```
C        USE GAUSS-SEIDEL ITERATION ON THE CORRECTOR
C
 400     XT=X(NN)
         YT=YS(NN)
         ZT=ZS(NN)
         UT=US(NN)
evaluate CALL DERIV(XT,YT,ZT,UT,F1,F2,F3)
 y'n+1   DYDXS(NN)=F1
correct  TEMP=(9.*DYDXS(NN))+(19.*DYDX(N))-(5.*DYDX(N1))+DYDX(N2)
 y'n+1   Y(NN)=Y(N)+((H/24.)*TEMP)
         Y(NN)=YS(NN)+(W*(Y(NN)-YS(NN)))
         YT=Y(NN)
         CALL DERIV(XT,YT,ZT,UT,F1,F2,F3)
         DZDXS(NN)=F2
         TEMP=(9.*DZDXS(NN))+(19.*DZDX(N))-(5.*DZDX(N1))+DZDX(N2)
         Z(NN)=Z(N)+((H/24.)*TEMP)
         Z(NN)=ZS(NN)+(W*(Z(NN)-ZS(NN)))
         ZT=Z(NN)
         CALL DERIV(XT,YT,ZT,UT,F1,F2,F3)
         DUDXS(NN)=F3
         TEMP=(9.*DUDXS(NN))+(19.*DUDX(N))-(5.*DUDX(N1))+DUDX(N2)
         U(NN)=U(N)+((H/24.)*TEMP)
         U(NN)=US(NN)+(W*(U(NN)-US(NN)))
         ITER=ITER+1
C
C        CHECK FOR CONVERGENCE
C
         EY=((Y(NN)-YS(NN))/Y(NN))*100.
         EZ=((Z(NN)-ZS(NN))/Z(NN))*100.
         EU=((U(NN)-US(NN))/U(NN))*100.
         IF(ITER .GT. IMAX) GOTO 500
         IF(EY .GT. TOL) GOTO 600
         IF(EZ .GT. TOL) GOTO 600
         IF(EU .GT. TOL) GOTO 600
         GOTO 700
 500     WRITE(10,550)
 550     FORMAT('  CONVERGENCE NOT ACHIEVED IN SPECIFIED ITERATIONS')
         STOP
 600     YS(NN)=Y(NN)
         ZS(NN)=Z(NN)
         US(NN)=U(NN)
         GOTO 400
 700     XT=X(NN)
         YT=Y(NN)
         ZT=Z(NN)
         UT=U(NN)
         CALL DERIV(XT,YT,ZT,UT,F1,F2,F3)
         DYDX(NN)=F1
         DZDX(NN)=F2
         DUDX(NN)=F3
 800     CONTINUE
C
C        WRITE RESULTS
C
         DO 900 I=1,51
         YTRUE(I)=EXP(-0.1*X(I))+EXP(-0.2*X(I))+EXP(-0.3*X(I))
         ZTRUE(I)=EXP(-0.1*X(I))+EXP(-0.2*X(I))
         UTRUE(I)=EXP(-0.1*X(I))
         WRITE(10,850) X(I),Y(I),YTRUE(I),Z(I),ZTRUE(I),U(I),UTRUE(I)
 850     FORMAT(F4.2,'    ',2F11.6,'    ',2F11.6,'    ',2F11.6)
 900     CONTINUE
         STOP
         END
         SUBROUTINE DERIV(XT,YT,ZT,UT,F1,F2,F3)
```

```
      F1=(-0.3*YT)+(0.1*ZT)+(0.1*UT)
      F2=(-0.2*ZT)+(0.1*UT)
      F3=(-0.1*UT)
      RETURN
      END
```

RELAXATION FACTOR: 1.00

x	y	y exact	z	z exact	u	u exact.
.00	3.000000	3.000000	2.000000	2.000000	1.000000	1.000000
.01	2.994007	2.994007	1.997002	1.997002	.999000	.999000
.02	2.988028	2.988028	1.994010	1.994010	.998002	.998002
.03	2.982063	2.982063	1.991022	1.991022	.997005	.997005
.04	2.976112	2.976112	1.988040	1.988040	.996008	.996008
.05	2.970174	2.970174	1.985062	1.985062	.995012	.995012
.06	2.964251	2.964251	1.982090	1.982090	.994018	.994018
.07	2.958341	2.958341	1.979122	1.979122	.993024	.993024
.08	2.952445	2.952445	1.976159	1.976159	.992032	.992032
.09	2.946563	2.946563	1.973202	1.973202	.991040	.991040
.10	2.940694	2.940694	1.970249	1.970248	.990050	.990050
.11	2.934839	2.934839	1.967301	1.967301	.989060	.989060
.12	2.928998	2.928998	1.964357	1.964357	.988072	.988072
.13	2.923170	2.923170	1.961419	1.961419	.987084	.987084
.14	2.917356	2.917356	1.958486	1.958486	.986098	.986098
.15	2.911555	2.911555	1.955558	1.955557	.985112	.985112
.16	2.905768	2.905768	1.952634	1.952634	.984127	.984127
.17	2.899994	2.899994	1.949715	1.949715	.983144	.983144
.18	2.894233	2.894233	1.946801	1.946801	.982161	.982161
.19	2.888486	2.888486	1.943892	1.943892	.981179	.981179
.20	2.882753	2.882753	1.940988	1.940988	.980199	.980199
.21	2.877032	2.877032	1.938089	1.938089	.979219	.979219
.22	2.871325	2.871325	1.935194	1.935194	.978240	.978240
.23	2.865631	2.865631	1.932305	1.932304	.977262	.977262
.24	2.859950	2.859951	1.929420	1.929420	.976286	.976286
.25	2.854283	2.854283	1.926539	1.926539	.975310	.975310
.26	2.848628	2.848629	1.923664	1.923664	.974335	.974335
.27	2.842987	2.842987	1.920793	1.920793	.973361	.973361
.28	2.837358	2.837359	1.917928	1.917928	.972388	.972388
.29	2.831743	2.831744	1.915066	1.915066	.971416	.971416
.30	2.826141	2.826141	1.912210	1.912210	.970445	.970446
.31	2.820552	2.820552	1.909359	1.909359	.969476	.969476
.32	2.814975	2.814976	1.906512	1.906512	.968507	.968507
.33	2.809412	2.809412	1.903669	1.903669	.967538	.967539
.34	2.803861	2.803862	1.900832	1.900832	.966571	.966572
.35	2.798323	2.798324	1.897999	1.897999	.965605	.965605
.36	2.792799	2.792799	1.895171	1.895171	.964640	.964640
.37	2.787286	2.787287	1.892348	1.892348	.963676	.963676
.38	2.781787	2.781787	1.889529	1.889529	.962713	.962713
.39	2.776300	2.776300	1.886715	1.886715	.961751	.961751
.40	2.770826	2.770826	1.883906	1.883906	.960789	.960789
.41	2.765365	2.765365	1.881101	1.881101	.959829	.959829
.42	2.759916	2.759916	1.878301	1.878301	.958870	.958870
.43	2.754480	2.754480	1.875505	1.875506	.957911	.957911
.44	2.749056	2.749056	1.872715	1.872715	.956954	.956954
.45	2.743645	2.743644	1.869928	1.869929	.955997	.955997
.46	2.738246	2.738246	1.867147	1.867147	.955042	.955042
.47	2.732860	2.732860	1.864370	1.864370	.954087	.954087
.48	2.727486	2.727486	1.861598	1.861598	.953134	.953134
.49	2.722124	2.722124	1.858830	1.858830	.952181	.952181
.50	2.716775	2.716775	1.856067	1.856067	.951229	.951229

«توضیحات برنامه کامپیوتری»

(۱) صورت مساله است که در صفحهٔ ۱۱۵ داده شده است.

(۲) مقادیر ابتدایی به ازای x و y و z و U است.

(۳) توابعی است که به کمک حل تحلیلی برای y و z و U بدست آمده است.

(۴) دستوری است که با آن اعلام می‌کنیم که برای مقادیر x و y و z و U و... چه مقادیری بگیرد عدد (۵۱) که داخل پرانتز آمده است بیانگر تعداد اعداد در نظر گرفته شده است.

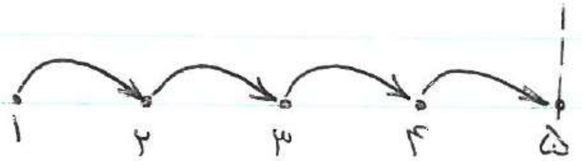
(۵) خطی است که از کاربر تقاضا می‌کند تا محاسبات را آغاز کند

(۶) میزان خطای مجاز «TOL» و همچنین حداکثر تعداد I در طول بازه در این خط مشخص شده

(۷) دستوری است که توسط برنامه برای Relaxation نمودن داده شده است.

(۸) با این دستور مقادیر اولیهٔ x و y و z و U به همراه بازه تغییرات H داده شده است.

(۹) با این دستور به برنامه اطلاع می‌دهیم که برای ~~...~~ x و y و z و U با گام‌های H شروع به محاسبه مقادیر جدید بنماید. در این قسمت با کمک روش رانگ کوتا تا مرحله ۵ پیش می‌آییم که در ۵ به مرحله (P) و (E) می‌رویم. در روش رانگ کوتا با Function Evaluation انجام بدهیم. به ازای مقادیر x و y می‌بایست حل را پیش ببرنیم.



ضمیمه: یادآوری در مورد خطاها

۱ ـ نمایش اعداد

عدد a را درنظر می‌گیریم و آنرا در مبنای ده به صورت زیر نمایش می‌دهیم :

$$a = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_{-m} 10^{-m} \quad .$$

عدد a را می‌توان به صورت زیر نشان داد :

$$a = a_n a_{n-1} \dots a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m} \quad .$$

بنابراین برای نمایش این عدد $n - m + 1$ رقم مورد نیاز است. ارقام موردنیاز برای نمایش برخی اعداد مثل عدد π، $\frac{1}{3}$ و $\sqrt{2}$ بینهایت است و برای ذخیره کردن این اعداد در کامپیوتر محدودیت وجود دارد و منجر به خطای اجتناب‌ناپذیری می‌شود که بعداً مورد بحث قرار می‌گیرد.

عدد a را می‌توانیم به شکل ممیز شناور نشان دهیم که به صورت زیر است :

$$a = b \times 10^N$$

N یک عدد صحیح مثبت یا منفی اشت و مشخصه یا نمای عدد نامیده می‌شود.

b هم مانتیس عدد نامیده می‌شود و: $0 \le b < 1$

برای مثال اگر بخواهیم عدد ۳۸/۴۲ به شکل ممیز شناور نشان دهیم داریم : $0/3842 \times 10^2$

اگر بخواهیم عدد a را در کامپیوتر ذخیره کنیم تنها تعداد محدودی از ارقام مانتیس را می‌توانیم به کار ببریم که منجر به خطای گرد کردن می‌شود.

خطای گرد کردن به علت جایگزین کردن یک عدد با شکل ممیز شناور آن حاصل می‌شود.

عدد a را درنظر می‌گیریم :

$$a = 0/d_1 d_2 \dots d_k d_{k+1} d_{k+2} \dots \times 10^n$$

که $1 \le d_1 \le 9$ و $0 \le d_j \le 9$ به ازای $j > 1$ است.

I) **روش قطع کردن**: در این روش ارقام $d_{k+1} d_{k+2} \dots$ بریده می‌شود و عدد به صورت زیر درمی‌آید :

$$a = 0/d_1 d_2 \dots d_k \times 10^n$$

II) **روش گرد کردن**: در این روش داریم:

هرگاه $d_{k+1} \geq ۵$ باشد یک رقم به d_k اضافه می‌کنیم یعنی به بالا گرد می‌کنیم.

هرگاه $d_{k+1} < ۵$ باشد کلیه ارقام بعد از d_k را می‌بریم.

مثال) عدد π را درنظر می‌گیریم می‌خواهیم شکل ممیز شناور آنرا با پنج رقم به دست آوریم:

عدد π را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\pi = ۰/۳۱۴۱۵۹۲۶۵ ... \times ۱۰^{۱}$$

شکل ممیز شناور عدد π با روش قطع کردن: $\pi = ۰/۳۱۴۱۵ \times ۱۰^{۱}$

شکل ممیز شناور عدد π با روش گرد کردن: $\pi = ۰/۳۱۴۱۶ \times ۱۰^{۱}$

۲ـ خطای مطلق و خطای نسبی

هرگاه $\bar{A}$ یک تقریب برای A باشد خطای مطلق به صورت زیر بیان می‌شود:

$$E_A = |A - \bar{A}|$$

یعنی خطای مطلق، اختلاف مقدار واقعی و مقدار تقریبی است.
خطای نسبی هم به صورت زیر بیان می‌شود:

$$R_A = \frac{E_A}{|A|} = \frac{|A-\bar{A}|}{|A|} \qquad (A \neq ۰)$$

توجه: هرگاه بخواهیم عدد $\bar{A}$ عدد A را با s رقم با معنی تقریب زنیم باید داشته باشیم:

$$\frac{|A-\bar{A}|}{|A|} < ۵ \times ۱۰^{-s}$$

که s بزرگترین عدد صحیح غیرمنفی است.
برای مثال اگر بخواهیم $\bar{A}$ عدد ۱۰۰۰ را با چهار رقم با معنی تقریب بزنیم باید داشته باشیم:

$$\left| \frac{\bar{A} - ۱۰۰۰}{۱۰۰۰} \right| < ۵ \times ۱۰^{-۴}$$

شرط فوق مستلزم آن است که $۹۹۹/۵ < \bar{A} < ۱۰۰۰/۵$ باشد.

۳ـ خطای برشی

خطای برشی عموماً به خطاهایی اطلاق می‌شود که به دلیل جایگزینی یک سری متناهی جهت تقریب زدن حاصل جمع یک سری نامتناهی ایجاد می‌شود.

برای مثال محاسبه انتگرال $\int_{0}^{0/5} e^{x^2}dx$ را درنظر می‌گیریم سری تیلور e^{x^2} عبارت است از :

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots$$

اگر در محاسبه انتگرال فوق از سه جمله اول استفاده کنیم داریم :

$$e^{x^2} \approx 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!}$$

خطایی که در اثر این کار حاصل می‌شود **خطای برشی** است.

نکته: در صورت همگرا بودن یک روش تکراری، خطای برشی با ادامه تکرار کاهش پیدا می‌کند.

۴ـ ارقام با معنی صحیح

هرگاه در یک عدد، بخش کسری n رقم با معنی صحیح داشته باشد خطای نسبی این عدد کوچکتر از $0/5 \times 10^{-n}$ است و بالعکس هرگاه خطای نسبی یک عدد کوچکتر یا مساوی $0/5 \times 10^{-n}$ باشد این عدد دارای n عدد با معنی صحیح است.

برای مثال اگر عدد $\frac{5}{6} \approx 0/83333333$ در نظر بگیریم این عدد دارای ۸ رقم با معنی است در نتیجه خطای آن از $0/5 \times 10^{-8}$ کمتر است.

۵ـ انتشار خطا

I) چهار عمل اصلی

فرض می‌کنیم $\bar{x}$ و $\bar{y}$ یک تقریب برای x و y باشند هرگاه E_x و E_y خطای مطلق این دو تقریب باشند

الف) جمع

$$x + y = (\bar{x} + E_x) + (\bar{y} + E_y) = (\bar{x} + \bar{y}) + (E_x + E_y)$$

خطای جمع: $\Rightarrow \quad E_{x+y} = E_x + E_y$

دقت نمایید که خطای ذکر شده تنها ناشی از خطای اعداد x و y است چون خطای گرد کردن ناشی از جمع $\bar{x}$ و $\bar{y}$ را در نظر نگرفتیم.

ب) تفریق

مانند قسمت الف عمل می‌کنیم و داریم :

$$E_{x-y} = E_x - E_y$$

ج) ضرب

$$xy = (\bar{x} + E_x)(\bar{y} + E_y) = \bar{x}\bar{y} + \bar{x}E_y + \bar{y}E_x + E_xE_y$$

از عبارت E_yE_y در مقابل سایر جملات صرفنظر می‌کنیم.

$$xy \approx \bar{x}\bar{y} + \bar{x}E_y + \bar{y}E_x$$

$$E_{xy} \approx \bar{x}E_y + \bar{y}E_x$$

د) تقسیم

$$\frac{x}{y} = \frac{\bar{x} + E_x}{\bar{y} + E_y} = \frac{\bar{x} + E_x}{\bar{y}} \left(\frac{1}{1 + \frac{E_y}{\bar{y}}}\right)$$

جمله داخل پرانتز را به صورت سری بسط می‌دهیم :

$$\frac{x}{y} = \frac{\bar{x} + E_x}{\bar{y}} \left[1 - \frac{E_y}{\bar{y}} + \left(\frac{E_y}{\bar{y}}\right)^2 - \ldots \right]$$

از جمله دوم به بعد را صرفنظر می‌کنیم و داریم :

$$\frac{x}{y} \approx \frac{\bar{x} + E_x}{\bar{y}} \left(1 - \frac{E_y}{\bar{y}}\right)$$

$$\frac{x}{y} \approx \frac{\bar{x}}{\bar{y}} + \frac{E_x}{\bar{y}} - \frac{\bar{x}}{\bar{y}^2}E_y$$

$$E_{x/y} \approx \frac{E_x}{\bar{y}} - \frac{\bar{x}}{\bar{y}^2}E_y$$

II) توابع

تابع $y = f(x)$ را در نظر می‌گیریم. هرگاه x دارای خطا باشد $f(x)$ هم دارای خطا خواهد بود که به طریق زیر تعیین می‌گردد:

هرگاه تابع $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ مفروض باشد به‌طوریکه y مقدار دقیق تابع f در نقطه

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ باشد داریم:

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n$$

Δx خطای متغیر مستقل x و Δy میزان انتشار خطا در y است.

$$\Delta y \approx \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n$$

مثال) در رابطه $y = ax_1^{\frac{1}{4}}x_2^{\frac{1}{3}}$ ، خطای نسبی در محاسبه y چند درصد می‌باشد؟ (خطای نسبی در اندازه‌گیری x_1 برابر ۸٪ و در مورد x_2 برابر ۳٪ می‌باشد) (مهندسی مخازن هیدروکربوری ۸۰)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل)

$$\Delta y \approx \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2$$

$$\Delta y \approx \frac{a}{4}x_1^{-\frac{3}{4}}x_2^{\frac{1}{3}}\Delta x_1 + \frac{a}{3}x_1^{\frac{1}{4}}x_2^{-\frac{2}{3}}\Delta x_2$$

$$\frac{\Delta y}{y} \approx \frac{1}{4}\frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{1}{3}\frac{\Delta x_2}{x_2}$$

$$\frac{\Delta y}{y} \approx \frac{1}{4}\times 8 + \frac{1}{3}\times 3 = \%3$$

مثال) اگر $x = 16$ و خطای اندازه‌گیری آن ۰/۰۱ باشد مقدار خطای اندازه‌گیری $y = 2x^2 + x + 4$ کدام است؟ (مهندسی نفت ۸۲)

۱) ۰/۶۵ ۲) ۰/۷۴ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۰/۱۵۲

حل)

$$\Delta y \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x$$

$$\Rightarrow \Delta y \approx (4x+1)\Delta x = (4\times 16 + 1)(0/01) = 0/65$$

نمونه مسأله

* روش حذفی گاوس - جردن

① دستگاه معادله روبرو را حل کنید:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 18 \\ 7 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

حل) سطر اول را در -2 ضرب می کنیم و همزمان با سطر دوم جمع می کنیم همچنین سطر اول را در -7 ضرب کرده و با سطر سوم جمع می کنیم، نتیجه چنین می شود:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & -20 & -25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} 1x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2 \\ 0x_1 + 1x_2 + 10x_3 = -3 \\ 0x_1 - 20x_2 - 25x_3 = -9 \end{cases}$$

اگر سطر دوم را در 20 ضرب کنیم و با سطر سوم جمع کنیم خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 175 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -69 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} 1x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 0x_1 + 1x_2 + 10x_3 = -3 \\ 0x_1 + 0x_2 + 175x_3 = -69 \end{cases}$$

از معادله سومی که بدست آمد ما برای x_3 داریم:

$$x_3 = \frac{-69}{175}$$

از معادله دومی که بدست آمد ما برای x_2 داریم:

$$x_2 = -3 - 10x_3 = -3 + \frac{690}{175} = \frac{165}{175}$$

از معادله اولی که بدست آمد ما برای x_1 بدست می آوریم:

$$x_1 = 2 - 3x_2 - 4x_3 = \frac{131}{175}$$

---

② دستگاه معادله روبرو را حل کنید:

$$\begin{bmatrix} 0/6 & 3/8 & 7 \\ 2/6 & 3/1 & 5 \\ 3/7 & 5/8 & 2/9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/7 \\ 2/6 \\ 3/4 \end{bmatrix}$$

حل) بزرگترین عنصر در ستون اول $3/7$ می باشد، پس جای سطر اول و سوم را عوض می کنیم و داریم:

$$\begin{bmatrix} 3/7 & 5/8 & 2/9 \\ 2/6 & 3/1 & 5 \\ 0/6 & 3/8 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 2/6 \\ 5/7 \end{bmatrix}$$

سطر اول را در $-\frac{2/6}{3/7} = -0/703$ ضرب می کنیم و با سطر سوم جمع می کنیم. همچنین سطر اول را هم

نمونهٔ مسأله

در $0/162 = \frac{-0/6}{3/7}$ ضرب می کنیم و با سطر سوم جمع می کنیم و خواهیم داشت :

$$\begin{bmatrix} 3/7 & 5/8 & 2/9 \\ 0 & -977 & 2/961 \\ 0 & 2/865 & 6/53 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 0/21 \\ 5/149 \end{bmatrix}$$

در این مرحله بزرگترین عنصر در ستون دوم که در زیر قطر و یا روی آن قرار گرفته است برابر ۲,۸۶ می باشد، پس سطر دوم و سوم را با یکدیگر عوض می کنیم و سپس سطر دوم را در $-0/342 = \frac{0/977}{2/86}$ ضرب و با سطر سوم جمع می کنیم، در این حالت خواهیم داشت :

$$x_3 = \frac{1/971}{5/194} = 0/379$$

$$x_2 = \frac{5/194 - 6/53\,x_3}{2/86} = 0/935$$

$$x_3 = \frac{3/4 - 5/8\,x_2 - 2/9\,x_3}{3/7} = -0/844$$

جوابها تا ۳ رقم اعشار صحیح می باشد

روش تجزیهٔ LU

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

(۳) ماتریس A را به صورت LU تجزیه کنید :

حل) معادلات را برای مقادیر l و U مطابق زیر بدست می آوریم :

$$L_{11} = 3 \qquad l_{21} = 1 \qquad l_{31} = 2 \qquad U_{12} = \frac{-1}{3} \qquad U_{13} = \frac{2}{3}$$

$$l_{22} = (2) - (1)\left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{7}{3} \qquad l_{32} = -2 - (2)\left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{-4}{3}$$

$$U_{23} = \frac{3 - (1)\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{7}{3}\right)} = 1 \qquad l_{33} = -1 - (2)\left(\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{-4}{3}\right)(1) = -1$$

$$L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{7}{3} & 0 \\ 2 & -\frac{4}{3} & -1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{3} & 2/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نمونه مسأله

