فهرست موضوعی :

- مقدمه ــــــ ۱
- روشهای ماتریسی ــــــ ۱
- روش حذفی گاوس (guoes Elimination) ــــــ ۱
- روش گاوس - جردن ــــــ ۶
- روش L U . Decompition ــــــ ۷
- الگوریتم توماس ــــــ ۱۳
- نکاتی پیرامون خطا در روشهای ماتریسی ــــــ ۱۷
- لیست روشهای انتگرال خطی ــــــ ۲۱
- روش ژاکوبی ــــــ ۲۲
- انواع خطاها ــــــ ۲۳
- روش گاوس - سایدل (جایگزینی متوالی) ــــــ ۲۴
- روش ایجاد همگرایی در گاوس - سایدل (Relaxation) ــــــ ۲۶
- مثالهایی برای روش ژاکوبی و گاوس - سایدل ــــــ ۲۸ و ۲۹
- معادلات غیر خطی ــــــ ۳۰
- روش نصف کردن Bisection ــــــ ۳۱
- روش میان یابی خطا ــــــ ۳۳
- روش نیوتون - رافسون ــــــ ۳۳
- روش نیوتون - رافسون False - position ــــــ ۳۵
- برنامه محاسبات نیوتون رافسون False_Position ــــــ ۴۲
- درون یابی ــــــ ۴۳
- روش کمترین مربعات ــــــ ۴۴
- مقدمه‌ای برای حل عددی معادلات دیفرانسیل ــــــ ۴۶ تا ۵۳
- فرمولهای مشتق گیری ــــــ ۵۴
- اپراتورها ــــــ ۵۴
- سری binomial ــــــ ۵۷

← استفاده از سری binomial در مشتق پیشرو ——— ۵۸
← مثالی برای کاربرد سری binomial در مشتق پیشرو ——— ۶۰
← استفاده از سری binomial در مشتق پسرو ——— ۶۰
← مثالی برای کاربرد سری binomial در مشتق پسرو ——— ۶۱
← مشتق گیری های چند نقطه ای ——— ۶۲
← جداول مربوط به مشتق مرتبه اول و دوم و سوم چند نقطه ای ——— ۶۴
← راهنمای استفاده از جداول مربوط به مشتق مرتبه اول چند نقطه ای ——— ۶۵
← مشتق پیشرو چند نقطه ای ——— ۶۶
← فرمولهای میانی مشتق گیری چند نقطه ای ——— ۶۸
← فرمولهای مشتق گیری پسرو چند نقطه ای ——— ۶۷
← مشتق مرتبه دوم چند نقطه ای ——— ۷۱
← راهنمای استفاده از مشتق مرتبه دوم چند نقطه ای ——— ۷۲
← خطاهای محاسباتی در مشتق گیری ——— ۷۴
← فرمولهای انتگرال گیری ——— ۷۷
← توضیح پیرامون انتگرال گیری از طریق روش دو نقطه ای ——— ۷۸
← توضیح پیرامون انتگرال گیری از طریق روش سیمپسون $\frac{1}{3}$ ——— ۷۹
← توضیح پیرامون انتگرال گیری از طریق روش سیمپسون $\frac{3}{8}$ ——— ۸۰
← مروری بر روشهای انتگرالی چند نقطه ای عددی ——— ۸۱
← جدول روابط انتگرال گیری چند نقطه ای خطی ——— ۸۳
← انتگرال گیری به کمک ترکیب انتگرالهای چند نقطه ای ——— ۸۳
← حل معادلات دیفرانسیل با روش عددی ——— ۸۵
← معادلات ODE ——— ۸۵
← قانون اویلر ——— ۸۷
← قانون اویلر اصلاح شده (Heun) ——— ۸۹
← روشهای polygun ——— ۹۰
← روش Multy Step ——— ۹۱
← روش رانگ-کوتا ——— ۹۲

← مثالی برای رانگ کوتا ______ ۹۶
← مروری کوتاه بر روی رانگ کوتا ______ ۹۷
← بیان خطاها در رانگ کوتا ______ ۹۸
← رانگ کوتا Fehlberg ______ ۹۹
← استفاده از رانگ کوتا برای حل دستگاه معادله ______ ۱۰۰
← حل معادلات Multy step با روش های پیشگو تصحیح کن PECE ______ ۱۰۱
← بیان روش ABAM.PC ______ ۱۰۳
← جدول ADAMS_BASHFORT ______ ۱۰۵
← معادلات ADAMS-MOULTON ______ ۱۰۶
← جدول ADAMS_MOULTON ______ ۱۰۷
← بیان استراتژی های مختلف در روش ABAM.PC ______ ۱۱۲
← استراتژی PECE در ABAM.PC ______ ۱۱۲و ۱۰۹
← استراتژی $P(EC)^sE$ در ABAM.PC ______ ۱۱۲
← استراتژی PMECME در ABAM.PC ______ ۱۱۳
← استراتژی $PM(EC)^sME$ در ABAM.PC ______ ۱۱۳
← مثالی برای حل به روش ABAM.PC ______ ۱۱۵
← برنامه کامپیوتری مثال حل معادلات به روش ABAM.PC ______ ۱۱۷

✱ بخشهای ضمیمه جزوه :

نمونه مساله

✱ مساله اول : روش حذفی گاوس

✱ مساله دوم : روش حذفی گاوس

✱ مساله سوم : روش تجزیه LU Decomposition

✱ مساله چهارم : روش تجزیه LU Decomposition

✱ مساله پنجم : حل معادلات با روشهای ژاکوبی و گاوس - سایدل

✱ مساله ششم : مشتق گیری عددی

✱ مساله هفتم : انتگرال گیری عددی

* مساله هشتم : روش اویلر
* مساله نهم : روش اویلر
* مساله دهم : روش اویلر اصلاح شده

$\boxed{\text{یادآوری در مورد خطاها}}$

$\boxed{\text{جداول مهم و کاربردی}}$

* جدول و معادله ADAMS – BASHFORTH
* جدول و معادله ADAMS – MOULTON
* جدول ضرایب مشتق گیری
* الگوریتم رانگ کوتا Fehlberg

$\boxed{\text{خلاصه درس}}$

* ریاضیات مهندسی پیشرفته

سرفصل دروس ← ریاضیات عددی

بارم بندی نمره نهایی ← تکلیف ← ۸ نمره : برنامه نویسی

← پروژه ← ۷ نمره : کار تحقیقی (موضوع تا نیمه آبان باید تعیین شود)

← امتحان پایان ترم ۵ نمره

منابع درسی ← APPLIED NUMERICAL ANALYSIS (GERALD)

← محاسبات عددی (دکتر پورپاک) جهاد دانشگاهی

برنامه کامپیوتری ← MATLAB7

← کتاب راهنما : نگرش نوین بر کاربرد ریاضیات با MATLAB (جان وایلی)

---

* بررسی روشهای ماتریسی (MATRIX METHOD FOR LINEAR ALGEBRIA EQU.):

برای حل این معادلات از دستگاه روبرو استفاده می کنیم که داریم : $AX=C$

(A ← یک ماتریس مربعی است که ضرایب معادله را دارد / X ← متغیرهای وابسته است / C ← ماتریس پاسخ می باشد)

دستگاه معادله ما به صورت زیر است :

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n &= C_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n &= C_2 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mj}x_j + \cdots + a_{mn}x_n &= C_m
\end{aligned}
$$

در معادله بالا اگر به صورت ماتریسی بنویسیم، داریم :

$$
\left|\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & x_n
\end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{array}\right|
$$

تعداد ردیف $i = 1, 2, \ldots, n$

تعداد ستون $j = 1, 2, \ldots, m$

* روش حذفی گاوس :

برای حل معادله روش حذف کردن را اعمال می کنیم تا به یک ماتریس مثلثی بالا برسیم. برای رسیدن به ماتریس بالا مثلثی می بایست اعضاء زیر قطر اصلی صفر گردد. به عبارت دیگر با انجام مراحل حذف کردن ماتریس ما به صورت صفحه بعد در می آید :

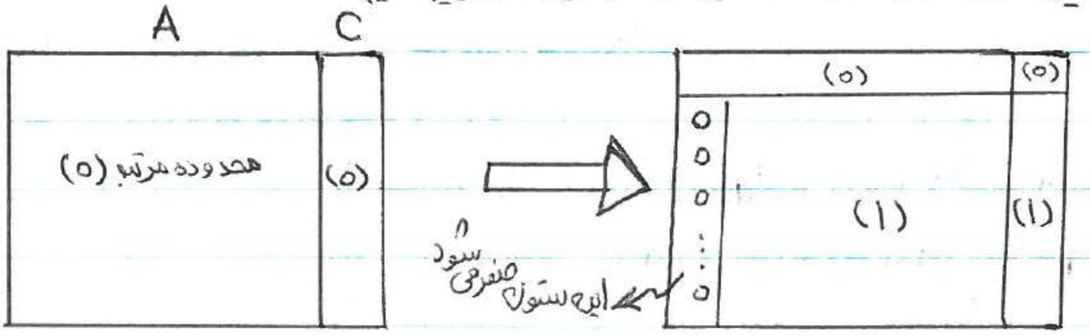
$$\left|\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & c_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} & c_2^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} & c_3^{(0)} \end{array}\right| \Longrightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & c_1^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & c_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & c_3^{(2)} \end{array}\right|$$

توجه : در ماتریس بالامثلثی که در بالای صفحه بدست آمده اعدادی را درون پرانتزی ببینید که در بالای اعضاء ماتریس قرار گرفته اند، به این اعداد مرتبه ماتریس می گویند. این اعداد بیانگر تغییرات اعمال شده بر روی عضو مورد نظر است. چون ماتریس برای تبدیل شدن به بالا مثلثی می بایست به صورت ستونی اعضایش تغییر کند. به طور کلی تعداد تغییرات $(n-1)$ مرحله می باشد. به این روش Forward Elimation می گویند. برای مراحل بعدی جایگزینی از آخر به اول برمی گردیم که به روش Backward Subsitution معروف است:

$$x_3 = \frac{c_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} \qquad x_2 = \frac{c_2^{(1)} - a_{23}^{(1)} x_3}{a_{22}^{(1)}} \qquad x_1 = \frac{c_1^{(0)} - a_{12}^{(0)} x_2 - a_{13}^{(0)} x_3}{a_{11}^{(0)}}$$

تذکر ← روش Forward Elimation برای مقادیر a و روش Backward Sub برای مقادیر X استفاده می شود*

اگر ماتریس مربعی را به صورت نمادین به شکل زیر در نظر بگیریم داریم:



با توجه به شکل بالا معادله ما به صورت زیر در می آید:

$$\begin{aligned} a_{11}^{(0)} x_1 + a_{12}^{(0)} x_2 + \dots + a_{1n}^{(0)} x_n &= c_1^{(0)} \\ 0 + a_{22}^{(1)} x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)} x_n &= c_2^{(1)} \\ 0 + a_{32}^{(1)} x_2 + \dots + a_{3n}^{(1)} x_n &= c_3^{(1)} \\ \vdots \qquad & \\ 0 + a_{n2}^{(1)} x_2 + \dots + a_{nn} x_n &= c_n^{(1)} \end{aligned}$$

این رد
همه صفرهس

اگر دستگاه را A بنامیم با استفاده از اولین معادله از دستگاه A (ماتریس ضرایب a که در ابتدا فرض شد) داریم:

$$x_1 = \frac{c_1^{(0)} - a_{12}^{(0)} x_2 - a_{13}^{(0)} x_3 - \dots - a_{1n}^{(0)} x_n}{a_{11}^{(0)}} \qquad \text{(B)}$$

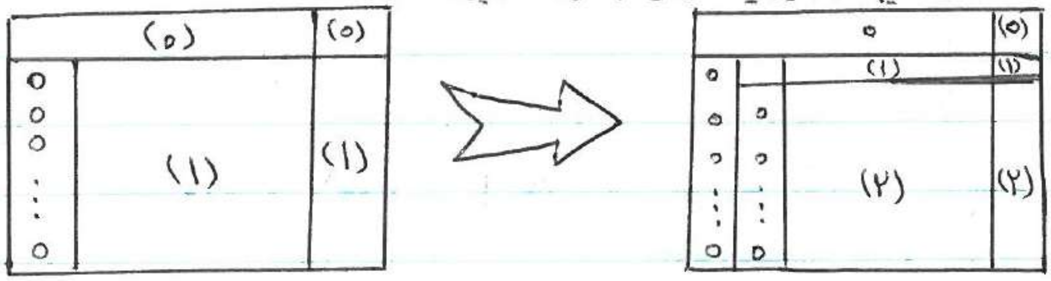
تذکر مهم ← اگر $a_{11}^{(0)} = 0$ می بایست ردیف یا ستون را جابجا کنیم*

مقدار X را که بدست آوردیم به جای A قرار می‌دهیم و ستون a_{ij} ما حذف می‌گردد. برای بدست آوردن یک مرحله به صورت زیر عمل می‌کنیم:

برای بدست آوردن مرحله ۱

$$\begin{cases} a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - \dfrac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} a_{1j}^{(0)} \leftarrow \begin{cases} i = 2, \dots, n \\ j = 2, \dots, n \end{cases} \\ C_i^{(1)} = C_i^{(0)} - \dfrac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} C_1^{(0)} \qquad i = 2, \dots, n \end{cases}$$

در مرحله دوم زیر قطر اصلی ستون دوم را صفر می‌کنیم. با استفاده از دومین معادله از دستگاه C معادله را برای x_2 بدست بیاوریم و با جایگزین کردن آن (نمادین) به صورت زیر می‌شود:



با توجه به شکل بالا معادله ما به صورت زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} a_{11}^{(0)} x_1 + a_{12}^{(0)} x_2 + a_{13}^{(0)} x_3 + \dots + a_{1n}^{(0)} x_n &= C_1^{(0)} \\ a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)} x_n &= C_2^{(1)} \\ a_{33}^{(2)} x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)} x_n &= C_3^{(2)} \\ \vdots \qquad\qquad & \vdots \\ a_{3n}^{(2)} x_3 + \dots + a_{nn}^{(2)} x_n &= C_n^{(2)} \end{aligned}$$

اگر مقادیر جدید را جایگزین کنیم ستون دوم از معادله سوم تا آخر حذف می‌گردد. برای اعمال تغییرات ۲ مرحله‌ای به صورت زیر عمل می‌کنیم:

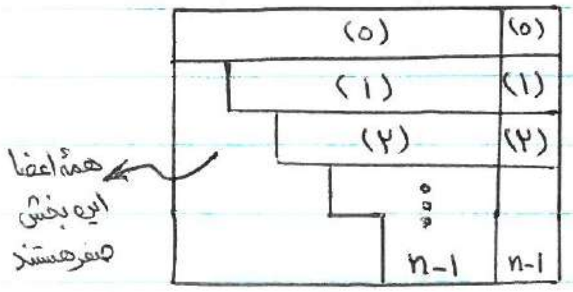
برای بدست آوردن ۲ مرحله

$$\begin{cases} a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \dfrac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \times a_{2j}^{(1)} \quad \begin{cases} i = 3, \dots, n \\ j = 3, \dots, n \end{cases} \\ C_i^{(2)} = C_i^{(1)} - \dfrac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \times C_2^{(1)} \qquad i = 3, \dots, n \end{cases}$$

اگر این کار را برای مرحله دیگر نیز اعمال شود تا به مرحله حذف K ام برسیم:

$$\begin{cases} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \dfrac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \times a_{kj}^{(k-1)} \quad \begin{cases} i = k+1, \dots, n \\ j = k+1, \dots, n \end{cases} \\ C_i^{(k)} = C_i^{(k-1)} - \dfrac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \times C_k^{(k-1)} \qquad i = k+1, \dots, n \end{cases}$$

اگر این کار را انجام دهیم در نهایت در مراحل بعدی در انتها به ماتریس بالامثلثی به صورت زیر می‌رسیم :



$$a_{ij}^{(0)} = a_{ij}^{(0)} \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$C_i^{(0)} = C_i^{(0)}$$

در هر مرحله قبل از حذف کردن باید شرایط $a_{kk}^{(k-1)}$ صفر نباشد را بررسی می‌کنیم . برای این کار از روش Backward Subsituation استفاده می‌کنیم که در آن از آخر به اول می‌آییم :

$$X_n = \frac{C_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

$$X_i = \frac{1}{a_{ii}^{(i-1)}} \left[C_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} X_j \right] \qquad i = n-1, \ldots, 1$$

در ادامه برای روشن شدن مساله کار خود را با مثالی بیان می‌کنیم . ماتریسی به صورت زیر در اختیار داریم :

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 5 & 5 \\ -4 & 0 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 9 \end{array}\right|$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید ، a_{11} ما صفر شده است . این مساله اینجا مشکل می‌کند . برای رفع مشکل یا باید جای ستون اول را با یکی دیگر از ستون‌ها عوض کنیم و یا جای سطرها را . جای ستون‌ها را عوض نمی‌کنیم چون در معادلات با تعویض جای ستون ضرایب متغیرها تغییر می‌کند بنابراین جای سطرها را عوض می‌کنیم . تعویض سطرها باید به گونه‌ای باشد که :

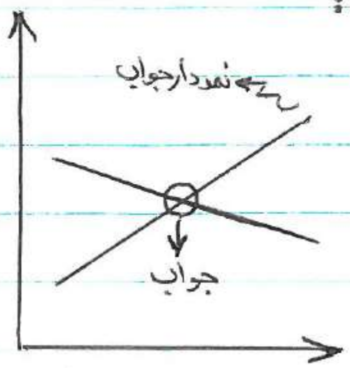
$$a_{ij} \neq 0 \qquad i = j$$

اما گاهی اوقات ماتریس ما به جای صفر مطلق عدد بسیار کوچکی مثل زیر دارد :

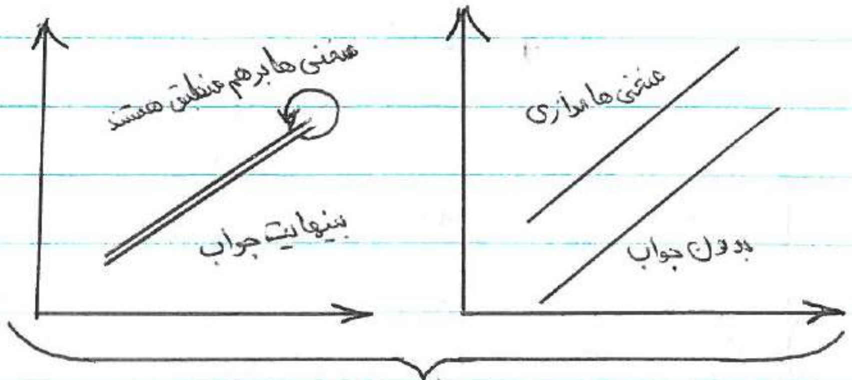
$$\left|\begin{array}{cccc|c} 0/00001 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 5 & 5 \\ -4 & 0 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 9 \end{array}\right|$$

این عدد بسیار کوچک که در a_{11} قرار دارد باعث می‌شود تا در هنگام حل ماتریس دچار خطا می‌شود که به خطا ایجادشده Round of error گفته می‌شود .

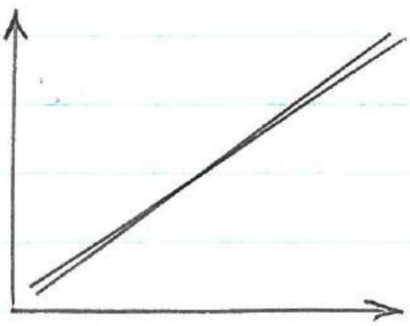
قبل از اینکه پیرامون تاثیر Round of error بر محاسبات ماتریسی بگوییم بهتر است پیرامون جواب معادلات توضیح بدهم. با توجه به شکل نمودار انواع جوابها به صورت زیر است:



Well Condition



Singular



ill Condition

این نمودارها اگر دچار خطا شوند تاثیر بسیار کمی بر پاسخ دارند اما گاهی نمودار به صورت ill Condition است مثل شکل روبرو که در این حالت شیب ۲ منحنی بسیار نزدیک به همدیگر است.

در نمودار روبرو با کوچکترین خطا جواب دچار خطاهای زیادی می شود

کاری که می توان انجام داد این است که از اعداد بسیار کوچک صرفنظر می کنیم

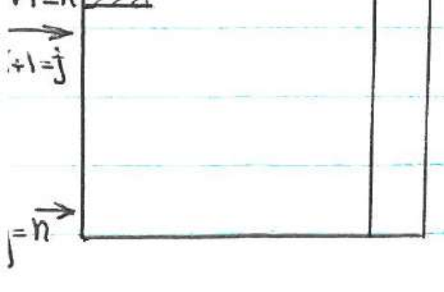
برای این کار عددی را که بزرگترین قدرمطلق را دارد جایگزین سطر اول می کنیم که دارای عدد کوچک می باشد:

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 0.00001 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 10 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & -1 & 7 & 5 \\ -9 & 4 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right|$$

در ستون اول قدرمطلق ۹- از همه بیشتر است بنابراین سطر ۴ را با سطر اول تعویض می کنیم

$$\left|\begin{array}{cccc|c} -9 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ -2 & 10 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & -1 & 7 & 5 \\ 0.00001 & 3 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right|$$

$\boxed{\text{قدرمطلق ABS}}$



نکته ← فرض می کنیم ماتریسی به صورت روبرو داریم:

اگر ما بخواهیم جابجایی را انجام بدهیم ۲ کار زیر را باید بکنیم:

اول ← تعیین کنیم ردیف جابجایی کدام است.

دوم ← ردیفی که باید عوض شود K است.

