تاریخ: ۹۵,۹,۱۶
پیوست:
شماره:

* خلاصه نکات مهم ریاضیات مهندسی *

« @ErfanYousefi75 »

فوریه:

سری فوریه:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$f(x)$ ← متناوب و پیوسته ای تکه ای

l ← نصف دوره تناوب

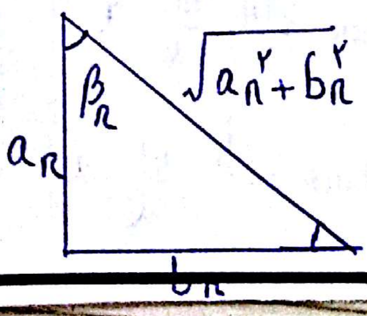
ضرایب:

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{l} \displaystyle\int_{-l}^{+l} f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x \, . dx \\ b_n = \dfrac{1}{l} \displaystyle\int_{-l}^{+l} f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, . dx \end{cases}$$

* $\frac{1}{2} \left(f(x_0^-) + f(x_0^+) \right) =$ مقدار نقطه ناپیوستگی در سری فوریه

* $f(x)$ ← فرد: سری فوریه سینوسی $(a_n = 0)$
← زوج: سری فوریه کسینوسی $(b_n = 0)$

صورت دیگر از سری فوریه:



$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2+b_n^2} \left(\cos\beta_n \cos \frac{n\pi x}{l} + \sin\beta_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right)$$

● صورت مختلط :

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{\frac{i n\pi}{l} x} \\ C_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} f(x) e^{\frac{-i n\pi}{l} x} . dx \end{cases}$$

● قضیه پارسوال :

$$\frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} f(x) g(x) . dx = \frac{1}{2} a_0 \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \alpha_n + b_n \beta_n)$$

$$\xrightarrow[\text{خاص}]{\text{حالت}} \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} f^2(x) . dx = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

● سری فوریه تابع دو متغیره :

$$f(x,y) = \frac{a_0(y)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m(y) \cos \frac{m\pi}{l} x + b_m(y) \sin \frac{m\pi}{l} x$$

$$\begin{bmatrix} a_m(y) = \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} f(x,y) \cos \frac{m\pi}{l} x . dx \\ b_m(y) = \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} f(x,y) \sin \frac{m\pi}{l} x . dx \end{bmatrix}$$ « ضرایب »

$$\begin{cases} a_m(y) = \frac{a_{m0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cos \frac{n\pi}{l} x + b_{mn} \sin \frac{n\pi}{l} x \\ b_m(y) = \frac{c_{m0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \cos \frac{n\pi}{l} x + D_{mn} \sin \frac{n\pi}{l} x \end{cases}$$

■ انتگرال فوریه :

● تعریف : برای توابع تعریف شده روی محور حقیقی فاصله‌ی $-\infty$ تا $+\infty$ که متناوب نیستند.

* $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| . dx < \infty$ ⟵ شرط وجود انتگرال فوریه

● روابط :

$$\begin{cases} f(x) = \int_{0}^{+\infty} [A(\omega)\cos \omega x + B(\omega)\sin \omega x] . d\omega \\ A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos \omega x . dx \\ B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin \omega x . dx \end{cases}$$

● فرم مختلط :

$$\begin{cases} f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_\omega e^{i\omega x} . d\omega \\ C_\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} . d\omega \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

● قضیه پارسوال :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,.\,dx = \int_{0}^{+\infty} \left(A^2(\omega) + B^2(\omega) \right).\,d\omega$$

■ مشتق و انتگرال گیری در سری فوریه :

* زمانی می‌توانیم از سری فوریه مشتق بگیریم که $f(l) = f(-l)$ و مقدار ابتدا و انتها با هم برابر باشد .

