{16}P_3(x) + \frac{11}{32}P_5(x) + \cdots$$

٤- مسأله اشتورم-لیویل

۴.۱- مسائل مقدار اولیه و مسائل مقدار مرزی

اگر در معادله دیفرانسیل، مقدار تابع در زمان صفر مشخص باشد، به آن معادله مقدار اولیه (**IVP**) گفته مـی‌شـود.

این نوع معادلات در سیستم‌های غیر یکنواخت و توده‌ای حاصل می‌شوند.

معادلات دیفرانسیلی که دارای شرایط مشخص در مرزهای سیستم باشند، مسائل شرایط مرزی (**BVP**) نامیده می شوند. انواع شرایط مرزی برای معادلات در جلسه نخست توضیح داده شده است.

۴.۲- سیستم‌های اشتورم-لیویل

مسائل مقدار مرزی که به صورت زیر نشان داده می‌شوند،

$$\begin{cases} \dfrac{d}{\mathrm{dx}}\left[\mathrm{p(x)}\dfrac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\right] + [\mathrm{q(x)} + \lambda\omega(\mathrm{x})]\mathrm{y} = 0 & , a \le \mathrm{x} \le b \\ \alpha_1\mathrm{y}(a) + \alpha_2\mathrm{y}'(a) = 0 & \beta_1\mathrm{y}(b) + \beta_2\mathrm{y}'(b) = 0 \end{cases} \tag{۳-۳۰}$$

با فرض α_1، α_2، β_1 و β_2 مقادیر ثابت و معلوم، $\mathbf{p(x)}$، $\mathbf{q(x)}$ و $\boldsymbol{\omega}\mathbf{(x)}$ توابعی مشتق‌پذیر و معلوم از **x**، λ پارامتری مستقل از **x** و نامعلوم، مسأله اشتورم-لیویل یا سیستم **SL** نامیده می‌شوند.

برای معادلات **SL** به ازای همه مقادیر λ معادله وجود دارد ولی امکان دارد به ازای همه مقادیر λ، معادله جواب نداشته باشد و یا به ازای مقادیر خاصی از پارامتر λ معادله جواب داشته باشد. این مقادیر خاص λ را مقادیر ویژه و یا مقادیر مشخصه می‌نامیم.

به جواب‌هایی که به ازای مقادیر ویژه حاصل می‌شوند، توابع ویژه یا توابع مشخصه می گویند. به ازای هر مقدار ویژه ($\boldsymbol{\lambda}_i$) یک تابع ویژه ($y_i(x)$) حاصل می‌شود و جواب کلی مسأله مجموع ترکیب خطی توابع ویژه خواهد شد.

$$\lambda_1 \rightarrow y_1(x)$$
$$\lambda_2 \rightarrow y_2(x)$$
$$\vdots$$
$$\lambda_m \rightarrow y_m(x)$$

$$Y = \{y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)\}$$

سری جواب‌های حاصل از یک مسأله **SL**، که همان مجموعه توابع ویژه حاصله است، نسبت به تابع وزنی $\omega(x)$، یک سری متعامد می‌باشد. بنابراین یکی از روش‌های اثبات تعامد دو یا چند تابع نسبت به هم علاوه بر تعریف تعامد، این است که ثابت کنیم، آن توابع جواب یک مسأله **SL** می‌باشد. نکته دیگر این که، مقادیر ویژه یک سیستم اشتورم–لیویل، حقیقی هستند.

مثال (۳): نشان دهید که معادله دیفرانسیل زیر با شرایط داده شده یک مسأله اشتورم–لیویل است. مقادیر ویژه آن را یافته و نشان دهید توابع ویژه در فاصله $0 < x < 1$ متعامد هستند.

$$y'' + \lambda y = 0 \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y(1) = 0$$

حل– در مقایسه معادله دیفرانسیل بالا با معادله ۳–۳۰ داریم:

$$p(x) = 1 \;,\; q(x) = 0 \;,\; \omega(x) = 1 \;,\; a = 0 \;,\; b = 1 \;,\; \alpha_1 = 1 \;,\; \alpha_2 = 0 \;,\; \beta_1 = 1 \;,\; \beta_2 = 0$$

بنابراین سیستم فوق یک سیستم **SL** می‌باشد. اگر $\lambda > 0$ آنگاه جواب معادله به صورت زیر می‌شود.

$$y = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$$

با اعمال شرط مرزی $y(1) = 0$ داریم،

$$B\sin\sqrt{\lambda} = 0$$

B نمی‌تواند صفر باشد، چون در آن صورت جواب کلی معادله صفر می‌شود، بنابراین باید،

$$\sin\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = n\pi \Rightarrow \lambda = n^2\pi^2 \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

بنابراین مقادیر ویژه معادله عبارتند از $n^2\pi^2$ و توابع ویژه به صورت زیر خواهند بود.

$$B_1\sin\pi x \quad , \quad B_2\sin 2\pi x \quad , \quad B_3\sin 3\pi x \quad , \dots$$

از آنجا که این توابع جواب‌های یک مسأله **SL** هستند، می‌توان نتیجه گرفت که مجموعه‌ای از توابع متعامد را تشکیل می‌دهند.

مثال (۴): از مجموعه جواب‌های مثال (۲) یک مجموعه اورتونرمال بسازید.

حل- طبق تعریف اورتونرمال بودن داریم:

$$\int_0^1 (B_n \sin n\pi x)^2 \mathrm{dx} = 1$$

$$B_n^2 \int_0^1 \sin^2 n\pi x \, \mathrm{dx} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{B_n^2}{2} \int_0^1 (1 - \cos 2n\pi x) \mathrm{dx} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{B_n^2}{2} = 1$$

$$B_n = \sqrt{2}$$

در نتیجه مجموعه اورتونرمال توابع به صورت زیر باید باشد:

$$\sqrt{2}\sin \pi x \quad , \quad \sqrt{2}\sin 2\pi x \quad , \quad \sqrt{2}\sin 3\pi x \quad , \ldots$$

۵-تمرینات

۱) تابع $F(x) = 1$ را به صورت بسط $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{A_n J_0(\lambda_n x)}$ در بازه $0 < x < 1$ بدست آورید. در صورتیکه λ_n ریشه‌های مثبت معادله $J_0(\mathrm{x}) = 0$ باشد.

۲) معادله دیفرانسیل مقدار ویژه زیر را با شرایط داده شده حل کنید و سپس تابع $f(x)=x^2$ را بر حسب توابع ویژه بدست آمده بسط دهید.

$$y'' + \lambda^2 \mathrm{y} = 0 \quad , \quad \mathrm{y(0)} = 0 \quad , \quad 3\mathrm{y(1)} + \mathrm{y'(1)} = 0$$

۳) تابع زیر را در بازه $-1 \le x \le 1$ بر حسب چند جمله‌ای‌های لژاندر بسط دهید.

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 10$$

ریاضیات مهندسی پیشرفته

جلسه ششم

حل معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم پارابولیک همگن و ناهمگن

فهرست مطالب

بسم الله الرحمن الرحیم

۱-چکیده مطالب

برای حل معادلات پارابولیک همگن می‌توان با توجه به شرایط داده شده از روش جداسازی متغیرها استفاده کرد. چه زمانی که شرایط همگن باشند و چه زمانی که شرایط ناهمگن باشند. اگر خود معادله ناهمگن باشد می‌توان از بسط توابع ویژه و یا تغییر متغیر پایا و ناپایا مسأله را ساده و سپس حل کرد.

۲-اهداف:

آشنایی با روش جداسازی متغیرها، روش بسط توابع ویژه و تغییر متغیر تعادلی و ناپایا برای حل معادلات پارابولیک همگن و ناهمگن.

۳-روش جداسازی متغیرها

زمانیکه متغیر وابسته **u** با یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی به دو متغیر مستقل مانند **x** و **t** مربوط شده باشد. جواب معادله به صورت **u(x,t)** خواهد بود. اگر بتوانیم این جواب را به صورت حاصلضرب دو تابع **F** و **G** تجزیه کنیم:

$$\boldsymbol{u(x,t) = F(x) \cdot G(t)} \qquad (۱-۳)$$

به طوریکه تابع **F** تنها تابعی از **x** و تابع **G** تنها تابعی از **t** باشد. یعنی وابستگی تابع به **x** را مستقل از وابستگی آن به **t** درنظر بگیریم. آنگاه با قرار دادن معادله ۳-۱ در معادله دیفرانسیل جزئی، می‌توانیم معادله را به تساوی بین تابعی از **x** و تابعی از **t** درآوریم که تنها با برابر قرار دادن هر یک از دو طرف معادله با یک مقدار ثابت یکسان، صادق خواهد بود.

به این روش، جداسازی متغیرها گفته می‌شود که با استفاده از آن معادله دیفرانسیل جزئی را به دو معادله دیفرانسیل معمولی که هر یک دارای یک پارامتر نامعلوم است، تبدیل می کنیم.

۳.۱- شرایط استفاده از روش جداسازی متغیرها

سه شرط کلی برای استفاده از روش جداسازی متغیرها وجود دارد.

۱) مسأله‌ای که با این روش حل می‌شود باید دارای حداقل یک بعد مشخص در سیستم باشد. مثلا در مسأله انتقال حرارت در یک میله باید طول آن مشخص و محدود باشد. بنابراین برای اجسام یا سیستم های نیمه‌بینهایت نمی‌توان از این روش استفاده کرد.

۲) فقط معادلات دیفرانسیل جزئی همگن را می‌توان با این روش حل کرد. مسائل ناهمگن را ابتدا باید به روشی به مسأله همگن تبدیل کرد و سپس برای حل آن از این روش استفاده کرد.

۳) تنها معادلات دیفرانسیل جزئی که دارای حداکثر یک شرط ناهمگن هستند را می‌توان از این روش حل کرد.

۳.۲- حل معادلات پارابولیک همگن با شرایط مرزی همگن

معادله هدایت گرمایی یک بعدی و معادله نفوذ یک بعدی که در بحث پدیده‌های انتقال در مهندسی شیمی اهمیت دارند، جزء معادلات دیفرانسیل جزئی پارابولیک می‌باشند.

به عنوان مثال در مسأله انتقال حرارت در یک میله بلند به طول **L** که دمای اولیه آن به صورت تابعی از طول **$\phi(x)$** می‌باشد و در زمان **t** دمای دو انتهای آن به صفر می‌رسد و ثابت می‌ماند، برای بدست آوردن توزیع دما در طول میله بر حسب زمان باید معادله دیفرانسیل زیر را با شرایط مرزی و اولیه زیر حل کنیم.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}^2} \qquad (۲-۳)$$

شرایط مرزی مسأله به صورت زیر است.

$$T(0, t) = 0 \qquad (۳-۳)$$

$$T(L, t) = 0 \qquad (۴-۳)$$

و شرط اولیه به صورت زیر می‌باشد.

$$T(x, 0) = \phi(x) \qquad (۵-۳)$$

برای حل مسأله به روش جداسازی متغیرها فرض می‌کنیم که **T(x,t)** به صورت حاصلضرب دو تابع مستقل می باشد.

$$T(x, t) = F(x)G(t) \qquad (۶-۳)$$

بنابراین مشتقات معادله ۳-۲ به صورت زیر می‌شوند.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = F(x) \cdot \frac{dG}{dt} \qquad (۷-۳)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = G(t) \cdot \frac{d^2 F}{dx^2} \qquad (۸-۳)$$

معادلات ۳-۷ و ۳-۸ را در معادله ۳-۲ قرار می‌دهیم.

$$F(x) \cdot \frac{dG}{dt} = \alpha \cdot G(t) \cdot \frac{d^2 F}{dx^2} \qquad (۹-۳)$$

دو متغیر را جدا می‌کنیم.

$$\frac{1}{\alpha\, G} \cdot \frac{dG}{dt} = \frac{1}{F} \cdot \frac{d^2 F}{dx^2} = \gamma \qquad (۱۰-۳)$$

همانطور که دیده می‌شود در معادله ۳-۱۰، هر طرف معادله تنها وابسته به یک متغیر می‌باشد. با توجه به برابری دو طرف معادله، باید هرکدام برابر با یک ثابت یکسان (γ) باشند، که این ثابت یکسان می‌تواند صفر، منفی یا مثبت باشد.

شرایط مرزی را نیز باید با معادله تفکیک شده تطبیق دهیم:

$$T(0,t) = F(0)G(t) = 0 \tag{۳-۱۱}$$

در معادله ۳-۱۱، $G(t)$ نمی‌تواند صفر باشد، زیرا در این صورت جواب کلی مسأله صفر می‌شود. بنابراین:

$$F(0) = 0 \tag{۳-۱۲}$$

شرط مرزی دیگر به صورت زیر است:

$$T(L,t) = F(L)G(t) = 0 \tag{۳-۱۳}$$

با همان استدلال قبلی:

$$F(L) = 0 \tag{۳-۱۴}$$

ثابت γ را ثابت تفکیک می‌نامیم و همانطور که قبلا اشاره شد، این ثابت می‌تواند صفر، مثبت و یا منفی باشد که هر سه حالت را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

حالت ۱) $\gamma = 0$

$$\frac{1}{F}\cdot\frac{d^2F}{dx^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad F(x) = c_1 + c_2x \tag{۳-۱۵}$$

$$F(0) = c_1 = 0 \tag{۳-۱۶}$$

$$F(L) = c_2L = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0 \tag{۳-۱۷}$$

این جواب قابل قبول نیست، زیرا در این صورت $f(x)$ صفر می‌شود و جـواب کلـی مسـأله $T(x,t)=0$ خواهـد بود. بنابراین γ نمی‌تواند صفر باشد.

حالت ۲) $\gamma > 0$

در این حالت ثابت تفکیک را برابر با λ^2 در نظر می گیریم.

$$\frac{1}{\alpha\, G}\cdot\frac{dG}{dt}=\frac{1}{F}\cdot\frac{d^2F}{dx^2}=+\lambda^2 \tag{۱۸-۳}$$

$$\frac{dG}{dt}-\alpha\,\lambda^2 G=0 \quad\Longrightarrow\quad G(t)=c_3 e^{\alpha\lambda^2 t} \tag{۱۹-۳}$$

$$\frac{d^2F}{dx^2}-\lambda^2 F=0 \quad\Longrightarrow\quad F(x)=c_4\sinh\lambda x+c_5\cosh\lambda x \tag{۲۰-۳}$$

شرایط مرزی را در معادله ۳-۲۰ قرار می‌دهیم.

$$F(0)=0 \quad\Longrightarrow\quad c_5=0 \tag{۲۱-۳}$$

$$F(L)=0 \quad\Longrightarrow\quad c_4\sinh\lambda L=0 \quad\Longrightarrow\quad c_4=0 \tag{۲۲-۳}$$

بنابراین، جواب کلی مسأله $T(x,t)=0$ خواهد بود که قابل قبول نیست.

حالت ۳) $\gamma < 0$

ثابت تفکیک را برابر با $-\lambda^2$ در نظر گرفته می‌شود.

$$\frac{1}{\alpha\, G}\cdot\frac{dG}{dt}=\frac{1}{F}\cdot\frac{d^2F}{dx^2}=-\lambda^2 \tag{۲۳-۳}$$

$$\frac{dG}{dt}+\alpha\,\lambda^2 G=0 \quad\Longrightarrow\quad G(t)=c_6 e^{-\alpha\lambda^2 t} \tag{۲۴-۳}$$

$$\frac{d^2F}{dx^2}+\lambda^2 F=0 \quad\Longrightarrow\quad F(x)=c_7\cos\lambda x+c_8\sin\lambda x \tag{۲۵-۳}$$

$$F(0)=0 \quad\Longrightarrow\quad c_7=0 \tag{۲۶-۳}$$

$$F(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin \lambda L = 0 \tag{۳-۲۷}$$

با توجه به حل معادله ۳-۲۷،

$$\lambda_n L = n\pi \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{L} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{۳-۲۸}$$

و جواب نهایی به صورت زیر خواهد بود.

$$T(x,t) = b_n e^{-\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{L} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{۳-۲۹}$$

جواب مسأله مجموع جواب‌های فوق می‌باشد.

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{L}$$

با توجه به شرط اولیه، معادله ۳-۵، ثابت b_n بدست می‌آید.

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \tag{۳-۳۰}$$

با توجه به اینکه معادله ۳-۳۰ در حقیقت بسط فوریه تابع $\phi(x)$ می‌باشد، می‌توان ثابت b_n را به صورت زیر بدست آورد.

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \phi(x) \sin\frac{n\pi x}{L} dx \tag{۳-۳۱}$$

بنابراین، جواب مسأله، یعنی معادله ۳-۳۰ به ازای $0 < \gamma$، بدست آمد. در مسأله فوق مقدار ویژه برابر با $\frac{n\pi}{L}$ و تابع ویژه برابر با $\sin\frac{n\pi x}{L}$ بود. در جدول ۳-۱ برای معادله انتقال یک‌بعدی ناپایدار با توجه به شرایط مرزی موجود، مقادیر ویژه و توابع ویژه ارائه شده‌اند.

مثال (۱): با استفاده از روش جداسازی متغیرها، معادله زیر را با شرایط مرزی و اولیه زیر حل کنید.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 3\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad , \quad t > 0; 0 < x < 2 \tag{۳-۳۲}$$

$$\mathbf{T(0,t)=0} \tag{۳۳-۳}$$

$$\mathbf{T(2,t)=0} \tag{۳۴-۳}$$

$$\mathbf{T(x,0)=x} \tag{۳۵-۳}$$

جدول ۳-۱ مقادیر و توابع ویژه برای شرایط مرزی مختلف معادله انتقال ناپایدار یک‌بعدی

شرایط مرزی	مقادیر ویژه λ	تابع ویژه $F(x)$
$\begin{cases} F(0)=0 \\ F(L)=0 \end{cases}$	$\left(\frac{n\pi}{L}\right)$	$\sin\frac{n\pi x}{L}$
$\begin{cases} F(0)=0 \\ \frac{dF}{dx}(L)=0 \end{cases}$	$\left(\frac{2n+1}{2L}\pi\right)$	$\sin\left(\frac{2n+1}{2L}\pi\right)x$
$\begin{cases} \frac{dF}{dx}(0)=0 \\ \frac{dF}{dx}(L)=0 \end{cases}$	$\left(\frac{n\pi}{L}\right)$	$\cos\frac{n\pi x}{L}$
$\begin{cases} \frac{dF}{dx}(0)=0 \\ F(L)=0 \end{cases}$	$\left(\frac{2n+1}{2L}\pi\right)$	$\cos\left(\frac{2n+1}{2L}\pi\right)x$

حل- با مقایسه معادلات ۳-۳۲ تا ۳-۳۵ با معادلات ۳-۲ تا ۳-۵ داریم،

$$\alpha = 3 \quad , \quad \phi(x) = x \quad , \quad L = 2$$

بنابراین،

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = \int_0^2 x\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)x\,dx$$

$$b_n = \left[\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)x - \left(\frac{2x}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)x\right]_0^2 = \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \sin n\pi - \left(\frac{4}{n\pi}\right)\cos n\pi$$

و جواب نهایی مسأله به صورت زیر خواهد بود.

$$T(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\sin n\pi-\left(\frac{4}{n\pi}\right)\cos n\pi\right]e^{-3\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{2}$$

مثال (۲): معادله دیفرانسیل زیر را با استفاده از روش جداسازی متغیرها حل کنید.

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\quad,\quad t>0;\quad 0<x<1 \tag{۳-۳۶}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0,t)=0 \tag{۳-۳۷}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(1,t)=0 \tag{۳-۳۸}$$

$$T(x,0)=\phi(x)=\begin{cases}1 & 0<x<0.5\\ 0 & 0.5<x<1\end{cases} \tag{۳-۳۹}$$

حل- مسأله با شرایط مرزی داده شده در حقیقت پیدا کردن تغییرات دما در طول یک میله به طول واحد، با زمان است. دو طرف میله با توجه به شرایط مرزی داده شده عایق هستند و در ابتدا نصف میله در دمای ۱ و نصف دیگر آن در دمای صفر بوده است.