برای ردیف $j=K+1$ تا ردیف n در همان ستون K باید ببینیم که آیا قدرمطلق (ABS) :

$$ABS\ a_{ik} > Temp \xrightarrow{\text{اگر بله باشد}} PVT = i$$

$$Temp = ABS\ a_{ik}$$

مقدار عددی a_{ik} است

اگر عمل مقایسه فوق را تا انتها انجام دهیم به جایی می رسیم که بالاترین قدرمطلق می رسیم و آنگاه آن را با سطر صفر (سطر اول) عوض می کنیم سپس روابط زیر را اعمال می کنیم :

$$\begin{cases} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \dfrac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \times a_{kj}^{k-1} \\ C_i^{(k)} = C_i^{(k-1)} - \dfrac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \times C_k^{k-1} \end{cases}$$

انجام این اعمال برای هرسطر و ستون بسیار وقت گیر است بنابرین به صورت کلی از روابط زیر استفاده می کنیم :

$$a_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \times a_{kj} \qquad \begin{cases} i = k+1, \dots, n \\ j = k+1, \dots, n \end{cases}$$

$$C_i = C_i - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \times C_k \qquad i = k+1, \dots, n$$

$$X_n = \frac{C_n}{a_{nn}}$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[C_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} X_i \right]_{i = n+1, \dots, 1}$$

* روش گاوس - جردن :

روشهای ماتریسی به دلیل خطا های زیاد و طولانی بودن عملیات مربوط به آن روش مورد قبول در تمامی شرایط نیست به همین دلیل از روش تکرار استفاده می کنیم . ما در محاسباتمان با ماتریسهای ۳ قطری بیشتر سروکار داریم بنابرین از روش الگوریتم توماس استفاده می کنیم . در مسائل با معادلات $AX=C$ سروکار داریم که به ازای مقادیر مختلف C آن را حل می کنیم . برای همین ماتریس A^{-1} بدست می آید : $X = A^{-1}C$

بنابرین از روش گاوس جردن استفاده می کنیم . در ماتریس مرتبه سوم زیر داریم :

$$\left| \begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & C_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & C_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & C_3 \end{array} \right|$$

در روش گاوس جردن به جای اینکه ماتریس را به ماتریس بالا مثلثی تبدیل کنیم که برای این کار نسبت به گاوس حذفی چند کار را می بایست انجام داد :

صفحه بعد ←

① می بایست هم مقادیر بالا و هم مقادیر زیر قطر اصلی ماتریس را صفر کنیم.

② مقادیر قطر اصلی را می بایست به مقدار یک تبدیل کنیم: $i = 1, \ldots, n$ $\quad X_i = C_i^{(n)}$

با اعمال تغییرات گاوس جردن ماتریس مورد نظر ما اینچنین تغییر پیدا می کند:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & C_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & C_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & C_3 \end{array}\right| \xrightarrow{\text{پس از اعمال گاوس جردن}} \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & C_1^{(3)} \\ 0 & 1 & 0 & C_2^{(3)} \\ 0 & 0 & 1 & C_3^{(3)} \end{array}\right|$$

نکته ← اگر در کنار ماتریس A یک ماتریس واحد قرار دهیم و عمل آن را روی ماتریس واحد انجام دهیم به ماتریس A^{-1} می رسیم:

$$X = A^{-1} . C$$

وقتی ماتریس A^{-1} بدست آمد: $i = 1, \ldots, n$

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{-1} C_j$$

✱ روش LU Decomposition :

$A = L . U$ ← بالا مثلثی، پایین مثلثی

ماتریس مثل A داریم که آن را به ۲ ماتریس مثلثی تبدیل می کنیم:

برای این کار با یک جایگزینی می توان آن را انجام داد:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

قطر اصلی را برای ماتریس بالا مثلثی باید یک شود. به عنوان مثال در ماتریس زیر داریم:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ 0 & 1 & U_{23} & U_{24} \\ 0 & 0 & 1 & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

در روابط بالا $(n-2)$ معادله باید صورت گیرد. که $L \times U$ ضرب می کنیم و با A مقایسه می کنیم. اگر A به L و U

$AX=C \longrightarrow AX-C=0$ تبدیل شود با مقادیر C به جواب برسیم و داریم :

$UX=D \longrightarrow UX-D=0$ $\qquad \boxed{LD=C}$

عبارت را در L ضرب می‌کنیم $\Longleftarrow LUX-LD=0 \longrightarrow \boxed{UX=D}$

مراحل کار به صورت زیر است :

① decomposition $A=LU$

② Forward Subsitation $LD=C$

③ Backward Subsitation $UX=D$

همه ماتریسها را در هم ضرب می‌کنیم و در مقادیر A جایگزین می‌کنیم :

$L_{11}=a_{11}$

$L_{21}=a_{21}$

$L_{31}=a_{31}$

$L_{41}=a_{41}$

① ردیفهای L را در ستون اول U ضرب می‌کنیم

با این کار ستون اول ماتریس L بدست می‌آید .

$L_{i1}=a_{i1} \qquad i=1,2,\dots,n$

② ردیف اول L را در ستون U ضرب می‌کنیم

$L_{11}=a_{11}$ تکراری

$L_{11}U_{12}=a_{12} \longrightarrow U_{12}=\frac{a_{12}}{L_{11}}$

$L_{11}U_{13}=a_{13} \longrightarrow U_{13}=\frac{a_{13}}{L_{11}} \qquad U_{ij}=\frac{a_{ij}}{L_{11}} \qquad j=2,\dots,n$

$L_{11}U_{14}=a_{14} \longrightarrow U_{14}=\frac{a_{14}}{L_{11}}$

با این کار اول ستون L به دست آمد و در مراحل بعد ردیفهای L را در ستون U ضرب می‌کنیم .

③ ردیفهای L را در ستون های دوم U ضرب می‌کنیم :

$L_{11}U_{12}=a_{12}$ تکراری

$L_{21}U_{12}+L_{22}=a_{22} \longrightarrow L_{22}=a_{22}-L_{21}U_{12}$

$L_{31}U_{12}+L_{32}=a_{32} \longrightarrow L_{32}=a_{32}-L_{31}U_{12}$

$L_{41}U_{12}+L_{42}=a_{42} \longrightarrow L_{42}=a_{42}-L_{41}U_{12}$

④ ردیفهای U را در ستونهای L ضرب می‌کنیم :

$L_{21}=a_{21}$ تکراری $\qquad L_{21}U_{12}+L_{22}=a_{22}$ تکراری

$L_{21}U_{13}+L_{22}U_{23}=a_{23} \longrightarrow U_{23}=\frac{a_{23}-L_{21}U_{13}}{L_{22}}$

$L_{21}U_{14}+L_{22}U_{24}=a_{24} \longrightarrow U_{24}=\frac{a_{24}-L_{21}U_{14}}{L_{22}}$

در حالت کلی L، n تا ستون داریم و U تعداد n-1 ردیف دارد. بدین ترتیب در نهایت داریم:

$$L_{i1} = a_{i1} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad \boxed{A}$$

$$U_{ij} = \frac{a_{ij}}{L_{11}} \qquad j = 2, \ldots, n \qquad \boxed{B}$$

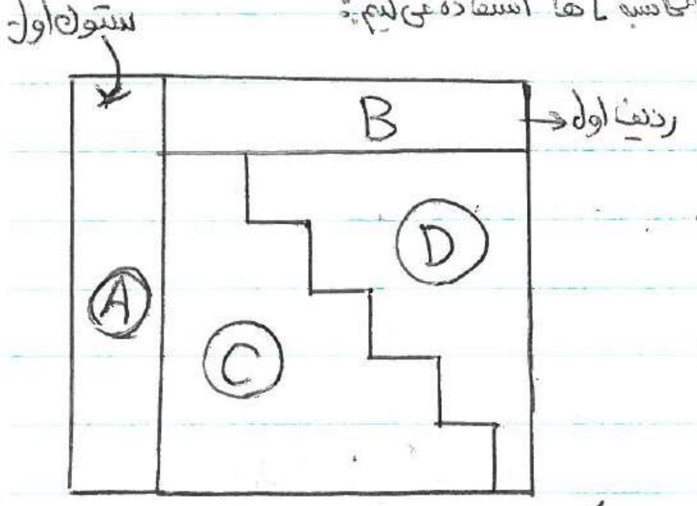
برای ردیف‌ها و ستون‌های اولیه به کار می‌بریم

$$L_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{k=j-1} L_{ik}U_{kj} \qquad \begin{cases} j = 2, \ldots, n \\ i = j, \ldots, n \end{cases} \qquad \boxed{C}$$

$$U_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{k=i-1} L_{ik}U_{kj}}{L_{ii}} \qquad \begin{cases} i = 2, \ldots, n-1 \\ j = i+1, \ldots, n \end{cases} \qquad \boxed{D}$$

بعد از اینکه مراحل بالا انجام شد برای ستون‌ها و سطرهای بعدی انجام می‌شود

به معادلات با دقت کنید اگر ماتریس A را در نظر بگیرید. (ماتریس مربعی $n \times n$) در روابط A که مربوط به محاسبهٔ ستون اول A می‌شود برای محاسبه L ها استفاده می‌کنیم:



رابطه B را برای ستون دوم به بعد داریم.
زیر قطر اصلی از رابطه C استفاده می‌شود.
بالای قطر اصلی از رابطه D استفاده می‌گردد.
ماتریس A در ابتدا همان A اصلی است.
وقتی روی آن تغییرات انجام شود ماتریس L و U بدست می‌آید که پایین قطر اصلی L و بالای آن U می‌باشد.

حال می‌خواهیم ۲ حلقه D و C را در یک حلقه اعمال کنیم و j را به عنوان شمارنده ستون‌ها در نظر می‌گیریم. وقتی D را اعمال می‌کنیم i و j شمارنده هستند که برای حلقه خارجی انجام می‌دهیم. هرجا i دیدیم بنویسیم j و هرجا j دیدیم بنویسیم k. این حلقه را همزمان با یک شمارنده انجام می‌دهیم. این کار را تا ردیف n ادامه می‌دهیم و U آن را حساب می‌کنیم.

درروش LU Decomposition ها می‌بایست برای حل مسائل ۳ مرحله زیر را اعمال کنیم :

① $A = L \times U$

② $LD = C$

③ $D = UX$

آنچه در صفحات قبل گفته شد، تنها برای محاسبه قسمت ① بود. در واقع ما قسمت ① را انجام می دهیم تا L و D را تعیین کنیم. از L بدست آمده در مرحله دوم D را حساب می کنیم و D بدست آمده را برای بدست آوردن X در مرحله سوم استفاده می کنیم.

در قسمت دوم ما اگر بخواهیم معادلات را حل کنیم به صورت زیر عمل می کنیم :

$$LD = C \Longrightarrow \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}$$

در رابطه بالا ماتریس L در قسمت اول حساب شد. ماتریس C نیز در صورت مساله مشخص است. اما ماتریس D برای ما مجهول است. برای محاسبه مقادیر d به صورت زیر عمل می کنیم :

$$d_1 = \frac{C_1}{l_{11}} \qquad d_i = \frac{C_i - \sum_{K=1}^{i-1} l_{ik} d_k}{l_{ii}} \qquad i = 2, \dots, n$$

در ادامه برای حل قسمت ③ از رابطه زیر استفاده می کنیم :

$$D = UX \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ 0 & 1 & U_{23} & U_{24} \\ 0 & 0 & 1 & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

در ماتریس بالا مقدارهای X_1 و X_2 و X_3 و X_4 پس از ضرب سطرهای ماتریس U در ستون X به صورت روبرو حساب می گردد:

$X_4 = d_4$

$X_3 = d_3 - U_{34} X_4$

$X_2 = d_2 - U_{23} X_3 - U_{24} X_4$

$X_1 = d_1 - U_{12} X_2 - U_{13} X_3 - U_{14} X_4$

⟸ به طور خلاصه برای مقادیر X از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$X_n = d_n$$

$$X_j = d_j - \sum_{k=j+1}^{n} U_{jk}\, x_k \qquad j = n-1, \dots, 1$$

با توجه به موارد گفته شده می توان به راحتی مقادیر x را برای چند معادله ـ چند مجهول حساب کرد. اما باید به این موضوع هم توجه داشت که برای برنامه نویسی ستونهای L را داخل یک حلقه و ستونهای U را درون حلقه دیگر قرارداد. اما این حلقه ها نباید از همدیگر جدا باشند. در این ماتریسها j شمارنده ستون و i شمارندهٔ ردیفها می باشد. کاری که باید انجام داد این است که محاسبات را باید داخل حلقه انجام بدهیم. ما می دانیم که ردیف آخری برای U نداریم بنابراین L را برای ستون ۲ تا $n-1$ می نویسیم:

$$C' \quad L_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{k=j-1} L_{ik}\, U_{kj} \qquad \begin{cases} i = j, \dots, n \\ j = 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

توجه

رابطه C را به ۲ قسمت C' و E تقسیم کرده ایم که C' شامل عناصر ستونی U از ۲ تا یکی مانده به آخر است و E اختصاص به عنصر آخر ماتریس U دارد.

$$E \quad L_{ji} = a_{jj} - \sum_{k=1}^{n-1} L_{jk}\, U_{kj} \qquad j = n$$

حالا داخل حلقه قسمت D را هم اعمال می کنیم. در این حلقه شمارنده i است. بنابراین در رابطه مربوط به آن هرجا i دیدیم به جای آن j بنویسیم و هرجا j دیدیم بنویسیم k و هرکجا k دیدیم i بنویسیم. با توجه به این مطلب رابطه D' به صورت زیر بدست می آید:

$$D' \quad U_{jk} = \frac{a_{jk} - \sum_{i=1}^{i=j-1} L_{ji}\, U_{ik}}{L_{jj}} \qquad k = j+1, \dots, n$$

وقتی برای L ما ۲ قسمت C' و E ایجاد کردیم ، ناخواسته D' به جای D قرار می گیرد. با این حال برای اجرای برنامه A و B را نیز می بایست تغییر دهیم. برای تغییر A و B می بایست چنین عمل کنیم:

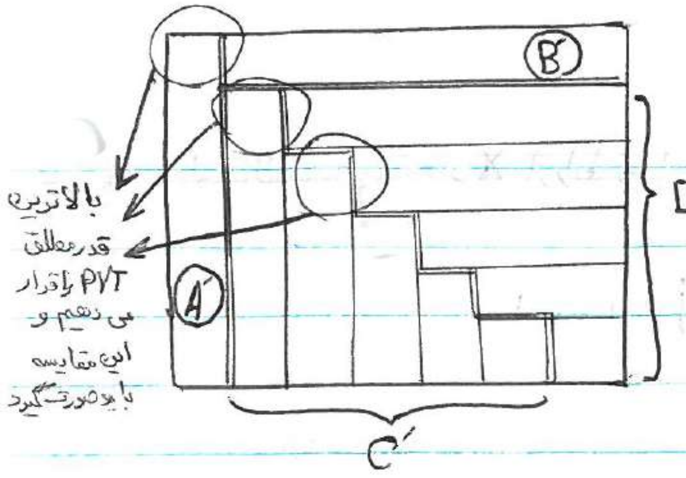
۱) مقادیر L و U را که در رابطه A و B داشتیم بر می داریم و به جای آن a قرار می دهیم.

۲) هرجا i دیدیم به جای آن j ، هرجا j دیدیم به جای آن k و هرجا k دیدیم به جای آن i قرار می دهیم.

با این ۲ تغییر داریم:

$$A' \quad a_{i1} = a_{i1} \qquad i = 1, \dots, n$$

$$B' \quad a_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{11}} \qquad j = 2, \dots, n$$

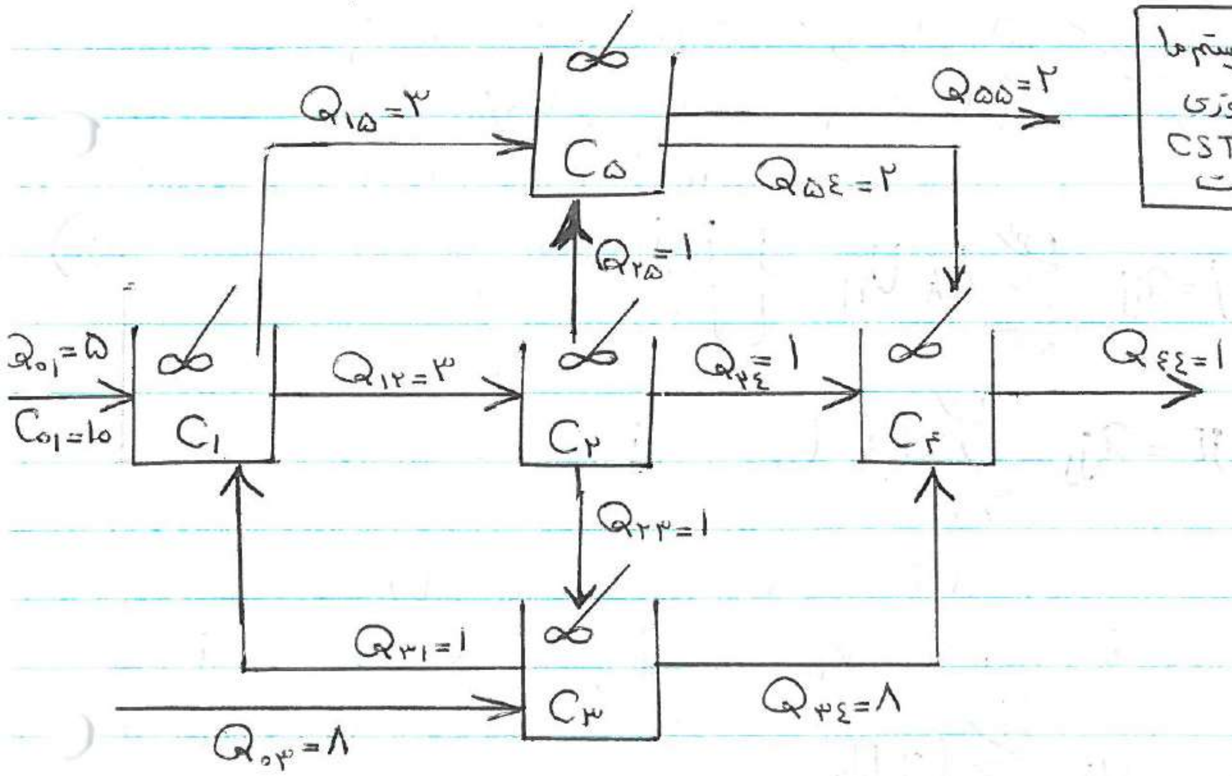


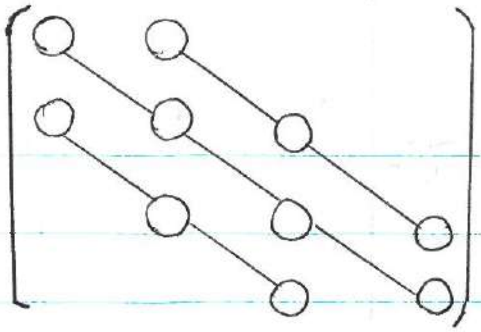
با توجه گفته های صفحه قبل اعمالی را که انجام می دهیم به صورت نمادین در شکل روبرو بیان می کنیم:

توجه ⟸ $\boxed{\text{PVT می بایست بعد از محاسبهٔ ستون L و قبل از محاسبهٔ سطر U صورت بگیرد}}$

مثال: ماتریس معادله زیر را با کمک LU Decomposition حل کنید

سیستم ما راکتوری CSTR است





* الگوریتم توماس :

گاهی اوقات ما ماتریس ۳ قطری داریم :
در این ماتریسها همانطوری که مشاهده می کنید دایره ها بیانگر مقادیر مجهول ما می باشد. غیر از این دایره ها بقیه عناصر صفر هستند به عبارت دیگر عناصر غیرصفر عبارتند از :

$$a_{ii} \qquad i=1,\dots,n$$
$$a_{j,j+1} \qquad j=1,\dots,n-1$$
$$a_{j,j-1} \qquad j=2,\dots,n$$

خیلی اوقات وقتی با معادلات دیفرانسیل سروکار داریم، به ماتریس ۳ قطری می رسیم وگاهی محاسباتمان را به گونه ای تنظیم می کنیم که حتماً به ماتریس ۳ قطری برسیم. حل این گونه معادلات بسیار ساده است. از این ماتریس با روش LU Decomposition استفاده می گردد. به این عملیات روش توماس گفته می شود. به عنوان مثال در ماتریس ۴x۴ زیر داریم : $A=L\times U$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ 0 & 1 & U_{23} & U_{24} \\ 0 & 0 & 1 & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

برای LU ماتریسهای سه قطری با توجه به روابطی که داریم به صورت زیر است :

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{11}U_{12} & L_{11}U_{13} & L_{11}U_{14} \\ L_{21} & L_{21}U_{12}+L_{22} & L_{21}U_{13}+L_{22}U_{23} & L_{21}U_{14}+L_{22}U_{24} \\ L_{31} & L_{31}U_{12}+L_{32} & L_{31}U_{13}+L_{32}U_{23}+L_{33} & L_{31}U_{14}+L_{32}U_{24}+L_{33}U_{34} \\ L_{41} & L_{41}U_{14}+L_{42} & L_{41}U_{14}+L_{42}U_{24}+L_{43} & L_{41}U_{14}+L_{42}U_{24}+L_{43}U_{34}+L_{44} \end{bmatrix}$$

با توجه به مقایسه ماتریس بالا با ماتریس A داریم : $A=L\times U$

ماتریس L $= \begin{bmatrix} L_{11} & & & \\ L_{21} & L_{22} & & \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & \beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & \beta_4 \end{bmatrix}$

a_{21} a_{32} a_{43} 0 0 0

$$
\text{ماتریس } U = \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & \cancel{U_{13}}^{\,0} & \cancel{U_{14}}^{\,0} \\ 0 & 1 & U_{23} & \cancel{U_{24}}^{\,0} \\ 0 & 0 & 1 & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

در روش توماس ماتریسهای غیرصفرها $2n-1$ می شود، حال اگر بخواهیم در هم ضرب کنیم داریم:

$\beta_i = l_{ii} \qquad i = 1,\dots,n$

$\gamma_j = U_{j,j+1} \qquad j = 1,\dots,n-1$

اگر ردیف اول را درستون اول ضرب کنیم، داریم:

