اثبات:

برای اثبات این رابطه از بسط تیلور به صورت زیر استفاده می کنیم:

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)\big((x+h)-x\big)+f''(x)\frac{\big((x+h)-x\big)^2}{2!}+f'''(x)\frac{\big((x+h)-x\big)^3}{3!}+\cdots$$

$$=f(x)+Df(x)\,h+D^2f(x)\frac{h^2}{2!}+D^3f(x)\frac{h^3}{3!}+\cdots$$

h ← اختلاف x و $x+h$ است

D ← اپراتور دیفرانسیل است

$$Ef(x)=\underbrace{\left[1+hD+\frac{(hD)^2}{2!}+\frac{(hD)^3}{3!}+\cdots\right]}_{e^{hD}}f(x)=e^{hD}f(x)$$

یادآوری

با کمک بسط مک لوران می توان تابع نمایی $f(x)=e^{a}$ را به صورت زیر بسط داد:

$$e^{a}=1+a+\frac{a^2}{2!}+\frac{a^3}{3!}+\cdots+\frac{a^n}{n!}\qquad n=0,1,\ldots,+\infty$$

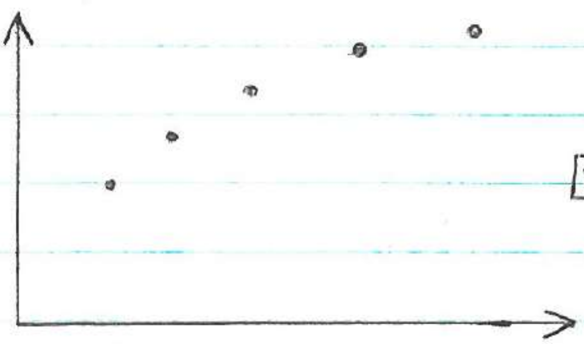
در ادامه ما برای محاسبات مشتق عددی نیازمند سری «binomial» هستیم که عبارتست از:

$$(a+b)^r=\binom{r}{0}a^r+\binom{r}{1}a^{r-1}b+\binom{r}{2}a^{r-2}b^2+\cdots+\binom{r}{r}b^r$$

در رابطه بالا عملیات داخل پرانتز به صورت روبرو است:

$$\binom{r}{k}=\frac{r!}{k!\,(r-k)!}=\frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}$$

با این تعاریف که در بالا گفته شد، هدف ما این است که اگر تعدادی نقاط هم فاصله داشته باشیم و برای آنها چند جمله ای نظیر کنیم، داریم:



$$f(x)=\phi_n(x)+R(x)$$

$$\boxed{n=3}\rightarrow \phi_n(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3$$

با ضرایب b_0 و b_1 و b_2 و b_3 که در بالا مشخص شد می خواهیم نمودار هرمی تشکیل بدهیم و با استفاده از آن معادله را حساب کنیم. حال ما می خواهیم چند جمله ای ها را بدست آوریم و برای $\phi_n(x)$ ما به صورت زیر عمل می کنیم:

$$\phi_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots$$

رابطه بالا با کمک جدول هرمی محاسبه می گردد. و برای انتگرال گیری و مشتق گیری از آنها استفاده می کنیم

که به آن چند جمله ای نیوتن Newton's Interpolating polynomial گفته می شود.

برای نوشتن چند جمله ای نیوتن ۲ سری فرمول مورد استفاده قرار می گیرد:

① فرمول پیشرو نیوتن Newton's forward formola (NFF)

② فرمول پسرو نیوتن Newton's Backward formola (NBF)

برای فرمولهای پیشرو از عملگر Δ و برای فرمولهای پسرو با عملگر ∇ استفاده می کنیم. ابتدا برای پیشرو روابط خود را می نویسیم که داریم:

$$\Delta = E-1 \longrightarrow E=\Delta+1$$

$$E^{\alpha}=(1+\Delta)^{\alpha} \longrightarrow$$ با سری binomial این رابطه را بسط می دهیم

$$E^{\alpha}=(1+\Delta)^{\alpha}=1+\alpha\Delta+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\Delta^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\Delta^3+\dots$$

نقطه اول ما، نقطه (0) و نقطه آخر (N) است. اگر ما n نقطه داشته باشیم:

$$E^{\alpha}\cdot f(x)\Big|_{x=x_0}=E^{\alpha}f(x_0)$$

برای وقتی که $\alpha=n$ باشد و تعداد نقاط $n+1$ است در این مورد خاص داریم:

$$E^{\alpha}f(x)\Big|_{x=x_0}=E^{\alpha}f(x_0)=f(x_0+\alpha h)=f(x_0+nh)=(\text{سری binomial})$$

$$\boxed{\alpha=n}$$

$$f(x_0+nh)=\left[1+\alpha\Delta+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\Delta^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\Delta^3+\dots+\frac{(\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n-1))\Delta^n}{n!}\right]f(x_0)$$

برای جایی که $(\alpha=n)$ است است این چند جمله ای ادامه می یابد و بعد از آن قطع می گردد. حال رابطه ای که در بالا برای $f(x_0+\alpha h)$ نوشتیم به ازای مقادیر مختلف α درستی آن را بررسی می کنیم:

$\alpha=0 \rightarrow$ در این حالت تمامی جملات حذف و رابطه ما درست می گردد

$$\alpha=1 \longrightarrow f_1=(1+\Delta)f_0=f_0+\Delta f_0$$

$$f_1=f_0+(f_1-f_0)$$ رابطه درست است

$$\alpha=2 \longrightarrow f_2=f_0+2\Delta f_0+\frac{1}{2}\Delta^2 f_0=f_0+2(f_1-f_0)+\frac{1}{2}(\Delta f_1-\Delta f_0)$$

$$=f_0+2(f_1-f_0)+\frac{1}{2}\left((f_2-f_1)-(f_1-f_0)\right)$$

پس از انجام روابط ریاضی مقدار f_2 باقی می ماند و درستی رابطه را اثبات می کند ما بر روی نقاط هیچ خطایی نداریم و با کمک چند جمله ای نیوتن جدولی به صورت جدول روبرو رسم می کنیم:

α	x	f
0	x_0	f_0
1	x_1	f_1
2	x_2	f_2
⋮	⋮	⋮
n	x_n	f_n

اگر ما درونیابی را انجام بدهیم و طبق نمودار زیر عمل کنیم ، جهت عمل ما در جدول مطابق جهت فلش است :

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
α	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷

$\longrightarrow$

برای بدست آوردن x غیر صحیح به عنوان مثال $f(3,6)$ ابتدا مقدار α را به صورت زیر محاسبه می کنیم :

$$x = 3{,}6 \qquad \alpha = \frac{x - x_0}{h} = \frac{3{,}6 - 1}{1} = 2{,}6$$

برای تعیین α با توجه به اینکه x ما عدد صحیح نیست ما بینهایت جمله خواهیم داشت ، بنابراین برای رفع این مشکل بعد از اولین عدد صحیح پس از α که در اینجا (۳) است ، عبارت را قطع می کنیم . قطعاً یک مقدار خرده ای داریم که آن جزء خطاهای موجود در نظر می گیریم و آن را با $R(x)$ نمایش می دهیم که با این فرض داریم :

$$\alpha = \left\lfloor \frac{x - x_0}{h} \right\rfloor + 1$$

یادآوری

علامت $\lfloor\ \rfloor$ که در بالا آمده است نامش براکت است و بیانگر جزء صحیح می باشد به عنوان مثال :

$$x = 2{,}746 \longrightarrow \lfloor x \rfloor = 2$$

وقتی α حساب شد ، با کمک نمودار هرمی مقادیر f_0 و Δf_0 و $\Delta^2 f_0$ و ... و $\Delta^n f_0$ را به صورت زیر بدست می آوریم :

X	f				
x_0	f_0				
		$\Delta f_0 = f_1 - f_0$			
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0$		
		$\Delta f_1 = f_2 - f_1$		$\Delta^3 f_0 = \Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0$	
x_2	f_2		$\Delta^2 f_1 = \Delta f_2 - \Delta f_1$		
		$\Delta f_2 = f_3 - f_2$			
x_3	f_3				
$\vdots$	$\vdots$				$\Delta^n f_0$
x_{n-2}	f_{n-2}				
		$\Delta f_{n-2} = f_{n-1} - f_{n-2}$			
x_{n-1}	f_{n-1}		$\Delta^2 f_{n-2} = \Delta f_{n-1} - \Delta f_{n-2}$		
		$\Delta f_{n-1} = f_n - f_{n-1}$			
x_n	f_n				

با مقادیر $\Delta^n f_0$ که در نمودار بالا دورش خط کشیده شده است ، سری Binomal را به صورت زیر تشکیل می دهیم :

$$f(x_0 + \alpha h) = f_0 + \alpha \Delta f_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \dots$$

x	f
$x_0=۱$	۱۱
$x_1=۲$	۳۶
$x_2=۳$	۸۳
$x_3=۴$	۱۵۸
$x_4=۵$	۲۶۷

مثال) مقدار $f(۳٫۶)$ را برای جدول روبرو حساب کنید:

حل) در این مساله $n=۴$ و رابطه ما چندجمله‌ای درجه ۴ است.

این مساله با ۵ نقطه بدست می‌آید و $h=۱$ می‌باشد بنابرین ابتدا مقدار α را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\alpha=\frac{x-x_0}{h}=\frac{۳٫۶-۱}{۱}=۲٫۶$$

پس از محاسبه α با کمک هرم زیر مقادیر $\Delta^n f_0$ را بدست می‌آوریم:

x	f
۱	$f_0=۱۱$
۲	۳۶
۳	۸۳
۴	۱۵۸
۵	۲۶۷

$\Delta f_0=۳۶-۱۱=۲۵$
$\Delta f_1=۸۳-۳۶=۴۷$
$\Delta f_2=۱۵۸-۸۳=۷۵$
$\Delta f_3=۲۶۷-۱۵۸=۱۰۹$

$\Delta^2 f_0=۴۷-۲۵=۲۲$
$\Delta^2 f_1=۷۵-۴۷=۲۸$
$\Delta^2 f_2=۱۰۹-۷۵=۳۴$

$\Delta^3 f_0=۲۸-۲۲=۶$
$\Delta^3 f_1=۳۴-۲۸=۶$

$\Delta^4 f_0=۰$

با مقادیر $\Delta^n f_0$ که در بالا دور آن خط کشیده شده است سری binomial به صورت زیر نوشته می‌شود:

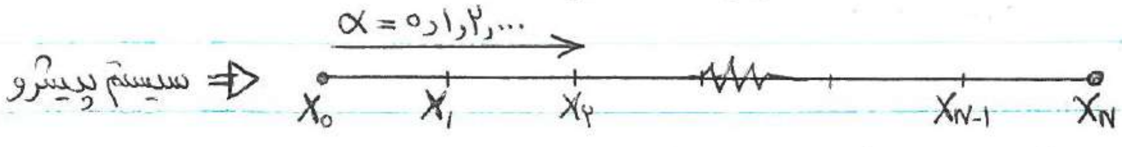
$$f(x_0+\alpha h)=f_0+\Delta f_0+\frac{\alpha(\alpha-1)}{۲!}\Delta^2 f_0+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{۳!}\Delta^3 f_0+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{۴!}\Delta^4 f_0$$

$$f(x_0+\alpha h)=۱۱+\alpha(۲۵)+\frac{\alpha(\alpha-1)}{۲!}(۶)+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{۳!}(۶)+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{۴!}(۰)=$$

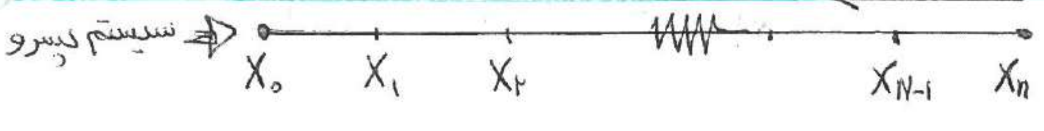
$$f(۳٫۶)=۱۲۴٫۲۵۶$$

آنچه گفته شد مشتق گیری با روش پیشرو بود، حال روابط خود را برمبنا سیستم پسرو می‌نویسیم.

در رابطه پیشرو ما نمودارمان را به صورت زیر بررسی می‌کردیم و مقادیر α ها همواره مثبت $(\alpha>0)$ می‌شد:



اما در سیستم پسرو ما به مقدار منفی برای α می‌رسیم $(\alpha<0)$:



در این رابطه‌ها از ∇ استفاده می‌کنیم ولی نتایجی که حاصل می‌گردد فقط یک چند جمله‌ای درجه n است. با توجه به رابطه پسرو داریم:

$$\nabla = 1 - E^{-1}$$

$$\Rightarrow E^{-1} = 1 - \nabla \longrightarrow E^{\alpha} = (1-\nabla)^{-\alpha}$$

$$f(x_n+\alpha h) = E^{\alpha} f(x_n) = (1-\nabla)^{\alpha-1} f(x)$$

با استفاده از سری binomial برای موارد خاصی که $(\alpha=-n)$ بسط می‌دهیم و داریم:

$$f(x_n+\alpha h) = (1-\Delta)^{-\alpha} f(x_n)$$

$$f(x_n+\alpha h) = \left[1+\alpha\nabla + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}\nabla^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{3!}\nabla^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1)}{n!}\nabla^n\right] f(x_n) + R(x)$$

برای استفاده از روش پسرو برای تعریف α به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\alpha = \frac{x-x_n}{h} \longrightarrow x = x_n + \alpha h$$

ما برای استفاده از سری binomial که رابطه آن را در بالا نوشتیم نیازمند ∇f_n ، $\nabla^2 f_n$ ، ... ، $\nabla^n f_n$ هستیم که برای این کار از نمودار هرمی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{array}{lllll}
x_0 & f_0 & & & \\
 & & \nabla f_1 = f_1 - f_0 & & \\
x_1 & f_1 & & \nabla^2 f_2 = \nabla f_2 - \nabla f_1 & \\
 & & \nabla f_2 = f_2 - f_1 & & \\
x_2 & f_2 & & & \\
\vdots & \vdots & & & \\
x_{n-3} & f_{n-3} & & & \\
 & & \nabla f_{n-2} = f_{n-2} - f_{n-3} & & \\
x_{n-2} & f_{n-2} & & \nabla^2 f_{n-1} = \nabla f_{n-1} - \nabla f_{n-2} & \\
 & & \nabla f_{n-1} = f_{n-1} - f_{n-2} & & \nabla^3 f_n = \nabla^2 f_n - \nabla^2 f_{n-1} \\
x_{n-1} & f_{n-1} & & \nabla^2 f_n = \nabla f_n - \nabla f_{n-1} & \\
 & & \nabla f_n = f_n - f_{n-1} & & \\
x_n & f_n & & & \\
 & & & & \nabla^n f_n = \nabla^{n-1} f_n - \nabla^{n-1} f_{n-1}
\end{array}$$

مقادیر ∇f_n را که دورش خط کشیده شده برای محاسبه سری binomial استفاده می‌گردد.

مثال) مقدار $f(۳,۶)$ را برای جدول روبرو حساب کنید:

X	f
$x_0=۱$	۱۱
$x_1=۲$	۳۶
$x_2=۳$	۸۳
$x_3=۴$	۱۵۸
$x_4=۵$	۲۶۷

حل) در این مسئله $n=4$ و رابطه ما برای چند جمله‌ای درجه ۴ است. این مسئله با ۵ نقطه بدست می‌آید و $h=1$ می‌باشد بنابراین مقدار α به صورت زیر حساب می‌شود:

$$\alpha = \frac{x - x_N}{h} = \frac{3.6 - 5}{1} = -1.4$$

پس از محاسبهٔ α با کمک هرم زیر مقادیر $\nabla^n f_n$ را بدست می‌آوریم:

X	f
1	11
2	36
3	83
4	158
5	$f_4=267$

$\nabla f_1 = 36-11 = 25$

$\nabla f_2 = 83-36 = 47$

$\nabla f_3 = 158-83 = 75$

$\nabla f_4 = 267-158 = 109$

$\nabla^2 f_2 = 47-25 = 22$

$\nabla^2 f_3 = 75-47 = 28$

$\nabla^2 f_4 = 109-75 = 34$

$\nabla^3 f_3 = 28-22 = 6$

$\nabla^3 f_4 = 34-28 = 6$

$\nabla^4 f_4 = 6-6 = 0$

با مقادیر $\nabla^n f_n$ که در بالا دور آن خط کشیده شده است سری binomial به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f(x_0+\alpha h) = f_4 + \alpha \nabla f_4 + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}\nabla^2 f_4 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{3!}\nabla^3 f_4 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{4!}\nabla^4 f_4$$

$$f(x_0+\alpha h) = 267 + 109\alpha + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}34 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{6}6 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{24}(0) =$$

$$\Longrightarrow f(3.6) = 124.256$$

هدف ما از مشتق‌گیری عددی حل معادله دیفرانسیل است. باید ببینیم که در چه مواقعی از مشتق‌گیری پسرو و در چه مواقعی از مشتق‌گیری پیشرو و مرکزی باید استفاده کنیم. حال با توجه به موارد گفته شده از این اپراتورها در مشتق‌گیری استفاده می‌کنیم:

$$E = e^{hD}$$

$$E = 1+\Delta$$

$$E^{-1} = (1-\nabla)$$

با استفاده از اپراتورهای بالا و ترکیب آنها فرمولهای زیر بدست می‌آید:

$$hD = \ln E = \ln(1+\Delta)$$

$$hD = -\ln(1-\nabla)$$

روابط ln را که در بالا بدست آمده را با کمک بسط مک‌لوران به صورت زیر بسط می‌دهیم:

$$hD = \ln(1+\Delta) = \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \frac{\Delta^5}{5} - \frac{\Delta^6}{6} + \cdots$$

$$hD = -\ln(1-\nabla) = \nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \frac{\nabla^4}{4} + \frac{\nabla^5}{5} + \cdots$$

② درصفحهٔ ۶۳ ما از A شروع کردیم و به یک نقطه قطع کردیم حالا ما در اینجا از A نقطه شروع می‌کنیم و به ۲ نقطه می‌رسانیم. (درمبنا ۳ نقطه عمل می‌کنیم)

$$f_i' = \frac{1}{h}\left[\Delta - \frac{\Delta^2}{2}\right] f_i$$

$$= \frac{1}{h}\left[\Delta f_i - \frac{1}{2}\Delta^2 f_i\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[(f_{i+1} - f_i) - \frac{1}{2}(\Delta f_{i+1} - \Delta f_i)\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[(f_{i+1} - f_i) - \frac{1}{2}(f_{i+2} - f_{i+1} - f_{i+1} + f_i)\right]$$

پس از مرتب کردن رابطه بالا $\longrightarrow$ $= \frac{1}{h}\left[-\frac{3}{2} f_i + 2 f_{i+1} - \frac{1}{2} f_{i+2}\right]$

$$= \frac{1}{2h}\left[-3 f_i + 4 f_{i+1} - 1 f_{i+2}\right]$$

توجه: این روابط بدون استفاده از جدول ۳-۱ نوشته شده است

رابطه‌ای که در بالا نوشته شده است، در جدول ۳-۱ رابطهٔ شمارهٔ ۳ است.

③ اگر از A شروع کنیم و بعد از ۳ نقطه قطع کنیم (درمبنا ۴ نقطه‌ای عمل کنیم) درنهایت به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$f_i' = \frac{1}{6h}\left[-11 f_i + 18 f_{i+1} - 9 f_{i+2} + 2 f_{i+3}\right]$$

این رابطه، شماره ۶ است.

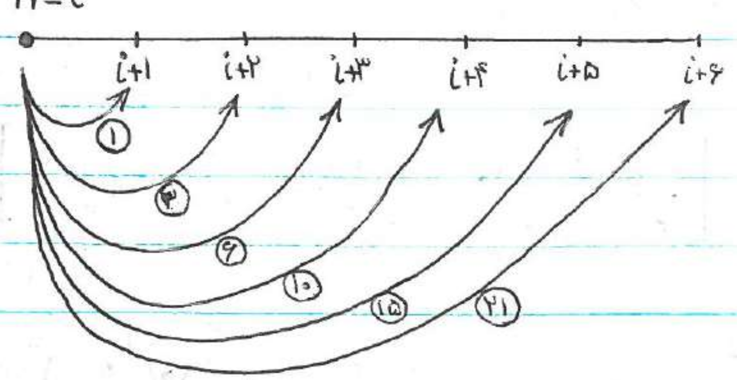
اگر همین کار را برای موارد زیر ادامه دهیم درنهایت داریم:

④ پس از ۴ نقطه از A (۵ نقطه‌ای) ⟵ معادله شماره ۱۰

⑤ پس از ۵ نقطه از A (۶ نقطه‌ای) ⟵ معادله شماره ۱۵

⑥ پس از ۶ نقطه از A (۷ نقطه‌ای) ⟵ معادله شماره ۲۱

با توجه به موارد گفته شده در شکل زیر گفته‌های زیر را عمل می‌کنیم:



معادلات پیشرو ⟸

خطای معادله

شماره معادله

TABLE 3-1

FINITE-DIFFERENCE FORMULAS FOR hy' AN… …IDISTANT GRID

ضرایبی که در فرمول جلوی $\frac{1}{h}$ قرار می‌گیرد

ضرایبی که در فرمول تفاوتها ظاهر می‌شود

Mult. factor	Coefficients in difference formula							Error		Formula no.	
1	−1	1						−1/2	$hy''(\xi)$	1	۲ نقطه‌ای
	−1	1						1/2		2	
1/2	−3	4	−1					1/3	$h^2y'''(\xi)$	3	۳ نقطه‌ای
	−1	0	1					−1/6		4	
	1	−4	3					1/3		5	
1/6	−11	18	−9	2				−1/4	$h^3y^{(IV)}(\xi)$	6	۴ نقطه‌ای
	−2	−3	6	−1				1/12		7	
	1	−6	3	2				−1/12		8	
	−2	9	−18	11				1/4		9	
1/12	−25	48	−36	16	−3			1/5	$h^4y^{(V)}(\xi)$	10	۵ نقطه‌ای
	−3	−10	18	−6	1			−1/20		11	
	1	−8	0	8	−1			1/30		12	
	−1	6	−18	10	3			−1/20		13	
	3	−16	36	−48	25			1/5		14	
1/60	−137	300	−300	200	−75	12		−1/6	$h^5y^{(VI)}(\xi)$	15	۶ نقطه‌ای
	−12	−65	120	−60	20	−3		1/30		16	
	3	−30	−20	60	−15	2		−1/60		17	
	−2	15	−60	20	30	−3		1/60		18	
	3	−20	60	−120	65	12		−1/30		19	
	−12	75	−200	300	−300	137		1/6		20	
1/60	−147	360	−450	400	−225	72	−10	1/7	$h^6y^{(VII)}(\xi)$	21	۷ نقطه‌ای
	−10	−77	150	−100	50	−15	2	−1/42		22	
	2	−24	−35	80	−30	8	−1	1/105		23	
	−1	9	−45	0	45	−9	1	−1/140		24	
	1	−8	30	−80	35	24	−2	1/105		25	
	−2	15	−50	100	−150	77	10	−1/42		26	
	10	−72	225	−400	450	−360	147	1/7		27	
	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6				