فرض می‌کنیم $T(x,t)=F(x)\cdot G(t)$،

$$G\frac{d^2F}{dx^2}=F\frac{dG}{dt}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{F}\frac{d^2F}{dx^2}=\frac{1}{G}\frac{dG}{dt}=\gamma \tag{۳-۴۰}$$

$$\frac{d^2F}{dx^2}-\gamma F=0 \tag{۳-۴۱}$$

$$\frac{dG}{dt}-\gamma G=0 \tag{۳-۴۲}$$

از شرایط مرزی داریم:

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0,t)=0\quad\Rightarrow\quad G(t)\frac{dF}{dt}(0)=0$$

بنابراین یا $G(t) = 0$ که منجر به جواب بدیهی می‌شود و قابل قبول نیست و یا

$$\frac{dF}{dt}(0) = 0 \qquad (۴۳-۳)$$

که آن را می‌پذیریم. به طور مشابه:

$$\frac{dF}{dt}(1) = 0 \qquad (۴۴-۳)$$

سه حالت برای ثابت γ وجود دارد که قبلا این سه حالت مورد بررسی قرار گرفته‌اند و می‌دانیم که حالت $\gamma = -\lambda^2$، قابل قبول است. بنابراین معادله ۳-۴۱ به صورت زیر درمی‌آید.

$$\frac{d^2F}{dx^2} + \lambda^2 F = 0 \qquad (۴۵-۳)$$

که یک معادله دیفرانسیل معمولی است که ریشه‌های مشخصه آن $\pm i\lambda$ می‌باشند، پس حل آن به صورت زیر خواهد بود.

$$F(x) = c_1 \sin\lambda x + c_2 \cos\lambda x \qquad (۴۶-۳)$$

شرایط مرزی ۳-۴۳ و ۳-۴۴ را اعمال می‌کنیم.

$$\frac{dF}{dt}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1\lambda\cos\lambda(0) - c_2\lambda\sin\lambda(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$$

$$\frac{dF}{dt}(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad -c_2\lambda\sin\lambda = 0$$

با کنار گذاشتن حل بدیهی داریم،

$$\sin\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = n\pi \qquad (۴۷-۳)$$

بنابراین،

$$F_n(x) = c_{2n} \cos n\pi x \qquad (۴۸-۳)$$

این نتیجه را در جدول ۳-۱ نیز می‌توان دید.

حال معادله ۳-۴۲ را که با فرض مثبت بودن ثابت جداسازی به صورت زیر در می‌آید، حل می‌کنیم.

$$\frac{dG}{dt} + \lambda^2 G = 0 \qquad (۴۹-۳)$$

ریشه مشخصه معادله بالا $-\lambda^2$ می‌باشد، بنابراین حل آن به صورت زیر است.

$$G(t) = c_3 e^{-\lambda^2 t} \qquad (۵۰-۳)$$

بنابراین حل کلی معادله ۳-۳۶ به صورت زیر خواهد شد.

$$T_n(x,t) = c_{2n} c_{3n} e^{-(n\pi)^2 t} \cos n\pi x$$

فرض می‌کنیم:

$$C_n = c_{2n} c_{3n}$$

بنابراین،

$$T_n(x,t) = C_n e^{-(n\pi)^2 t} \cos n\pi x \qquad (۵۱-۳)$$

جواب کلی مسأله مجموع جواب‌های فوق می‌باشد.

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-(n\pi)^2 t} \cos n\pi x \qquad (۵۲-۳)$$

از شرط اولیه برای بدست آوردن C_n استفاده می‌کنیم.

$$\mathrm{T(x,0)} = \begin{cases} 1 & 0 < x < 0.5 \\ 0 & 0.5 < x < 1 \end{cases}$$

$$\mathrm{T(x,0)} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos n\pi x = \begin{cases} 1 & 0 < x < 0.5 \\ 0 & 0.5 < x < 1 \end{cases} \qquad (۵۳-۳)$$

بسط فوریه سمت چپ تساوی، یک بسط فوریه کسینوسی می‌باشد. بسط فوریه کسینوسی به صورت زیر است.

$$\boldsymbol{\phi(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2n\pi}{T}x}$$

با توجه به این موضوع،

$$\boldsymbol{T(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-(n\pi)^2 t}\cos n\pi x}$$

با استفاده از شرط اولیه ۳-۵۳، داریم

$$\mathbf{T(x,0)} = \boldsymbol{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos n\pi x = \begin{cases} 1 & 0 < x < 0.5 \\ 0 & 0.5 < x < 1 \end{cases}}$$

برای بسط فوریه کسینوسی داریم،

$$\boldsymbol{a_0} = \mathbf{\frac{2}{2}\int_0^1 \phi(x)dx = \int_0^{0.5} dx + \int_{0.5}^{1}(0)dx = \frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{C}_\mathbf{n} = \mathbf{\frac{4}{2}\int_0^1 \phi(x)\cos} \boldsymbol{n\pi x}\, \mathbf{dx = 2\left[\int_0^{0.5}\cos} \boldsymbol{n\pi x}\,\mathbf{dx + \int_{0.5}^{1}(0)\cos} \boldsymbol{n\pi x}\,\mathbf{dx}\right]$$

$$\mathbf{= 2\left[\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\right]_0^{0.5} = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}}$$

در نهایت جواب به صورت زیر خواهد بود.

$$\boldsymbol{T(x,t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}sin\frac{n\pi}{2}e^{-(n\pi)^2 t}\cos n\pi x}$$

۳.۳-حل معادلات پارابولیک همگن با شرایط مرزی ناهمگن

تا کنون معادله‌هایی که حل کردیم، با شرایط مرزی همگن بودند. در این قسمت شرایط مرزی ناهمگن، با حل یک مثال بررسی می‌شود.

$$\boldsymbol{\frac{\partial T}{\partial t}} = \mathbf{\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} \quad , \quad \mathbf{t > 0} \quad ; \quad \boldsymbol{0 < x < 2} \tag{۵۴-۳}$$

$$T(0,t)=2$$ (۳-۵۵)

$$T(2,t)=6$$ (۳-۵۶)

و شرط اولیه به صورت زیر می‌باشد.

$$T(x,0)=x$$ (۳-۵۷)

حل معادله فوق با شرایط مرزی ناهمگن به روش جداسازی متغیرها به صورت زیر است:

$$T(x,t)=F(x)\cdot G(t)$$ (۳-۵۸)

$$F\frac{dG}{dt}=3G\frac{d^2F}{dx^2}$$ (۳-۵۹)

$$\frac{1}{3G}\frac{dG}{dt}=\frac{1}{F}\frac{d^2F}{dx^2}=\gamma$$ (۳-۶۰)

$$\frac{d^2F}{dx^2}-\gamma F=0$$ (۳-۶۱)

$$\frac{dG}{dt}-3\gamma G=0$$ (۳-۶۲)

با استفاده از شرایط مرزی داریم،

$$T(0,t)=F(0)\cdot G(t)=2$$ (۳-۶۳)

$$T(2,t)=F(2)\cdot G(t)=6$$ (۳-۶۴)

به علت ناهمگن بودن شرایط مرزی مقادیر صریحی برای $F(0)$ و $F(2)$ نمی‌توان بدست آورد. برای رفع این مشکل باید تابع $T(x,t)$ را به صورت مجموع دو تابع $\nu(x,t)$ و $\psi(x)$ بنویسیم، به صورتی که $\nu(0,t)=0$ و $\nu(2,t)=0$ باشد و $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0$.

$$T(0,t)=\nu(0,t)+\psi(0)=2$$ (۳-۶۵)

برای اینکه $\nu(0,t)=0$، باید:

$$\boldsymbol{\psi(0) = 2} \tag{۶۶-۳}$$

$$\boldsymbol{T(2, t) = \nu(2, t) + \psi(2) = 6} \tag{۶۷-۳}$$

برای اینکه $\boldsymbol{\nu(2, t) = 0}$، باید:

$$\boldsymbol{\psi(2) = 6} \tag{۶۸-۳}$$

معادله ۳-۵۴ به شکل زیر در می‌آید.

$$\boldsymbol{\frac{\partial \nu}{\partial t} = 3\left[\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right]} \tag{۶۹-۳}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi(x) = Ax + B}$$

با توجه به دو شرط ۳-۶۶ و ۳-۶۸:

$$\boldsymbol{\psi(x) = 2x + 2} \tag{۷۰-۳}$$

با توجه به صفر بودن $\boldsymbol{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}}$، معادله ۳-۶۹ به صورت زیر در می‌آید:

$$\boldsymbol{\frac{\partial \nu}{\partial t} = 3\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2}} \tag{۷۱-۳}$$

شرایط مرزی این معادله نیز عبارتند از:

$$\boldsymbol{\nu(0, t) = 0} \tag{۷۲-۳}$$

$$\boldsymbol{\nu(2, t) = 0} \tag{۷۳-۳}$$

که درست مانند معادله اصلی می‌باشد، با این تفاوت که در اینجا شرایط مرزی همگن هستند. حال شرط اولیه را برای این معادله بدست می‌آوریم.

$$\boldsymbol{T(x, 0) = \nu(x, 0) + \psi(x) = x}$$

با توجه به معادله ۳-۷۰ داریم:

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x},\mathbf{0}) = -\mathbf{x} - \mathbf{2} \quad , \quad \mathbf{0} < \boldsymbol{x} < \mathbf{2} \tag{۷۴-۳}$$

همانطور که قبلا دیدیم، حل معادله ۳-۷۱ با شرایط مرزی و اولیه فوق به صورت زیر خواهد بود.

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x},\boldsymbol{t}) = \sum_{\mathbf{n}=\mathbf{1}}^{\infty}\left[\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{n}\boldsymbol{\pi}}(\mathbf{2}\cos\mathbf{n}\boldsymbol{\pi} - \mathbf{1})\right]\mathbf{e}^{\left(-\frac{3}{4}n^2\pi^2\right)t}\sin\frac{\mathbf{n}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\mathbf{x} \tag{۷۵-۳}$$

با توجه به اینکه $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})$، داریم:

$$\boldsymbol{T}(\mathbf{x},\boldsymbol{t}) = \mathbf{2x} + \mathbf{2} + \sum_{\mathbf{n}=\mathbf{1}}^{\infty}\left[\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{n}\boldsymbol{\pi}}(\mathbf{2}\cos\mathbf{n}\boldsymbol{\pi} - \mathbf{1})\right]\mathbf{e}^{\left(-\frac{3}{4}n^2\pi^2\right)t}\sin\frac{\mathbf{n}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\mathbf{x} \tag{۷۶-۳}$$

که حل نهایی مسأله می‌باشد. بنابراین مشکل شرط مرزی ناهمگن را با تغییر متغیر $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})$ حل کردیم و جواب نهایی مسأله به شکل معادله ۳-۷۶ بدست آمد.در حقیقت $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})$ جواب حالت پایا و $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ جواب حالت ناپایای مسأله می‌باشد.

٤-حل معادلات پارابولیک ناهمگن

معادلات دیفرانسیل جزئی ناهمگن کاربردهای زیادی در مسائل مهندسی دارند. مثلا در مهندسی شیمی زمانیکه در مسائل انتقال حرارت در سیستم منبع حرارتی داشته باشیم، با معادلات دیفرانسیل جزئی ناهمگن برخورد می کنیم. با توجه به نوع معادله ناهمگن و شرایط مرزی آن، شاید بتوان از روش جداسازی متغیرها برای حل معادله استفاده کرد. اما پیش از آن باید با روشی معادله را ساده کرد. دو روش برای حل این دسته از معادلات وجود دارد، روش بسط توابع ویژه و روش جواب تعادلی و جواب ناپایا.

۴.۱- روش بسط تابع ویژه

روش بسط تابع ویژه برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی ناهمگن با شرایط مرزی همگن استفاده می‌شود. استفاده از این روش در مثال‌های زیر توضیح داده می‌شود.

مثال (۳): معادله دیفرانسیل ناهمگن زیر را با توجه به شرایط داده شده حل کنید.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+e^{-t}\,sin\,3x \qquad (۳-۷۷)$$

$$u(0,t)=0 \qquad (۳-۷۸)$$

$$u(\pi,t)=0 \qquad (۳-۷۹)$$

$$u(x,0)=\phi(x) \qquad (۳-۸۰)$$

حل- با توجه به شرایط داده شده، همانطور که در جدول ۳-۱دیده می‌شود، تابع ویـژه ایـن معادلـه $\sin nx$ مـی باشد، بنابراین:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\sin nx \qquad (۳-۸۱)$$

از معادله ۳-۸۱ نسبت به زمان مشتق اول و نسبت به x مشتق دوم می گیریم.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{da_n}{dt}\sin nx \qquad (۳-۸۲)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}-n^2 a_n(t)\sin nx \qquad (۳-۸۳)$$

معادلات ۳-۸۲ و ۳-۸۳ را در معادله ۳-۷۷ قرار می‌دهیم.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{da_n}{dt}\sin nx=\sum_{n=1}^{\infty}-n^2 a_n(t)\sin nx+e^{-t}\,sin\,3x \qquad (۳-۸۴)$$

ضرایب سری فوریه سینوسی به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{da_n}{dt}+n^2 a_n=\begin{cases}0 & n\neq 3\\ e^{-t} & n=3\end{cases} \qquad (۳-۸۵)$$

از حل معادله ۳-۸۵ داریم،

$$a_n(t) = \begin{cases} a_n(0)e^{-n^2 t} & n \neq 3 \\ \frac{1}{8}e^{-t} + \left[a_3(0) - \frac{1}{8}\right] e^{-9t} & n = 3 \end{cases} \qquad (۸۶\text{–}۳)$$

که در آن،

$$a_n(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \phi(x) \sin nx \, dx \qquad (۸۷\text{–}۳)$$

و جواب نهایی به صورت زیر در می‌آید:

$$u(x,t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq 3}}^{\infty} a_n(t) \sin nx + a_3(t) \sin 3x \qquad (۸۸\text{–}۳)$$

مثال (۴): معادله دیفرانسیل ناهمگن زیر را با توجه به شرایط داده شده حل کنید.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-t} + e^{-2t} \cos \frac{3\pi x}{L} \qquad (۸۹\text{–}۳)$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0 \qquad (۹۰\text{–}۳)$$

$$\frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = 0 \qquad (۹۱\text{–}۳)$$

$$u(x,0) = \phi(x) \qquad (۹۲\text{–}۳)$$

حل- برای حل این معادله ناهمگن از روش بسط تابع ویژه فوریه کسینوسی استفاده می کنیم.

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \cos \frac{n\pi x}{L} \qquad (۹۳\text{–}۳)$$

از معادله ۳-۹۳ نسبت به زمان و مکان مشتق گرفته و در معادله ۳-۸۹ قرار می‌دهیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{da_n}{dt} \cos \frac{n\pi x}{L} = -\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \cos \frac{n\pi x}{L} + e^{-t} + e^{-2t} \cos \frac{3\pi x}{L} \qquad (۹۴\text{–}۳)$$

سه حالت پیش می‌آید:

وقتی $n = 0$،

$$\frac{da_0}{dt} = e^{-t} \tag{۹۵-۳}$$

وقتی $n > 0$,$n \neq 3$،

$$\frac{da_n}{dt} = -a_n(t)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \tag{۹۶-۳}$$

و در نهایت زمانیکه $n = 3$،

$$\frac{da_3}{dt} = -a_3(t)\left(\frac{3\pi}{L}\right)^2 + e^{-2t} \tag{۹۷-۳}$$

برای بدست آوردن a_n، باید این سه معادله معمولی را حل کرد.

از حل معادله ۳–۹۵ داریم:

$$a_0(t) = -e^{-t} + c_0 \tag{۹۸-۳}$$

از معادله ۳–۹۶:

$$a_n(t) = c_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \tag{۹۹-۳}$$

و از حل معادله ۳–۹۷ داریم:

$$a_3(t) = \frac{e^{-2t}}{\left(\frac{3\pi}{L}\right)^2 - 2} + c_3 e^{-\left(\frac{3\pi}{L}\right)^2 t} \tag{۱۰۰-۳}$$

ثوابت c_0، c_3 و c_n با استفاده از شرط ۳–۹۲ و اصل تعامد بدست می‌آیند.

$$c_0 = 1 + \frac{1}{L}\int_0^L \phi(x)dx \tag{۱۰۱-۳}$$

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L \phi(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \tag{۱۰۲-۳}$$

$$c_3 = \frac{2}{L}\int_0^L \phi(x)\cos\frac{3\pi x}{L}dx - \frac{1}{\left(\frac{3\pi}{L}\right)^2 - 2} \tag{۱۰۳-۳}$$

بنابراین جواب نهایی به صورت زیر می‌شود.

$$u(x,t) = a_0(t) + \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq 3}}^{\infty} a_n(t)\cos\frac{n\pi}{L}x + a_3(t)\cos\frac{3\pi}{L}x \tag{۱۰۴-۳}$$

۴.۲-روش تبدیل حالت پایا و ناپایا

در این روش جواب نهایی را به صورت مجموع جواب حالت پایا و جواب حالت ناپایا در نظر می گیریم، معادله تبدیل به دو معادله می‌شود، یک معادله دیفرانسیل معمولی ناهمگن و یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی همگن. در مثال زیر می‌توان نحوه حل معادله به این روش را بررسی کرد.

مثال (۵): معادله انتقال حرارت ناپایای یک بعدی را با شرایط زیر حل کنید.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q_g}{\rho C} \tag{۱۰۵-۳}$$

$$T(L,t) = T_\infty \tag{۱۰۶-۳}$$

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0 \tag{۱۰۷-۳}$$

$$T(x,0) = T_\infty \tag{۱۰۸-۳}$$

حل- در این مثال هم معادله ناهمگن است و هم شرایط ۳-۱۰۶ و ۳-۱۰۸، ابتدا با تغییر متغیر زیر ناهمگنی شرایط مرزی را از بین می‌بریم،

$$\theta(x,t) = T(x,t) - T_\infty \tag{۱۰۹-۳}$$

ناهمگنی شرط مرزی و شرط اولیه از بین می‌رود و معادله به صورت زیر درمی‌آید.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{q_g}{\rho C} \tag{۱۱۰-۳}$$

$$\theta(L,t) = 0 \tag{۱۱۱-۳}$$

$$\frac{\partial \theta(0,t)}{\partial x}=0 \tag{۳-۱۱۲}$$

$$\theta(x,0)=0 \tag{۳-۱۱۳}$$

جواب $\theta(x,t)$ را به صورت مجموع دو تابع درنظر می گیریم.

$$\theta(x,t)=\nu(x,t)+\psi(x) \tag{۳-۱۱۴}$$

مقدار $\theta(x,t)$ را از معادله ۳-۱۱۴ در شرایط مرزی و اولیه قرار می‌دهیم.

$$\nu(L,t)+\psi(L)=0 \tag{۳-۱۱۵}$$

$$\frac{\partial \nu(0,t)}{\partial x}+\frac{d\psi(0)}{dx}=0 \tag{۳-۱۱۶}$$

$$\nu(x,0)+\psi(x)=0 \tag{۳-۱۱۷}$$

با قرار دادن معادله ۳-۱۱۴ در معادله ۳-۱۱۰ داریم،

$$\frac{\partial \nu}{\partial t}=\alpha\left[\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2}+\frac{d^2\psi}{dx^2}\right]+\frac{q_g}{\rho C} \tag{۳-۱۱۸}$$

قرار می‌دهیم $\alpha=\frac{K}{\rho C}$، و معادله فوق را به دو معادله تقسیم می کنیم:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{q_g}{K}=0 \tag{۳-۱۱۹}$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} \tag{۳-۱۲۰}$$

بنابراین تا اینجای کار، جمله ناهمگنی را در معادله معمولی ۳-۱۱۹ قرار دادیم . برای حل این معادله معمـولی از دو شرط مرزی زیر استفاده می کنیم.

$$\psi(L)=0 \tag{۳-۱۲۱}$$

$$\frac{d\psi(0)}{dx}=0 \tag{۳-۱۲۲}$$

با دوبار انتگرال گیری از معادله ۳-۱۱۹ و سپس استفاده از شرایط مرزی بالا، داریم:

$$\psi(x)=\frac{q_g L^2}{2K}\left[1-\left(\frac{x}{L}\right)^2\right] \qquad (۱۲۳-۳)$$

معادله ۳-۱۲۰یک معادله با مشتقات جزئی همگن با شرایط مرزی و اولیه زیر می‌باشد.

$$\nu(L,t)=0 \qquad (۱۲۴-۳)$$

$$\frac{\partial \nu(0,t)}{\partial x}=0 \qquad (۱۲۵-۳)$$

$$\nu(x,0)=-\psi(x) \qquad (۱۲۶-۳)$$

این معادله را می‌توان با روش جداسازی متغیرها حل کرد که در اینجا به آن نمی‌پردازیم. مجموع جواب‌های حاصل از این دو معادله جواب کلی ما خواهد بود که به صورت زیر می‌باشد.

$$\frac{\theta(x,t)}{\frac{q_g L^2}{K}}=\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\lambda_n L)^3}e^{-\alpha\lambda_n^2 t}\cos\lambda_n x \qquad (۱۲۷-۳)$$

با استفاده از معادله ۳-۱۰۹ می‌توان توزیع دما را بدست آورد.

۵-تمرینات

معادلات دیفرانسیل جزئی پارابولیک زیر را حل کنید.