$\beta_1 = a_{11}$

اگر چنانچه ردیف اول را درستون دوم ضرب کنیم داریم:

$\beta_1 \gamma_1 = a_{12} \longrightarrow \boxed{\gamma_1 = \frac{a_{12}}{\beta_1}}$

وچنانچه ردیف دوم درستون دوم ضرب کنیم داریم:

$a_{21}\gamma_1 + \beta_2 = a_{22} \longrightarrow \boxed{\beta = a_{22} - a_{21}\gamma_1}$

اگر ردیف دوم را درستون سوم ضرب بکنیم آنگاه داریم:

$\beta_2 \times \gamma_2 = a_{23} \longrightarrow \boxed{\gamma_2 = \frac{a_{23}}{\beta_2}}$

اگر ردیف سوم را درستون سوم ضرب بکنیم داریم:

$\beta_3 = a_{33} - a_{32}\gamma_2$

درنهایت اگر این اعمال خود را ادامه بدهیم برای i مرحله داریم:

$\beta_{11} = a_{11}$

$\gamma_j = \frac{a_{j,j+1}}{\beta_j} \qquad j = 1,\dots,n-1$

$\beta_j = a_{jj} - a_{j,j-1}\gamma_{j-1} \qquad j = 2,\dots,n$

این همان روش LU Decomposition است که درکنار آن باید روابط زیر را حساب کرد:

$L \times D = C$

$U \times X = D$

نکته

دراینجا PVT احتیاجی نداریم چون از لحاظ تقسیم برصفر برای معادلات ۳قطری مناسب است

* درماتریسهای کوچک از روشهای ماتریسی وحل وخطا استفاده می کنند، اما برای ماتریسهای بزرگ فقط باید از روش حل وخطا استفاده کرد *

به طور خلاصه در الگوریتم توماس برای ماتریس ۳ قطری داریم:

$$\beta_1 = a_{11}$$

$$\gamma_j = \frac{a_{j,j+1}}{\beta_j} \qquad j = 1, \dots, n-1$$

$$\beta_j = a_{jj} - a_{j,j-1} \times \gamma_{j-1} \qquad j = 2, \dots, n$$

در رابطه روبرو ابتدا γ حساب می‌شود پس از آن β را اعمال می‌نماییم

اگر ماتریس A به صورت زیر موجود باشد می‌توان آن را به حاصلضرب ۲ ماتریس به صورت زیر در آورد:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & & \\ & a_{32} & a_{33} & a_{34} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ & & & & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 & & & & \\ a_{21} & \beta_2 & & & \\ & a_{32} & \beta_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n,n-1} & \beta_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 & & & \\ & 1 & \gamma_2 & & \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots & \gamma_n \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = L \times U$$

طبق روش LU Decompsition برای حل معادله ۳ مرحله‌ی زیر را اعمال می‌کنیم:

① $A = L \times U$

② $C = L \times D$

③ $D = U \times X$

آنچه در بالا گفته شد برای مرحله ① بود، حال مرحله‌ی ② را برای ماتریس ۴×۴ مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} \beta_1 & & & \\ a_{21} & \beta_2 & & \\ & a_{32} & \beta_3 & \\ & & a_{43} & \beta_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}$$

در ماتریس گفته شده در صفحهٔ قبل مقادیر d عبارتست از :

$$d_1 = \frac{c_1}{\beta_1}$$

$$d_2 = \frac{c_2 - a_{21} d_1}{\beta_2}$$

$$d_3 = \frac{c_3 - a_{32} d_2}{\beta_3}$$

$$d_4 = \frac{c_4 - a_{43} d_3}{\beta_4}$$

$$\vdots$$

$$d_k = \frac{c_k - a_{k,k-1} d_{k-1}}{\beta_k} \qquad k = 2, \dots, n$$

حالا مرحله سوم عملیات را نیز انجام می دهیم :

$$UX = D \searrow \begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 & & \\ & 1 & \gamma_2 & \\ & & 1 & \gamma_3 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

در بالا کار خود را با عملیات Backward Subsitiotion محاسبات را انجام داده ایم ، در نتیجه محاسبات داریم :

$$X_1 = d_1 - X_2 \gamma_1$$

$$X_2 = d_2 - X_3 \gamma_2$$

$$X_3 = d_3 - X_4 \gamma_3$$

$$X_4 = d_4 \quad \text{یا} \quad X_n = d_n$$

$$\vdots$$

$$X_k = d_k - X_{k+1} \gamma_k$$

به طور خلاصه ۳ مرحله در زیر بیان شده است

$A = L \times U$	$\beta_1 = a_{11}$ $\gamma_i = \dfrac{a_{j,j+1}}{\beta_i}$ $\quad j = 1, \dots, n-1$ $\beta_j = a_{jj} - a_{jj-1} \times \gamma_{j-1}$ $\quad j = 2, \dots, n$		
$C = L \times D$	$d_1 = \dfrac{c_1}{\beta_1}$	$d_k = \dfrac{c_k - a_{k,k-1} d_{k-1}}{\beta}$	$k = 2, \dots, n$
$D = U \times X$	$X_n = d_n$	$X_k = d_k - X_{k+1}$	$k = 1, \dots, n-1$

روش الگوریتم توماس در مقایسه با LU Decomposition تعداد مجهول کمتری نیاز دارد. روش LU Decomposition تعداد مجهولاتش n^2 بود. اما روش توماس $2(n-1)$ مجهول دارد. همچنین نیاز به PVT ندارد که این روش باعث شده تا مناسب‌ترین روش برای حل معادلات ODE باشد. در معادلات ODE به معادلات ۳ قطری می رسیم و اگر معادلات از جای دیگر بدست بیاید و PVT را انجام دهیم از روش های LU Decomposition و دیگر روشهای موجود استفاده می کنیم.

همانطور که در قبل نیز گفتیم روشهای ماتریسی دارای خطای زیادی است که این خطاها در معادلات ill Condition تولید خطای زیادی می کند. برای درک بهتر این موضوع، یک دستگاه معادلات خطی 100×100 را در نظر می‌گیریم. این ماتریس فقط می بایست از روش توماس حل کرد. اما اگر کمتر از 100×100 باشد هم می توان از روش ماتریسی و هم از روش توماس استفاده کرد. معادلات زیر را در اختیار داریم:

$$0.0003\,X_1 + 3X_2 = 2.0001 \qquad\qquad X_1 + 10000\,X_2 = 6667$$
$$X_1 + X_2 = 1 \qquad\qquad -9999\,X_2 = -6666$$

جواب قطعی $\rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} X_1 = 1/3 \\ X_2 = 2/3 \end{array}}$

$$\boxed{X_2 = \frac{2}{3}}$$

$$\boxed{X_1 = \frac{2.0001 - 2(2/3)}{0.0003} = \frac{1}{3}}$$

همانطوری که در بالا مشاهده می کنید X_1 و X_2 مقادیر قطعی را به ما هستند. حال اگر این مقادیر اندکی تغییر پیدا کند، درصدهای ما خطا پیدا می کند. میزان خطا بر حسب تغییرات X_1 و X_2 داریم

X_2	X_1	درصد خطا
$X_2 = 0.6667$	$X_1 = 0.3$	10%
$X_2 = 0.66667$	$X_1 = 0.33$	1%
$X_2 = 0.666667$	$X_1 = 0.333$	0.1 %
$X_2 = 0.6666667$	$X_1 = 0.3333$	0.01 %

این مقدار خطا شاید در نگاه اول بی اهمیت به نظر بیاید ولیکن در مسأله آینده به شما می گوییم که این خطای کم اندازه چقدر جواب را دچار خطا می نماید:

$$X_1 + 2X_2 = 10$$
$$1.1\,X_1 + 2X_2 = 10.4$$

$$\boxed{X_1 = \frac{10 - 10.4}{1 - 1.1} = 4}$$

$$\boxed{X_2 = \frac{10.4 - 10(1.1)}{2 - 2(1.1)}}$$

	a_{21}	X_1	X_2
	1.1	4	3
با ۲ درصد خطا $\rightarrow$	1.08	5	2.5
با ۵ درصد خطا $\rightarrow$	1.05	8	1

آنچه در صفحه قبل گفته شده برای معادلات «ill Condition» بود. اما برای معادلات Singular (معادلاتی که نمودارهای آن بر هم منطبق و یا موازی همدیگر باشند) از دترمینان ماتریس کمک می گیریم. اگر شیبها همگی با همدیگر برابر باشند، دترمینان آن صفر است:

یادآوری

$D_{\text{دترمینان}} = 0$ معادلات Singular

* نکاتی در مورد دترمینان:

① هرگاه یک سطر یا یک ستون از ماتریس A در عدد حقیقی K ضرب شود مقدار دترمینان K برابر می گردد.

② هرگاه A یک ماتریس مربع از درجه n باشد داریم: $|KA| = K^n . |A|$

③ هرگاه جای ۲ سطر یا ستون عوض شود، دترمینان در (-1) ضرب می گردد.

④ هرگاه ۲ سطر یا ستون ماتریس با هم برابر باشد، مقدار دترمینان صفر می گردد.

⑤ دترمینان یک ماتریس قطری یا مثلثی برابر است با حاصلضرب عناصر روی قطر اصلی آن.

⑥ اگر تمام عناصر یک سطر یا ستون ماتریسی صفر باشد، مقدار دترمینان صفر است.

⑦ دترمینان یک ماتریس با دترمینان ترانهادهٔ آن برابر است.

⑧ اگر به سطر یا ستونی مضربی از سطر یا ستون دیگر اضافه گردد مقدار دترمینان تغییر نمی کند.

⑨ $|A^n| = |A|^n$ ⑩ $|AB| = |A||B|$ ⑪ $|A^k| = |A|^k$

⑫ هرگاه A و B دو ماتریس $n \times n$ باشند، داریم: $|AB| = |BA|$

در روش حذفی گاوس گفته شد که ما به ماتریس بالا مثلثی می رسیم. (Uper training Matrix)

با توجه به نکات گفته شده در بالا، دترمینان ماتریس به صورت زیر است:

$$D = (a_{11} . a_{22} . a_{33} \cdots a_{nn})(-1)^P$$

(در این رابطه P بیانگر تعداد تغییرات در روش گاوس است)

اگر یکی از مقادیر a صفر بشود، آنگاه دترمینان صفر می گردد. نتیجه اینکه معادلات ما Singular می گردد.

بنابراین دترمینان ماتریس معادلات را در روش حذفی گاوس حساب می کنیم، اگر صفر شد معادلات ما Singular است.

توجه کنید که فقط دترمینان به تنهایی نمی تواند بگوید که ماتریس ما چقدر ill Condition است. بنابراین ماتریسها را بر یک عدد تقسیم می کنیم که به این کار عملیات Scaleing می گویند. این تقسیم باید به بزرگترین عددی که ظاهر می شود صورت گیرد. باز هم با این ۲ روش (دترمینان و scaleing) نمی توان ill Condition را تفسیر کرد.

روش دیگر استفاده از (نُرم) برداری است. نُرم ملاکی است برای اندازه گیری بردار که رابطه کلی آن برای X به صورت زیر است:

$$\bar{X} = \|X\|_e = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$$

نُرم ۱ بردار $\Rightarrow \|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |X_i|$

نُرم P بردار $\Rightarrow \|X\|_P = \left(\sum_{i=1}^{n} |X_i|^P\right)^{\frac{1}{P}}$

همین رابطه بدست آوردن نُرم را هم می‌توان برای ماتریسها انجام داد، که آن را نُرم اقلیدسی می‌گویند و با علامت $\bar{A}$ نمایش می‌دهند. نُرم اقلیدسی P برای ماتریس عبارتست از:

$$||X||_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{2}}$$

نُرم دیگر ماتریس colum sum norm است. اگر ماتریس $n \times n$ داشته باشیم و قدر مطلق همه درایه‌ها را باهم دیگر جمع بزنیم و برای هر ستونی عددی بدست بیاید و بزرگترین آن را انتخاب می‌کنیم:

$$||A||_1 = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

به عنوان مثال در ماتریس روبرو داریم:

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۴ & ۱ \\ ۲ & -۷ & ۹ \\ ۶ & ۱۱ & ۲۳ \end{bmatrix}$$

۱۱ ۲۲ ۳۳ ← مجموع ستونها

به طور کلی اگر بخواهیم «Condition noumber» را برای ماتریس A حساب کنیم می‌بایست colum sum norm ماتریسهای A و A^{-1} را بدست آوریم:

$$\text{Condition}.N\,[A] = ||A|| \cdot ||A^{-1}||$$

در رابطه بالا A همان ماتریس اصلی‌مان است، ماتریس A^{-1} نیز را با روش گاوس - جردن بدست می‌آوریم. دستگاه معادلات روبرو را در اختیار داریم: $AX = C$

در این رابطه بردار خطا $\{e\}$ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\{e\} = \{X\} - \{\bar{X}\}$$

در رابطه بالا $\{X\}$ بیانگر جواب واقعی «true solution» است. همچنین $\{\bar{X}\}$ بیانگر جوابی است که از روش ماتریسی بدست می‌آید «Appoximate Solution»

برای چک کردن درستی محاسبات از $\{r\}$ یا resigual «باقیمانده» به صورت رابطه زیر استفاده می‌کنند:

$$\{r\} = \{C\} - [A]\{\bar{X}\}$$

در رابطه بالا $\{C\}$ بیانگر ماتریس جواب است. $[A]$ بیانگر ماتریس ضرایب است. $\{\bar{X}\}$ نیز بیانگر X هایی است که ما بدست آورده‌ایم.

برای بدست آوردن حد قل و حد اکثر خطا در یک محاسبه از روش زیر استفاده می کنیم :

$$\frac{1}{Condition[A]} \frac{||r||_1}{||c||_1} \leqslant \frac{||e||_1}{||x||_1} \leqslant Condition[A] . \frac{||r||_1}{||c||_1}$$

رابطه وسطی را که در بالا مشاهده می کنید ، بیانگر محدوده ای است که می توانیم خطا داشته باشیم مطرح می کند.

اگر Condition Number عدد بزرگی باشد ، نمی تواند قابل توجه باشد. فرض کنید در یک عددی ماتریسی را ضرب کنیم به طوری مقدار نرم ۱ عبارت C ما 10^0 بشود :

$$||C||_1 = 10^0$$

در این حالت خاص که در بالا آورده شده است ، داریم :

Single presioum 10^{-6}

Double presioum 10^{-12}

اگر ما Condition[A] و بعد از آن محدودهٔ خطا « bounds on relation error »

را داشته باشیم می توانیم : Single presioum $||r|| = 10^{-6}$

مقدار مناسب

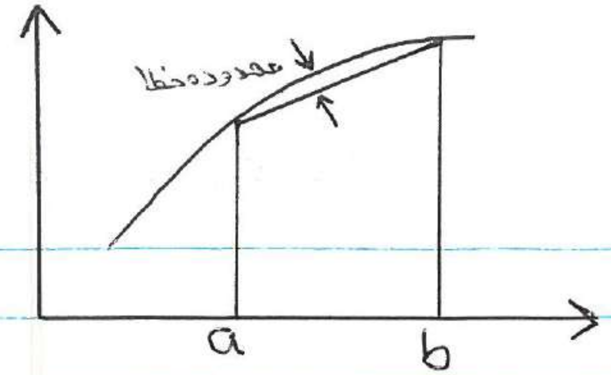
با توجه به جدول زیر رابطه موجود میان Condition[A] و محدوده خطا بیان شده است :

Condition[A]	محدودهٔ خطا
10^{10}	$10^{-6} \leqslant \frac{\lVert e\rVert_1}{\lVert x\rVert_1} \leqslant 10^{4}$
10^{6}	$10^{-12} \leqslant \frac{\lVert e\rVert_1}{\lVert x_1\rVert_1} \leqslant 10^{0}$
10^{0}	$10^{-6} \leqslant \frac{\lVert e\rVert_1}{\lVert x\rVert_1} \leqslant 10^{-6}$
10^{-10}	$10^{-22} \leqslant \frac{\lVert e\rVert_1}{\lVert x\rVert} \leqslant 10^{-12}$

اگر Condition Number کوچک بود در آن هنگام می بایست از « Double Pressium »

استفاده کرد. آنگاه $||r|| = 10^{-12}$ می شود.

برای درک بهتر موضوع یک مثال را در صفحه بعدی بیان شده است :



تابعی به صورت $f(x)$ با نمودار روبرو داریم:
ما قصد داریم با روش عددی انتگرال آن را محاسبه کنیم

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{سطح زیر نمودار}$$

همانطوری که ملاحظه می نمائید اگر با روش ذوزنقه ای انتگرال را حساب کنیم مقداری خطا در تابع ایجاد می شود. با روش سیمپسون این خطا کمتر می شود ولی هنوز وجود دارد. به طور کلی با محاسبات خطا جواب عددی ما به جواب قطعی یعنی سطح زیر نمودار نزدیک می گردد. ما برای محاسبه خطا اعداد را حساب می کنیم تا مقدار Condition Number بدست بیاید. بعد از آن محدودهٔ خطا را بدست می آوریم. اگر Condition Noumb ما بزرگ باشد از همان روش Double Prisioum استفاده می کنیم تا به خطا کمتر برسیم.

یادآوری

روشهای انتگرال گیری عددی به طور کلی به صورتهای زیر است:

روش مستطیلی $\longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx = h\left[f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_n\right]$

روش ذوزنقه $\longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \approx h\left[\frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2}\right]$

روش سیمپسون $\frac{1}{3}$ $\longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\right]$

(ضرایب جملات اول و آخر یک / ضرایب جملات فرد ۴ / ضرایب جملات زوج ۲)

روش سیمپسون $\frac{3}{8}$ $\longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{3}{8}h\left[f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + \dots + 3f_{n-3} + 3f_{n-2} + 3f_{n-1} + f_n\right]$

(ضرایب جملات اول و آخر یک / ضریب جملات مضرب ۳ ← ۲ / ضریب سایر جملات ← ۳)

روش گاوس $\longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(t)\,dt = f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ $\boxed{x = \frac{[(b-a)t - (a+b)]}{2}}$

روش نقطه میانی $\longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx = h\left[f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + f\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) + \dots + f\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}\right)\right]$

توجه

پیرامون مباحث خطاها چند صفحه ای از کتاب تست کارشناسی ارشد بهزاد خداکرمی کپی شده است که در انتهای جزوه ضمیمه گردیده است.

تابع فرضی $f(x)$

x	$f(x)$
۰/۵	+۰/۷
۰/۶	-۰/۲
۰/۵۸	+۰/۰۳
۰/۵۸۱	-۰/۰۰۲
۰/۵۸۰۸	+۰/۰۰۰۰۰۰۱

روش ژاکوبی :

در قبل گفته شد که برای محاسبات می توانیم از روشهای حل تکراری هم استفاده کنیم برای این کار باید حدس اولیه را داشته باشیم. تابع فرضی $f(x)$ را در نظر بگیرید، در این تابع ابتدا یک x را حدس می زنیم و برای رسیدن به حدس قطعی از روش درونیابی استفاده می کنیم. در اینجا ما از رابطه تکراری خواهیم استفاده کنیم که تغییر اندازه در ریشه را برای ما محاسبه می کند. برای این کار ابتدا بازه را انتخاب می کنیم. بعد بازه را کوچک می کنیم تا به جواب قطعی برسیم. روشهای تکراری مثل بالا همگراست ولی گاهی روشهایی وجود دارد که واگرا می شود، ویژگی روشهای تکراری این است که باید همگرا شود. سرعت همگرایی می بایست بالا برود و با محاسبات تکرار کمتر به جواب نهایی برسیم. روشهای تکراری در آن متفاوت است که ما برای محاسبات خود معادلات دیفرانسیل زیر را در اختیار داریم:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \dots + a_{1n}X_n = C_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + \dots + a_{2n}X_n = C_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + a_{n3}X_3 + \dots + a_{nn}X_n = C_n$$

ما نمی توانیم برای n معادله، n حدس بزنیم بنابراین یک رابطه تکرار برای معادله اول حساب می کنیم:

$$X_1 = \{C_1 - a_{12}X_2 - a_{13}X_3 - \dots - a_{1n}X_n\}/a_{11}$$
$$X_2 = \{C_2 - a_{21}X_1 - a_{23}X_3 - \dots - a_{2n}X_n\}/a_{22}$$
$$X_3 = \{C_3 - a_{31}X_1 - a_{32}X_2 - a_{34}X_4 - \dots - a_{3n}X_n\}/a_{33}$$
$$\vdots$$
$$X_n = \{C_n - a_{n1}X_1 - a_{n2}X_2 - \dots - a_{n,n-1}X_{n-1}\}/a_{nn}$$

معمولاً حدس اولیه را (۰) در نظر می گیریم. برای محاسبات نیز از آن استفاده می نمائیم:

حدس اولیه $X_i^{k} = 0$

گاهی اوقات باید روی حدس اولیه حساسیت به خرج بدهیم ولی برای این معادلات صفر می گیریم. برای رابطه تکراری که می بایست اعمال کنیم، داریم:

حدس اولیه $X_i^{(k)} = 0$ $\quad i = 1, \dots, n \quad (k=0)$

مرتبه عملیات

روش تکرار برای محاسبه مرتبه $(K+1)$ داریم:

$$X_1^{(K+1)} = \left\{ C_1 - a_{12}X_2^{(K)} - a_{13}X_3^{(K)} - \dots - a_{1n}X_n^{(K)} \right\} / a_{11}$$

$$X_2^{(K+1)} = \left\{ C_2 - a_{21}X_1^{(K)} - a_{23}X_3^{(K)} - \dots - a_{2n}X_n^{(K)} \right\} / a_{22}$$

$$X_3^{(K+1)} = \left\{ C_3 - a_{31}X_1^{(K)} - a_{32}X_2^{(K)} - a_{34}X_4^{(K)} - \dots - a_{3n}X_n^{(K)} \right\} / a_{33}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$X_n^{(K+1)} = \left\{ C_n - a_{n1}X_1^{(K)} - a_{n2}X_2^{(K)} - \dots - a_{n,n-1}X_{n-1}^{(K)} \right\} / a_{nn}$$

