ریاضیات پیشرفته ۲

دکتر نوری

جلسه اول : «یکشنبه ۵ مهر ۱۳۸۸»

سرفصل‌ها و روش‌های مورد مطالعه در این درس
- Variational
- perturbation
- Green's function
- Similarity

$$F(x,y,t)=0\begin{cases}\text{lumped System} & F=F(t)\\ \text{Distributed System} & F=F(\vec{r},t)=F(x,y,z,t)\end{cases}$$

- Analytical method
- Numerical method
- Integral method
- Variational method
- Perturbation
- Green's function
- Similarity

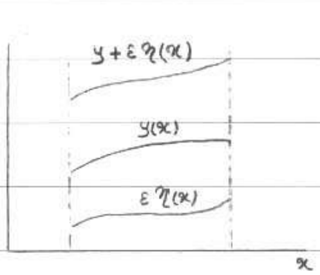
✓ وضعیت lumped مثلاً در نقره که هدایت حرارتی بالایی دارد و دمای آن بیشتر تابع زمان است تا مکان و همچنین در ترموکوپل به دلیل ابعاد کوچک آن وجود دارد.

variational

$$I=\int_a^b F(x,y,y')\,dx$$

✓ به جای اپراتور انتگرال هر اپراتور دیگری می‌تواند قرار گیرد.

✓ به دنبال یافتن تابع y ای هستیم که I را ماکزیمم کند.



$$\Delta F=F(x,y+\varepsilon\eta,y'+\varepsilon\eta')-F(x,y,y')$$

$$I=\int_a^b F(x,y+\varepsilon\eta,y'+\varepsilon\eta')=I(\varepsilon)$$

$$\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0$$

$$\frac{dI}{d\varepsilon}=\delta\int_a^b F(x,y+\varepsilon\eta,y'+\varepsilon\eta')\,dx$$

$$\frac{dI}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial(y+\varepsilon\eta)}\eta + \frac{\partial F}{\partial(y'+\varepsilon\eta')}\eta'\right]\delta y\, dx = 0$$

$$\frac{dI}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right]\delta y\, dx = 0$$

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\,\delta y\, dx = \dots$$ جزء به جزء

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \alpha \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)dx = d\alpha$$

$$\eta' dx = d\beta \qquad \eta = \beta$$

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}\eta\, dx + \eta\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_a^b - \int_a^b \eta\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y\, dx =$$

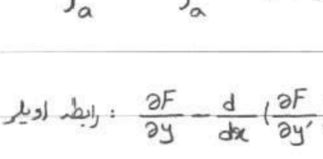
$$= \eta\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_a^b + \int_a^b \delta y\,\eta\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]dx = 0$$

اگر $\eta(a)=\eta(b)=0$ آنگاه natural boundary condition داریم و:

شرط اویلر : $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$

مثال:

می‌خواهیم تابعی که طول مسیر A تا B را مینیمم کند، بیابیم.



$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx\sqrt{1+y'^2}$$

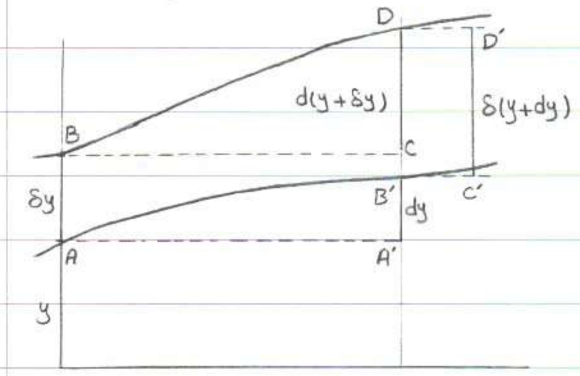
$$AB = \int_a^b ds = \int_a^b dx\sqrt{1+y'^2}$$

رابطه اویلر : $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \longrightarrow 0 - \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}\,2y'(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}\right] = 0$

$$y'(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}} = c \longrightarrow \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = c \longrightarrow \frac{y'^2}{1+y'^2} = c \longrightarrow y'^2(1-c) = c$$

$$\longrightarrow y' = \sqrt{\frac{c}{1-c}} = c_0 \longrightarrow y = c_0 x + c_1$$

$d(\delta y) = \delta(dy)$



$$AB + CD = A'B' + C'D'$$

$$\delta y + d(y+\delta y) = dy + \delta(y+dy)$$

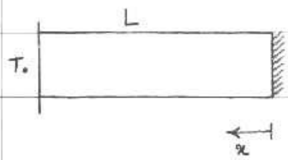
$$d(\delta y) = \delta(dy)$$

// برای جلسه بعد در مورد کتاب‌هایی که به عنوان text book برای این درس مناسب‌اند، جستجو کنید.