۵) دستگاه معادلات خطی زیر را با کمک روشهای زیر حل کنید:

$$\begin{bmatrix} 7 & -4 & 0 \\ -4 & 12 & -6 \\ 0 & -6 & 14 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

الف) روش ژاکوبی

ب) روش گاوس-سایدل

حل) قبل از اینکه بخواهیم مساله را حل کنیم آن را از حالت ماتریسی خارج می کنیم:

$$\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 + 0x_3 = 12 \\ -4x_1 + 12x_2 - 6x_3 = 0 \\ 0x_1 - 6x_2 + 14x_3 = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{الف}}$ مقادیر $x_1^{(k+1)}$ و $x_2^{(k+1)}$ و $x_3^{(k+1)}$ را به صورت زیر بدست می آوریم:

$$\rightarrow x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3\right) = \frac{1}{7}\left(12 + 4x_2^{(k)}\right)$$

$$\rightarrow x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3\right) = \frac{1}{12}\left(4x_1^{(k)} + 6x_3^{(k)}\right)$$

$$\rightarrow x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2\right) = \frac{1}{14}\left(6x_2^{(k)}\right)$$

با انتخاب $X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ عملیات را آغاز می کنیم:

$$X_1^{(1)} = \frac{1}{7}(12+4) = 2{,}2857$$

$$X_2^{(1)} = \frac{1}{12}(4+6) = 0{,}8333$$

$$X_3^{(1)} = \frac{1}{14}(6) = 0{,}4286$$

مجدداً عملیات را با $X^{(1)} = \begin{bmatrix} 2{,}2857 \\ 0{,}8333 \\ 0{,}4286 \end{bmatrix}$ آغاز می کنیم:

$$X_1^{(2)} = \frac{1}{7}\left(12 + 4 \times 0{,}8333\right) = 2{,}1905$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{12}\left(4 \times 2{,}2857 + 6 \times 0{,}4286\right) = 0{,}9762$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{14}\left(6 \times 2{,}8333\right) = 0{,}3571$$

مقادیر x_1 و x_2 و x_3 که در رابطه بالا بدست آمد به عنوان X مرحله دوم وارد عملیات می کنیم. عملیات خود را آنقدر ادامه می دهیم تا به جواب برسیم. بهترین جوابی که داریم عبارتست از:

$x_1 = 2{,}264$ $\qquad$ $x_2 = 0{,}960$ $\qquad$ $x_3 = 0{,}411$

نمونه مسأله

(۴) دستگاه معادلات خطی روبرو را با کمک LU حل کنید:

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 3.8 & 7 \\ 2.6 & 3.1 & 5 \\ 3.7 & 5.8 & 2.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.7 \\ 2.6 \\ 3.4 \end{bmatrix}$$

(حل) معادلات را برای مقادیر L و U مطابق زیر بدست می آوریم:

$$L_{11}=1 \qquad L_{21}=0.162 \qquad L_{31}=0.703 \qquad U_{12}=5.8 \qquad U_{13}=2.9$$

$$L_{22}=(3.1)-(2.6)\left(\frac{3.8}{0.6}\right)=1 \qquad L_{32}=(5.8)-(3.7)\left(\frac{3.8}{5.6}\right)=0.342$$

$$U_{23}=\frac{5-(2.6)\left(\frac{3.1}{0.6}\right)}{1}=6.57 \qquad L_{33}=(2.9)-(3.7)\left(\frac{3.1}{5}\right)-(0.342)2.6=1$$

با توجه به عملیات بالا در نهایت داریم:

$$A'=\begin{bmatrix} 3.7 & 5.7 & 2.9 \\ 0.6 & 3.8 & 7 \\ 2.6 & 3.1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.162 & 1 & 0 \\ 0.703 & 0.342 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.7 & 5.8 & 2.9 \\ 0 & 2.86 & 6.57 \\ 0 & 0 & 5.194 \end{bmatrix} = LU$$

(توجه) ← قبل از محاسبهٔ LU به دلیل اینکه بزرگترین عنصر در ستون اول ۳٫۷ می باشد دو جای سطر اول و سوم را با همدیگر عوض کردیم. همچنین رابطه کلی برای معادله داریم:

$$AX=b \rightarrow \begin{bmatrix} 3.7 & 5.7 & 2.9 \\ 0.6 & 3.8 & 7 \\ 2.6 & 3.1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.7 \\ 2.6 \\ 3.4 \end{bmatrix}$$

$$LZ=b$$

در ماتریسهای بالا برای مقادیر b داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.162 & 1 & 0 \\ 0.703 & 0.34 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.7 \\ 2.6 \\ 3.4 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow Z_1=5.7$$

$$\longrightarrow 0.162Z_1+Z_2=2.6 \longrightarrow Z_2=5.149$$

$$\longrightarrow 0.703Z_1 \mp 0.342Z_2+Z_3=3.4 \longrightarrow Z_3=1.971$$

از طرفی ما برای مقادیر b نیز داریم:

$$UX=b$$

$$\begin{bmatrix} 3.7 & 5.8 & 2.9 \\ 0 & 2.86 & 6.57 \\ 0 & 0 & 5.194 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.7 \\ 5.149 \\ 1.971 \end{bmatrix}$$

به دلیل پایین مثلثی بودن ماتریس آن را وارونه مورد بررسی قرار می دهیم:

$$5.194\,x_3=1.971 \longrightarrow x_3=0.379$$

$$2.86\,x_2+6.53\,x_3=5.149 \longrightarrow x_2=0.935$$

$$3.7\,x_1+5.82\,x_2+2.9\,x_3=5.7 \longrightarrow x_3=-1.844$$

$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix} 0.379 \\ 0.935 \\ -0.844 \end{bmatrix}$$

$$y_{n+1} = y_n + h[y_n' + \tfrac{1}{2}\nabla y_n' + \tfrac{5}{12}\nabla^2 y_n' + \tfrac{3}{8}\nabla^3 y_n' + \tfrac{251}{720}\nabla^4 y_n' + \tfrac{475}{1440}\nabla^5 y_n' + \tfrac{19087}{60480}\nabla^6 y_n' + \cdots]$$

Adams–Moulton

$$y_{n+1} = y_n + h[y_{n+1}' - \tfrac{1}{2}\nabla y_{n+1}' - \tfrac{1}{12}\nabla^2 y_{n+1}' - \tfrac{1}{24}\nabla^3 y_{n+1}' - \tfrac{19}{720}\nabla^4 y_{n+1}' - \tfrac{3}{160}\nabla^5 y_{n+1}' - \tfrac{863}{60480}\nabla^6 y_{n+1}' + \cdots]$$

notation $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$

$y_n' = f_n'$

Predictor

TABLE 1.1

ADAMS–BASHFORTH FORMS

q	Coefficient of h	y_n'	y_{n-1}'	y_{n-2}'	y_{n-3}'	y_{n-4}'	y_{n-5}'	local truncation error
0	1	1						$\frac{1}{2}h^2 f'(\gamma)$
1	1/2	3	-1					$\frac{5}{12}h^3 f''(\gamma)$
2	1/12	23	-16	5				$\frac{9}{24}h^4 f'''(\gamma)$
3	1/24	55	-59	37	-9			$\frac{251}{720}h^5 f^{iv}(\gamma)$
4	1/720	1901	-2774	2616	-1274	251		$\frac{475}{1440}h^6 f^{v}(\gamma)$
5	1/1440	4277	-7923	9982	-7298	2877	-475	$\frac{19087}{60480}h^7 f^{vi}(\gamma)$

$$y_{n+1} = y_n + hy_n' \qquad (q = 0)$$

$$y_{n+1} = y_n + (h/2)[3y_n' - y_{n-1}'] \qquad (q = 1)$$

$$\xrightarrow{\text{predicts}} \overset{*}{y}_{n+1} = y_n + (h/12)[23y_n' - 16y_{n-1}' + 5y_{n-2}'] \qquad (q = 2)$$

$$y_{n+1} = y_n + (h/24)[55y_n' - 59y_{n-1}' + 37y_{n-2}' - 9y_{n-3}'] \qquad (q = 3)$$

Error $O\left(h^{q+2} f^{[q+1]}(\gamma)\right)$

Corrector

TABLE 1.2

ADAMS–MOULTON FORMS

q	Coefficient of h	y_{n+1}'	y_n'	y_{n-1}'	y_{n-2}'	y_{n-3}'	y_{n-4}'	local truncation error
0	1	1						$-\frac{1}{2}h^2 f'(\gamma)$
1	1/2	1	1					$-\frac{1}{12}h^3 f''(\gamma)$
2	1/12	5	8	-1				$-\frac{1}{24}h^4 f'''(\gamma)$
3	1/24	9	19	-5	1			$-\frac{19}{720}h^5 f^{iv}(\gamma)$
4	1/720	251	646	-264	106	-19		$-\frac{3}{160}h^6 f^{v}(\gamma)$
5	1/1440	475	1427	-798	482	-173	27	$-\frac{863}{60480}h^7 f^{vi}(\gamma)$

$$\underset{(q=2)}{\xrightarrow{\text{corrects}}} \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}\left[5y_{n+1}' + 8y_n' - y_{n-1}'\right]$$

TABLE 3-1

FINITE-DIFFERENCE FORMULAS FOR hy' AN[illegible] [illegible]IDISTANT GRID

Mult. factor	Coefficients in difference formula							Error		Formula no.
1	$\underline{-1}$	1						$-1/2$	$hy''(\xi)$	1
	-1	$\underline{1}$						$1/2$		2
1/2	$\underline{-3}$	4	-1					$1/3$		3
	-1	$\underline{0}$	1					$-1/6$	$h^2y'''(\xi)$	4
	1	-4	$\underline{3}$					$1/3$		5
1/6	$\underline{-11}$	18	-9	2				$-1/4$		6
	-2	$\underline{-3}$	6	-1				$1/12$	$h^3y^{(IV)}(\xi)$	7
	1	-6	$\underline{3}$	2				$-1/12$		8
	-2	9	-18	$\underline{11}$				$1/4$		9
1/12	$\underline{-25}$	48	-36	16	-3			$1/5$		10
	-3	$\underline{-10}$	18	-6	1			$-1/20$		11
	1	-8	$\underline{0}$	8	-1			$1/30$	$h^4y^{(V)}(\xi)$	12
	-1	6	-18	$\underline{10}$	3			$-1/20$		13
	3	-16	36	-48	$\underline{25}$			$1/5$		14
1/60	$\underline{-137}$	300	-300	200	-75	12		$-1/6$		15
	-12	$\underline{-65}$	120	-60	20	-3		$1/30$		16
	3	-30	$\underline{-20}$	60	-15	2		$-1/60$	$h^5y^{(VI)}(\xi)$	17
	-2	15	-60	$\underline{20}$	30	-3		$1/60$		18
	3	-20	60	-120	$\underline{65}$	12		$-1/30$		19
	-12	75	-200	300	-300	$\underline{137}$		$1/6$		20
1/60	$\underline{-147}$	360	-450	400	-225	72	-10	$1/7$		21
	-10	$\underline{-77}$	150	-100	50	-15	2	$-1/42$		22
	2	-24	$\underline{-35}$	80	-30	8	-1	$1/105$		23
	-1	9	-45	$\underline{0}$	45	-9	1	$-1/140$	$h^6y^{(VIII)}(\xi)$	24
	1	-8	30	-80	$\underline{35}$	24	-2	$1/105$		25
	-2	15	-50	100	-150	$\underline{77}$	10	$-1/42$		26
	10	-72	225	-400	450	-360	$\underline{147}$	$1/7$		27
	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6			

From: Kubicek & Hlavacek

Num. Sol^n of non-linear b.v.p. 1983

notes : $y \approx f$ — underline means at the data point.

e.g eq^n # 14 ,

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{@\text{ point } i} = \frac{1}{12h}\left[3f_{i-4} - 16f_{i-3} + 36f_{i-2} - 48f_{i-1} + 25f_i\right]$$

$$= \frac{1}{12h}\left[3f_0 - 16f_1 + 36f_2 - 48f_3 + 25f_4\right]$$

TABLE 3-2

[illegible]ITE-DIFFERENCE FORMULAS FOR h^2y'' AND EQUIDISTANT G[illegible]

Mult. factor	Coefficients in difference formula					Error				Formula no.
1	$\underline{1}$	-2	1			-1		$1/6$		1
	1	$\underline{-2}$	1			0	$hy^{(III)}(\xi_1)+$	$-1/12$	$h^2y^{(IV)}(\xi_2)$	2
	1	-2	$\underline{1}$			1		$-1/6$		3
1/6	$\underline{12}$	-30	24	-6		$11/12$		$-1/10$		4
	6	$\underline{-12}$	6	0		$-1/12$	$h^2y^{(IV)}(\xi_1)+$	$-1/30$	$h^3y^{(V)}(\xi_2)$	5
	0	6	$\underline{-12}$	6		$1/12$		$-1/30$		6
	-6	24	-30	$\underline{12}$		$11/12$		$-1/10$		7
1/24	$\underline{70}$	-208	228	-112	22	$-5/6$		$1/15$		8
	22	$\underline{-40}$	12	8	-2	$1/12$		$-1/60$		9
	-2	32	$\underline{-60}$	32	-2	0	$h^3y^{(IV)}(\xi_1)+$	$1/90$	$h^4y^{(VI)}(\xi_2)$	10
	-2	8	12	$\underline{-40}$	22	$-1/12$		$1/60$		11
	22	-112	228	-208	$\underline{70}$	$5/6$		$1/15$		12

TABLE 3-3

FINITE-DIFFERENCE FORMULAS FOR h^3y''' AND $h^4y^{(IV)}$ AND EQUIDISTANT GRID

Mult. factor	Coefficients in difference formula					Error		Formula no.
1	$\underline{-1}$	3	-3	1		$-3/2$		1
	-1	$\underline{3}$	-3	1		$-1/2$	$hy^{(IV)}(\xi)$	2
	-1	3	$\underline{-3}$	1		$1/2$		3
	-1	3	-3	$\underline{1}$		$3/2$		4
1/2	$\underline{-5}$	18	-24	14	-3	$7/4$		5
	-3	$\underline{10}$	-12	6	-1	$1/4$		6
	-1	2	$\underline{0}$	-2	1	$-1/4$	$h^2y^{(V)}(\xi)$	7
	1	-6	12	$\underline{-10}$	3	$1/4$		8
	3	-14	24	-18	$\underline{5}$	$7/4$		9
1	$\underline{1}$	-4	6	-4	1	-2		10
	1	$\underline{-4}$	6	-4	1	-1		11
	1	-4	6	$\underline{-4}$	1	1	$hy^{(V)}(\xi)$	12
	1	-4	6	-4	$\underline{1}$	2		13
	1	-4	$\underline{6}$	-4	1	$-1/6$	$h^2y^{(VI)}(\xi)$	14

P. 154

An Algorithm for the Runge–Kutta–Fehlberg Method

$$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n),$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{4}, y_n + \frac{k_1}{4}\right),$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x_n + \frac{3h}{8}, y_n + \frac{3k_1}{32} + \frac{9k_2}{32}\right),$$

$$k_4 = h \cdot f\left(x_n + \frac{12h}{13}, y_n + \frac{1932k_1}{2197} - \frac{7200k_2}{2197} + \frac{7296k_3}{2197}\right),$$

$$k_5 = h \cdot f\left(x_n + h, y_n + \frac{439k_1}{216} - 8k_2 + \frac{3680k_3}{513} - \frac{845k_4}{4104}\right),$$

$$k_6 = h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n - \frac{8k_1}{27} + 2k_2 - \frac{3544k_3}{2565} + \frac{1859k_4}{4104} - \frac{11k_5}{40}\right);$$

$$\hat{y}_{n+1} = y_n + \left(\frac{25k_1}{216} + \frac{1408k_3}{2565} + \frac{2197k_4}{4104} - \frac{k_5}{5}\right), \text{ with global error } O(h^4),$$

$$y_{n+1} = y_n + \left(\frac{16k_1}{135} + \frac{6656k_3}{12825} + \frac{28561k_4}{56430} - \frac{9k_5}{50} + \frac{2k_6}{55}\right), \quad \leftarrow \text{use as RK.}$$

with global error $O(h^5)$;

$$\text{Error, } E \doteq \frac{k_1}{360} - \frac{128k_3}{4275} - \frac{2197k_4}{75240} + \frac{k_5}{50} + \frac{2k_6}{55}.$$

error for stepsize control

$y_{n+1} - \hat{y}_{n+1}$

```
C
C       PROGRAM FOR GAUSSIAN ELIMINATION WITH PARTIAL PIVOTING
C       FOR THE SOLUTION OF A SYSTEM OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS.
C
C       PROGRAM NAME: GAUSS-E.FOR    (1)
C
C       A     THE COEFFICIENT MATRIX
C       C     THE RIGHT-HAND SIDE VECTOR
C       X     THE SOLUTION VECTOR
C       N     NUMBER OF EQUATIONS
C
```

At the end, Matrix of Equation E

At the end, RHS vector of Equation E

```
        REAL A(10,10),C(10),X(10),TEMP,BIG,SUM
        INTEGER I,J,K,N,PIVOT
        OPEN(10,FILE='GAUSS-E.RES',STATUS='NEW')
        OPEN(9,FILE='GAUSS-E.DAT',STATUS='OLD')
C
C       READ THE COEFFICIENT MATRIX, AND THE
C       RIGHT-HAND-SIDE VECTOR FROM THE DATA FILE.
C
        N=4
C
        DO 3 I=1,N
        READ(9,2)  (A(I,J),J=1,4)
  2     FORMAT(4F6.1)
  3     CONTINUE
C
        DO 5 I=1,N
        READ(9,4)  C(I)
  4     FORMAT(F6.1)
  5     CONTINUE
C
        NN=N-1
        DO 100 K=1,NN
```

implementation of equation (F) $k=1,\dots,n-1$

```
C
C       EMPLOY PARTIAL PIVOTING.
C       FIRST FIND THE PIVOT ELEMENT:
C
        PIVOT=K
        BIG=ABS(A(K,K))
        K1=K+1
        DO 10 I=K1,N
        TEMP=ABS(A(I,K))
        IF(TEMP .LE. BIG) GOTO 10
        BIG=TEMP
        PIVOT=I
 10     CONTINUE
        IF(PIVOT .EQ. K) GOTO 30
C
C       NEXT INTERCHANGE THE ROWS:
C
        DO 20 J=K,N
        TEMP=A(PIVOT,J)
        A(PIVOT,J)=A(K,J)
        A(K,J)=TEMP
 20     CONTINUE
        TEMP=C(PIVOT)
        C(PIVOT)=C(K)
        C(K)=TEMP
 30     CONTINUE
C
C       PERFORM FORWARD ELIMINATION
C
        DO 50 I=K1,N
        FACTOR=A(I,K)/A(K,K)
```

pivot element: largest element (ABS) below the pivot row.

implementation of equation (F) $i = k+1, \dots, n$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} a_{kj}^{(k-1)}$$

$$c_i^{(k)} = c_i^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \cdot c_k^{(k-1)}$$

→ FACTOR

implementation of Equation (F) $j = k1, \ldots, n$

```
      DO 40 J=K1,N
      A(I,J)=A(I,J)-(FACTOR*A(K,J))
 40   CONTINUE
      C(I)=C(I)-(FACTOR*C(K))
 50   CONTINUE
C
C
 100  CONTINUE
C
C
C     PERFORM BACK SUBSTITUTION
C
      X(N)=C(N)/A(N,N)
      DO 150 I=NN,1,-1
      SUM=0.0
      I1=I+1
      DO 120 J=I1,N
      SUM=SUM+(A(I,J)*X(J))
 120  CONTINUE
      X(I)=(C(I)-SUM)/A(I,I)
 150  CONTINUE
C
      WRITE RESULTS
C
      DO 200 I=1,N
      WRITE(10,250) I,X(I)
 250  FORMAT('      X',I1,F10.5)
 200  CONTINUE
      STOP
      END
```

note in equation (F)

$c_1^{(0)} = c_1$

$a_{1j}^{(0)} = a_{1j} \quad j = 1, \ldots, n$

i.e. elements unchanged.