روابط تکراری که در بالا گفته شد، به شرطی برقرار است که:

$$a_{ii} \neq 0 \qquad i = 1, \dots, n$$

به این روش محاسبات، روش جاکوبی (جایگزینی همزمان) گفته می‌شود. برای این روش باید مورد زیر را در نظر بگیرید:

شروع → $\left| x_i^{K+1} - x_i^{K} \right| <$ Tolerance for all $i = 1, \dots, n$ → بله → انجام شد

نه → دوباره x_i های خود را ادامه می‌دهیم:
$x_i^{(K)} = x_i^{(K+1)} \qquad i = 1, \dots, n$

به طور کلی الگوریتم روش ژاکوبی در زیر بیان شده است:

Count = 1 شمارنده

$I_{max} = 100$

$Tol = 0/000001$

Initial guess $X_{OLD_i} = 0 \qquad i = 1, \dots, n$

→ $i = 1, \dots, N$

$$X_{New_i} = \left[C_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_{OLD_i} \right] / a_{ii}$$

if $\left| X_{New_i} - X_{OLD_i} \right| < Tol$ for all $i = 1, \dots, n$ $\xrightarrow{\text{Yes}}$ Done

$\xleftarrow{\text{NO}}$ Count = Count + 1

if Count $> I_{max}$ $\xrightarrow{\text{Yes}}$ Stop

NO

$X_{OLD_i} = X_{New_i} \qquad i = 1, \dots, n$

✳ روش گاوس- سایدل (جایگزینی متوالی):

اصول کلی این روش دقیقاً مثل روش ژاکوبی است. تنها یکسری تغییرات جزئی در آن وجود دارد. به طور خلاصه روش گاوس- سایدل به شکل زیر است:

(۱) حدس اولیه $X_i^{(k)}=0$ $\quad i=1,\dots,n \quad$ (k مرتبه عملیات) $k=0$

---

(۲)
$$X_1^{(k+1)}=\left\{C_1-a_{12}X_2^{(k)}-a_{13}X_3^{(k)}-\dots-a_{1n}X_n^{(k)}\right\}/a_{11}$$
$$X_2^{(k+1)}=\left\{C_2-a_{21}X_1^{(k+1)}-a_{23}X_3^{(k)}-\dots-a_{2n}X_n^{(k)}\right\}/a_{22}$$
$$X_3^{(k+1)}=\left\{C_3-a_{31}X_1^{(k+1)}-a_{32}X_2^{(k+1)}-a_{34}X_4^{(k)}-\dots-a_{3n}X_n^{(k)}\right\}/a_{33}$$
$$\vdots$$
$$X_n^{(k+1)}=\left\{C_n-a_{n1}X_1^{(k+1)}-a_{n2}X_2^{(k+1)}-\dots-a_{n,n-1}X_{n-1}^{(k+1)}-a_{nn}X_n^{(k)}\right\}/a_{nn}$$

---

(۳) $\left|X_i^{(k+1)}-X_i^{(k)}\right|<Tolerance$ برای تمام $i=1,\dots,n$ $\xrightarrow{\text{بله}}$ انجام شد

از لحاظ همگرایی و سرعت عمل، روش گاوس- سایدل از روش ژاکوبی سرعت عمل بیشتری دارد. برای این کار یکسری شرایط کافی را می‌توان چک کرد. به عنوان مثال اگر ماتریس قطر اصلی غالب باشد، این روش همیشه همگرا است. یعنی:

$$|a_{ii}| \geq |\text{سایر اجزاء بر روی قطر اصلی}|$$

به عنوان مثال ماتریس ۴×۴ قطر اصلی غالب زیر را در اختیار داریم:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

قطر اصلی

diagonally dominat

قطر اصلی غالب زمانی است که:

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad \boxed{i=1,\dots,n}$$

گاهی اوقات جوابهایمان نه همگرا می‌شود و نه واگرا و یک حالت بلاتکلیفی ایجاد می‌شود که برای خروج از این حالت می‌بایست در محاسباتمان تغییراتی ایجاد نماییم. اگر ماتریس قطر اصلی غالب باشد، برای

این کار از روش تکراری استفاده می کنیم و مطمئن هستیم که ۱۰۰ درصد همگرا است که شرط ما کافی می باشد. برای خارج شدن از حالت بلاتکلیفی می توان با افزایش شمارش تکرار را افزایش داد که بعد از ۱۰۰ مرحله تکرار آن را بدست می آوریم و تا ۱۰۰ مرحله باید مشخص کرد که همگرا است یا واگرا. اگر تا ۱۰۰ مرحله همگرا نشد باید تغییری در کارهای خود بدهیم.

این روش تفاوت جزئی با روش ژاکوبی دارد ، در روش ژاکوبی جابجایی مرحله ای ولی در گاوس - سایدل همزمان صورت می گیرد. برای روش گاوس - سایدل به طور کلی الگوریتم زیر را داریم :

Gauss-Seidel :

Count = 1

$I_{max} = 100$

Tol = 0/000001

initial guess

$X_{OLD_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n$

$X_{R_i} = X_{OLD_i} \quad i = 1, \dots, n$

$\rightarrow i = 1, \dots, n \Longrightarrow X_{New_i} = \left[C_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} X R_i \right] / a_{11}$

Relaxation : $X_{New_i} = W \times X_{New_i} + (1 - W) X_{OLD_i}$

$X_{R_i} = X_{New_i}$

if $|X_{New_i} - X_{OLD_i}| < Tol$ for $i = 1, \dots, n \xrightarrow{\text{بله}}$ انجام شد

نه

Count = Count + 1

نه — If Count $> I_{max} \xrightarrow{\text{بله}}$ STOP

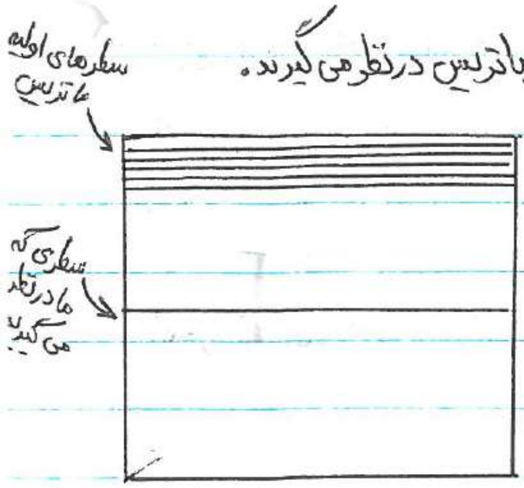
توجه

Absolute Error $\left| X_i^{(k+1)} - X_i^{(k)} \right| < Tol$ for $i = 1, \dots, n$

relative Error $\left| \dfrac{X_i^{(k+1)} - X_i^{(k)}}{X_i^{(k+1)}} \right| \times 100\% < Tol$ for $i = 1, \dots, n$

Sum of Absolute $\sum_{i=1}^{n} \left| X_i^{k+1} - X_i^{k} \right| \leqslant Tol$

گاهی اوقات تعداد خطاها بسیار زیاد می شوند برای همین یک خط در ماتریس در نظر می گیرند.

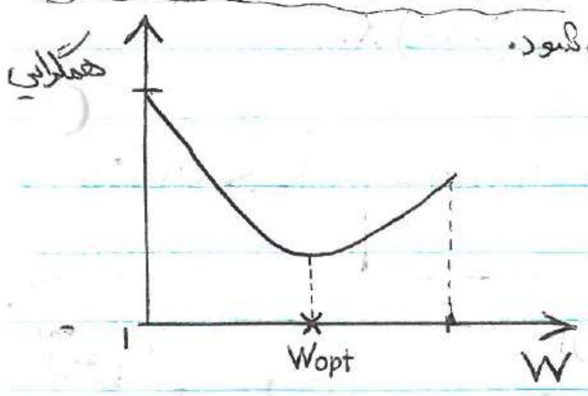


و بر حسب این خط تمام خطاها را در ماتریس تعیین می نمائیم.
در برنامه کامپیوتری که در صفحه قبل آورده شده است ما این سطر را در همین ۲ خط i و X_{R_1} قرار می دهیم. برای این سطرها از Relaxation استفاده می کنیم که عبارتست از:

$$X_{New} = W \times X_{New} + (1-W)\, X_{OLD}$$

در روشهای تکراری ممکن است جوابها واگرا شود. اگر در محاسبات عددی خودمان روش گاوس - سایدل اعمال گردد ممکن است محاسبات ما همگرا شود. اگر همگرا نشد از روش Relaxation استفاده می کنیم. در فرمول Relaxation میزان X_{New} برحسب مقدار W تعیین می گردد. مقدار W هیچ رابطه خاصی ندارد. برای محاسبات معمولاً یکسری روشهایی وجود دارد که برای معادلات غیرخطی استفاده می گردد ولی برای استفاده از Relaxation می بایست نکات زیر را در نظر بگیرید:

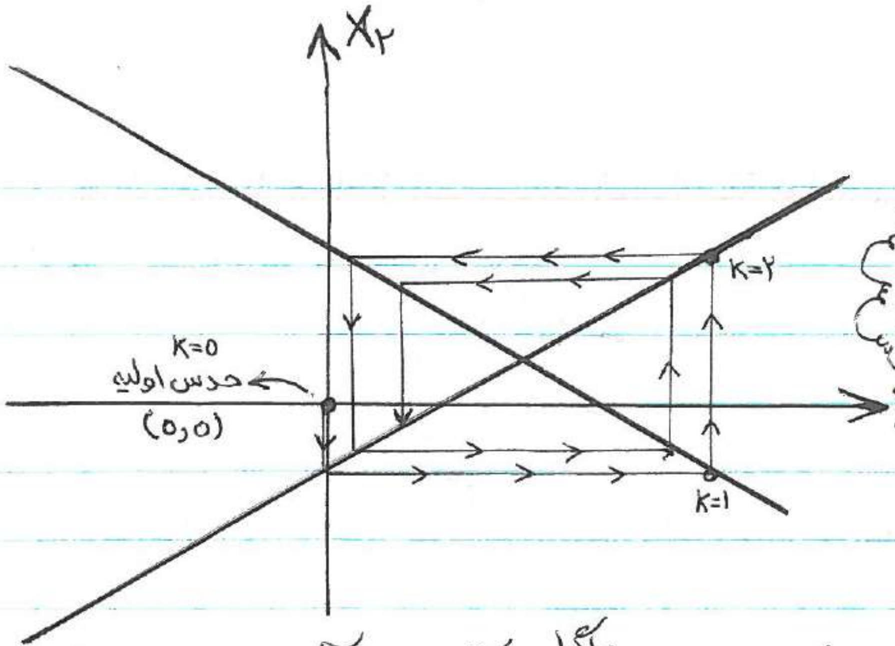
* نکته ۱: همیشه محاسبات خودمان را با $(W=1)$ آغاز می کنیم و همیشه برمبنا $(W=1)$ برنامه ما آغاز می گردد. با این کار ۲ حالت برای ما پدید خواهد آمد. یا با $(W=1)$ همگرایی داریم و یا با $(W=1)$ واگرایی داریم.
* نکته ۲: اگر $(W=1)$ واگرا شود، آنگاه W را کوچکتر می کنیم (Under Relaxation) $0<W<1$
* نکته ۳: اگر با $(W=1)$ همگرا شود آنگاه ما W را بزرگتر می کنیم تا سریعتر به جواب برسیم $1<W<2$
* نکته ۴: افزایش بیش از حد W باعث ایجاد واگرایی می شود.
* نکته ۵: در رابطه همگرایی یک W_{opt} پدید می آید که در نمودار روبرو مشخص شده است. مقدار W_{opt} رابطه خاصی ندارد. برای بدست آوردن W_{opt} معمولاً مساله را به ازای مقادیر مختلف حساب می کنند و بعد W را بدست می آورند.



برای Relaxation به عنوان مثال ما نموداری با ۲ معادله ۲ مجهول زیر در نظر می گیریم که آن را به صورت زیر تغییر می دهیم:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 = C_1 \longrightarrow a_{11}X_1 - a_{12}X_2 - C_1 = 0$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 = C_2 \longrightarrow a_{21}X_1 - a_{22}X_2 - C_2 = 0$$

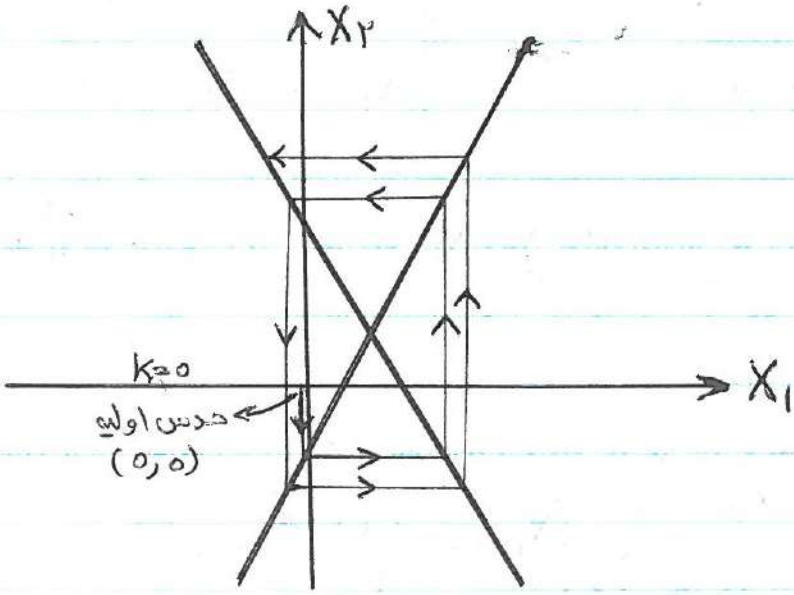
نمودار رابطه فوق را در صفحه بعد مشاهده می کنید و توضیحات ضروری نیز در کنار آن داده شده است:



همانطور که ملاحظه می کنید از K_0 که حدس اولیه است شکل ما همگرا می شود

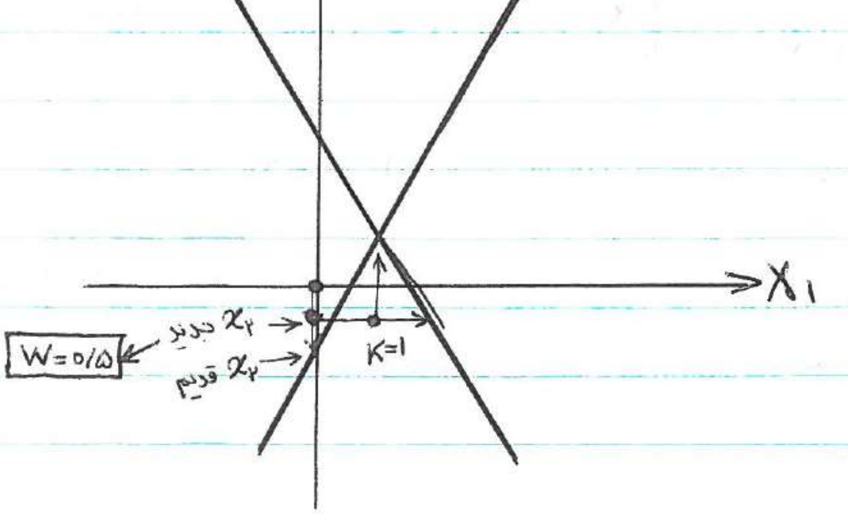
$$\text{حدس اولیه} = \begin{cases} X_1^0 = 0 \\ X_2^0 = 0 \end{cases}$$

حال اگر معادلات ما به گونه ای بود که به صورت واگرا درآید نمودار آن به صورت زیر می شود:



همانطور که ملاحظه می کنید از K_0 که حدس اولیه است شکل ما واگرا می گردد

در نمودار بالا حدس اولیه را صفر قرار می دهیم. اگر x_1 را صفر گذاشته و در مراحل مختلف اعمال کنیم، مشاهده می کنیم که در نهایت واگرا می شود. حال اگر از رابطه W استفاده کنیم و در فرمول Relaxation مقدار W را کمتر از یک قرار دهیم نمودار به صورت زیر در خواهد آمد:



همانطور که ملاحظه می کنید نمودار رو برو خیلی سریع همگرا شد و این مساله به خاطر انتخاب مناسب W است

درحالتی که ما از Relaxation استفاده می کنیم (به عنوان مثال تمودار پایین صفحه قبل) به جای X_2 از X_2 Relaxation که آن مقدار Update شده است داریم:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 = C_1 \longrightarrow X_2 = \frac{C_1 - a_{11}X_1}{a_{12}}$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 = C_2 \longrightarrow X_1 = \frac{C_2 - a_{22}X_2}{a_{21}}$$

اگر ماتریس معادلات ما قطراصلی قالب باشد، همگرایی داریم ولی اگر قطر اصلی قالب نباشد همگرایی ندارد و باید از Relaxation استفاده کرد و باید از روابطی که در بالا گفته شده داریم:

$$X_1^{(0)} = 0 \qquad X_2^{(0)} = 0$$

$$\begin{cases} X_2^{(1)} = \dfrac{C_1 - a_{11}X_1^{(0)}}{a_{12}} \\ X_2^{(1)} = WX_2^{(1)} - (1-W)X_2^{(0)} \end{cases} \qquad \begin{cases} X_1^{(1)} = \dfrac{C_2 - a_{22}X_2^{(1)}}{a_{21}} \\ X_1^{(1)} = WX_1^{(1)} + (1-W)X_1^{(0)} \end{cases}$$

مثال) در معادلات روبرو مقادیر X_1 و X_2 به ازای $(W = 0/5)$ به صورت زیر است:

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 = 5 \\ 3X_1 + 4X_2 = 6 \end{cases}$$

ما حدس اول را به این ترتیب قرار می دهیم: $X_2 = 0$ و $X_1 = 0$

برای بدست آوردن مقادیر X_1 و X_2 نیز طبق فرمول به صورت زیر عمل می کنیم:

$$X_1^{(1)} \begin{cases} X_1^{(1)} = \dfrac{C_2 - a_{22}X_2^{(1)}}{a_{21}} \\ X_1^{(1)} = WX_1^{(1)} + (1-W)X_1^{(0)} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X_1^{(1)} = \dfrac{6 - 4 \times 1/25}{3} = 0/333 \\ X_1^{(1)} = (0/5)(0/333) + (0/5)(0) = 0/1667 \end{cases}$$

$$X_2^{(1)} \begin{cases} X_2^{(1)} = \dfrac{C_1 - a_{11}X_1^{(0)}}{a_{12}} \\ X_2^{(1)} = WX_2^{(1)} - (1-W)X_2^{(0)} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X_2^{(1)} = \dfrac{5 - 1 \times (0)}{2} = \dfrac{5}{2} \\ X_2^{(1)} = (0/5) \times \dfrac{5}{2} + (0/5)(0) = 1/25 \end{cases}$$

حال مقدارهای X_1 و X_2 را در جدول روبرو بیان می کنیم:

	X_1	X_2
$K=0$	0	0
$K=1$	1/667	0/333

نکته مهم

ما در این مثال می بایست اول X_2 را حساب کنیم چون در رابطه X_1 داریم: $X_1 = \dfrac{C_2 - a_{22}.X_2^{(1)}}{a_{21}}$

مثال ۲: در معادلات روبرو X_1 و X_2 و X_3 را حساب کنید:

$$\begin{cases} 2X_1 - X_2 + X_3 = 1 \\ X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 2 \\ X_1 + X_2 + X_3 = 4 \end{cases}$$

معادله فوق را یک مرتبه با حدس اولیه $\begin{bmatrix} X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \\ X_3 = 0 \end{bmatrix}$ و با کمک روش ژاکوبی و یک مرتبه به کمک روش گاوس - سایدل به ازای $(W=1)$ و $(W=0/5)$ حل می نماییم:

⟵ روش ژاکوبی:

با توجه به معادلات روبرو و به طور ذهنی محاسبات را انجام می دهیم

$$X_1^{(K+1)} = \frac{2 - 2X_2^{(K)} + 3X_3^{(K)}}{1}$$

$$X_2^{(K+1)} = \frac{1 - 2X_1^{(K)} - X_3^{(K)}}{-1}$$

$$X_3^{(K+1)} = \frac{4 - X_1^{(K)} - X_2^{(K)}}{1}$$

	X_1	X_2	X_3
K=0	0	0	0
K=1	2	-1	4
K=2	16	+7	+3

با روش ژاکوبی مشاهده می کنیم که معادلات ما واگرا می شود بنابراین به سراغ روش گاوس - سایدل می رویم:

* روش گاوس - سایدل:

برای این روش یک جدول تشکیل می دهیم و با کمک روابط روبرو ذهنی آن را کامل می کنیم:

$$X_1^{(K+1)} = \frac{2 - 2X_2^{(K)} + 3X_3^{(K)}}{1}$$

$$X_2 = \frac{1 - 2X_1^{(K)} - X_3^{(K)}}{-1}$$

$$X_3 = \frac{4 - X_1^{(K+1)} - X_2^{(K+1)}}{1}$$

	X_1	X_2	X_3
K=0	0	0	0
K=1	2	3	-1
K=2	-7	-16	+27

همانطور که مشاهده می کنید در مرحله دوم محاسبات ما شروع به واگرا شدن می نماید بنابرین معادلات را بر مبنا $(W=0/5)$ به کار می بریم، با کمک روابط Relaxation جدول بالا را به صورت زیر و با معادلات زیر بازنویسی می کنیم:

$$X_1^{(K+1)} = (1-W)\,X_1^{(K)} + W\,X_1^{(K+1)}$$

$$X_2^{(K+1)} = (1-W)\,X_2^{(K)} + W\,X_2^{(K+1)}$$

$$X_3^{(K+1)} = (1-W)\,X_3^{(K)} + W\,X_3^{(K+1)}$$

	X_1	X_2	X_3
K=0	0	0	0
K=1	1	0/5	1/25
K=2	2/875	4/5	

همانطور که ملاحظه می فرمایید با $(W=0/5)$ نیز واگرا می شود، بنابرین یک W جلوتر را انتخاب می کنیم. و با W جدید همگرایی را بررسی می کنیم. آنقدر W را به کار می بریم تا اینکه در نهایت به مقادیر اصلی X ها یعنی موارد زیر برسیم:

$$X_1 = 1 \text{ و } X_2 = 2 \text{ و } X_3 = 1$$

* معادلات غیرخطی :

درمعادلات غیرخطی دیگر نمی توان ازماتریس استفاده کرد. می بایست دراین قبیل معادلات از روشهای تکراری استفاده کنیم وممکن است واگرا شود درآن صورت با عملیات Relaxation مشکل ما حل خواهد شد.