■ تبدیلات فوریه :

* شرط وجود تبدیل ⟵ f پیوسته تکه‌ای و مطلقا انتگرال پذیر

● روابط :

$$F\{f(x)\} = F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\omega}\,.\,dx$$

$$F^{-1}(F(\omega)) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{i\omega x}\,.\,d\omega$$

● خواص :

* $F\{\alpha f + \beta g\} = \alpha F\{f\} + \beta F\{g\}$
* $F\{f(t - t_0)\} = e^{-i\omega t} F\{f\}$
* $F\{f^{(n)}(t)\} = (i\omega)^n F\{f(t)\}$

Scanned by CamScanner

تاریخ :
پیوست :
شماره :

چشمه مهتاب

* $F\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F(\frac{\omega}{a})$

* $F\{t^n f(t)\} = i^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$

* قضیه پیچش :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(s) f(t-s) . ds = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-s) f(s) . ds = f * g = g * f$$

$\Rightarrow F\{f * g\} = F\{f\} . F\{g\}$

* $F_c = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x . dx$

* $F_s = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x . dx$

* شرط پارسوال : $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 . dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 . d\omega$

معادلات با مشتقات جزئی

معادلات خاص

- موج : « $u_{tt} = c^2 \nabla^2 u$ »
- گرما : « $u_t = c^2 \nabla^2 u$ »
- لاپلاس : « $\nabla^2 u = 0$ »
- پواسن : « $\nabla^2 u = f(x,y)$ »

حل معادله‌ی موج :

• روش جداسازی : « دارای شرایط مرزی صفر »

① $u(x,t) = F(x)\,G(t)$ ⟵ جایگذاری در معادله اصلی

⟵ حل معادله‌های دیفرانسیل تک متغیره $\xrightarrow{B.C}$ $F(x),\ G(t)$ ✓

② $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)\,.\,G_n(t)$ $\xrightarrow[\text{اولیه}]{\text{شرایط}}$ محاسبه ضرایب سری فوریه

• روش تغییر شرایط مرزی به اولیه : « دارای شرایط مرزی غیر صفر »

① $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$ $\xrightarrow{}$ w را جوری می‌یابیم که v در شرایط مرزی صفر شود

معادله‌ی اصلی و شرایط مرزی و اولیه را برحسب V می‌نویسیم ←

② معادله را در حالت همگن با روش جداسازی محاسبه می‌کنیم

$$V(x,t) = F(x)G(t) \longrightarrow$$ جواب معادله دیفرانسیل F را می‌یابیم

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t).F_n(x)$$

معادله‌ی اصلی را براساس رابطه‌ی فوق بازنویسی می‌کنیم

در واقع معادله‌ی دیفرانسیلی ضریب سری فوریه است، آن را برابر

مقدار ضریب قرار می‌دهیم ← از حل معادله دیفرانسیل برحسب t

$G_n(t) = G_n^h(t) + G_n^p(t)$ را می‌یابیم.

③ با توجه به شرایط اولیه ضرایب مجهول در $G_n(t)$ را محاسبه می‌کنیم

$$V(x,t) \checkmark \longrightarrow u(x,t) = V(x,t) + w(x,t)$$

• جواب‌های معادله‌ی موج:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t) \\ u(x,0) = f(x) \quad , \quad u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

شرایط اولیه

* حال در B.C های مختلف جواب را می‌یابیم:

تاریخ :

پیوست :

شماره :

چشمه مهتاب

$$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(l,t)=0 \end{cases} \longrightarrow u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$\begin{cases} u_x(0,t)=0 \\ u_x(l,t)=0 \end{cases} \longrightarrow u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\cos\frac{n\pi}{l}x$$

$$\begin{cases} u_x(0,t)=0 \\ u(l,t)=0 \end{cases} \longrightarrow u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\sin(2n+1)\frac{\pi x}{2l}$$

$$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u_x(l,t)=0 \end{cases} \longrightarrow u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\cos(2n+1)\frac{\pi x}{2l}$$

● معادله‌ی موج دو بعدی :

* مثل تک بعدی فقط با این فرق که شامل سری فوریه دوگانه است.