$X(N)=C(N)/A(N,N) \longrightarrow$ Equation (G)

$i = n-1, \ldots, 1$ $(NN = N-1)$

equation (H)

$SUM=SUM+(A(I,J)*X(J)) \longrightarrow \sum_{j=i+1}^{n} (a_{ij}^{(i-1)} \cdot x_j)$

0.0	3.0	-4.0	2.0
2.0	6.0	4.0	-3.0
-1.0	-1.0	2.0	3.0
3.0	0.0	0.0	-5.0

coefficient matrix

```
 26.0
  9.0
  7.0
-19.0
```

Right-hand-side vector

```
X1   2.00000
X2   4.00000
X3  -1.00000
X4   5.00000
```

Solution

```
C
C       SOLUTION OF A SET OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS
C       USING THE FOURTH ORDER ADAMS-BASHFORTH, ADAMS-MOULTON
C       PREDICTOR-CORRECTOR METHOD WITH AN ITERATIVE ALGORITHM.
C       THE INTEGRATION IS STARTED USING CLASSIC FOURTH ORDER
C       RUNGE-KUTTA METHOD AND THE ITERATION PROCEDURE IS THE
C       THE GAUSS-SEIDEL WITH RELAXATION.
C
C       PROGRAM NAME: ABAMPC4.FOR       (19)
C
C       EXAMPLE CASE: dY/dX = -.3 Y + .1 Z + .1 U
C                     dZ/dX = -.2 Z + .1 U
C                     dU/dX = -.1 U
C
C       WITH INITIAL CONDITIONS: AT X=0, Y=3, Z=2, U=1
C
C       ANALYTICAL SOLUTION IS : Y = EXP(-.1X) + EXP(-.2X) + EXP(-.3X)
C                                Z = EXP(-.1X) + EXP(-.2X)
C                                U = EXP(-.1X)
C
      REAL X(51),Y(51),Z(51),U(51),DYDX(51),DZDX(51),DUDX(51)
      REAL YS(51),ZS(51),US(51),DYDXS(51),DZDXS(51),DUDXS(51)
      REAL YTRUE(51),ZTRUE(51),UTRUE(51),H,K1,K2,K3,K4
      REAL L1,L2,L3,L4,M1,M2,M3,M4
      OPEN(10,FILE='ABAMPC4.RES',STATUS='NEW')
C
C     SET TOLERANCE FOR ITERATION PROCEDURE
C     AND MAXIMUM NUMBER OF ITERATIONS
C
      TOL=0.00000001
      IMAX=50
C
C     SPECIFY THE RELAXATION FACTOR
C
      WRITE(*,7)
 7    FORMAT('  ENTER RELAXATION FACTOR')
      READ(*,8) W
 8    FORMAT(F4.2)
      WRITE(10,9) W
 9    FORMAT(' RELAXATION FACTOR: ',F4.2)
C
C     SPECIFY THE INITIAL CONDITION AND THE STEP SIZE.
C
      X(1)=0.0
      Y(1)=3.0
      Z(1)=2.0
      U(1)=1.0
      H=0.01
C
C     USE RK FOR THE FIRST 4 INTERVALS TO START
C     THE PREDICTOR-CORRECTOR METHOD.
C
      DO 100 J=2,5
      I=J-1
      XT=X(I)
      YT=Y(I)
      ZT=Z(I)
      UT=U(I)
      CALL DERIV(XT,YT,ZT,UT,F1,F2,F3)
      DYDX(I)=F1
      DZDX(I)=F2
      DUDX(I)=F3
      K1=H*F1
      L1=H*F2
```

```
      M1=H*F3
C
      XT=X(I)+(H/2.)
      YT=Y(I)+(K1/2.)
      ZT=Z(I)+(L1/2.)
      UT=U(I)+(M1/2.)
      CALL DERIV(XT,YT,ZT,UT,F1,F2,F3)
      K2=H*F1
      L2=H*F2
      M2=H*F3
C
      XT=X(I)+(H/2.)
      YT=Y(I)+(K2/2.)
      ZT=Z(I)+(L2/2.)
      UT=U(I)+(M2/2.)
      CALL DERIV(XT,YT,ZT,UT,F1,F2,F3)
      K3=H*F1
      L3=H*F2
      M3=H*F3
C
      XT=X(I)+H
      YT=Y(I)+K3
      ZT=Z(I)+L3
      UT=U(I)+M3
      CALL DERIV(XT,YT,ZT,UT,F1,F2,F3)
      K4=H*F1
      L4=H*F2
      M4=H*F3
C
      X(J)=X(I)+H
      Y(J)=Y(I)+((1./6.)*(K1+(2.*K2)+(2.*K3)+K4))
      Z(J)=Z(I)+((1./6.)*(L1+(2.*L2)+(2.*L3)+L4))
      U(J)=U(I)+((1./6.)*(M1+(2.*M2)+(2.*M3)+M4))
100   CONTINUE
C
      J=5
      XT=X(J)
      YT=Y(J)
      ZT=Z(J)
      UT=U(J)
      CALL DERIV(XT,YT,ZT,UT,F1,F2,F3)
      DYDX(J)=F1
      DZDX(J)=F2
      DUDX(J)=F3
C
C     END OF THE STARTER SEGMENT
C
      DO 800 N=5,50
      ITER=1
      N1=N-1
      N2=N-2
      N3=N-3
      NN=N+1
      X(NN)=X(N)+H
C
C     PREDICTOR
C                  y'
      TEMP=(55.*DYDX(N))-(59.*DYDX(N1))+(37.*DYDX(N2))-(9.*DYDX(N3))
      YS(NN)=Y(N)+((H/24.)*TEMP)
                                                  z'
      TEMP=(55.*DZDX(N))-(59.*DZDX(N1))+(37.*DZDX(N2))-(9.*DZDX(N3))
      ZS(NN)=Z(N)+((H/24.)*TEMP)
                                                  u'
      TEMP=(55.*DUDX(N))-(59.*DUDX(N1))+(37.*DUDX(N2))-(9.*DUDX(N3))
      US(NN)=U(N)+((H/24.)*TEMP)
C
```

$\left.\begin{array}{l}\text{YS}\\ \text{ZS}\\ \text{US}\end{array}\right\}$ predicted values. y^*_{n+1} z^*_{n+1} u^*_{n+1}

```
C        USE GAUSS-SEIDEL ITERATION ON THE CORRECTOR
C
 400     XT=X(NN)
         YT=YS(NN)
         ZT=ZS(NN)
         UT=US(NN)
evaluate CALL DERIV(XT,YT,ZT,UT,F1,F2,F3)
 y'n+1 <- DYDXS(NN)=F1
         TEMP=(9.*DYDXS(NN))+(19.*DYDX(N))-(5.*DYDX(N1))+DYDX(N2)
correct <- Y(NN)=Y(N)+((H/24.)*TEMP)
 yn+1    Y(NN)=YS(NN)+(W*(Y(NN)-YS(NN)))
         YT=Y(NN)
         CALL DERIV(XT,YT,ZT,UT,F1,F2,F3)
         DZDXS(NN)=F2
         TEMP=(9.*DZDXS(NN))+(19.*DZDX(N))-(5.*DZDX(N1))+DZDX(N2)
         Z(NN)=Z(N)+((H/24.)*TEMP)
         Z(NN)=ZS(NN)+(W*(Z(NN)-ZS(NN)))
         ZT=Z(NN)
         CALL DERIV(XT,YT,ZT,UT,F1,F2,F3)
         DUDXS(NN)=F3
         TEMP=(9.*DUDXS(NN))+(19.*DUDX(N))-(5.*DUDX(N1))+DUDX(N2)
         U(NN)=U(N)+((H/24.)*TEMP)
         U(NN)=US(NN)+(W*(U(NN)-US(NN)))
         ITER=ITER+1
C
C        CHECK FOR CONVERGENCE
C
         EY=((Y(NN)-YS(NN))/Y(NN))*100.
         EZ=((Z(NN)-ZS(NN))/Z(NN))*100.
         EU=((U(NN)-US(NN))/U(NN))*100.
         IF(ITER .GT. IMAX) GOTO 500
         IF(EY .GT. TOL) GOTO 600
         IF(EZ .GT. TOL) GOTO 600
         IF(EU .GT. TOL) GOTO 600
         GOTO 700
 500     WRITE(10,550)
 550     FORMAT('  CONVERGENCE NOT ACHIEVED IN SPECIFIED ITERATIONS')
         STOP
 600     YS(NN)=Y(NN)
         ZS(NN)=Z(NN)
         US(NN)=U(NN)
         GOTO 400
     DO  XT=X(NN)
     7   YT=Y(NN)
         ZT=Z(NN)
         UT=U(NN)
         CALL DERIV(XT,YT,ZT,UT,F1,F2,F3)
         DYDX(NN)=F1
         DZDX(NN)=F2
         DUDX(NN)=F3
 800     CONTINUE
C
C        WRITE RESULTS
C
         DO 900 I=1,51
         YTRUE(I)=EXP(-0.1*X(I))+EXP(-0.2*X(I))+EXP(-0.3*X(I))
         ZTRUE(I)=EXP(-0.1*X(I))+EXP(-0.2*X(I))
         UTRUE(I)=EXP(-0.1*X(I))
         WRITE(10,850) X(I),Y(I),YTRUE(I),Z(I),ZTRUE(I),U(I),UTRUE(I)
 850     FORMAT(F4.2,'    ',2F11.6,'    ',2F11.6,'    ',2F11.6)
 900     CONTINUE
         STOP
         END
         SUBROUTINE DERIV(XT,YT,ZT,UT,F1,F2,F3)
```

```
      F1=(-0.3*YT)+(0.1*ZT)+(0.1*UT)
      F2=(-0.2*ZT)+(0.1*UT)
      F3=(-0.1*UT)
      RETURN
      END
```

RELAXATION FACTOR: 1.00

x	Y	Yexact	Z	Zexact	U	Uexact
.00	3.000000	3.000000	2.000000	2.000000	1.000000	1.000000
.01	2.994007	2.994007	1.997002	1.997002	.999000	.999000
.02	2.988028	2.988028	1.994010	1.994010	.998002	.998002
.03	2.982063	2.982063	1.991022	1.991022	.997005	.997005
.04	2.976112	2.976112	1.988040	1.988040	.996008	.996008
.05	2.970174	2.970174	1.985062	1.985062	.995012	.995012
.06	2.964251	2.964251	1.982090	1.982090	.994018	.994018
.07	2.958341	2.958341	1.979122	1.979122	.993024	.993024
.08	2.952445	2.952445	1.976159	1.976159	.992032	.992032
.09	2.946563	2.946563	1.973202	1.973202	.991040	.991040
.10	2.940694	2.940694	1.970249	1.970248	.990050	.990050
.11	2.934839	2.934839	1.967301	1.967301	.989060	.989060
.12	2.928998	2.928998	1.964357	1.964357	.988072	.988072
.13	2.923170	2.923170	1.961419	1.961419	.987084	.987084
.14	2.917356	2.917356	1.958486	1.958486	.986098	.986098
.15	2.911555	2.911555	1.955558	1.955557	.985112	.985112
.16	2.905768	2.905768	1.952634	1.952634	.984127	.984127
.17	2.899994	2.899994	1.949715	1.949715	.983144	.983144
.18	2.894233	2.894233	1.946801	1.946801	.982161	.982161
.19	2.888486	2.888486	1.943892	1.943892	.981179	.981179
.20	2.882753	2.882753	1.940988	1.940988	.980199	.980199
.21	2.877032	2.877032	1.938089	1.938089	.979219	.979219
.22	2.871325	2.871325	1.935194	1.935194	.978240	.978240
.23	2.865631	2.865631	1.932305	1.932304	.977262	.977262
.24	2.859950	2.859951	1.929420	1.929420	.976286	.976286
.25	2.854283	2.854283	1.926539	1.926539	.975310	.975310
.26	2.848628	2.848629	1.923664	1.923664	.974335	.974335
.27	2.842987	2.842987	1.920793	1.920793	.973361	.973361
.28	2.837358	2.837359	1.917928	1.917928	.972388	.972388
.29	2.831743	2.831744	1.915066	1.915066	.971416	.971416
.30	2.826141	2.826141	1.912210	1.912210	.970445	.970446
.31	2.820552	2.820552	1.909359	1.909359	.969476	.969476
.32	2.814975	2.814976	1.906512	1.906512	.968507	.968507
.33	2.809412	2.809412	1.903669	1.903669	.967538	.967539
.34	2.803861	2.803862	1.900832	1.900832	.966571	.966572
.35	2.798323	2.798324	1.897999	1.897999	.965605	.965605
.36	2.792799	2.792799	1.895171	1.895171	.964640	.964640
.37	2.787286	2.787287	1.892348	1.892348	.963676	.963676
.38	2.781787	2.781787	1.889529	1.889529	.962713	.962713
.39	2.776300	2.776300	1.886715	1.886715	.961751	.961751
.40	2.770826	2.770826	1.883906	1.883906	.960789	.960789
.41	2.765365	2.765365	1.881101	1.881101	.959829	.959829
.42	2.759916	2.759916	1.878301	1.878301	.958870	.958870
.43	2.754480	2.754480	1.875505	1.875506	.957911	.957911
.44	2.749056	2.749056	1.872715	1.872715	.956954	.956954
.45	2.743645	2.743644	1.869928	1.869929	.955997	.955997
.46	2.738246	2.738246	1.867147	1.867147	.955042	.955042
.47	2.732860	2.732860	1.864370	1.864370	.954087	.954087
.48	2.727486	2.727486	1.861598	1.861598	.953134	.953134
.49	2.722124	2.722124	1.858830	1.858830	.952181	.952181
.50	2.716775	2.716775	1.856067	1.856067	.951229	.951229

امتحان محاسبات عددی

① روابط زیر را با استفاده از الف) روش تکرار ژاکوبی ب) روش گوس سایدل حل کنید.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 20 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 14 \\ 3x_1 + 4x_2 - x = 16 \end{cases}$$

② الف) $x^2 - 8x + 12 = 0$ را از روش NRFP حل کنید.
ب) از روش نیوتن رافسون با ۲ تکرار حل کنید.

③ الف) با استفاده از ... $hD = \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \dots$ یک فرمول ۴ نقطه‌ای برای f'_i با f_{i+1} ، f_{i+2} ، f_i ،

f_{i-1} با استفاده از $E = 1 + \Delta$ بدست آورید.

ب) با استفاده از سیمپسون $\frac{3}{8}$ ، $\int_1^7 F(x)\,dx$ با $h = 1$ *

④ $$\frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + x = y$$

$$\text{at } x = 0 \quad y = 2 \quad , \quad \frac{dy}{dx} = 1 \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2$$

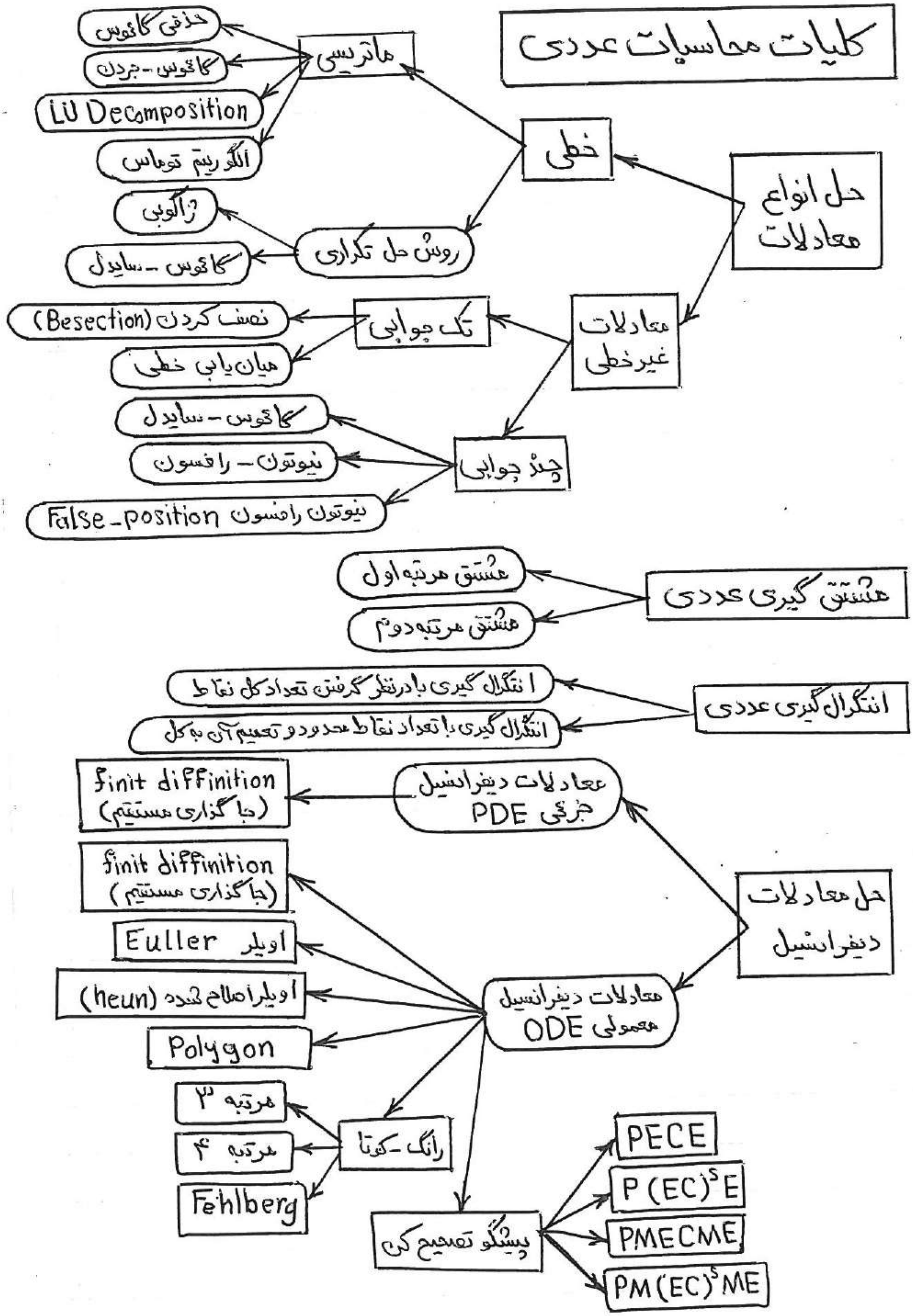
از روش هیون با گام ۰٫۵ در $x = 0.5$ حساب کنید: $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(y'_n + y'_{n+1}\right)$

⑤ استفاده از رایج کتاب و جزوه‌ها یا P.C (دو ...) [توضیح خارج از ... قبول است]

بخش چهارم

محاسبات عددی

کلیات محاسبات عددی



✻ روشهای حل مساله با ماتریس :

$$A \cdot X = C \Leftarrow \begin{cases} A \rightarrow \text{ماتریس ربعی که ضرایب معادله را دارد} \\ X \rightarrow \text{متغیرهای وابسته} \\ C \rightarrow \text{ماتریس پاسخ} \end{cases}$$

$$\left|\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & x_m \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_m \end{array}\right|$$

✻ روش حذفی گاوس :

برمبنای تبدیل ماتریس ضرایب به ماتریس بالا مثلثی است :

$$\left|\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & C_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & C_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & C_3 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & C_1^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & C_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & C_3^{(2)} \end{array}\right|$$

عبارت درون پرانتز بیانگر تعداد عملیات بر روی عضو است

رابطه عملیاتی که بر روی هرعضو انجام می گیرد عبارتست از :

$$* \; a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \times a_{kj}^{(k-1)} \qquad * \; x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[C_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_i \right]_{i=n-1,\dots,1}$$

$$* \; C_i^{(k)} = C_i^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} C_k^{(k-1)} \qquad * \; x_n = \frac{C_n}{a_{nn}}$$

✻ گاوس - جردن :

این روش حل همانند گاوس است با این تفاوت که ما ماتریس ضرایب را به ماتریس واحد تبدیل می کنیم :

$$\left|\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & C_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & C_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & C_3 \end{array}\right| \longrightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & C_1^{(3)} \\ 0 & 1 & 0 & C_2^{(3)} \\ 0 & 0 & 1 & C_3^{(3)} \end{array}\right|$$

تذکر

روابطی که مورد استفاده قرار می گیرد همان روابط حذفی گاوس است . با این تفاوت که آن روابط در ۳ مرحله انجام شده است و رابطه بالا بدست آمده است ✻

LU Decomposition :

در این روش ماتریس ضرایب را به ۲ ماتریس مثلثی تبدیل می کنیم :

$$A = L \times U$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ 0 & 1 & U_{23} & U_{24} \\ 0 & 0 & 0 & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

در این روش حل معادلات طی ۳ مرحله زیر انجام می گیرد :

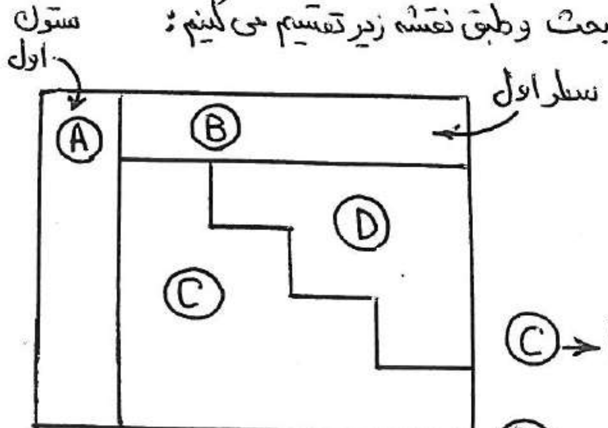
$A = L \times U \longleftarrow \boxed{\text{مرحله اول}}$

$LD = C \longleftarrow \boxed{\text{مرحله دوم}}$

$UX = D \longleftarrow \boxed{\text{مرحله سوم}}$

مرحله اول

در این مرحله ماتریس ضرایب را به مانند ابتدای مبحث وطبق نقشه زیر تقسیم می کنیم :



$$(A) \rightarrow L_{i1} = a_{i1} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$(B) \rightarrow U_{1j} = \frac{a_{1j}}{L_{11}} \qquad j = 2, \ldots, n$$

$$(C) \rightarrow L_{ij} = a_{ij} - \sum_{K=1}^{K=j-1} L_{iK} U_{Kj} \qquad \begin{cases} j = 2, \ldots, n \\ i = j, \ldots, n \end{cases}$$

$$(D) \rightarrow U_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{K=1}^{K=j-1} L_{iK} U_{Kj}}{L_{ii}} \qquad \begin{cases} i = 2, \ldots, n-1 \\ j = i+1, \ldots, n \end{cases}$$

مرحله دوم

نحوه عمل به صورت روبرو ست :

$$L \times D = C$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix}}_{\text{در مرحله اول حساب شد}} \times \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس جواب}}$$

بنابراین مقادیر ماتریس d عبارت خواهد بود از:

$$* \; d_i = \frac{C_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} d_k}{l_{ii}} \qquad i=2,\dots,n$$

$$* \; d_1 = \frac{C_1}{L_{11}}$$

مرحله سوم

نحوه عمل به صورت روبروست:

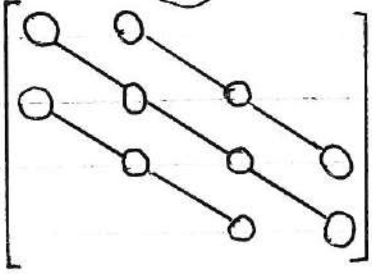
$$D = UX$$

$$\begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ 0 & 1 & U_{23} & U_{24} \\ 0 & 0 & 1 & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

به طور خلاصه مقادیر x عبارت خواهد بود از:

$$* \; X_j = d_j - \sum_{k=j+1}^{n} U_{jk} x_k \qquad j=n-1,\dots,1 \qquad\qquad * \; X_n = d_n$$

الگوریتم توماس:



این روشی است که برای ماتریس ضرایب سه قطری به کار می‌رود.