متغیری f که در فرمول نوشته می‌شود

در جدول بالا برحسب تعداد نقاط و نقطه مورد نظر می‌توان معادله را نوشت. در ستون وسط که به ستون ضرایب ظاهر شده در فرمول تفاوتها معروف است، ترتیب عدد از بالا به پایین بیانگر نقاط از چپ به راست است. مثلاً برای ۵ نقطه زیر داریم:

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

x

مقدارهای f براساس پایین جدول ۳-۱

$$f'_i = \frac{1}{12}\,\frac{1}{h}\left[-3\,f_0 - 10\,f_1 + 18\,f_2 - 6\,f_3 + 1\,f_4\right]$$

از ستون Multi Factor

اعداد از ستون ضرایب فرمولها

میزان خطا:

از جدول Error

$$-\frac{1}{20}\ \boxed{h^4\,y^{(5)}(\xi)}$$

حال اگر از نقطه $i+n$ بخواهیم شروع کنیم مجبور هستیم از فرمول پسرو Backward استفاده کنیم
بنابراین از رابطه (B) در صفحه ۶۳ استفاده می کنیم:
(۱) اگر از نقطه i یک نقطه به قبل در نظر بگیریم (بر مبنا ۲ نقطه):

$$f_i' = \frac{1}{h}\nabla f_i$$

$$= \frac{1}{h}\left[f_i - f_{i-1}\right] \Longrightarrow f_i' = \frac{1}{h}\left[-1\ f_{i-1} + \underline{\underline{1}}\ f_i\right]$$

در جدول ۱-۳ رابطه شماره ۲ می باشد.
(۲) اگر از نقطه i دو نقطه به قبل برگردیم (بر مبنا ۳ نقطه):

$$f' = \frac{1}{h}\left[\nabla f_i + \frac{\nabla^2}{2} f_i\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[f_i - f_{i-1} + \frac{1}{2}\left(\nabla f_i - \nabla f_{i-1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[f_i - f_{i-1} + \frac{1}{2}\left((f_i - f_{i-1}) - (f_{i-1} - f_{i-2})\right)\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\frac{1}{2} f_{i-2} - 2 f_{i-1} + \frac{3}{2} f_i\right]$$

$$f_i' = \frac{1}{2h}\left[+1\ f_{i-2} - 4 f_{i-1} \underline{\underline{+3}}\ f_i\right]$$

رابطه ای که در بالا بدست آمد در جدول ۱-۳ رابطه شماره ۵ است.
اگر کارهای بالا را برای موارد زیر ادامه دهیم، در نهایت داریم:

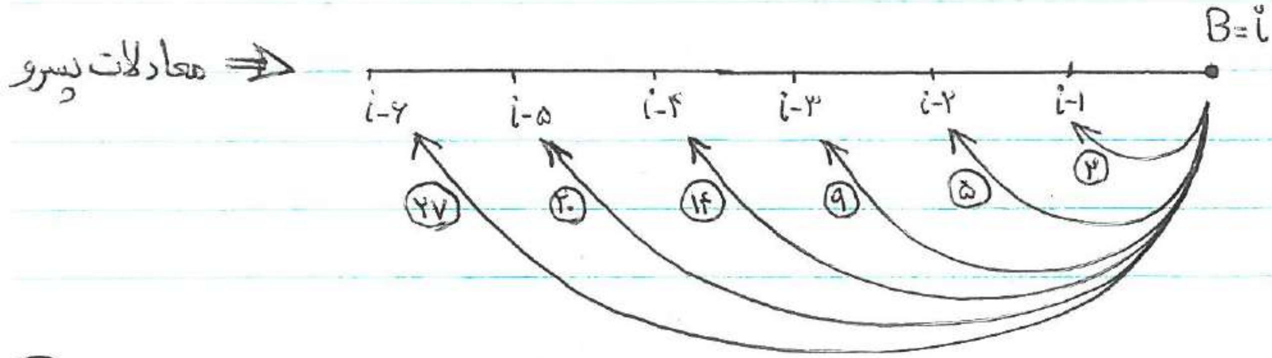
(۳) ۳ نقطه قبل از (B) (۴ نقطه ای) ⟵ معادله شماره ۹

(۴) ۴ نقطه قبل از (B) (۵ نقطه ای) ⟵ معادله شماره ۱۴

(۵) ۵ نقطه قبل از (B) (۶ نقطه ای) ⟵ معادله شماره ۲۰

(۶) ۶ نقطه قبل از (B) (۷ نقطه ای) ⟵ معادله شماره ۲۷

با توجه به موارد گفته شده، در شکل زیر گفته های زیر را عمل می کنیم:



با توجه به تمام آنچه گفته شد مشاهده می کنیم که یکسری معادلات میانی در جدول ۳-۱ وجود دارد که این فرمولها حالت ویژه ای را ایجاد می کند به عنوان مثال در رابطه 11 داریم:

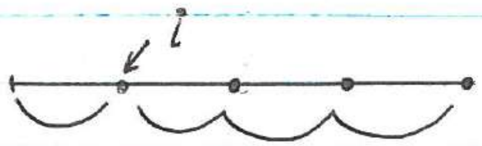
$$f_i' = \frac{1}{12h}\left[-3 f_{i-1} \underline{-10} f_i + 18 f_{i+1} - 6 f_{i+2} + 1 f_{i+3}\right]$$

به این فرمولها، فرمولهای میانه ای می گویند که نقطه زیرخط ما در میان این جملات قرار گرفته است. فرمولهای میانه ای بر حسب اینکه درکدام نقطه میانه قرار گرفته باشد، مقدار ضرایب تفاوت ظاهری (Cfficient differenc) آن تغییر می کند. اما این ضرایب نسبت به ضرایب نقطه مرکزی تقارن دارد و قرینه است. همچنین زمانی که ما تعداد نقاطمان فرد باشد مثلاً ۵ عدد نقطه وسط یعنی نقطه سوم ضریب آن صفر می گردد.

درهنگام بررسی خطاها در این جدول (۱-۳) خطا متناسب با h است و متناسب با توان h خطا مقدارش تغییر می کند. هرچه توان h بزرگتر باشد مقدار خطا کمتر می گردد و همچنین رابطه پیچیده تر می گردد. پیچیده شدن رابطه برای ما مشکل ایجاد می کند. بنابرین مناسب ترین رابطه ای که ما می توانیم از آن استفاده کنیم، فرمولهای ۳ نقطه ای است. برای محاسبه خطا معمولاً از فرمولهای ۳ نقطه ای استفاده می کنیم چون ضریب خطا آن کوچکتر است. بنابرین دقت آن هم بیشتر می گردد. این گفته به خوبی در ستون Error جدول ۳-۱ مشخص است. همچنین باید به این نکته هم توجه کرد که بیشترین دقت هنگامی بدست می آید که جملات ۲ طرف روش مرکزی با هم برابر باشد.

فرمول های میانی مشتق گیری:

فرمولهای میانی به آن دسته از فرمولهایی گفته می شود که جملات زیرخط دار آن جملات ابتدایی وانتهایی نیست. به عنوان مثال برای فرمول شماره (11) در جدول ۳-۱ برای ۵ نقطه داریم:



$$(11)\quad f_i' = \frac{1}{12h}\left[-3 f_{i-1} \underline{\underline{-10}} f_i + 18 f_{i+1} - 6 f_{i+2} + f_{i+3}\right]$$

برای توضیح بیشتر می بایست به روابط اپراتورها بازگردیم. یکی از روابط اپراتورها عبارتست از:

$$(1+\Delta)E = 1 \rightarrow (1+\Delta)E^{-1} = 1$$
$$\rightarrow (1+\Delta)^2 E^{-2} = 1$$
$$\rightarrow (1+\Delta)^3 E^{-3} = 1$$

برای این منظور فرمول A را در نظر بگیرید و آن را در رابطه $(1+\Delta=E)$ ضرب کنیم. اگر در فرمول اول آن را ضرب کنیم به یک فرمول پیشرو با یک shift به عقب و دومی به یک فرمول پیشرو با ۲ shift به عقب و سومی با سه shift به عقب و .... حاصل می شود.

$$\boxed{\text{فرمول A}} \qquad f_i' = \frac{1}{h}\left[\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \cdots\right] f_i$$

اگر از فرمول پسرو (Backward) استفاده کنیم، آنگاه داریم:

$$(1-\nabla) = E^{-1} \;\longrightarrow\; \begin{cases} (1-\nabla)E = 1 \\ (1-\nabla)^2 E^2 = 1 \\ (1-\nabla)^3 E^3 = 1 \end{cases}$$

رابطه ای که در بالا حاصل شد را در رابطه پسرو (Backward) اعمال می کنیم و آنگاه با یک shift به جلو آن را بدست می آوریم.

به عنوان مثال فرمول شمارهٔ ۷ را از جدول ۳-۱ می خواهیم با روش پیشرو به وسیله یک shift به عقب بدست بیاوریم. برای این کار داریم:

$$f_i' = \frac{1}{h}\left[\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \cdots\right] f_i$$

$$= \frac{1}{h}\left[\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \cdots\right](1+\Delta)\,\underbrace{E^{-1} f_i}$$

در رابطه بالا $E^{-1}f_i$ برابر با f_{i-1} می باشد. جملات را در این مقدار ضرب می کنیم و جملات توان مشابه Δ را بدست می آوریم:

$$f_i' = \frac{1}{h}\left[\Delta + \left(1-\frac{1}{2}\right)\Delta^2 - \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\Delta^3 + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\Delta^4 - \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)\Delta^5 + \cdots\right] f_{i-1}$$

$$f_i' = \frac{1}{h}\left[\Delta + \frac{\Delta^2}{2} - \frac{\Delta^3}{6} + \frac{\Delta^4}{12} - \frac{\Delta^5}{20} + \cdots\right] f_{i-1} \qquad \text{C}$$

رابطه بدست آمده در بالا را رابطه C می نامیم. این رابطه را پس از ۳ شماره قطع می کنیم و به فرمول ۴ نقطه ای می رسیم که نقطه اول آن Δf_{i-1} است:

$$f_i' = \frac{1}{h}\left[\Delta f_{i-1} + \frac{1}{2}\Delta^2 f_{i-1} - \frac{1}{6}\Delta^3 f_{i-1}\right]$$

در فرمول بدست آمده در آخر صفحه قبل برای Δ ها داریم:

$$\Delta f_{i-1} = f_i - f_{i-1} \quad / \quad \Delta^2 f_{i-1} = \Delta f_i - \Delta f_{i-1} = (f_{i+1} - f_i) - (f_i - f_{i-1})$$

$$\Delta^3 f_{i-1} = \Delta^2 f_i - \Delta^2 f_{i-1} = (\Delta f_{i+1} - \Delta f_i) - (\Delta f_i - \Delta f_{i-1}) = \dots$$

به ازای مقادیر Δ جایگزین آن را در بالا قرار می‌دهیم. پس از مرتب کردن و جایگذاری در نهایت رابطه زیر برای ما حاصل می‌گردد:

$$f_i' = \frac{1}{6h}\left[-2 f_{i-1} - 3 f_i + 6 f_{i+1} - f_{i+2}\right]$$

معادله بدست آمده در بالا معادله شماره ۷ است. (در جدول ۱-۳)

حال اگر این کار را برای نقاط بعدی انجام دهیم به طور خلاصه داریم:

* اگر در فرمول (C) بعد از ۲ جمله عبارت را قطع کنیم رابطه برای ۳ نقطه و معادله شماره ۴ حاصل می‌شود.
* اگر در فرمول (C) بعد از ۳ جمله عبارت را قطع کنیم رابطه برای ۴ نقطه و رابطه شماره ۷ حاصل می‌شود.
* اگر در فرمول (C) بعد از ۴ جمله عبارت را قطع کنیم رابطه برای ۵ نقطه و معادله شماره ۱۱ حاصل می‌شود.
* اگر در فرمول (C) بعد از ۵ جمله عبارت را قطع کنیم رابطه برای ۶ نقطه و معادله شماره ۱۶ حاصل می‌شود.
* اگر در فرمول (C) بعد از ۶ جمله عبارت را قطع کنیم رابطه برای ۷ نقطه و معادله شماره ۲۲ حاصل می‌شود.

اگر فرمولهای پسرو (Backward) را هم بدست بیاوریم مثلاً فرمول شماره ۱۲ از جدول ۳-۱ که فرمول ۵ نقطه‌ای است با ۲ تا جلو می‌توانیم آن را حساب کنیم. همچنین همین فرمول را از روش پیشرو forward با ۲ shift به عقب می‌توانیم بدست بیاوریم. برای این کار از فرمول (B) که به صورت زیر است، استفاده می‌کنیم:

$$\text{(B)} \qquad f_i' = \frac{1}{h}\left[\nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \frac{\nabla^4}{4} + \dots\right] f_i$$

$$f_i' = \frac{1}{h}\left[\nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \frac{\nabla^4}{4} + \dots\right] \underbrace{(1-\nabla)^2}\ \underbrace{E^2 f_i}$$

در فرمول بالا داریم:

$$1 - \nabla^2 = (1 - 2\nabla + \nabla^2) \qquad E^2 f_i = f_{i+2}$$

در این رابطه $E^2 f_i$، ۲ shift به عقب می‌شود. مقدارهای گفته شده را در رابطه f_i' ضرب می‌کنیم و داریم:

$$f_i' = \frac{1}{h}\left[\nabla + \left(\frac{1}{2} - 2\right)\nabla^2 + \left(\frac{1}{3} - 1 + 1\right)\nabla^3 + \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right)\nabla^4 + \dots\right]$$

رابطه بدست آمده در پایین صفحه قبل را با روندی که گفته شده اگر مرتب کنیم داریم :

$$f'_i=\frac{1}{h}\left[\nabla-\frac{3}{2}\nabla^2+\frac{1}{3}\nabla^3+\frac{1}{12}\nabla^4+\frac{1}{30}\nabla^5+\cdots\right]f_{i+2} \quad (D)$$

رابطه حاصل شده در بالا را رابطه (D) می نامیم . حالا عبارت خود را از (D) شروع می کنیم و بعد از ۴ جمله آن را قطع می کنیم و به رابطه ۵ نقطه ای پسرو می رسیم که برای آن داریم :

$$f'_i=\frac{1}{12h}\left[1\,f_{i-2}-8\,f_{i-1}+\underline{\underline{0}}\,f_i+8\,f_{i+1}-1\,f_{i+2}\right]$$

فرمولهایی که در واقع ۳ ، ۵ ، ۷ و ۹ نقطه ای هستند ، در مشتق گیری های میانی هنگامی که تعداد جملات ۲ طرف برابر باشد ، ضریب جمله مرکزی صفر و جملات تکراری ۲ به ۲ با همدیگر قرینه هستند .

اگر از (D) شروع کنیم و رابطه خودمان را پس از ۳ جمله قطع می کردیم به عبارت پسرو (Backward) ۲ Shift به جلو می رسیدیم که همان معادله $\underline{7}$ است . به طور کلی برای رابطه ۴ جمله ای می توان به ۲ صورت زیر کار کرد :

← ۲ جمله ای ۲ Shift به عقب با روش پیشرو استفاده کرد .

← ۲ جمله ای با ۲ Shift به جلو با روش پسرو Backward استفاده کرد .

حال اگر رابطه را از (D) مطابق جدول ۱ـ۳ داشتیم :

* اگر از (D) شروع می کردیم و پس از ۵ جمله قطع می کردیم به معادله شماره $\underline{\underline{18}}$ می رسیدیم .

* اگر از (D) شروع می کردیم و پس از ۶ جمله قطع می کردیم به معادله شماره $\underline{\underline{25}}$ می رسیدیم .

از بین فرمولهایی که در جدول ۱ـ۳ بیان شده است ، مهمترین آنها فرمول شماره ۴ است . فرمول سه نقطه ای i است . این فرمول عبارتست از :

$$f'_i=\frac{1}{2h}\left(f_{i+1}-f_{i-1}\right)$$

---

* مشتق مرتبه دوم :

برای مشتق مرتبه دوم می بایست از جدول ۱ـ۳ استفاده بکنیم . در واقع بیشتر روابط مهندسی شامل مشتق مرتبه دوم می گردد . با توجه به تعداد نقاط انتخاب شده روابط این مشتق گیری در جدول ۳ـ۲ بیان شده است که این جدول در صفحه $\underline{\underline{72}}$ (صفحه بعد توضیح داده خواهد شد .)

ضرایبی که در فرمول تفاوتها ظاهر می گردد.*

شماره معادله

TABLE 3-2

...ITE-DIFFERENCE FORMULAS FOR h^2y'' AND EQUIDISTANT G

ضرایبی که در فرمولها جلوی $\frac{1}{h}$ قرار می گیرد

خطا معادله

Mult. factor	Coefficients in difference formula					Error				Formula no.
	1	−2	1			−1		1/6		1
1	1	−2	1			0	$hy^{(III)}(\xi_1)+$	−1/12	$h^2y^{(IV)}(\xi_2)$	2
	1	−2	1			1		−1/6		3
	12	−30	24	−6		11/12		−1/10		4
1/6	6	−12	6	0		−1/12	$h^2y^{(IV)}(\xi_1)+$	−1/30	$h^3y^{(V)}(\xi_2)$	5
	0	6	−12	6		1/12		−1/30		6
	−6	24	−30	12		11/12		−1/10		7
	70	−208	228	−112	22	−5/6		1/15		8
	22	−40	12	8	−2	1/12		−1/60		9
1/24	−2	32	−60	32	−2	0	$h^3y^{(V)}(\xi_1)+$	1/90	$h^4y^{(VI)}(\xi_2)$	10
	−2	8	12	−40	22	−1/12		1/60		11
	22	−112	228	−208	70	5/6		1/15		12

مهمترین رابطه در جدول فوق فرمول شماره ۲ است. در این فرمول داریم:

$$(2)\quad f_i'' = \frac{1}{h^2}\left(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}\right)$$

اگر فرمولهای f'' را بخواهیم حساب کنیم مطابق مطالبی که برای اپراتورها گفته بودیم:

$$hD = \ln(1+\Delta) = \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \frac{\Delta^5}{5} - \cdots \Rightarrow \text{پیشرو}$$

$$hD = -\ln(1-\nabla) = \nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \frac{\nabla^4}{4} + \frac{\nabla^5}{5} + \cdots \Rightarrow \text{پسرو}$$

اگر عبارت حالت پیشرو را که در بالا بیان کردیم به توان ۲ برسانیم داریم:

$$(hD)^2 = \left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \frac{\Delta^5}{5} - \cdots\right)$$

$$= \Delta^2 + \left(\frac{-1}{2} - \frac{1}{2}\right)\Delta^3 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)\Delta^4 + \left(\frac{-1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right)\Delta^5 + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{5}\right)\Delta^6$$

اگر همه عبارت بالا را مرتب کنیم که در نهایت به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$hD^2 = \Delta^2 - \Delta^3 + \frac{11}{12}\Delta^4 - \frac{5}{6}\Delta^5 + \frac{137}{180}\Delta^6$$

عبارت بالا را در f_i ضرب می کنیم و آنگاه خواهیم داشت:

$$(hD)^2 f_i = \left[\Delta^2 - \Delta^3 + \frac{11}{12}\Delta^4 - \frac{5}{6}\Delta^5 + \frac{137}{180}\Delta^6 - \cdots\right] f_i$$

$$f_i'' = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 - \Delta^3 + \frac{11}{12}\Delta^4 - \frac{5}{6}\Delta^5 + \frac{137}{180}\Delta^6 - \cdots\right] \qquad \mathrm{I}$$

معادله بدست آمده در بالا را (I) می‌نامیم.

اگر مثل همین کار را برای رابطه پسرو Backward انجام بدهیم داریم:

$$hD = -\ln(1-\nabla) = \nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \frac{\nabla^4}{4} + \frac{\nabla^5}{5} + \cdots$$

اگر رابطه فوق را به توان ۲ برسانیم و بعد آن را مرتب کنیم داریم:

$$(hD)^2 = \left(-\ln(1-\nabla)\right)^2 = \left(\nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \frac{\nabla^4}{4} + \frac{\nabla^5}{5} + \cdots\right)$$

$$(hD)^2 = \left[\nabla^2 + \nabla^3 + \frac{11}{12}\nabla^4 + \frac{5}{6}\nabla^5 + \frac{137}{180}\nabla^6 + \cdots\right]$$

حال طرفین رابطه بالا را در f_i ضرب می‌کنیم و داریم:

$$(hD)^2 f_i = \left[\nabla^2 + \nabla^3 + \frac{11}{12}\nabla^4 + \frac{5}{6}\nabla^5 + \frac{137}{180}\nabla^6 + \cdots\right] f_i$$

$$f_i'' = \frac{1}{h^2}\left[\nabla^2 + \nabla^3 + \frac{11}{12}\nabla^4 + \frac{5}{6}\nabla^5 + \frac{137}{180}\nabla^6 + \cdots\right] \qquad \mathrm{II}$$

در روش پیشرو اگر از فرمول (I) شروع بنماییم و بعد از یک جمله آن را قطع کنیم داریم:

$$f_i'' = \frac{1}{h^2}\Delta^2 f_i \longrightarrow f_i'' = \frac{1}{h^2}\left[\Delta f_{i+1} - \Delta f_i\right]$$

$$= \frac{1}{h^2}\left[(f_{i+2} - f_{i+1}) - (f_{i+1} - f_i)\right]$$

$$f_i'' = \frac{1}{h^2}\left[\underline{\underline{+1}}\, f_i - 2 f_{i+1} + 1 f_{i+2}\right]$$

در جدول ۲-۳ رابطه بدست آمده در بالا فرمول شماره (1) است.

برای نقاط بعدی اگر از فرمول (I) برای روش پیشرو استفاده کنیم:

* بعد از ۲ جمله به ۳ نقطه ای می رسیم که در جدول ۳-۲ فرمول شماره ۴ است.

* بعد از ۳ جمله به رابطه ۴ نقطه ای می رسیم که در جدول ۳-۲ فرمول شماره ۸ است.

حال روابطی که گفته شد از فرمول (II) برای روش پسرو (Backward) استفاده می کنیم:

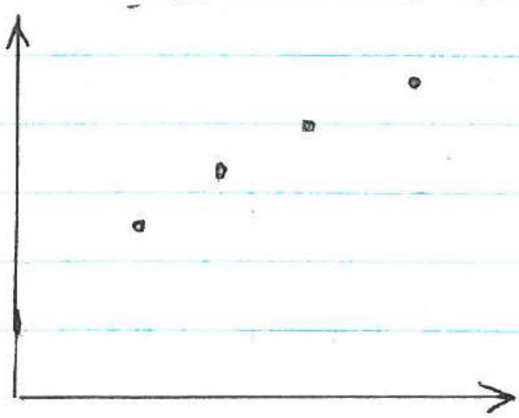
* بعد از ۲ جمله رابطه ۳ نقطه ای می رسیم که در جدول ۳-۲ فرمول شماره ۷ می باشد.