■ معادله‌ی گرما :

● میله با طول متناهی : « مثل روش حل معادله‌ی موج »

● میله با طول نامتناهی : « $u_t - c^2 u_{xx} = 0$ » , « $u(x,0) = f(x)$ »

(۱) $u(x,t) = F(x)G(t)$ ← حل معادله دیفرانسیل های تک متغیره

$u(x,t,\omega) = e^{-c^2\omega^2 t}\,(A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x)$

$* \quad u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c^2\omega^2 t}\,(A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x)$ شرایط اولیه

« انتگرال فوریه » $f(x) = 2\int^{+\infty} A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x$

(۲) محاسبه‌ی ضرایب انتگرال فوریه ✓

● نکات :

* فقط شرط اولیه ← « $0 < x < \infty$ »

* طول میله متناهی و B.C غیر مشخص ← انتگرال فوریه

■ حل معادلات با تبدیل های مختلف :

● تبدیل لاپلاس : « روی متغیر زمان »

$* \quad L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,.\,dt$ شرط

$t \to \infty \ , \ f(t) \to 0$

Scanned by CamScanner

تاریخ :
پیوست :
شماره :

چشمه مهتاب

* روش حل :

از معادله اولی تبدیل می‌گیریم $L\{u(x,t)\} = V(x,S)$ ←

معادله دیفرانسیل برحسب $V(x,S)$ را حل می‌کنیم ← B.C و شرایط اولیه ← ضرایب ← $u(x,t) = L^{-1}\{V(x,S)\}$ ✓

● تبدیل فوریه : « روی متغیر مکان »

*
$$F_S\{f\} = \int_0^{\pi} f(x)\sin nx \, dx$$
شرط استفاده : مشتق ها نسبت به x نباشد

$$F_C\{f\} = \int_0^{\pi} f(x)\cos nx \, dx$$
شرط استفاده : مشتق ها نسبت به x باشد.

* روش حل : « مثل تبدیل لاپلاس »

■ معادله دیفرانسیل بسل : « مرتبه V »

$$* \quad x^2y'' + xy' + (x^2 - V^2)y = 0$$

کاربرد :

$$\int_0^R x J_0(\alpha_n x) J(\alpha_m x)\, dx = \begin{cases} 0 , & n \neq m \\ \frac{R^2}{2} J_1^2(\alpha_n) , & n = m \end{cases}$$

* اگر تابعی بصورت زیر باشد a_n را می‌توان به کمک رابطه بالا محاسبه کرد

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_0(\alpha_n x)$$

$$\xrightarrow{n=m} a_n = \frac{2}{R^2 J_1(\alpha_n)} \int_0^R x f(x) J_0(\alpha_n x) \cdot dx$$

معادله دیفرانسیل لژاندر :

* $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad , \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$

کاربرد :

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) \cdot dx = \begin{cases} 0 , & \neq m \\ \frac{2}{2n+1} , & n = m \end{cases}$$

* اگر تابعی بصورت زیر باشد a_n را می‌توان به کمک رابطه بالا محاسبه کرد

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(x)$$

$$\xrightarrow{n=m} a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} P_n(x) f(x) \cdot dx$$

تاریخ :
پیوست :
شماره :

چشمه مهتاب

نکات پایانی :

- حل معادله‌ی موج به روش دالامبر :

« $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ »

نوشتن معادله‌ی اصلی برحسب z, v ← $\begin{cases} z = x + ct \\ v = x - ct \end{cases}$

$u(z,v) = h(z) + g(v)$

با توجه به شرایط مرزی و اولیه ← $u(x,t)$ ✓

(با توجه به نوع تابع گسترش فرد یا زوج سری فوریه را بنویسیم)

- $\nabla^2 V = \nabla \cdot (\nabla V)$ ✓

- برای تسلط و فهم بیشتر حتماً روش حل معادلات را با یک مثال مطالعه کنید!

پایان!