ماتریس سه قطری به صورت روبرو است:

مراحل حل این روش عبارت است از:

مرحله اول ← $A = L.U$

مرحله دوم ← $C = L.D$

مرحله سوم ← $D = U.X$

مرحله اول

در این مرحله ماتریس ضرایب به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ & & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 & & & \\ a_{21} & \beta_2 & & \\ & a_{32} & \beta_3 & \\ & & a_{43} & \beta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 & & \\ & 1 & \gamma_2 & \\ & & 1 & \gamma_3 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

مقادیر β و γ عبارتست از:

$$* \quad \gamma_j = \frac{a_{j,j+1}}{\beta_j} \longleftarrow \boxed{j = 1, \ldots, n-1} \quad *$$

$$* \quad \beta_j = a_{jj} - a_{j,j-1} \times \gamma_{j-1} \longleftarrow \boxed{j = 2, \ldots, n} \qquad * \; \beta_1 = a_{11}$$

مرحله دوم

نحوهٔ عمل ما به صورت روبرو است:

$$C = L \times D$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1 & & & \\ a_{21} & \beta_2 & & \\ & a_{32} & \beta_3 & \\ & & a_{43} & \beta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}$$

بنابرین مقادیر ماتریس d عبارتست از:

$$d_K = \frac{C_K - a_{K,K-1} d_{K-1}}{\beta} \qquad K = 2, \ldots, n \qquad d_1 = \frac{C_1}{\beta_1}$$

مرحله سوم

نحوهٔ عمل ما به صورت روبرو است:

$$U X = D$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 & & \\ & 1 & \gamma_2 & \\ & & 1 & \gamma_3 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

به طور خلاصه مقادیر x عبارت خواهد شد از:

$$* \; X_n = d_n$$

$$* \; X_K = d_K - X_{K+1} \qquad K = 1, \ldots, n-1$$

روشهای حل تکراری:

★ روش ژاکوبی:

این روش برای n معادله n مجهول به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = C_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = C_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = C_n \end{cases}$$

از رابطه ای که در بالا بدست آمده است x_i را استخراج می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_1 = \{C_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n\} / a_{11} \\ x_2 = \{C_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n\} / a_{22} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_n = \{C_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{n\,n-1}x_{n-1}\} / a_{nn} \end{cases}$$

روش حل

① حدس اولیه برای آن می‌زنیم: $x_i^K = 0 \quad i=1,2,\dots,n$ $\boxed{K=0 \text{ مرتبه عملیات}}$

② این حدس اولیه را در رابطه قرار می‌دهیم تا x_i^{K+1} حساب شود:

$$x_1^{K+1} = \{C_1 - a_{12}x_2^{(K)} - a_{13}x_3^{(K)} - \dots - a_{1n}x_n^{(K)}\} / a_{11}$$

$$x_2^{K+1} = \{C_2 - a_{21}x_1^{(K)} - a_{23}x_3^{(K)} - \dots - a_{2n}x_n^{(K)}\} / a_{22}$$

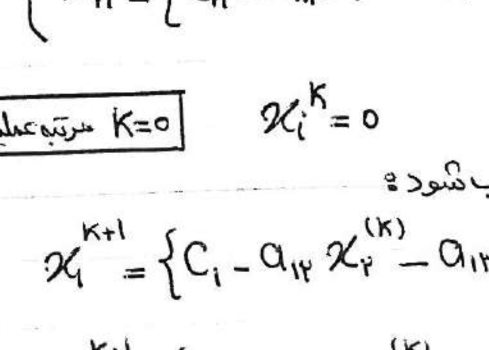
$$\vdots$$

$$x_n^{K+1} = \{C_n - a_{n1}x_1^{(K)} - a_{n2}x_2^{(K)} - \dots - a_{n\,n-1}x_{n-1}^{(K)}\} / a_{nn}$$

③ روابطی که در بالا گفته شد به شرطی برقرار است که: $a_{ii} \neq 0 \quad \boxed{i=1,2,\dots,n}$

④ اگر $|x_i^{K+1} - x_i^K| < \varepsilon$ باشد x_i^{K+1} حساب می‌شود وگرنه یک شمارنده به x_i اضافه می‌کند.

به طور نمادین این روش عبارتست:



✱ روش گاوس - سایدل (جایگزینی متوالی):

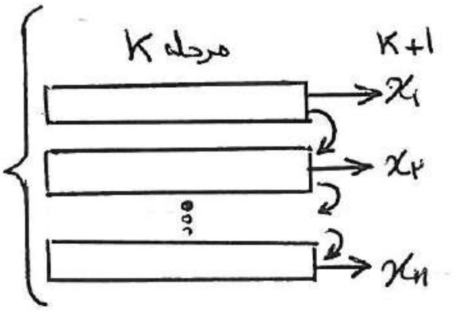
اصول کلی این روش مثل ژاکوبی است. تنها یکسری تغییرات جزئی در آن وجود دارد به طور خلاصه عبارتست:

① حدس اولیه $\quad x_i^{(k)}=0 \quad i=1,\dots,n$ $\quad$ $\boxed{\text{مرتبه عملیاتی } K=0}$

②
$$x_1^{(k+1)}=\{C_1-a_{12}x_2^{(k)}-a_{13}x_3^{(k)}-\dots-a_{1n}x_n^{(k)}\}/a_{11}$$
$$x_2^{(k+1)}=\{C_2-a_{21}x_1^{(k+1)}-a_{23}x_3^{(k)}-\dots-a_{2n}x_n^{(k)}\}/a_{22}$$
$$x_3^{(k+1)}=\{C_3-a_{31}x_1^{(k+1)}-a_{32}x_2^{(k+1)}-a_{34}x_4^{(k)}-\dots-a_{3n}x_n^{(k)}\}/a_{33}$$
$$\vdots$$
$$x_n^{(k+1)}=\{C_n-a_{n1}x_1^{(k+1)}-a_{n2}x_2^{(k+1)}-\dots-a_{n\,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}-a_{nn}x_n^{(k)}\}/a_{nn}$$

③ $|x_i^{k+1}-x_i^{k}|<Tole \xrightarrow{\text{بله}} x_i$ حساب می‌شود

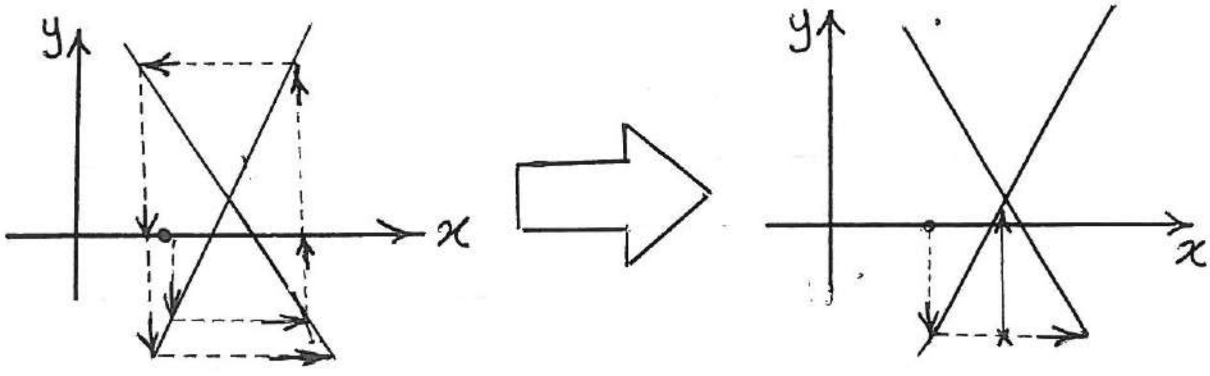
شکل این عملیات به صورت نمادین به شکل زیر است:



✱ Relaxation:

در روشهای حل تکراری اگر نمودار واگرا شد و یا سرعت همگرایی کم داشت از Relaxation استفاده می‌کنیم. رابطه آن به صورت روبرو است:

$$x_{New}=W\,x_{New}+(1-W)\,x_{old}$$



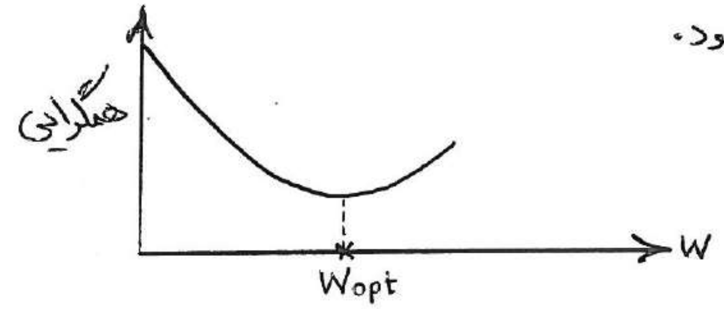
نمودار واگرا

همان نمودار با اعمال Relaxation

نکات مربوط به Relaxation :

1. محاسبات همیشه با $(W=1)$ آغاز می‌گردد. یا محاسبات همگرا و یا واگرا می‌شود.
2. اگر در $(W=1)$ واگرا شود، آنگاه W عبارتست از: $0<W<1$
3. اگر $(W=1)$ همگرا شود، آنگاه W عبارتست از: $1<W<2$
4. افزایش بیش از حد W باعث واگرایی می‌شود.
5. برای W باید W_{opt} را انتخاب نمود.

برای بدست آوردن W_{opt} مساله را به ازای مقدارهای مختلف حساب می‌کنیم و داریم:



«معادلات غیرخطی»

روشهای محاسبات معادله‌های تک جوابی (روش بسته):

نصف کردن (Bisection):

مراحل انجام این روش به همراه شکل در زیر بیان شده است:

1) $X_L \cdot f(x_L)<0$

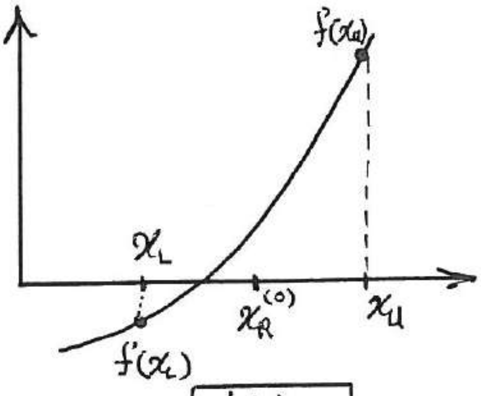
2) $X_R \cdot f(x_R)>0$

3) $f(x_L)\cdot f(x_R)<0 \longrightarrow x_R>0 \Longrightarrow x_u=x_R$

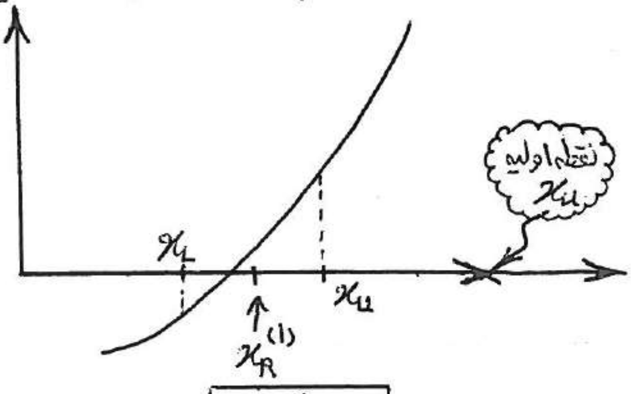
$f(x_L)\cdot f(x_R)>0 \longrightarrow x_R<0 \Longrightarrow x_L=x_R$

$f(x_L)\cdot f(x_R)\cong 0 \longrightarrow$ به جواب می‌رسیم

اعمالی که در بالا انجام دادیم مطابق شکل زیر است:



مرحله اول



مرحله دوم

در اینجا x_R عبارتست از:

$$x_R^{New}=\frac{x_L+x_u}{2}$$

* میان یابی خطی :

مراحل حل انجام این روش به همراه شکل در زیر نشان داده شده است :

① $x_L \cdot f(x_L) < 0$

$x_u \cdot f(x_u) > 0$

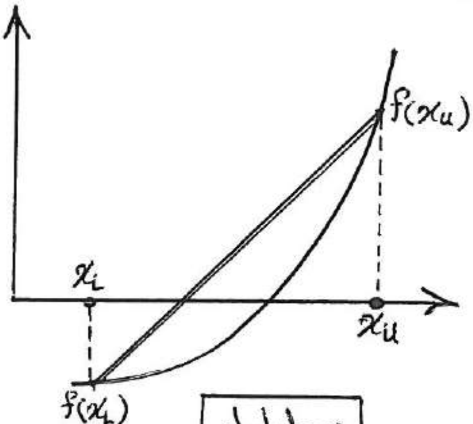
② $x_R = x_u + \dfrac{f(x_0)(x_L - x_0)}{f(x) - f(x_0)}$

③ $f(x_L) \cdot f(x_R) < 0 \longrightarrow x_R = x_u$

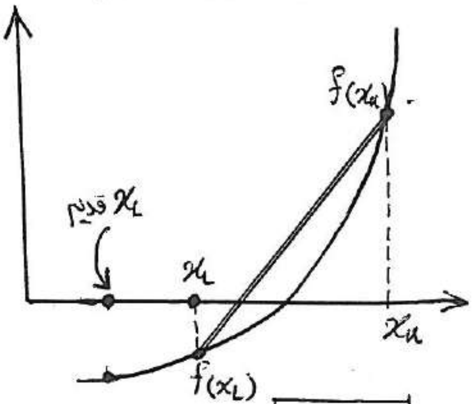
$f(x_L) \cdot f(x_R) > 0 \longrightarrow x_R = x_L$

$f(x_L) \cdot f(x_R) \cong 0 \longrightarrow$ انجام شد

اعمالی که در بالا انجام شد مطابق نمودار زیر است :



مرحله اول



مرحله دوم

---

* روشهای محاسبات معادله های چند جوابی (روش باز) :

⇐ روش گاوس - سایدل :

این روش به صورت روبرو است : $x = g(x) \longrightarrow x^{(k+1)} = g(x^{k+1})$

این روش جزء محاسبات حل تکراری است که در گذشته پیرامون آن توضیح داده شد. در حل غیر خطی هم قابل استفاده است.

⇐ نیوتون - رافسون :

رابطه نیوتون - رافسون به صورت روبرو است :

$$x^{k+1} = x^{k} - \frac{f(x^{k})}{f'(x^{k})}$$

نحوهٔ عملکرد نیوتون-رافسون به طور شماتیک در زیر نشان داده شده است:

$$x^k \longrightarrow \boxed{g(x)} \longrightarrow x^{k+1}$$

$$x^k \longrightarrow \boxed{\text{تابع}} \longrightarrow f(x^k)$$

$$x^k \longrightarrow \boxed{\text{DERIN}} \longrightarrow f'(x^k)$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید تابع $g(x)$ مقدار x^k را به x^{k+1} تبدیل می‌کند برای این کار با روش تحلیلی ابتدا x^k به $f(x^k)$ و همچنین x^k به $f'(x^k)$ تبدیل می‌شود که با این ۲ عامل $f(x^k)$ و $f'(x^k)$ مقدار x^{k+1} حساب می‌شود.

⟸ نیوتون - رافسون False-position :

در این روش نیازی نداریم از روش تحلیلی استفاده کنیم و $g(x)$ تعیین کنیم و ... در اینجا فقط $f(x^{k+1})$ را مطابق شکل زیر محاسبه می‌کنیم:

$$x^k \longrightarrow \boxed{\text{Function}} \longrightarrow f(x^k)$$

رابطهٔ این روش به صورت زیر است:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{\left(\dfrac{f(x^k) - f(x^{k-1})}{x^k - x^{k-1}}\right)}$$

$\boxed{\text{در این روش ما نیازمند ۲ حدس مقدار اولیه } x^k \text{ و } x^{k-1} \text{ برای حل معادله هستیم}}$

برای چند معادله داریم:

$$\bar{J}(x^r) \cdot \Delta \bar{x}^r = -f(\bar{x}^r)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{r+1} - x_1^r \\ x_2^{r+1} - x_2^r \\ \vdots \\ x_n^{r+1} - x_n^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1^r, x_2^r, \ldots, x_n^r) \\ f_2(x_1^r, x_2^r, \ldots, x_n^r) \\ \vdots \\ f_n(x_1^r, x_2^r, \ldots, x_n^r) \end{bmatrix}$$

«مشتق گیری عددی»

اصولاً مشتق گیری برمبنای جدول ضمیمه شده به این بخش است که داریم :

✻ مشتق مرتبه اول :

برای مشتق مرتبه اول از (Table 3.1) این برگه استفاده می‌کنیم که نحوه استفاده از آن در زیر نشان داده شده است :

ضرایب درون فرمول

خطا

ضرایبی که درجلوی $\frac{1}{h}$ قرار می گیرد

Mult. factor	Coefficients in difference formula							Error		Formula no.	
1	$\underline{-1}$	1						$-1/2$	$hy''(\xi)$	1	۲ نقطه
	-1	$\underline{1}$						$1/2$		2	
1/2	$\underline{-3}$	4	-1					$1/3$		3	۳ نقطه
	-1	$\underline{0}$	1					$-1/6$	$h^2y'''(\xi)$	4	
	1	-4	$\underline{3}$					$1/3$		5	
1/6	$\underline{-11}$	18	-9	2				$-1/4$		6	۴ نقطه
	-2	$\underline{-3}$	6	-1				$1/12$	$h^3y^{(IV)}(\xi)$	7	
	1	-6	$\underline{3}$	2				$-1/12$		8	
	-2	9	-18	$\underline{11}$				$1/4$		9	
1/12	$\underline{-25}$	48	-36	16	-3			$1/5$		10	۵ نقطه
	-3	$\underline{-10}$	18	-6	1			$-1/20$		11	
	1	-8	$\underline{0}$	8	-1			$1/30$	$h^4y^{(V)}(\xi)$	12	
	-1	6	-18	$\underline{10}$	3			$-1/20$		13	
	3	-16	36	-48	$\underline{25}$			$1/5$		14	
1/60	$\underline{-137}$	300	-300	200	-75	12		$-1/6$		15	۶ نقطه
	-12	$\underline{-65}$	120	-60	20	-3		$1/30$		16	
	3	-30	$\underline{-20}$	60	-15	2		$-1/60$	$h^5y^{(VI)}(\xi)$	17	
	-2	15	-60	$\underline{20}$	30	-3		$1/60$		18	
	3	-20	60	-120	$\underline{65}$	12		$-1/30$		19	
	-12	75	-200	300	-300	$\underline{137}$		$1/6$		20	
1/60	$\underline{-147}$	360	-450	400	-225	72	-10	$1/7$		21	۷ نقطه
	-10	$\underline{-77}$	150	-100	50	-15	2	$-1/42$		22	
	2	-24	$\underline{-35}$	80	-30	8	-1	$1/105$		23	
	-1	9	-45	$\underline{0}$	45	-9	1	$-1/140$	$h^6y^{(VII)}(\xi)$	24	
	1	-8	30	-80	$\underline{35}$	24	-2	$1/105$		25	
	-2	15	-50	100	-150	$\underline{77}$	10	$-1/42$		26	
	10	-72	225	-400	450	-360	$\underline{147}$	$1/7$		27	

درهنگام هنگام استفاده از این جدول می بایست نکاتی را درنظر گرفت که به طور خلاصه دربالای همان کاغذ ضمیمه نوشته شده است . مثلاً درمشتق گیری ۴ نقطه ای نسبت به نقطه سوم (Formula NO. 8) رابطه مشتق عددی عبارتست از:

° ° x °
۱ ۲ ۳ ۴

$$f'_i = \left(\frac{1}{6}\right)\frac{1}{h}\left[\bigcirc f_{i-2} + \bigcirc f_{i-1} + \bigcirc f_i + \bigcirc f_{i+1}\right]$$

$\frac{1}{h}$ ازستون ضرایب

اعداد ازستون ضرایب

✱ مشتق مرتبه دوم :

برای مشتق مرتبه دوم از (Table 3.2) برگه ضمیمه استفاده می کنیم که این جدول در زیر نشان داده شده است و نحوه عمل به مانند مرتبه اول است :

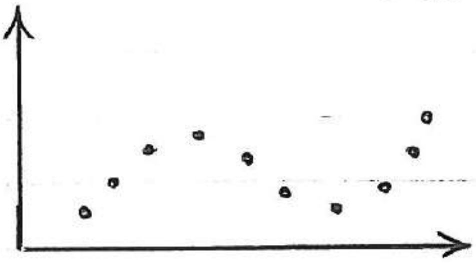
ضرایبی که در فرمول ظاهر می شود

خطا

ضرایبی که در جلوی $\frac{1}{h^2}$ ظاهر می شود.

Mult. factor	Coefficients in difference formula					Error				Formula no.	
1	$\underline{1}$	−2	1			−1		1/6		1	۳ نقطه ای
	1	$\underline{-2}$	1			0	$hy^{(III)}(\xi_1)+$	−1/12	$h^2y^{(IV)}(\xi_2)$	2	
	1	−2	$\underline{1}$			1		−1/6		3	
1/6	$\underline{12}$	−30	24	−6		11/12		−1/10		4	۴ نقطه ای
	6	$\underline{-12}$	6	0		−1/12	$h^2y^{(IV)}(\xi_1)+$	−1/30	$h^3y^{(V)}(\xi_2)$	5	
	0	6	$\underline{-12}$	6		1/12		−1/30		6	
	−6	24	−30	$\underline{12}$		11/12		−1/10		7	
1/24	$\underline{70}$	−208	228	−112	22	−5/6		1/15		8	۵ نقطه ای
	22	$\underline{-40}$	12	8	−2	1/12		−1/60		9	
	−2	32	$\underline{-60}$	32	−2	0	$h^3y^{(V)}(\xi_1)+$	1/90	$h^4y^{(VI)}(\xi_2)$	10	
	−2	8	12	$\underline{-40}$	22	−1/12		1/60		11	
	22	−112	228	−208	$\underline{70}$	5/6		1/15		12	

« انتگرال گیری عددی »



اگر یکسری نقاط به مانند روبرو داشته باشیم به ۲ روش می توان سطح زیر نمودار روبرو را محاسبه کرد :

① انتگرال گیری با در نظر گرفتن کل نقاط :

n	تعداد نقاط	فرمول انتگرال گیری	نام روش
۱	۲	$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{۲}(f_0+f_1)$	ذوزنقه
۲	۳	$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{۳}(f_0+۴f_1+f_2)$	سیمپسون $\frac{۱}{۳}$
۳	۴	$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{۳h}{۸}(f_0+۳f_1+۳f_2+f_3)$	سیمپسون $\frac{۳}{۸}$
۴	۵	$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = \frac{۲h}{۴۵}(۷f_0+۳۲f_1+۱۲f_2+۳۲f_3+۷f_4)$	قانون Bools
۵	۶	$\int_{x_0}^{x_5} f(x)dx = \frac{۵h}{۲۸۸}(۱۹f_0+۷۵f_1+۵۰f_2+۷۵f_3+۱۹f_5)$	نیوتون Cots

جدول مشتق عددی

TABLE 3-1

FINITE-DIFFERENCE FORMULAS FOR hy' ANI 'IIDISTANT GRID

Mult. factor	Coefficients in difference formula							Error		Formula no.
1	$\underline{-1}$	1						$-1/2$	$hy''(\xi)$	1
	-1	$\underline{1}$						$1/2$		2
1/2	$\underline{-3}$	4	-1					$1/3$	$h^2y'''(\xi)$	3
	-1	$\underline{0}$	1					$-1/6$		4
	1	-4	$\underline{3}$					$1/3$		5
1/6	$\underline{-11}$	18	-9	2				$-1/4$	$h^3y^{(IV)}(\xi)$	6
	-2	$\underline{-3}$	6	-1				$1/12$		7
	1	-6	$\underline{3}$	2				$-1/12$		8
	-2	9	-18	$\underline{11}$				$1/4$		9
1/12	$\underline{-25}$	48	-36	16	-3			$1/5$	$h^4y^{(V)}(\xi)$	10
	-3	$\underline{-10}$	18	-6	1			$-1/20$		11
	1	-8	$\underline{0}$	8	-1			$1/30$		12
	-1	6	-18	$\underline{10}$	3			$-1/20$		13
	3	-16	36	-48	$\underline{25}$			$1/5$		14
1/60	$\underline{-137}$	300	-300	200	-75	12		$-1/6$	$h^5y^{(VI)}(\xi)$	15
	-12	$\underline{-65}$	120	-60	20	-3		$1/30$		16
	3	-30	$\underline{-20}$	60	-15	2		$-1/60$		17
	-2	15	-60	$\underline{20}$	30	-3		$1/60$		18
	3	-20	60	-120	$\underline{65}$	12		$-1/30$		19
	-12	75	-200	300	-300	$\underline{137}$		$1/6$		20
1/60	$\underline{-147}$	360	-450	400	-225	72	-10	$1/7$	$h^6y^{(VII)}(\xi)$	21
	-10	$\underline{-77}$	150	-100	50	-15	2	$-1/42$		22
	2	-24	$\underline{-35}$	80	-30	8	-1	$1/105$		23
	-1	9	-45	$\underline{0}$	45	-9	1	$-1/140$		24
	1	-8	30	-80	$\underline{35}$	24	-2	$1/105$		25
	-2	15	-50	100	-150	$\underline{77}$	10	$-1/42$		26
	10	-72	225	-400	450	-360	$\underline{147}$	$1/7$		27
	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6			