* بعد از ۳ جمله رابطه ۴ نقطه ای می رسیم که در جدول ۳-۲ فرمول شماره ۱۲ می باشد.

برای محاسبه میانی هم با یک shift به عقب در روش پیشرو و با یک shift به جلو در روش پسرو می توان محاسبه نمود.

* خطاهای محاسباتی:

در جدول ۳-۲ که در صفحه ۷۲ بیان شده است، به ستون Error توجه کنید. شما حتماً به یاد دارید که ما اگر در یک محور مختصات چند نقطه هم فاصله مطابق روبرو داشته باشیم برای آن رابطه زیر را متصور بودیم:



$$f(x) = \phi_n(x) + R(x)$$

برای رابطه فوق برحسب پیشرو یا پسرو بودن مشتق هم α به صورت زیر تعریف می شود:

$x = x_0 + \alpha h \leftarrow$ پیشرو

$x = x_n + \alpha h \leftarrow$ پسرو

رابطه $R(x)$ ما نیز به صورت زیر بود:

$$R(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \qquad \boxed{x_0<\xi<x_n}$$

چون ما مقدار f را در بالا نمی دانیم، بنابرین مقدار خطا را هم نداریم و بنابرین روی نقاط خطا نداریم.
اگر f چند جمله ای درجه n باشد، آنگاه مشتق $(n+1)$ صفر می شود و در نتیجه خطا هم صفر می شود.

بنابرین داریم:

$$x - x_0 = \alpha h$$

$$x - x_1 = \alpha h - h = h(\alpha - 1)$$

$\boxed{\text{اثبات}}$ $$x - x_1 = \alpha\underbrace{(x-x_0)}_{\alpha h} + \underbrace{(x_1 - x_0)}_{-h} \longrightarrow x - x_1 = \alpha h + (-h)$$

اگر همین کار را ادامه دهیم عبارت ما به صورت زیر می گردد :

$$x - x_2 = \alpha h - 2h = (\alpha - 2) h$$
$$\vdots$$
$$x - x_n = (\alpha - n) h$$

برای روش پیشرو نیوتون (NFF) داریم :

$$R(x)_{NFF} = \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(\gamma)}{(n+1)!} \alpha (\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots (\alpha - n)$$

آنگاه همین کار را برای روش پسرو نیوتون (NBF) انجام بدهیم داریم :

$$R(x)_{NBF} = \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(\gamma)}{(n+1)!} \alpha (\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + n)$$

اگر برای یک تابع مثل $f(x)$ داشته باشیم :

$$f(x) = \phi_n(x) + R(x)$$

آنگاه مشتق آن عبارت خواهد بود از :

$$f'(x) = \phi_n'(x) + R'(x)$$

این عبارت را خلاصه می نویسیم که در ستون انتگرال بیان شده است :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \phi_n(x)dx + E \longrightarrow \boxed{E = \int_a^b R(x)dx}$$

اگر از رابطه $R(x)$ مشتق بگیریم ، داریم :

$$R(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\gamma) \qquad \boxed{x_0 < \gamma < x_n}$$

$$R'(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)}{(n+1)!} \frac{d}{dx}\left[f^{(n+1)}(\gamma)\right] + \frac{f^{(n+1)}(\gamma)}{(n+1)!} \frac{d}{dx}\left[(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)\right]$$

حال اگر عبارت بالا را بسط بدهیم داریم :

بر روی نقاط $\longrightarrow X = X_i \qquad i = 0, 1, 2, \dots, n$

با توجه به تعداد جملات برای خطا داریم :

$n = 0 \longrightarrow$ برای جمله اول خطا صفر است

$$n = 1 \longrightarrow \frac{(x - x_0)}{2!} f^{(2)}(\gamma)$$

بقیه در صفحه بعد

$$n=2 \longrightarrow \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{3!} f^{(3)}(\xi)$$

$$n=3 \longrightarrow \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{4!} f^{(4)}(\xi)$$

به طور کلی برای زمانی که $n=k$ باشد، داریم:

$$n=k \longrightarrow R'(x)\Big|_{x=x_i} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} (x_i - x_k)$$

یادآوری

اگر ما تعداد بینهایت عبارت داشته باشیم که از یک رابطه کلی پیروی می کنند درهمدیگر ضرب کنیم برای خلاصه نویسی از نماد $\prod$ استفاده می کنیم به عنوان مثال:

$$(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) = \prod_{\substack{k=0 \\ k=n}}^{n} (x_i - x_k)$$

نقش $\prod$ در ضرب مثل نقش $\sum$ در عملیات جمع است.

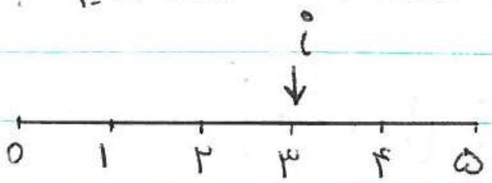
اگر این روابط را برای محاسبات خطا به کار ببریم مشاهده می کنیم که:

← در فرمولهای ۲ نقطه ای توان h برابر یک است.

← در فرمولهای ۳ نقطه ای توان h برابر ۲ است.

تذکر ← آنچه در بالا گفته شد مربوط به ستون خطا در جدول های ۱-۳ و ۲-۳ است و به رابطه $R'(x)$ هیچ ربطی ندارد!

رابطه خطایی را که بدست آورده ایم برای یک فرمول ۶ نقطه ای بررسی می کنیم:



در شکل روبرو فاصله های نقاط باهمدیگر برابر و مساوی h است

اگر نقطه اول را صفر در نظر بگیریم، آن گاه $n=5$ و فرض می کنیم که رابطه ما در نقطه i قرار دارد، آن گاه f' عبارتست از:

$$f_i' = \frac{1}{60h}\left[-2 f_{i-3} + 15 f_{i-2} - 60 f_{i-1} + 20 f_i + 30 f_{i+1} - 3 f_{i+2}\right]$$

این رابطه فرمول شماره ۱۸ از جدول ۱-۳ است و برای محاسبه آن می بایست از فرمول $R(x)$ به صورت زیر استفاده کرد:

$$R'(x) \Rightarrow R'(x)\Big|_{x=x_i} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} (x_i - x_k)$$

$$R'(x)\Big|_{x=x_i} = \frac{f^{(n+1)}(\gamma)}{(۵+1)!}\left[\underbrace{(x_۳-x_0)}_{۳h}\underbrace{(x_۳-x_1)}_{۲h}\underbrace{(x_۳-x_۲)}_{h}\underbrace{(x_۳-x_۴)}_{-h}\underbrace{(x_۳-x_۵)}_{-۲h}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{f^{(n+1)}(\gamma)}{۶\times ۵\times ۴\times ۳\times ۲}\times ۱۲\, h^{۵} = \frac{f^{(n+1)}(\gamma)\, h^{۵}}{۶۰}$$

اگر i را جلوتر می‌گرفتیم، خطا زیادتر می‌شد چون عبارت ضرب شده بیشتر می‌گردد. اگر i را عقب‌تر بگیریم همین مقدار خطا زیاد منفی با مقدار منفی بدست می‌آید. بنابراین مناسب‌ترین حالت زمانی است که نقطه وسط باشد.

فرمولهای انتگرال‌گیری :

اگر عبارتی برای $f(x)$ به صورت زیر داشته باشیم :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \phi_n(x)\,dx + E \qquad E = \int_a^b R(x)\,dx$$

فرمولهای انتگرال‌گیری را با رابطه زیر بدست می‌آورند :

$$I^n D = E^n - 1 \longrightarrow I^n D f(x) = I^n \frac{df(x)}{dx}$$

طبق تعریفی که برای اپراتور I داریم خواهیم داشت :

$$I^n D f(x) = I^n \frac{df(x)}{dx} = \int_x^{x+nh} \frac{df(x)}{dx}$$

$$= f(x+nh) - f(x)$$

$$= E^n f(x) - f(x)$$

$$= (E^n - 1) f(x)$$

رابطه‌ای دیگر نیز داریم و آن عبارتست از :

$$E = 1 + \Delta$$

$$E = e^{hD} \longrightarrow hD = \ln E = \ln(1+\Delta)$$

$$\Rightarrow D = \frac{\ln(1+\Delta)}{h}$$

اگر فرمول اول را جاگذاری کنیم آنگاه خواهیم داشت :

$$I^n D = E^n - 1 \longrightarrow I^n = \frac{E^n - 1}{D} = \frac{h[E^n - 1]}{\ln(1+\Delta)}$$

$$I^n = \frac{h[(1+\Delta)^n - 1]}{\ln(1+\Delta)}$$

اگر صورت و مخرج کسر انتها صفحهٔ قبل را مطابق سری binomial بسط می دهیم و داریم:

$$(1+\Delta)^n = 1 + n\Delta + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 + \cdots$$

$$\ln(1+\Delta) = \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \frac{\Delta^5}{5} - \cdots$$

اگر مقادیر بالا را در رابطه I جایگزین کنیم، آنگاه خواهیم داشت:

$$I^n = \frac{nh\left[\Delta + \frac{n-1}{2!}\Delta^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 + \cdots\right]}{\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \frac{\Delta^5}{4} - \cdots} =$$

$$= nh\left(1 + \alpha_1\Delta + \alpha_2\Delta^2 + \alpha_3\Delta^3 + \alpha_4\Delta^4 + \cdots\right)$$

برای بدست آوردن α رابطه را طرفین وسطین می کنیم و برحسب Δ باهمدیگر مقایسه می کنیم که از این مقایسه α بدست می آید:

$$\Delta^2: \quad \frac{-1}{2} + \alpha_1 = \frac{(n-1)}{2!}$$

$$2\alpha_1 - 1 = -n - 1 \Longrightarrow \boxed{\alpha_1 = \frac{n}{2}}$$

$$\Delta^3: \quad \frac{1}{3} - \frac{\alpha_1}{2} + \alpha_2 = \frac{(n-1)(n-2)}{3!}$$

به جای α_1 در رابطه بالا $\left(\frac{n}{2}\right)$ قرار می دهیم و پس از مرتب کردن داریم:

$$= \frac{1}{3} - \frac{n}{4} + \alpha_2 = \frac{n^2 - 3n + 2}{6} \Longrightarrow \frac{4 - 3n + 12\alpha_2}{12} = 2n^2 - 6n + 4$$

$$\alpha_2 = \frac{2n^2 - 3n}{12} \Longrightarrow \boxed{\alpha_2 = \frac{n(2n-3)}{12}}$$

اگر همه این کارها را انجام دهیم، در نهایت برای I^n داریم:

$$I^n = nh\left(1 + \frac{n}{2}\Delta + \frac{n(2n-3)}{12}\Delta^2 + \frac{n(n-2)^2}{24}\Delta^3 + \frac{n(6n^3 - 45n^2 + 110n - 90)}{72}\Delta^4 + \frac{n(n-4)^2(2n^2 - 8n + 9)}{1440}\Delta^5 + \cdots\right)$$

اگر عبارت بالا را در یک f_0 ضرب کنیم داریم:

$$f_0 \times I^n = \left[nh\left(1 + \frac{n}{2}\Delta + \frac{n(2n-3)}{12}\Delta^2 + \frac{n(n-2)^2}{24}\Delta^3 + \frac{n(6n^3 - 45n^2 + 110n - 90)}{72}\Delta^4 + \frac{n(n-4)^2(2n^2 - 8n + 9)}{1440}\Delta^5 + \cdots\right)\right] \times f_0$$

آن گاه عبارت ما به صورت زیر می گردد:

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)dx = nh\left[1+\frac{n}{2}\Delta+\frac{n(2n-3)}{12}\Delta^2+\dots\right]f_0$$

برای انتگرال گیری باید اول مشخص کنیم که بعد از چند جمله عبارتمان را می خواهیم قطع کنیم و بعد مقدار h را مشخص کنیم. حال با مشخص کردن مقدار n داریم:

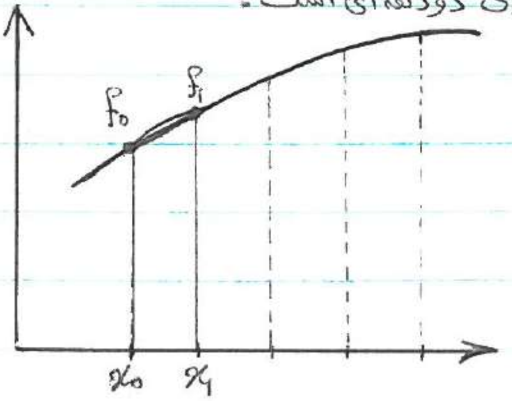
$n=1$ ، بعد از ۲ جمله قطع می کنیم

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = h\left[1+\frac{1}{2}\Delta\right]f_0$$

$$= h\left[f_0+\frac{1}{2}\Delta f_0\right]$$

$$= h\left[f_0+\frac{1}{2}(f_1-f_2)\right] = \frac{h}{2}\left[f_0+f_1\right]$$

رابطه ای که در بالا بدست آمد همان قانون انتگرال گیری ذوزنقه ای است.



اگر $n=1$ باشد، یعنی سطح زیر منحنی f_0 تا f_1 بدست می آید که در شکل روبرو نشان داده شده است. اگر به محاسبات خودمان یک جمله دیگر اضافه کنیم رابطه ما یک منحنی می شود. آنگاه روش محاسبه ما دیگر ذوزنقه نیست و این روش به روش سیمپسون ۳ نقطه ای معروف است. برای روش سیمپسون $\frac{1}{3}$ به طور کلی داریم:

$n=2$ ، بعد از ۳ جمله قطع می کنیم

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = 2h\left[1+\Delta+\frac{1}{6}\Delta^2\right]f_0$$

رابطه ی بالا را اگر بسط بدهیم آنگاه داریم:

$$= 2h\left[f_0+\Delta f_0+\frac{1}{6}\Delta^2 f_0\right]$$

$$= 2h\left[f_0+(f_1-f_0)+\frac{1}{6}(\Delta f_1-\Delta f_0)\right]$$

$$= 2h\left[f_0+(f_1-f_0)+\frac{1}{6}\left((f_2-f_1)-(f_1-f_0)\right)\right]$$

$$= 2h\left[\frac{1}{6}f_0+\frac{2}{3}f_1+\frac{1}{6}f_2\right]$$

اگر رابطه بدست آمده در صفحه قبل را بر ۶ ضرب و تقسیم کنیم آنگاه خواهیم داشت:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + f_2\right]$$

قانون سیمپسون $\frac{1}{3}$

اگر در رابطه فوق عبارت را به جای ۳ جمله با ۴ جمله برای $(n=2)$ قطع کنیم، در رابطه فوق فرقی حاصل نمی شود. دلیل این امر برمی گردد به همان مطلبی که در ابتدا برای انتگرال گیری گفته بودیم. در ابتدا که در صفحهٔ ۷۷ برای انتگرال گیری عملگر $I^nD=E^n-1$ را بیان کردیم و بعد آن را اثبات نمودیم در نهایت در صفحهٔ قبل برای انتگرال گیری به رابطه زیر رسیدیم:

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)dx = nhf_0\left(1 + \frac{n}{2}\Delta + \frac{n(2n-3)}{12}\Delta^2 + \frac{n(n-2)^2}{24}\Delta^3 + \frac{n(6n^3-45n^2+110n-90)}{72}\Delta^4 + \frac{n(n-4)^4(2n^2-8n+9)}{1440}\Delta^5 + \cdots\right)$$

همانطور که ملاحظه می کنید جمله چهارم این رابطه به صورت زیر است:

$$\frac{n(n-2)^2}{24}\Delta^3$$

بنابراین زمانی که $n=2$ باشد، این رابطه حذف می گردد و در نتیجه ۳ جمله ای یا ۴ جمله ای بودن رابطه فرقی نمی کند.

حال در ادامه ما برای $(n=3)$ داریم:

$$\left.\begin{matrix} n=3 \\ \text{پس از ۴ جمله قطع می کنیم} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = 3h\left[f_0 + \frac{3}{2}\Delta f_0 + \frac{3}{4}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{8}\Delta^3 f_0\right]$$

$$= 3h\left[f_0 + \frac{3}{2}(f_1-f_0) + \frac{3}{4}(\Delta f_1 - \Delta f_0) + \frac{1}{8}(\Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0)\right]$$

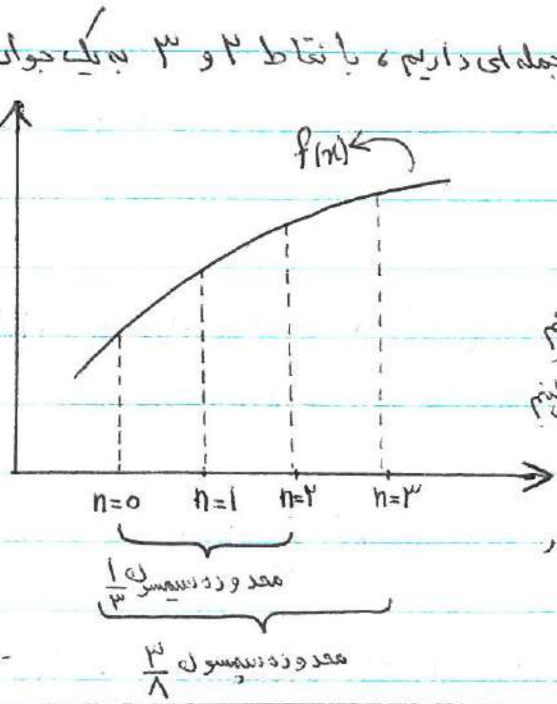
$$= 3h\left[f_0 + \frac{3}{2}(f_1-f_0) + \frac{3}{4}\left((f_2-f_1)-(f_1-f_0)\right) + \frac{1}{8}\left((\Delta f_2 - \Delta f_1) - (\Delta f_1 - \Delta f_0)\right)\right]$$

$$= 3h\left[f_0 + \frac{3}{2}(f_1-f_0) + \frac{3}{4}\left((f_2-f_1)-(f_1-f_0)\right) + \frac{1}{8}\left[\left((f_3-f_2)-(f_2-f_1)\right) - \left((f_2-f_1)-(f_1-f_0)\right) - \cdots\right]\right]$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx = \frac{3h}{8}\left[f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3\right]$$

همانطور که ملاحظه می شود وقتی ما عبارت ۴ جمله ای داریم ، با نقاط ۲ و ۳ به یک جواب می رسیم

به عبارت دیگر نمودار روبرو را در نظر بگیرید :



ما برحسب ۴ جمله انتگرال نمودار $f(x)$ را حساب کرده ایم . به عبارت دیگر $f(x)$ حساب شده و در روش سیمپسون انتگرال را براساس ۲ نقطه حساب می کنیم ولی در روش سیمپسون $\frac{3}{8}$ براساس ۳ نقطه حساب می کنیم از اینرو محاسبات این روش بیشتر می شود . بیشتر شدن محاسبات به معنی بیشتر شدن خطا در زمانی است که جوابها یکسان باشند .

توجه

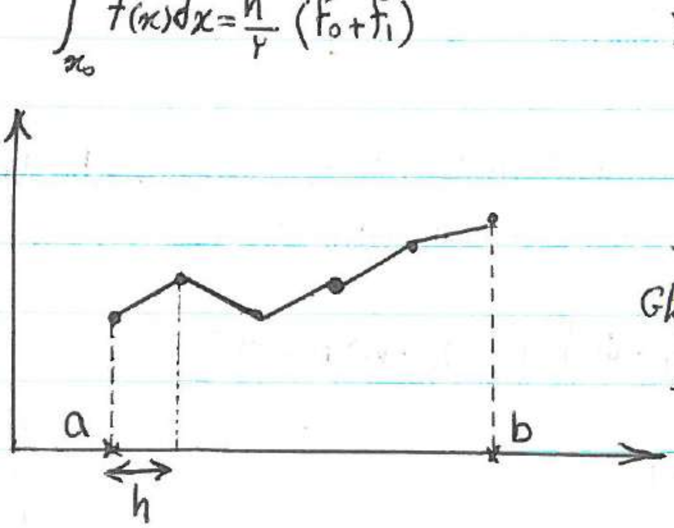
این نکته ای که در بالا گفته شد فقط برای $n=2$ و $n=3$ صادق نیست ، بلکه برای کلیه $n=2K$ مقادیر زوج و $n=2K+1$ مقادیر فرد صادق است . همچنین دقت کنید که در هنگامی که $n=2$ است فقط جمله ای که $(n-2)$ دارد حذف می شود و مابقی جملات به قوت خود باقی هستند *

حال برای فرمولهای مختلف با توجه به مقادیر n و تعداد جملات می توان یک رابطه تعیین کرد . برای مقادیر مختلف n داریم :

* $n=1$: در این شرایط ما ۲ نقطه داریم که برای این ۲ نقطه از روش انتگرال گیری ذوزنقه ای استفاده می کنیم و رابطه خطا و فرمول کلی انتگرال گیری آن به صورت زیر درخواهد آمد :

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}(f_0+f_1)$$

میزان خطا : $\frac{-h^3}{12} f^{(2)}(\xi) \qquad x_0<\xi<x_1$



اگر تعداد نقاط ما بیشتر باشد بین هر ۲ نقطه یک خطا در نظر می گیریم و بعد تمامی آنها را باهم در نظر می گیریم . با این کار تولید یک خطای کلی که به آن Global error گفته می شود می کند . تعداد دفعاتی که ما این کار را انجام می دهیم با توجه به شکل نمودار روبرو

برابر است با : $n = \frac{b-a}{h}$

با توجه به مقدار h که در بالا داریم هنگام محاسبهٔ خطای کلی توان h مورد نظر به اندازه یک واحد کمتر از زمانی است که تنها بین ۲ نقطه در نظر می گیریم و در نتیجه دقت ما کمتر می گردد.

$* \; n=2 \longrightarrow$ در این شرایط ما ۳ نقطه داریم که برای این ۳ نقطه ما از روش انتگرال گیری سیمپسون $\frac{1}{3}$ استفاده می کنیم که در نتیجه مقدار خطا و رابطه انتگرال گیری زیر استفاده می کنیم :

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + f_2\right) \qquad \text{میزان خطا} : \frac{-h^5}{90} f^{(4)}(\gamma) \quad x_0 < \gamma < x_2$$

$* \; n=3 \longrightarrow$ در این شرایط ما ۴ نقطه داریم که برای این ۴ نقطه از روش انتگرال گیری سیمپسون $\frac{3}{8}$ استفاده می کنیم که در نتیجه مقدار خطا و رابطه انتگرال گیری زیر را استفاده می کنیم :

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{8}\left(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3\right) \qquad \text{میزان خطا} : \frac{-3h^5}{80} f^{(4)}(\gamma)$$

همانطور که ملاحظه می کنید دقت قانون $\frac{1}{3}$ سیمپسون بیشتر از $\frac{3}{8}$ آن است. بنابراین دقت فرمول ذوج بیشتر خواهد بود.