یادآوری

معادله دیفرانسیل معادله ای است که شامل مشتقات اول ویا بالاتر باشد. معادلات دیفرانسیل به ۲ دسته تقسیم بندی می شود : ① معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE) / ② معادلات دیفرانسیل جزئی PDE

معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE) شامل مشتقات معمولی بوده ودارای یک متغیر است. معادلات دیفرانسیل جزئی شامل مشتقات جزئی بوده ودارای بیش ازیک متغیر مستقل است. درمعادلات دیفرانسیل تعاریف زیر راداریم :

* مرتبه : مرتبه بالاترین مشتق موجود درمعادله دیفرانسیل رامرتبه معادله دیفرانسیل می گویند.

* درجه : توان بالاترین مرتبه مشتق موجود درمعادله دیفرانسیل را درجه آن معادله می گویند.

معادلات دیفرانسیل معمولی رامی توان به ۲ دسته خطی وغیرخطی تقسیم بندی کرد :

هرگاه معادلات دیفرانسیل برحسب متغیر وابسته ومشتقات آن یعنی $y', y'', \dots, y^{(n)}$ خطی باشد آن راخطی می نامیم. معادله زیر یک معادله دیفرانسیل مرتبه n اُم خطی درحالت کلی رانشان می دهد :

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = g(x)$$

درغیراین صورت معادلات خطی است. اگر $g(x)=0$ معادله همگن واگر $g(x)\neq 0$ باشد معادله ناهمگن است

* جواب معادله : درحالت کلی هر تابعی که درمعادله دیفرانسیل صادق باشد جواب آن معادله دیفرانسیل نامیده می شود :

← جواب عمومی : جوابی است که به ازای مرتبه معادله دارای ثابت باشد وبه ازاء هرثابت درمعادله صدق کند

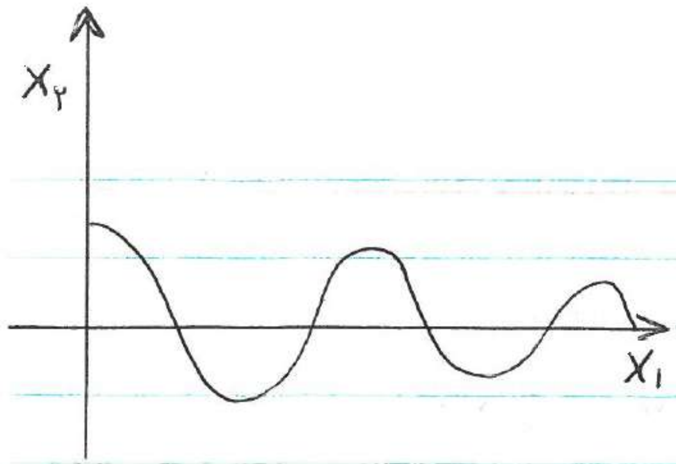
← جواب خصوصی : به جوابهایی گفته می شود که با شرایط مرزی وشرایط اولیه آنها تعیین گردد.

← جواب غیرعادی : جوابی است که منحنی نمایش آن برکلیه منحنی های مربوط به جواب مماس باشد.

درمعادلات غیرخطی ما اول به سراغ Single nonliniear Equation یعنی یک معادله یک مجهول می رویم. برای این کار می بایست ببینیم که به ازاء چه مقادیری از x مقدار $f(x)$ ما صفر می گردد. به عنوان مثال درمعادله درجه دوم زیر مقادیر x که $f(x)$ راصفر می کند به صورت زیر محاسبه می گردد : $f(x)=0$

$$f(x) = ax^2+bx+c=0 \xrightarrow{\text{برای بدست آوردن ریشه}} x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{-b}$$

گاهی اوقات معادلات ما آنقدر طولانی می گردد که با رابطه فوق نمی توان آن را محاسبه کرد. به عنوان مثال در



شکل روبرو نموداری را مشاهده می کنید:

نمودار روبرو بیش از یک جواب دارد و می بایست هرکدام از جوابها را مورد بررسی قرار دهیم و کاربرد آنها را مشاهده کنیم. اما گاهی $f(x)=0$ ما پیچیده تر می شود که برای این کار از روش بسته استفاده می کنند. در آن صورت یک جدول تشکیل می دهند که مقادیر x را در آن حدس می زنند و بر اساس آن مقادیر $f(x)$ را بدست می آورند:

x	۰/۵	۰/۷	۰/۳	۰/۳۵	۰/۳۴	۰/۳۴۵	۰/۳۴۴۸
$f(x)$	۳۵۳	۳۷۴۳	-۱۲۴	+۲۵	-۱۶	۰/۰۳۵	-۰/۰۰۰۰۰۰۳ (جواب ما)

در جدول بالا از روش تکرار استفاده می کنیم که برای این کار بازه ای را در نظر می گیریم و تغییرات آن را محاسبه می کنیم. در این محاسبات رابطه خود را خطی در نظر می گیریم و بازه بین ۲ حدس اول خود را نصف می کنیم تا به جواب برسیم. به این روش نصف کردن یا Bisection گفته می شود.

تذکر مهم ← روش نصف کردن Bisection تنها برای زمانی کاربرد دارد که نمودار ما تنها یک جواب داشته باشد. اگر در بالای صفحه گفته شده که روش حدس و خطا برای نمودارهای چند جوابه است تنها حالت کلی داشته که در ادامه بیشتر توضیح داده خواهد شد.

برای روش نصف کردن Bisection ما روابط زیر را در اختیار داریم که این روابط بر روی نمودار نمایش داده شده است:

① $X_L \cdot f(X_L) < 0$

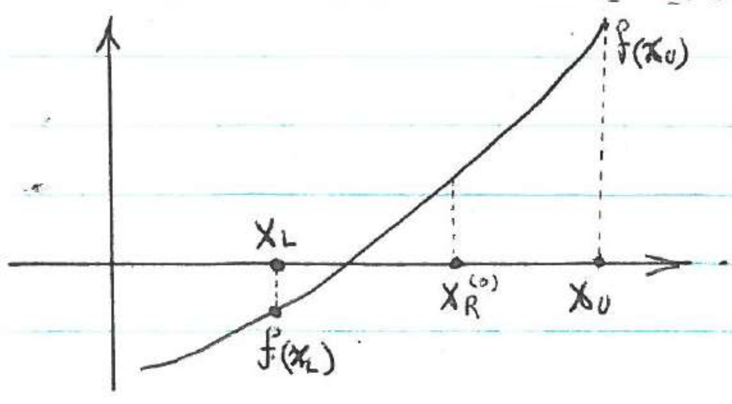
② $X_R \cdot f(X_U) > 0$

③ $f(x_L) \cdot f(x_R) < 0 \longrightarrow x_R > 0 \Rightarrow X_U = X_R$

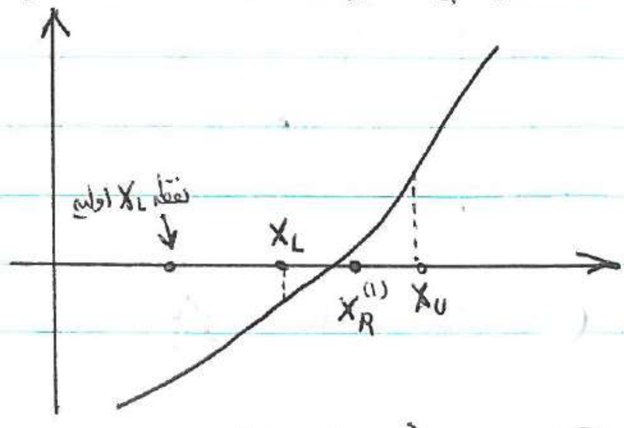
$f(x_L) \cdot f(x_R) > 0 \longrightarrow x_R < 0 \Rightarrow X_L = X_R$

$f(x_L) \cdot f(x_R) = 0 \Longrightarrow$ به جواب رسیده ایم

روابطی که در بالا گفته شده است، در نمودارهای زیر نمایش داده شده است:



(مرحله اول)



(مرحله دوم)

همانطور که در صفحه قبل مشاهده کردید مرحله به مرحله نقطه X_R به جواب ما نزدیکتر می گردد و این روش نصف کردن تا آنجا ادامه می یابد که X_R به نزدیکترین فاصله ممکن با جواب برسد. بنابرین اگر بخواهیم بدانیم که خطا چقدر است می بایست از روش relative error برای سنجش خطا استفاده کنیم:

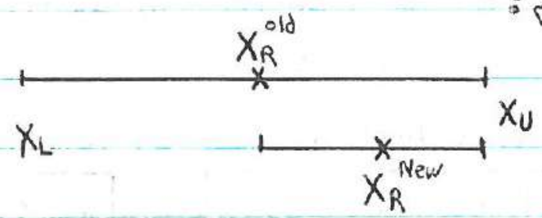
$$\text{relative error}: \left|\frac{X_R^{New}-X_R^{old}}{X_R^{New}}\right| \times 100\% < 1\times10^{-5}$$

ما در بررسی های خود سیستماتیک بازه ها را تعقیب می کنیم و می خواهیم عبارت را برای آن بدست بیاوریم،
اگر X_R^{New} برابر باشد با:

$$X_R^{New} = \frac{X_L+X_u}{2} \quad \text{(مرحله اول)}$$

$$X_R^{New} - X_R^{old} = \frac{X_u - X_L}{2}$$

فرض کنید برای X_1 و X_2 به صورت زیر داشته باشیم:



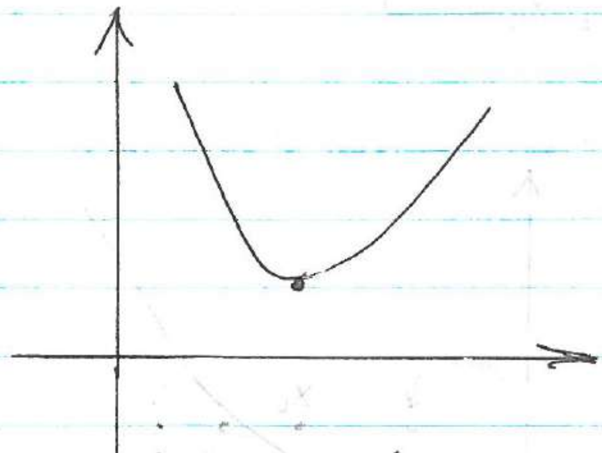
$$X_R^{New} = \frac{X_U+X_L}{2}$$

$$X_R^{New} - X_R^{old} = \frac{X_U - X_L}{2}$$

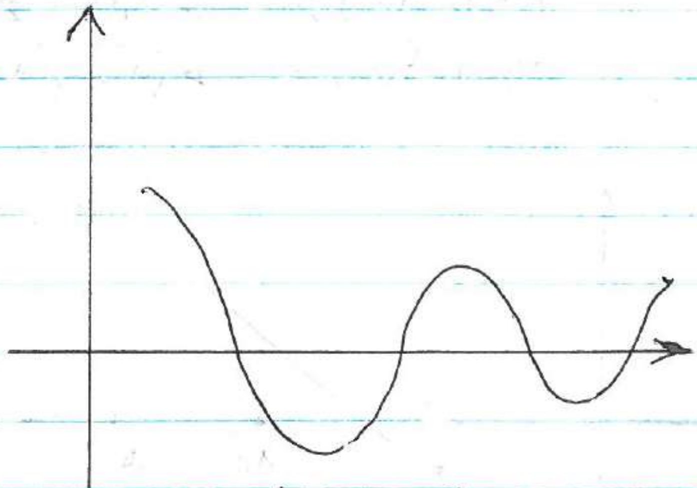
عبارتی که ما برای خطا داریم به صورت زیر درخواهد آمد:

$$\left|\frac{X_R^{New}-X_R^{old}}{X_R^{New}}\right| \times 100 < 1\times10^{-5} \Longrightarrow \left|\frac{X_U-X_L}{X_U+X_L}\right| \times 100 < 1\times10^{-5}$$

اما گاهی اوقات پیش می آید که رابطه ما به گونه ای می شود که ریشه نداریم و یا چند ریشه داریم که در این مواقع روشهای بسته مناسب نیستند چون این روشها برای زمانی کاربرد دارد که فقط یک ریشه داشته باشیم. شکل زیر نمودار مواردی است که از روش بسته (Close Methode) نمی توان استفاده کرد:



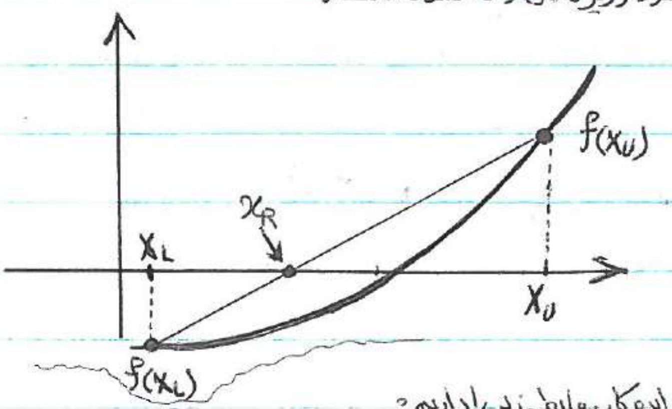
(ریشه نداریم)



(چند ریشه داریم)

* روش میان یابی خطی :

در این روش ما دیگر نصف نمی‌کنیم بلکه درون‌یابی خطی انجام می دهیم. در مرحله اول یک X_L تعیین می‌کنیم و به ازای آن مقدار X_L مثبت است. این مطلب در نمودار زیر نشان داده شده است :



در این روش ما به صورت خطی عمل می‌کنیم و برای این کار روابط زیر را داریم :

① $X_L \cdot f(X_L) < 0$

$X_U \cdot f(X_U) > 0$

② $X_R = X_U + \dfrac{f(x_0)(X_L - x_0)}{f(X) - f(x_0)} \longleftarrow$

③ $f(X_L) \cdot f(X_R) < 0 \xrightarrow{\ x_R = x_U\ }$

$f(X_L) \cdot f(X_R) > 0 \xrightarrow{\ x_R = x_L\ }$

$f(X_L) \cdot f(X_R) = 0 \longrightarrow$ اتمام شد

این روش زیاد کاربرد ندارد ؛ چون ما می خواهیم به سراغ روشهایی با تعداد مجهولات زیاد برویم که این روشهای بسته کارایی ندارد. بنابراین به سراغ روشهای باز می رویم. روش باز یا Open Meth. شامل روشهایی است که ما به ۲ حدس اولیه نیازی نداریم و تنها با یک حدس اولیه کار خود را شروع می‌کنیم : $f(x)=0$ حدس اولیه

معمولاً محاسبات ما به ۳ روش زیر صورت می گیرد :

① گاوس ـ سایدل

② نیوتون ـ رافسون

③ نیوتون ـ رافسون False position

---

* نیوتون ـ رافسون :

ما یک رابطه تکرار بدست می‌آوریم که در آن داریم : $f(x)=0 \longrightarrow x=g(x)$

در روش نیوتون - رافسون داریم:

$$x^{New}=x^{old}-\frac{f(x^{old})}{f'(x^{old})}=g(x)$$

ولی به روشهای دیگری می توان $g(x)$ را بدست آورد که داریم:

$$f(x)=ax^2+bx+c=0 \qquad x=g(x)$$

در رابطه نیوتون - رافسون می بایست به ۲ طرف رابطه یک مقدار x ضرب کنیم. این مقدار کاملاً اختیاری است. به عنوان مثال در معادله زیر داریم:

$$f(x)=3x^2-5x+7=0$$

$$\searrow x\,(f(x)=3x^2-5x+7=0)\rightarrow x=g(x)\rightarrow x=\frac{3x^2+7}{5}$$

ما می توانیم طرفین را به هر عددی که مایل هستیم ضرب کنیم.

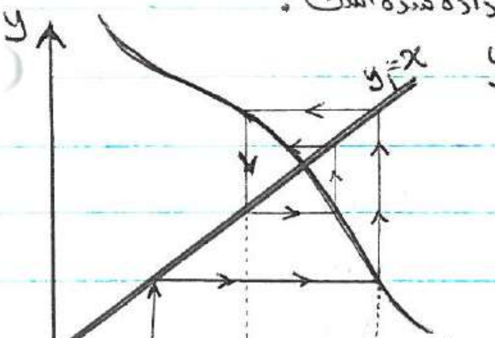
گاهی اوقات $g(x)$ ها از فرمولاسیون مساله بدست می آید و محاسبه آن کار خاصی ندارد. وقتی $g(x)$ بدست آمد به عنوان تکرار می توان از آن استفاده کرد که بنابراین:

$$x=g(x) \qquad x^{k+1}=g(x^k)$$

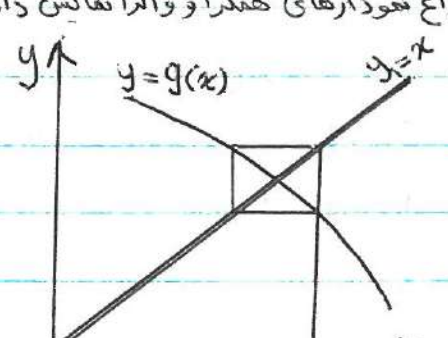
حدس اولیه $x^{k=0}=x^{(0)}$

$$x^{(1)}=g(x_0)$$

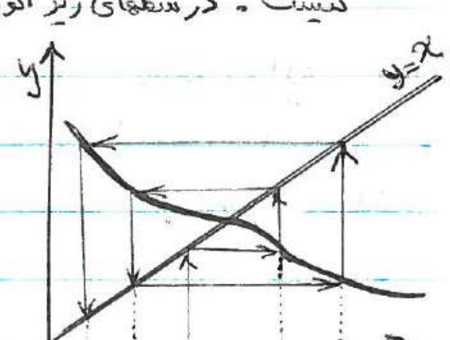
وقتی حدس زدیم و x جدید حاصل شده می بایست برای مقادیر x ها چک کرد که $|x^{k+1}-x^k|<Tol$ است یا نه. اگر رابطه برقرار نباشد باید حدس را در مرحله تکرار (۱) و (۲) و ... تکرار کرد تا به حد کمتر از Tolerance برسیم. امکان دارد این عملیات واگرا شود و هیچ تضمینی برای همگرایی آن نیست. در شکلهای زیر انواع نمودارهای همگرا و واگرا نمایش داده شده است:



نمودار همگرا
Converges



نمودار با رفتار نامشخص
OSCillating



نمودار واگرا
diverges

ما همیشه می دانیم که روابط ما از ۲ حالت خارج نیست یا همگرا است و یا واگرا. که اگر نمودار ما واگرا شد می بایست از Relaxation استفاده بنماییم.

مثال ⟸ معادله روبرو را در اختیار داریم: $f(x)=x^2-5=0$

در این معادله مقادیر زیر را برای $g(x)$ محاسبه می کنیم که با توجه به این مقادیر وضعیت آن به صورتهای زیر در خواهد آمد:

$(a)\ X=g(x)=5+x-x^2$ همگرا

$(b)\ X=g(x)=\frac{5}{x}$ نامشخص

$(c)\ X=g(x)=1+x-\frac{x^2}{5}$ بعضی از مواقع همگرا و بعضی مواقع غیرهمگرا

$(d)\ X=\frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{x}\right)=g(x)$ واگرا

موارد فوق از بینهایت مورد مختلف انتخاب شده است.

---

* روش نیوتون - رافسون False-position:

برای حل معادلات غیرخطی با روشهای حدس و خطا، تا پیش از این روشهای بسته (close) و باز (Open) گفته شده به طور کلی عبارتند از:

(۱) گاوس - سایدل: $x=g(x) \longrightarrow x^{(k+1)}=g(x^{(k+1)})$

(۲) نیوتون - رافسون: $x^{k+1}=x^k-\frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$

(۳) نیوتون - رافسون False-position: $x^{k+1}=x^k-\frac{f(x^k)}{\left(\frac{f(x^k)-f(x^{k-1})}{x^k-x^{k-1}}\right)}$

در هنگام استفاده از False-position می بایست مقادیر زیر تعیین گردد:

$$\begin{matrix} x^{k-1} & x^{k} & x^{k+1} \\ f(x^{k-1}) & f(x^{k}) & f(x^{k+1}) \end{matrix}$$

در روش False-position با کمک روش عددی محاسبات صورت می گیرد. در حالی که در روش نیوتون - رافسون می بایست از روش تحلیلی استفاده کنیم. روش نیوتون رافسون، روش درجه دوم است. و خطا ما متناسب با توان دوم خطا مرحله های قبلی خود است. روش نیوتون

رافسون درجه دوم نیست. تعداد محاسبات در روش False-position کمتر می گردد. مثال زیر را در نظر بگیرید. با کمک مثال زیر ۳ روش را با هم مقایسه می کنیم، اگر:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 3x + 3$$

Tolerance = ۰/۰۰۰۰۰۱

برای روش $X = g(x)$ می بایست رابطه تکرار را بدست آوریم:

گائوس سایدل

$$X = g(x) = x^3 - x^2 + 3x + 3 \longrightarrow$$ (به طرفین معادله $2x^3$ اضافه کرده ایم)

$$X = g(x) = \frac{x^3 - x^2 + 3x + 3}{2x^2}$$

نیوتون رافسون

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)} \longrightarrow x^{k+1} = x^k - \frac{x_k^3 + x_k^2 - 3x_k - 3}{3x_k^2 + 2x_k - 3}$$

نحوه عملکرد نیوتون رافسون به طور شماتیک در شکل زیر نمایش داده شده است:

$$x^k \longrightarrow \boxed{g(x)} \longrightarrow x^{k+1}$$

$$x^k \longrightarrow \boxed{\text{تابع}} \longrightarrow f(x^k)$$

$$x^k \longrightarrow \boxed{DERIN} \longrightarrow f'(x^k)$$

همانطوری که ملاحظه می کنید تابع $g(x)$ مقدار x^k را به x^{k+1} تبدیل می نماید. برای اینکار با روش تحلیلی ابتدا x^k به $f(x^k)$ و همچنین x^k به $f'(x^k)$ تبدیل می گردد. با $f(x^k)$ و $f'(x^k)$ که حاصل شد ما x^{k+1} را محاسبه می نماییم.