From: Kubicek & Hlavacek

Num. Sol$^{\underline{n}}$ of non-linear b.v.p. 1983

notes : $y \approx f$ — underline means at the data point.

e.g. eq$^{\underline{n}}$ # 14 :

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{@\text{ point } i} = \frac{1}{12h}\left[3f_{i-4} - 16f_{i-3} + 36f_{i-2} - 48f_{i-1} + 25f_i\right]$$
$$= \frac{1}{12h}\left[3f_0 - 16f_1 + 36f_2 - 48f_3 + 25f_4\right]$$

TABLE 3-2

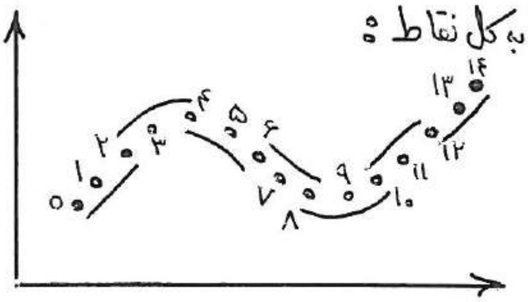
'ITE-DIFFERENCE FORMULAS FOR h^2y'' AND EQUIDISTANT G

Mult. factor	Coefficients in difference formula					Error				Formula no.
1	$\underline{1}$	-2	1			-1	$hy^{(III)}(\xi_1)+$	$1/6$	$h^2y^{(IV)}(\xi_2)$	1
	1	$\underline{-2}$	1			0		$-1/12$		2
	1	-2	$\underline{1}$			1		$-1/6$		3
1/6	$\underline{12}$	-30	24	-6		$11/12$	$h^2y^{(IV)}(\xi_1)+$	$-1/10$	$h^3y^{(V)}(\xi_2)$	4
	6	$\underline{-12}$	6	0		$-1/12$		$-1/30$		5
	0	6	$\underline{-12}$	6		$1/12$		$-1/30$		6
	-6	24	-30	$\underline{12}$		$11/12$		$-1/10$		7
1/24	$\underline{70}$	-208	228	-112	22	$-5/6$	$h^3y^{(V)}(\xi_1)+$	$1/15$	$h^4y^{(VI)}(\xi_2)$	8
	22	$\underline{-40}$	12	8	-2	$1/12$		$-1/60$		9
	-2	32	$\underline{-60}$	32	-2	0		$1/90$		10
	-2	8	12	$\underline{-40}$	22	$-1/12$		$1/60$		11
	22	-112	228	-208	$\underline{70}$	$5/6$		$1/15$		12

TABLE 3-3

FINITE-DIFFERENCE FORMULAS FOR h^3y''' AND $h^4y^{(IV)}$ AND EQUIDISTANT GRID

Mult. factor	Coefficients in difference formula					Error		Formula no.
1	$\underline{-1}$	3	-3	1		$-3/2$	$hy^{(IV)}(\xi)$	1
	-1	$\underline{3}$	-3	1		$-1/2$		2
	-1	3	$\underline{-3}$	1		$1/2$		3
	-1	3	-3	$\underline{1}$		$3/2$		4
1/2	$\underline{-5}$	18	-24	14	-3	$7/4$	$h^2y^{(V)}(\xi)$	5
	-3	$\underline{10}$	-12	6	-1	$1/4$		6
	-1	2	$\underline{0}$	-2	1	$-1/4$		7
	1	-6	12	$\underline{-10}$	3	$1/4$		8
	3	-14	24	-18	$\underline{5}$	$7/4$		9
1	$\underline{1}$	-4	6	-4	1	-2	$hy^{(V)}(\xi)$	10
	1	$\underline{-4}$	6	-4	1	-1		11
	1	-4	6	$\underline{-4}$	1	1		12
	1	-4	6	-4	$\underline{1}$	2		13
	1	-4	$\underline{6}$	-4	1	$-1/6$	$h^2y^{(VI)}(\xi)$	14



② انتگرال گیری با تعداد نقاط محدود و تعمیم آن به کل نقاط :

در این روش ما به صورت نمادین به مانند

شکل روبرو عمل می کنیم :

در این روش گام ما به صورت زیر است :

$$h=\frac{b-a}{2m}$$

a ابتدای بازه

b انتهای بازه

m تعداد نقاط

براساس این روش فرمولهای انتگرال گیری عبارتست از :

ذوزنقه : $$\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx=\frac{b-a}{m}\left(f_0+4f_1+2f_2+\dots+2f_{m-1}+f_m\right)$$

سیمپسون $\frac{1}{3}$: $$\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx=\frac{b-a}{m}\left(f_0+4f_1+2f_2+4f_3+\dots+2f_{m-2}+4f_{m-1}+f_m\right)$$

ضرایب f زوج ← ۲ / ضرایب f فرد ← ۴ / ضرایب اول و آخر ← ۱

سیمپسون $\frac{3}{8}$: $$\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx=\frac{3(b-a)}{8}\left(f_0+3f_1+3f_2+2f_3+\dots+2f_{m-3}+3f_{m-2}+3f_{m-1}+f_m\right)$$

جملات اول و آخر ← ۱ / ضرایب جملات ضریب ۳ ← ۲ / ضرایب جملات غیرمضرب ۳ ← ۳

« حل معادلات دیفرانسیل با روش عددی »

به طور کلی انواع معادلات دیفرانسیل عبارتست از :

① معادلات دیفرانسیل با مشتق جزئی PDE : وابسته به بیش از یک متغیر مستقل است.

$$\frac{dT}{dx}=\frac{1}{\alpha}\frac{dT}{dt} \longrightarrow$$ این معادله دیفرانسیل وابسته به مکان و زمان می باشد

② معادلات دیفرانسیل معمولی ODE : این معادله وابسته به یک متغیر مستقل است :

$$\frac{d^2T}{dx^2}=0 \longrightarrow$$ فقط وابسته به x است

---

① معادلات دیفرانسیل PDE :

در این معادلات دیفرانسیل به ازای هر عبارت دیفرانسیلی معادل مشتق عددی آن را جا گذاری می کنیم. مثال :

$$\frac{dT}{dx}=\frac{1}{\alpha}\frac{dT}{dt}$$

$$\frac{dT}{dx} : \frac{T_{i+1}-T_{i-1}}{2\Delta x}$$

$$\frac{dT}{dt} : \frac{T_{i+1}-T_{i-1}}{2\Delta t}$$

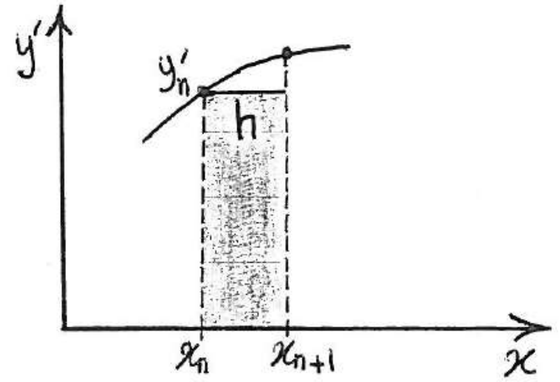
$$\frac{T_{i+1}-T_{i-1}}{2\Delta x}=\frac{1}{\alpha}\,\frac{T_{i+1}-T_{i-1}}{2\Delta t}$$

۲) معادلات دیفرانسیل ODE :

روشهایی که برای حل داریم عبارت هستند از:

⇐ finit diffinition : یعنی دقیقاً مثل معادلات دیفرانسیل PDE عمل می کنیم و به جای عبارت دیفرانسیل معادل مشتق عددی آن را قرار می دهیم:

⇐ قانون اویلر:

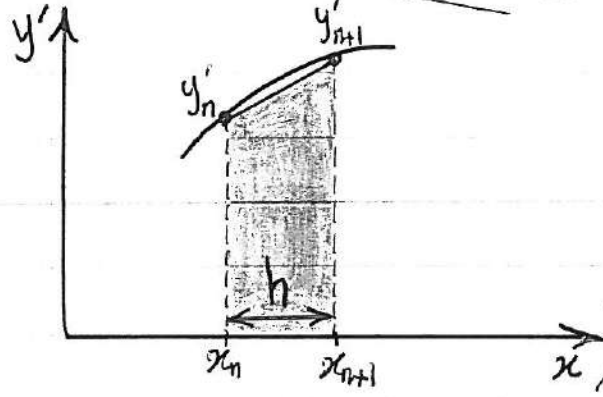


اگر نمودار معادله دیفرانسیلی به صورت روبرو باشد:

$$\frac{dy}{dx} = y' \quad \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ y'_0 = f(x_0, y_0) \end{cases}$$

با توجه به قانون اویلر مقدار y_{n+1} عبارتست از:

$$y_{n+1} = y_n + y'_n \cdot h \rightarrow \boxed{y'_n = f(x_n, y_n)}$$



⇐ قانون اویلر اصلاح شده (Heun) :

برای اویلر اصلاح شده مطابق نمودار روبرو داریم:

$$\frac{dy}{dx} = y'_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$$

رابطه ای که در این روش استفاده می شود به صورت زیر است:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(y'_n + y'_{n+1}\right)$$

به طور خلاصه مراحلی را که برای این روش انجام می دهیم عبارتست از:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(y'_n + y'_{n+1}\right)$$

به طور خلاصه مراحلی را که برای این روش انجام می دهیم عبارتست از:

۱) مرحله پیشگویی: ابتدا y^*_{n+1} را حدس می زنیم. برای بدست آوردن y^*_{n+1} را با اویلر معمولی حساب می کنیم:

$$y^*_{n+1} = y_n + y'_n \cdot h$$

۲) مرحله تصحیح: مقدار y^*_{n+1} بدست آمده از طریق اویلر معمولی را در رابطه دیفرانسیل قرار می دهیم:

$$y'^*_{n+1} = f(x_{n+1}, y^*_{n+1}) \leftarrow \boxed{x_{n+1} = x_n + h}$$

۳) مرحله محاسبه نهایی: مقدار y'^*_{n+1} که در مرحله ۲ بدست آمد را در رابطه اویلر اصلاح شده قرار می دهیم:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(y'_n , y'^*_{n+1}\right)$$

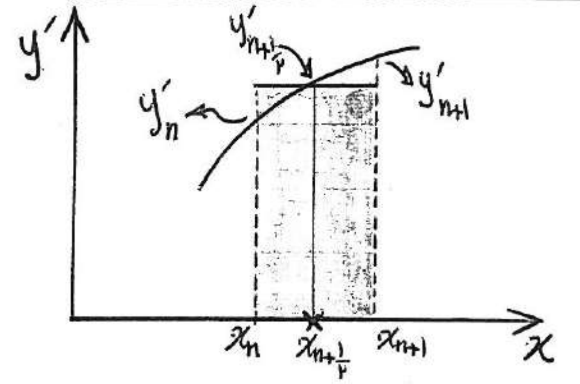
۴ مرحله تعیین جواب قطعی : مقدار y_{n+1} را که از روش اویلر و اویلر اصلاح شده بدست آمده مقایسه می کنیم و داریم :

$$|y_{n+1} - y^{*}_{n+1}| < Tol \rightarrow$$ y_{n+1} محاسبه شده است

نکته

قوانین اویلر و اویلر اصلاح شده از بسط تیلور پیروی می کند. در اویلر پس از یک جمله قطع شده است و در اویلر اصلاح شده پس از ۲ جمله قطع می شود.

بسط تیلور : $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-x_0)^n$



⟸ روش Polygon :

شکل نمودار این روش به صورت روبرو است :

در این روش برای پیشگویی به جای اینکه یک گام به جلو برویم $\frac{1}{2}$ گام به جلو می رویم :

روش کار Polygon به صورت زیر است :

$$y'_n = f(x_n , y_n)$$

$$y^{*}_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2} y'_n$$

$$y'^{*}_{n+\frac{1}{2}} = f(x_{n+\frac{1}{2}} , y^{*}_{n+\frac{1}{2}})$$

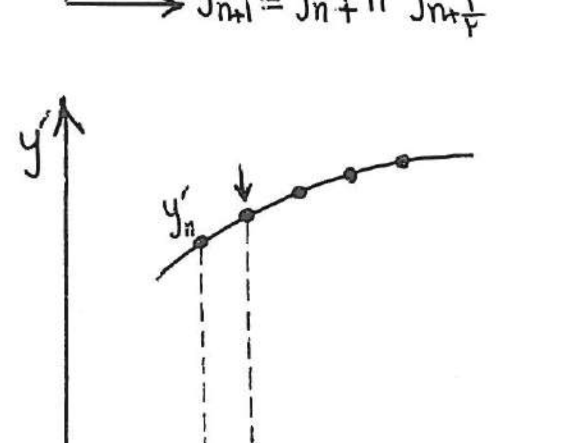
$$y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2} y'^{*}_{n+\frac{1}{2}}$$

NO

$$|y_{n+\frac{1}{2}} - y^{*}_{n+\frac{1}{2}}| < Tole$$

Yes

$$y_{n+1} = y_n + h\, y'_{n+\frac{1}{2}}$$



⟸ رانگ کوتا :

رانگ کوتا روشی است که به وسیله آن از چند نقطه بعد از نقطه مورد نظر y_{n+1} را حساب می کند. انواع رانگ کوتا عبارتست از :

الف) رانگ کوتا مرتبه ۳

ب) رانگ کوتا مرتبه ۴

ج) رانگ کوتا Fehlberg

الف) رانگ کوتا مرتبه ۳:

اگر معادله دیفرانسیل به صورت روبرو باشد:

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)=y' \qquad \begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0 \end{cases}$$

جواب معادله: $y_{n+1}=y_n+\sum_{i=1}^{v}\omega_i K_i$

ω_i : Weight factor تابع وزنی

K_i : function Evalution عملگر ارزشی

v : خطامتناسب باروش

K_i در رابطهٔ y_{n+1} عبارتست از:

$$K_i=hf\left(x_n+C_i h\,,\,y_n+\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}K_j\right)$$

بنابراین K_1 تا K_3 برای رانگ کوتا مرتبه ۳ عبارت خواهد بود از:

$$* \; K_1=hf(x_n\,,\,y_n)$$

$$* \; K_2=hf(x_n+C_2h\,,\,y_n+a_{21}K_1)$$

$$* \; K_3=hf(x_n+C_3h\,,\,y_n+a_{31}K_1+a_{32}K_2)$$

در رابطهٔ K_i مقادیر ثابت a و C وجود دارد همچنین برای محاسبه y_{n+1} ازمقدار ثابت تابع وزنی ω_i استفاده می کنیم. این مقادیر ثابت ازجدول زیر بدست می آید:

$C_1=0$			
C_2	a_{21}		
C_3	a_{31}	a_{32}	
	ω_1	ω_2	ω_3

ب) رانگ کوتا مرتبه ۴:

ازنظرعملکرد و روابط مثل رانگ کوتا مرتبه ۳ است یعنی داریم:

شکل معادله $\quad \dfrac{dy}{dx}=f(x,y)=y' \qquad \begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0 \end{cases}$

جواب معادله $\longrightarrow y_{n+1}=y_n+\sum_{i=1}^{v}\omega_i K_i$

$$K_i=hf\left(x_n+C_i h\,,\,y_n+\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}K_j\right)$$

برای محاسبه مقادیرثابتی که درمعادله رانگ کوتا ظاهر می گردد، ۲حالت داریم:

حالت اول $\longrightarrow$ رانگ کوتا مرتبه ۴ کلی

حالت دوم $\longrightarrow$ رانگ کوتا مرتبه ۴ کلاسیک

براساس هرکدام از ۲حالت مطرح شده دربالا جدول مقادیر و K_i متفاوت می شود که عبارتست از:

$\longleftarrow$

حالت اول

$C_1=0$				
C_2	a_{21}			
C_3	a_{31}	a_{32}		
C_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4

* $K_1 = hf(x_n , y_n)$
* $K_2 = hf(x_n + C_2 h \,,\, y_n + a_{21} K_1)$
* $K_3 = hf(x_n + C_3 h \,,\, y_n + a_{31} K_1 + a_{32} K_2)$
* $K_4 = hf(x_n + C_4 h \,,\, y_n + a_{41} K_1 + a_{42} K_2 + a_{43} K_3)$

برابر اساس y_{n+1} عبارتست از:

$$y_{n+1} = y_n + (\omega_1 K_1 + \omega_2 K_2 + \omega_3 K_3)$$

حالت دوم

0				
1/2	1/2			
1/2	0	1/2		
1	0	0	1	
	1/6	1/3	1/3	1/6

* $K_1 = hf(x_n , y_n)$
* $K_2 = hf(x_n + \frac{1}{2} h \,,\, y_n + \frac{1}{2} K_1)$
* $K_3 = hf(x_n + \frac{1}{2} h \,,\, y_n + \frac{1}{2} K_2)$
* $K_4 = hf(x_n + h \,,\, y_n + K_3)$

برابر اساس y_{n+1} به صورت زیر درمی آید:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

ج) رانگ کوتا Fehlberg :

در این رانگ کوتا برای ۲ رانگ کوتا مرتبه ۴ و ۵ محاسبات y_{n+1} و k_i به صورت عباراتی چند جمله‌ای در زیر به همراه خطا بیان شده است. تنها کافیست برای محاسبه y_{n+1} برحسب مرتبه ۴ یا ۵ مقادیر x_n و y_n و h را در این روابط جایگزین می‌کنیم :

An Algorithm for the Runge–Kutta–Fehlberg Method

$$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n),$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{4}, y_n + \frac{k_1}{4}\right),$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x_n + \frac{3h}{8}, y_n + \frac{3k_1}{32} + \frac{9k_2}{32}\right),$$

$$k_4 = h \cdot f\left(x_n + \frac{12h}{13}, y_n + \frac{1932k_1}{2197} - \frac{7200k_2}{2197} + \frac{7296k_3}{2197}\right),$$

$$k_5 = h \cdot f\left(x_n + h, y_n + \frac{439k_1}{216} - 8k_2 + \frac{3680k_3}{513} - \frac{845k_4}{4104}\right),$$

$$k_6 = h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n - \frac{8k_1}{27} + 2k_2 - \frac{3544k_3}{2565} + \frac{1859k_4}{4104} - \frac{11k_5}{40}\right);$$

$$\hat{y}_{n+1} = y_n + \left(\frac{25k_1}{216} + \frac{1408k_3}{2565} + \frac{2197k_4}{4104} - \frac{k_5}{5}\right), \text{ with global error } O(h^4),$$

$$y_{n+1} = y_n + \left(\frac{16k_1}{135} + \frac{6656k_3}{12825} + \frac{28561k_4}{56430} - \frac{9k_5}{50} + \frac{2k_6}{55}\right), \quad \leftarrow \text{use as RK.}$$

with global error $O(h^5)$;

$$\text{Error, } E \doteq \frac{k_1}{360} - \frac{128k_3}{4275} - \frac{2197k_4}{75240} + \frac{k_5}{50} + \frac{2k_6}{55}.$$

error for stepsize control

⟸ روش پیشگو ـ تصحیح کن :

این روشها به صورت خود به خودی آغاز نمی شوند و ابتدا باید با یک رانگ کوتا آغاز شود. این روشها به صورت حل تکراری انجام می شود. تا زمانی که محاسبات ادامه می یابند مقدار خطا هم کاهش پیدا می کند و مقدار خطا بسیار کم می شود. در مرحله پیشگویی از روابط Adams Bashforth و برای تصحیح از روابط Adams Moulten استفاده می کنیم. روشهایی که برای پیشگو تصحیح کن داریم ، عبارتست از :

① PECE

② $P(EC)^s E$

③ PMECME

④ $PM(EC)^s ME$

Adams–Bashforth

$$y_{n+1} = y_n + h[y_n' + \tfrac{1}{2}\nabla y_n' + \tfrac{5}{12}\nabla^2 y_n' + \tfrac{3}{8}\nabla^3 y_n' + \tfrac{251}{720}\nabla^4 y_n' + \tfrac{475}{1440}\nabla^5 y_n' + \tfrac{19087}{60480}\nabla^6 y_n' + \cdots]$$

Adams–Moulton

$$y_{n+1} = y_n + h[y_{n+1}' - \tfrac{1}{2}\nabla y_{n+1}' - \tfrac{1}{12}\nabla^2 y_{n+1}' - \tfrac{1}{24}\nabla^3 y_{n+1}' - \tfrac{19}{720}\nabla^4 y_{n+1}' - \tfrac{3}{160}\nabla^5 y_{n+1}' - \tfrac{863}{60480}\nabla^6 y_{n+1}' + \cdots]$$

notation: $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$

$y_n' = f_n'$

Predictor

TABLE 1.1

ADAMS–BASHFORTH FORMS

q	Coefficient of h	y_n'	y_{n-1}'	y_{n-2}'	y_{n-3}'	y_{n-4}'	y_{n-5}'	local truncation error
0	1	1						$\frac{1}{2}h^2 f'(\gamma)$
1	1/2	3	−1					$\frac{5}{12}h^3 f''(\gamma)$
2	1/12	23	−16	5				$\frac{9}{24}h^4 f'''(\gamma)$
3	1/24	55	−59	37	−9			$\frac{251}{720}h^5 f^{iv}(\gamma)$
4	1/720	1901	−2774	2616	−1274	251		$\frac{475}{1440}h^6 f^{v}(\gamma)$
5	1/1440	4277	−7923	9982	−7298	2877	−475	$\frac{19087}{60480}h^7 f^{vi}(\gamma)$

$$y_{n+1} = y_n + hy_n' \qquad (q = 0)$$

$$y_{n+1} = y_n + (h/2)[3y_n' - y_{n-1}'] \qquad (q = 1)$$

predicts $\longrightarrow$ $$y^*_{n+1} = y_n + (h/12)[23y_n' - 16y_{n-1}' + 5y_{n-2}'] \qquad (q = 2)$$

$$y_{n+1} = y_n + (h/24)[55y_n' - 59y_{n-1}' + 37y_{n-2}' - 9y_{n-3}'] \qquad (q = 3)$$

Error $O\left(h^{q+2} f^{[q+1]}(\gamma)\right)$

Corrector

TABLE 1.2

ADAMS–MOULTON FORMS

q	Coefficient of h	y_{n+1}'	y_n'	y_{n-1}'	y_{n-2}'	y_{n-3}'	y_{n-4}'	local truncation error
0	1	1						$-\frac{1}{2}h^2 f'(\gamma)$
1	1/2	1	1					$-\frac{1}{12}h^3 f''(\gamma)$
2	1/12	5	8	−1				$-\frac{1}{24}h^4 f'''(\gamma)$
3	1/24	9	19	−5	1			$-\frac{19}{720}h^5 f^{iv}(\gamma)$
4	1/720	251	646	−264	106	−19		$-\frac{3}{160}h^6 f^{v}(\gamma)$
5	1/1440	475	1427	−798	482	−173	27	$-\frac{863}{60480}h^7 f^{vi}(\gamma)$

corrects $\longrightarrow$ $(q=2)$ $$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}\left[5y^*_{n+1} + 8y_n' - y_{n-1}'\right]$$