$* \; n=4 \longrightarrow$ در این شرایط ما ۵ نقطه داریم که برای این ۵ نقطه از روش انتگرال گیری با قانون Bool's استفاده می کنیم که در نتیجه رابطه انتگرال گیری و مقدار خطا ما به صورت زیر خواهد شد :

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = \frac{2h}{45}\left(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4\right)$$

$$\text{میزان خطا} \longrightarrow \frac{-8}{945} h^7 f^{(6)}(\gamma)$$

$* \; n=5 \longrightarrow$ در این شرایط ما ۶ نقطه داریم که برای این ۶ نقطه از روش انتگرال گیری با قانون "نیوتن - Cot's" استفاده می کنیم که در نتیجه رابطه انتگرال گیری و مقدار خطا ما به صورت زیر خواهد شد :

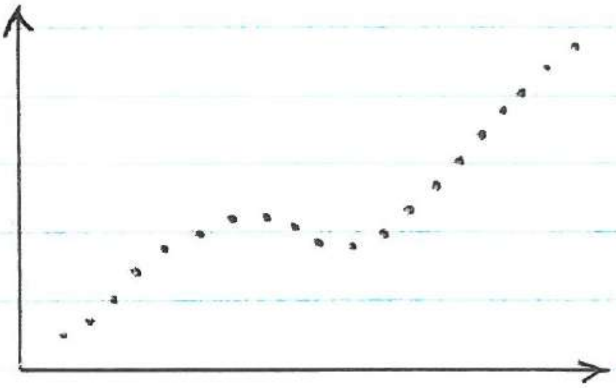
$$\int_{x_0}^{x_5} f(x)\,dx = \frac{5h}{288}\left(19f_0 + 75f_1 + 50f_2 + 50f_3 + 75f_4 + 19f_5\right)$$

$$\text{میزان خطا} : \frac{-275h^7}{12096} f^{(6)}(\gamma)$$

باتوجه به مقادیر گوناگون n به طور مختصر روابط انتگرال گیری ما به صورت زیر خواهد بود:

n	تعداد نقاط	فرمول	میزان خطا	روش انتگرال گیری
۱	۲	$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}(f_0+f_1)$	$\frac{-h^3}{12} f^{(2)}(\xi)$	ذوزنقه
۲	۳	$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(f_0+4f_1+f_2)$	$\frac{-h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$	سیمپسون $\frac{1}{3}$
۳	۴	$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{8}(f_0+3f_1+3f_2+f_3)$	$\frac{-3h^5}{80} f^{(4)}(\xi)$	سیمپسون $\frac{3}{8}$
۴	۵	$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = \frac{2h}{45}(7f_0+32f_1+12f_2+32f_3+7f_4)$	$\frac{-8h^7}{945} f^{(6)}(\xi)$	قانون Bools
۵	۶	$\int_{x_0}^{x_5} f(x)dx = \frac{5h}{288}(19f_0+75f_1+50f_2+50f_3+75f_4+19f_5)$	$\frac{-275h^7}{12096} f^{(6)}(\xi)$	نیوتن_Cot's

اگر ما بخواهیم فرمولها را برای نقاط بیشتر حساب کنیم به مانند موردی که در نمودار شکل زیر مشاهده می کنید،



برای ~~حل~~ انتگرال گیری ۲ کار می توان کرد یا رابطه انتگرال گیری را به اندازه نقاط گسترش دهیم که در آن صورت فرمول انتگرال گیری ما بسیار طولانی و پیچیده خواهد شد و یا اینکه بین هر ۲ نقطه یک رابطه ذوزنقه و یا بین هر ۳ نقطه یک سیمپسون $\frac{1}{3}$ و... و در نهایت به صورت قانون ترکیبی به کار می بریم.

برای روش ترکیبی ما برای نقطه ابتدا $(a = x_0)$ و برای نقطه انتها $(b = x_m)$ و تعداد نقاط m در نظر می گیریم که در آن صورت $\left(h = \frac{b-a}{m}\right)$ خواهد بود. باتوجه به این فرضیات رابطه ذوزنقه ای ما به صورت زیر در می آید:

$$\text{قانون ذوزنقه} \Rightarrow \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}(f_0+f_1) \longrightarrow \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{b-a}{2m}(f_0+f_1)$$

بین هر ۲ نقطه از نمودار یک قانون ذوزنقه اعمال می کنیم و در نهایت همه آنها را با همدیگر جمع می کنیم که در نهایت داریم:

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx = \underbrace{\frac{b-a}{2m}(f_0+f_1)}_{\text{بین نقطه های اول و دوم}} + \underbrace{\frac{b-a}{2m}(f_1+f_2)}_{\text{بین نقطه های دوم و سوم}} + \cdots + \underbrace{\frac{b-a}{2m}(f_{m-1}+f_m)}_{\text{بین نقطه های } m \text{ و } m+1}$$

آنگاه در نهایت با جمع کردن تمام روابط و ساده کردن آنها خواهیم داشت :

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx=\frac{b-a}{2m}\left(f_0+2f_1+2f_2+\dots+2f_{m-1}+f_m\right)$$

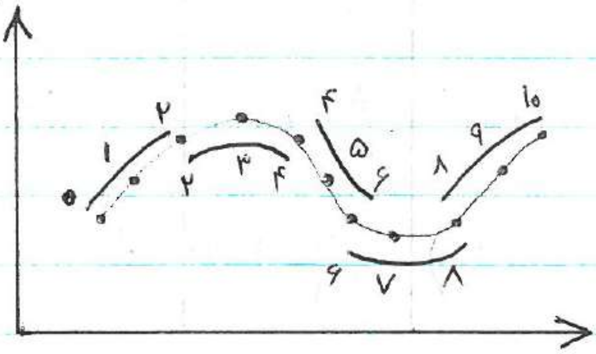
اگر همین کارهایی را که برای قانون ذوزنقه ای گفته شد ، برای قانون $\frac{1}{3}$ سیمپسون انجام بدهیم و سپس هر ۳ نقطه این عملیات را اعمال کنیم در نهایت برای ما رابطه زیر حاصل می شود . شرط استفاده از این رابطه این است که تعداد جملات ما می بایست حتماً زوج باشد. بنابرین برای $\frac{1}{3}$ سیمپسون خواهیم داشت :

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx=\frac{b-a}{3m}\left(f_0+4f_1+2f_2+4f_3+2f_4+\dots+2f_{m-2}+4f_{m-1}+f_m\right)$$

ضرایب f زوج : ۲

ضرایب f فرد : ۴

ضرایب f اول و آخر : ۱



نحوهٔ عمل ما در سیمپسون $\frac{1}{3}$ در نمودار روبرو نشان داده شده است . اما این رابطه همیشه برقرار نیست مثلاً هنگامی که ما تعداد جملاتمان ضریب ۳ باشد این روش کارایی ندارد . در این مواقع می بایست یا از روش ذوزنقه استفاده کرد و یا روش سیمپسون $\frac{3}{8}$ که در زیر رابطه نهایی سیمپسون $\frac{3}{8}$ را با شرط ضریب ۳ بودن تعداد جملات f به صورت زیر محاسبه کرده ایم :

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx=\frac{3(b-a)}{8m}\left(f_0+3f_1+3f_2+2f_3+3f_4+3f_5+2f_6+\dots+2f_{m-3}+3f_{m-2}+3f_{m-1}+f_m\right)$$

(ضریب جملات اول و آخر ← ۱ / ضریب جملات ضریب ۳ ← ۲ / ضریب جملات غیر مضرب ۳ ← ۳)

از فرمولهای انتگرال گیری برای تابع زیر می توان بین a و b به تعداد یکسان نقاط هم فاصله ایجاد نمود و بعد $f(x)$ را در مقاطع مختلف تعیین کرد :

$$\int_a^b f(x)dx=\checkmark \qquad \left\{\begin{array}{ll} a=x_0 & f_0 \\ x_1 & f_1 \\ x_2 & f_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & f_{n-1} \\ b=x_n & f_n \end{array}\right.$$

حال اگر h را نصف کنیم ، تعداد نقاط ما ۲ برابر می شود . حاصل آن یک تعداد عدد می گردد ، سپس عددی به دست می آید که این عددها نسبت به جواب قطعی ما همواره یک مقدار خطا را بیان می کنند

حل معادلات دیفرانسیل با روش عددی :

با فرمولهایی که تا به حال برای مشتق گیری و انتگرال گیری عددی گفته بودیم برای حل معادلات دیفرانسیل به روش عددی می خواهیم استفاده بنماییم . به طور کلی معادلات دیفرانسیل به ۲ دسته کلی زیر تقسیم بندی می شود :

(۱) معادلات دیفرانسیل معمولی ODE : این معادلات تنها یک متغیر مستقل دارد .

(۲) معادلات دیفرانسیل جزئی PDE : این معادلات بیش از یک متغیر مستقل دارد .

در بیشتر سیستمهای مهندسی با دستگاهی از معادلات پاره ای ومعمولی بیان می شوند که در اول کار ~~معمولیست~~ ما معادلات ODE را بیان می کنیم :

(۱) معادلات ODE :

یک معادله ODE مرتبه اول را در نظر می گیریم :

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad \begin{cases} x \Rightarrow \text{متغیر مستقل} \\ y \Rightarrow \text{متغیر وابسته} \end{cases}$$

معادله بالا ، معادله مرتبه اول معمولی است .

برای حل معادلات دیفرانسیل بالا می بایست ثابت انتگرال گیری و شرایط مرزی آن بیان شود که عبارتست از :

$$\text{شرط اولیه} \quad \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$$

اگر معادلات معمولی (ODE) برای مرتبه n در نظر بگیریم ، داریم :

$$y^{(n)} + g_1 y^{(n-1)} + g_2 y^{(n-2)} + \dots + g_{n-1} y' + g_n y = P(x,y)$$

به طور کلی معادله معمولی مرتبه n به معادله ای گفته می شود که g های آن مقادیر ثابت و یا تابعی از x و y یا هرکدام از آنها باشد به عبارت دیگر داریم :

$$g = \text{ثابت}$$

$$g = f(x)$$

$$g = f(x,y)$$

اگر g ها ثابت باشد ، می توان به راحتی از راه حل تحلیلی استفاده نمود .

اگر g ها تابع x باشد ، استفاده از راه حل تحلیلی بسیار مشکل و پیچیده می باشد

اگر g ها تابعی از x و y باشد ، راه حل تحلیلی آنقدر مشکل و طولانی می گردد که تقریباً حل تحلیلی غیر عملی می گردد

دراین شرایط ما به روشهای عددی روی می آوریم ، در این حالت معادله مرتبه n را به $n-1$ معادله مرحله ۲ تبدیل می کنیم که به عنوان مثال برای معادله روبرو داریم :

$$x\frac{d^3y}{dx^3} + y\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = xy^2$$

برای معادله ای که در بالا داریم تغییر متغیر زیر را اعمال می کنیم :

$$y = u \qquad \frac{dy}{dx} = v \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = w$$

با جاگذاری تغییر متغیرها در معادله اصلی در نهایت ما داریم:

$$x\frac{dW}{dx}+UW+xV^2=xU^2$$

به عبارت دیگر رابطه‌ای که در بالا نوشته‌ایم را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{dW}{dx}=\frac{1}{x}\left[xU^2+xV^2-UW\right]$$

$$\frac{dV}{dx}=W \qquad \frac{dU}{dx}=V$$

همانطور که مشاهده می‌کنید ۳ معادله مرتبه اول داریم که دستگاه معادلات باید برای آن حل کرد. دستگاه معادلات را به صورت روبرو می‌توان نوشت:

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x,y,w,z)$$

$$\frac{dz}{dx}=f_2(x,y,w,z)$$

$$\frac{dw}{dx}=f_3(x,y,z,w)$$

همچنین ما می‌توانیم دستگاهی داشته باشیم که n معادله برای آن بنویسیم. به عنوان مثال در راکتور لوله‌ای می‌توان برای جهت حرکت x، غلظت، انرژی، دما و فشار و ... یک معادله نوشت. در تمام این معادلات یک متغیر دخیل است. کاری که نیاز است ما در اینجا انجام دهیم این است که ذاتاً هرکدام از آنها را بدست می‌آوریم و آن را با معادله درجه n بدست می‌آوریم. کاری ما در اینجا می‌خواهیم انجام بدهیم این است که برای معادله مرتبه ۳ ما نیازمند ۳ شرط هستیم و همه شرایط به ازای یک مقدار مشخص از متغیر مستقل می‌باشد.

U و V و W یک مقدار مشخص از x است که داریم:

$$x=x_0\begin{cases}U=U_0\\V=V_0\\W=W_0\end{cases}$$

جواب یک معادله با مشتقات جزئی به شرایط موجود در مرز (شرط مرزی یا Bundery Value Problem)
و در صورت وابستگی به زمان به شرایط موجود در زمان اولیه (شرط اولیه یا Initial Value Problem)
بستگی دارد. از این رو برای هرکدام از شرایط مرزی و اولیه می‌توانیم بگوییم:

* شرط اولیه IVP: برای حل معادلات با مشتقات جزئی در حالتهای ناپایدار که تابعیت زمانی هم وجود دارد مقدار تابع مجهول باید در زمان مشخص معلوم باشد که معمولاً این زمان لحظه صفر است و این شرط را شرط اولیه می‌نامیم.

* شرط مرزی BVP: در اکثر مسائل سه نوع شرط مرزی زیر بیان می‌گردد:

(۱) شرط مرزی نوع اول (دریکله): هرگاه مقدار متغیر وابسته بر روی مرزها معلوم باشد شرط مرزی را نوع اول می‌گویند.

(۲) شرط مرزی نوع دوم (نیومن): هرگاه مقدار مشتق متغیر وابسته بر روی مرزها معلوم باشد شرط مرزی را نوع دوم می‌گویند.

(۳) شرط مرزی نوع سوم (روبین): هرگاه شرط مرزی ترکیب خطی از ۲ شرط مرزی نوع اول و نوع دوم باشد آن را نوع سوم می‌گویند.

$$\frac{dy}{dx} = y' \qquad \begin{aligned} x &= x_0 \\ y &= y_0 \\ y'_0 &= f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

آنگاه ما برای بدست آوردن y از رابطه زیر استفاده می کنیم :

$$\int_{y_0}^{y_1} dy = \int_{x_0}^{x_1} y' dx$$

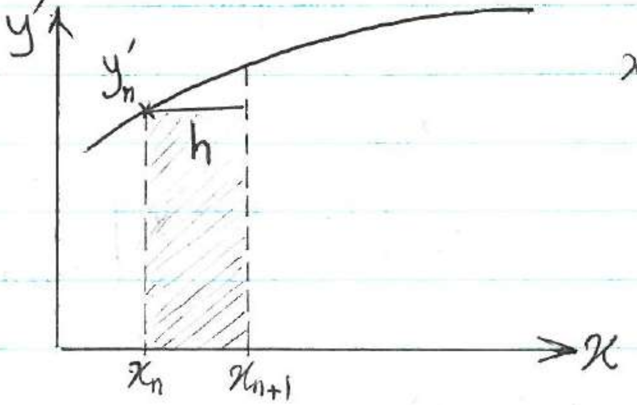
انواع حل معادلات ODE به روش انتخابی برای فرمول انتگرال گیری بالا برمی گردد حال برای تک تک مراحل ما رابطه محاسبه y مان به صورتهای زیر است :

$$\text{مرحله اول} \longrightarrow y = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} y' dx$$

$$\text{مرحله دوم} \longrightarrow y = y_0 + \int_{x_1}^{x_2} y' dx$$

$\vdots$

$$\text{مرحله } n \text{ ام} \longrightarrow y = y_0 + \int_{x_n}^{x_{n+1}} y' dx$$



حال نمودار y' برحسب x را رسم می کنیم :
با محاسبه نمودن y' برحسب x بین نقاط x_n و x_{n+1}
برای ما مقدار $\int_{x_n}^{x_{n+1}} y' dx$ در رابطه انتگرال گیری
مرحله n ام مشخص می گردد.
برای این کار سطح زیر نمودار را با ساده ترین
روش یعنی روش مستطیلی حساب می کنیم
که این مقدار عبارت خواهد شد از :

$$(\text{قانون اویلر}) \qquad y_{n+1} = y_n + y'_n h \longleftarrow y'_n = f(x_n, y_n)$$

روش کاری که در بالا بدست آمد به قانون اویلر شهرت دارد . قانون اویلر همانند بسط تیلوری می ماند که پس از جمله اول آن را قطع نموده باشند .

یادآوری بسط تیلور :
$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-x_0)^n}$$

مشاهده می کنیم که ما در این روش خطای زیادی داریم . y' برحسب x خطا نداشته باشد ، آن هنگام نمودار ما خطی است . بنابراین برای رسیدن به خطا کمتر h را تا حد ممکن کوچک در نظر می گیریم تا خطاها به حداقل برسد و آن هنگام محاسبات ما زیاد می گردد .

توجه

تعداد شرایط مرزی لازم مربوط به یک متغیر مستقل عبارتست از مرتبه معادله دیفرانسیل نسبت به آن متغیر می باشد

تعداد شرایط اولیه لازم عبارتست از مرتبه معادله دیفرانسیل نسبت به زمان می باشد. به طور خلاصه :

(مرتبه نسبت به زمان = تعداد شرایط اولیه) (مرتبه معادله = تعداد شرایط مرزی)

ما برای حل معادله دیفرانسیل نیازمند هستیم یک مقدار اولیه را بیان نماییم. روش حل این معادلات شبیه به روش گاوس - سایدل است و برای حل آن می توان از روش گاوس - سایدل استفاده کرد.

یادآوری

در ابتدای جزوه پیرامون روش حذفی گاوس (گاوس - سایدل) به طور کامل توضیح داده شده است و به طور خلاصه این روش تبدیل ماتریس ضرایب به ماتریس بالا مثلثی به صورت زیر است :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{پس از اعمال روش}} \begin{vmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1^{(0)} \\ C_2^{(1)} \\ C_3^{(2)} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow a_{ij}^{(K)} = a_{ij}^{(K-1)} - \frac{a_{ik}^{(K-1)}}{a_{KK}^{(K-1)}} \times a_{kj}^{(K-1)} \qquad x_n = \frac{C_n}{a_{nn}}$$

$$\Rightarrow C_i^{(K)} = C_i^{(K-1)} - \frac{a_{ik}^{(K-1)}}{a_{KK}^{(K-1)}} \times C_k^{(K-1)} \qquad x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left[C_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_i\right]_{i=n+1,\dots,1}$$

تذکر

این یادآوری اشتباهی نوشته شده گاوس - سایدل با حذفی گاوس فرق می کند.

ببخشید!

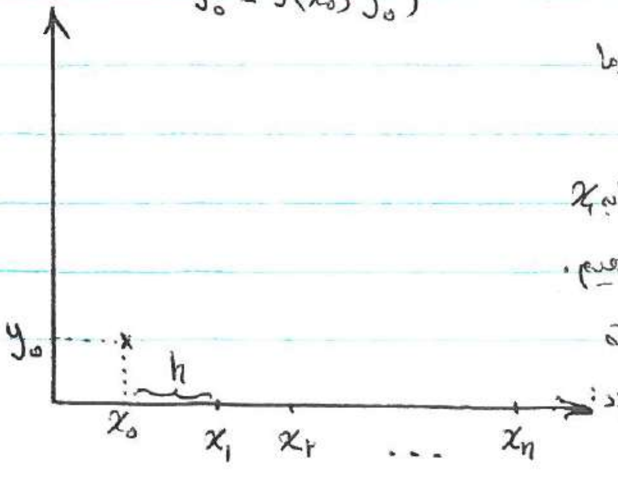
برای این کار روشهایی برای حل مساله مرتبه اول حل کنیم که داریم :

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$$

وقتی ما یک نقطه معادله را حل می کنیم به صورت بالاست. اما زمانی که ما برای تعداد بیشتری از نقاط قصد داشته باشیم که معادله را حل کنیم در آن صورت ما مشخص شدن x_0 و y_0 مقدار y'_0 به صورت زیر در می آید :

$$y'_0 = f(x_0, y_0)$$

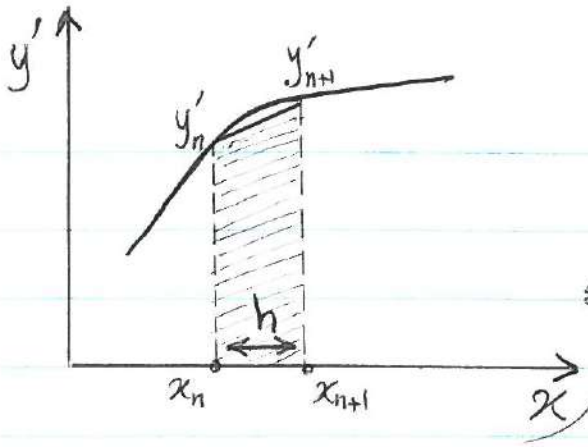
قانون اویلر :



مقادیر بالا برای ما مشخص شده است و نمودار ما به صورت روبرو در اختیار ما قرار دارد :

در شکل روبرو یک قدم به جلو می رویم از x_0 تا به x_1 می رسیم. بعد به x_2 و ... تا x_n ادامه می دهیم.

اگر همین کار را مطابق شکل روبرو و مطالب گفته شده در بالا ادامه دهیم رابطه صفحه بعد ایجاد می گردد :



اویلر اصلاح شده :

اگر بخواهیم دقت محاسبات ما افزایش پیدا کند سطح زیر نمودار را با روش ذوذنقه ای حساب می کنیم. در آن صورت داریم:

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\left(y'_n+y'_{n+1}\right)$$

اتفاقی که در اینجا می افتد این است که x_n و y_n و y'_n و x_{n+1} هم مشخص است و آنها برابرند با:

$$y'_n=f(x_n,y_n) \qquad x_{n+1}=x_n+h$$

ولیکن y_{n+1} و y'_{n+1} برای ما مجهول است:

$$y'_{n+1}=f(x_{n+1},y_{n+1}) \qquad y_{n+1},\ y'_{n+1}\ ?$$

برای همین ما از روش پیشرو و تصحیح کن استفاده می کنیم. با این کار y_{n+1} را با کمک روش اویلر تخمین می زنیم
برای این کار ما می نویسیم:

$$y^*_{n+1}=y_n+y'_i\cdot h$$

چون از قانون اویلر استفاده کرده ایم، بنابرین y_{n+1} ما مقدار قطعی نیست از اینرو آن را (*) دار می نویسیم.
برمبنای y^*_{n+1} مقدار y'^*_{n+1} را بدست می آوریم که آن هم (*) دار است.

$$y'^*_{n+1}=f(x_{n+1},y^*_{n+1})$$

y'^*_{n+1} ما هم متفاوت است بنابرین آن را در رابطه ذوذنقه قرار می دهیم و داریم:

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\left(y'_n+y'^*_{n+1}\right)$$
(Heun) قانون اویلر اصلاح شده

$$y'_{n+1}=f(x_{n+1},y_{n+1})$$

به طور خلاصه مراحلی که ما برای این روش انجام دادیم عبارتست از: (PECE)

1. مرحله پیشگویی Predictor $y^*_{n+1}=y_n+y'_n\cdot h$
2. محاسبه مشتق Evalute derivitive $y'^*_{n+1}=f(x_{n+1},y^*_{n+1})$
3. مرحله تصحیح مقدار Corrector $y'_{n+1}=f(x_{n+1},y^*_{n+1})$
4. محاسبه مشتق دیگر Evalute derivitive $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\left(y'_n+y'^*_{n+1}\right)$

ما مقدار تصحیح شده را با مقدار پیش بینی شده مقایسه می کنیم. اگر خطا نداشته باشیم، یعنی کار ما دقیق بوده است
ما عبارت روبرو را با Tolerance مقایسه می کنیم:

$$\left|y_{n+1}-y^*_{n+1}\right|<Tolerance$$

اگر مقدار خطا از Toleranc کمتر باشد y'_{n+1} را حساب می کنیم وگرنه y'^*_{n+1} جدید باید بدست آید و بدین ترتیب
حلقه جدید ایجاد می گردد.