نیوتون - رافسون False-position

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{\left(\frac{f(x^k) - f(x^{k-1})}{x^k - x^{k-1}}\right)}$$

در روش False-position ما دیگر مجبور نیستیم از روش تحلیلی استفاده کنیم و $g(x)$ تعیین کنیم و ... در اینجا فقط $f(x^{k+1})$ را مطابق شکل روبرو حساب می کنیم:

$$x^k \longrightarrow \boxed{Function} \longrightarrow f(x^k)$$

بدین ترتیب که x^k وارد تابع و $f(x^k)$ بدست می آید و از آن برای محاسبه x^{k+1} استفاده می کنیم. x^{k-1} را هم مقدارش توسط خودما تعیین می گردد.

اگر روشها را با همدیگر مقایسه کنیم، در روش اول با یک حدس اولیه (۱) شروع می کنیم. و برای رسیدن به خواسته مساله می بایست ۲۷ مرحله عملیات تکرار را انجام دهیم. اگر از روش نیوتون - رافسون استفاده کنیم خطاما متناسب با مرتبه ۲ خطا است و می بایست هم از $f(x^k)$ و هم $f(x^{k+1})$ و هم $f'(x)$ استفاده کنیم. و با انجام عملیات با ۸ مرحله به جواب می رسیم. اگر حدس $x^0 = 1$ و $x^1 = 1/1$ بگیریم تعداد مراحل تکرارها یازده مرحله

حدس اولیه

گاوس-سایدل (۱) $x^0=1$

نیوتن رافسون (۲) $x^0=1$

false-positi (1,6/1,8) $\begin{cases} x^0=1 \\ x^1=1.1 \end{cases}$

می گردد. با توجه به این مطالب در روبرو داریم:

در روش گاوس - سایدل می بایست تعداد مراحل زیادی را برای رسیدن به جواب انجام بدهیم. در روش نیوتن - رافسون می بایست ۳ تا متغیر را تعیین کنیم. ما هم اینک قصد داریم تا روش سوم را مورد بررسی قرار دهیم. ما تا حالا $f(x)=0$ داشتیم ولی اکنون $\bar{f}(\bar{x})=0$ داریم:

$$f_1(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$$
$$f_2(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$$
$$\vdots$$
$$f_n(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$$

این دستگاه معادلات یا خطی است و یا غیرخطی می باشد. در روش گاوس - سایدل می بایست n تا حدس اولیه را بدست بیاوریم و بعد رابطه تکرار آن را تعریف کنیم:

$$x_1=g_1(x_1,x_2,\dots,x_n)$$
$$x_2=g_2(x_1,x_2,\dots,x_n)$$
$$\vdots$$
$$x_n=g_n(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

اگر معادلات خطی باشد در این معادلات x_i ظاهر نمی گردد. به طور کلی این روش غیرخطی است. برای آن رابطه تکرار بدست می آوریم و کار خود را آغاز می کنیم:

(۱) Initial guess

(۲)
$$\begin{cases} X_1^k=g_1(x_1^k,x_2^k,\dots,x_n^k) \\ X_1^{k+1}=(1-W)\,x_1^k+W\,x_1^{k+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_2^k=g_2(x_1^{k+1},x_2^k,\dots,x_n^k) \\ X_2^{k+1}=(1-W)\,x_2^k+W\,x_2^{k+1} \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$\begin{cases} X_i^k=g_i(x_1^{k+1},x_2^{k+1},\dots,x_{i-1}^{k+1},x_i^k,x_{i+1}^k,\dots,x_n^k) \\ X_i^{k+1}=(1-W)\,x_i^k+W\,x_i^{k+1} \end{cases}$$

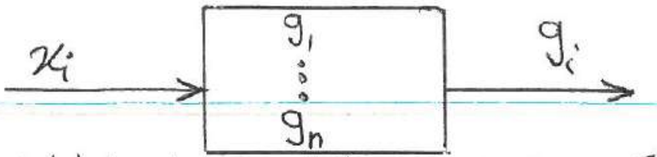
$$\vdots$$

$$\begin{cases} X_n^{k+1}=g(x_1^{k+1},\dots,x_{n-1}^{k+1},x_n^k) \\ X_n^{k+1}=(1-W)\,X_n^k+W\,X_n^{k+1} \end{cases}$$

(۳) $|X_i^{k+1}-X_i^k|<Tol \quad for\ all \quad i=1,\dots,n \xrightarrow{\text{بله}}$ انجام شد

نه

اگر بتوانیم روابط تکراری را به گونه ای بدست بیاوریم که x_i ما ظاهر نشود به طوری که g_1 دیگر x_1 و g_2، x_2 یا برای g_i های دیگر مستقل از x_i باشد، از لحاظ همگرایی بهتر می شود. از اینرو اگر قصد نوشتن برنامه داشته باشیم



بهتر است به صورت زیر عمل کنیم :

در اینجا کاربر ما مسئولیت دارد و همانا معرفی کردن g_i ها خواهد بود. گاهی اوقات این روابط از فرمولاسیون مساله بدست می‌آید و معمولاً از ODE به PDE به معادلات جبری می رسیم. اگر غیرخطی باشد، خطی و اگر خطی باشد، خطی می گردد. با حلقه های تکرار می توان این روابط را حساب کرد ولی در لبه مرزها دیگر حلقه اعمال نمی گردد و شکل تکرار با روابط میانی تفاوت پیدا خواهد کرد.

برای رابطه نیوتون - رافسون وقتی $f(x)=0$ است رابطه تکرار به صورت زیر نوشته می گردد : $f(x)=0$

$$x^{r+1}=x^r-\frac{f(x^r)}{f'(x^r)}$$

همانطور که در رابطه فوق نیز مشاهده می کنید، می بایست $f(x^r)$ و $f'(x^r)$ را حساب کنیم :

$$f'(x^r)\cdot\Delta x^r=-f(x^r) \longleftarrow \boxed{\Delta x^r=x^{r+1}-x^r}$$

اگر بخواهیم می توانیم همین داستان را به دستگاهی از معادلات تعمیم بدهیم جایی که x_1 تا x_n که با ماتریس ژاکوبی سروکار داریم به صورت $\frac{\partial}{\partial x_i}$ است :

$$J(x^r)\cdot\Delta\bar{x}^r=-\bar{f}(\bar{x}^r)$$

توجه

طبق تعریف ماتریس ژاکوبین به صورت زیر تعریف می گردد :

$$\bar{\bar{J}}(x^r)=\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}$$

با توجه به موارد بالا ماتریس ژاکوبین ما به صورت زیر در می آید :

$$A\,Z=b$$

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}_{\bar{x}^r}\begin{bmatrix}X_1^{r+1}-X_1^r\\ X_2^{r+1}-X_2^r\\ \vdots\\ X_n^{r+1}-X_n^r\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}f_1(x_1^r, x_2^r, \ldots, x_n^r)\\ f_2(x_1^r, x_2^r, \ldots, x_n^r)\\ \vdots\\ f_n(x_1^r, x_2^r, \ldots, x_n^r)\end{bmatrix}$$

مقادیر ماتریس ما به ازاء مقادیر فعلی محاسبه می گردد. با روشهای ماتریسی A را بدست می آوریم و آن را درج ضرب می کنیم تا به b برسیم. به طور کلی ما داریم :

$$Z_i=X_i^{r+1}-X_i^r$$

$$b_i=(-1)\,f_i(x_1^r, x_2^r, \ldots, x_n^r)$$

$$A_{ij}=\left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{\bar{x}^r}$$

* مراحل عملیات ما برای نوشتن برنامه به صورت زیر است:

۱) نیاز به حدس اولیه داریم.

۲) نیاز به روشی داریم که برای ما تک تک مقادیر را محاسبه کند تا A_{ij} ها بدست بیاید.

۳) بعد از A_{ij} ها b را بدست می آوریم

۴) از روی b_i مقدارهای Z_i را حساب می کنیم

۵) Z_i بدست آمده را برای محاسبه x_i^{r+1} استفاده می کنیم

۶) x_i^{r+1} را با Tolerance مقایسه می کنیم.

$$A.Z=b$$
$$Z_i = X_i^{r+1} - X_i^r$$
$$b_i = (-1) f_i(x_1^r, x_2^r, \dots, x_n^r)$$
$$A_{ij} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{\bar{x}^r}$$

با توجه به مراحلی که در بالا گفته شد، الگوریتم این مساله به صورت زیر است:

① Initial guess $X_i^{r=0}$ $\quad i=1,2,\dots,n$

② evalation n^2 partial clenition

$$A_{ij} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{\bar{x}=\bar{x}^r}$$

③ $b_i = -f_i(x_1^r, x_2^r, \dots, x_n^r)$

$$b_1 = -f_1(x_1^r, x_2^r, \dots, x_n^r)$$
$$\vdots$$
$$b_n = -f_n(x_1^r, x_2^r, \dots, x_n^r)$$

در خط ۴ برنامه داریم:

۱) روش ماتریسی حذفی گاوس GE

۲) روش ماتریسی گاوس-سایدل GS

۳) روش LU Decompo. LU

۴) روش ژاکوبی J

④ Solve $AZ=b$ using GE, GS, LU, GS, J for linear Equation

⑤ $X_i^{r+1} = Z_i + X_i^r$

⑥ $\left|\frac{X_i^{r+1} - X_i^r}{X_i^{r+1}}\right| \times 100\% < Tol$ for all i $\xrightarrow{\text{بله}}$ انجام شد

نه: $X_i^r = X_i^{r+1}$ $\quad i=1,\dots,n$

با تغییرات جزئی می توان به روابط نیوتون رافسون False-position را توضیح داد. در مثال زیر داریم:

$$f_1(x_1,x_2) = X_1^2 + X_2^2 + e^{X_1} + 7.7183\,X_1 = 0$$
$$f_2(x_1,x_2) = X_2 + e^{X_2} + X_1^3 - 10.389 = 0$$

مثال بالا را که داریم با ۳ روشی که داریم می خواهیم حل کنیم: (گاوس-سایدل، نیوتون رافسون، False position)

← روش گاوس-سایدل: این روش را با حدس و خطا حساب می کنیم.

← روش نیوتون-رافسون: می بایست از طریق $f(x_1)$ و $f'(x_1)$ بدست بیاوریم برای این کار به صورت زیر عمل می کنیم:

GS

گاوس سایدل

$$X_1 = g_1(x_1,x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + e^{x_1}}{7.7183}$$
$$X_2 = g_2(x_1,x_2) = 10.389 - e^{x_1} - x_1^3$$

حال برای روش نیوتون ـ رافسون اگر می خواهیم عمل کنیم ، مطابق شکل زیر می بایست عمل کنیم :

معادلات خطی $x_i^r \longrightarrow \boxed{\text{function}} \longrightarrow f_i$

$x_i^r \longrightarrow \boxed{\text{Deriw}} \longrightarrow A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big|_{\bar{x}_i^r}$

f_1 و f_2 را قرار می دهیم

$A_{ij}, b_i \longrightarrow \boxed{\text{LU}} \longrightarrow z_i$ به صورت تحلیلی بدست می آید

با توجه به شکلهایی که در بالا گفته شد و طبق دستور بالا داریم :

$$A_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 2x_1 + e^{x_1} - 7/7183 \qquad A_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 2x_2$$

$$A_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 3x_1^2 \qquad A_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 1 + e^{x_2}$$

تنها پیچیدگی کارها در مرحله DERIV است . می بایست در این مرحله فرمولها را بدهیم تا محاسبات انجام گیرد . کاربر همانطور که قبلاً $\frac{\partial f}{\partial x}$ یا f' را تخمین زدند باز هم از تعریف δ استفاده می کنند و آن را حساب می کنند . روش نیوتون ـ رافسون مثل همان روش نیوتون رافسون است با این تفاوت که در A_{ij} به جای محاسبه تحلیلی با ماتریس ژاکوبین با کمک evalute Partiar Using Per turbation استفاده می کنیم و داریم :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_{\bar{x}=\bar{x}_r} \approx \frac{f_1(x_1^r+\delta, x_2^r, x_3^r, \dots, x_n^r) - f_1(x_1^r, x_2^r, \dots, x_n^r)}{(x_1^r+\delta) - x_1^r}$$

$\boxed{\text{Partiation}: \delta \ \text{Variable}\ 1\times 10^{-5}}$

بنابراین می بایست یکسری عملیات انجام دهیم ، رابطه بالا را به صورت زیر خواهیم نوشت :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Big|_{\bar{x}=x^r} \approx \frac{f_1(x_1^r, x_2^r+\delta, x_3^r, \dots, x_n^r) - f_1(x_1^r, \dots, x_n^r)}{\delta}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big|_{\bar{x}=x^r} \approx \frac{f_i(x_1^r, \dots, x_{j-1}^r, x_j^r+\delta, x_{j+1}^r, \dots, x_n^r) - f_i(x_1^r, \dots, x_n^r)}{\delta}$$

در محاسبات بالا n^2 ضریب می بایست بدست بیاید و n^2 عملیات انجام بدهیم ، بدین ترتیب که یکبار f_1 را در x_1 و x_2 و ... و x_n انجام می دهیم ، بعد از آن f_2 را در xها و بعد تا f_n معادله در x_1 و x_2 و ... و x_n انجام می دهیم . n^2 محاسبه که صورت گیرد ، جمله اول صورت کسرها ایجاد می شود و جمله دوم از روی x^r ها بدست می آید . این محاسبات هم صورت مساله را می دهد و هم برای بدست آوردن سمت راست موثر است .

نکته

یکبار که x را محاسبه کردیم می بایست برای x_2 مقادیر را از نو انجام بدهیم و بعد برای x های بعدی این عملیات را انجام دهیم . حلقه داخلی که ابتدا برای x_2 و بعد تا x_n صورت می گیرد ، از آن به بعد دستورالعمل مثل روش نیوتون رافسون است .

① initial guess

② evalation n^2 partial clenition

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{\bar{x}=x^r} \approx \frac{f_1(x_1^r+\delta, x_2^r, \dots, x_n^r) - f_1(x_1^r, x_2^r, \dots, x_n^r)}{(x_1^r+\delta) - x_1^r}$$

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{\bar{x}=x^r} \approx \frac{f_1(x_1^r, x_2^r+\delta, x_3^r, \dots, x_n^r) - f_1(x_1^r, x_2^r, \dots, x_n^r)}{\delta}$$

$\vdots$

$$\left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{\bar{x}=x^r} \approx \frac{f_i(x_1^r, x_2^r, \dots, x_{j-1}^r, x_j^r+\delta, x_{j+1}^r, \dots, x_n^r) - f_i(x_1^r, \dots, x_n^r)}{\delta}$$

③ $b_i = -f_i(x_1^r, x_2^r, \dots, x_n^r)$

$b_1 = -f_1(x_1^r, x_2^r, \dots, x_n^r)$

$\vdots$

$b_n = -f_n(x_1^r, x_2^r, \dots, x_n^r)$

④ Solve $AZ = b$

⑤ $x_i^{r+1} = Z_i + x_i^r$

⑥ $\left|\frac{x_i^{r+1} - x_i^r}{x_i^{r+1}}\right| \times 100 < Tol$ for all i $\xrightarrow{\text{بله}}$ انجام شد

نه

$x_i^r = x_i^{r+1} \quad i = 1, \dots, n$

در حدس هامی بانیست شرایط مساله را درک کنیم. به عنوان مثال:

$$f_1(X_1, X_2) = X_1^2 + X_2^2 + e^{X_1} - 7.7183\, X_1 = 0$$

$$f_2(X_1, X_2) = X_2 + e^{X_2} + x_1^3 - 10.389 = 0$$

مطابق روش گاوس - سایدل داریم:

$$\begin{cases} X_1^{k+1} = g_1(x_1^k, x_2^k) = \dfrac{(x_1^{*k_2} + x_2^{k_2} + e^{x_1^k})}{7.7183} \\ \text{Relaxation } X_1 \end{cases}$$

$X_1 = 0.5$

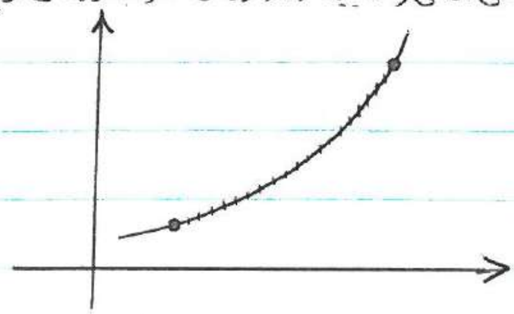
$X_2 = 0.5$

$$\begin{cases} X_2 = g_2(x_1^k, x_2^k) = 10.389 - e^{x_2} - x_1^3 \\ \text{Relaxation } X_2 \end{cases}$$

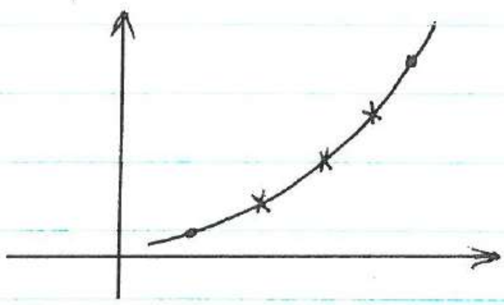
درمثالهای بالا با Relaxation ($W=0.3$) شروع به همگرایی می کند. با ($W=0.2$) همگرا می شود و در ۴۸ مرحله همگرا می شود. اگر معادلات را با نیوتن - رافسون انجام دهیم با حدس اولیه (۰/۵) و حدس (۰/۷) به

جواب دیگری می‌رسیم. در هر صورت با Initial guess برابر ۰/۵ در ۷ مرحله به جواب می‌رسیم.
در روش نیوتون رافسون False position به ما نند نیوتون-رافسون معمولی است. با این تفاوت که به جای ژاکوبین روش عددی استفاده می‌کنیم. در این روش با ۸ مرحله به جواب می‌رسیم.

در این مسائل برای حدس اولیه می‌توان بر روی منحنی نقاطی را تعیین کرد و روش کار به صورت‌های زیر است:



(۱) تعداد نقاط بیشماری را تعیین می‌کنیم. پس از آن با کمک روش‌های ماتریسی مقادیر A_{ij} را حساب می‌کنیم و بر حسب آن عملیات مربوط به محاسبه جواب را انجام می‌دهیم.



(۲) چند نقطه بر روی منحنی مشخص می‌کنیم با میان‌یابی منحنی مربوطه را رسم می‌کنیم و بر حسب آن تعداد معادلات را بدست می‌آوریم و بر حسب آن عملیات مربوط به محاسبه جواب را انجام بدهیم.

---

* برنامه محاسبات نیوتون رافسون False-position:

اساس روش این به صورت روابط زیر است:

$$A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\bigg|_{\bar{x}^r} = \frac{f_i(x_1^r, \dots, x_{j-1}^r, x_j^r + \delta^r, x_{j+1}^r, \dots, x_n^r) - f_i(x_1^r, \dots, x_n^r)}{\delta}$$

$$Az = b$$

$$b_i = f_i(x_1^r, \dots, x_n^r) \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

در داخل هر حلقه f_1 الی f_n را انجام می‌دهیم. به عبارت دیگر ما می‌بایست $n+2$ عملیات انجام بدهیم
پس از آن مبنا کار خودمان را روش LU یا دیگر دستگاه‌ها قرار می‌دهیم.
در صفحه آینده ما برنامه کامپیوتری روش نیوتون رافسون False-position را بیان کرده‌ایم:

X_{OLD_i} = initial guess $(r=0)$ ← اگر ما در مرحله فعلی X_{OLD_i} داشته باشیم

$X_i = X_{OLD_i}$

حلقه اول:

$i = 1, \dots, N$ ← برای حلقه $i = 1, 2, \dots, n$ به صورت روبرو می شود

$XD_i = X_i + \delta$

Call Function (X, F) ← Function را صدا می زنیم و در واقع x را می دهیم و F از آن خارج می گردد

حلقه دوم:

$i = 1, \dots, n$

$b_i = -1 \times F_i$ ← این مقدار مربوط به قسمت زیر می باشد:

$$A_{ij} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{\bar{x}^r} = \frac{f_i(x_1^r, \dots, x_{j-1}^r, x_j^r + \delta, x_{j+1}^r, \dots, x_n^r) - f_i(x_1^r, \dots, x_n^r)}{\delta}$$

جمله $F_{R_i} = F_i$ جمله سمت راست می باشد.

$F_{R_i} = F_i$

$i = 1, \dots, n$

$X_i = XD_i$ ← برای x_i از x_D استفاده می کند، بقیه هنوز x هستند

Call Function (X_i, F_i)

$X_i = X_{OLD_i}$

$j = 1, \dots, n$ ← برای حلقه دیگر F های بدست آمده F_1 تا F_n در F_i ها هستند

$F_{D_{j,i}} = F_j$

$i = 1, \dots, n$

$j = 1, \dots, n$

$$A_{ij} = \frac{FD_{ij} - F_{R_i}}{\delta}$$

با انجام کارهایی که در بالا گفته شد هم b_i ها و هم A_{ij} ها بدست می آید.