- $\frac{\partial C}{\partial t}=\mathrm{D}\frac{\partial^2 \mathrm{C}}{\partial \mathrm{x}^2}$

  $C(x,0)=C_0$

  $C(L,t)=0$

  $\frac{\partial C(0,t)}{\partial x}=0$

- $\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}^2} \quad , \quad 0<x<2$

$$T(x,0) = \phi(x)$$

$$T(0,t) = 25$$

$$\frac{\partial C(2,t)}{\partial x} = 50$$

- $u_t = u_{xx} + tx$

$$u(0,t) = 1$$

$$u(1,t) = 0$$

$$u(x,0) = 1 - x$$

ریاضیات مهندسی پیشرفته

جلسه هفتم

حل معادلات هایپربولیک و بیضوی به روش جداسازی متغیرها

فهرست مطالب

بسم الله الرحمن الرحیم

۱-چکیده مطالب

برای حل معادله موج که یک معادله هایپربولیک و حل معادله لاپلاس که یک معادله بیضوی است، می‌توان از روش جداسازی متغیرها استفاده کرد. به شرطی که حداکثر یک شرط ناهمگن داشته باشیم. در صورتیکه بیش از یک شرط ناهمگن داشته باشیم، با استفاده از اصل برهم نهی می‌توانیم مسأله را به چند مسأله که به روش جداسازی متغیرها قابل حل هستند، تبدیل کنیم. برای حل معادله لاپلاس ناهمگن، با استفاده ار تغییر متغیر، مسأله را به دو معادله تبدیل می‌کنیم. معادله ناهمگن با شرایط مرزی همگن که با روش بسط توابع ویژه قابل حل است. و معادله همگن با شرط مرزی ناهمگن که با روش جداسازی متغیرها حل می‌شود.

۲-اهداف:

آشنایی با شیوه حل معادله موج و لاپلاس با استفاده از جداسازی متغیرها، آشنایی با اصل برهم‌نهی

۳-حل معادله موج یک‌بعدی با استفاده از روش جداسازی متغیرها

در این بخش، معادله موج یک‌بعدی با شرایط مرزی و اولیه زیر را با استفاده از روش جداسازی متغیرها حل می کنیم.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad t > 0 \quad , \quad 0 < x < l \tag{۳-۱}$$

$$u(0,t) = 0 \tag{۳-۲}$$

$$u(l,t) = 0 \tag{۳-۳}$$

$$u(x,0) = \phi(x) \tag{۴-۳}$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x) \tag{۵-۳}$$

برای حل فرض می‌کنیم که بتوان تابع $u(x,t)$ را به صورت $u(x,t) = F(x) \cdot G(x)$ نوشت. این فرض را در معادله ۳-۱ قرار می‌دهیم،

$$F\frac{d^2G}{dt^2} = c^2G\frac{d^2F}{dx^2} \quad , \quad t > 0 \quad , \quad 0 < x < l \tag{۶-۳}$$

متغیرها را جدا می‌کنیم،

$$\frac{1}{c^2G}\frac{d^2G}{dt^2} = \frac{1}{F}\frac{d^2F}{dx^2} \tag{۷-۳}$$

دو طرف تساوی را برابر با ثابت $\boldsymbol{\gamma}$ قرار می‌دهیم.

$$\frac{1}{c^2G}\frac{d^2G}{dt^2} = \frac{1}{F}\frac{d^2F}{dx^2} = \gamma \tag{۸-۳}$$

با استفاده از تساوی ۳-۸، دستگاه زیر را تشکیل می‌دهیم.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2F}{dx^2} - \gamma F = 0 \\ \dfrac{d^2G}{dt^2} - c^2\gamma G = 0 \end{cases} \tag{۹-۳}$$

با استفاده از شروط مرزی ۳-۲ و ۳-۳، داریم:

$$u(0,t) = F(0)G(t) = 0 \tag{۱۰-۳}$$

$$u(l,t) = F(l)G(t) = 0 \tag{۱۱-۳}$$

با کنار گذاشتن جواب‌های بدیهی،

$$F(0) = 0 \tag{۱۲-۳}$$

$$F(l) = 0 \qquad (۱۳-۳)$$

در این‌گونه مسائل اگر شرایط مرزی ناهمگن باشد، حل کمی دشوارتر است. نحوه حل مسائل با شرایط مرزی ناهمگن در جلسه قبل توضیح داده شده است.

اکنون به حل دستگاه ۳-۹ می‌پردازیم، همانطور که قبلاً گفته شد، $\boldsymbol{\gamma}$ می‌تواند صفر، مثبت و یا منفی باشد. در حالتی که $\boldsymbol{\gamma}$ صفر یا مثبت باشد، حل به جواب بدیهی منجر می‌شود که قابل قبول نیست. بنابراین در حالتی که $\boldsymbol{\gamma}$ منفی باشد،

$$\boldsymbol{\gamma = -\lambda^2}$$

$$\frac{d^2F}{dx^2} + \lambda^2 F = 0 \qquad (۱۴-۳)$$

جواب عمومی معادله ۳-۱۴ به صورت زیر است:

$$F(x) = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x \qquad (۱۵-۳)$$

شروط مرزی ۳-۱۲ و ۳-۱۳ را اعمال می‌کنیم،

$$F(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0 \qquad (۱۶-۳)$$

$$F(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad A\sin\lambda l = 0 \qquad (۱۷-۳)$$

با در نظر نگرفتن جوابی که منجر به حل بدیهی می‌شود، داریم:

$$\sin\lambda l = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda l = n\pi \qquad (۱۸-۳)$$

بنابراین،

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l} \qquad (۱۹-۳)$$

و می‌توان نوشت:

$$F_n(x) = B_n \sin\frac{n\pi}{l}x \tag{۲۰-۳}$$

معادله دوم دستگاه ۳-۹ را نیز حل می‌کنیم:

$$\frac{d^2G}{dt^2} + c^2\lambda^2 G = 0 \tag{۲۱-۳}$$

که جواب عمومی آن به صورت زیر خواهد بود.

$$G_n(t) = P_n \cos c\lambda_n t + Q_n \sin c\lambda_n t \tag{۲۲-۳}$$

با قرار دادن معادلات ۳-۲۲ و ۳-۲۰ در $u(x,t) = F(x)G(t)$ داریم:

$$u_n(x,t) = B_n \sin\frac{n\pi}{l}x\,[P_n \cos c\lambda_n t + Q_n \sin c\lambda_n t] \tag{۲۳-۳}$$

فرض می‌کنیم،

$$B_nP_n = C_n$$
$$B_nQ_n = D_n$$

داریم:

$$u_n(x,t) = \sin\frac{n\pi}{l}x\,[C_n \cos c\lambda_n t + D_n \sin c\lambda_n t] \tag{۲۴-۳}$$

جواب معادله مجموع جواب‌های فوق است.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{l}x\,[C_n \cos c\lambda_n t + D_n \sin c\lambda_n t] \tag{۲۵-۳}$$

شرط اولیه ۳-۴ را در معادله بالا قرار می‌دهیم،

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{l}x \tag{۲۶-۳}$$

بسط ۳-۲۶، سری فوریه سینوسی تابع $\phi(x)$ می‌باشد، بنابراین:

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \tag{۲۷-۳}$$

از شرط ۳-۵ استفاده کرده، داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{l}x\,[-C_n c\lambda_n \sin c\lambda_n t + D_n c\lambda_n \cos c\lambda_n t] \tag{۲۸-۳}$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n c\lambda_n \sin\frac{n\pi}{l}x \tag{۲۹-۳}$$

با توجه به سینوسی بودن بسط فوریه تابع $\psi(x)$ ،

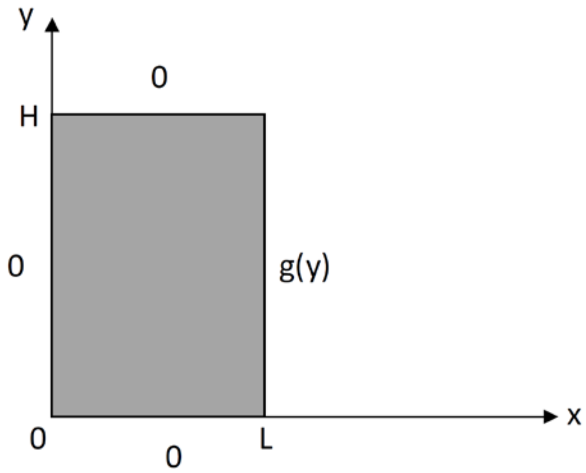
$$D_n c\lambda_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \tag{۳۰-۳}$$

با جایگزینی ثوابت جواب نهایی معادله موج به صورت زیر درمی‌آید.

$$\begin{aligned} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[&\left(\frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx\right)\cos c\lambda_n t \\ &+ \left(\frac{2}{c\lambda_n l}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx\right)\sin c\lambda_n t\Bigg]\sin\frac{n\pi}{l}x \end{aligned} \tag{۳۱-۳}$$

٤-حل معادله لاپلاس همگن

معادله لاپلاس دو بعدی که در بحث انتقال حرارت دو بعدی در یک صفحه با آن برخورد می کنیم، نمونـه‌ای از معادلات بیضوی می‌باشد. فرض کنید مسأله به صورت شکل زیر باشد.



شکل ٤-١ انتقال حرارت دو بعدی در صفحه با یک شرط مرزی ناهمگن

معادله دیفرانسیل جزئی این مسأله، معادله لاپلاس همگن به صورت زیر می‌باشد. سه شرط مرزی همگن و یک شرط مرزی ناهمگن داریم. برای حل مسأله به روش جداسازی متغیرها حداکثر یک شرط مرزی ناهمگن می توانیم داشته باشیم.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \tag{۴-۱}$$

$$T(0, y) = 0 \tag{۴-۲}$$

$$T(x, 0) = 0 \tag{۴-۳}$$

$$T(x, H) = 0 \tag{۴-۴}$$

$$T(L, y) = g(y) \tag{۴-۵}$$

جواب معادله به صورت حاصلضرب دو تابع مستقل به صورت زیر می‌باشد:

$$T(x, y) = F(x)G(y) \tag{۴-۶}$$

با استفاده از شرایط همگن ۴-۲ تا ۴-۴ داریم:

$$F(0) = 0 \tag{۴-۷}$$

$$G(0) = 0 \tag{۴-۸}$$

$$G(H) = 0 \tag{۴-۹}$$

معادله ۴-۶ را در معادله ۴-۱ قرار می‌دهیم.

$$G\frac{d^2F}{dx^2} + \mathrm{F}\frac{d^2G}{dy^2} = 0 \tag{۴-۱۰}$$

$$\frac{1}{F}\frac{d^2F}{dx^2} = -\frac{1}{\mathrm{G}}\frac{d^2G}{dy^2} = +\lambda^2 \tag{۴-۱۱}$$

دو معادله معمولی بدست می‌آید.

$$\frac{d^2F}{dx^2} = \lambda^2 F \quad , \quad F(0) = 0 \tag{۴-۱۲}$$

$$\frac{d^2G}{dy^2} = -\lambda^2 G \quad , \quad G(0) = 0, G(H) = 0 \tag{۴-۱۳}$$

حل معادله ۴-۱۳ با دو شرط مرزی داده شده، به صورت زیر می‌باشد.

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{H} \tag{۴-۱۴}$$

$$G_n(y) = \sin\frac{n\pi}{H}y \tag{۴-۱۵}$$

حل معادله ۴-۱۲ به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{d^2F}{dx^2} = \left(\frac{n\pi}{H}\right)^2 F \tag{۴-۱۶}$$

$$F(x) = a\cosh\frac{n\pi}{H}x + b\sinh\frac{n\pi}{H}x \tag{۴-۱۷}$$

$$F(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$$

$$F(x) = b\sinh\frac{n\pi}{H}x \tag{۴-۱۸}$$

جواب‌ها را در معادله ۴-۶ قرار می‌دهیم.

$$T(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{H} y \sinh\frac{n\pi}{H} x \qquad (۱۹-۴)$$

باید شرط مرزی ناهمگن ۴-۵ در معادله ۴-۱۹ صدق کند.

$$T(L,y)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{H} y \sinh\frac{n\pi}{H} L = g(y) \qquad (۲۰-۴)$$

با استفاده از تعامد توابع سینوسی داریم،

$$b_n \sinh\frac{n\pi}{H} L = \frac{2}{H}\int_0^H g(y)\sin\frac{n\pi y}{H}\,dy \qquad (۲۱-۴)$$

باید توجه داشت که در معادله ۴-۲۰، ضریب سینوس $b_n \sinh\frac{n\pi}{H} L$، می‌باشد.

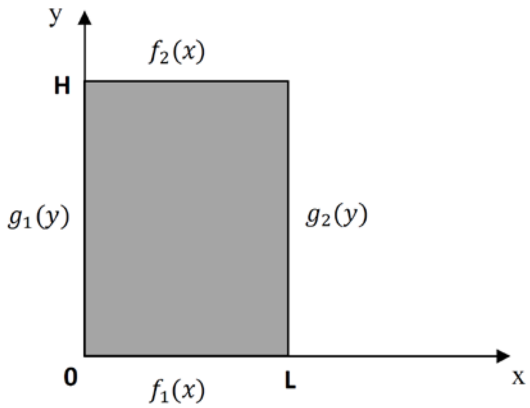
$$b_n = \frac{2}{H\sinh\frac{n\pi}{H}L}\int_0^H g(y)\sin\frac{n\pi y}{H}\,dy \qquad (۲۲-۴)$$

به این ترتیب معادله لاپلاس همگن با یک شرط مرزی ناهمگن، حل می‌شود.

۴.۱-اصل برهم‌نهی

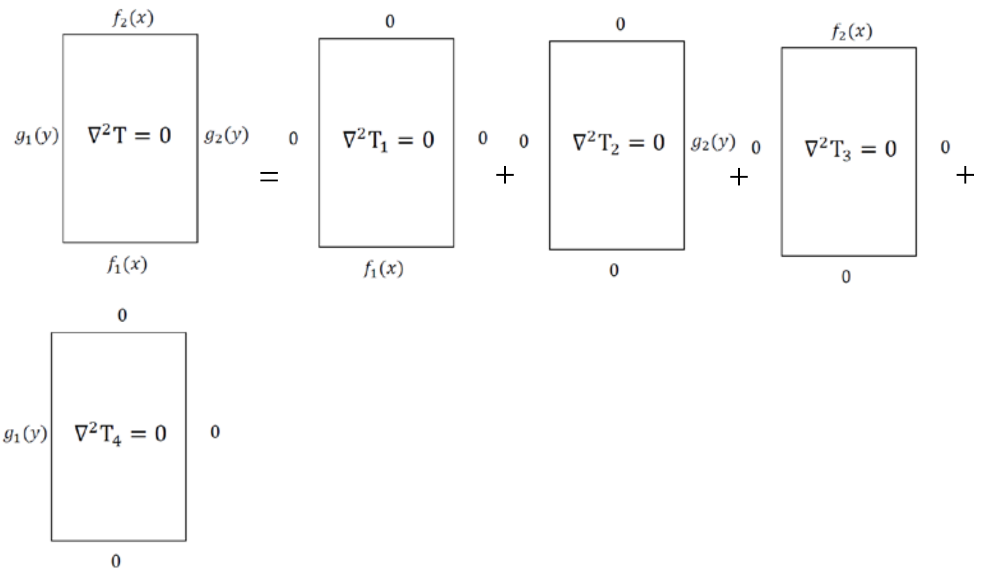
بر طبق اصل برهم‌نهی، یک مسأله ناهمگن را می‌توان به چند مسأله تبدیل کرد که در هر کدام تنها یک ناهمگنی وجود دارد. جواب معادله با چهار شرط مرزی ناهمگن، مجموع حل‌های چهار معادله هر کدام تنها با یک شرط مرزی ناهمگن است. با بررسی حل معادله لاپلاس دوبعدی به توضیح بیشتر این اصل می‌پردازیم.

فرض کنید مسأله به صورت زیر است.



شکل ٤-٢ صفحه با چهار شرط مرزی ناهمگن

برای حل معادله ۴-۱ برای این صفحه که دارای چهار شرط مرزی ناهمگن است، نمی‌توان از روش جداسازی متغیرها استفاده کرد. زیرا در این روش باید حداکثر یک ناهمگنی در سیستم وجود داشته باشد. برای حل این مشکل از اصل برهم‌نهی استفاده کرده و مسأله را به چهار مسأله کوچکتر تقسیم می‌کنیم.



جواب کلی به صورت زیر می‌شود.

$$T(x,y) = T_1(x,y) + T_2(x,y) + T_3(x,y) + T_4(x,y) \qquad (۲۳-۴)$$

بنابریان چهار معادله زیر با شرایط مرزی مربوطه باید حل شوند.

حالت اول:

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2}=0 \tag{۲۴-۴}$$

$$T_1(0,y)=T_1(x,H)=T_1(L,y)=0 \tag{۲۵-۴}$$

$$T_1(x,0)=f_1(x) \tag{۲۶-۴}$$

$$T_1(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} b_{1n}\sin\frac{n\pi x}{L}\sinh\frac{n\pi y}{L} \tag{۲۷-۴}$$

$$b_{1n}=\frac{2}{L\sinh\frac{n\pi H}{L}}\int_0^L f_1(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \tag{۲۸-۴}$$

حالت دوم:

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2}=0 \tag{۲۹-۴}$$

$$T_2(0,y)=T_2(x,0)=T_2(x,H)=0 \tag{۳۰-۴}$$

$$T_2(L,y)=g_2(y) \tag{۳۱-۴}$$

$$T_2(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}\sin\frac{n\pi y}{H}\sinh\frac{n\pi x}{H} \tag{۳۲-۴}$$

$$b_{2n}=\frac{2}{H\sinh\frac{n\pi L}{H}}\int_0^H g_2(y)\sin\frac{n\pi y}{H}dy \tag{۳۳-۴}$$

حالت سوم:

$$\frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T_3}{\partial y^2}=0 \tag{۳۴-۴}$$

$$T_3(0,y)=T_3(x,0)=T_3(L,y)=0 \tag{۳۵-۴}$$

$$T_3(x,H)=f_2(x) \tag{۳۶-۴}$$

$$T_3(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} b_{3n}\sin\frac{n\pi x}{L}\sinh\frac{n\pi y}{L} \qquad (۴-۳۷)$$

$$b_{3n}=\frac{2}{L\sinh\frac{n\pi H}{L}}\int_0^L f_2(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \qquad (۴-۳۸)$$

حالت چهارم:

$$\frac{\partial^2 T_4}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T_4}{\partial y^2}=0 \qquad (۴-۳۹)$$

$$T_4(L,y)=T_4(x,0)=T_4(x,H)=0 \qquad (۴-۴۰)$$

$$T_4(0,y)=g_1(y) \qquad (۴-۴۱)$$

$$T_4(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} b_{4n}\sin\frac{n\pi y}{H}\sinh\frac{n\pi}{H}(x-L) \qquad (۴-۴۲)$$

$$b_{4n}=\frac{2}{H\sinh\frac{n\pi(-L)}{H}}\int_0^H g_1(y)\sin\frac{n\pi y}{H}dy \qquad (۴-۴۳)$$

در نهایت داریم:

$$T=T_1+T_2+T_3+T_4$$

۵-معادله لاپلاس غیرهمگن

برای حل معادله لاپلاس ناهمگن با سه شرط مرزی همگن و یک شرط مرزی ناهمگن به صورت زیر:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=Q(x,y) \qquad (۵-۱)$$

$$u(0,y)=u(a,y)=u(x,0)=0 \qquad (۵-۲)$$

$$u(x,b)=f(x) \qquad (۵-۳)$$

باید از تغییر متغیر زیر استفاده کنیم.

$$u(x,y) = \omega(x,y) + \nu(x,y) \tag{۴-۵}$$

معادله ۵-۴ را در معادله ۵-۱ قرار می‌دهیم.

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial y^2} = Q(x,y) \tag{۵-۵}$$

شرایط مرزی با توجه به معادله ۵-۴ به صورت زیر بدست می‌آیند.

$$\omega(0,y) + \nu(0,y) = 0 \tag{۶-۵}$$

$$\omega(a,y) + \nu(a,y) = 0 \tag{۷-۵}$$

$$\omega(x,0) + \nu(x,0) = 0 \tag{۸-۵}$$

$$\omega(x,b) + \nu(x,b) = f(x) \tag{۹-۵}$$

معادله ۵-۵ را به دو معادله دیفرانسیل با هشت شرط مرزی تبدیل می‌کنیم. یک معادله دیفرانسیل ناهمگن با چهار شرط مرزی همگن و یک معادله دیفرانسیل همگن با سه شرط همگن و یک شرط ناهمگن.

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial y^2} = Q(x,y) \tag{۱۰-۵}$$

$$\nu(0,y) = \nu(a,y) = \nu(x,0) = \nu(x,b) = 0 \tag{۱۱-۵}$$

و

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0 \tag{۱۲-۵}$$

$$\omega(0,y) = \omega(a,y) = \omega(x,0) = 0 \tag{۱۳-۵}$$

$$\omega(x,b) = f(x) \tag{۱۴-۵}$$

از حل دو معادله بالا $\omega(x,y)$ و $\nu(x,y)$ بدست می‌آیند که مجموع آنها جواب مسأله خواهد بود.

مثال(۱): معادله دیفرانسیل جزئی زیر را با شرایط داده شده حل کنید.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=e^{2y}\sin x \qquad (۱۵-۵)$$

$$u(0,y)=u(\pi,y)=u(x,0)=0 \qquad (۱۶-۵)$$

$$u(x,L)=f(x) \qquad (۱۷-۵)$$

جواب را به صورت معادله ۵-۴ درنظر می‌گیریم و دو معادله به صورت زیر بدست می‌آیند.