به طور کلی آنچه گفته شد به صورت نمادین عبارتست از:

$$y^*_{n+1} = y_n + y'_n h$$

$$y'^*_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$$

$$|y_{n+1} - y^*_{n+1}| < Tolerance$$

نه

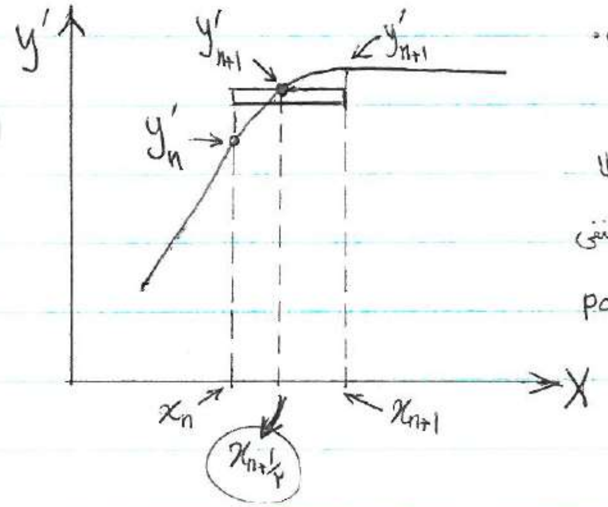
بله

$$y'_{n+1} = f(x_{n+1}, y^*_{n+1})$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(y'_n + y^*_{n+1})$$

روش Polygon:

حال نموداری که ما بررسی می کردیم را یکبار دیگر درنظر می گیریم، در این حالت برای کم شدن میزان خطا به جای اینکه به اندازه h جلو برویم به اندازه $\frac{h}{2}$ جلو می رویم. آنگاه $x_{n+1/2}$ بدست می آید (شکل دقیق نیست) در این حالت مقداری خطا ایجاد می گردد. با توجه به شکل این خطا مقداری مثبت و مقداری منفی است، که این خطاهای مثبت و منفی درنهایت خطای کل را کاهش می دهد. به این روش polygon می گویند و عبارتست از:



$$y_{n+1} = y_n + h \cdot y'_{n+1/2}$$

ما $y'_{n+1/2}$ را نداریم که آن عبارتست از:

$$y'_{n+1/2} = f(x_{n+1/2}, y_{n+1/2}) \qquad \begin{cases} x_{n+1/2} = x_n + \frac{h}{2} \\ y_{n+1/2} = y_n + \frac{h}{2} y'_n \end{cases}$$

حالا ما $y^*_{n+1/2}$ را بدست می آوریم که برای این منظور داریم:

$$y^*_{n+1/2} = y_n + \frac{h}{2} y'_n$$

سپس برای ما y'_{n+1} به صورتهای زیر بدست خواهد آمد:

$$y'^*_{n+1/2} = f(x_{n+1/2}, y^*_{n+1/2})$$

$$y_{n+1} = y_n + h\, y'^*_{n+1/2}$$

$$y'_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$$

اگر درواقع بخواهیم یک حلقه تکرار را اعمال کنیم می بایست $y_{n+1/2}$ را بین مقادیر $y^*_{n+1/2}$ و y_{n+1} بدست آوریم که عبارت خواهد شد از:

$$y_{n+1} = y_n + y^*_{n+1/2} \cdot \frac{h}{2}$$

حال ما تفاوت $y_{n+1/2}$ و $y^*_{n+1/2}$ را با یک Tolerance به صورت زیر مقایسه می نماییم:

$$|y_{n+1/2} - y^*_{n+1/2}| < Tolerance$$

اگر مقدار ما کمتر از Tolerance باشد در آن هنگام به خط بعدی می رویم:

$$y_{n+1} = y_n + h\, y^*_{n+1}$$

$$y'_{n+1} = f\left(x_{n+\frac{1}{2}} , y_{n+\frac{1}{2}}\right)$$

اگر مقدار ما بیشتر از Tolerance باشد در آن هنگام به جمله قبل می رویم:

$$y^*_{n+\frac{1}{2}} = f\left(x_{n+1/2} , y_{n+1/2}\right)$$

آنچه در بالا گفته شد به صورت نمادین به صورت زیر عمل می کنیم:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot y'_{n+1/2}$$

$$y'_{n+1/2} = f\left(x_{n+1/2} , y_{n+1/2}\right)$$

$$y^*_{n+1/2} = f\left(x_{n+1/2} , y^*_{n+1/2}\right)$$

$$y_{n+1/2} = y_n + y^*_{n+1/2} \cdot \frac{h}{2}$$

نه

$$\left| y_{n+1/2} - y^*_{n+1/2} \right| < Tolerance$$

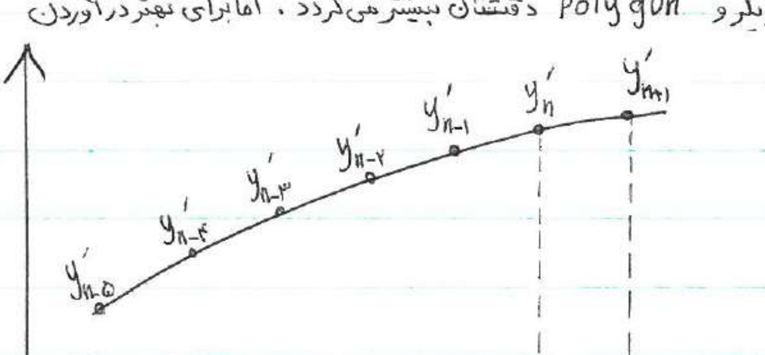
بله

$$y_{n+1} = y_n + h\, y'^*_{n+\frac{1}{2}}$$

$$y'_{n+1} = f\left(x_{n+1} , y_{n+1}\right)$$

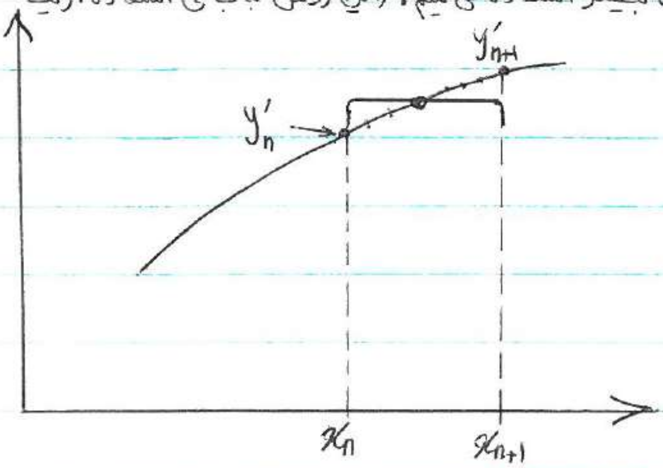
Multy Step:

روش مستطیلی خطا زیاد دارد و ذوزنقه و اویلر و Polygun دقتشان بیشتر می گردد. اما برای بهتر درآوردن سطح زیر منحنی قصد داریم تا به جای استفاده از ۲ نقطه از نقاط بیشتری استفاده بنماییم. با اضافه کردن نقاط دقت عملیات ما بیشتر می شود و اگر نقاط قبلی را داشته باشیم می توانیم یک چندجمله ای از آن عبور دهیم. این چندجمله ای را به n+1 قسمت امتداد



می دهیم و اطلاعات آن را از قبل بدست می آوریم. این کار ما منجر به محاسبه یک فرمول برای انتگرال گیری می شود و سطح زیر منحنی را حساب می کند. اگر نقاط موجود باشد با فرمول انتگرال گیری پسرو (Backward) بدست می آوریم به این روش Multy Step می گویند. ما برای حل نیازمندیم که اطلاعاتی از قبل داشته باشیم. این نقاط در مرحله فعلی بدست آمده است و احتیاج به اطلاعاتی از قبل داریم. از اینرو خود به خود این روش آغاز نمی گردد. بنابراین ابتدا از روش Single Step استفاده می کنیم و بعد سراغ روش Multy Step می رویم.

در روش Single step هرچقدر تعداد نقاط بیشتر، دقت هم بیشتر می گردد. از روش single step چندمرحله ای برای محاسبه سطح زیر نمودار با دقت بیشتر استفاده می کنیم. در این روش به جای استفاده از یک نقطه بین x_n و x_{n+1} مطابق شکل روبرو نقاط بیشتری حساب می کنیم و با دقت بیشتری سطح زیر نمودار حساب می شود. حتی اگر از نقاط بیشتر هم استفاده کنیم باز هم یک مقدار خطا داریم ولی با این کار دقت کار ما بالاتر و درجه h خطا نیز بیشتر می گردد، در ذوزنقه درجه h، ۳ می باشد. در سیمپسون ۵ می شود. بنابراین با افزایش نقاط درجه خطا کمتر می شود. با افزایش نقاط می توان با اندازه h بزرگتر به همان میزان خطای h کوچکتر برای نقاط کمتر رسید.



روش رانگ-کوتا:

روش اویلر یک رانگ-کوتای مرتبه یک، اویلر اصلاح شده و polygon رانگ کوتا مرتبه ۲ است. رانگ کوتا با لحاظ کردن نقاط بیشتر از قبل و یا تعداد نقاط بیشتر را در فواصل x_n و x_{n+1} بدست می آوریم و انتخاب آن برای استفاده از بسط تیلور راحت تر می شود که برای معادله خود داریم:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = y' \qquad \begin{aligned} x &= x_0 \\ y &= y_0 \\ y'_0 &= f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

برای محاسبه y_{n+1} داریم:

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'\, dx \qquad (A)$$

از طرفی y_{n+1} را با کمک بسط تیلور می توان بدست آورد:

$$y_{n+1} = y_n + y'_n h + y''_n \frac{h^2}{2!} + y'''_n \frac{h^3}{3!} + \cdots \qquad (B)$$

اگر این کار را انجام دهیم که از معادلات قبل بدست می آید، می توان سطح زیر منحنی را محاسبه کرد و در نهایت به عبارت زیر می رسیم که از روش پیرو (Backward) بدست می آید و با آن می توانیم سطح زیر نمودار را حساب نمائیم:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^{j} \beta_i\, y'_{n+i}$$

در رابطه بدست آمده در بالا، j بستگی به تعداد مراحل دارد و اینکه y' در کجا احتیاج می شود بدست می آید.

در نهایت برای رانگ-کوتا با یکسری عملگر (Function) داریم:

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{v} \omega_i k_i$$

در رابطه صفحه قبل برای مقادیر ω_i و k_i و V داریم :

$\omega_i \rightarrow$ (فاکتور وزنی) weight factor

$k_i \rightarrow$ (عملگر ارزشی) function evaluation

$V \rightarrow$ (خطا متناسب با روش) related to order of the Method

رابطه کلی k_i در فرمول y_{n+1} به صورت زیر است :

$$k_i = hf\left(x_n + c_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j\right) \qquad \boxed{c_1 = 0}$$

با توجه به رابطه کلی k_i که در بالا بدست آمده است ، مقدار k_1 تا k_4 برای رانگ کوتا مرتبه ۳ عبارت خواهد شد از :

$$k_1 = h.f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h.f(x_n + c_2 h, y_n + a_{21} k_1) \leftarrow \text{مقدار } k_1 \text{ از بالا داریم : } k_1$$

$$k_3 = h.f(x_n + c_3 h, y_n + a_{31} k_1 + a_{32} k_2) \leftarrow \text{مقدار } k_1 \text{ و } k_2 \text{ از رابطه های قبل}$$

$$k_4 = h.f(x_n + c_4 h, y_n + a_{41} k_1 + a_{42} k_2 + a_{43} k_3) \leftarrow \text{مقادیر } k_1 \text{ و } k_2 \text{ و } k_3 \text{ از رابطه های قبلی}$$

اگر این جدول رانگ کوتا را برای روش مورد نظر داشته باشیم و اگر برای رانگ کوتا مرتبه ۳ داشته باشیم آنگاه برای محاسبه k_1 و k_2 و k_3 و همچنین ω_1 و ω_2 و ω_3 جدولی مانند روبرو حساب می کنیم . در جدول روبرو ما ۸ مجهول داریم که برای محاسبه آنها رابطه رانگ - کوتای مرتبه سوم را می بایست به گونه ای منطبق بر بسط تیلور بکنیم . بسط تیلور دقیقاً تا جمله سوم را پوشش می دهد . و رانگ - کوتا مرتبه ۴ یک k_4 به صورت زیر مطرح می کند :

$$\begin{array}{c|ccc} c_1=0 & & & \\ c_2 & a_{21} & & \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & \\ \hline & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{array}$$

$$k_4 = hf(x_n + c_4 h, y_n + a_{41} k_1 + a_{42} k_2 + a_{43} k_3)$$

برای رانگ کوتا مرتبه ۴ جدولی به صورت روبرو داریم : رابطه بدست آمده برای رانگ کوتا مرتبه ۳ را که در جدول بالا حساب شده است وقتی با بسط تیلور مقایسه کنیم متوجه می شویم که تنها ۶ متغیر بدست می آید و ۸ تا مجهول که ۲ پارامتر آزاد داریم و بر مبنای آن پارامتر آزاد معادلات مختلفی برای رانگ کوتا مرتبه سوم می دهد .

$$\begin{array}{c|cccc} c_1=0 & & & & \\ c_2 & a_{21} & & & \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & & \\ c_4 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & \\ \hline & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \end{array}$$

اگر برای رانگ کوتاهای مراتب بعدی بخواهیم همین کار را انجام بدهیم آنگاه خواهیم داشت :

$\leftarrow$ رانگ کوتا مرتبه ۴ : ۱۳ مجهول داریم که ۱۱ معادله از بسط تیلور بدست می آید $\leftarrow$ ۲ پارامتر آزاد داریم .

$\leftarrow$ رانگ کوتا مرتبه ۵ : ۲۱ مجهول داریم که ۱۶ معادله از بسط تیلور بدست می آید $\leftarrow$ ۵ پارامتر آزاد داریم .

حال در ادامه هرکدام از رانگ کوتاها را مورد بررسی قرار می دهیم . اگر بخواهیم برای رانگ کوتا مرتبه سوم بنویسیم داریم :

$$\frac{dy}{dx} = f = y'$$

$$y'' = \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = f_x + f_y . f$$

وقتی آن را بسط بدهیم خواهیم داشت :

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{df}{dx}\right)\frac{dx}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{df}{dx}\right)\frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f\right) f$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} f + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] f$$

$$= f_{xx} + f_{xy} . f + f_y . f_x + f\left[f_{xy} + f_{yy} . f + f_y^2\right]$$

$$= f_{xx} + 2 f_{xy} . f + f^2 f_{yy} + f_y \left[f_x + f f_y\right]$$

۸ جمله معادلاتی که ما داریم عبارتست از :

f_n	$(f^2 f_{yy})_n$
$(f_x)_n$	$(f_y\ f_x)_n$
$(f f_y)_n$	$[f (f_y)^2]_n$
$(f_{xx})_n$	$(f f_{xy})_n$

حال اگر k_1 و k_2 و k_3 را با کمک بسط تیلور بسط دهیم و آن را در عبارت زیر جا گذاری کنیم داریم :

$$y_{n+1} = y_n + \omega_1 k_1 + \omega_2 k_2 + \omega_3 k_3$$

عبارت حاصل شده را با عبارت اصلی مقایسه کنیم و از مقایسه ها مقادیر مجهول حساب می شود که ۲ رابطه از آنها بدست نمی آید و حذف می گردند. اگر k_1 و k_2 و k_3 را بسط دهیم آنگاه خواهیم داشت :

$$k_1 = h . f(x_n, y_n) = h f_n$$

$$k_2 = h . f(x_n + C_2 h \,,\, y_n + a_{21} k_1)$$

با کمک بسط تیلور رابطه‌ی ما به صورت زیر در می آید :

$$k_2 = h\left[f_n + C_2 h \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_n + a_{21} k_1 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_n + \frac{(C_2 h)^2}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]_n + \frac{(a_{21} k_1)^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_n + (C_2 h)(a_{21} k_1)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_n\right]$$

مقادیر k_1 را از عبارت بدست آمده در قبل محاسبه می نماییم

برای محاسبهٔ K_3 نیز داریم :

$$K_3 = h\Big[f_n + (C_3 h)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_n + (a_{31}K_1 + a_{32}K_2)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_n + \left(\frac{C_3 h}{2!}\right)^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_n +$$

$$+ \frac{(a_{31}K_1 + a_{32}K_2)^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_n + (C_3 h)(a_{31}K_1 + a_{32}K_2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_n\Big]$$

در رابطه بالا مقادیر K_1 و K_2 و K_3 را که بدست آمده است جاگذاری می کنیم و آنگاه در رابطه زیر K_1 و K_2 و K_3 را قرار می دهیم و داریم :

$$y_{n+1} = y_n + \omega_1 K_1 + \omega_2 K_2 + \omega_3 K_3$$

معادلات گفته شده در بالا را با بسط تیلور مقایسه می کنیم و در نهایت برای مقادیر معادلات داریم :

$$f_n : \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$$

$$(f_x)_n : \omega_2 C_2 + \omega_3 C_3 = \frac{1}{2}$$

$$(f f_y)_n : \omega_2 a_{21} + \omega_3 (a_{31} + a_{32}) = \frac{1}{2}$$

$$(f_{xx})_n : \frac{1}{2}\omega_2 C_2^2 + \frac{1}{2}\omega_3 C_3^2 = \frac{1}{6}$$

$$(f f_{xy})_n : \omega_2 C_2 a_{21} + \omega_3 C_3 (a_{31} + a_{32}) = \frac{1}{3}$$

$$(f^2 f_{yy})_n : \frac{1}{2}\omega_2 a_{21}^2 + \frac{1}{2}\omega_3 (a_{31} + a_{32}) = 1/6$$

$$C_3 = a_{31} + a_{32}$$

$$(f_y f_x)_n : \omega_3 a_{32} C_2 = \frac{1}{6}$$

$$[f (f_y)^2]_n : \omega_3 a_{32} a_{21} = \frac{1}{6}$$

$$C_2 = a_{21}$$

از این رو جداول رانگ کوتا ما به صورت زیر در خواهد آمد :

جدول رانگ کوتا مرتبه ۳ کلاسیک است که میزان خطا عبارتست از

میزان خطا : $O(h^4)$

0			
$\frac{1}{2}$	$1/2$		
1	-1	2	
	$1/6$	$2/3$	$1/6$

برای رانگ کوتا مرتبه ۴ نیز جدولی مشابه در اختیار داریم :

جدول روبرو متعلق به رانگ کوتا مرتبه ۴ کلاسیک است که میزان خطا:

میزان خطا : $O(h^5)$

0				
$1/2$	$1/2$			
$1/2$	0	$1/2$		
1	0	0	1	
	$1/6$	$1/3$	$1/3$	$1/6$

توجه

به طور کلی جدول رانگ کوتا به شکل کلی زیر است :

C	a
	ω

مثال) ما جدول رانگ کوتا مرتبه ۳ کلاسیک را به صورت زیر در اختیار داریم :

با کمک روبرو معادله دیفرانسیل زیر را بدست آورید :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = y' \qquad \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{حل}}$ برای حل این معادله ما می بایست از رابطه زیر استفاده کنیم :

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{j=1}^{3} \omega_i k_i$$

در فرمول بالا مقادیر ω در جدول موجود است و برای محاسبه k_i از رابطه زیر استفاده می کنیم :

$$k_i = h f\left(x_n + c_i h \,,\, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j\right.$$

حال تک تک k_i ها عبارتست از :

$$k_1 = h \cdot f(x_n , y_n) \longrightarrow$$ مقادیر x_n و y_n را قرار می دهیم

$$k_2 = h \cdot f(x_n + c_2 h \,,\, y_n + a_{21} k_1) \xrightarrow{\text{از جدول}} k_2 = h f\left(x_n + \frac{h}{2} \,,\, y_n + \frac{1}{2} k_1\right)$$

$$k_3 = h f(x_n + c_3 h \,,\, y_n + a_{31} k_1 + a_{32} k_2)$$

$$k_3 = h f\left(x_n + \frac{1}{2} h \,,\, y_n - 1 k_1 + 2 k_2\right) \longleftarrow$$ از جدول قرار می دهیم

مقادیر k را که بدست آوردیم در معادله y_{n+1} جا گذاری می کنیم و در نهایت داریم :

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{j=1}^{3} \omega_i k_i \longrightarrow y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} \times k_1 + \frac{2}{3} k_2 + \frac{1}{6} k_3$$

توجه ← در این مساله مقادیر h و x_n و y_n مشخص نمی باشد بنابراین حل نیز کامل نیست

برای تخمین زدن رابطه خطا می توان از رانگ-کوتا مرتبه ۳ و ۴ استفاده نمود. از تفاوت این ۲ معیاری برای خطا بدست آورد. اگر خطا بین این ۲ مقدار قابل قبول باشد step در نظر گرفته شده برای h درست است وگرنه می بایست مقدار h را کوچکتر در نظر بگیریم. در این روش باید انتخاب درستی از اندازه step های h انجام بدهیم.