۱ PECE :

Ⓟ $y^{*}_{n+1}=y_n+\frac{h}{24}\left[55\,y'_n-59\,y'_{n-1}+37\,y'_{n-2}-\cdots\right]$ پیشگویی $\frac{A.B}{\text{جدول}}$

Ⓔ $y'^{*}_{n+1}=f(x_{n+1},y_{n+1})$

Ⓒ $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{24}\left[9\,y'^{*}_{n+1}+19\,y'_n-5\,y'_{n-1}-\cdots\right]$ تصحیح $\frac{A.M}{\text{جدول}}$

Ⓔ $y'_{n+1}=f(x_{n+1},y_{n+1})$

---

۲ $P(EC)^{S}E$:

Ⓟ $y^{*}_{n+1}=y_n+\frac{h}{24}\left[55\,y'_n-59\,y'_{n-1}+37\,y'_{n-2}-\cdots\right]$ پیشگویی $\frac{A.B}{\text{جدول}}$

Ⓔ $y'^{*}_{n+1}=f(x_{n+1},y_{n+1})$ ← $y^{*}_{n+1}=y_{n+1}$ NO

Ⓒ $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{24}\left[9\,y'^{*}_{n+1}+19\,y'_n-\cdots\right]\longrightarrow |y_{n+1}-y^{*}_{n+1}|<Tol$ تصحیح $\frac{A.M}{\text{جدول}}$

Ⓔ $y'_{n+1}=f(x_{n+1},y_{n+1})$ ← Yes

---

۳ PMECME :

Ⓟ $P_{n+1}=y_n+\frac{h}{24}\left[55\,y'_n-59\,y'_{n-1}+37\,y'_{n-2}-9\,y'_{n-3}-\cdots\right]$ $\frac{A.B}{\text{جدول}}$

Ⓜ $m_{n+1}=P_{n+1}+\frac{251}{720}\left(C_n-P_n\right)$

Ⓔ $m'_{n+1}=f(x_{n+1},y_{n+1})$

Ⓒ $C_{n+1}=y_n+\frac{h}{24}\left[9\,m'_{n+1}+19\,y'_n-5\,y'^{*}_{n-1}+y'_{n-2}-\cdots\right]$ $\frac{A.M}{\text{جدول}}$

Ⓜ $y_{n+1}=C_{n+1}-\frac{19}{720}\left(C_{n+1}-P_{n+1}\right)$

Ⓔ $y'_{n+1}=f(x_{n+1},y_{n+1})$

در این روابط بالا داریم :

* $P_n, P_{n+1}\longrightarrow$ Pridiction Value
* $m_{n+1}\longrightarrow$ Modific Pridict Value
* $C_n, C_{n+1}\longrightarrow$ Corected Value
* $y_{n+1}\longrightarrow$ Modifile Corrected

۴) $PM(EC)^{S}ME$:

P) $P_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[55\, y'_n - 59\, y'_{n-1} + 37\, y'_{n-2} - \cdots\right]$ A.B

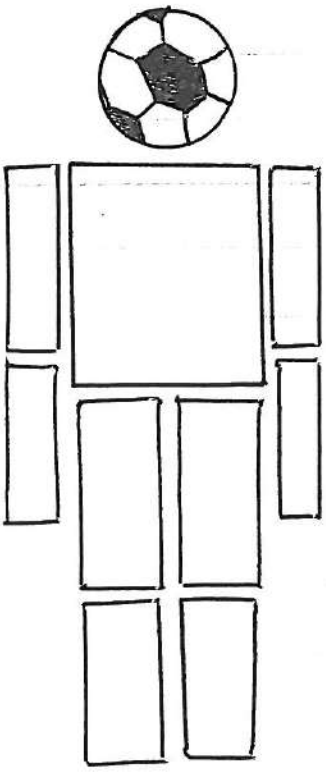
M) $m_{n+1} = P_{n+1} + \frac{251}{720}\left(C_n - P_n\right)$

E) $m'_{n+1} = f(x_{n+1}\,,\, y_{n+1})$ ← $m_{n+1} = C_{n+1}$ ← NO

C) $C_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[9\, m'_{n+1} + 19\, y'_n - 5\, y'^{*}_{n-1} - \cdots\right] \longrightarrow |m_{n+1} - C_{n+1}| < Tole$

M) $y_{n+1} = C_{n+1} - \frac{19}{720}\left(C_{n+1} - P_{n+1}\right)$ ← Yes

E) $y'_{n+1} = f(x_{n+1}\,,\, y_{n+1})$



تهیه و تنظیم:

مسعود زمانی

گرافیک در Matlab

۳-۱- مقدمه

نرم‌افزار Matlab دارای امکانات گسترده‌ای جهت نمایش گرافیکی بوده و شامل توابعی است که امکان رسم نمودارهای دوبعدی، سه‌بعدی، قطبی، ستونی و ... را میسر می‌سازد. همچنین می‌توان در آن گراف‌ها را عنوان‌گذاری و محورها را برچسب‌گذاری نمود. علاوه بر آن فرامینی برای کنترل صفحه گرافیکی و نیز مقیاس‌بندی محورها وجود دارد. در این فصل روند ترسیم نمودارهای دوبعدی و سه‌بعدی را خواهید آموخت.

۳-۲- نمودار دوبعدی

با کمک Matlab می‌توان نمودارها را در صفحه جدید دکارتی ترسیم نمود که در آن مقیاس‌بندی محورها به صورت اتوماتیک انجام می‌گیرد. دستورات گرافیکی دو بعدی Matlab به شرح جدول(۳-۱) می‌باشد.

۳-۲-۱- دستور plot

برای رسم نمودارهای دکارتی استفاده می‌شود و چهار حالت دارد:

- **plot(z)**: عناصر بردار z را برحسب اندیس‌های آن رسم می‌کند.

جدول ۳-۱- فرامین گرافیکی دو بعدی

تابع ها رسم دو بعدی	
دستور	**توضیح**
plot	رسم نمودار در صفحهٔ دکارتی
semilogx	رسم نمودار نیمه لگاریتمی(محور x لگاریتمی)
semilogy	رسم نمودار نیمه لگاریتمی(محور y لگاریتمی)
loglog	رسم نمودار با دو محور لگاریتمی
polar	رسم نمودار در صفحهٔ قطبی
ابزار رسم دو بعدی	
grid	شبکه‌ای نمودن صفحه گرافیک
title	نوشتن عنوان برای شکل
xlabel	برچسب‌گذاری محورx
ylabel	برچسب‌گذاری محورy
gtext	جایگزینی متن با موشواره در صفحه گراف
text	نوشتن متن در جایی مشخص از صفحه گراف
axis	تغییر مشخصات مختصات محورها
figure(h)	ایجاد صفحه گرافیکی با شمارهٔ h
shf	نشان دادن صفحهٔ گرافیکی
clf	پاک کردن محتویات صفحه گرافیکی بدون بستن آن
close(h)	بستن صفحه گرافیکی با شمارهٔ h
hold	نگه داشتن نمودار جاری
subplot	رسم چند نمودار مجزا در صفحهٔ گراف
zoom	بزرگ نمایی صفحهٔ گرافیکی

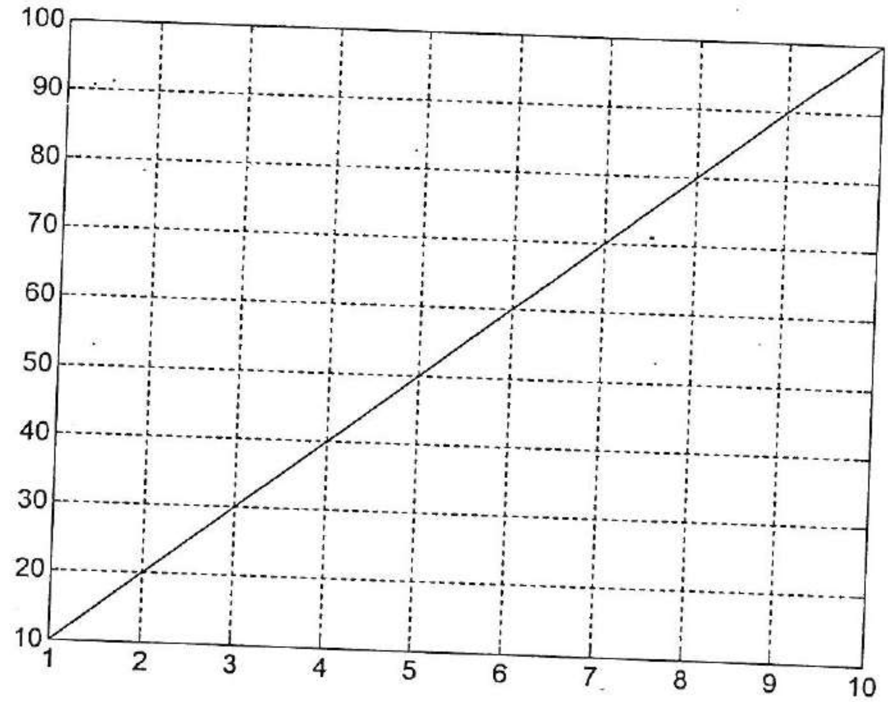
• plot (x,y) : بردار یا ماتریس y را برحسب بردار یا ماتریس هم بعد x رسم می‌کند.

• plot(x,y,'line type') : رسم منحنی y برحسب x با تعیین رنگ و نوع قالب خط.

• plot(x_1,y_1,'r-',x_2,y_2,'g:',...) : رسم چند نمودار به طور همزمان در یک صفحه گرافیکی.

مثال ۳-۱:

```
» y = 10:10:100; ↵
» plot(y) ↵
» grid ↵
```

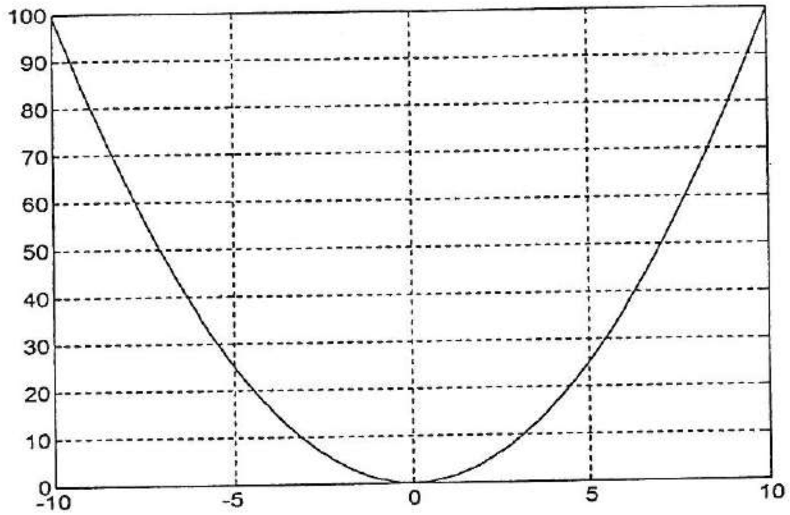


شکل (۳-۱) - نمودار مربوط به مثال ۳-۱

اگر در حالت فوق، آرگومان دستور، یک بردار مختلط باشد قسمت موهومی را برحسب قسمت حقیقی رسم می‌کند. اگر x و y هر دو بردار باشند عناصر بردار y برحسب x رسم می‌شوند.

مثال ۳-۲:

```
» x = -10:0.1:10;
» y = x.^2;
» figure(1) , plot(x,y), grid ↵
```

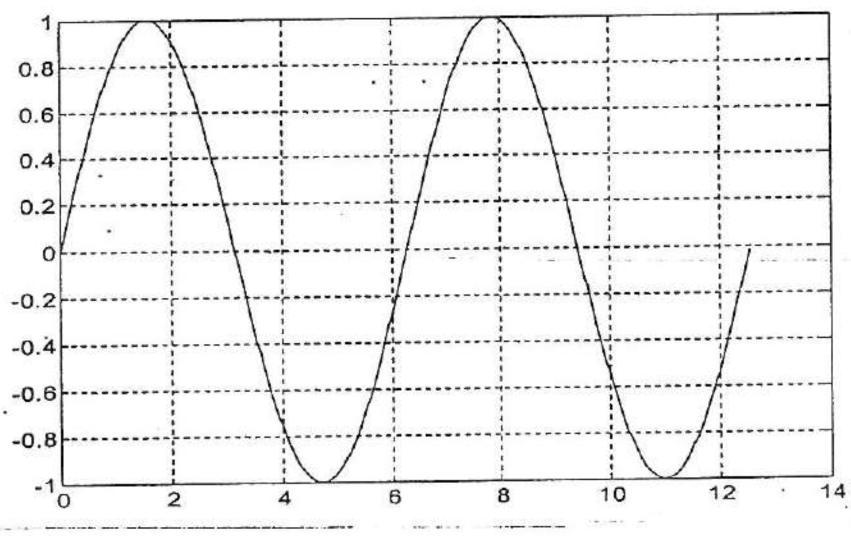


شکل (۳-۲)- نمودار مربوط به مثال ۳-۲

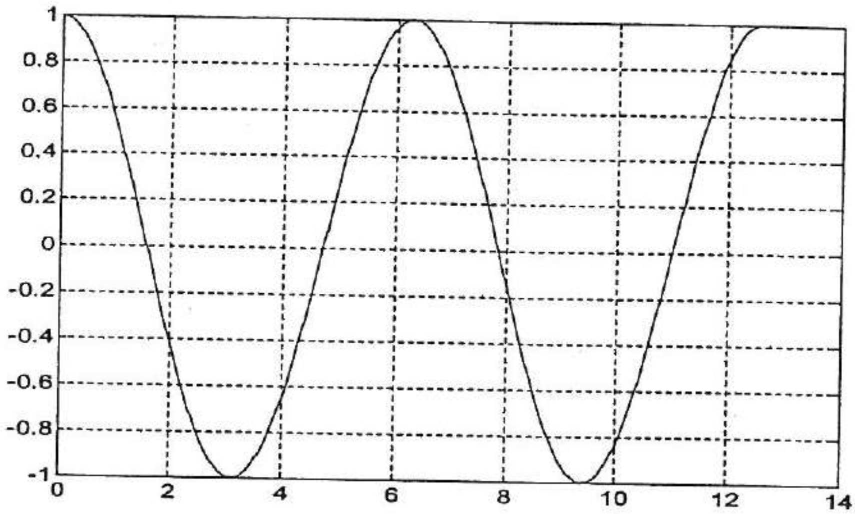
اگر تعداد نقاط کم باشد نمودار هموار نخواهد بود. همچنین باید توجه داشت که اگر x بردار و y ماتریس باشد، در این صورت، ستون‌های y برحسب x رسم می‌شوند و اگر x و y هر دو ماتریس باشند ستون‌های y برحسب ستون‌های x رسم می‌گردند (بایستی x و y هم بعد باشند).

مثال ۳-۳:

```
› x = 0: 0.05 :4*pi;
› y1 = sin(x);    y2 = cos(x);
› figure(1), plot(x,y1), grid
› figure(2), plot(x,y2), grid
```



شکل(۳-۳)- نمودار ۱ مربوط به مثال ۳-۳



شکل(۳-۴)- نمودار ۲ مربوط به مثال ۳-۳

۳-۲-۲- علامت، رنگ و نوع قالب خط

همان‌طور که گفته شد برای تعیین رنگ و نوع قالب خط می‌توانید در فرمان **plot** ، بعد از هر زوج مرتب، یک آرگومان اضافی به‌صورت **plot(x,y,'line type')** وارد کنید. اگر رنگی را مشخص نکنید، Matlab برای انتخاب رنگ خطوط، از رنگ آبی آغاز کرده و شش رنگ اول جدول (۳-۲) را به‌طور چرخه‌ای انتخاب می‌کند. قالب خط توپر، شکل پیش‌فرض رسم نمودار است.

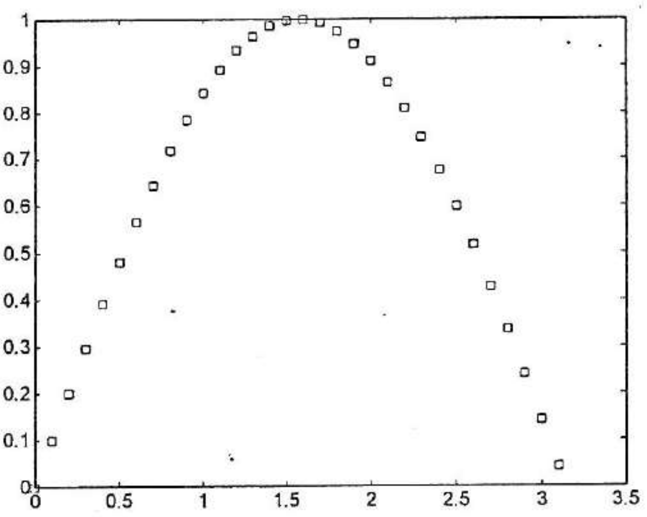
جدول ۳-۲- نمادها و رنگ های قابل انتخاب در رسم نمودارها

رنگ و انواع اصلی خطوط نمودار			
سمبل	رنگ	علامت	شکل خط
y	زرد	.	نقطه دار
m	ارغوانی	o	دایره
c	فیروزه‌ای	×	ضرب
r	قرمز	+	جمع
g	سبز	*	ستاره
b	آبی	-	خط توپر
w	سفید	:	نقطه چین
k	خاکستری	-.	خط چین- نقطه چین
o	زیتونی	--	خط چین

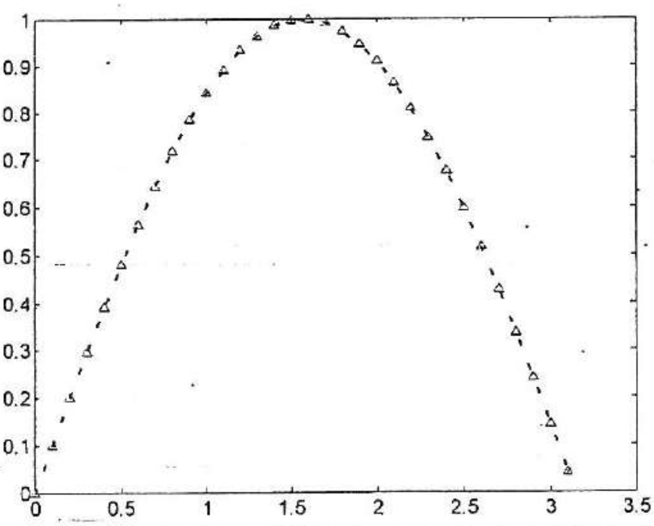
باید توجه داشت که برای رسم نمودار با علایم مربع، لوزی، پنج ضلعی و شش ضلعی به ترتیب از حروف **h,p,d,s** و برای رسم نمودار با مثلث از 'o','^','<','>' استفاده می‌کنیم که این علایم جهت رأس مثلث را نشان می‌دهند. برای مثال داریم:

مثال ۳-۴:

```
» x = 0:0.1:pi;
» y = sin(x)
» figure(1), plot(x,y,'ks');
» figure(2), plot(x,y,'r:^');
```



شکل(۳-۵)- نمودار ۱ مربوط به مثال ۳-۴



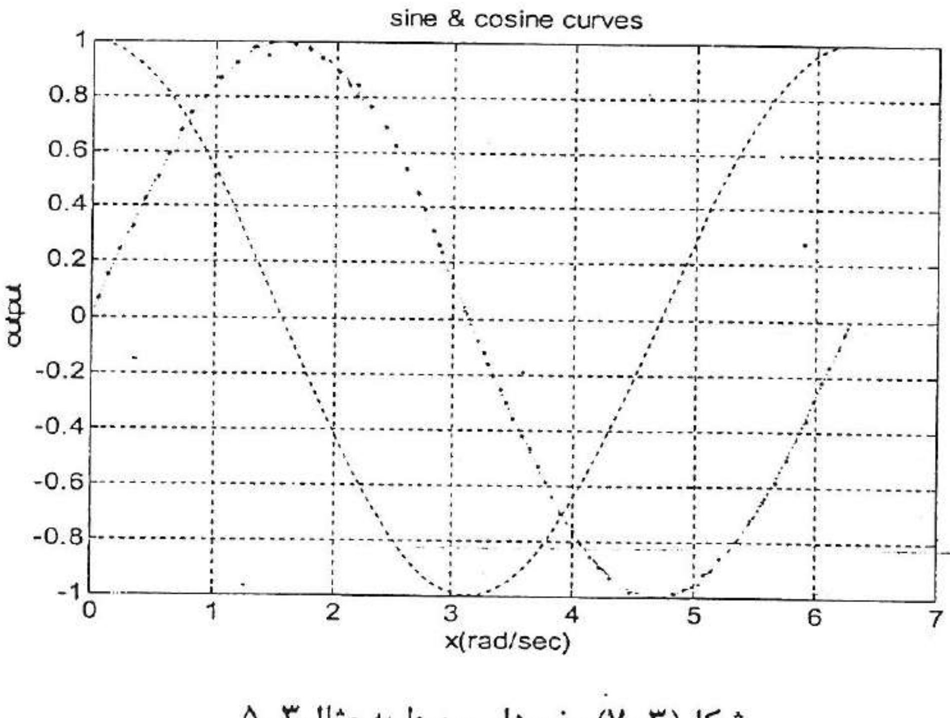
شکل(۳-۶)- نمودار ۲ مربوط به مثال ۳-۴

۳-۲-۳- برچسب‌گذاری، عنوان‌گذاری و مشبک نمودن

فرمان **grid** بعد از هر دستور گرافیکی، صفحه گرافیکی را مشبک می‌نماید. تایپ مجدد **grid**، شبکه نقاط را غیر فعال می‌کند. فرمان‌های **xlabel** و **ylabel** ، محورهای افقی و عمودی را برچسب‌گذاری کرده و فرمان **title** ، عنوانی در بالای نمودار به آن اضافه می‌کند. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۳-۵:

```
» x = linspace(0,2*pi,50);
» y1 = sin(x); y2 = cos(x);
» figure(1), plot(x,y1,'r-',x,y2,'k:')
» grid;
» xlabel( 'x(rad/sec)' )
» ylabel( 'output' )
» title( 'sine & cosine curves' )
```



شکل(۳-۷)- نمودار مربوط به مثال ۳-۵

روش دیگر برای رسم چندین نمودار در یک صفحه گرافیکی استفاده از فرمان **line** می‌باشد. برای مثال اگر یک نمودار به‌وسیله فرمان $\mathbf{plot(x_1,y_1)}$ رسم شده باشد آنگاه فرامین زیر:

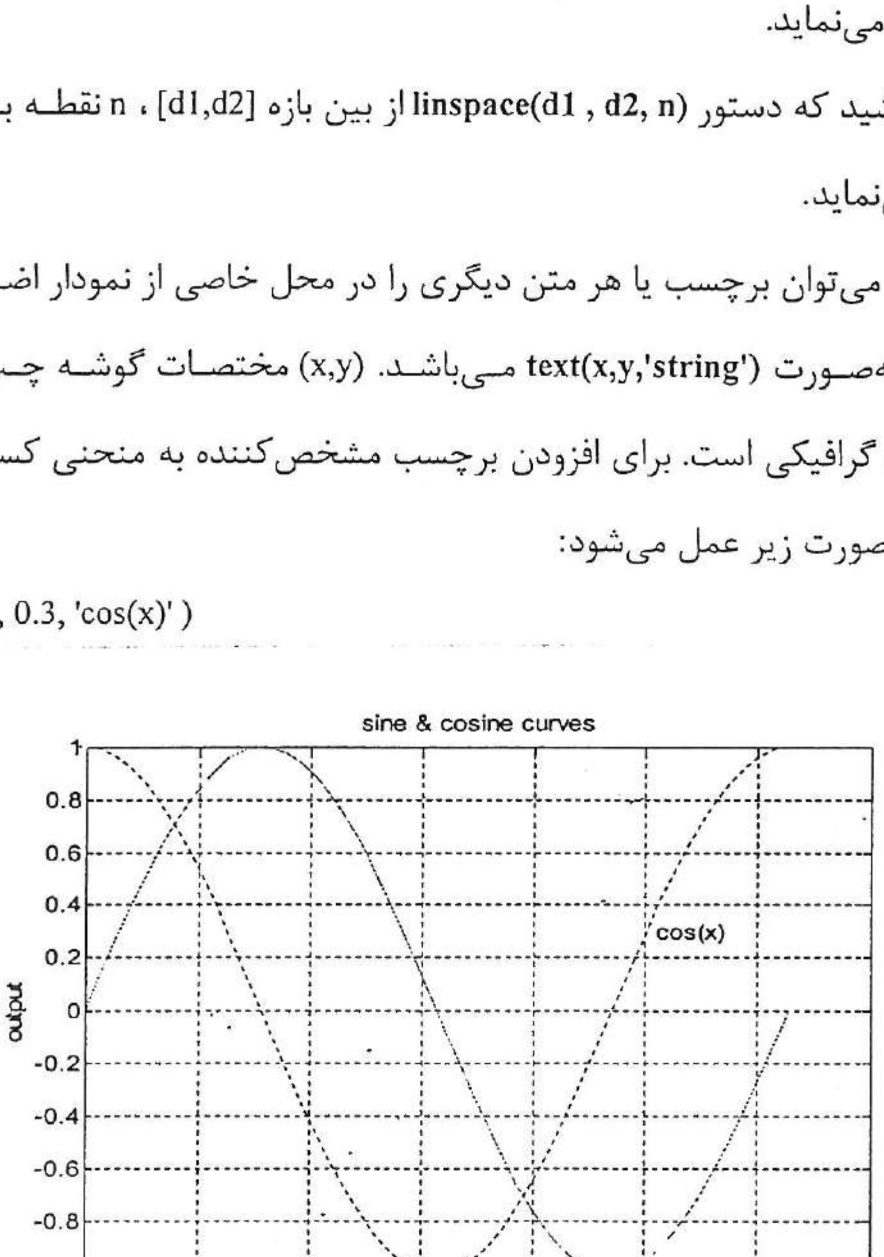
line(x2,y2,'+b')
line(x3,y3,'- -')

منحنی‌های (x2,y2) را با علامت + آبی رنگ و منحنی (x3,y3) را به‌طور خط چین به همان نمودار قبلی اضافه می‌نماید.

توجه داشته باشید که دستور **linspace(d1 , d2, n)** از بین بازه [d1,d2] ، n نقطه به فواصل مساوی انتخاب می‌نماید.

با فرمان **text** ، می‌توان برچسب یا هر متن دیگری را در محل خاصی از نمودار اضافه نمود فرمت این فرمان به‌صورت **text(x,y,'string')** می‌باشد. (x,y) مختصات گوشه چپ عبارت برحسب واحدهای گرافیکی است. برای افزودن برچسب مشخص‌کننده به منحنی کسینوس در محل (5.1,0.3) به‌صورت زیر عمل می‌شود:

```
text( 5.1, 0.3, 'cos(x)' )
```

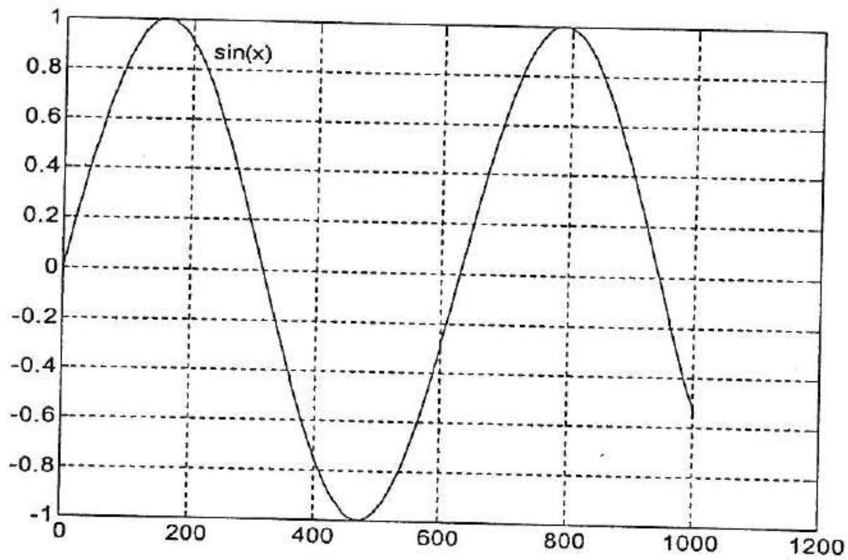


شکل(۳-۸)- نمودار مربوط به مثال ۳-۵

فرمان **gtext**، علامتی را در پنجره شکل جاری قرار می‌دهد که از موشواره تبعیت می‌کند فرمان فوق برای فشردن کلیدی یا کلیک کردن موشواره منتظر می‌ماند. اکنون برچسب‌گذاری نمودار سینوسی را با آن به صورت زیر آزمایش می‌کنیم:

مثال ۳-۶:

```
» x = 0:0.01:10;
» plot(sin(x)), grid
» gtext('sin(x)')
```



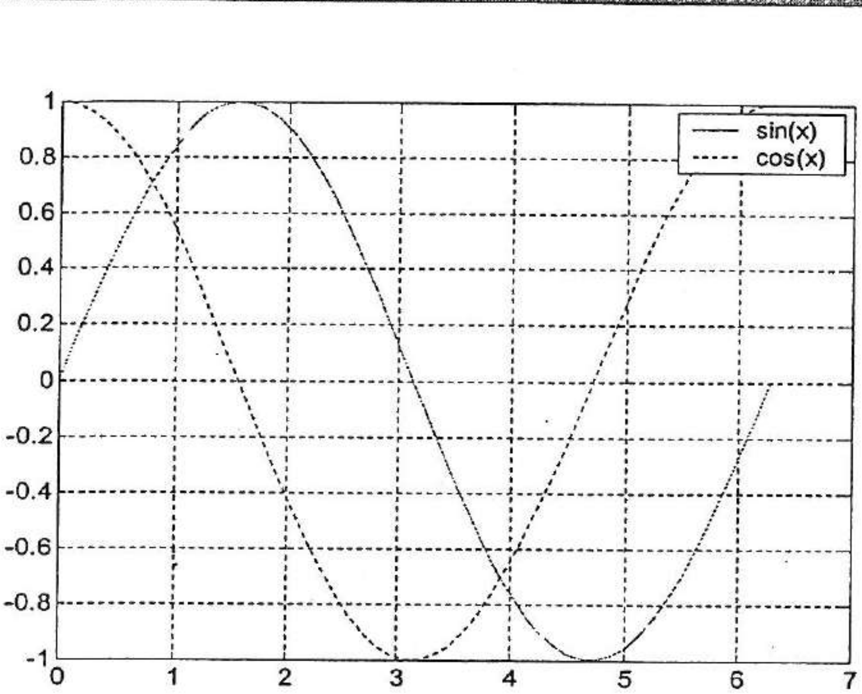
شکل(۳-۹) - نمودار مربوط به مثال ۳-۶

۳-۲-۴- افزودن راهنمای علایم

علاوه بر وجود امکانات برچسب‌گذاری و عنوان، Matlab تابع **legend** را برای نمایش راهنمای علایم رسم نمودار در داخل صفحهٔ گرافیکی ارایه داده است. حرکت دادن راهنمای علایم با کلیک‌کردن موشواره روی آن امکان‌پذیر است. **legend off** راهنمای علایم را حذف می‌کنند. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۳-۷:

```
» x = linspace(0, 2*pi, 50);
» y1 = sin(x); y2 = cos(x);
» figure(1),plot(x,y1,'r-',x,y2,'b:')
» legend( 'sin(x)','cos(x)' )
» grid
```



شکل(۳-۱۰)- نمودار مربوط به مثال۳-۷

۳-۲-۵- مقیاس‌بندی محورها

Matlab به‌طور اتوماتیک محورها را مقیاس‌بندی می‌نماید. با استفاده از دستور**axis** مـی‌تـوان آن را کنترل نمود. این فرمان ویژگی‌های زیادی دارد، ولی در این‌جا مختصراً بررسی می‌شود:

- **axis(v)** : با استفاده از مقادیر موجود در بردار vکه به‌صـورت $v=[x_{min}\ x_{max}\ y_{min}\ y_{max}]$ مشـخص می‌شود، مقادیر مینیمم و ماکزیمم محورها را تنظیم می‌کند.
- **axis('auto')**: مقیاس محورها را به مقیاس پیش‌فرض باز می‌گرداند.
- **axis('square')** : ناحیه رسم جاری را مربعی می‌کند.
- **axis('equal')**: فاکتورهای درجه بندی هر دو محور را مساوی می‌کند.
- **axis('normal')**: axis('square') وaxis('equal') را غیرفعال می‌کند.
- **axis('off')** : شبکه نقاط و برچسب‌گذاری محورها را غیرفعال کرده و بر روی عنوان تأثیری ندارد.
- **axis('on')**: برچسب‌گذاری محورها، نشانه‌ها و شبکه‌های نقاط را فعال می‌کند.

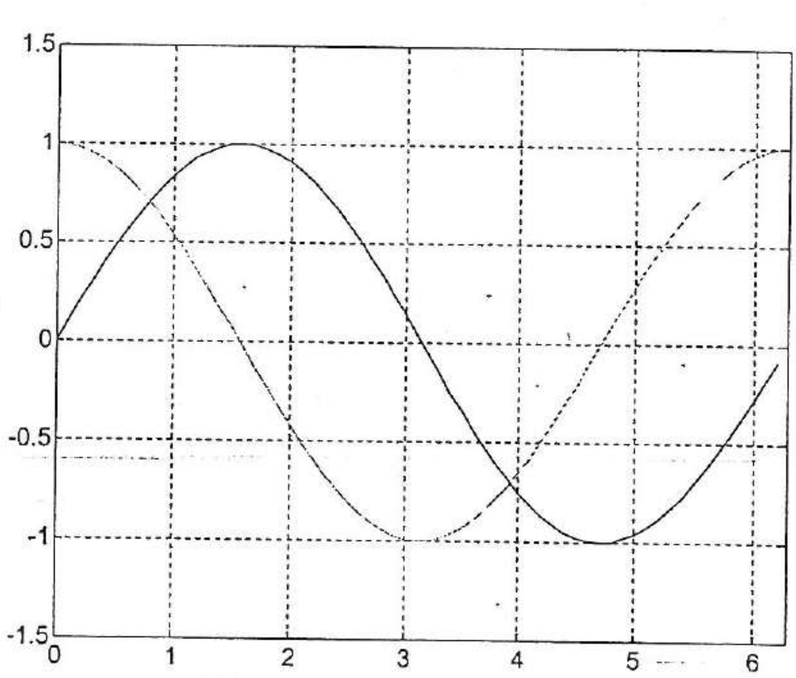
• v = axis: حدود محورهای جاری را در بردار v باز می‌گرداند.

۳-۲-۶- ثابت نگه‌داشتن نمودار

اگر دستور **hold on** را بکار ببرید، Matlab منحنی‌های موجود را با مشخصات ثابت نگه داشته و می توان منحنی‌های جدید را در صفحهٔ نمودار جاری رسم نمود. برای خروج از این دستور، دوباره **hold off** را بکار ببرید:

مثال۳-۸:

```
» x = 0:0.1:2*pi;
» y = sin(x);
» plot(x,y)
» axis([0  2*pi  -1.5  1.5])   %  change axis limits
» hold
» z = cos(x);
» plot(x,z,'r')
» hold
» grid
```



شکل(۳-۱۱) - نمودار مربوط به مثال۳-۸

۳-۲-۷- دستورات semilogy - semilogx - loglog

این دستورات دقیقاً مشابه دستور **plot** هستند، به‌جز این‌که مقیاس محورها فرق می‌کند. ضمناً لگاریتم‌ها در مبنای ۱۰ می‌باشند.

- **loglog(x,y)**: هر دو محور لگاریتمی است.
- **semilogx(x,y)**: محور x لگاریتمی و محور y عادی است.
- **semilogy(x,y)** : محور x لگاریتمی و محور y عادی است.

یک فرمان جالب دیگر برای رسم نمودار، فرمان **comet** است. فرمان**comet(x,y)** داده‌های موجود در بردارهای x وy را با یک دنباله متحرک روی نقاط مربوط به داده‌ها رسم می‌نماید و چنان به نظر می‌رسد که منحنی در حال رسم‌شدن می‌باشد. برای فهرست کامل و اطلاعات اضافی در مورد فرامین گرافیکی عمودی و دو بعدی فرامین **help graphics** و **help plotxy** را اجرا نمایید.

۳-۲-۸- دستورات کنترل صفحه گرافیکی و پنجره فرمان

- **slg** : این دستور صفحه گرافیکی را نمایش می‌دهد و با فشردن یک کلید دوباره صفحه متن نمایش داده می‌شود.
- **clf** : این دستور پنجره شکل جاری را پاک می‌کند.
- **cla** و **clc** : این دستورات صفحه متنی را پاک می‌کنند.
- **diary**: متن صفحه نمایش را در یک فایل ذخیره می‌کند.
- **home**:این دستور مکان‌نما را در صفحه متن به گوشه سمت چپ بالای صفحه منتقل‌می‌کند.
- **figure(h)** : پنجره گرافیکی با شماره h را باز می‌کند.

• close(h) : پنجره گرافیکی با شماره h را می‌بندد.

• more : پنجره فرمان را صفحه به صفحه متوقف می‌کند.

• subplot(mnp) : این دستور برای تقسیم صفحه گرافیکی به کار می‌آید که در آن:

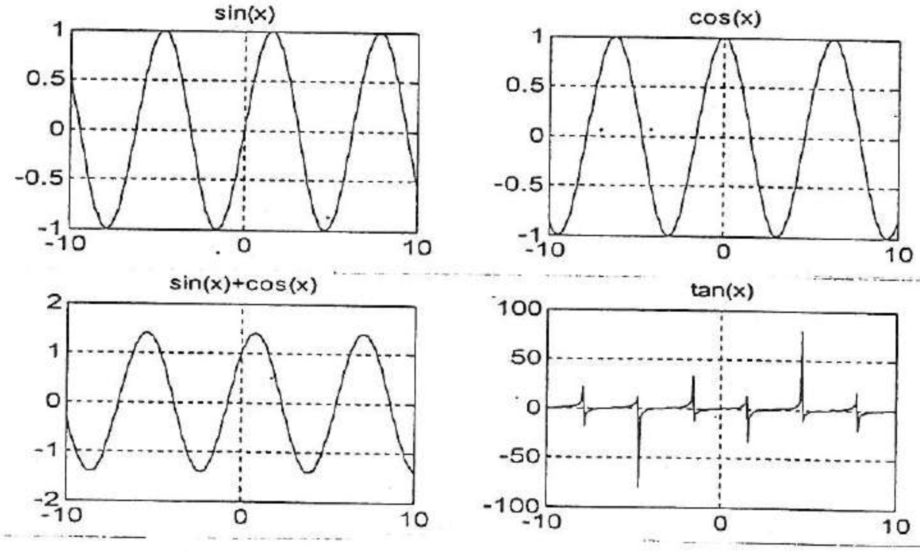
m : تعداد پنجره‌ها به صورت سطری.

n : تعداد پنجره‌ها به صورت ستونی.

p : شماره پنجره‌ای که گراف بعدی در آن رسم خواهد شد (گرافی که بعد از دستور **subplot** می‌آید).

مثال ۳-۹:

```
» x = -10: 0.1: 10;
» y1 = sin(x); y2 = cos(x); y3 = sin(x)+cos(x); y4 = tan(x);
» subplot(221), plot(x,y1), title('sin(x)'), grid
» figure(1)
» subplot(222), plot(x,y2), title('cos(x)'), grid
» subplot(223), plot(x,y3), title('sin(x)+cos(x)'), grid
» subplot(224), plot(x,y4), title('tan(x)'), grid
```



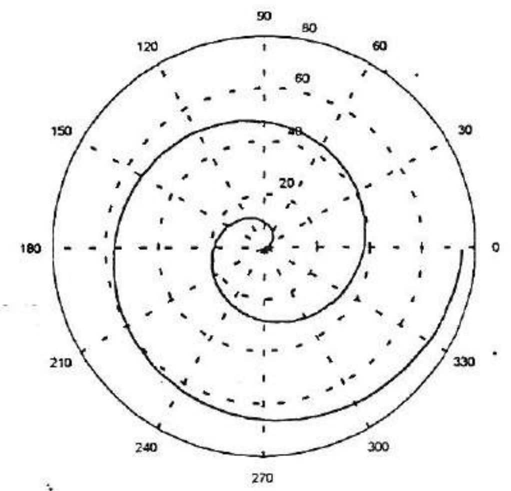
شکل (۳-۱۲) - نمودارهای مربوط به مثال ۳-۹

۳-۳- رسم نمودارهای قطبی

برای رسم نمودار در مختصات قطبی از دستور **polar(theta , rho)** استفاده می‌شود که مشابه دستور **plot** می‌باشد. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۳-۱۰: نمودار پیچ ارشمیدس $r = 6\theta$ را در فاصله $0 \le \theta \le 4\pi$ رسم نمایید.

```
» th = 0: 0.05: 4*pi;
» r = 6*th;
» polar(th,r)
```



شکل(۳-۱۳)- نمودار مربوط به مثال ۳-۱۰

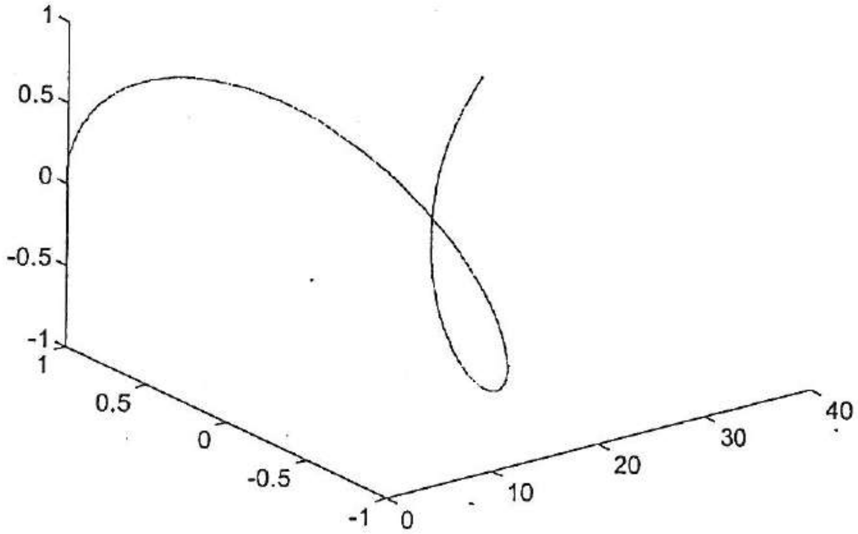
۳-۴- نمودارهای سه‌بعدی

برنامه Matlab تسهیلات فراوانی را برای نمایش داده‌های سه‌بعدی فراهم آورده است. عمومی‌ترین نمودارهای سه‌بعدی عبارتند از: فضای سه‌بعدی، نمودارهای صفحه‌ای، نمودارهای خانه‌ای و نمودارهای خط ترازی ، دستور **plot3(x,y,z, 'style option')** یک منحنی در فضای سه‌بعدی رسم می کند. فرامین **zlabel , ylabel , xlabel , title** و... را نیز می‌توان برای نمودارهای سه‌بعدی بکار برد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۳-۱۱: نمودار $x = t^2$, $y = \cos t$, $z = \sin t$ را در فاصله $0 \le t \le 4\pi$ رسم نمایید.

```
» t = 0: 0.02: 2*pi;
```

```
» plot3(t.^2, cos(t), sin(t))
```



شکل(۳-۱۴)- نمودار مربوط به مثال ۳-۱۱

۳-۴-۱- فرامین contour , surf , mesh

فرامین **mesh** , **surf** دارای آرگومان‌های متعدد قابل انتخاب بوده و برای رسم خانه‌ها و صفحه‌ها استفاده می‌شوند. به عنوان مثال برای رسم تابع z=f(x,y) ابتدا بایستی با استفاده از تابع **meshgrid** مجموعه نقاطی در صفحه x-y تولید کنیم سپس تابع f(x,y) را تعیین نماییم. بدین منظور به صورت زیر عمل می‌نماییم.