معادله اول:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=e^{2y}\sin x \qquad (۱۸-۵)$$

$$v(0,y)=v(\pi,y)=v(x,0)=v(x,L)=0 \qquad (۱۹-۵)$$

معادله دوم:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}=0 \qquad (۲۰-۵)$$

$$\omega(0,y)=\omega(\pi,y)=\omega(x,0)=0 \qquad (۲۱-۵)$$

$$\omega(x,L)=f(x) \qquad (۲۲-۵)$$

معادله اول، یک معادله ناهمگن با شرایط مرزی همگن است، که با استفاده از روش بسط توابع ویژه حل می‌شود:

$$v(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n(y)\sin nx \qquad (۲۳-۵)$$

$$\frac{d^2 v}{dy^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d^2 b_n}{dy^2}\sin nx \qquad (۲۴-۵)$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} b_n n^2 \sin nx \qquad (۵-۲۵)$$

معادلات ۵-۲۴ و ۵-۲۵ را در معادله ۵-۱۸ قرار می‌دهیم.

$$\left(\frac{d^2 b_n}{dy^2} - n^2 b_n\right) \sin nx = e^{2y} \sin x \qquad (۵-۲۶)$$

برای $n = 1$:

$$\frac{d^2 b_1}{dy^2} - n^2 b_1 = e^{2y} \qquad (۵-۲۷)$$

$$b_1(y) = c_1 \sinh y + c_2 \cosh y + \frac{1}{3} e^{2y} \qquad (۵-۲۸)$$

ضرایب با استفاده از شرایط مرزی بدست می‌آیند.

$$c_2 = -\frac{1}{3} \qquad (۵-۲۹)$$

$$c_1 = \frac{\frac{1}{3}\cosh y - \frac{1}{3} e^{2y}}{\sinh L} \qquad (۵-۳۰)$$

بنابراین،

$$b_1(y) = \frac{\frac{1}{3}\cosh y - \frac{1}{3} e^{2y}}{\sinh L} \sinh y - \frac{1}{3}\cosh y + \frac{1}{3} e^{2y} \qquad (۵-۳۱)$$

برای $n > 1$

$$\frac{d^2 b_n}{dy^2} - n^2 b_n = 0 \qquad (۵-۳۲)$$

$$b_n(y) = c_3 \sinh ny + c_4 \cosh ny \qquad (۵-۳۳)$$

با قرار دادن شرایط مرزی زیر

$$b_n(0) = 0 \qquad (۵-۳۴)$$

(۵-۳۵)
$$b_n(L) = 0$$

در معادله ۵-۳۳، داریم:

(۵-۳۶)
$$c_4 = 0$$

(۵-۳۷)
$$c_3 = 0$$

معادله دوم نیز با استفاده از روش جداسازی متغیرها مشابه آنچه در ابتدای جلسه توضیح داده شد، حل می‌شود.

مجموع جواب‌های این دو معادله، جواب نهایی خواهد بود.

(۵-۳۸)
$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx \sinh ny + \left(\frac{\frac{1}{3}\cosh L - \frac{1}{3}e^{2L}}{\sinh L} \sinh y - \frac{1}{3}\cosh y + \frac{1}{3}e^{2y} \right)$$

٦-تمرینات

- $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
  $$u(x,0) = x+1 \quad 0 \le x \le 2, t = 0$$
  $$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin x$$
  $$u(0,t) = 1$$
  $$u(2,t) = 3$$

- توزیع دمای حالت پایا یک استوانه بلند به شعاع r_0 را که سطح آن دارای توزیع دمای $f(\theta)$ می‌باشد، بدست آورید.

ریاضیات مهندسی پیشرفته

جلسه هشتم

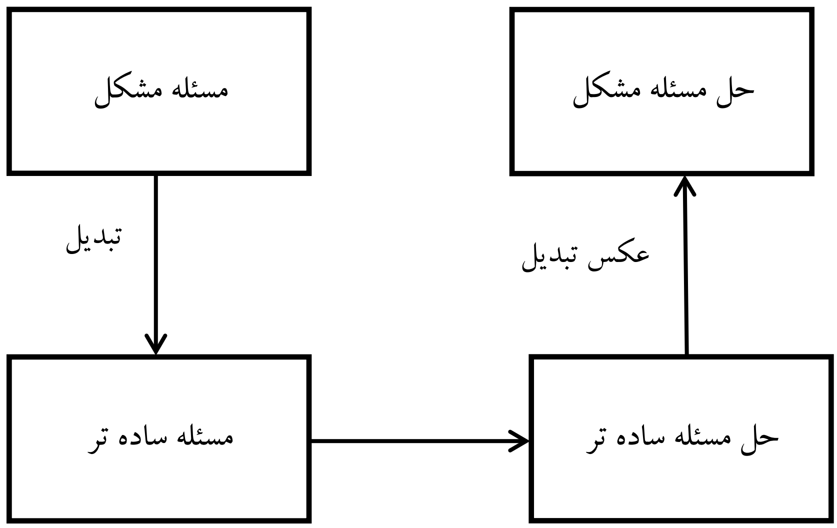
حل معادلات دیفرانسیل جزئی به روش تبدیلات

فهرست مطالب

بسم الله الرحمن الرحیم

۱-چکیده مطالب:

تبدیلات روشی است برای تبدیل معادله دیفرانسیل به معادلات دیفرانسیل با یک بعد کمتر مثلا اگر معادله دیفرانسیل جزئی ۲ بعدی داشته باشیم با روش تبدیل می توان آن را به معادله دیفرانسیل با یک بعد کمتر، یعنی معادله دیفرانسیل یک بعدی که همان معادله دیفرانسیل معمولی (ODE) است تبدیل می کند . معمولا مسائل مشکل تر ازاین طریق به مسئله ساده تر تبدیل شده و مسلئه ساده تر حل شده با عمل عکس تبدیل حل را به حل مسئله مشکل تر (مسئله اولیه) تبدیل می کنیم.



۲-اهداف:

استفاده از تبدیلات فوریه و لاپلاس برای حل معادلات دیفرانمسیل جزئی.

۳-انواع تبدیلات

تبدیل عبارت است از یک انتگرال در محدوده B و A و یک هسته تبدیل که تابعی از S (متغییر کمکی) و متغییر مستقل مسئله (t)، که به صورت K (s , t) بیان می‌شود :

اگر تبدیل را با F نمایش دهیم تبدیل تابع $f(t)$ را چنین می‌توان نوشت :

$$\mathrm{F}\,(\mathrm{f}\,(\mathrm{t})) = \int_{A}^{B} \boldsymbol{K}(\,\boldsymbol{s}\,,\boldsymbol{t}\,)\ .\ \mathrm{f}\,(\mathrm{t})\ \mathrm{dt} = \mathrm{F}\,(\mathrm{s})$$

بدین صورت بعد مسئله که t می‌باشد حذف شده و تابعی از S تولید می‌شود که آن را تبدیل تابع $f(t)$ گویند .

تبدیلاتی که معمولا برای حل معادلات استفاده می‌شوند، عبارتند از: تبدیل فوریه ، تبدیل لاپلاس و تبدیل هنکل

۳.۱-تبدیلات فوریه

۳.۱.۱-تبدیلات نیمه بی‌نهایت

تبدیل سینوسی فوریه : در این تبدیل هسته تبدیل یک عبارت سینوسی می باشد

$$\boldsymbol{F_S}\big(\,\boldsymbol{F}\,(\,\boldsymbol{t}\,)\big) \;=\; \boldsymbol{F}\,(\,\boldsymbol{S}\,) = \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{\pi}}\int_{\mathbf{0}}^{\infty} \boldsymbol{f}\,(\,\boldsymbol{t}\,)\ \ \sin \boldsymbol{st}\ \boldsymbol{dt}$$

عکس تبدیل :

$$\boldsymbol{F_s^{-1}}\big(\,\boldsymbol{F}\,(\,\boldsymbol{s})\big) = \boldsymbol{f}\,(\,\boldsymbol{t}\,) = \int_{\mathbf{0}}^{\infty} \boldsymbol{F_S}\,(\,\boldsymbol{s}\,)\ .\ \sin \boldsymbol{st}\ \boldsymbol{ds}$$

$\boldsymbol{F_s^{-1}}$ عکس تبدیل سینوسی نیمه بینهایت است .

تبدیل کسینوسی فوریه : که در آن هسته تبدیل یک عبارت کسینوسی می باشد

$$\boldsymbol{F_c}\big(\,\boldsymbol{f}\,(\,\boldsymbol{t}\,)\big) = \boldsymbol{F}\,(\,\boldsymbol{s}\,) = \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{\pi}}\int_{\mathbf{0}}^{\infty} \boldsymbol{f}\,(\,\boldsymbol{t}\,)\,\boldsymbol{cos}\ \ \boldsymbol{st.dt}$$

و عکس تبدیل،

$$\boldsymbol{F_c^{-1}}\big(\mathbf{f}\ (\mathbf{s}\ )\big) = \boldsymbol{f}\ (\ \boldsymbol{t}\ ) = \int_{\mathbf{0}}^{\infty} \boldsymbol{F}\ (\ \boldsymbol{s}\ ).\mathbf{cos}\ \ \boldsymbol{st}.\boldsymbol{ds}$$

تبدیلات نیمه بینهایت فوریه همان سری فوریه است در محدوده ∞ .

۳.۱.۲-تبدیلات بی‌نهایت (تبدیلات فوریه نامحدود)

تبدیل:

$$\mathrm{F}\ (\mathrm{f}\ (\mathrm{t})) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f\ (t) e^{-ist}\ \ dt = F(\ s\ )$$

عکس تبدیل:

$$F^{-1}(\mathrm{F}\ (\mathrm{s})) = \mathrm{f}\ (\mathrm{t}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) e^{\ ist}\ \ ds$$

۳.۱.۳-تبدیلات محدود فوریه

در حقیقت همان سری فوریه می‌باشد.

$$\mathrm{F_s}\ (\mathrm{f}\ (\mathrm{t})) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\ t\ )\ sin\ \frac{st\pi}{l}\ dt = F(\ s\ ) \qquad 0\ \leq t\ \leq l$$

$$F_s^{-1}\big(\ f\ (\ s\ )\big) = f(\ t\ ) = \sum_{s=1}^{\infty} f(\ s\ ).\ sin\ \frac{s\pi t}{l}$$

$$F_c\big(\ f\ (\ t\ )\big) = F(\ s\ ) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\ t\ ) \cos \frac{s\pi t}{l}$$

$$F_c^{-1}\big(\ \mathrm{F}\ (\ \mathrm{s}\ )\big) = f(\ t\ ) = \frac{F(\ 0\ )}{2} + \sum_{s=0}^{\infty} F(s\ ) \cos \frac{s\pi t}{l}$$

۳.۱.٤-تبدیلات فوریه مشتق اول و دوم

۱- در محدوده نیمه بینهایت $0\ \leq t\ \leq \infty$

$$F_s\left(f'(t)\right) = -s\,F_c(f(t))$$

$$\mathrm{F_c}\left(\mathrm{f}'(\mathrm{t})\right) = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{f}(0) + \mathrm{S}\,\mathrm{F_s}(\mathrm{f}(\mathrm{t}))$$

$$F_s\left(\mathrm{f}''(\mathrm{t})\right) = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{s}\,\mathrm{f}(0) - \mathrm{s}^2\mathrm{f_s}(\mathrm{f}(\mathrm{t}))$$

$$\mathrm{F_c}\left(\mathrm{f}''(\mathrm{t})\right) = -\frac{2}{\pi}\mathrm{f}'(0) - \mathrm{s}^2\mathrm{f_c}(\mathrm{f}(\mathrm{t}))$$

۲- در محدوده تمام بینهایت $-\infty \leq t \leq \infty$

$$\mathrm{F}(f'(t)) = is\,F\left(f(t)\right)$$

$$\mathrm{F}(f''(t)) = -s^2\,F\left(f(t)\right)$$

$$\mathrm{F}(f^{(n)}(t)) = (is)^n\,F\left(f(t)\right)$$

۳- در محدوده 0 و l

$$F_s(f'(t)) = \frac{d}{dt}\,F_s\left(f(t)\right)$$

$$F_c\left(f'(t)\right) = \frac{d}{dt}F_s(f(t))$$

$$F_s\left(f''(t)\right) = \frac{2s\pi}{l^2}[f(0) + (-1)^{s+1}f(l)] - \left(\frac{s\pi}{l}\right)^2 F_s\left(f(t)\right)$$

$$F_c\left(f''(t)\right) = -\frac{2}{l}[f'(0) + (-1)^{s+1}.f'(l)] - \left(\frac{s\pi}{l}\right)^2 F_c\left(f(t)\right)$$

۳.۱.۵-خاصیت کانولوشن

$$F(f(t) * g(t)) = F(f(t)) . F(g(t))$$

$$f(t) * g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\xi) \; g(\xi) \; d\xi$$

۳.۱.٦- استفاده از تبدیلات فوریه برای حل معادلات

زمانی که از تبدیلات فوریه برای حل معادلات استفاده می‌کنیم باید، چند نکته را در نظر بگیریم.

اگر متغییر **x** بین ∞ و ۰ باشد بایستی از تبدیلات فوریه نیمه بینهایت استفاده شود و تبدیل نسبت به **x** گرفته شود

.

برای اینکه بدانیم از تبدیلات سینوسی استفاده کنیم یا از تبدیلات کسینوسی بایستی به شرایط مرزی مسئله توجه شود مثلا اگر شرایط نوع اول داشته باشیم از تبدیل سینوسی و اگر شرط مرزی نوع دوم مانند $u_x(0\,,\,t) = \alpha$. از تبدیلات کسینوسی بایستی استفاده نمود . یعنی در واقع شرایط مرزی بایستی طوری باشد که با روابط $f_s\,(f''(t))$ و یا $f_c\,(f''(t))$ هماهنگی داشته باشد؛ یعنی اگر **f (0)** را به عنوان شرط مرزی داریم می بینیم که **f (0)** در رابطه $f_s\,(f''(t))$ وجود دارد پس باید از تبدیل سینوسی استفاده نمائیم .

توجه : اگر تبدیل نسبت به **x** گرفته میشود آنگاه تبدیل u_t چنین می‌شود

$$F(u_t) = \frac{\partial}{\partial t} F(u)$$

$$F(u_{tt}) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} F(u)$$

مثال (۱): معادله دیفرانسیل زیر را از طریق تبدیلات فوریه حل نمایید.

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \qquad\qquad 0 < x < \infty$$

$$u(0, t) = A$$

$$u\ (x, 0) = 0$$

حل:

از تبدیل سینوسی نیمه بی‌نهایت نسبت به x استفاده کرده از معادله دیفرانسیل سینوسی نسبت به x گرفته :

$$F_s(u_t) = F_s\ (u^2 u_{xx}) \tag{۱}$$

و داریم :

$$F_s(u_t) = \frac{\partial}{\partial t} F_s(\ u\ )$$

و همچنین داریم،

$$F_s(u_{xx}) = \frac{2}{\pi}\ s\, u\ (\ 0\ ,t\ ) - s^2 F_s\ (\ u\ )$$

اگر $F_s\ (\ u\ )$ یعنی تبدیل u را با U نمایش دهیم و روابط بالا را در رابطه (۱) قرار دهیم داریم :

$$\frac{\partial}{\partial t}\ U = \alpha^2 \left(\frac{2}{\pi}\ SA - S^2\ U \right)$$

$$U_t + \alpha^2 S^2\ U = \frac{2}{\pi} A\ \alpha^2\ U \tag{۲}$$

از شرط مرزی U (x , 0) تبدیل گرفته داریم:

$$F_s\big(\ u\ (\ x\ ,0\ )\big) = F_s\ (\ 0\ ) = 0 \quad \Rightarrow \quad U\ (\ 0\ )\ = \ 0 \tag{۳}$$

معادله دیفرانسیل اصلی تبدیل به معادله دیفرانسیل معمولی (ODE) (۲) شده است با شرط مرزی (۳) از حل این معادله دیفرانسیل و شرط مرزی آن، U بدست می‌آید:

$$U_t(t) = \alpha^2 s^2\ U\ (\ t\ ) = \frac{2}{\pi} A\ \alpha^2\ s$$

$$U\ (\ 0\ ) = \ 0$$

حل معادله دیفرانسیل بالا عبارت است از :

$$U\,(t) = \frac{2}{\pi}\frac{A}{S}\,(1 - e^{-s\alpha^2 t})$$

با عمل عکس تبدیل از **U** می توان **U (x , t)** را بدست آورد :

$$u\,(x,t) = F_s^{-1}\left(U\,(t)\right) = F_s^{-1}\left(\frac{2}{\pi}\frac{A}{S}\left(1 - e^{-s\alpha^2 t}\right)\right) = \int_0^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{A}{S}\left(1 - e^{-s\,\alpha^2 t}\right)\sin sx\,ds$$

مثال (۲): معادله دیفرانسیل زیر را از طریق تبدیل فوریه حل کنید.

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \qquad -\infty < x < \infty$$

$$u(x,0) = \phi\,(x)$$

$F_s(\mathbf{u})$ را با **U** نمایش داده یعنی $F_s(\mathbf{u}) = \mathbf{U}$ بنابراین داریم،

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha^2\left(-s^2 F_s(u)\right) = -\alpha^2 s^2 F_s(u) = -\alpha^2 s^2\,U$$

$$U_t = -\alpha^2 s^2\,U \qquad (۱)$$

از شرط مسئله تبدیل گرفته می‌شود و قرار می‌دهیم $F\left(\emptyset\,(x)\right) = \Phi(s)$:

$$F_s\left(\mathbf{u}\,(\mathbf{x},\mathbf{0})\right) = \mathbf{F}\left(\boldsymbol{\phi}\,(\mathbf{x})\right)$$

$$U\,(0) = \Phi(s) \qquad (۲)$$

معادله دیفرانسیل معمولی (**ODE**) (۱) به همراه شرط مرزی (۲) قابل حل است و حل آن به صورت زیر است:

$$U\,(s,t) = \Phi\,.\,e^{-\alpha^2 s^2 t}$$

با عکس تبدیل $u\,(x,t)$ بدست می آید

$$u(x,t) = F_S^{-1}\left(U\,(s,t)\right)$$

$$u(x,t) = F_S^{-1}\left(\Phi(s)\,.\;e^{-\alpha^2 s^2 t}\right)$$

با استفاده از خاصیت **convolution** داریم :

$$u(x,t) = F_S^{-1}\left(\Phi(s)\right) * \;F_s^{-1}\left(-e^{-\alpha^2 s^2 t}\right)$$

$$= \phi(x) * \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}}\;.\,e^{-}\,\frac{x}{4\alpha^2 t}$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2\pi}}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\boldsymbol{\phi}(\,\boldsymbol{\xi}\,)\,.\,\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{\alpha}\sqrt{\boldsymbol{\pi t}}}\,.\,\boldsymbol{e}^{-\frac{\boldsymbol{x-\xi}}{\mathbf{4}\boldsymbol{\alpha}^{2}\boldsymbol{t}}}\right)\boldsymbol{d\xi}$$

۳.۲-تبدیل لاپلاس

در این تبدیل هسته تبدیل e^{-st} بوده و در محدوده نیمه بی‌نهایت عمل کرده و به صورت زیر می‌باشد . این تبدیل معمولا روی بعد زمانی اعمال می‌شود و بعد زمان حذف می‌شود . اگر معادله دیفرانسیل جزئی بر حسب زمان و مکان باشد بعد زمان حذف شده و مسئله بر حسب بعد مکان تبدیل شده و مسئله ساده شده حل شده و جواب نهایی مسئله یا گرفتن عکس تبدیل لاپلاس از جواب بدست آمده بدست خواهد آمد .

۳.۲.۱-تعریف تبدیل لاپلاس

$$L\left(u\,(x\,,t\,)\right) = U\,(\,x\,,s\,) = \int_{0}^{\infty} u\,(\,x\,,t\,)e^{-st}\,\,dt$$

$$L^{-1}\left(U\,(\,\,x\,,s\,)\right) = u\,(\,x\,,t\,) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} U\,(\,s\,,t\,)\,e^{st}\,ds$$

عکس تبدیل لاپلاس برای توابعی که نقاط منفصل دارند را از قاعده مانده‌ها به صورت زیر می‌توان بدست آورد

.

$$L^{-1}\left(\mathrm{U}\,(\,\mathrm{s}\,,\mathrm{t}\,)\right) = \sum \mathrm{Res}\left(\,\mathrm{U}\,(\,\mathrm{x}\,,\mathrm{s}\,)\right)\mathrm{e}^{\mathrm{st}}$$

که در آن Res چنین تعریف می‌شود:

$$Res\left(\,f\,(z_0)\right) = \lim_{z\to z_0}\,(\,z-\,z_0)\,\,f\,(\,z\,)$$

$\boldsymbol{z_0}$ ریشه مخرج $\boldsymbol{f\,(\,z\,)}$ می باشد . اگر $\boldsymbol{z_0}$ ریشه مضاعف **m**ام باشد، آنگاه:

$$Res\left(\,f\,(z_0)\right) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f\,(\,z\,)\right]$$

برای بدست آوردن عکس تبدیل لاپلاس می توان از جدول های عکس تبدیل لاپلاس نیز استفاده نمود.