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x,y) = y' \qquad \begin{matrix} x = x_0 \\ y = y_0 \end{matrix}}$$

به طور خلاصه برای روابط رانگ - کوتا داریم :

$$k_i = hf\left(x_n + c_i h \,,\, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j\right) \qquad c_1 = 0$$

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{r} \omega_i k_i$$

جدول ضرایب رانگ - کوتا ←

$$\begin{array}{c|c} C & A \\ \hline & \omega \end{array}$$

رانگ کوتا مرتبه ۴

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & & & & \\ c_2 & a_{21} & & & \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & & \\ c_4 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & \\ \hline & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \end{array}$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + c_2 h \,,\, y_n + a_{21} k_1)$$

$$k_3 = hf(x_n + c_3 h \,,\, y_n + a_{31} k_1 + a_{32} k_2)$$

$$k_4 = hf(x_n + c_4 h \,,\, y_n + a_{41} k_1 + a_{42} k_2 + a_{43} k_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + (\omega_1 k_1 + \omega_2 k_2 + \omega_3 k_3)$$

رانگ کوتا مرتبه ۴ کلاسیک :

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + \tfrac{1}{2} h \,,\, y_n + \tfrac{1}{2} k_1)$$

$$k_3 = hf(x_n + \tfrac{1}{2} h \,,\, y_n + \tfrac{1}{2} k_2)$$

$$k_4 = hf(x_n + h \,,\, y_n + k_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

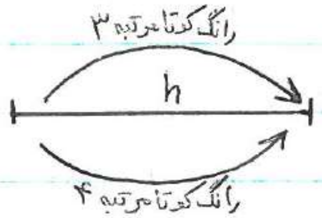
در روابط رانگ کوتا تعیین مقدار در فواصل خاص صورت می گیرد. ما $c_1 = 0$ قرار می دهیم و پس از جا گذاری مقادیر عملگرها به یک رابطه می رسیم. در نهایت ما انواع و اقسام روشهای رانگ کوتا را بدست می آوریم. اگر بخواهیم بسط تیلور را بر روی رانگ کوتا پوشش دهیم مشاهده می کنیم که تعداد معادلات با تعداد مجهولات برابر نیست. چون تعداد مجهولات بیشتر است بنابرین تعدادی رابطه مستقل ایجاد می گردد. از اینرو برای آن جدولی طراحی می کنیم که با کمک پارامترهای آن مقادیر k_i و در نهایت y_{n+1} را حساب می کنیم. در بالا برای درجه ۴ کلاسیک بدست آمده و از اعداد آن استفاده کردیم. با انجام این عملیات و با چند تعیین مقدارها می توانیم حل را به جلو ببریم. هرچه اندازهٔ گامهای ما (h) کوچکتر باشد کار ما ساده تر خواهد شد. روش رانگ کوتا مرتبه ۴ کلاسیک به خاطر سادگی و دقت زیاد کاربرد

فراوان دارد. در رانگ کوتا مرتبه ۴، برای خطا داریم:

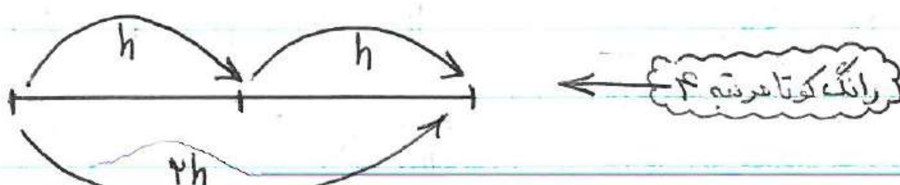
(Global) خطای کلی $\Rightarrow O(h^4)$ خطای محلی $\Rightarrow O(h^5)$

رانگ کوتا مراتب بالاتر را هم در نظر می‌گیرند ولیکن مرتبه ۴ کاربردی تر است. در رانگ کوتا مرتبه ۴ راه حل داخلی طولانی تر است. طول گام ما (h) از ۲ راه زیر بدست می‌آید:

(۱) از روشهای مختلف استفاده می‌کنیم مثلاً از رانگ کوتاهای مرتبه ۳ و ۴ با مرتبه های h در نظر می‌گیریم و تفاوت مقادیر نشانگر خطا است

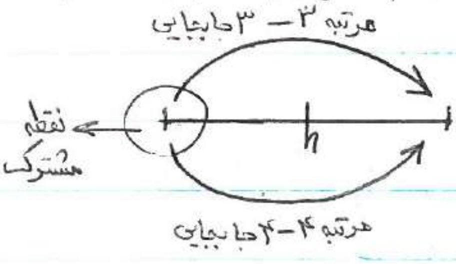


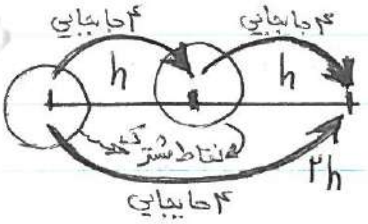
(۲) از مرتبه های مختلف h با معادلات رانگ کوتا یکسان استفاده می‌کنیم:



آنچه در بالا گفته شد می‌توان به نحوی تخمین خطا زد ولی هرکدام مشکلی دارند که عبارتست از:

(۱) برای رانگ کوتا مرتبه ۳ ما نیازمند ۳ جابجایی مقدار هستیم و برای رانگ کوتا مرتبه ۴ می‌بایست ۴ تا جابجایی مقدار بکنیم با توجه به اینکه نقطه ابتدای h ما نقطه مشترک است ما می‌بایست ۶ تا جابجایی انجام بدهیم





(۲) همانطور که مشاهده می‌کنید برای هر قسمت h با توجه به اینکه از رانگ کوتا مرتبه ۴ استفاده می‌کنیم می‌بایست ۱۲ عمل انجام دهیم و با توجه به ۲ نقطه مشترک در نهایت باید ۱۰ جابجایی مقدار انجام بدهیم *

همین جابگذاری مقادیر خود کارهی برد. به عنوان مثال در رانگ کوتا مرتبه M مقدار خطا عبارتست از:

خطای محلی $O(h^{m+1}) \longrightarrow 2\,\phi(h^{m+1}) \Rightarrow$ خطای مجموع برای ۲ گام با اندازهٔ h

$\searrow \phi(2h)^{m+1} \Rightarrow$ خطای مجموع برای گام با اندازهٔ 2h می‌شود

ما ϕ را مقداری ثابت در نظر می‌گیریم این در حالی است که مقدار ϕ در هر مکان متفاوت است. با داشتن موارد فوق مقدار خطا را به یکی از روشهای روبروی توان حدس زد:

$$y^*_{n+2} - y^{(h)}_{n+2} = 2\phi h^{m+1} \quad \text{I}$$

$$y^*_{n+2} - y^{(2h)}_{n+2} = \phi (2h)^{m+1} \quad \text{II}$$

برای تخمین زدن خطا و مقایسه آنها داریم:

$$\phi = \frac{y^{(h)}_{n+2} - y^{(2h)}_{n+2}}{(2^{m+1}-2)h^{m+1}}$$

اگر h بخواهیم میزان خطا را تخمین بزنیم آنگاه به طور خلاصه داریم:

$$\text{خطا کلی} \quad \mathcal{E}_t = \phi \cdot h^{m+1} = \frac{y^{(h)}_{n+2} - y^{(2h)}_{n+2}}{2^{m+1}-2}$$

معمولاً ما در ابتدای حل مساله h را کوچک و کوچکتر می کنیم تا به خطای قابل قبول برسیم. با چند بار انجام دادن در نهایت به h مناسب می رسیم. هر بار می بایست میزان خطا را حساب کنیم و جاگذاری را انجام بدهیم. روشی دیگر نیز وجود دارد، برای بدست آوردن مقدار خطا ما با یک Step به اندازهٔ h جلو می رویم و عددی که بدست می آید، تفاوت آن با عدد اول تخمینی از خطا است که رابطه آن در زیر نشان داده شده است:

$$\text{میزان خطا} \quad \mathcal{E}_t = y^{\text{مرتبه ۴}}_{n+1} - y^{\text{مرتبه ۳}}_{n+1}$$

$\boxed{y_{n+1} \text{ ها از رانگ کوتا بدست آمده}}$

☒ رانگ کوتا Fehlberg:

در روش رانگ کوتا Fehlberg، رانگ کوتا مرتبه ۴ و مرتبه ۵ را با هم ترکیب کرده ایم. تفاوت این ۲ رانگ کوتا به ما میزان خطا را می دهد. اگر مرتبه ۴ و ۵ را در نظر بگیریم، پارامترهای ناشی از یکسری جاگذاری، حساب می کنیم و از عملگر مشترک بهره می بریم. مقادیر c و a ها نیز در جدول مشخص هستند. در زیر روابط و مقادیر مربوط به رانگ کوتا Fehlberg را مشاهده می کنید:

An Algorithm for the Runge–Kutta–Fehlberg Method

$$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n),$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{4}, y_n + \frac{k_1}{4}\right),$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x_n + \frac{3h}{8}, y_n + \frac{3k_1}{32} + \frac{9k_2}{32}\right),$$

$$k_4 = h \cdot f\left(x_n + \frac{12h}{13}, y_n + \frac{1932k_1}{2197} - \frac{7200k_2}{2197} + \frac{7296k_3}{2197}\right),$$

$$k_5 = h \cdot f\left(x_n + h, y_n + \frac{439k_1}{216} - 8k_2 + \frac{3680k_3}{513} - \frac{845k_4}{4104}\right),$$

$$k_6 = h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n - \frac{8k_1}{27} + 2k_2 - \frac{3544k_3}{2565} + \frac{1859k_4}{4104} - \frac{11k_5}{40}\right);$$

$$\hat{y}_{n+1} = y_n + \left(\frac{25k_1}{216} + \frac{1408k_3}{2565} + \frac{2197k_4}{4104} - \frac{k_5}{5}\right), \text{ with global error } O(h^4),$$

$$y_{n+1} = y_n + \left(\frac{16k_1}{135} + \frac{6656k_3}{12825} + \frac{28561k_4}{56430} - \frac{9k_5}{50} + \frac{2k_6}{55}\right), \quad \leftarrow \text{use as RK}$$

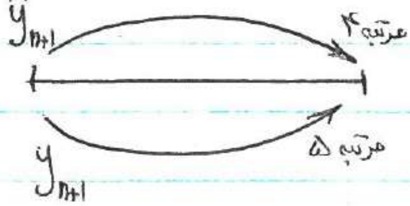
with global error $O(h^5)$;

$$\text{Error, } E \doteq \frac{k_1}{360} - \frac{128k_3}{4275} - \frac{2197k_4}{75240} + \frac{k_5}{50} + \frac{2k_6}{55}.$$

error for stepsize control

$y_{n+1} - \hat{y}_{n+1}$

مطابق روابطی که در صفحه قبل مشاهده می‌کنید، مقادیر K بین آنها مشترک است. $\hat{y}_{n+1}$ برای رانگ کوتا مرتبه ۴ و y_{n+1} برای رانگ کوتا مرتبه ۵ تنظیم شده است. در رانگ کوتا Fehlberg ما به جای اینکه ۹ تا جاگذاری عملگر (۴ جاگذاری برای رانگ کوتا مرتبه ۴ و ۵ جاگذاری برای رانگ کوتا مرتبه ۵) انجام دهیم، تنها ۶ جاگذاری (به جای مقادیر K) انجام می‌دهیم. برای به دست آوردن میزان خطا نیز تنها کافی است y_{n+1} را از $\hat{y}_{n+1}$ کم کنیم. همچنین میزان خطا نیز بدون محاسبه $\hat{y}_{n+1}$ و تنها با رابطه Error که در خط آخر روابط نوشته شده است می‌توان به دست آورد. به طور خلاصه رانگ کوتا Fehlberg را به صورت نمادین زیر می‌توان نمایش داد:



$$y_{n+1} - \hat{y}_{n+1} = Error$$

رانگ کوتا Fehlberg هم دقت بیشتر دارد و هم بدون محاسبات اضافی میزان خطا را می‌توان محاسبه کرد.

استفاده از رانگ کوتا برای حل دستگاه معادلات:

ما می‌خواهیم روشهای رانگ کوتا را به دستگاهی از معادلات تعمیم بدهیم. اگر داشته باشیم می‌توانیم روابط را به n تا order مرتبه اول تبدیل کنیم. به عنوان مثال در رانگ کوتا مرتبه ۴ کلاسیک که ضرایب زیر را دارد می‌توانیم به دستگاهی از معادلات تعمیم بدهیم:

0				
1/2	1/2			
1/2	0	1/2		
1	0	0	1	
	1/6	1/3	1/3	1/6

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z, w)$$
$$\frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z, w)$$
$$\frac{dw}{dx} = f_3(x, y, z, w)$$
$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$$

در معادلات مرتبه یک ۴ تا تعیین مقدار داریم به طوری که:

$$K_1 = hf_1(x_n, y_n, z_n, w_n)$$

برای مقدار K_1 بالا ما مقادیر m_1 و L_1 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L_1 = hf_2(x_n, y_n, z_n, w_n)$$
$$m_1 = hf_3(x_n, y_n, z_n, w_n)$$

حال مقدار K_2 به همراه m_2 و L_2 به صورت زیر به دست می‌آید:

$$K_2 = hf_1(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}k_1, z_n + \tfrac{1}{2}L_1, w_n + \tfrac{1}{2}m_1)$$
$$L_2 = hf_2(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}k_1, z_n + \tfrac{1}{2}L_1, w_n + \tfrac{1}{2}m_1)$$
$$m_2 = hf_3(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}k_1, z_n + \tfrac{1}{2}L_1, w_n + \tfrac{1}{2}m_1)$$

حال مقدار k_3 به همراه m_3 و L_3 به صورت زیر است:

$$k_3 = hf_1\left(x_n + \tfrac{1}{2}h ,\ y_n + \tfrac{1}{2}k_2 ,\ z_n + \tfrac{1}{2}L_2 ,\ W_n + \tfrac{1}{2}m_2\right)$$

$$L_3 = hf_2\left(x_n + \tfrac{1}{2}h ,\ y_n + \tfrac{1}{2}k_2 ,\ z_n + \tfrac{1}{2}L_2 ,\ W_n + \tfrac{1}{2}m_2\right)$$

$$m_3 = hf_3\left(x_n + \tfrac{1}{2}h ,\ y_n + \tfrac{1}{2}k_2 ,\ z_n + \tfrac{1}{2}L_2 ,\ W_n + \tfrac{1}{2}m_2\right)$$

مقدار k_4 به همراه m_4 و L_4 نیز به صورت زیر در می‌آید:

$$k_4 = hf_1\left(x_n + h ,\ y_n + k_3 ,\ z_n + L_3 ,\ W_n + m_3\right)$$

$$L_4 = hf_2\left(x_n + h ,\ y_n + k_3 ,\ z_n + L_3 ,\ W_n + m_3\right)$$

$$m_4 = hf_3\left(x_n + h ,\ y_n + k_3 ,\ z_n + L_3 ,\ W_n + m_3\right)$$

با مقادیر k ها و m ها و L ها که در بالا بدست آمد در رابطه خود قرار می‌دهیم و مقادیر y_{n+1} و z_{n+1} و W_{n+1} محاسبه می‌شود:

$$x_{n+1} = x_n + h$$

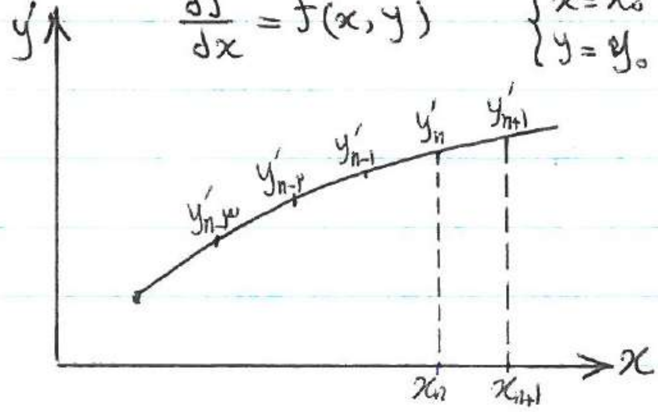
$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{1}{6}\left(L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4\right)$$

$$W_{n+1} = W_n + \frac{1}{6}\left(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4\right)$$

برای معادلات ODE از یکسری روابط استفاده می‌کنیم که در روش رانگ کوتا ساده هستند ولی می‌بایست در آنها جاگذاری مقادیر انجام بدهیم. اما تعداد این جاگذاری‌ها کار را سخت می‌کند. حال دوباره به معادله مرتبه اول برمی‌گردیم و داریم:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$$



کاری که ما انجام می‌دهیم بدست آوردن y' سطح زیر منحنی است. پیش از این سطح زیر منحنی را با روشهای اویلر، اویلر اصلاح شده و ... حساب می‌کردیم. حالا اگر ما برای y'_{n-1} به قبل را بخواهیم بدست بیاوریم از سطح زیر منحنی روبرو استفاده می‌کنیم. با این کار باعث می‌شود تا عملیات ما پیچیده‌تر گردد و برنامه نویسی آن مشکل شود. با این وجود کار ما ساده‌تر می‌گردد. (ابتدا منحنی را برای مقادیر قبل از y'_n حدس می‌زنیم و بعد سطح زیر منحنی آن را حساب می‌کنیم.) در اینجا ما روش Multy Step را با روش هیون (اویلر اصلاح شده) بیان می‌کنیم که در اویلر اصلاح شده از روشهای پیشگو تصحیح کن استفاده می‌کردیم. معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = y' \qquad \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$$

برای حل این معادله ما به صورت روبرو عمل می کردیم :

$$P :\; y^*_{n+1}=y_n+y'_n h$$ مرحله پیشگویی

$$E :\; y'^*_{n+1}=f(x_{n+1}, y_{n+1})$$ محاسبه مشتق

$$C :\; y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\left(y'_n+y'^*_{n+1}\right)$$ مرحله تصحیح مقدار

$$E :\; y'_{n+1}=f(x_{n+1}, y_{n+1})$$ محاسبه مشتق دیگر

درجه خطا مرحله P (پیشگویی) ما به صورت $O(h^2)$ است . برای مرحله C (تصحیح مقدار) میزان خطا نیز $O(h^3)$ است . اگر روش هیون (اویلر اصلاح شده) را بهبود ببخشیم ، مرحله P (پیشگویی) را یک درجه بالاتر می بریم :

$$\frac{y^*_{n+1}-y_n}{h}=y'_n \qquad \boxed{\text{مشتق گیری ۲ نقطه ای پیشرو (Forward)}}$$

$$\frac{y^*_{n+1}-y_{n-1}}{2h}=y'_n \qquad \boxed{\text{مشتق گیری ۲ نقطه ای مرکزی (Central)}} \qquad O(h^3)$$

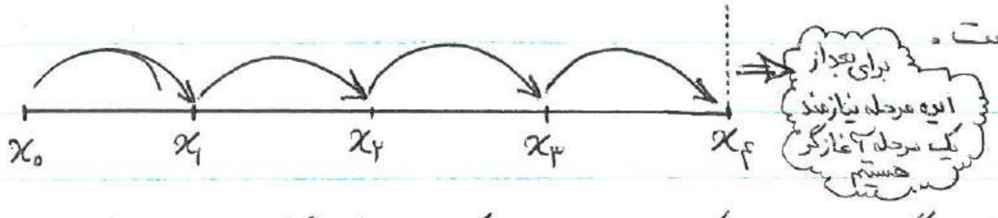
حالا می توانیم مرحله P (پیشگویی) جدید را به صورت زیر در بیاوریم :

$$y^*_{n+1}=y_{n-1}+2h\,y'_n \qquad O(h^3)$$

همانطور که ملاحظه می کنید ما در اینجا نیاز به y_{n-1} داریم در اختیار ما قرار ندارد . ما می توانیم از فرمولهای مشتق گیری Backward (پسرو) هم استفاده کنیم بنابرین اینجا از Multy Step ها استفاده می کنیم که دارای خواص زیر می باشند :

(1) روشی پیشگو تصحیح کن هستند .

(2) خود به خود آغاز نمی شوند و برای آغاز نیاز به یک رانگ کوتا هستیم . در شکل زیر به طور نمادین این حرف نشان داده شده است .



(3) هرکدام از روشهای پیشگو را به صورت حل تکراری می توانیم بیان کنیم به عنوان مثال در برنامه زیر داریم :

$$P :\; y^*_{n+1}=y_n+y'_n\cdot h$$

$$E :\; y'^*_{n+1}=f(x_{n+1}, y^*_{n+1})$$

$$C :\; y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\left[y'_n+y'^*_{n+1}\right]$$

$$|y^*_{n+1}-y_{n+1}| < \text{Tolerance}$$

خیر

بله

$$E :\; y'_{n+1}=f(x_{n+1}, y_{n+1})$$

(4) همانطور که قبلاً نیز داشتیم و خطا را تخمین زدیم و برای درجه خطا نیز داشتیم ، برای عبارت خطا مقدار خطا را حدس می زنیم و بعد میزان آن را بهبود می بخشیم .

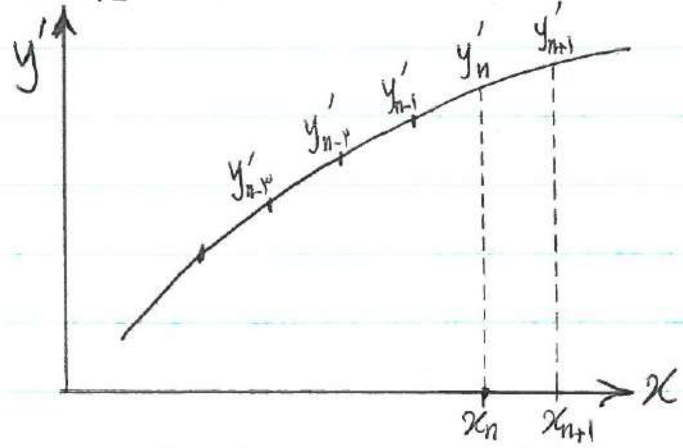
فرم معمولی ما PECE (پیشگو - تصحیح کن) است ولی در حالتهای دیگر داریم:

$P(EC)^S E$ ⟵ پیشگو تصحیح کن با حلقه تکرار

PMECME

$PM(EC)^S ME$

قبل اینکه جزئیات را بیان کنیم ما یکسری روش داریم که عبارتند از: Addam_Bashforth و Addam_Molton می گویند که به این ۲ روش به طور خلاصه (ABAM.PC) گفته می شود. ما در اینجا قصد داریم فرمول سطح زیر منحنی را بین x_n و x_{n+1} با کمک نقاط قبل بدست آوریم (با کمک حدس زدن نقاط قبلی منحنی را پیش بینی کنیم و با کمک منحنی سطح زیر آن را محاسبه بنماییم) برای این کار از روش پسرو (Backward) بدست می آید که برای این کار از اپراتورها استفاده می کنیم.