درونیابی:

تا به اینجا ما با $f(x) = 0$ و $\bar{f}(\bar{x}) = 0$ که اولی برای غیر خطی و دومی برای سیستمهای هم خطی و هم غیر خطی به کار می رفت

برای اولی روشهای گاوس و نیوتون رافسون را بررسی کردیم. و حالا برای دومی داریم:

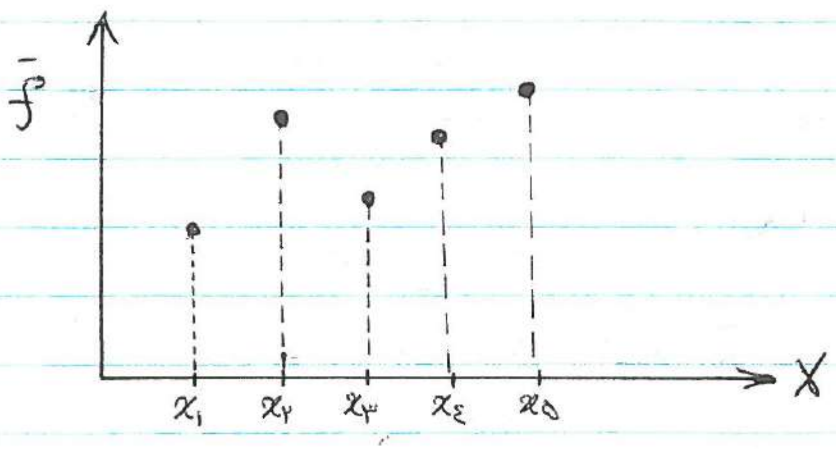
$\bar{f}(\bar{x}) = 0$ → غیر خطی (نیوتون رانسون / False-position / نیوتون - رافسون / گاوس - سایدل)

$\bar{f}(\bar{x}) = 0$ → خطی → ماتریسی ← برای ماتریس ۳ قطری از روش توماس

خطی → گاوس - سایدل

تا حالا از روشهایی که در بالا ذکر کرده ایم و در ادامه حل معادلات و در نهایت به دسته ای از معادلات n معادله و n مجهول می رسیم که بعضی مواقع خطی و بعضی مواقع غیر خطی که این مسائل را در معادلات دیفرانسیل نشان می دهند.

برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل اگر به ازای مقدارهای مختلف از x، مقدار f را داشته باشیم:



این داده ها که در بالا مشاهده می کنید همگی هم فاصله هستند. مقادیر x_1 تا x_n با داشتن نقاط بدست می آید که این نقاط بهترین رفتار f را نشان می دهند که به دو دسته کلی Regrassion و Interpolation تقسیم می کنیم.

* Regrassion: برای نمودار بالا ما بهترین خط را از نقاط روی نمودار عبور می دهیم. به این کار Regrassion می گوییم که در دوره کارشناسی برای نوشتن گزارشهای آزمایشگاهی از آن استفاده می کردیم. اگر برای بیان خط مذکور از x و y استفاده کنیم داریم:

$$y = a_0 + a_1 x$$

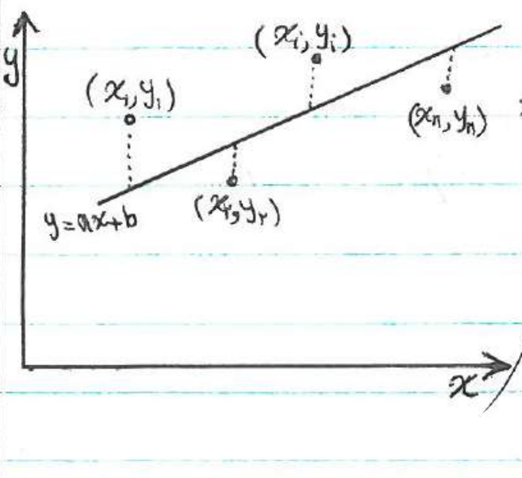
می خواهیم a_0 و a_1 را به گونه ای بدست بیاوریم که مربع خطاها حداقل شود. به جای اینکه از درجه یک استفاده کنیم اگر از درجه n استفاده کنیم داریم:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

یادآوری

* روش کمترین مربعات:

هرگاه مجموعه ای از نقاط مانند (x_1,y_1)، (x_2,y_2)، ...، (x_n,y_n) داشته باشیم و بخواهیم تابعی مثل $f(x)$ مثل $y=f(x)$ را بدست بیاوریم که این مقادیر را به همدیگر مرتبط سازد از روش کمترین مربعات استفاده می کنیم. در روش کمترین مربعات از مینیمم سازی جذر میانگین مربع خطاها استفاده می شود. این هم موقعی حاصل می شود که مجموعه مربعات فواصل عمودی نقاط از منحنی میانگین حداقل شود.



فرض می کنیم منحنی میانگین خطی به معادله $y=ax+b$ می شود:
در این حالت باید عبارت زیر مینیمم گردد:

$$E = \sum_{i=1}^{n} (a x_i + b - y_i)^2$$

اگر عبارت بالا را یکبار نسبت به a و یکبار نسبت به b مشتق بگیریم و برابر صفر قرار دهیم دستگاه ۲ معادله ۲ مجهول زیر بدست می آید:

$$\begin{cases} bn + a\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i & \boxed{\text{خود معادله}} \\ b\sum_{i=1}^{n} x_i + a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i & \boxed{\text{معادله} \times x_i} \end{cases}$$

ادامه یادآوری در صفحه بعد

ادامه یادآوری از صفحه‌ی قبل

از حل دستگاه ۲ معادله ۲ مجهولی که در صفحه‌ی قبل حل کردیم مقادیر a و b به صورت زیر می‌گردد:

$$a=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}\ \Big/\ b=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$$

در حالت کلی اگر بخواهیم از چند جمله ای درجه n برای منحنی میانگین استفاده کنیم داریم:

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$$

با انجام یکسری عملیات ریاضی به $n+1$ معادله نرمال زیر که می بایست به صورت همزمان حل گردد می رسیم:

$$a_0n+a_1\sum x_i+a_2\sum x_i^2+\dots+a_n\sum x_i^n=\sum y_i$$
$$a_0\sum x_i+a_1\sum x_i^2+a_2\sum x_i^3+\dots+a_n\sum x_i^{n+1}=\sum x_iy_i$$
$$\vdots$$
$$a_0\sum x_i^n+a_1\sum x_i^{n+1}+a_2\sum x_i^{n+2}+\dots+a_n\sum x_i^{2n}=\sum x_i^n y_i$$

ماتریس مربوط به دستگاه معادلات فوق به صورت زیر خواهد شد:

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 & \dots & \sum x_i^n \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \dots & \sum x_i^{n+1} \\ \vdots & & & & \\ \sum x_i^n & \sum x_i^{n+1} & \sum x_i^{n+2} & \dots & \sum x_i^{2n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_iy_i \\ \vdots \\ \sum x_i^n y_i \end{bmatrix}$$

که با حل این دستگاه معادلات ضرایب a_0 و a_1 و ... و a_n بدست می آید:

مثال) در یک آزمایش نتایج زیر حساب شده است، مناسب ترین خط مستقیم $y=ax+b$ که با استفاده از روش حد اقل مربعات بدست آورید:

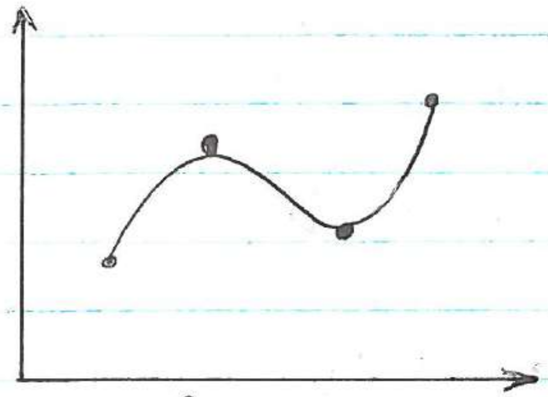
x	۱	۲	۳	۴	۵
y	-۰/۹	۱/۲	۲/۸	۵/۲	۶/۸

حل) ابتدا مقادیر x_i و y_i و x_i^2 و x_iy_i را مطابق جدول زیر بدست می آوریم:

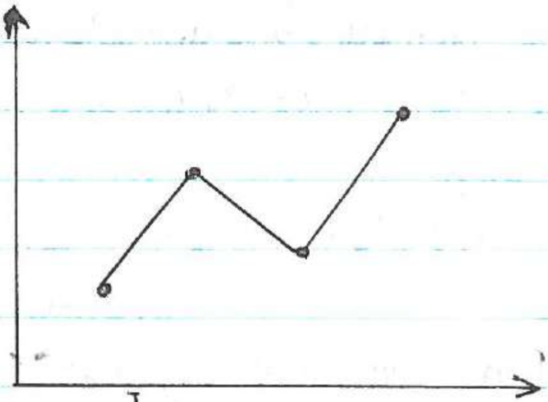
	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
	۱	-۰/۹	۱	-۰/۹
	۲	۱/۲	۴	۲/۴
	۳	۲/۸	۹	۸/۴
	۴	۵/۲	۱۶	۲۰/۸
	۵	۶/۸	۲۵	۳۴
مجموع	۱۵	۱۵/۱	۵۵	۶۴/۷

$$\begin{cases} bn+a\sum x_i=\sum y_i \\ b\sum x_i+a\sum x_i^2=\sum x_iy_i \end{cases}\longrightarrow\begin{cases} ۵b+۱۵a=۱۵/۱ \\ ۱۵b+۵۵a=۶۴/۷ \end{cases}\longrightarrow\begin{cases} a=۱/۹۴ \\ b=-۲/۸ \end{cases}$$

برای رسم بهترین درجه n ام برای تحت ما با روش Polynomial Regrassion معمولاً برای داده های آزمایشگاهی به کار می رود. با در نظر گرفتن خطاها مقدار آنها را به حداقل می رسانیم. در مقایسه با Regrassion در این نقاط هیچگونه خطایی ندارد. آن موقع می بایست یک رفتاری را تخمین بزنیم و روی آن هیچ خطایی نداریم و اگر رفتار f را با Φ تخمین نزنیم f و Φ می بایست باهم برابر باشند که در این حالت از Linear Interpolation استفاده می کنیم بدین ترتیب که بین هر ۲ نقطه یک خط راست رسم می کنیم. اگر ۲ نقطه خط درجه یک و چنانچه n نقطه داشته باشیم منحنی درجه $(n-1)$ رسم می کنیم. تفاوت Regrasion و Interpolation در زیر نشان داده شده:



Regrassion

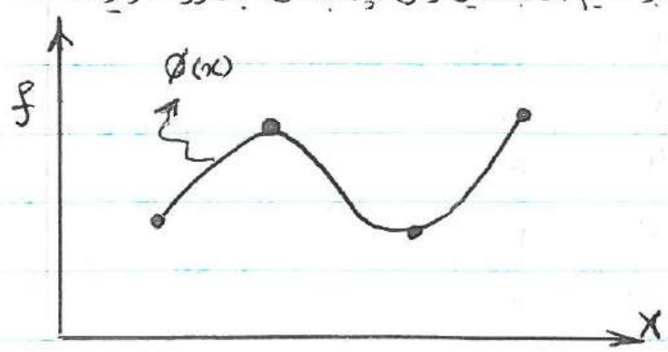


Interpolation

کار دیگری که می توانیم انجام دهیم این است که بین هر ۳ نقطه منحنی درجه ۲ و الی تا n+1 نقطه که منحنی درجه n رسم می کنیم. به این کار برای منحنی درجه دوم quadratic و منحنی درجه سوم cubic و ... دیگر روی نقاط هیچ خطایی نداریم. عملیات Regrassion بر روی ماشین حساب انجام می گردد ولی در عملیات Interpolation می بایست به صورت زیر عمل بکنیم:

$$f(x) = \Phi(x) + \underbrace{R(x)}_{\text{خطا}} \qquad \underbrace{R(x)=0 \quad x = x_i \quad i = 0, 1, \dots, n}_{\text{بر روی نقاط}}$$

پیرامون $R(x)$ هیچ اطلاعی نداریم و از رفتار آن نیز بی خبر هستیم اما با تخمین زدن چند جمله ای به صورت زیر است:



نمودار روبرو نمودار $\Phi(x)$ است که فقط نقاط را داریم و از روی آن می خواهیم تخمین بزنیم و از روی آن $f(x)$ را بدست بیاوریم که برای $f'(x)$ داریم:

$$f'(x) = \Phi_n'(x) + R'(x)$$

در رابطه بالا $R'(x)$ ما دیگر صفر نیست. این خطاها به تعداد درجات منحنی و تعداد نقاط و اندازه فواصل بستگی دارد. انتخاب ما به طور کلی به صورتهای زیر است:

الف) از چند جمله ای درجه بالا حساب می کنیم که فرمول پیچیده ایجاد می نماید

ب) فاصله نقاط بر روی منحنی را تا حد ممکن کوچک در نظر می گیریم.

از رابطه $f(x)$ انتگرال گیری می کنیم و داریم:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_n} \phi_n(x)\,dx + \underline{\underline{E}} \qquad \text{خطا:}\ \int_{x_0}^{x_n} R(x)\,dx = E$$

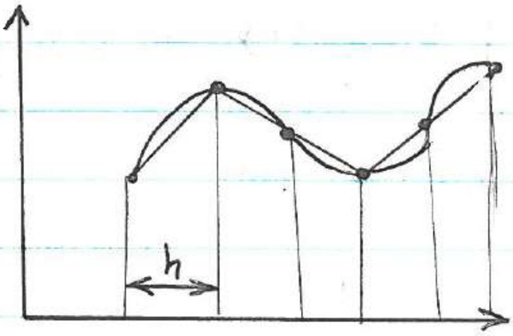
ما انتظار داریم که درجه خطا از انتگرال گیری، از مشتق گیری بیشتر باشد. وقتی سطح منحنی را بدست آوریم باعث می شود درجه خطا بیشتر شود. اگر درجه خطا ۵ باشد با نصف کردن فاصله مقدار خطا ما $\frac{1}{32}$ می گردد:

$$h^5 \xrightarrow{\text{فاصله را نصف می کنیم}} \left(\frac{h}{2}\right)^5 \ \text{یا}\ \frac{1}{32}(h)^5$$

اگر بین هر ۲ نقطه بر روی منحنی خط راست رسم کنیم، آنگاه بین این ۲ نقطه فرمول خط را بدست می آوریم و a_0 و a_1 که بدست آمد مشتق گیری را هم بدست می آوریم. اگر Interpolation خطی را انجام بدهیم داریم:

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \qquad \text{فرمول ۲ نقطه ای forward}$$

$$f_i' = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} \qquad \text{فرمول ۲ نقطه ای Backward}$$



درموارد خاص که می خواهیم بررسی کنیم داریم equally Spaced point داریم:

فرمول ۲ نقطه ای forward $\quad h = x_{i+1} - x_i$

اگر سه نقطه داشته باشیم، فرمولهای ۳ نقطه ای ما به صورت زیر در می آید:

پیشرو: $f_i \quad f_{i+1} \quad f_{i+2} \longrightarrow f_i' = \frac{1}{2h}\left[-3f_i + 4f_{i+1} - f_2\right]$

مرکزی: $f_{i-1} \quad f_i \quad f_{i+1} \longrightarrow f_i' = \frac{1}{2h}\left[-f_{i-1} + f_{i+1}\right]$

پسرو: $f_{i-2} \quad f_{i-1} \quad f_i \longrightarrow f_i' = \frac{1}{2h}\left[f_{i-2} - 4f_{i-1} + 3f_i\right]$

اگر از ۲ نقطه خط راست رسم کنیم و سطح زیر منحنی را در نظر بگیریم داریم:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left(f_0 + f_1\right) \qquad \text{(مشتق گیری به روش دو نقطه ای)}$$

اگر از ۳ نقطه منحنی درجه دوم را بدست آوریم، آن گاه سطح زیر منحنی x_1 و x_2 را بدست بیاوریم داریم:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\right] \qquad \text{(مشتق گیری سیمپسون } \tfrac{1}{3}\text{)}$$

(ضرایب جملات اول و آخر یک / ضرایب جملات فرد ۴ / ضرایب جملات زوج ۲)

تذکر ← انواع انتگرال گیری های عددی به طور خلاصه در صفحه ۲۱ آورده شده است *

هدف نهایی که ما به دنبال آن هستیم رسیدن به یکسری رابطه هایی برای مشتق گیری و یکسری انتگرال گیری بود می توانیم سطح زیر نمودار را محاسبه کنیم. به عنوان مثال وقتی $f(x)$ داشته باشیم می توانیم مقدارها را بین a و b را حساب کنیم.

بین a و b فقط کافیست به ازای step های مختلف تعیین مقدار کنیم، برای f(x) داریم:

$$f'(x)\Big|_{x=x_i} = \frac{f_{i+h}-f_{i-h}}{2h}$$

مثال:

فرض کنیم معادله دیفرانسیلی با شرایط مرزی به صورت زیر داریم. مقدار $f(x)=x_n$ داریم:

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)=y'$$

شرط اولیه: $x=x_0$ $\quad y=y_0$

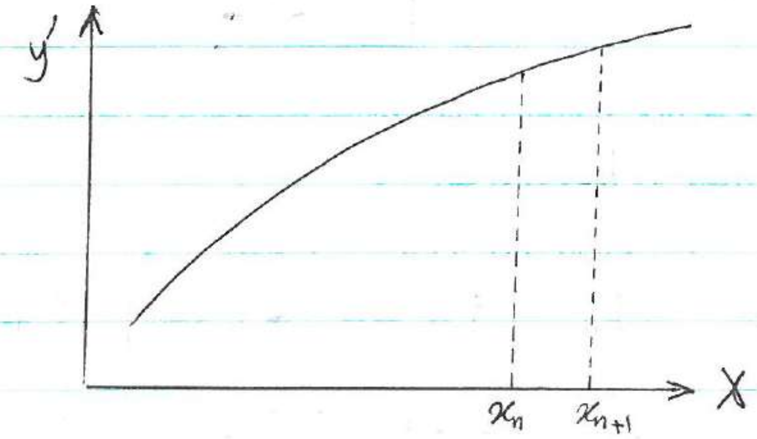
$\boxed{\text{حل}}$

$$\int_{y_0}^{y_1} dy=\int_{x_0}^{x_1} y'\,dx \Longrightarrow y_1-y_0=\int_{x_0}^{x_1} y'\,dx \Longrightarrow y_1=y_0+\int_{x_0}^{x_1} y'\,dx$$

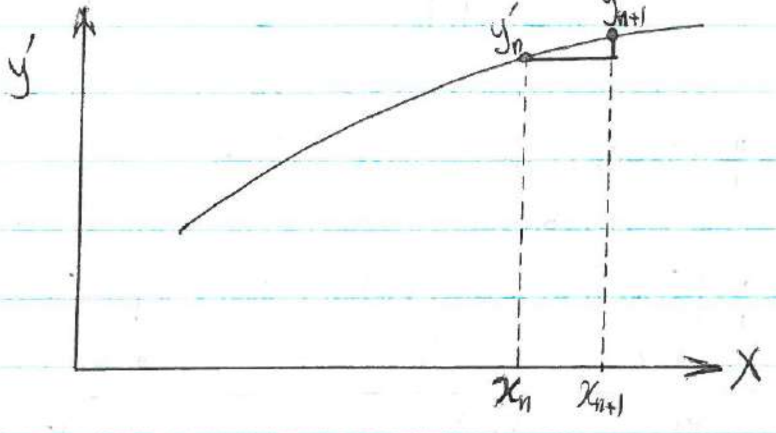
از فرمول بالا انتگرال گیری می کنیم و یک مرحله به جلو می رویم و دفعه بعد انجام می دهیم تا در نهایت به عبارت زیر می رسیم:

$$y_{n+1}=y_n+\int y'\,dx$$

کاری که ما می خواهیم انجام بدهیم بر روی نمودار زیر نمایش داده شده است:



حالا برای حالت ساده ترین حالتی که می توانیم در نظر بگیریم این است که y' را مقدار ثابت در نظر بگیریم:



قانون اویلر:

$$y_{n+1}=y_n+y'_n\,h$$

حالا برای بهتر شدن سطح زیر منحنی از قانون ذوزنقه ای [انتگرال گیری] استفاده می کنیم و به اویلر اصلاح شده می رسیم:

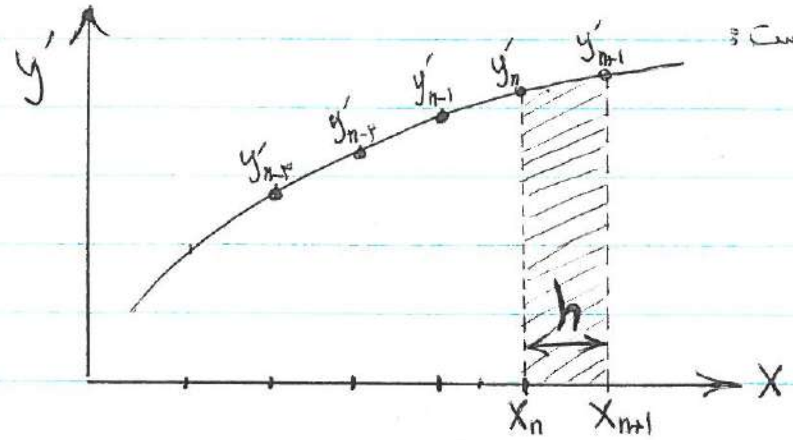
$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\left(y'_n+y'_{n+1}\right)$$ اویلر اصلاح شده

برای حل اویلر اصلاح شده داریم:

$$y'_n = f(x_n, y_n) \qquad y'_{n+1} = f(x_{n+1}, y^*_{n+1})$$

همانطور که مشاهده می‌کنید y^*_{n+1} برای ما مجهول است. که برای همین می بایست با روش اویلر معمولی y^*_{n+1} را حساب کنیم.
y^*_{n+1} در واقع روش پیشگو است که با بدست آوردن آن یک مقدار حدس اولیه را پیشگویی کرده‌ایم. به ازاء مقدار پیشگویی شده و آن مقدار عبارتست از y^*_{n+1} و از آن برای محاسبهٔ y_{n+1} اصلی استفاده می‌کنند.