۳.۲.۲- تبدیل لاپلاس مشتقات

$$L\left(f'(t)\right) = sL\left(f(t)\right) - f(0)$$

$$L\left(f''(t)\right) = s^2 L\left(f(t)\right) - s f(0) - f'(0)$$

۳.۲.۳-خاصیت کانولوشن

$$L^{-1}\left(F(S) . G(s)\right) = f(t) * g(t)$$

مثال (۳): معادله دیفرانسیل زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$u_{\mathrm{t}} = \mathrm{u}_{\mathrm{xx}} \qquad 0 < x < \infty$$

$$u_x(0, t) - u(0, t) = 0$$

$$u(x, 0) = u_0$$

حل: نسبت به **t** از معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی تبدیل لاپلاس می‌گیریم :

$$L(u) = U$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dx}^2} \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{s}) - \mathrm{sU}(\mathrm{x}, \mathrm{s}) = -\mathrm{u}_0 \tag{۱}$$

$$L\left(u_x(0, t)\right) - L\left(u(0, t)\right) = 0$$

$$\frac{d}{dx} U(0, s) - U(0, s) = 0 \tag{۲}$$

معادله (۱) به همراه شرط مرزی (۲) قابل حل بوده و حل آن عبارت است از :

$$U\,(x\,,s\,) = u_0\left(\frac{-\,e^{-\sqrt{s}x}}{s\,(1+\sqrt{s})} + \frac{1}{s}\right)$$

با اعمال عکس تبدیل بر روی جواب، حل نهایی مسئله بدست می آید

$$L\,(u) = U$$

$$u = L^{-1}(U)$$

$$u\,(u\,,t\,) = L^{-1}\left(U_0\left[\frac{-\,e^{-\sqrt{s}x}}{s(1+\sqrt{s})} + \frac{1}{s}\right]\right)$$

$$= u_0L^{-1}\left(\frac{-e^{-\sqrt{s}x}}{s\,(\,1+\sqrt{s})}\right) + u_0L^{-1}\,(\frac{1}{s})$$

۳.۳-اصل دوهامل

در مواقعی که شرایط مرزی معادله دیفرانسیل جزئی تابعی از زمان باشد، **g(t)**، (شرایط مرزی متغییر) می‌توان با استفاده از حل همان معادله دیفرانسیل با شرایط مرزی ثابت حل مسئله را ارائه نمود یعنی ارتباطی بین حل مسئله با شرایط مرزی متغییر با حل مسئله با شرایط مرزی ثابت وجود دارد که در این ارتباط همان اصل دوهامل می باشد .

فرض کنیم حل مسئله زیر را می‌خواهیم :

$$u_t = u_{xx} \qquad\qquad 0 < x < 1$$

$$u\,(\,0\,,t\,) = 0$$

$$u\,(\,1\,,t\,) = g\,(\,t\,)$$

$$u\,(\,x\,,0\,) = 0$$

برای حل مسئله بالا توجه به حل مسئله با شرایط ثابت می‌کنیم و ارتباط بین حل دو مسئله بدست می‌آید .

مسئله با شرایط ثابت :

$$\underline{u}_t = \underline{u}_{xx} \qquad\qquad 0 < x < 1$$

$$\underline{u}(\, o \,, t\,) = 0$$

$$\underline{u}(\, 1 \,, t\,) = 1$$

$$\underline{u}(\, x \,, 0\,) = 0$$

برای حل مسئله با شرایط ثابت بالا از تبدیل لاپلاس استفاده می‌کنیم. تبدیل نسبت به **t** گرفته می‌شود .

$$\boldsymbol{L}\left(\underline{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{t}}\right) = \boldsymbol{L}\left(\underline{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{xx}}\right)$$

$$L\ \left(\underline{u}(\, 0 \,, t\,)\right) = 0$$

$$L\ \left(\underline{u}(\, 1 \,, t)\right) = L\ (1)$$

قرار می‌دهیم: $\boldsymbol{L}\left(\underline{\boldsymbol{U}}\right) = \coprod$

معادلات و شرایط به صورت زیر بدست می‌آید :

$$\frac{d^2\coprod}{dx^2} - s\coprod = 0$$

$$\coprod(0) = 0$$

$$\coprod(1) = \frac{1}{s}$$

حل این مسئله عبارت است از :

$$\coprod(\, x \,, s\,) = \frac{1}{s}\left[\frac{lim\ h\ \sqrt{s}x}{\lim h\sqrt{s}}\right]$$

جواب مسئله با شرایط ثابت :

$$u\ (\, x \,, t\,) = L^{-1}\left(\coprod(\, x \,, s\,)\right) = \mathrm{x} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\lim n\,\pi x\ .\ e^{-n^2\pi^2 t}$$

مسئله اصلی را در نظر گرفته و با استفاده از تبدیل لاپلاس حل می‌کنیم

$$L\,(U_t) = L\,(u_{xx})$$
$$L\big(\,u\,(0\,,t\,)\big) = 0$$
$$L\big(\,u\,(1\,,t\,)\big) = L\,\big(g(t)\big)$$

قرار می‌دهیم:

$$L\,(u) = \ P(s)$$
$$L\,\big(g(t)\big) = G(s)$$

تبدیل لاپلاس معادله دیفرانسیل چنین می شود

$$sP = \ \frac{d^2P}{dx^2}$$
$$\frac{d^2p}{dx^2} - \ sp = 0$$
$$P(0\,,s) = \ 0$$
$$P(1\,,s\,) = G(\,s\,)$$

حل این معادله دیفرانسیل معمولی با شرایط مرزی بدست آمده عبارت است از :

$$P(x\,,s) = G(s).\left[\frac{\sinh\sqrt{s}x}{\sinh\sqrt{s}}\right]$$
$$P(x\,,s) = G(s).\left[\frac{s\,\sinh\sqrt{s}x}{s\,\sinh\sqrt{s}}\right]$$

می‌دانیم:

$$\coprod(x,s)=\left[\frac{\sinh\sqrt{s}x}{s\sinh\sqrt{s}}\right]$$

بنابراین،

$$\boldsymbol{P(x\,,s)=G\;(s).}\left[\underbrace{\boldsymbol{s.\coprod(x,s)}}_{\boldsymbol{L(\underline{u}_t)}}\right]$$

$$=G\;(s).L(\underline{u}_t)$$

$$u(\,x\,,t\,)=\;L^{-1}(p(x,s))=\;L^{-1}\left(\,G(s).L(\underline{u}_t)\right)$$

$$=L^{-1}(G\;(\,s))*\;L^{-1}(L(\underline{u}_t))$$

$$=g(t)*\;\underline{u}_t\;(x,t)$$

فرم اول دوهامل

$$u\;(x\,,t)=\;\int_0^t g(\tau)\,.\,\underline{u}_t(\,x\,,t-\;\tau\,)\;d\tau$$

که در آن $\underline{\boldsymbol{u}}$ جواب مسئله با شرایط مرزی ثابت واحد می باشد و $\underline{\boldsymbol{u}}\,(\mathbf{x}\,,\mathbf{t})$ جواب مسئله اصلی یعنـی تـابع زمـان می باشد .

فرم دوم دوهامل : می توان فرم اول را با استفاده از انتگرال جزء به جزء به فرم دوم که در زیر آمده است تبـدیل نمود :

$$u\;(\,x\,,t\,)=\;g\;(0)\underline{u}(\,x\,,t\,)+\;\int_0^t \underline{u}\,(\,x\,,t-\;\tau\,)g'(\tau)\;d\tau$$

که در آن $\underline{\boldsymbol{u}}$ جواب سیستم با شرایط مرزی واحد می باشد.

٤- تمرینات

١- با استفاده از تبدیل فوریه محدود، معادله زیر را حل کنید.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < 6 \quad , \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0$$

$$u(6,t) = 0$$

$$u(x,0) = 2x$$

۲- معادله دیفرانسیل زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$T(0,t) = T_1$$

$$T(\infty,t) = T_0$$

$$T(x,0) = T_0$$

ریاضیات مهندسی پیشرفته

جلسه نهم

حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

(روش تفاضل محدود)

فهرست مطالب

بسم الله الرحمن الرحیم

۱-چکیده مطالب:

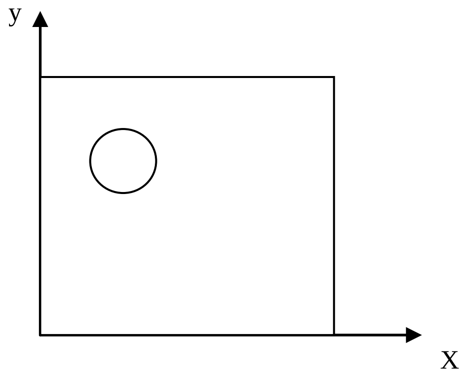
زمانی که نتوان برای معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی، جواب تحلیلی پیدا کرد، باید از تقریب عددی استفاده نمود. برای حل عددی معادله دیفرانسیل روش‌های مختلفی وجود دارد. برای مسائلی که مرزهای آنها شکل خاصی ندارد که کمتر در مهندسی شیمی با آنها برخورد می‌کنیم، از روش المان محدود استفاده می‌کنیم و برای مسائلی که مرز مشخصی دارند، از روش تفاضلات محدود استفاده می‌کنیم. استفاده از روش تفاضل محدود برای تقریب زدن معادلات هایپربولیک، پارابولیک و بیضوی در این جلسه به طور کامل توضیح داده شده و شرط پایداری این روش‌ها نیز بررسی گردیده است.

۲-اهداف:

بکارگیری روش حل عددی تفاضل محدود برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و بررسی پایداری روش.

۳- روش تفاضل محدود

تا کنون با روش‌های تحلیلی مختلف برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی آشنا شده‌ایم. اما مسائل زیادی وجود دارد که نمی‌توان با استفاده از روش‌های تحلیلی آنها را حل کرد. به عنوان مثال معادله لاپلاس را برای دامنه‌ای مانند شکل ۳-۱ که دارای یک حفره می‌باشد، نمی‌توان به صورت تحلیلی حل کرد.



شکل ۳-۱ دامنه مستطیلی با حفره‌ای در میان آن

برای این‌گونه مسائل باید از تقریب‌های عددی استفاده کرد. برای این کار روش‌های متنوعی وجود دارد. مسائلی که مرزهای آنها شکل خاصی ندارند (که در مهندسی شیمی، با این گونه مسائل کمتر برخورد می‌شود)، با استفاده از روش المان محدود و مسائلی که مرزهای مشخصی دارند با روش تفاضل محدود، حل می‌شوند.

۳.۱- تقریب مشتق مرتبه اول

برای تقریب مشتق‌ها به صورت تفاضلی از بسط تیلور (معادله ۳-۱) استفاده می‌شود.

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x) + \frac{1}{6}h^3 f'''(x) + \cdots \qquad (۱-۳)$$

اگر بسط تیلور را از جمله دوم قطع کنیم،

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{1}{2}h^2 f''(x) \qquad (۲-۳)$$

که در معادله بالا $\frac{1}{2}h^2 f''(x)$، خطای برش نامیده می‌شود که در حقیقت اختلاف میان مشتق جزئی و تخمین آن به صورت تفاضل محدود می‌باشد.

مشتق را می‌توان مانند معادله ۳-۲ به صورت پیشرو و یا مانند معادله ۳-۳ به صورت پسرو و یا مانند معادله ۳-۴ به صورت تفاضل مرکزی تقریب زد.

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \frac{1}{2} h f''(x) \qquad (۳-۳)$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(x) \qquad (۴-۳)$$

علاوه بر خطای برشی، خطای گردکردن برای تفاضـل پیشـرو و پسـرو بـه صـورت معادلـه ۳-۵ و بـرای تفاضـل مرکزی به صورت معادله ۳-۶ می‌باشد.

$$e_{round\ off} = \frac{2\varepsilon}{h} \qquad (۵-۳)$$

$$e_{round\ off} = \frac{\varepsilon}{h} \qquad (۶-۳)$$

h هم روی خطای گردکردن و هم روی خطای برش تأثیر دارد. اگر h زیاد شود، خطای گرد کردن هم بالا می رود، ولی خطای برش کم می‌شود. بنابراین باید یک مقدار بهینه برای h پیدا کرد. مقدار بهینه h به صورت زیـر بدست می‌آید.

$$h > \varepsilon^{\frac{1}{1+r}} \qquad (۷-۳)$$

که در معادله ۳-۷، r، درجه h در خطای برشی مـی‌باشـد. بـه عنـوان مثـال در تقریـب تفاضـل مرکـزی $r = 2$ و بنابراین $h > \varepsilon^{\frac{1}{3}}$.

مشتقات را به صورت وزنی نیز می‌توان باز کرد:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \theta \left[\frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}\right] + (1-\theta)\left[\frac{u(x+h) - u(x)}{h}\right] \ , \ \ 0 \le \theta \le 1 \qquad (۸-۳)$$

در معادله ۳-۸ در واقع مشتق به صورت ترکیبی از تفاضل پیشرو و مرکزی باز شده است.

۳.۲- تقریب مشتق مرتبه دوم

با استفاده از بسط تیلور داریم:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{1}{2}h^2f''(x)+\frac{1}{6}h^3f'''(x)+\cdots$$

$$f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\frac{1}{2}h^2f''(x)-\frac{1}{6}h^3f'''(x)+\cdots$$

$$f(x+h)+f(x-h)=2f(x)+h^2f''(x)+\cdots$$

بنابراین،

$$f''(x)=\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}-\frac{2h^2}{4!}f^{(4)}(x) \qquad (۹-۳)$$

که خطای برش همانطور که دیده می‌شود $\frac{2h^2}{4!}f^{(4)}(x)$ می‌باشد.

٤- معادلات پارابولیک

معادله هدایت گرمایی یک‌بعدی را با شرایط مرزی و اولیه زیر در نظر می‌گیریم.

$$u_t=\alpha u_{xx} \ , \ \ 0<x<1, \ \ t>0 \qquad (۱-۴)$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0 \qquad (۲-۴)$$

$$u(x,0)=f(x) \qquad (۳-۴)$$

برای حل این مسأله به روش عددی باید x و t را به صورت زیر باز می‌کنیم.

$$x_i=ih \ , \ \ i=1,2,3,\dots \qquad (۴-۴)$$

$$t_j=jk \ , \ \ j=1,2,3,\dots \qquad (۵-۴)$$

۴.۱-روش تفاضل محدود صریح

اگر مشتق نسبت به زمان را با تفاضل پیشرو تخمین زده و مشتق نسبت به مکان را با تفاضل مرکزی تخمین بزنیم،

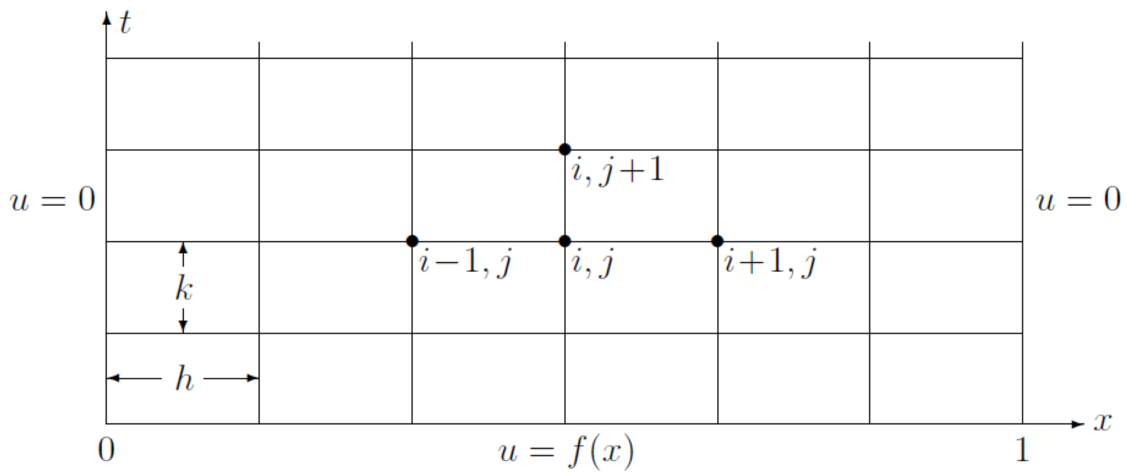
معادله ۴-۱ به صورت زیر باز می‌شود.

$$\frac{u(i,j+1)-u(i,j)}{k}=\alpha\frac{u(i-1,j)-2u(i,j)+u(i+1,j)}{h^2} \qquad (۶-۴)$$

بنابراین،

$$u(i,j+1) = k\alpha\left[\frac{u(i-1,j) - 2u(i,j) + u(i+1,j)}{h^2}\right] + u(i,j) \tag{۷-۴}$$

در این روش هر نقطه مستقل محاسبه می‌شود و وابسته به نقطه مجهول دیگری نیست (شکل ٤-١).



شکل ٤-١ تقسیم‌بندی روش تفاضل محدود صریح

اگر پارامتر r را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$r = \frac{\alpha k}{h^2} \tag{۸-۴}$$

معادله ۴-۷ به صورت زیر در می‌آید.

$$u(i,j+1) = r[u(i-1,j) + u(i+1,j)] + (1-2r)u(i,j) \tag{۹-۴}$$

۴.۲- روش کرانک – نیکلسون

روش کرانک–نیکلسون یک الگوریتم پایدار است که در آن می‌توان گام‌های زمانی بزرگتری را نسبت به روش صریح به کار برد. در حقیقت پایداری این روش، بر خلاف روش صریح وابسته به پارامتر r نمی‌باشد.

اساس روش کرانک-نیکلسون نوشتن معادله تفاضلی محدود در یک نقطه میانی در زمان است: $i, j+\frac{1}{2}$. فرم تقریب تفاضلی معادله ۴-۱ به صورت زیر می‌شود:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1}}{h^2}+\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}\right]=\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{\alpha k} \qquad (۱۰-۴)$$

بر اساس پارامتر r:

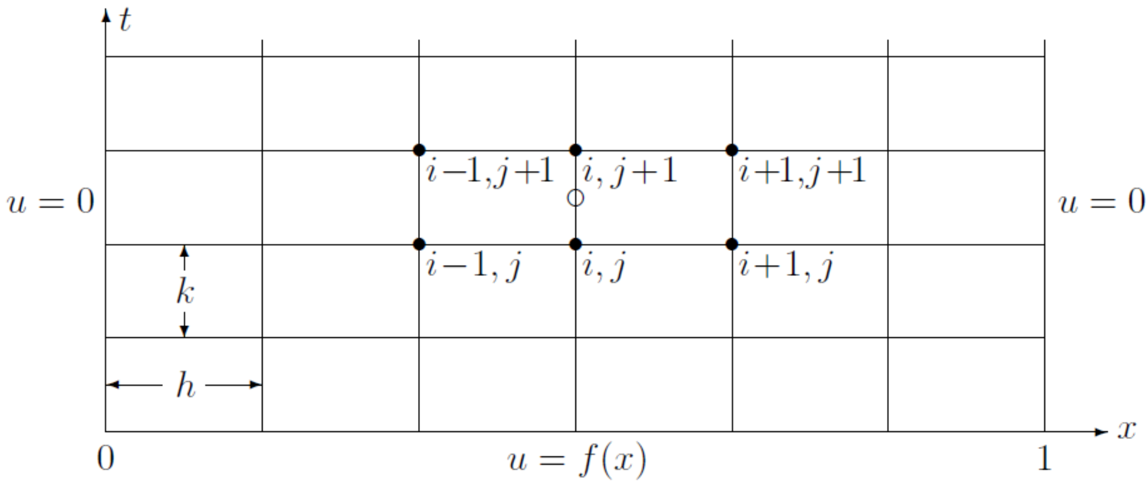
$$-ru_{i-1,j+1}+2(1+r)u_{i,j+1}-ru_{i+1,j+1}=ru_{i-1,j}+2(1-r)u_{i,j}+ru_{i+1,j} \qquad (۱۱-۴)$$

معادله ۴-۱۱، الگوریتم کرانک نیکلسون می‌باشد. تقسیم‌بندی در این روش به صورت شکل ۴-۲ می‌باشد.

اگر فرم باز شده معادله ۴-۱ را به صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{u(i,j+1)-u(i,j)}{k} = (1-\theta)\left[\alpha\frac{u(i-1,j)-2u(i,j)+u(i+1,j)}{h^2}\right] + \theta\left[\alpha\frac{u(i-1,j+1)-2u(i,j+1)+u(i+1,j+1)}{h^2}\right] \qquad (۱۲-۴)$$

در روش صریح $\theta = 0$، در روش غیرصریح $\theta = 1$ و در روش کرانک-نیکلسون $\theta = \frac{1}{2}$ می‌باشد.