پیش از این برای اپراتورها داشتیم:

$$I^n D = E^n - 1 \longrightarrow \int_{x_i}^{x_i+nh} \frac{df(x)}{dx}\,dx = f(x_i+nh) - f(x_i)$$
$$= E^n f(x_i) - f(x_i)$$
$$= f(x_i)(E^n - 1)$$

به طور کلی رابطه ای که ما برای اپراتورها داریم عبارتست از:

$$I^n D = E^n - 1$$
$$\nabla = 1 - E^{-1}$$
$$E = e^{hD}$$

ما از این روابط برای پیشگویی روش Adam Bashforth بدست می آوریم. اگر جایگزین کنیم داریم:

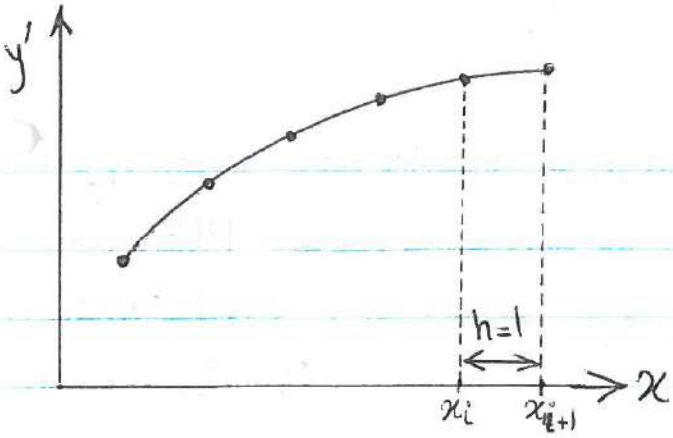
$$\nabla = 1 - e^{-hD}$$
$$\ln(1-\nabla) = -hD \longrightarrow D = \frac{\ln(1-\nabla)}{h}$$

آنگاه ما برای E^n خواهیم داشت:

$$\nabla = 1 - E^{-1} \Rightarrow E^{-1} = 1 - \nabla \rightarrow E^{-n} = (1-\nabla)^n \text{ یا } E^n = (1-\nabla)^{-n}$$

$$I^n D = E^{n-1} \Rightarrow I^n = \frac{E^n - 1}{D} \Rightarrow I^n = \frac{-h\left[(1-\nabla)^{-n} - 1\right]}{\ln(1-\nabla)}$$

$D = \frac{\ln(1-\nabla)}{h}$ از بالا داشتیم



نمودار روبرو را درنظر بگیرید. ما در اینجا کاری را که می خواهیم انجام بدهیم این است که سطح زیر منحنی را در شرایط یک گام و $h=1$ است بدست بیاوریم.

برای این کار رابطه ما به صورت زیر در می آید:

$$I f(x) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \longrightarrow = \frac{-h\left[\frac{1}{1-\nabla}-1\right]}{\ln(1-\nabla)} f(x_i)$$

$$= -h\,\frac{\left(\frac{\nabla}{1-\nabla}\right)}{\ln(1-\nabla)}$$

$$= \frac{h\nabla}{(1-\nabla)\left(\nabla+\frac{\nabla^2}{2}+\frac{\nabla^3}{3}+\frac{\nabla^4}{4}+\cdots\right)}$$

اگر عبارت را درهمدیگر ضرب کنیم به یک چندجمله‌ای می رسیم و در نهایت عبارت ما به صورت کلی زیر در می آید:

$$= h\left(1+\alpha_1\nabla+\alpha_2\nabla^2+\alpha_3\nabla^3+\cdots\right)$$

h را در هم ضرب می کنیم و توانهای مشترک را با همدیگر جمع می کنیم و در نهایت داریم:

$$= \frac{h\nabla}{\nabla+\left(\frac{1}{2}-1\right)\nabla^2+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\nabla^3+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)\nabla^4+\cdots}$$

$$= \frac{h\nabla}{\nabla-\frac{1}{2}\nabla^2-\frac{1}{6}\nabla^3-\frac{1}{12}\nabla^4-\frac{1}{20}\nabla^5-\cdots} = h\left(1+\alpha_1\nabla+\alpha_2\nabla^2+\alpha_3\nabla^3+\cdots\right)$$

با طرفین وسطین کردن رابطه فوق و برابر هم قرار دادن ۲ طرف در نهایت مقادیر α به صورت زیر حساب می شود:

$$\nabla^2:\quad -\frac{1}{2}+\alpha_1=0 \longrightarrow \alpha_1=\frac{1}{2}$$

$$\nabla^3:\quad -\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\alpha_1+\alpha_2=0 \longrightarrow \alpha_2=\frac{5}{12}$$

$$\nabla^4:\quad -\frac{1}{12}-\frac{1}{6}\alpha_1-\frac{1}{2}\alpha_2+\alpha_3=0 \longrightarrow \alpha_3=\frac{3}{8}$$

$$\vdots$$

حال اگر مقادیر را ادامه بدهیم و α های بدست آمده را در رابطه انتگرالی قرار دهیم خواهیم داشت:

$$I f(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = h\left[1+\frac{1}{2}\nabla+\frac{5}{12}\nabla^2+\frac{3}{8}\nabla^3+\frac{251}{720}\nabla^4+\frac{475}{1440}\nabla^5+\frac{19087}{60480}\nabla^6+\cdots\right]f(x_i)$$

آنگاه ما برای y_{n+1} خواهیم داشت:

$$y^*_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'\,dx$$

$$= y_n + h\left[1+\frac{1}{2}\nabla+\frac{5}{12}\nabla^2+\frac{3}{8}\nabla^3+\frac{251}{720}\nabla^4+\frac{475}{1440}\nabla^5+\frac{19087}{60480}\nabla^6+\cdots\right]y'_n$$

به رابطه‌ای که در صفحه قبل بدست آمد رابطهٔ Adams Bashforth می‌گویند. برای ما روابط بر حسب تعداد جملاتی که قطع می‌کنیم، تعداد نقاط مشخص می‌گردد. این فرمها در جدول ۱ـ۱ (جدول زیر) مشخص شده است: (در جدول زیر q بیانگر تعداد جملاتی است که قطع می‌کنیم)

Adams–Bashforth

$$y_{n+1} = y_n + h[y_n{}' + \tfrac{1}{2}\nabla y_n{}' + \tfrac{5}{12}\nabla^2 y_n{}' + \tfrac{3}{8}\nabla^3 y_n{}' + \tfrac{251}{720}\nabla^4 y_n{}' + \tfrac{475}{1440}\nabla^5 y_n{}' + \tfrac{19087}{60480}\nabla^6 y_n{}' + \cdots]$$

Adams–Moulton

$$y_{n+1} = y_n + h[y'_{n+1} - \tfrac{1}{2}\nabla y'_{n+1} - \tfrac{1}{12}\nabla^2 y'_{n+1} - \tfrac{1}{24}\nabla^3 y'_{n+1} - \tfrac{19}{720}\nabla^4 y'_{n+1} - \tfrac{3}{160}\nabla^5 y'_{n+1} - \tfrac{863}{60480}\nabla^6 y'_{n+1} + \cdots]$$

notation $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$

$y'_n = f'_n$

TABLE 1.1

Predictor

ADAMS–BASHFORTH FORMS

q	Coefficient of h	$y_n{}'$	y'_{n-1}	y'_{n-2}	y'_{n-3}	y'_{n-4}	y'_{n-5}	local truncation error
0	1	1						$\frac{1}{2} h^2 f'(\gamma)$
1	1/2	3	-1					$\frac{5}{12} h^3 f''(\gamma)$
2	1/12	23	-16	5				$\frac{9}{24} h^4 f'''(\gamma)$
3	1/24	55	-59	37	-9			$\frac{251}{720} h^5 f^{iv}(\gamma)$
4	1/720	1901	-2774	2616	-1274	251		$\frac{475}{1440} h^6 f^{v}(\gamma)$
5	1/1440	4277	-7923	9982	-7298	2877	-475	$\frac{19087}{60480} h^7 f^{vi}(\gamma)$

$$y_{n+1} = y_n + h y_n{}' \qquad (q = 0)$$

$$y_{n+1} = y_n + (h/2)[3y_n{}' - y'_{n-1}] \qquad (q = 1)$$

predicts $\longrightarrow$ $$\overset{*}{y}_{n+1} = y_n + (h/12)[23y_n{}' - 16y'_{n-1} + 5y'_{n-2}] \qquad (q = 2)$$

$$y_{n+1} = y_n + (h/24)[55y_n{}' - 59y'_{n-1} + 37y'_{n-2} - 9y'_{n-3}] \qquad (q = 3)$$

Error $O\left(h^{q+2} f^{[q+1]}(\gamma)\right)$

اگر معادلهٔ Adams_Bashforth را بعد از یک جمله قطع کنیم تنها y'_n داریم و مطابق جدول بالا ضریب آن یک خواهد شد. چنانچه بعد از ۲ جمله قطع کنیم y'_n و y'_{n-1} داریم و ضرایب نیز ۳ و ۱ـ می‌شود.

به عنوان مثال برای محاسبهٔ رانگ-کوتا مرتبه ۴ را از جدول ۱-۱ با کمک رابطه AB.PC بدست بیاوریم به صورت زیر در می آید:

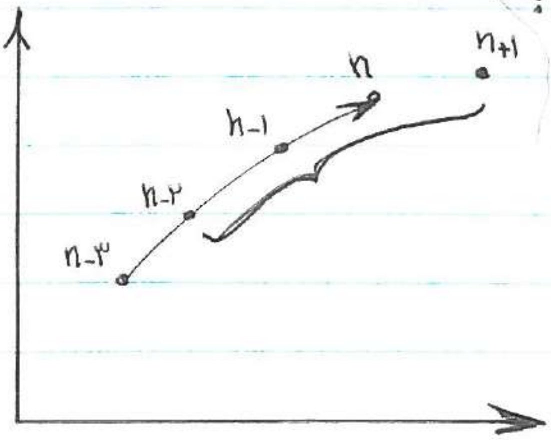
$$y^{*}_{n+1}=y_n+\frac{h}{24}\left[55y'_n-59y'_{n-1}+37y'_{n-2}-9y'_{n-3}\right]$$

با استفاده از اطلاعات مرحله قبل y'_i را از روش رانگ-کوتا استفاده می کنیم پس از مرحله P (پیشگویی) می بایست E (مشتق گیری) را هم حساب بکنیم:

$$P\Rightarrow y_{n+1}=y_n+\frac{h}{24}\left[55y'_n-59y'_{n-1}+37y'_{n-2}-9y'_{n-3}\right]$$

$$E\Rightarrow y_{n+1}=f(x_{n+1},y^{*}_{n+1})$$

کاری که ما انجام داده ایم مطابق نمودار زیر است:



ما تا به اینجا تا مرحله y_n را پیشگویی کرده ایم پس از آن می بایست از ۴ نقطه بعدی با یک shift به جلو مقدار آن را محاسبه بنماییم. (در نمودار روبرو بخش ← خورده بیانگر مرحله اول است و بخش ⁓ بیانگر زمانی است که یک shift به جلو می رود)

✱ معادلات Adams Moulton:

برای محاسبات Adams.M. با استفاده از اپراتورها به صورت زیر عمل می کنیم:

$$I^n=\frac{E^n-1}{D}\qquad\qquad D=\frac{\ln(1-\nabla)}{-h}$$

برای حالت خاص هنگامی که $(n=1)$ اپراتورهای ما به صورت زیر در می آید:

$$I=\frac{E-1}{D}\Rightarrow I=\frac{E\nabla}{D}=\frac{-hE\nabla}{\ln(1-\nabla)}$$

$$\boxed{E-1=E\nabla}$$

در رابطه بالا عبارت $\ln(1-\nabla)$ را طبق بسط مک لوران وقتی بسط بدهیم داریم:

$$\ln(1-\nabla)=\nabla+\frac{\nabla^2}{2}+\frac{\nabla^3}{3}+\frac{\nabla^4}{4}+\cdots$$

وقتی عبارت بالا را در I قرار بدهیم آنگاه رابطه ما به صورت زیر در خواهد آمد:

$$I=\frac{hE\nabla}{\nabla+\frac{\nabla^2}{2}+\frac{\nabla^3}{3}+\frac{\nabla^4}{4}+\cdots}=hE\left(1+\alpha_1\nabla+\alpha_2\nabla^2+\alpha_3\nabla^3+\alpha_4\nabla^4+\cdots\right)$$

جملات بالا را مرتب و سطری می کنیم و در نهایت با مقایسه کردن آنها با همدیگر داریم :

$$\nabla^2 : \frac{1}{2} + \alpha_1 = 0 \longrightarrow \alpha_1 = \frac{-1}{2}$$

$$\nabla^3 : \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \longrightarrow \alpha_2 = \frac{-1}{12}$$

$$\nabla^4 : \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \longrightarrow \alpha_3 = \frac{-1}{24}$$

اگر مقادیر α بدست آمده را جاگذاری کنیم آنگاه داریم :

$$I f(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = hE\left[1 - \frac{1}{2}\nabla - \frac{1}{12}\nabla^2 - \frac{1}{24}\nabla^3 - \frac{19}{720}\nabla^4 - \frac{3}{160}\nabla^5 - \frac{863}{60480}\nabla^6 - \dots\right] f(x_i)$$

آنگاه برای محاسبه y_{n+1} ما خواهیم داشت :

$$y_{n+1} = y_n + h\left[1 - \frac{1}{2}\nabla - \frac{1}{12}\nabla^2 - \frac{1}{24}\nabla^3 - \frac{19}{720}\nabla^4 - \frac{3}{160}\nabla^5 - \frac{763}{60484}\nabla^6 - \dots\right] y'_{n+1}$$

در جدول ۱-۲ تمامی مرتبه هایی که گفته شده است بیان شده است :

Adams _ Moulton

$$y_{n+1} = y_n + h\left[y'_{n+1}\left(1 - \frac{1}{2}\nabla - \frac{1}{12}\nabla^2 - \frac{1}{24}\nabla^3 - \frac{19}{720}\nabla^4 - \frac{3}{160}\nabla^5 - \frac{863}{60480}\nabla^6 + \dots\right)\right]$$

TABLE 1.2

ADAMS–MOULTON FORMS

Corrector

q	Coefficient of h	y'_{n+1}	y'_n	y'_{n-1}	y'_{n-2}	y'_{n-3}	y'_{n-4}	local truncation error
0	1	1						$-\frac{1}{2}h^2 f'(\gamma)$
1	1/2	1	1					$-\frac{1}{12}h^3 f''(\gamma)$
2	1/12	5	8	-1				$-\frac{1}{24}h^4 f'''(\gamma)$
3	1/24	9	19	-5	1			$-\frac{19}{720}h^5 f^{iv}(\gamma)$
4	1/720	251	646	-264	106	-19		$-\frac{3}{160}h^6 f^{v}(\gamma)$
5	1/1440	475	1427	-798	482	-173	27	$-\frac{863}{60480}h^7 f^{vi}(\gamma)$

$$\xrightarrow[(q=2)]{\text{corrects}} \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}\left[5y'_{n+1} + 8y'_n - y'_{n-1}\right]$$

اگر رابطه را بعد از یک جمله قطع کنیم فقط y'_{n+1} و اگر بعد از ۲ جمله y'_{n+1} و y_n و ... (درست به مانند روش Adam Bashforth) به عنوان مثال در زیر داریم:

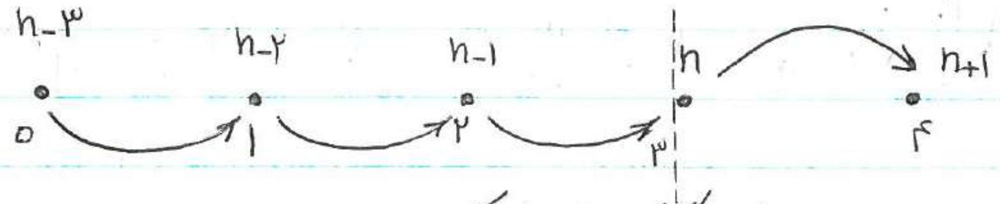
$$P: \; y^{*}_{n+1} = y_n + \frac{h}{۲۴}\left[۵۵\, y'_n - ۵۹\, y'_{n-1} + ۳۷\, y'_{n-۲} - ۹\, y'_{n-۳}\right]$$

$$E: \; y^{*}_{n+1} = f(x_{n+1} \,،\, y_{n+1})$$

$$C: \; y_{n+1} = y_n + \frac{h}{۲۴}\left[۹\, y'^{*}_{n+1} + ۱۹\, y'_n - ۵\, y'_{n-1} + ۱\, y'_{n-۲}\right]$$

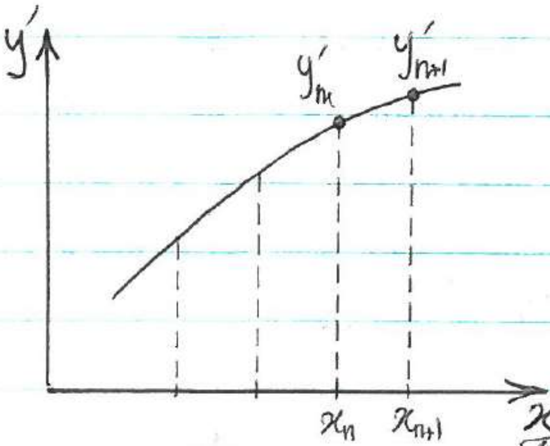
$$E: \; y_{n+1} = f(x_{n+1} \,،\, y_{n+1})$$

ما برای محاسبات خود به نقاط زیر احتیاج داریم که به طور نمادین در زیر نشان داده شده است:



در ابتدا همواره می بایست از رانگ کوتا استفاده کنیم.

ما در گذشته گفته بودیم که اگر معادله مرتبه اول به صورت زیر داشته باشیم:



$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)=y'$$

$$y_{n+1}=\int_{x_n}^{x_{n+1}} y'\,dx$$

و آن را بر روی نمودار روبرو نشان بدهیم برای محاسبه آن از روش Single Step استفاده می‌کنیم.

این روشها ساده بودند و با جاگذاری مقادیر (Function Evaluation) بدست می‌آمدند. ولی در روشهای Multy Step ما از روی نقاط قبلی بدست می‌آوردیم که بین آن چند نقطه چند جمله‌ای مناسب با آن را fit می‌کردیم. این چند جمله‌ای خود به خود آغاز نمی‌شد و نیازمند یک آغازگر بود که این آغازگرها همانا روشهای رانگ-کوتا ۴ بودند. عملیاتی که ما انجام می‌دادیم به نام پیشگو تصحیح کن (Pridictor Corrector) معروف بودند. در واقع سطح زیر منحنی در n+1 نداریم و با پیشگویی آن را بدست می‌آوریم. نحوه بدست آوردن هم این گونه است که با کمک فرمولهای Backward و با Shift به جلو آن را حساب می‌کردیم. با کمک جداولی که برای روابط ADAMS-BASHFORTH در صفحه ۱۰۵ و همچنین ADAMS MOULTON در صفحه ۱۰۷ موجود است برای این کار استفاده می‌کنیم. به عنوان مثال اگر با کمک این جدول‌ها برای مرتبه ۴ بخواهیم در نظر بگیریم داریم:

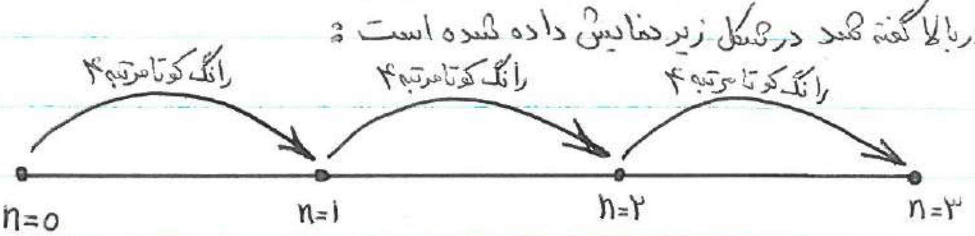
(P) $y^{*}_{n+1}=y_n+\frac{h}{24}\left[55y'_n-59y'_{n-1}+37y'_{n-2}-9y'_{n-3}\right]$ پیشگویی

(E) $y'^{*}_{n+1}=f(x_{n+1},y^{*}_{n+1})$ محاسبه مشتق

(C) $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{24}\left[9y'^{*}_{n+1}+19y'_n-5y'_{n-1}-y'_{n-2}\right]$ تصحیح کن

(E) $y'_{n+1}=f(x_{n+1},y_{n+1})$

آنچه در بالا گفته شد در شکل زیر نمایش داده شده است:



همانطور که می‌بینید درجه function Evaluation با درجه رانگ کوتا برابر شده است. (n=3)

بنابراین پس از طی ۳ مرحله می‌توانیم به مرحله $n=0$ برگردیم. این روشهای پیشگو تصحیح کن انواع استراتژی‌ها را دارد و می‌توان در بعضی مراحل حل تکرار را در آنها اعمال بنمائیم. ما می‌توانیم y^*_{n+1} را با y_{n+1} مقایسه کنیم اگر خطا قابل قبول باشد به کارمان ادامه می‌دهیم وگرنه به خط مجدداً y^*_{n+1} برمی‌گردیم. آنچه گفته شد در زیر مشاهده می‌کنید:

$$\text{(P)}\quad y^*_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[55y'_n - 59y'_{n-1} + 37y'_{n-2} - 9y'_{n-3}\right]$$

$$\text{(E)}\quad y'^*_{n+1} = f(x_{n+1}, y^*_{n+1}) \xleftarrow{\; y^*_{n+1} = y_{n+1} \;} \text{NO}$$

$$\text{(C)}\quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[9y'^*_{n+1} + 19y'_n - 5y'_{n-1} - y'_{n-2}\right] \longrightarrow \left|y_{n+1} - y^*_{n+1}\right| < \text{Tolerance}$$

$$\text{(E)}\quad y'_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1}) \longleftarrow \text{بله}$$

توجه ← برای تعیین ضرایب مرحله (P) از جدول ADAMS_BASHFORTH و برای تعیین مرحله (E) از جدول ADAMS_MOULTON استفاده می‌نمائیم.

کار دیگری که می‌توانیم انجام دهیم این است که خطا را تخمین بزنیم و ببینیم قابل قبول است یا خیر. ما می‌توانیم مقادیر حدس زده شده (Pridict) و اصلاح شده (Corrective) را درست کنیم که برای عبارت خطا به صورت زیر است:

حدس زده شده $\quad \text{(P)}\quad y^*_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[55y'_n - 59y'_{n-1} + 37y'_{n-2} - 9y'_{n-3}\right] + \frac{251}{720}h^5 f^{IV}(\xi)$

تصحیح شده $\quad \text{(C)}\quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[9y'^*_{n+1} + 19y'_n - 5y'_{n-1} - y'_{n-2}\right] - \frac{19}{720}\quad f^{IV}(\xi)$

در عبارت بالا مقدار «ξ» برای (P) عددی است بین x_{n-1} و x_{n-2} و همچنین برای (C) عددی بین x_{n-2} و x_{n-3} است.