فرمولهای انتگرال‌گیری را که می خواهیم حساب کنیم می بایست در کجا استفاده کنیم را در نمودار زیر نشان داده‌ایم که در این رابطه برای ما f نامشخص است:



فرمولهای انتگرال‌گیری را که داریم می خواهیم برای بدست آوردن سطح زیر نمودار استفاده کنیم. با استفاده از آن در روشهای مختلف برای بدست آوردن انتگرال زیر سطح استفاده می‌کنیم. همچنین اگر نقاط قبلی را داشته باشیم یک چند جمله‌ای بدست می آید که انتگرال‌گیری از آن می‌کنیم. کار دیگری که ما انجام می دهیم این است که بین ۲ نقطه n و $n+1$ تعداد بیشماری نقطه در نظر می‌گیریم و در فواصل خاص مقدار آن را حساب می‌کنیم و سطح زیر نمودار بدست می آید. روش دیگر رانگ‌کوتا است که فقط از نقاط حال استفاده می‌کند. روند کلی استفاده از فرمولهای انتگرال‌گیری به صورت زیر است:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = y' \longrightarrow \int_{y_0}^{y_1} dy = \int_{x_0}^{x_1} y'\,dx$$

* رانگ-کوتا:

← روش رانگ-کوتا مرتبه ۳:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 4k_2 + k_3\right)$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$
$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$
$$k_3 = hf(x_i + h, y_i + 2k_2 - k_1)$$

← روش رانگ-کوتا مرتبه ۴:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$
$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$
$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right)$$
$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

مثال : فرض کنید معادله روبرو را با شرایط مرزی زیر داریم، برای بدست آوردن جواب معادله به صورت زیر عمل می کنیم :

$$7\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+x+y=0 \qquad \begin{cases} x=x_1 & y=y_1=a \\ x=x_n & y=y_n=b \end{cases}$$

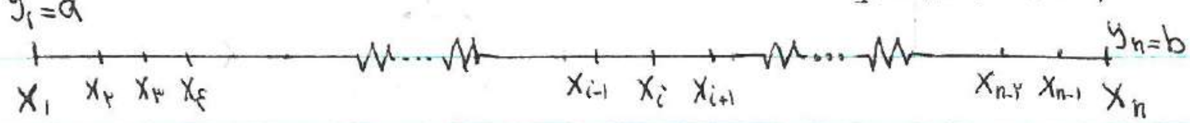
حل) همانطور که در فرمول مشتق گیری بدست آوردیم اگر از فرمول ۳ نقطه ای استفاده کنیم داریم :

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_i}=\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h} \qquad \text{مشتق درجه اول}$$

اگر کارهای گفته شده را انجام دهیم و فرمول درجه اول را بدست آوریم با آن فرمولهای مشتق درجه دوم را هم می توانیم محاسبه کنیم :

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x_i}=\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2} \qquad \text{مشتق درجه دوم}$$

برای حل معادلات فوق اگر ۲ شرط داشته باشیم که یکی شرط اولیه و دیگری شرط مرزی است . با توجه به شرایط مرزی x_1 تا x_n به صورت زیر است :



y_i مجهولات ما $\quad i=1,2,\dots,n \longrightarrow$ $n-2$ مجهول داریم

برای بدست آوردن آن $n-2$ معادله داریم که برای نقطه i داریم :

$$x=x_i \longrightarrow 7\left[\frac{y_{i+1}-2y_i+2y_{i-1}}{h^2}\right]+4\left[\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}\right]+x_i+y_i=0$$

$$y_{i-1}\underbrace{\left[\frac{7}{h^2}-\frac{2}{h}\right]}_{A}+y_i\underbrace{\left[1-\frac{14}{h^2}\right]}_{B}+y_{i+1}\underbrace{\left[\frac{2}{h}+\frac{7}{h^2}\right]}_{C}=-x_i$$

اگر رابطه را در نقطه شماره x_2 بنویسیم مقدار A برای ما مشخص است و برای آن ۲ نقطه مجهول داریم . برای نقطه x_{n-1} نیز C ما مشخص است و در آن صورت داریم :

$$i=3,\dots,n-2 \qquad Ay_{i-1}+By_i+Cy_{i+1}=-x_i$$

$$\longrightarrow i=2 \longrightarrow By_i+Cy_{i+1}=-x_i-Aa$$

$$\longrightarrow i=n-1 \longrightarrow Ay_{i-1}+By_i=-x_i-Cb$$

به عبارت دیگر ما یک ماتریس ۳ قطری به صورت زیر بدست می آوریم :

$$\begin{bmatrix} A & C & & & \\ A & B & C & & \\ & A & B & C & \\ & & \ddots A & B & C \\ & & & A & B \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2-Aa \\ -x_3 \\ \vdots \\ -x_{n-2} \\ -x_{n-1}-Cb \end{bmatrix}$$

ماتریسی که در صفحه قبل بدست آمده را می بایست حل کنیم . دلیل ۳ قطری شدن و خطی شدن رابطه به خاطر خطی بودن معادله است و فرمولهای مورد استفاده فرمولهای ۳ نقطه ای هستند و دیگر اینکه شرایط مرزی ما در ۲ نقطه تعریف می شود . شرط مرزی ما نیز خطی است . اگر به عنوان مثال در یکی از شرایط مرزی رابطه مشتق داشته باشیم (مثل شرط مرزی برای انتقال حرارت برای دیواره عایق که داریم $x=L \rightarrow \frac{dT}{dx}=0$) آنگاه معادله ما خطی نخواهد شده

به طور کلی ما برای حل این مساله کارهای زیر را انجام داده ایم :

1. مقادیر A و B و C را با کمک روابط مشتق عددی و فاکتورگیری بدست می آوریم .
2. با استفاده از شرایط مرزی معادله اصلی را بدست می آوریم .
3. برای معادله بدست آمده ماتریس تشکیل می دهیم .
4. با کمک روش محاسبه توماس ماتریس بدست آمده در مرحله قبل را برای رسیدن به جواب حل می نماییم .

Interpolation :

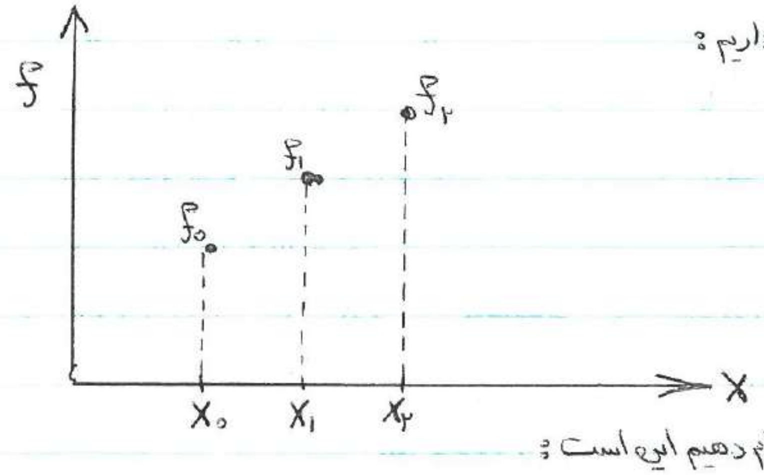
ما کاری که می خواهیم انجام دهیم بدین ترتیب است که به ازاء مقادیر مختلف x ما $f(x)$ داریم و با آن چند جمله ای رسم می کنیم و داریم :

$$f(x)=\phi_n(x)+R(x)$$

ما راجع به $R(x)$ می دانیم که بر روی نقاط ما صفر است و به اندازه h بستگی دارد. ما یکسری نقاط داریم و کاری که می خواهیم انجام دهیم برای نقاط هم فاصله انجام می دهیم و داریم :

$$h=x_{i+1}-x_i$$

ما ضرایب چند جمله ای را حساب می کنیم و اگر ۲ نقطه درجه یک ، از ۳ نقطه درجه ۲ و همچنین از n نقطه درجه $n-1$ خواهیم داشت و بر روی نمودار داریم :



ما کاری که می خواهیم انجام دهیم این است :

$\phi_n(x)$ را به صورت روبرو حساب کنیم :
$$\phi_n(x)=b_0+b_1x_1+b_2x_2^2$$

در آن صورت f ها به صورت روبرو در خواهد آمد :
$$f_0=b_0+b_1x_0+b_2x_0^2$$

معادله دوم برای x_1 به صورت روبرو خواهد شد :
$$f_1=b_0+b_1x_1+b_2x_1^2$$

معادله سوم برای x_2 به صورت روبرو در می آید :
$$f_2=b_0+b_1x_2+b_2x_2^2$$

با انجام ماتریس ضرایب b_0 و b_1 و b_2 بدست می‌آید. وقتی که b_0 و b_1 و b_2 بدست بیاید. این روابط چون خیلی سخت و طولانی است بنابراین آن را انجام نمی‌دهیم و ما به چند جمله‌ای نیوتون می‌رسیم که برای محاسبه آن می‌بایست ابتدا چند جمله‌ای $\phi_n(x)$ را به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{matrix} f_0 & f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{matrix}$$

$$\phi_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

آنگاه ضرایب ما در این روش مقدار ثابت و x و x^2 و ... بدست می‌آید و برای این روش فقط یک معادله بدست می‌آید و کار ما خیلی ساده می‌شود اگر $x=x_0$ درنظر بگیریم و داریم:

$$x = x_0 \longrightarrow \phi(x_0) = f_0 = a_0 \qquad \boxed{a_0 = f_0}$$

$$x = x_1 \longrightarrow \phi(x_1) = f_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f_0 + a_1 h \qquad \boxed{a_1 = \frac{f_1 - f_0}{1!\,h} = \frac{\Delta f_0}{h}}$$

Δ اپراتور خطا

Δ برای ما اپراتور خطا است که داریم:

$$\left.\begin{aligned} \Delta f_i &= f_{i+1} - f_i \\ \Delta f_0 &= f_1 - f_0 \end{aligned}\right\} \text{forward difference}$$

ما می‌بایست این اپراتورها را تعریف کنیم که داریم:

$$\Delta^2 f_0 = \Delta . \Delta f_0 = \Delta(f_1 - f_0) = \Delta f_1 - \Delta f_0 = (f_2 - f_1) - (f_1 - f_0)$$

$$x = x_2 \longrightarrow \phi(x_2) = f_2 = a_0 + a_1 \underbrace{(x_2 - x_0)}_{2h} + a_2 \underbrace{(x_2 - x_0)}_{2h} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{h}$$

$$f_2 = a_0 + 2a_1 h + a_2 2h^2 \Longrightarrow f_2 = f_0 + 2(f_1 - f_0) + a_2 2h^2$$

$$\boxed{a_0 = f_0} \quad \boxed{a_1 = \frac{f_1 - f_0}{1!\,h} = \frac{\Delta f_0}{h}}$$

$$= f_0 + 2f_1 - 2f_0 + a_2 2h^2$$

$$= 2f_1 - f_0 + a_2 2h^2$$

$$= \underbrace{(f_2 - f_1)}_{\Delta f_1} - \underbrace{(f_1 - f_0)}_{\Delta f_0} = a_2 2h^2$$

$$f_2 = \Delta f_1 - \Delta f_0 = a_2 2h^2$$

$$\Delta(f_1 - f_0) = a_2 2h^2$$

$$\Delta^2 f_0 = a_2 2h^2 \Longrightarrow \boxed{a_2 = \frac{\Delta^2 f_0}{2!\,h^2}}$$

برای مقادیر بعدی نیز کاری مشابه بالا انجام می‌دهیم و خواهیم داشت:

$$x = x_3 \longrightarrow a_3 = \frac{\Delta^3 f_0}{3!\,h^3}$$

$$x = x_4 \longrightarrow a_4 = \frac{\Delta^4 f_0}{4!\,h^4}$$

$$\vdots$$

$$x = x_n \longrightarrow a_n = \frac{\Delta^n f_0}{n!\,h^n}$$

حال برای حل آن از هرم روبرو استفاده می کنیم:

$$
\begin{array}{llllll}
X & f & & & & \\
x_0 & f_0 & & & & \\
 & & \Delta f_0 & & & \\
x_1 & f_1 & & \Delta^2 f_0 & & \\
 & & \Delta f_1 & & \cdots & \\
x_2 & f_2 & & & & \Delta^n f_0 \\
\vdots & \vdots & & & \cdots & \\
x_{n-2} & f_{n-2} & & & & \\
 & & \Delta f_{n-2} & & & \\
x_{n-1} & f_{n-1} & & \Delta^2 f_{n-1} & & \\
 & & \Delta f_{n-1} & & & \\
x_n & f_n & & & &
\end{array}
$$

برای محاسبات خود $\Delta^i f_0$ را $i=1 \dots n$ را در نظر بگیریم

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$$

تعریف اپراتور Backward

x	f
۰	۲
۱	۸
۲	۱۱
۳	۷

مثال) اگر ما جدول را به صورت روبرو در اختیار داشته باشیم مطلوبست: $f(2,69)=?$

حل) برای حل دستگاه ابتدا هرم را تشکیل می دهیم:

$$
\begin{array}{c|c|l|l|l}
x & f & & & \\
\hline
0 & 2 \leftarrow f_0 & & & \\
 & & \Delta f_0 = 8-2=6 & & \\
1 & 8 & & \Delta^2 f_0 = 3-6=-3 & \\
 & & \Delta f_1 = 11-8=3 & & \Delta^3 f_0 = (-7)-(-3) = -4 \\
2 & 11 & & \Delta^2 f_1 = (-4)-3=-7 & \\
 & & \Delta f_2 = 7-11=-4 & & \\
3 & 7 & & &
\end{array}
$$

$\boxed{h=1}$

حال مقادیر a_0 و a_1 و a_2 و a_3 را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$a_0 = f_0 = 2 \;/\; a_1 = \frac{\Delta f_0}{1!\,h} = 6 \;/\; a_2 = \frac{\Delta^2 f_0}{2!\,h^2} = \frac{9}{2} \;/\; a_3 = \frac{\Delta^3 f_0}{3!\,h^3} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

با کمک مقادیر a که در بالا بدست آمد تابع $\phi_3(x)$ را به صورت زیر بدست می آوریم:

$$\phi(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$\phi(x) = 2 + 6(x-0) + \frac{9}{2}(x-0)(x-1) - \frac{2}{3}(x-0)(x-1)(x-2)$$

$$\phi(x) = 12x^3 - 117x^2 - 14x - 36 = 0$$

$\phi(x) = \checkmark$ در معادله ای که در بالا بدست آمد عدد ۲,۶۹ را قرار می دهیم و داریم:

با محاسبه $\phi(x)$ ما به موارد زیر خواهیم رسید:

(۱) اولین کاری که انجام می دهیم Interpolation (میان یابی) است.

(۲) بعد از بدست آوردن چند جمله ای مقدار مشتق f_i' را بدست می آوریم.

(۳) همچنین مقدار انتگرال به صورت $\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx$ بدست می آید.

* فرمولهای مشتق گیری :

به ازای مقادیر مختلفی از x ما $f(x)$ را داریم و روابط آن را حدس می زنیم که برای این کار معمولاً از روشهای زیر استفاده می کنیم :

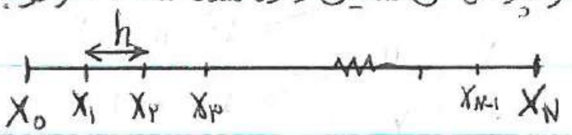
① Regrassion

② Interpolation

برای داده های هم فاصله از ϕ استفاده می کنیم که از روی آن $R(x)$ بدست می آید. $R(x)$ بیانگر خطا می باشد. بعد از بدست آوردن رفتار چندجمله‌ای $\phi(x)$ می توان انتگرال گیری و مشتق گیری عددی را برای آن اعمال کرد. مشتق گیری معمولاً بین ۲ نقطه، ۳ نقطه و ... صورت می گیرد.

برای مشتق گرفتن معمولاً اگر از ۲ نقطه استفاده کنیم، معادله درجه اول، اگر از ۳ نقطه استفاده کنیم معادله درجه دوم و ... و اگر از $n+1$ نقطه استفاده کنیم، معادله درجه n اُم بدست می آید. در آن صورت ضرایب مجهول ما عبارت خواهد شد از a_0 و a_1 و a_2 و ... و a_n که برای محاسبه آن می بایست از n معادله n مجهول استفاده کنیم. برای انجام این کار می بایست وقت زیادی را صرف کنیم. از اینرو ما از جدول تفاوت ها استفاده می کنیم. برای استفاده از این جدول از یکسری اپراتور استفاده می کنند به آنها «linear Simble Operation» گفته می شود. در زیر این اپراتورها و چگونگی آن نمایش داده شده است : (توجه : شمارنده نقطه اول صفر می باشد)

$$X_{i+1} - X_i = h$$
$$X_i = X_0 + ih$$



با توجه به شکل و روابطی که در بالا مشاهده می کنید برای نقاط مختلف جدول زیر را می توان تعیین کرد :

X	X_0	X_1	X_2	$\cdots$	X_{n-2}	X_{n-1}	X_n
f	f_0	f_1	f_2	$\cdots$	f_{n-2}	f_{n-1}	f_n

با جدولی که در بالا بدست آمد روابط را براساس سه نقطه و درجه معادله درجه دوم بدست می آوریم که با تعریف یکسری اپراتور بدست آوردن این روابط راحت است :

Operator	Name	Difinition
E	Shift	$E f(x) = f(x+h)$, $E f_i = f_{i+1}$
Δ	forward difference	$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$
∇	Backward difference	$\nabla f_i = f_i - f_{i+1}$

ادامه جدول اپراتورها در صفحه بعد

Operator	Name	Diffinition
δ	Central difference	$\delta f_i = f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}$
μ	Avarage difference	$\mu f_i = \frac{1}{2}\left[f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}\right]$
D	Differential Operator	$Df(x) = \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$ $Df_i = f'_i$
I	Integral Operator	$If(x) = \int_x^{x+h} f(x)dx$

اپراتورهایی که در صفحه قبل بیان شده است از پرکاربردترین اپراتورهای ریاضی می باشند. به طور کلی تمامی اپراتورهای مورد نیاز ما در این جدول معرفی شده است. این اپراتورها دارای ویژگیها و خصوصیاتی می باشند که این خصوصیات عبارتند از:

۱) نحوه استفاده از اپراتورها به ترتیب از سمت راست می باشد:

$$\Delta D f(x) = \Delta f'(x) \qquad \text{(اول اپراتور } D \text{ و بعد } \Delta \text{ مورد استفاده قرار می گیرد)}$$
$$= f'(x+h) - f'(x)$$

$$\Delta D f_i = \Delta f'_i = f'_{i+1} - f'_i \qquad f_i \longrightarrow f(x)\Big|_{x=x_i}$$

$$E^n f(x) = f(x+nh) \xRightarrow{\text{به طور کلی}} E^\alpha f(x) = f(x+\alpha h)$$

$$\underbrace{EE\cdots EE}_{n\text{ تا}} f(x) = \underbrace{EE\cdots E}_{n-1} f(x+h) = \cdots = E f(x+(n-1)h) = f(x+nh)$$

اگر ترکیبی از اپراتورها را بخواهیم استفاده کنیم قوانین جبری برای آن صادق است. اگر A_1 و A_2 و A_3 هرکدام از اپراتورها باشند، داریم:

۱) $A_1 + A_2 = A_2 + A_1$

۲) $A_1 A_2 = A_2 A_1$

۳) $A_1 + (A_2 + A_3) = (A_1 + A_2) + A_3$

۴) $A_1 (A_2 A_3) = (A_1 A_2) A_3$

۵) $A_1 (A_2 + A_3) = A_1 A_2 + A_1 A_3$

۶) $E^n D f(x) = E^n f'(x) = f'(x+nh) = D E^n f(x) \Rightarrow E^n D = D E^n$

یکسری روابطی هم برای اپراتور تعریف می‌کنند که از آنها خیلی استفاده می‌شود. این روابط عبارتند از:

(۱) $\Delta = E - 1 = E\nabla$

اثبات: $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) \longleftarrow \boxed{E f(x) = f(x+h)}$

$$= E f(x) - f(x) \Longrightarrow \Delta f(x) = (E - 1) f(x)$$

$$E\nabla f(x) = E\left[f(x) - f(x-h)\right]$$
$$= f(x+h) - f(x) = \Delta f(x)$$

(۲) $\nabla = 1 - E^{-1}$

اثبات: $(1 - E^{-1}) f(x) = f(x) - E^{-1} f(x)$

$$= f(x) - f(x-h) = \nabla f(x)$$

(۳) $\delta = E^{1/2} - E^{-1/2}$

اثبات: $E^{1/2} f(x) - E^{-1/2} f(x) = f(x+\frac{1}{2}) - f(x-\frac{1}{2}) \Longleftarrow$ طبق تعریف برای δ داریم: $\delta f_i = \delta f_{i+\frac{1}{2}} - \delta f_{i-\frac{1}{2}}$

$$= \delta f(x)$$

(۴) $\delta^2 = \Delta - \nabla$

اثبات: $\delta^2 f(x) = \left[f(x+\frac{1}{2}) - f(x-\frac{1}{2})\right]^2$

$$= f^2(x+\tfrac{1}{2}) + f^2(x-\tfrac{1}{2}) - 2f(x)$$
$$= f(x+1) + f(x-1) - 2f(x)$$
$$= \left[f(x+1) - f(x)\right] - \left[f(x) - f(x-h)\right]$$
$$= \Delta f(x) - \nabla f(x)$$

(۵) $ID = \Delta$

اثبات: $ID f(x) = I \frac{df(x)}{dx} = \int_x^{x+h} \frac{df(x)}{dx} = f(x+h) - f(x)$

$$= \Delta f(x)$$

(۶) $E = e^{hD}$

اثبات این رابطه در صفحه بعد آمده است