شکل ٤-۲ تقسیم بندی در روش کرانک-نیکلسون

۴.۳- شرایط مرزی شامل مشتق

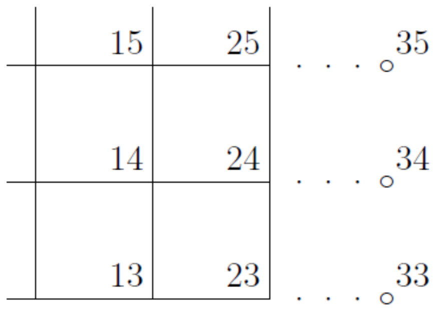
بار دیگر معادله هدایت گرمایی به فرم معادله ۴-۱ را با شرایط مرزی و اولیه زیر در نظر می‌گیریم.

$$u(0,t) = 0 \tag{۱۳-۴}$$

$$u_x(1,t) = g(t) \tag{۱۴-۴}$$

$$u(x,0) = f(x) \tag{۱۵-۴}$$

همانطور که دیده می‌شود، یکی از شرایط مرزی شامل مشتق می‌باشد (شرط مرزی نیومن). برای تقسیم‌بندی این مسأله باید در مرز سمت راست برای تخمین مشتق یک سری نقطه مجازی خارج از دامنه درنظر بگیریم. مانند نقاط ۳۳، ۳۴ و ۳۵ در شکل ۴-۳.



شکل ٤-۳ نحوه تقسیم بندی برای شرط مرزی شامل مشتق

نقطه مرزی ۲۵ را در شکل ۴-۳ در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم که از الگوریتم صریح استفاده می‌کنیم. از آنجایی که u_{25} را نمی‌دانیم، باید برای آن معادله تفاضل محدود را بنویسیم.

$$u_{25} = ru_{14} + (1-2r)u_{24} + ru_{34} \tag{۱۶-۴}$$

ازطرفی،

$$\frac{u_{34} - u_{14}}{2h} = g_{24} \tag{۱۷-۴}$$

متغیر مجازی u_{25} با استفاده از دو معادله بالا حذف می‌شود و برای نقطه مرزی ۲۵، معادله زیر را خواهیم داشت.

$$u_{25} = 2ru_{14} + (1-2r)u_{24} + 2rhg_{24} \tag{۱۸-۴}$$

۵- معادلات هایپربولیک

برای حل معادلات هایپربولیک که شامل حرکت موجی می‌باشند، اگر داده‌های اولیه ناپیوسته باشند، دقیق‌ترین روش برای حل معادلات روش مشخصه می‌باشد. اما برای مسائلی که ناپیوستگی ندارند، می‌توان به راحتی از روش تفاضل محدود ویا المان محدود، برای حل معادله استفاده کرد.

۵.۱- تفاضلات نامحدود

معادله موج را با شرایط مرزی و اولیه زیر در نظر می‌گیریم.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad , \quad 0 < x < a \quad , \quad t > 0 \tag{۱-۵}$$

$$u(0,t) = u(a,t) = 0 \tag{۲-۵}$$

$$u(x,0) = f(x) \tag{۳-۵}$$

$$u_t(x,0) = g(x) \tag{۴-۵}$$

تخمین معادله ۵-۱ به صورت تفاضل محدود مرکزی به صورت زیر می‌شود.

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{c^2 k^2} \tag{۵-۵}$$

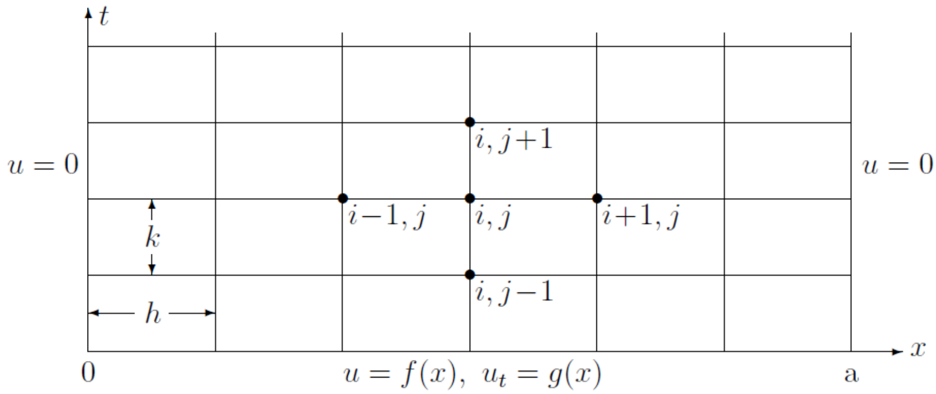
پارامتر r را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$r = \frac{ck}{h} = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \tag{۶-۵}$$

اگر برای $u_{i,j+1}$ حل کنیم،

$$u_{i,j+1} = r^2 u_{i-1,j} + 2(1-r^2)u_{i,j} + r^2 u_{i+1,j} - u_{i,j-1} \tag{۷-۵}$$

تقسیم بندی برای این مسأله در شکل ۵-۱ نشان داده شده است. اگر حل همه مقادیر زمانی را تـا گـام jام داشـته باشیم، می‌توان $u_{i,j+1}$ را برحسب مقادیر مشخص، محاسبه کرد. بنابراین این الگوریتم، یک الگوریتم صریح مـی باشد. می‌توان نشان داد که این الگوریتم، برای $r \leq 1$ پایدار وبرای $r > 1$ ناپایدار می‌باشد.



شکل ۵-۱تقسیم‌بندی برای حل صریح معادله موج

همانطور که دیده می‌شود، در این روش باید حل عددی مربوط به دو گام زمانی متوالی را داشته باشیم، تا بتوانیم به گام زمانی بعدی برویم. اگر در معادله ۵-۷ برای بدست آوردن حل عددی در انتهای اولین گام زمانی، $j = 0$ قرار دهیم، داریم:

$$u_{i,1} = r^2 u_{i-1,0} + 2(1 - r^2)u_{i,0} + r^2 u_{i+1,0} - u_{i,-1} \tag{۵-۸}$$

همه ترم‌های سمت راست مشخص هستند به جز $u_{i,-1}$، با نوشتن تخمین تفاضلی مرکزی برای اولین مشتق زمانی در زمان صفر، داریم:

$$\frac{u_{i,1} - u_{i,-1}}{2k} = g_i \tag{۵-۹}$$

و یا

$$u_{i,-1} = u_{i,1} - 2kg_i \tag{۵-۱۰}$$

اگر معادله ۵-۱۰ را در معادله ۵-۸ قرار دهیم:

$$u_{i,1} = r^2 u_{i-1,0} + 2(1 - r^2) u_{i,0} + r^2 u_{i+1,0} - u_{i,1} + 2kg_i \qquad (۱۱-۵)$$

و یا

$$u_{i,1} = \frac{1}{2} r^2 u_{i-1,0} + (1 - r^2) u_{i,0} + \frac{1}{2} r^2 u_{i+1,0} + kg_i \qquad (۱۲-۵)$$

بنابراین برای انجام محاسبات ردیف اول از معادله ۵–۱۲ و برای مابقی ردیف‌ها از معادله ۵–۷ استفاده می کنیم.

٦-معادلات بیضوی

معادله لاپلاس دو بعدی در صفحه مستطیلی، نمونه‌ای از معادلات بیضوی می‌باشد. فرض کنید معادله لاپلاس و چهار شرط مرزی آن به صورت زیر باشند.

$$\nabla^2 T(x, y) = 0 \quad , \quad 0 < x < a \quad , \quad 0 < y < b \qquad (۱-۶)$$

$$T(0, y) = g_1(y) \qquad (۲-۶)$$

$$T(a, y) = g_2(y) \qquad (۳-۶)$$

$$T(x, 0) = f_1(x) \qquad (۴-۶)$$

$$T(x, b) = f_2(x) \qquad (۵-۶)$$

برای بدست آوردن حل تقریبی معادله، دامنه مستطیلی را به صورت یکنواخت تقسیم‌بندی می کنیم (شکل ۶-۱).

با استفاده از تقریب تفاضل محدود مرکزی برای مشتقات مرتبه دوم:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{h^2} \qquad (۶-۶)$$

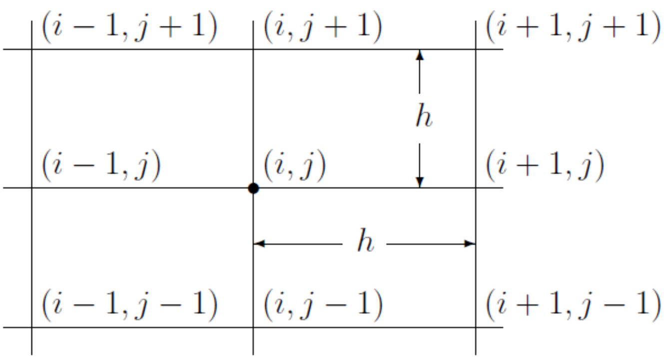
$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{h^2} \qquad (۷-۶)$$

تقریب معادله لاپلاس با استفاده از تفاضل محدود به صورت زیر درمی‌آید.

$$\frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{h^2} + \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{h^2} = 0 \qquad (۶-۸)$$

و یا

$$4T_{i,j} - \left(T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}\right) = 0 \qquad (۶-۹)$$



شکل ٦-١ همسایگی نقطه (i ،j)

زمانی که از این تقسیم‌بندی یکنواخت استفاده می‌شود، جواب در یک نقطه مانند (i ،j)، میانگین چهار نقطه موجود در همسایگی آن می‌باشد.

۶.۱- شرایط مرزی شامل مشتق

فرض کنید معادله ۶-۱ را با شرایط مرزی ذکر شده داریم، اما این بار به جای شرط ۶-۳، یک شرط مرزی نیومن به صورت زیر داریم:

$$\frac{\partial T(a,y)}{\partial x} = g(y) \qquad (۶-۱۰)$$

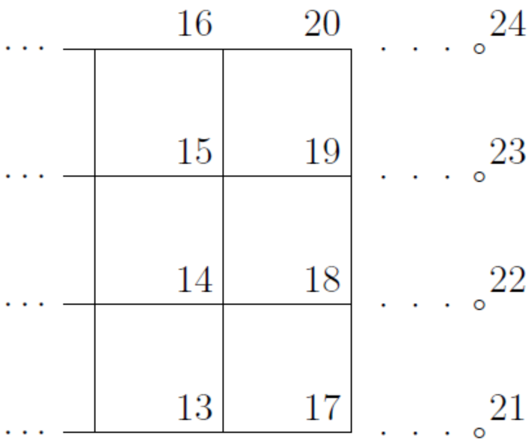
باید تقسیم‌بندی را گسترش دهیم به صورتی که در مرز سمت راست، یک سری نقطه مجازی اضافه شود(شکل ۶-۲). بنابراین برای تقریب مشتق روی مرز می‌توان از یک تفاضل مرکزی استفاده کرد.

$$\frac{\partial T(a,y)}{\partial x} = g(y) \qquad (۶-۱۱)$$

$$g_{18}=\frac{\partial T_{18}}{\partial x}\approx\frac{T_{22}-T_{14}}{2h}$$ (۱۲-۶)

$$T_{22}=T_{14}+2hg_{18}$$ (۱۳-۶)

از طرفی، معادله تعادلی برای نقطه ۱۸ به صورت معادله ۶-۱۴ است.



شکل ٦-٢ تقسیم بندی زمانی که شرط مرزی از نوع نیومن می‌باشد

$$4T_{18}-(T_{14}+T_{22}+T_{17}+T_{19})=0$$ (۱۴-۶)

زمانی که معادله ۶-۱۴ را با معادله ۶-۱۳ ترکیب کنیم، خواهیم داشت:

$$4T_{18}-2T_{14}-T_{17}-T_{19}=2hg_{18}$$ (۱۵-۶)

مثال(۱): معادله زیر را با استفاده از روش تفاضل محدود، حل کنید.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=4\quad,\quad 0\le x\le 3\quad,\quad 0\le y\le 2$$ (۱۶-۶)

$$\frac{\partial u(x,2)}{\partial y}=2u$$ (۱۷-۶)

$$u(0,y)=1$$ (۱۸-۶)

$$u(3,y)=1$$ (۱۹-۶)

$$u(x,0)=f(x) \tag{۶-۲۰}$$

حل-

$$\Delta x=h \quad \Longrightarrow \quad x=ih \xrightarrow{h=1} \quad 0\le i\le 3 \quad , \quad \mathrm{i}=0,1,2,3$$

$$\Delta y=k \quad \Longrightarrow \quad x=jk \xrightarrow{k=\frac{1}{2}} \quad 0\le j\le 4 \quad , \quad \mathrm{j}=0,1,2,3,4$$

$$\frac{u(i-1,j)-2u(i,j)+u(i+1,j)}{h^2}+2\left[\frac{u(i,j-1)-2u(i,j)+u(i,j+1)}{k^2}\right]=4$$

$$u(i-1,j)-18u(i,j)+u(i+1,j)+8u(i,j-1)+8u(i,j+1)=4$$

$$u(0,y)=1 \quad \Longrightarrow \quad u(0,j)=1$$

$$u(3,y)=1 \quad \Longrightarrow \quad u(3,j)=1$$

$$u(x,0)=f(x) \quad \Longrightarrow \quad u(i,0)=f(ih)$$

$$\frac{\partial u(x,2)}{\partial y}=2u \quad \Longrightarrow \quad \left.\frac{u(i,j+1)-u(i,j)}{k}\right|_{\substack{x,y=2\\ i,j=4}}=2u(i,j)|_{i,j=4}$$

$$k=\frac{1}{2}$$

بنابراین،

$$u(i,5)=2u(i,4) \tag{۶-۲۱}$$

- $i=1 \quad , \quad j=1$

  $$u(0,1)-18u(1,1)+u(2,1)+8f(1)+8u(1,2)=4$$

فرض می‌کنیم $f(1)=1$،

$$1-18u(1,1)+8u(1,2)=4$$

$$-18u(1,1)+u(2,1)+8u(1,2)=-5 \tag{۶-۲۲}$$

- $i=2 \quad , \quad j=1$

$$u(1,1)-18u(2,1)-8u(2,2)=-5 \tag{۶-۲۳}$$

- $i=1 \quad , \quad j=2$

$$-18u(1,2) + u(2,2) + 8u(1,1) + 8u(1,3) = 3 \tag{۲۴-۶}$$

- $i = 1 \quad , \quad j = 4$

  $$1 - 18u(1,4) + u(2,4) + 8u(1,3) + 8u(1,5) = 4$$

با توجه به معادله ۶-۲۱ که از شرط مرزی نوع دوم بدست آمد:

$$-2u(1,4) + u(2,4) + 8u(1,3) = 3 \tag{۲۵-۶}$$

چهار معادله از هشت معادله به صورت نمونه در بالا بدست آمد. بعد از بدست آوردن هر هشت معادله، دستگاه هشت معادله، هشت مجهول تکمیل و سپس حل می‌شود.

۷- چک کردن جواب

برای اطمینان از حل معادله باید سه بررسی انجام شود. اول بررسی خطای برشی است، به این آزمون، آزمون سازگاری می‌گویند. سپس خطای گرد کردن بررسی می‌شود که به آن آزمون پایداری می‌گویند و در نهایت آزمون همگرایی را داریم که در روش تفاضل محدود، اگر جواب سازگار و پایدار باشد، می‌توان نتیجه گرفت که روش حل همگرا می‌باشد.

۷.۱- آزمون سازگاری

باید نشان دهیم زمانی که گام به سمت صفر میل می‌کند، خطا نیز به سمت صفر میل می‌کند.

مثال (۲):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{۱-۷}$$

تقریب عددی این معادله به صورت زیر می‌باشد.

$$\frac{u(i,j+1) - u(i,j)}{k} = \frac{u(i-1,j) - 2u(i,j) + u(i+1,j)}{h^2} \tag{۲-۷}$$

جواب عددی حاصله u می‌باشد که به ازای آن $F(u) = 0$. اگر $\bar{u}$ جواب واقعی باشد، آنگاه $F(\bar{u}) = T$، که T، خطا می‌باشد.

$$F(\bar{u}) = \frac{\bar{u}(i,j+1) - \bar{u}(i,j)}{k} - \frac{\bar{u}(i-1,j) - 2\bar{u}(i,j) + \bar{u}(i+1,j)}{h^2} \qquad (۳-۷)$$

باید نشان دهیم:

$$h,k \to 0 \quad \therefore \quad T \to 0$$

$$\bar{u}(\mathrm{i},\mathrm{j}+1) = \bar{u}(\mathrm{i},\mathrm{j}) + \mathrm{k}\left(\frac{\partial \bar{\mathrm{u}}}{\partial \mathrm{t}}\right)_{\mathrm{i,j}} + \frac{1}{2}\mathrm{k}^2\left(\frac{\partial^2 \bar{\mathrm{u}}}{\partial \mathrm{t}^2}\right)_{\mathrm{i,j}}$$

$$\bar{u}(\mathrm{i}-1,\mathrm{j}) = \bar{u}(\mathrm{i},\mathrm{j}) - \mathrm{h}\left(\frac{\partial \bar{\mathrm{u}}}{\partial \mathrm{x}}\right)_{\mathrm{i,j}} + \frac{1}{2}\mathrm{h}^2\left(\frac{\partial^2 \bar{\mathrm{u}}}{\partial \mathrm{x}^2}\right)_{\mathrm{i,j}}$$

$$\bar{u}(\mathrm{i}+1,\mathrm{j}) = \bar{u}(\mathrm{i},\mathrm{j}) + \mathrm{h}\left(\frac{\partial \bar{\mathrm{u}}}{\partial \mathrm{x}}\right)_{\mathrm{i,j}} + \frac{1}{2}\mathrm{h}^2\left(\frac{\partial^2 \bar{\mathrm{u}}}{\partial \mathrm{x}^2}\right)_{\mathrm{i,j}}$$

با جایگزاری در معادله ۷-۳ داریم:

$$F(\bar{u}) = \left(\frac{\partial \bar{\mathrm{u}}}{\partial \mathrm{t}} - \frac{\partial^2 \bar{\mathrm{u}}}{\partial \mathrm{x}^2}\right) + \frac{1}{2}k\frac{\partial^2 \bar{\mathrm{u}}}{\partial \mathrm{t}^2} \qquad (۴-۷)$$

با توجه به معادله ۷-۴ می‌بینیم که هرگاه $k \to 0$، آنگاه $F(\bar{u}) = 0$، بنابراین معادله سازگار است.

حال مشتقات را به صورت وزنی باز می کنیم،

$$\frac{u(i,j+1) - u(i,j-1)}{2k} = \frac{u(i+1,j) - 2[\theta u(i,j+1) + (1-\theta)u(i,j-1)] + u(i-1,j)}{h^2}$$

$$F(\bar{u}) = \frac{\bar{u}(i,j+1) - \bar{u}(i,j-1)}{2k} - \frac{\bar{u}(i+1,j) - 2[\theta \bar{u}(i,j+1) + (1-\theta)\bar{u}(i,j-1)] + \bar{u}(i-1,j)}{h^2} \qquad (۵-۷)$$

با استفاده از بسط تیلور داریم:

$$\bar{u}(i+1,j)=\bar{u}(i,j)+h\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\Big|_{i,j}+\frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2}\Big|_{i,j}+\frac{1}{6}h^3\frac{\partial^3\bar{u}}{\partial x^3}\Big|_{i,j}+\frac{1}{24}h^4\frac{\partial^4\bar{u}}{\partial x^4}\Big|_{i,j}$$

$$\bar{u}(i-1,j)=\bar{u}(i,j)-h\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\Big|_{i,j}+\frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2}\Big|_{i,j}-\frac{1}{6}h^3\frac{\partial^3\bar{u}}{\partial x^3}\Big|_{i,j}+\frac{1}{24}h^4\frac{\partial^4\bar{u}}{\partial x^4}\Big|_{i,j}$$

$$\bar{u}(i,j+1)=\bar{u}(i,j)+k\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\Big|_{i,j}+\frac{1}{2}k^2\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}\Big|_{i,j}+\frac{1}{6}k^3\frac{\partial^3\bar{u}}{\partial t^3}\Big|_{i,j}+\frac{1}{24}k^4\frac{\partial^4\bar{u}}{\partial t^4}\Big|_{i,j}$$

$$\bar{u}(i,j-1)=\bar{u}(i,j)-k\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\Big|_{i,j}+\frac{1}{2}k^2\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}\Big|_{i,j}-\frac{1}{6}k^3\frac{\partial^3\bar{u}}{\partial t^3}\Big|_{i,j}+\frac{1}{24}k^4\frac{\partial^4\bar{u}}{\partial t^4}\Big|_{i,j}$$

با جایگزاری در معادله ۷–۵ داریم،

$$F(\bar{u})=\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}-\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2}\right)+\frac{k^2}{6}\frac{\partial^3\bar{u}}{\partial t^3}-\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4\bar{u}}{\partial x^4}+(2\theta-1)\frac{2}{h^2}k\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+\frac{h^2}{k^2}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2} \qquad (۶–۷)$$

با توجه به معادله ۷–۶ در صورتی

$$h,k\to 0 \quad\Rightarrow\quad F(\bar{u})\to 0$$

می‌باشد که $\theta=\frac{1}{2}$. بنابراین شرط سازگار بودن $\theta=\frac{1}{2}$ است.