اگر $y(x_{n+1})$ که true solution (حل صحیح) است و آن عبارتست از:

$$y(x_{n+1}) = y^*_{n+1} + \frac{251}{720}h^5 f^{IV}(\xi) \quad \text{(P)}$$

true solution

$$y(x_{n+1}) = y_{n+1} - \frac{19}{720}h^5 f^{IV}(\xi) \quad \text{(C)}$$

توجه کنید که در مرحله (C) «تصحیح شده» مقدار خطا کمتر است چون محاسبات از ۲ طرف در نظر گرفته شده است. اگر این ۲ عبارت true solution را از همدیگر کم کنیم داریم:

$$y(x_{n+1})_P - y(x_{n+1})_C = \left(\frac{251}{720} - \left(\frac{-19}{720}\right)\right)h^5 f^{IV}(\xi) = \frac{270}{720}h^5 f^{IV}(\xi)$$

$$h^5 f^{IV}(\xi) = \frac{720}{270}\left(y_{n+1} - y^*_{n+1}\right)h^5 f^{IV}(\xi)$$

برای مراحل P «پیشگویی» و C «تصحیح» مقدار خطا به صورت زیر بدست می آید:

مقدار خطا
$$\begin{cases} E_P = \frac{251}{720}(y_{n+1} - y^*_{n+1}) \\ E_C = \frac{-19}{720}(y_{n+1} - y^*_{n+1}) \end{cases}$$

ضریب اصلاح کننده
$$\begin{cases} m_P = \frac{251}{720} \\ m_C = \frac{-19}{720} \end{cases}$$

برای مراحل بعدی نیز می توان همین کار را با کمک جداول ADAMS-BASHFORTH برای تعیین مرحله P و با کمک جدول ADAMS_MOULTON برای مرحله C استفاده کرد. به جای اعمال حل تکراری از روش modification (اصلاح کننده) استفاده می کنیم. برای این کار خطایی که بدست می آوریم احتیاج به پیش گویی «Pridict» و تصحیح «Corrective» ندارد. ما در این روش هنوز مقدار دقیقی برای حدس نداریم. از اینرو فرض می کنیم که برای حدس ما عبارت $y_{n+1} - y^*_{n+1}$ بین مقادیر مراحل C و P تقریباً برابر است:

$$y_{n+1} - y^*_{n+1} \approx y_n - y^*_n$$

با این فرضی که ما در بالا کردیم برای مرحله پیشگویی (P) یک modification (اصلاح) انجام می دهیم.

این مرحله اصلاح M به صورت زیر نمایش داده شده است:

$$\text{(P)}\quad y^*_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[55 y'_n - 59 y'_{n-1} + 37 y'_{n-2} - 9 y'_{n-3}\right]$$

$$\text{(M)}\quad y^*_{n+1} = y^*_{n+1\,P} + \frac{251}{720}$$

$$\text{(E)}\quad y'^*_{n+1} = f(x_{n+1}, y^*_{n+1\,m})$$

$$\text{(C)}\quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[9 y'^*_{n+1\,m} + 19 y'_n - 5 y'_{n-1} - y'_{n-2}\right]$$

$$\text{(M)}\quad y_{n+1} = y_{n+1\,C} - \frac{19}{720}(y_{n+1\,C} - y_{n+1\,P})$$

$$\text{(E)}\quad y'_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$$

برای modification ما ابتدا مرحله‌ی (P) را اصلاح می کنیم. پس از آن مرحله‌ی (C) را اصلاح می نماییم، با این کار انواع و اقسام y_{n+1} و y^*_{n+1} بدست می آید برای M و P و C که ایجاد مشکل می نماید، از این رو تغییرات زیر را اعمال می نماییم:

$P_n, P_{n+1} \longrightarrow$ Pridication Value مقدارهای حدسی

$m_{n+1} \longrightarrow$ modifiL Predict Value اصلاح مقدارهای حدسی

$C_n, C_{n+1} \longrightarrow$ Corrected Value تصحیح مقادیر

$y_{n+1} \longrightarrow$ modifial Corrected Value اصلاح مقادیر تصحیح شده

با توجه به تغییراتی که در انتهای صفحهٔ قبل گفته شد مراحل کار ما به صورت زیر در خواهد آمد:

P $\quad P_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[55\, y'_n - 59\, y'_{n-1} + 37\, y'_{n-2} - 9\, y'_{n-3}\right]$

M $\quad m_{n+1} = P_{n+1} + \frac{251}{720}\left(C_n - P_n\right)$

E $\quad m'_{n+1} = f\left(x_{n+1}, m_{n+1}\right)$

C $\quad C_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[9\, m'_{n+1} + 19\, y'_n - 5\, y'^{*}_{n-1} + 1\, y'_{n-2}\right]$

M $\quad y_{n+1} = C_{n+1} - \frac{19}{720}\left(C_{n+1} - P_{n+1}\right)$

E $\quad y'_{n+1} = f\left(x_{n+1}, y_{n+1}\right)$

به طور کلی ما استراتژی هایی را که در اختیار داریم عبارتست از:

1. PECE
2. $P(EC)^S E$
3. PMECME
4. $PM(EC)^S E$

معمولاً یا از استراتژی ③ و یا ④ استفاده می شود. ما می توانیم با modify (اصلاح) کردن در حلقهٔ ④ به حل صحیح برسیم. به عنوان مثال این استراتژی ها را برای مرتبه دوم از روی جداول ADAMS_BASHFORTH و ADAMS_MOULTON محاسبه می کنیم:

$\boxed{\text{استراتژی نخست}}$ ← PECE (بدون حلقه)

P $\quad y^{*}_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[3 y'_n - y'_{n-1}\right]$

رابطه بالا را با رانگ-کوتا مرتبه دوم آغاز می کنیم:

E $\quad y^{*}_{n+1} = f\left(x_{n+1}, y^{*}_{n+1}\right)$

C $\quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[y'^{*}_{n+1} + y'_n\right]$

E $\quad y'_{n+1} = f\left(x_{n+1}, y_{n+1}\right)$

$\boxed{\text{استراتژی دوم}}$ ← $P(EC)^S E$ (با حلقهٔ تکرار)

P $\quad y^{*}_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[3 y'_n - y'_{n-1}\right]$

E $\quad y'^{*}_{n+1} = f\left(x_{n+1}, y^{*}_{n+1}\right)$ ← NO: $y^{*}_{n+1} = y_{n+1}$

C $\quad y_{n+1} = f\left(x_{n+1}, y_{n+1}\right)$ → $\left|y_{n+1} - y^{*}_{n+1}\right| < \text{Tolerance}$

E $\quad y'_{n+1} = f\left(x_{n+1}, y_{n+1}\right)$ ← بله

استراتژی سوم ← PMECME (بدون حلقه تکرار)

برای m_p و m_c به صورت زیر بدست می آوریم و گاهی هم به صورت آماده شده به ما می دهند. روش بدست آوردن آنها هم مطابق صفحهٔ ۱۱۵ و ۱۱۱ با برابر هم قراردادن خطاها است:

$$m_p = \frac{5}{6} \qquad m_c = \frac{-1}{6}$$

با داشتن این ۲ مقدار می توان از جداول ADAMS – BASHFORTH و همچنین ADAMS – MOLUTON مقادیر P و M و C و N و y_n و .... را طی مراحل زیر بدست آورد. این مراحل عبارتست از:

(P) $P_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[3y'_n - y'_{n-1}\right]$

(M) $m_{n+1} = P_{n+1} + \frac{5}{6}\left[C_n - P_n\right]$

برای محاسبه این مرحله از اطلاعات مراحل قبل استفاده می کنیم:

(E) $m'_{n+1} = f(x_{n+1}, m_{n+1})$

(C) $C_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[m'_{n+1} - y'_n\right]$

(M) $y_{n+1} = C_{n-1} - \frac{1}{6}\left[C_{n+1} - P_{n+1}\right]$

(E) $y'_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$

استراتژی چهارم ← $PM(EC)^S ME$ (با حلقه تکرار)

(P) $P_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[3y' - y'_{n-1}\right]$

(M) $m_{n+1} = P_{n+1} + \frac{5}{6}\left[C_n - P_n\right]$

در اینجا مثل حل تکراری با Relaxation انجام می دهیم

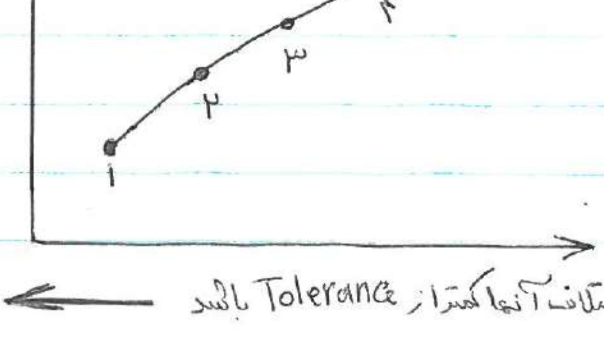
(E) $m'_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$ ← NO: $m_{n+1} = C_{n+1}$

(C) $C_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[m'_{n+1} + y'_n\right] \longrightarrow |m_{n+1} - C_{n+1}| < \text{Tolerance}$

(M) $y_{n+1} = C_{n+1} - \frac{1}{6}\left[C_{n+1} - P_{n+1}\right]$ ← بله

(E) $y'_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$

کاری که انجام می دهیم بدین ترتیب است که در شکل زیر بیان شده است:



برای نقاط ۱ تا ۳ مقادیر ما معلوم است.

با امتداد نمودار مقدار نقطه ۴ را پیش بینی می کنیم

عملیاتی که گفته شد برای مرحله Pridict بود.

برای مرحله Corrective مقدارهای ۱ تا ۳ را با یک Shift به جلو بدست می آوریم. مقادیری که توسط P و C بدست آمده را با هم مقایسه می کنیم اگر اختلاف آنها کمتر از Tolerance باشد ←

عملیات ما به پایان رسیده است و گرنه آنقدر در حلقه جاگذاری را انجام می دهیم تا اینکه اختلاف P و C به حداقل مقدار ممکن برسد.

حال آنچه گفته شد برای دستگاهی به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\frac{dy}{dx}=y' \Rightarrow y'=f_1(x,y,z,u)$$

$$\frac{dz}{dx}=z' \Rightarrow z'=f_2(x,y,z,u)$$

$$\frac{du}{dx}=u' \Rightarrow u'=f_3(x,y,z,u)$$

ما روابط خودمان را با فرض مرتبه ۲ انجام می دهیم که برای این کار می بایست Pridication خود را به صورت زیر آغاز بکنیم:

P
$$y^*_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\left[3y'_n-y'_{n-1}\right]$$

$$z^*_{n+1}=z_n+\frac{h}{2}\left[3z'_n-z'_{n-1}\right]$$

$$u^*_{n+1}=u_n+\frac{h}{2}\left[3u'_n-u'_{n-1}\right]$$

حال از رانگ کوتا مرتبه دوم استفاده می کنیم و مرحله Evaluation را به صورت زیر بدست می آوریم:

E
$$y'^*_{n+1}=f_1(x^*_{n+1},y^*_{n+1},z^*_{n+1},u^*_{n+1})$$

$$z'^*_{n+1}=f_2(x^*_{n+1},y^*_{n+1},z^*_{n+1},u^*_{n+1})$$

$$u'^*_{n+1}=f_3(x^*_{n+1},y^*_{n+1},z^*_{n+1},u^*_{n+1})$$

حالا به مرحله Corrector می رویم و داریم:

C
$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\left[y'^*_{n+1}+y^*_n\right]$$

$$z_{n+1}=z_n+\frac{h}{2}\left[z'^*_{n+1}+z^*_n\right]$$

$$u_{n+1}=u_n+\frac{h}{2}\left[u'^*_{n+1}+u'_n\right]$$

بین مرحله C و E که در بالا گفته شد می توان یک حلقه تکرار گذاشت که مقایسه ای بین $y_{n+1}\leftrightarrow y'^*_{n+1}$ و $z_{n+1}\leftrightarrow z'^*_{n+1}$ و $u_{n+1}\leftrightarrow u'^*_{n+1}$ صورت می گیرد که می بایست خطا کمتر از مقدار Tolerance گردد:

y مقایسه $\longrightarrow y_{n+1}\leftrightarrow y'^*_{n+1}:\ |y^*_{n+1}-y_{n+1}|<Tolerance \xrightarrow{\text{نه}}$ مرحله E $\quad y'^*_{n+1}=y_{n+1}$

z مقایسه $\longrightarrow z_{n+1}\leftrightarrow z'^*_{n+1}:\ |z^*_{n+1}-z_{n+1}|<Tolerance \xrightarrow{\text{نه}}$ مرحله E $\quad z'^*_{n+1}=z_{n+1}$

u مقایسه $\longrightarrow u_{n+1}\leftrightarrow u'^*_{n+1}:\ |u^*_{n+1}-u_{n+1}|<Tolerance \xrightarrow{\text{نه}}$ مرحله E $\quad u'^*_{n+1}=u_{n+1}$

به عبارت دیگر مطلب انتهای صفحه قبل را به صورت زیر نیز می توان بیان کرد:

(E)
$$y'^{*}_{n+1} = f_1(x_{n+1}, y^{*}_{n+1}, Z^{*}_{n+1}, U^{*}_{n+1}) \quad \leftarrow \quad U^{*}_{n+1} = U_{n+1}$$
$$Z'^{*}_{n+1} = f_2(x_{n+1}, y^{*}_{n+1}, Z^{*}_{n+1}, U^{*}_{n+1}) \quad \leftarrow \quad Z^{*}_{n+1} = Z_{n+1}$$
$$U'^{*}_{n+1} = f_3(x_{n+1}, y^{*}_{n+1}, Z^{*}_{n+1}, U^{*}_{n+1}) \quad \leftarrow \quad U^{*}_{n+1} = U_{n+1}$$

NO

(C)
$$U_{n+1} = U_n + \frac{h}{2}\left[U'^{*}_{n+1} + U'_n\right] \quad |y'^{*}_{n+1} - U_{n+1}| < Toleranc$$
$$Z_{n+1} = Z_n + \frac{h}{2}\left[Z'^{*}_{n+1} + Z'_n\right] \quad |Z'^{*}_{n+1} - Z_{n+1}| < Toleranc$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[y'^{*}_{n+1} + Z'_n\right] \quad |y'^{*}_{n+1} - y_{n+1}| < Toleranc$$

اگر جواب نتیجه جواب مثبت باشد به مرحله آخر یعنی Evaluate می رویم که داریم:

$$y'_{n+1} = f_1(x_{n+1}, y_{n+1}, Z_{n+1}, U_{n+1})$$
$$Z'_{n+1} = f_2(x_{n+1}, y_{n+1}, Z_{n+1}, U_{n+1})$$
$$U'_{n+1} = f_3(x_{n+1}, y_{n+1}, Z_{n+1}, U_{n+1})$$

روش بالا به مانند روش ژاکوبی می ماند اما با روشی به مانند گاوس - سایدل می توان به طور همزمان مقادیر را محاسبه نمود.

مثال: ما معادلاتی به صورت زیر داریم:

$$\frac{dy}{dx} = -0.3y + 0.1Z + 0.1U$$
$$\frac{dZ}{dx} = -0.2Z + 0.1U$$
$$\frac{dU}{dx} = -0.1U$$

مقادیر ابتدایی نیز به صورت زیر است:

$$x = 0 \qquad y = 3 \qquad Z = 2 \qquad U = 1$$

و با حل تحلیلی مقادیر ما به صورت زیر درآمده است:

$$\begin{cases} y = e^{-0.1x} + e^{-0.2x} + e^{-0.3x} \\ Z = e^{-0.1x} + e^{-0.2x} \\ U = e^{-0.1x} \end{cases}$$

حل | ما با استفاده از جداول ADAMS_BASHFORT و همچنین ADAMS_MOLOUTN مرتبه ۴ استفاده می کنیم . برای حل معادلات استفاده شده برای مرتبه ۴ ما به صورت زیر عمل می کنیم :

$$\text{P} \quad y^{*}_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[55y'_n - 59y'_{n-1} + 37y'_{n-2} - 9y'_{n-3}\right]$$

$$Z^{*}_{n+1} = Z_n + \frac{h}{24}\left[55Z'_n - 59Z'_{n-1} + 37Z'_{n-2} - 9Z'_{n-3}\right]$$

$$U^{*}_{n+1} = U_n + \frac{h}{24}\left[55U'_n - 59U'_{n-1} + 37U'_{n-2} - 9U'_{n-3}\right]$$

پس از مرحله P «پیشگویی» که در بالا آمده است و قبل از انجام مرحله C «تصحیح» باید Evalation انجام بدهیم . بعد از آن یک حلقه تکرار قرار دهیم که یا تکرار است و یا اصلاح شده می باشد : مرحله E به صورت زیر می باشد :

$$\text{E} \quad y'^{*}_{n+1} = f_1(x_{n+1}, y^{*}_{n+1}, Z^{*}_{n+1}, U^{*}_{n+1})$$

$$Z'^{*}_{n+1} = f_2(x_{n+1}, y^{*}_{n+1}, Z^{*}_{n+1}, U^{*}_{n+1})$$

$$U'^{*}_{n+1} = f_3(x_{n+1}, y^{*}_{n+1}, Z^{*}_{n+1}, U^{*}_{n+1})$$

برای مرحلهٔ C «تصحیح» نیز به صورت زیر داریم :

$$\text{C} \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[y'^{*}_{n+1} + y'_n\right]$$

$$Z_{n+1} = Z_n + \frac{h}{2}\left[Z'^{*}_{n+1} + Z'_n\right]$$

$$U_{n+1} = U_n + \frac{h}{2}\left[U'^{*}_{n+1} + U'_n\right]$$

بین مرحله C و E که در بالا گفته شده است یک حلقه تکرار قرار می دهند که در انتهای صفحهٔ ۱۱۴ و ابتدای صفحه قبل پیرامون آن توضیح داده شده است .

نحوهٔ استفاده از این روش تصحیح کردن در برنامه کامپیوتری که در صفحات آینده آمده است مشخص شده است . در این برنامه از رانگ کوتا مرتبه ۴ استفاده می کنیم که برنامه آن مطابق صفحات آینده است . پس از بیان برنامه هم برای هر قسمت از آن جداگانه توضیحاتی داده شده است :

```
C
C       SOLUTION OF A SET OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS
C       USING THE FOURTH ORDER ADAMS-BASHFORTH, ADAMS-MOULTON
C       PREDICTOR-CORRECTOR METHOD WITH AN ITERATIVE ALGORITHM.
C       THE INTEGRATION IS STARTED USING CLASSIC FOURTH ORDER
C       RUNGE-KUTTA METHOD AND THE ITERATION PROCEDURE IS THE
C       THE GAUSS-SEIDEL WITH RELAXATION.
C
C       PROGRAM NAME: ABAMPC4.FOR        (19)
C
C       EXAMPLE CASE: dY/dX = -.3 Y + .1 Z + .1 U
C                     dZ/dX = -.2 Z + .1 U
C                     dU/dX = -.1 U
C
C       WITH INITIAL CONDITIONS: AT X=0, Y=3, Z=2, U=1
C
C       ANALYTICAL SOLUTION IS : Y = EXP(-.1X) + EXP(-.2X) + EXP(-.3X)
C                                Z = EXP(-.1X) + EXP(-.2X)
C                                U = EXP(-.1X)
C
      REAL X(51),Y(51),Z(51),U(51),DYDX(51),DZDX(51),DUDX(51)
      REAL YS(51),ZS(51),US(51),DYDXS(51),DZDXS(51),DUDXS(51)
      REAL YTRUE(51),ZTRUE(51),UTRUE(51),H,K1,K2,K3,K4
      REAL L1,L2,L3,L4,M1,M2,M3,M4
      OPEN(10,FILE='ABAMPC4.RES',STATUS='NEW')
C
C     SET TOLERANCE FOR ITERATION PROCEDURE
C     AND MAXIMUM NUMBER OF ITERATIONS
C
      TOL=0.00000001
      IMAX=50
C
C     SPECIFY THE RELAXATION FACTOR
C
      WRITE(*,7)
 7    FORMAT('  ENTER RELAXATION FACTOR')
      READ(*,8) W
 8    FORMAT(F4.2)
      WRITE(10,9) W
 9    FORMAT(' RELAXATION FACTOR: ',F4.2)
C
C     SPECIFY THE INITIAL CONDITION AND THE STEP SIZE.
C
      X(1)=0.0
      Y(1)=3.0
      Z(1)=2.0
      U(1)=1.0
      H=0.01
C
C     USE RK FOR THE FIRST 4 INTERVALS TO START
C     THE PREDICTOR-CORRECTOR METHOD.
C
      DO 100 J=2,5
      I=J-1
      XT=X(I)
      YT=Y(I)
      ZT=Z(I)
      UT=U(I)
      CALL DERIV(XT,YT,ZT,UT,F1,F2,F3)
      DYDX(I)=F1
      DZDX(I)=F2
      DUDX(I)=F3
      K1=H*F1
      L1=H*F2
```

```
      M1=H*F3
C
      XT=X(I)+(H/2.)
      YT=Y(I)+(K1/2.)
      ZT=Z(I)+(L1/2.)
      UT=U(I)+(M1/2.)
      CALL DERIV(XT,YT,ZT,UT,F1,F2,F3)
      K2=H*F1
      L2=H*F2
      M2=H*F3
C
      XT=X(I)+(H/2.)
      YT=Y(I)+(K2/2.)
      ZT=Z(I)+(L2/2.)
      UT=U(I)+(M2/2.)
      CALL DERIV(XT,YT,ZT,UT,F1,F2,F3)
      K3=H*F1
      L3=H*F2
      M3=H*F3
C
      XT=X(I)+H
      YT=Y(I)+K3
      ZT=Z(I)+L3
      UT=U(I)+M3
      CALL DERIV(XT,YT,ZT,UT,F1,F2,F3)
      K4=H*F1
      L4=H*F2
      M4=H*F3
C
      X(J)=X(I)+H
      Y(J)=Y(I)+((1./6.)*(K1+(2.*K2)+(2.*K3)+K4))
      Z(J)=Z(I)+((1./6.)*(L1+(2.*L2)+(2.*L3)+L4))
      U(J)=U(I)+((1./6.)*(M1+(2.*M2)+(2.*M3)+M4))
 100  CONTINUE
C
      J=5
      XT=X(J)
      YT=Y(J)
      ZT=Z(J)
      UT=U(J)
      CALL DERIV(XT,YT,ZT,UT,F1,F2,F3)
      DYDX(J)=F1
      DZDX(J)=F2
      DUDX(J)=F3
C
C     END OF THE STARTER SEGMENT
C
      DO 800 N=5,50
      ITER=1
      N1=N-1
      N2=N-2
      N3=N-3
      NN=N+1
      X(NN)=X(N)+H
C
C     PREDICTOR
C                   y'
      TEMP=(55.*DYDX(N))-(59.*DYDX(N1))+(37.*DYDX(N2))-(9.*DYDX(N3))
      YS(NN)=Y(N)+((H/24.)*TEMP)
                                             z'
      TEMP=(55.*DZDX(N))-(59.*DZDX(N1))+(37.*DZDX(N2))-(9.*DZDX(N3))
      ZS(NN)=Z(N)+((H/24.)*TEMP)
                                             u'
      TEMP=(55.*DUDX(N))-(59.*DUDX(N1))+(37.*DUDX(N2))-(9.*DUDX(N3))
      US(NN)=U(N)+((H/24.)*TEMP)
C
```

YS, ZS, US $\}$ predicted Values. y^*_{n+1} z^*_{n+1} u^*_{n+1}