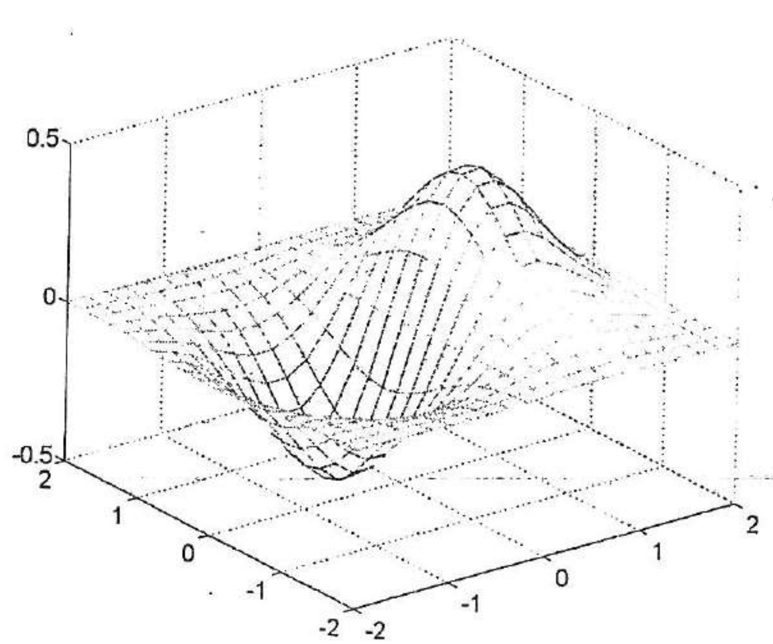
```
X = xmin: xspace: xmax;
Y = ymin: yspace: ymax;
[x,y] = meshgrid(x,y);
```

تابع **meshgrid** یک‌سری نقاط در صفحه x-y تولید می‌کند که مختصات گوشهٔ پایین آن (xmin,ymin) و گوشهٔ بالای آن (xmax,yman) است. پس از ساخته شدن مجموعه نقاط [x,y] از دستور **mesh** برای رسم تابع استفاده می‌نماییم. توجه نمایید که فرمان **meshgrid(x)** با فرمان **meshgrid(x,x)** هم ارز است. دستور **surf** همانند دستور **mesh** می باشد با این تفاوت که سطح را سایه می‌زند. باید توجه داشت که گام اعداد در ساختن مجموعه نقاط [x,y] خیلی کوچک

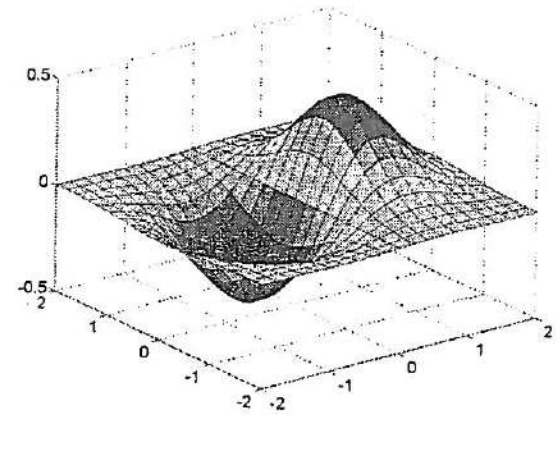
نباشد. زیرا اولاً مشاهده نمودار مشکل است و ثانیاً تعداد درایه‌های ماتریس z,x,y بسیار زیاد خواهد بود. فرمان contour(z) یک نمودار خط تراز از ماتریس z رسم می‌کند و مقادیر موجود در z را به عنوان ارتفاع بالای صفحه در نظر می‌گیرد. فرمان mesh(z) نیز یک نمودار سه‌بعدی از عناصر ماتریس z ایجاد می‌کند. یک صفحه‌ای خانه‌ای به وسیله نقاط مختصات z بالای یک شبکه مستطیلی در صفحه x-y تعریف می‌شود. این نمودار به وسیله اتصال نقاط مجاور با خطوط مستقیم تشکیل می‌شود.

مثال۳-۱۲: تابع $z = xe^{-x^2-y^2}$ را در فاصله $-2 \le x \le 4$ و $-4 \le y \le 4$ رسم نمایید.

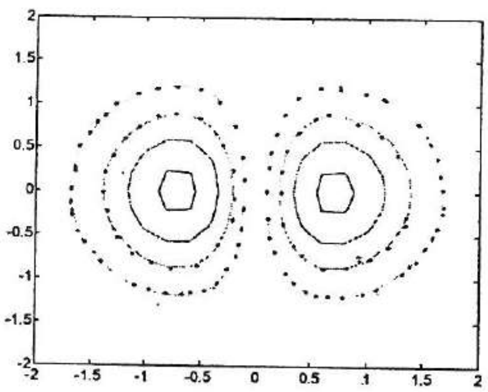
```
x = -2:0.2:2;
y = -2:0.2:2;
z = x.* exp(-x.^2 – y.^2);
figure(l) , mesh(x,y,z)
figure(2) , surf(x,y,z)
figure(3), contour(y,z)
figure(4) , contour3(x,y,z)
```



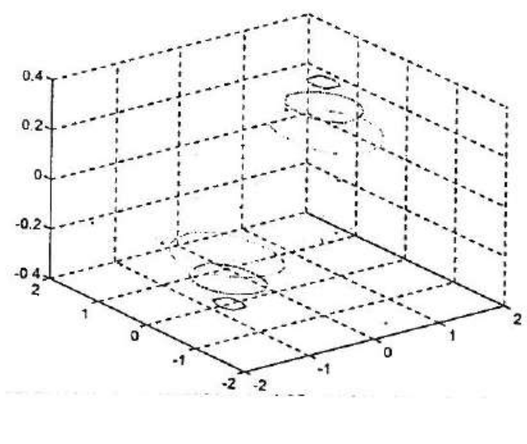
شکل(۳-۱۵)- نمودار ۱ مثال۳-۱۲ با فرمان mesh



شکل(۳-۱۶)- نمودار ۲ مثال۳-۱۲ با فرمان surf



شکل(۳-۱۷)- نمودار ۳ مثال۳-۱۲ با فرمانcontour

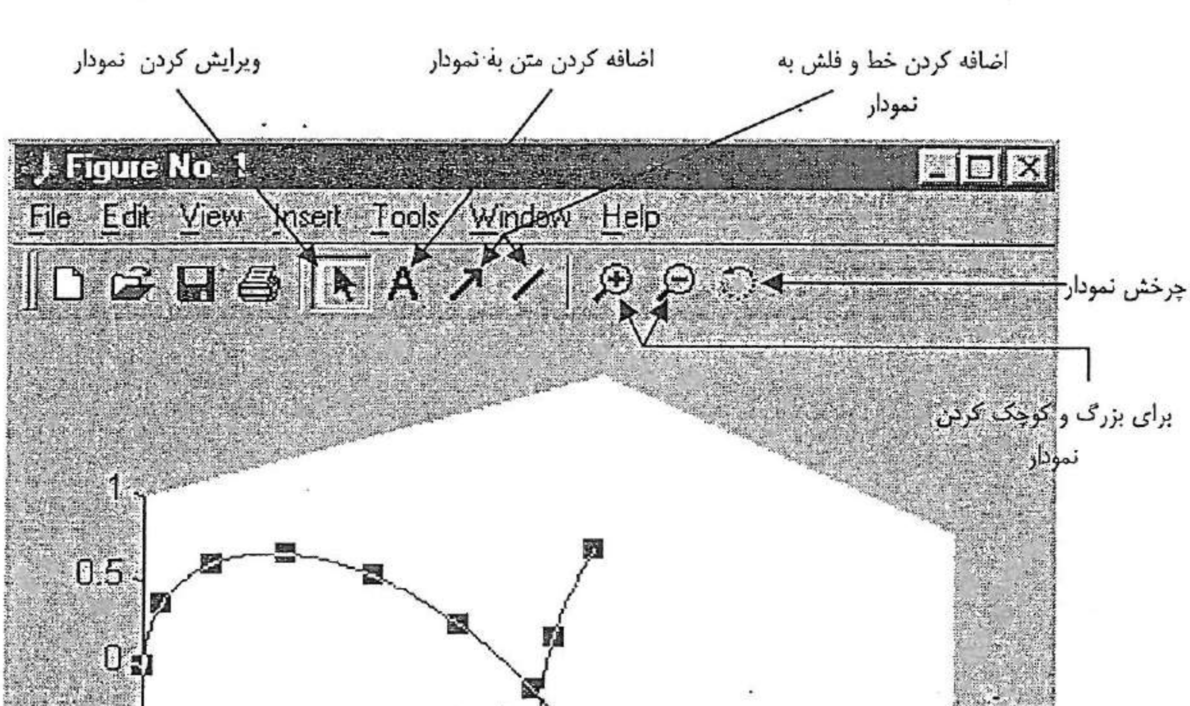


شکل(۳-۱۸)- نمودار ۴ مثال۳-۱۲ با فرمان countour3

۳-۴-۲- ویرایشگر شکل (plot editor)

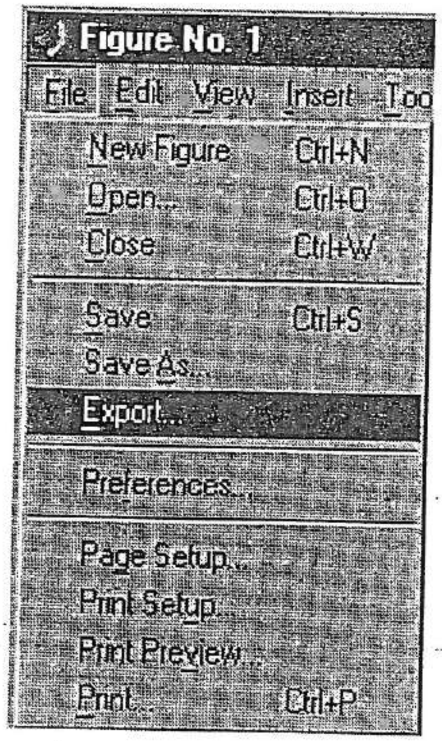
با استفاده از ویرایشگر شکل می‌توان تغییرات اساسی در شکل ایجاد کرده و آن را به فرمت‌های گوناگون گرافیکی همانند bmp ، jpg و... ذخیره نمود. ویرایشگر شکل در ویرایش‌های مختلف

Matlab تفاوت‌هایی با هم دارند که در این‌جا ویرایش شکل 6.5 مورد بحث قرار می‌گیرد. شکل (۳-۱۹) ویرایشگر شکل Matlab 6.5 را نشان می‌دهد که شمایل‌های مختلفی آن به طور خلاصه شرح داده شده است. از بین آنها شمایل ویرایش نمودار مهم بوده و با استفاده از آن می‌توان قسمت‌های مختلف نمودار از جمله عنوان، بر چسب محورها، سایز اعداد مقیاس محورها، خط نمودار و... را انتخاب کرده و با فشار دادن کلید سمت راست موشواره نوع قالب و رنگ نمودار، اندازه و نوع قلم عنوان، بر چسب محورها و مقیاس محورها و... را تغییر داد. علاوه برآن ویرایشگر دارای منوهای مختلفی بوده که در ادامه به اختصار توضیح داده می‌شود.

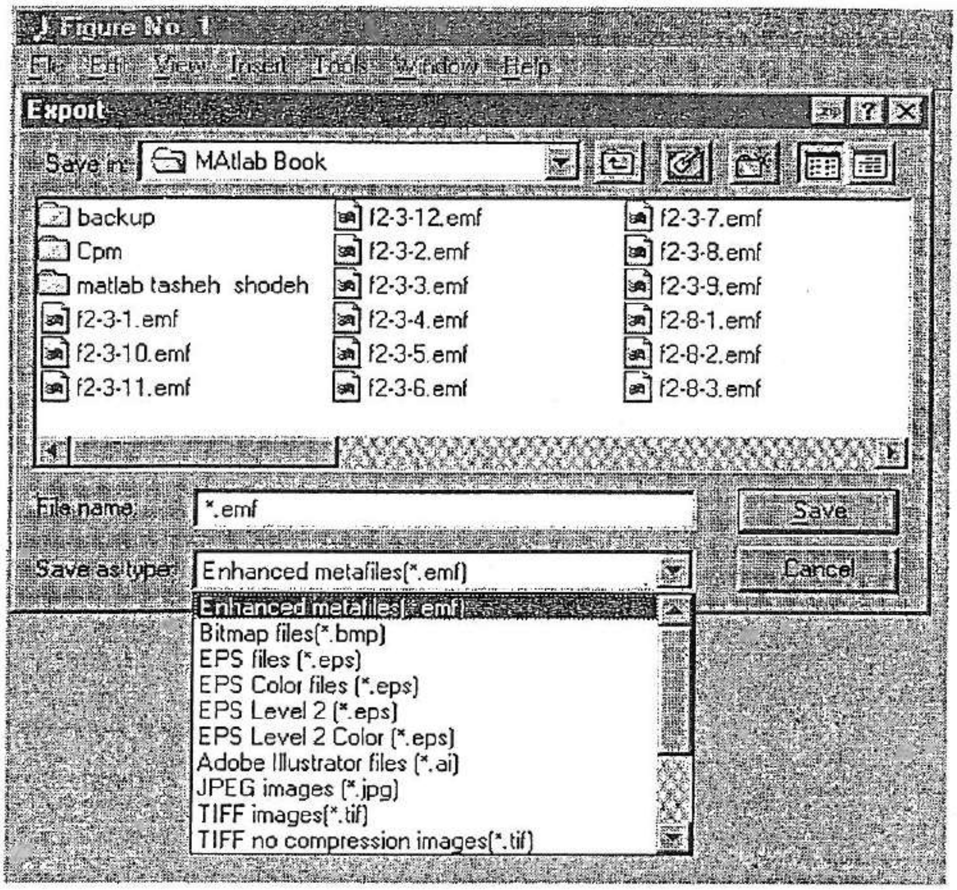


شکل(۳-۱۹) - ویرایشگر شکل Matlab-6.5

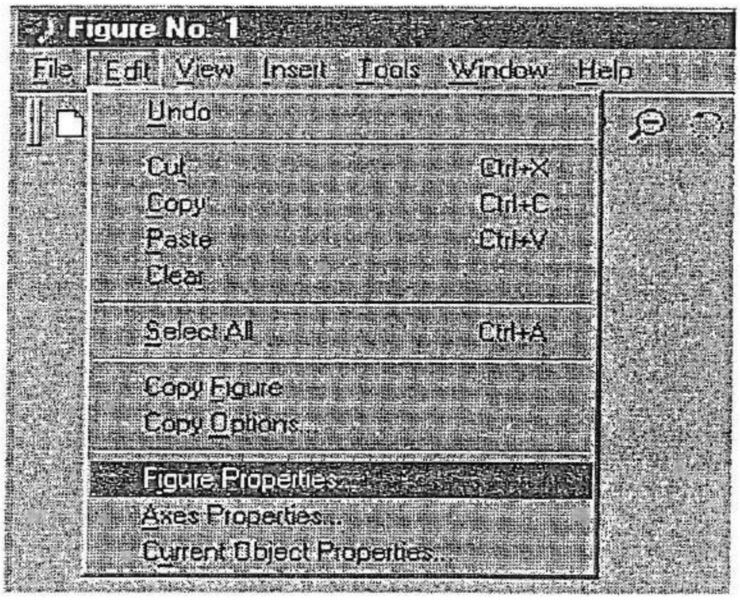
درمنوی **File** که در شکل(۳-۲۰) نشان داده شده گزینه **Export** وجود دارد و برای ذخیره کردن شکل به فرمت‌های گوناگون تصویری (شکل۳-۲۱) بکار می‌رود. منوی بعدی **Edit** است که دارای دو گزینه مهم **Figure Properties** و **Axes Propeties** می‌باشد(شکل۳-۲۲). با انتخاب گزینه **Figure Properties** پنجرهٔ **Property Editor** مطابق شکل(۳-۲۳) نشان داده می‌شود که از آن می‌توان برای ویرایش نمودن شکل، محور و نمودار، تغییر رنگ پس زمینه و تغییر عنوان نمودار استفاده کرد. با انتخاب گزینه **Axes Properties** پنجرهٔ **Property Editor Axes** مطابق شکل(۳-۲۴) نمایش داده می‌شود که برای اضافه و تغییر نمودن برچسب،عنوان، مقیاس بندی محور، مشبک نمودن نمودار و ... بکار می‌رود. شکل (۳-۲۵) **Property Editer line** را نشان می‌دهد که برای تغییر رنگ و کلفتی و نوع قالب خط رسم منحنی و... استفاده می‌شود.



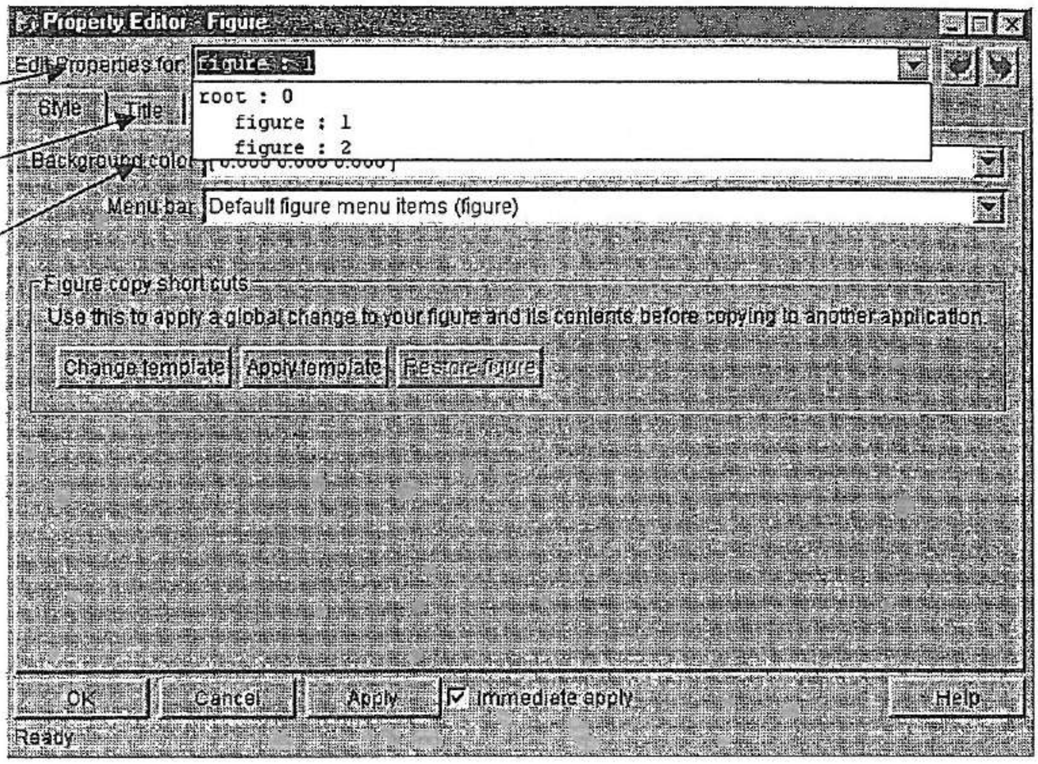
شکل (۲-۲۰)-گزینه Export .



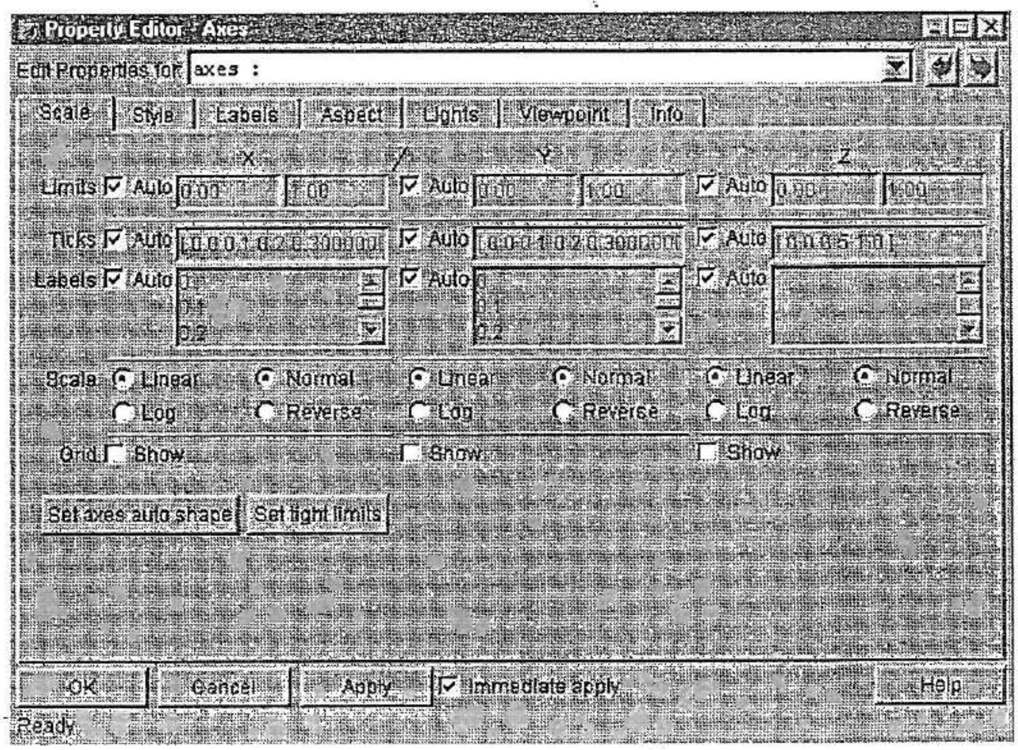
شکل(۳-۲۱)- فرمت‌های مختلف تصویری



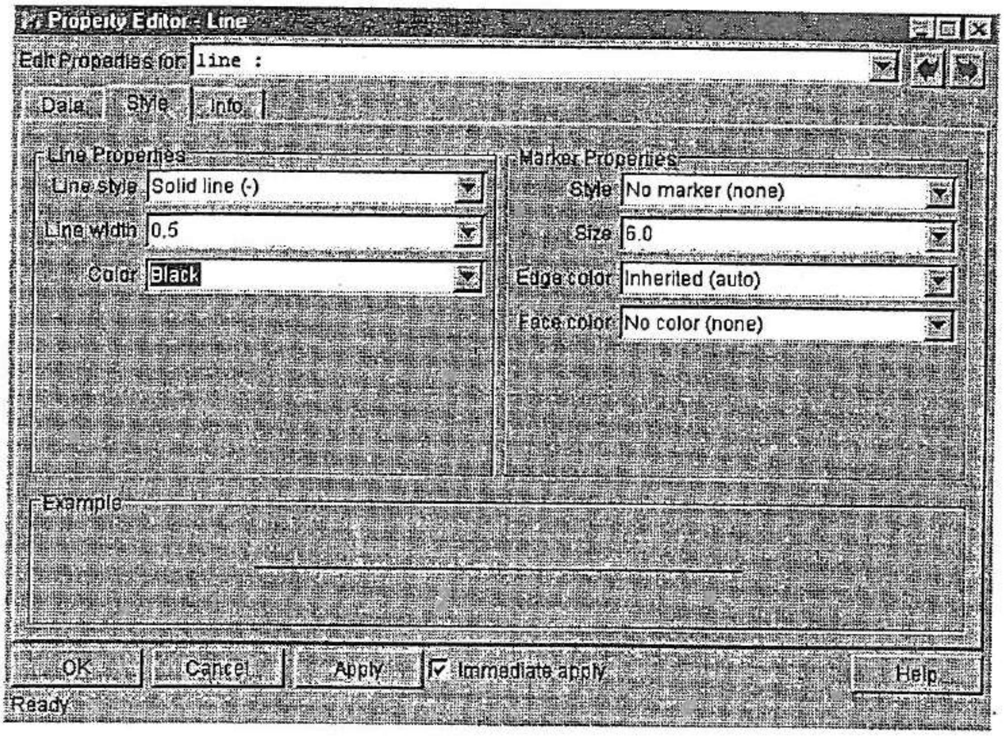
شکل (۳-۲۲)- منوی Edit



شکل(۳-۲۳) - Property Editor - Figure



شکل(۳-۲۴) - Property Edtitor-Axes



شکل(۳-۲۵)- Property Editor– Line