۷.۲- آزمون پایداری

زمانی که اندازه تقسیم‌بندی، کوچک می‌شود، تعداد محاسبات بالا رفته و بنابراین خطای گرد کردن نیز بالا می رود. برای اثبات پایداری باید نشان دهیم:

$$\frac{\left|\epsilon_{j+1}\right|}{\left|\epsilon_j\right|}<1 \qquad (۷–۷)$$

معادله ۷–۷ به این معناست که هر چه جلوتر می‌رویم، خطا کم می‌شود.

مثال (۳):

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (۸–۷)$$

$$u = u_{exp} + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad u_{exp} = u - \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial(u-\varepsilon)}{\partial t} = \beta\frac{\partial^2(u-\varepsilon)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \beta\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2}$$

معادله را به صورت صریح باز می‌کنیم($\beta = 1$).

$$\begin{aligned} u(i,j+1) - ru(i-1,j) - (1-2r)u(i,j) - ru(i+1,j) \\ = \varepsilon(i,j+1) - r\varepsilon(i-1,j) - (1-2r)\varepsilon(i,j) - r\varepsilon(i+1,j) \end{aligned}$$

سمت راست معادله بالا برابر با صفر است، زیرا جواب‌های عددی در آن صدق می‌کنند، بنابراین:

$$\varepsilon(i,j+1) = r\varepsilon(i-1,j) + (1-2r)\varepsilon(i,j) + r\varepsilon(i+1,j)$$

$$|\varepsilon(i,j+1)| \le |r\varepsilon(i-1,j)| + |(1-2r)\varepsilon(i,j)| + |r\varepsilon(i+1,j)|$$

فرض می‌کنیم، $1 - 2r > 0 \ , \ r > 0$

$$|\varepsilon(i,j+1)| \le r|\varepsilon(i-1,j)| + (1-2r)|\varepsilon(i,j)| + r|\varepsilon(i+1,j)|$$

$$|\varepsilon(i,j+1)| \le r|\epsilon_j| + (1-2r)|\epsilon_j| + r|\epsilon_j|$$

$$|\varepsilon(i,j+1)| \le \epsilon_j \quad \Rightarrow \quad \frac{|\epsilon_{j+1}|}{|\epsilon_j|} < 1$$

بنابراین، شرط پایداری برقرار است.

حال معادله را به صورت غیرصریح باز می‌کنیم، دستگاه معادلات جبری حاصل از معادله، فرم ماتریسی به صورت زیر دارد.

$$A\vec{u}_{j+1} = B\vec{u}_j$$

$$\vec{u}_{j+1} = A^{-1}B\vec{u}_j \qquad (۹-۷)$$

$$Z = error \ \ , \ \ c = A^{-1}B$$

$$\vec{Z}_j = u_j^{exp} - u_j \quad \Rightarrow \quad \vec{Z}_{j+1} = c\vec{Z}_j$$

$$\vec{Z}_{j+1} = c(c\vec{Z}_{j-1})$$

$$\vec{Z}_{j+1} = c\left(c(c\vec{Z}_{j-2})\right)$$

$\vdots$

$$\vec{Z}_{j+1} = c^{j+1}\vec{Z}_0 \quad (۱۰-۷)$$

برای پایداری باید زمانیکه $j \to \infty$، آنگاه $Z \to 0$

می‌دانیم،

$$\|A\| < 1 \quad \lim_{r\to\infty} A^r = 0$$

بنابراین در معادله ۷-۱۰، شرط پایداری این است که نرم c یعنی $\|c\|$ کوچکتر از یک باشد. همانطور که دیدیم در روش صریح، همواره پایداری برقرار بود، اما در این روش، یک شرط برای پایدار بودن داریم.

اکنون به تعریف نرم می‌پردازیم.

$$\|\vec{X}\|_p = \left(\sum |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

نرم یک، ماکزیمم جمع قدرمطلق عناصر ستون‌ها می‌باشد:

$$\|\vec{X}\| = \sum |x_i|$$

نرم دو، ماکزیمم مقادیر ویژه می‌باشد:

$$\|\vec{X}\|_2 = \left(\sum |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

نرم بی‌نهایت، ماکزیمم جمع قدرمطلق عناصر هر سطر می‌باشد:

$$\|\vec{X}\|_\infty = \left(\sum |x_i|^\infty\right)^{\frac{1}{\infty}}$$

مثال (۴):

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\|A\| = 4$$

$\|A\|_2 = max|\lambda_s| = \rho(A)$ شعاع طیفی

$\|A\|_\infty = 5$

برای برخی ماتریس‌ها می‌توان مقادیر ویژه را از رابطه‌ای خاص بدست آورد.

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 & \dots \\ c & a & b & 0 & 0 & \dots \\ 0 & c & a & b & 0 & \dots \\ 0 & 0 & c & a & b & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}_{N\times N} \quad , \quad bc > 0$$

$$\lambda_s = a + 2\sqrt{bc}\cos\frac{s\pi}{N+1} \quad ; \quad 1 \le s \le N \tag{۱۱-۷}$$

۷.۲.۱- تئوری گرگوری

$$\rho(A) \le \|A\|, \|A\|_\infty \tag{۱۲-۷}$$

یعنی اگر ثابت کنیم $\|A\|_2 < 1$ کافی است و پایداری ثابت می‌شود.

اگر P_s جمع قدرمطلق عناصر به جز عناصر محوری باشد، آنگاه هر مقدار ویژه در داخل یا روی مرز یکی از

دوایر $|\lambda - a_{s,s}| \le P_s$ قرار دارد.

مثال (۵): آزمایش پایداری روش صریح

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(i,j+1) = ru(i-1,j) + (1-2r)u(i,j) + ru(i+1,j)$$

$$\vec{u}_{j+1} = A\vec{u}_j$$

$$A = \begin{bmatrix} 1-2r & r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r & 1-2r & r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 1-2r & r & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1-2r \end{bmatrix}_{N\times N} = I + r\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}_{N\times N}$$

$$A = I + rT$$

$$\lambda_A = 1 + r\lambda_T$$

با توجه به معادله ۷-۱۱ داریم:

$$\lambda_{T,s} = -2 + 2\sqrt{1}\cos\frac{s\pi}{N+1} = -2 + 2\cos\frac{s\pi}{N+1} = -2\left(1 - \cos\frac{s\pi}{N+1}\right)$$

$$\lambda_{T,s} = -2\left(2\sin^2\frac{s\pi}{2(N+1)}\right) = -4\sin^2\frac{s\pi}{2(N+1)}$$

$$\lambda_{A,s} = 1 + r\left(-4\sin^2\frac{s\pi}{2(N+1)}\right)$$

$$max|\lambda_{A,s}| \le 1 \quad \Rightarrow \quad max\left|1 + r\left(-4\sin^2\frac{s\pi}{2(N+1)}\right)\right| \le 1$$

بنابراین،

$$-1 \le 1 + r\left(-4\sin^2\frac{s\pi}{2(N+1)}\right) \le 1$$

$$1 - 4r\sin^2\frac{s\pi}{2(N+1)} \le 1 \quad \Rightarrow \quad 4r\sin^2\frac{s\pi}{2(N+1)} \ \ge 0 \quad \rightarrow \text{ همواره برقرار}$$

$$1 + r\left(-4\sin^2\frac{s\pi}{2(N+1)}\right) \ge -1 \quad \Rightarrow \quad -4r\sin^2\frac{s\pi}{2(N+1)} \ge -2$$

$$r\sin^2\frac{s\pi}{2(N+1)} \le \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad r \le \frac{1}{2} \ \text{ شرط پایداری}$$

حال شرط پایداری را با استفاده از نرم یک، چک می‌کنیم.

$$\|A\| = \max\{(|1-2r| + |r|), (|r| + |1-2r| + |r|), (|r| + |1-2r|)\} \le 1$$

همه ترم‌ها را کوچکتر از یک قرار می‌دهیم، شرط نهایی، شرط مشترک بین همه ترم‌هاست.

$$|1-2r| + |r| \le 1$$

$$\Rightarrow \quad r > 0 \ \ , \ \ 1 - 2r > 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - 2r + r < 1 \ \Rightarrow r > 0$$

$$|r| + |1-2r| + |r|$$

$$\Rightarrow \quad r + 1 - 2r + r \le 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = 1$$

$$|r| + |1-2r| \le 1$$

$$\Rightarrow \quad r + 1 - 2r \le 1 \quad \Rightarrow \quad 1 - r \le 1 \ \Rightarrow \quad r > 0$$

$$r > 0 \ \ , \ \ 1 - 2r > 0 \quad \Rightarrow r \le \frac{1}{2} \ \text{ شرط پایداری}$$

۷.۲.۲- شرط پایداری روش کرانک-نیکلسون

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$-ru(i-1,j+1)+(2+2r)u(i,j+1)-ru(i+1,j+1)$$
$$=ru(i+1,j)+(2-2r)u(i,j)+ru(i+1,j)$$

اگر به i و j عدد بدهیم، یک دستگاه معادله بدست می‌آید که باید حل شود. ماتریس ضرایب بـه صـورت زیـر می‌باشند.

$$\begin{bmatrix} 2+2r & -r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r & 2+2r & -r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 2+2r & -r & 0 & 0 \\ & & & 2+2r & -r & 0 \\ & 0 & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}_{N\times N} \begin{bmatrix} u_{j+1,1} \\ u_{j+1,2} \\ \vdots \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2-2r & r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r & 2-2r & r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 2-2r & r & 0 & 0 \\ & & & 2-2r & r & 0 \\ & 0 & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}_{N\times N} \times \vec{u}_j + \begin{bmatrix} ru_{0,j} \\ \vdots \\ ru_{N,j} \end{bmatrix}$$

$$(2I-rT)\vec{u}_{j+1}=(2I+rT)\vec{u}_j+\vec{b}$$

$$A=2I-rT$$

$$T=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & 0 & \\ 0 & 1 & -2 & & & \\ & & & \ddots & 0 & 0 \\ & 0 & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_{j+1}=(2I-rT)^{-1}(2I+rT)\vec{u}_j+(2I-rT)^{-1}b$$

$\|A\|\le 1$ شرط پایداری

$$max|\lambda_{A,s}|\le 1$$

$$A=\frac{2I+rT}{2I-rT}=\frac{B}{C} \qquad \lambda_{A,s}=\frac{\lambda_{B,s}}{\lambda_{C,s}}$$

$$\lambda_B=2+r\lambda_T$$

$$\lambda_C=2-r\lambda_T$$

$$\lambda_T = -2 + 2\cos\frac{s\pi}{N+1} \quad \Rightarrow \quad \lambda_T = -4\sin^2\frac{s\pi}{2(N+1)}$$

$$\lambda_{A,s} = \frac{2 + r\left(-4\sin^2\frac{s\pi}{2(N+1)}\right)}{2 - r\left(-4\sin^2\frac{s\pi}{2(N+1)}\right)}$$

$$max\left|\frac{2 + r\left(-4\sin^2\frac{s\pi}{2(N+1)}\right)}{2 - r\left(-4\sin^2\frac{s\pi}{2(N+1)}\right)}\right| \le 1 \quad \Rightarrow \quad r > 0$$

بنابراین، این روش همواره پایدار می‌باشد.

مثال (۶):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = h_1(u - u_1) \qquad x = 0, t \ge 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -h_2(u - u_2) \quad x = 1, t \ge 0$$

حل-

$$\frac{u(1,j) - u(-1,j)}{2\delta x} = h_1(u(0,j) - u_1)$$

$$\frac{u(N+1,j) - u(N-1,j)}{2\delta x} = h_2(u(N,j) - u_2)$$

$$\text{explicit:} \quad u(i,j+1) = ru(i-1,j) + (1-2r)u(i,j) + ru(i+1,j)$$

حال با استفاده از تئوری گرگوری، پایداری را بررسی می‌کنیم.

شرط پایداری $\|A\|_2 = \rho(A) = \max|\lambda_{A,s}| \le 1$

با استفاده از تئوری دایره گرگورین، محدوده λ_s ها را بدست می‌آوریم.

$$|\lambda - a_{s,s}| \le p_s$$

ردیف اول: $p_s = 2r$

$$|\lambda - 1 + 2r(1 + h_1\delta x)| \le 2r$$

$\boldsymbol{\lambda}$ های ماکزیممی که می‌توانند در سطر اول حضور داشته باشند.

$$\boldsymbol{\lambda - 1 + 2r(1 + h_1\delta x) = 2r \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1 - 2r(2 + h_1\delta x)}$$
$$\boldsymbol{\lambda - 1 + 2r(1 + h_1\delta x) = -2r \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = 1 - 2rh_1\delta x}$$
$$\boldsymbol{|1 - 2r(2 + h_1\delta x)| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -1 \leq 1 - 2r(2 + h_1\delta x) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r > 0 \\ r \leq \dfrac{1}{2 + h_1\delta x} \end{cases}}$$
$$\boldsymbol{|1 - 2rh_1\delta x| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -1 \leq 1 - 2rh_1\delta x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r > 0 \\ r \leq \dfrac{1}{h_1\delta x} \end{cases}}$$

شرط مشترک:

$$\boldsymbol{r \leq \frac{1}{2 + h_1\delta x}} \tag{۱۳-۷}$$

از سطر ۲ تا سطر $\boldsymbol{N - 1}$ همگی مثل هم هستند.

$$\boldsymbol{p_s = 2r}$$
$$\boldsymbol{|\lambda - (1 - 2r)| \leq 2r \quad \Rightarrow \quad -2r \leq \lambda - (1 - 2r) \leq 2r}$$
$$\boldsymbol{\begin{cases} -2r = \lambda - (1 - 2r) \\ \lambda - (1 - 2r) = 2r \end{cases} \quad \Rightarrow \quad r \leq \frac{1}{2}} \tag{۱۴-۷}$$

برای ردیف آخر:

$$\boldsymbol{p_s = 2r}$$
$$\boldsymbol{|\lambda - 1 + 2r(1 + h_2\delta x)| \leq 2r}$$
$$\boldsymbol{r \leq \frac{1}{2 + h_2\delta x}} \tag{۱۵-۷}$$

شرط پایداری، مینیمم شروط ۷-۱۳ تا ۷-۱۵ می‌باشد.

۸-مسائل

۱) دمای میله نازکی در ابتدا، $T(x,0) = 0$ است. اگر دمای انتهای سمت چپ میله در زمان صفر، ناگهان به ۱۰۰ افزایش پیدا کند و بعد از آن در همین مقدار نگه‌داشته شود، ولی دمای سمت راست در صفر ثابت بماند، دمای میله را به صورت

تابعی از x و t بیابید. شبکه‌ای را در نظر بگیرید که مبتنی به تقسیم میله به ۱۰ قسمت مساوی و الف) $r=0.5$ و ب) $r=1$ باشد.

۲) یک تقریب تفاضل محدود برای معادله گرمای وابسته به زمان در دو بعد و معادله موج دوبعدی، بدست آورید.

ریاضیات مهندسی پیشرفته

جلسه دهم

دستگاه معادلات دیفرانسیل و بدست آوردن جواب خصوصی معادله با استفاده از تابع گرین

فهرست مطالب

بسم الله الرحمن الرحیم

۱-چکیده مطالب:

برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی مراتب بالا، می‌توان معادله را به یک دستگاه معادلات با مرتبه پایین‌تر تبدیل کرده و سپس جواب نهایی را با حل دستگاه بدست آورد. همچنین زمانی که معادله دیفرانسیل دارای یک جواب خصوصی منحصر بفرد می‌باشد، می‌توان این جواب منحصر بفرد را با استفاده از تابع گرین بدست آورد.

۲-اهداف:

آشنایی با نحوه حل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل جزئی و استفاده از تابع گرین برای بدست آوردن جواب خصوصی منحصر بفرد معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه بالا.

۳-حل دستگاه معادلات جزئی

برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه بالا، می‌توان معادله را به یک دستگاه معادلات جزئی تبدیل کرد. به عنوان مثال برای حل معادله ۳-۱ می‌توان از دستگاه معادلات استفاده کرد.

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + c u_x + b u \qquad (۳-۱)$$

$$u_1 = u \qquad (۳-۲)$$

$$u_2 = u_x \qquad (۳-۳)$$

$$u_3 = u_t \qquad (۳-۴)$$

با توجه به معادله ۳-۲ داریم:

$$u_x = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} = u_2 \tag{۳-۵}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = u_{xx} \tag{۳-۶}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = u_3 \tag{۳-۷}$$

از معادله ۳-۱ داریم:

$$u_{xx} = \frac{1}{\alpha^2}[u_t - cu_x - bu] \tag{۳-۸}$$

با قرار دادن معادلات ۳-۵ و ۳-۷ در معادله ۳-۸ داریم:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{1}{\alpha^2}[u_3 - cu_2 - bu_1] \tag{۳-۹}$$

معادلات ۳-۵، ۳-۷ و ۳-۹ تشکیل دستگاهی را می‌دهند که از حل آن u_1، u_2 و u_3 بدست می‌آیند. جواب مسأله با توجه به معادله ۳-۲، u_1 می‌باشد.

مثال (۱): دستگاه معادلات جزئی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \omega}{\partial t} + \dfrac{\partial \omega}{\partial x} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + 3\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{۳-۱۰}$$

$$\omega(x,0) = f(x) \tag{۳-۱۱}$$

$$u(x,0) = g(x) \tag{۳-۱۲}$$

حل-

$$\vec{\phi} = \begin{bmatrix} \omega \\ u \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \omega}{\partial t} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \omega}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial \omega}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \omega}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\phi_t} + A\overrightarrow{\phi_x} = 0 \tag{۱۳-۳}$$

که معادله ۳-۱۳ یک معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه اول می‌باشد. برای ادامه حل از تغییر متغیر زیر استفاده می کنیم.

$$\vec{\phi} = P\vec{V} \tag{۱۴-۳}$$

که در معادله ۳-۱۴، P ماتریس بردارهای ویژه A است. اگر λ، مقدار ویژه و $\vec{\upsilon}$، بردار ویژه باشد.

$$(A - \lambda I)\vec{\upsilon} = 0 \quad , \quad \vec{\upsilon} \neq 0 \quad \rightarrow \quad A - \lambda I = 0 \quad \rightarrow \quad |A - \lambda I| = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \surd$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad (1-\lambda)(3-\lambda) = 0 \quad \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-1 & 2 \\ 0 & 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad v_2 = 0$$

و به صورت دلخواه،

$$v_1 = 1 \quad \rightarrow \quad \vec{v}|_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad -2v_1 + 2v_2 = 0 \quad \Longrightarrow \vec{v}|_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{V}$$

$$\begin{bmatrix} \omega \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{v}_1 \\ \mathrm{v}_2 \end{bmatrix}$$

با توجه به تغییر متغیر ۳-۱۴:

$$\vec{\phi} = P\vec{V} \quad \rightarrow \quad P\overrightarrow{V_t} + AP\overrightarrow{V_x} = 0$$

$$\overrightarrow{V_t} + P^{-1}AP\overrightarrow{V_x} = 0 \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{V_t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \overrightarrow{V_x}$$

بنابراین،

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial t} \\ \dfrac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial t} + \dfrac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial t} + 3\dfrac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

با استفاده از روش لاگرانژ می‌توان معادلات بالا را حل کرد.

$$\mathrm{v}_1 = \varphi_1(x - t)$$

$$\mathrm{v}_2 = \varphi_2(x - 3t)$$

$$\vec{\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1(x - t) \\ \varphi_2(x - 3t) \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \omega = \varphi_1(x - t) + \varphi_2(x - 3t) \\ u = \varphi_2(x - 3t) \end{cases}$$

با توجه به شرایط ۳-۱۱ و ۳-۱۲ داریم:

$$\omega(x, 0) = f(x) \implies f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$$

$$u(x, 0) = g(x) \implies g(x) = \varphi_2(x)$$

$$\implies \begin{cases} \omega = f(x - t) - g(x - t) + g(x - 3t) \\ u = g(x - 3t) \end{cases}$$

٤-حل دستگاه ناهمگن معادلات معمولی

دستگاه معادلات ناهمگن به صورت کلی زیر می‌باشد.

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x} + \vec{b}(t) \qquad (۱-۴)$$

۴.۱-ضرایب و ترم ناهمگن ثابت

حالتی را در نظر می‌گیریم که ضرایب ثابت باشند.

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{b} \qquad (۲-۴)$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} \implies \vec{x} = \vec{z}e^{\lambda t}$$

$$\vec{z}\lambda e^{\lambda t} = A\vec{z}e^{\lambda t} \implies \vec{z}\lambda = A\vec{z}$$

به این ترتیب $\boldsymbol{\lambda}$ مقدار ویژه $\boldsymbol{A}$ و $\vec{z}$ بردار ویژه آن است.

$$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I}|=\mathbf{0}$$

از این طریق $\boldsymbol{\lambda_i}$ ها و $\vec{z_i}$ ها بدست می‌آیند.

$$\overrightarrow{x_1}=\overrightarrow{z_1}e^{\lambda_1 t}\quad,\quad \overrightarrow{x_2}=\overrightarrow{z_2}e^{\lambda_2 t}\quad,\ldots,\quad \overrightarrow{x_n}=\overrightarrow{z_n}e^{\lambda_n t}$$

$$\vec{x}=\sum_{i=1}^{n}c_i\vec{z}_i e^{\lambda_i t}$$

جواب خصوصی را بدست می‌آوریم:

$$x=x_P+\sum_{i=1}^{n}c_i\vec{z}_i e^{\lambda_i t}$$

در حالتی که ناهمگنی تابعی از زمان نباشد، جواب خصوصی یـک بـردار $\vec{k}$ خواهـد بـود. اگـر ایـن بـردار را در معادله ۴–۲ قرار دهیم، داریم:

$$\frac{d\vec{k}}{dt}=A\vec{k}+\vec{b}\quad\Longrightarrow\quad 0=A\vec{k}+\vec{b}\quad\Longrightarrow\quad \vec{k}=-A^{-1}\vec{b}$$

بنابراین، جواب دستگاه غیرهمگن به صورت زیر در می‌آید.

$$\vec{x}=\sum_{i=1}^{n}c_i\vec{z}_i e^{\lambda_i t}-A^{-1}\vec{b}$$

باید توجه داشت که در بالا فرض بر این است که مقادیر ویژه به صورت مضاعف و یا مختلط نباشند.

مثال (۲): دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases}x_1'=-x_2+x_3\\x_2'=4x_1-x_2-4x_3\\x_3'=-3x_1-x_2+4x_3\end{cases}$$

حل-

$$A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 4 & -1 & -4\\ -3 & -1 & 4\end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}0 & -1 & 1\\ 4 & -1 & -4\\ -3 & -1 & 4\end{vmatrix}=0 \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases}\lambda_1=-1\\ \lambda_2=1\\ \lambda_3=3\end{cases}$$

$$\lambda_1=-1 \;:\; \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 4 & 0 & -4\\ -3 & -1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}=0 \quad\Longrightarrow\quad \overrightarrow{z_1}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{x_1}=\overrightarrow{z_1}e^{\lambda_1 t}$$

$$\overrightarrow{x_1}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}e^{-t} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases}x_1=e^{-t}\\ x_2=2e^{-t}\\ x_3=e^{-t}\end{cases}$$

و به طور مشابه برای $\lambda_2=1$،

$$\overrightarrow{z_2}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases}x_1=e^{-t}\\ x_2=0\\ x_3=e^{-t}\end{cases}$$

و برای $\lambda_3=3$ ،

$$\overrightarrow{z_2}=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 2\end{bmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases}x_1=e^{3t}\\ x_2=-e^{3t}\\ x_3=2e^{3t}\end{cases}$$

$$\overrightarrow{x_1}=c_1\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}e^{-t}+c_2\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}e^{t}+c_3\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 2\end{bmatrix}e^{3t}$$

مثال (۳): دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases}x_1'=3x_1-4x_2\\ x_2'=x_1-x_2\end{cases}$$

$$(3-\lambda)(-1-\lambda)+4=0$$

$$\lambda_1=\lambda_2=1$$

در این حالت برای مقادیر ویژه جواب مضاعف بدست آمد.

$$\lambda_1=1 \quad\Longrightarrow\quad \overrightarrow{z_1}=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{x_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^t$$

جواب دوم در این حالت به صورت زیر خواهد بود.

$$\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{z_1} t e^{\lambda t} + \overrightarrow{z_2} e^{\lambda t}$$

برای بدست آوردن$\overrightarrow{z_2}$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$(A - \lambda I)\overrightarrow{z_2} = \overrightarrow{z_1}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{z_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{x_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} t e^{\lambda t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{\lambda t}$$

$$\overrightarrow{x'} = A\vec{x} + f(t)$$

۴.۲- ترم ناهمگن تابعی از زمان

جواب همگن: $\overrightarrow{x_c} = c_1\overrightarrow{x_1} + c_2\overrightarrow{x_2} + \cdots + c_n\overrightarrow{x_n} = \mathrm{X} \cdot \vec{c}$

$$\mathrm{X} = [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \dots \quad \vec{x}_n] = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots \\ x_{12} & \dots \\ x_{13} & \dots \\ x_{14} & \dots \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$\vec{x} = \vec{x}_P + \vec{x}_c$$

$$\vec{x}_P = \mathrm{X}\vec{U}$$

$$\vec{x}_P = u_1(x)\vec{x}_1 + u_2(x)\vec{x}_2 + \cdots + u_n(x)\vec{x}_n$$

$$\left[\mathrm{X}\vec{U}\right]' = A\mathrm{X}\vec{U} + f(t)$$

$$\mathrm{X}'\vec{U} + \vec{U}'\mathrm{X} = A\mathrm{X}\vec{U} + f(t) \tag{۳-۴}$$

با توجه به فرم همگن داریم:

$$\mathrm{X}'\vec{U} - A\mathrm{X}\vec{U} = 0 \tag{۴-۴}$$

با قرار دادن معادله ۴-۴ در معادله ۴-۳ داریم،

$$\vec{U}'X = f(t) \Rightarrow \vec{U}' = X^{-1}f(t) \Rightarrow U(t) = \int X^{-1}f(t)dt$$

$$x_P = \mathrm{X}\int X^{-1} f(t)dt \qquad (۵-۴)$$

مثال (۴): دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 + \dfrac{e^{-t}}{1+t^2} \\ x_2' = 2x_1 - 2x_2 + \dfrac{2e^{-t}}{1+t^2} \end{cases}$$

حل- دستگاه همگن به صورت زیر است.

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 \\ x_2' = 2x_1 - 2x_2 \end{cases} , \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \end{matrix}$$

$$\vec{x} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-t}$$

$$\mathrm{X} = \begin{bmatrix} 1 & e^{-t} \\ 1 & 2e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\vec{u} = \int \begin{bmatrix} 1 & e^{-t} \\ 1 & 2e^{-t} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{e^{-t}}{1+t^2} \\ \dfrac{2e^{-t}}{1+t^2} \end{bmatrix} dt = \int \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{1+t^2} \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} 0 \\ \int \dfrac{1}{1+t^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tan^{-1} t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$x_P = \begin{bmatrix} 1 & e^{-t} \\ 1 & 2e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \tan^{-1} t \end{bmatrix}$$

۵-بدست آوردن جواب خصوصی منحصربفرد

روش‌های مختلفی برای پیدا کردن جواب خصوصی یک معادله دیفرانسیل وجود دارد. مثلا استفاده از جداول فرم جواب خصوصی و یا استفاده از حل همگن، اما گاهی اوقات معادله دیفرانسیل دارای یک جواب منحصر بفرد می‌باشد، این جواب را می‌توان از طریق تابع گرین بدست آورد.

۵.۱-تئوری فردهالم

این تئوری به ما کمک می‌کند تا بفهمیم که آیا یک معادله دیفرانسیل دارای جواب منحصربفرد هست یا خیر.

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)y = -f(x) \ , \ \ a \le x \le b \qquad (۱-۵)$$

$$\boldsymbol{a_1 y(a) + a_2 y'(a) = \alpha} \quad (۲-۵)$$

$$\boldsymbol{b_1 y(b) + b_2 y'(b) = \beta} \quad (۳-۵)$$

در معادله ۵-۲ نباید a_1 و a_2 همزمان صفر و در معادله ۵-۳ نباید b_1 و b_2 به طور همزمان صفر شوند. اگر سیستم بالا دارای جواب همگن صفر باشد، آنگاه سیستم ناهمگن دارای جواب خصوصی منحصربفرد خواهد بود.

سیستم همگن به صورت زیر است.

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)y = 0 \;,\;\; a \le x \le b} \quad (۴-۵)$$

$$\boldsymbol{a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0} \quad (۵-۵)$$

$$\boldsymbol{b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0} \quad (۶-۵)$$

۵.۲- حل معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم ناهمگن

$$\boldsymbol{p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = -f(x)}$$
$$\boldsymbol{\alpha_1 y'(a) = \alpha_2 y(a)}$$
$$\boldsymbol{\beta_1 y'(b) = \beta_2 y(b)}$$
$$\boldsymbol{y = \int_a^b g(x,s)f(s)ds}$$

که در بالا، $g(x,s)$، تابع گرین می‌باشد که از روی سیستم همگن بدست می‌آید.

$$\boldsymbol{a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0}$$
$$\boldsymbol{\alpha_1 y'(a) = \alpha_2 y(a)}$$
$$\boldsymbol{\beta_1 y'(b) = \beta_2 y(b)}$$

S نقطه ای در بین دو مرز مسأله می باشد.

تابع گرین دارای چهار خاصیت می‌باشد:

۱) تابع گرین، $g(x,s)$، باید در محدوده $\begin{matrix} a \le x < s \\ s < x \le b \end{matrix}$، در معادله دیفرانسیل صدق بکند.

۲) در محدوده $\substack{a \le x < s \\ s < x \le b}$، تابع گرین باید در شرایط مرزی صدق کند.

$$\alpha_1 g_x(a,s) = \alpha_2 g(a,s)$$
$$\beta_1 g_x(b,s) = \beta_2 g_x(b,s)$$

۳) $g(x,s)$ در نقطه s پیوسته باشد.

۴) $g_x(x,s)$ در نقطه $x = s$، به اندازه $-\frac{1}{a_0(s)}$ پرش دارد.

$$\lim_{x\to s^+} g(x,s) - \lim_{x\to s^-} g(x,s) = -\frac{1}{a_0(s)}$$

با استفاده از این چهار شرط، تابع گرین بدست می‌آید.

مثال (۵): معادله زیر را با شرایط داده شده حل کنید.

$$y'' + y = 0$$
$$y(0) = 0$$
$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

حل- جواب عمومی معادله فوق به صورت زیر است.

$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

با اعمال شرایط مرزی داریم:

$$y(0) = 0 \quad \to \quad c_2 = 0$$
$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \to \quad c_1 = 0$$
$$\Rightarrow y = 0$$

با توجه به تئوری فرد هالم، این معادله دارای یک جواب خصوصی منحصربفرد می‌باشد.

$$g(x,s) = \begin{cases} A_1 \cos x + B_1 \sin x & , \quad 0 \le x < s \\ A_2 \cos x + B_2 \sin x & , \quad s < x \le \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad (۱)$$

۲)
$$\alpha_1 g_x(a,s)=\alpha_2 g(a,s) \quad\Rightarrow\quad g(0,s)=0 \ \ ,\ \ 0\le x<s$$
$$\beta_1 g_x(b,s)=\beta_2 g_x(b,s) \ \Rightarrow\ \ g\left(\frac{\pi}{2},s\right)=0 \ \ ,\ \ s\le x<\frac{\pi}{2}$$

بنابراین،

$$0\le x<s:\ \ 0=A_1\cos(0)+B_1\sin(0) \quad\Rightarrow\quad A_1=0$$
$$s\le x<\frac{\pi}{2}:\ \ 0=A_2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+B_2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad\Rightarrow\quad B_2=0$$
$$g(x,s)=\begin{cases} B_1\sin x & ,\ \ 0\le x<s \\ A_2\cos x & ,\ \ s<x\le\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

۳)
$$B_1\sin(s)=A_2\cos(s)$$

۴)
$$\lim_{x\to s^+} g(x,s)-\lim_{x\to s^-} g(x,s)=-1$$
$$-A_2\sin(s)-B_1\cos(s)=-1$$

با استفاده از شرط ۳ و ۴ داریم:

$$\begin{cases} B_1\sin(s)-A_2\cos(s)=0 \\ A_2\sin(s)+B_1\cos(s)=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} B_1=\epsilon\cos(s) \\ A_2=\epsilon\sin(s)\end{matrix}$$
$$g(x,s)=\begin{cases} \epsilon\cos(s)\sin x & ,\ \ 0\le x<s \\ \epsilon\sin(s)\cos x & ,\ \ s<x\le\dfrac{\pi}{2}\end{cases} \xrightarrow{\text{شرط چهارم}} \ \epsilon=1$$
$$\Rightarrow g(x,s)=\begin{cases} \cos(s)\sin x & ,\ \ 0\le x<s \\ \sin(s)\cos x & ,\ \ s<x\le\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

تابع گرین همواره تقارن دارد و از این موضوع می‌توان برای چک کردن جواب استفاده کرد.

مثال (۶): معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$u''+u=-3\sin 2x$$
$$u(0)=0$$
$$u'(\pi)=0$$

حل- حل معادله همگن به صورت زیر است.

$$u=c_1\sin x+c_2\cos x$$

با اعمال شرایط مرزی داریم:

$$\boldsymbol{u(0)=0 \quad \rightarrow \quad c_2=0}$$
$$\boldsymbol{u'(\pi)=0 \quad \rightarrow \quad c_1\cos x - c_2 \sin x = 0 \quad \rightarrow \ c_1=0}$$
$$\boldsymbol{\Rightarrow u=0}$$

بنابراین معادله دیفرانسیل دارای یک جواب خصوصی منحصربفرد می‌باشد.

$$\boldsymbol{g(x,s)=\begin{cases} A_1\sin x + B_1\cos x & , \ 0\le x<s \\ A_2\sin x + B_2\cos x & , \ s<x\le \dfrac{\pi}{2}\end{cases}} \qquad (۱$$

$$\boldsymbol{\alpha_1 g_x(a,s)=\alpha_2 g(a,s) \quad \Longrightarrow \quad g(0,s)=0} \ \ , \ \ 0\le x<s$$
$$\boldsymbol{\beta_1 g_x(b,s)=\beta_2 g_x(b,s) \ \Longrightarrow \quad g'(\pi,s)=0 \ \ , \ \ s\le x<\frac{\pi}{2}} \qquad (۲$$

بنابراین،

$$\boldsymbol{0\le x<s\text{:} \ \ 0=A_1\sin(0)+B_1\cos(0) \quad \Longrightarrow \quad B_1=0}$$
$$\boldsymbol{s\le x<\frac{\pi}{2}\text{:} \ \ 0=A_2\cos(\pi)+B_2\sin(\pi) \quad \Longrightarrow \quad A_2=0}$$
$$\boldsymbol{g(x,s)=\begin{cases} A_1\sin x & , \ 0\le x<s \\ B_2\cos x & , \ s<x\le \dfrac{\pi}{2}\end{cases}}$$
$$\boldsymbol{A_1\sin(s)=B_2\cos(s)}$$
$$\boldsymbol{A_1=\epsilon\cos(s) \quad , \quad B_2=\epsilon\sin(s)} \qquad (۳$$
$$\boldsymbol{\lim_{x\to s^+} g(x,s)-\lim_{x\to s^-} g(x,s)=-1} \qquad (۴$$
$$\boldsymbol{-B_2\sin(s)-A_1\cos(s)=-1}$$

با استفاده از شرط ۳ و ۴ داریم:

$$\boldsymbol{g(x,s)=\begin{cases} \epsilon\cos(s)\sin x & , \ 0\le x<s \\ \epsilon\sin(s)\cos x & , \ s<x\le \pi\end{cases} \xrightarrow{\text{شرط چهارم}} \ \epsilon=1}$$
$$\boldsymbol{\Rightarrow g(x,s)=\begin{cases} \cos(s)\sin x & , \ 0\le x<s \\ \sin(s)\cos x & , \ s<x\le \dfrac{\pi}{2}\end{cases}}$$
$$\boldsymbol{u=3\int_0^x \sin(s)\cos x \sin 2s\, dx + 3\int_x^{\pi}\cos(s)\sin x\sin 2s\, dx}$$

۵.۳- حل معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه n ناهمگن

معادله مرتبه nام زیر را در نظر می‌گیریم.

$$ay^{(n)} + by^{(n-1)} + \cdots + y = -f(x) \tag{۷-۵}$$

که دارای n شرط مرزی همگن زیر می‌باشد.

$$A\vec{y}(a) + B\vec{y}(b) = 0 \tag{۸-۵}$$

باید تابع گرین را برای این معادله بدست آوریم. این تابع هم مانند قبل دارای چهار شرط زیر می‌باشد.

۱) در معادله دیفرانسیل همگن صدق می‌کند.

۲) در n شرط مرزی نیز صدق می‌کند.

۳) توابع $g(x,s)$، $g'(x,s)$، ... و $g^{(n-2)}(x,s)$ باید در نقطه $x=s$، پیوسته باشند.

۴)
$$\lim_{x\to s^+} g^{(n-1)}(x,s) - \lim_{x\to s^-} g^{(n-1)}(x,s) = -\frac{1}{a(s)}$$

به عنوان مثال برای معادلات مرتبه سوم، در شرط اول ۶ ثابت وجود دارد که باید تعیین شوند. بنابراین شرایط دیگر باید ۶ معادله فراهم کنند. شرط (۲) سه معادله، شرط (۳) دو معادله و شرط (۴) نیز یک معادله را فراهم می کنند.

۵.۴- حل معادله دیفرانسیل مرتبه n با شرایط مرزی ناهمگن

معادله مرتبه n ناهمگن زیر را همراه با شرایط مرزی ناهمگن در نظر می‌گیریم.

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = f(x) \tag{۹-۵}$$

$$A\vec{y}(a) + B\vec{y}(b) = \vec{c} \tag{۱۰-۵}$$

حل معادله به صورت زیر خواهد بود.

$$\vec{y}(x) = \int_a^b G(x,s)\cdot\vec{f}(s)ds + [G(x,a) - G(x,b)]M\mathcal{G}^{-1}\vec{c} \tag{۱۱-۵}$$

$$\mathcal{G}^{-1} = [A \quad B]M \tag{۱۲-۵}$$

نحوه بدست آوردن ماتریس **M** به صورت زیر است. فرض کنید **A** و **B** به صورت زیر باشند.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \;,\; B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

آنگاه،

$$[A \quad B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در زیر ماتریس‌های ماتریس بالا، یک ماتریس مربعی که دترمینان غیر صفر داشته باشد، انتخاب می‌کنیم. در این مثال ستون دوم و سوم را انتخاب می‌کنیم. ماتریس **M** به صورت زیر می‌شود. سطر دوم و سوم آن ماتریس واحد و مابقی عناصر صفر می‌باشند.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تابع گرین به صورت زیر می‌باشد.

$$G(x,s) = \begin{cases} Y(x)R(s) \;,\; a \le x < s \\ Y(x)T(s) \;,\; s < x \le b \end{cases} \tag{۱۳-۵}$$

در معادله ۵-۱۳، $Y(x)$ ماتریس اساسی جواب‌های همگن می‌باشد.

$$Y(x) = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & \dots & \dots & y_n' \\ \vdots & \cdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & \dots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

$$T(s) = R(s) + Y^{-1}(s) \tag{۱۴-۵}$$

$$R(s) = -[AY(a) + BY(b)]^{-1}BY(b)Y^{-1}(s) \tag{۱۵-۵}$$

مثال (۷): معادله مرتبه دو زیر را با شرایط داده شده حل کنید.

$$x^2u'' - 2xu' + 2u = 2x^3$$
$$2u(1) - u'(1) = 1$$
$$u(1) - u'(1) + u(2) - u'(2) = 4$$

حل- حل سیستم همگن به صورت زیر است.

$$u_1 = x^2$$
$$u_2 = x$$

$$Y(x) = \begin{bmatrix} x^2 & x \\ 2x & 1 \end{bmatrix} \implies Y^{-1}(x) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{x^2} & \frac{1}{x} \\ \frac{2}{x} & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \ , \ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} \ , \ \vec{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2x \end{bmatrix}$$

$$[A \quad B] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \implies M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{G}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R(s) = -\left[\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\right]^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{s^2} & \frac{1}{s} \\ \frac{2}{s} & -1 \end{bmatrix}$$

$$R(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s} & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s} & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{s^2} & \frac{1}{s} \\ \frac{2}{s} & -1 \end{bmatrix} \implies T(s) = \begin{bmatrix} \frac{2s-1}{s^2} & \frac{1-s}{s} \\ \frac{2}{s} & -1 \end{bmatrix}$$

$$G(x,s)=\begin{cases}\begin{bmatrix}x^2 & x\\ 2x & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{s} & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix} & , \quad 1\le x<s\\ \begin{bmatrix}x^2 & x\\ 2x & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2s-1}{s^2} & \frac{1-s}{s}\\ \frac{2}{s} & -1\end{bmatrix} & , \quad s<x\le 2\end{cases}$$

$$\vec{y}(x)=\int_1^2 G(x,s)\cdot\vec{f}(s)ds+[G(x,1)-G(x,2)]M\mathcal{G}^{-1}\vec{c}=\begin{bmatrix}x^3-10x^2\\ 3x^2-20x\end{bmatrix}$$

بنابراین در نهایت جواب خصوصی به صورت زیر خواهد بود.

$$u_p(x)=x^3-10x^2$$

٦-مسائل

۱) تابع گرین را بدست آورید.

$$4xy'''+y''+x^2y'=0$$

$$\begin{cases}y''(0)+2y'(0)+3y(0)+y''(1)-y'(1)+2y(1)=0\\ 2y''(0)+y'(0)+y(0)-3y''(1)+y'(1)+4y(1)=0\\ -y''(0)+y'(0)-4y(0)+y''(1)-2y'(1)-y(1)=0\end{cases}$$

۲) دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases}x_1'=-2x_1-13x_2\\ x_2'=x_1+4x_2\end{cases}$$