جلسه دوم: « سه‌شنبه ۷ مهر ۱۳۸۸ »

$$I=\int_a^b F(x,y,y')\,dx$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$$



$$\theta=T-T_\infty \qquad \frac{d^2\theta}{dx^2}-m^2\theta=0$$

$$\theta\Big|_{x=L}=T_0-T_\infty=\theta_0 \quad , \quad \frac{d\theta}{dx}\Big|_{x=0}=0$$

$$\theta=A\sinh mx+B\cosh mx$$

$$\theta(L)=\theta_0=A\sinh mL+B\cosh mL$$

$$\frac{d\theta}{dx}\Big|_{x=0}=0=mA+mB(0) \longrightarrow A=0 \quad , \quad B=\frac{\theta_0}{\cosh mL}$$

$$\theta=\theta_0\,\frac{\cosh mx}{\cosh mL}$$

Integral method

$$\theta=ax^2+bx+c$$

$$\frac{d\theta}{dx}\Big|_{x=0}=0 \longrightarrow b=0$$

$$aL^2+c=\theta_0 \longrightarrow c=\theta_0-aL^2$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}-m^2\theta=2a-m^2\left[\theta_0+a(x^2-L^2)\right]$$

$$\int_0^L\left\{2a-m^2\left[\theta_0+a(x^2-L^2)\right]\right\}=0 \longrightarrow$$ a بدست می‌آید

$$\theta = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\theta = \left[\theta_0 + a(x^2 - L^2)\right] \varphi_n(x)$$

$$\int_a^b \left(\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta\right) dx = 0$$

$$\int_a^b \left(\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta\right) \phi_1(x)\, dx = 0$$

$$\theta = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$\int_a^b \left(\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta\right) \phi_2(x)\, dx = 0$$

شرایط مرزی : $\theta(L) = \theta_0 \qquad , \quad \frac{d\theta(0)}{dx} = 0$

روش ریتز (Ritz)

$$\theta = \left[\theta_0 + a(x^2 - L^2)\right]\left[1 + a_1(x^2 - L^2)^2\right]$$

$$I = \int_a^b F(x, y, y')\, dx$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0 \qquad \theta(L) = \theta_0 \quad , \quad \frac{d\theta}{dx}(0) = 0$$

$$I = \int_a^b F(x, y, y')\, \delta y\, dx = \int_a^b \left(\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta\right) \delta\theta\, dx = 0$$

$$\int_a^b \frac{d^2\theta}{dx^2}\, \delta\theta\, dx = \dots$$ جزء به جزء

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}\, dx = d\beta \qquad \frac{d\theta}{dx} = \beta$$

$$\delta\theta = \alpha \qquad \frac{d}{dx}(\delta\theta) = d\alpha \longrightarrow \delta\left(\frac{d\theta}{dx}\right) = d\alpha$$

$$\int_a^b \frac{d^2\theta}{dx^2}\, \delta\theta\, dx = \delta\theta \frac{d\theta}{dx}\Big|_a^b - \underbrace{\int_a^b \frac{d\theta}{dx}\, \delta\left(\frac{d\theta}{dx}\right) dx}_{\frac{1}{2}\delta\left[\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2\right]}$$

$$\int_a^b -m^2\theta\delta\theta\, dx = \int_a^b -\frac{1}{2} m^2 \delta(\theta^2)\, dx$$

$$\int_a^b \frac{d^2\theta}{dx^2}\delta\theta\, dx = \delta\theta \frac{d\theta}{dx}\Big|_a^b - \int \frac{1}{2}\left[\delta\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 + m^2\delta(\theta^2)\right] dx = 0$$

$$\delta\theta \frac{d\theta}{dx}\Big|_0^L - \frac{1}{2}\delta\int_0^L \left[\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 + m^2\theta^2\right] dx = 0$$

natural boundary condition : $\delta\theta \frac{d\theta}{dx}\Big|_0^L = 0$

$$\cancelto{0}{\delta[\theta(L)]}\frac{d\theta(L)}{dx} - \delta[\theta(0)]\cancelto{0}{\frac{d\theta(0)}{dx}} = 0$$

$$\int_0^L \left[\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 + m^2\theta\right]\phi_n(x)\, dx$$

$$\theta = \theta_0 + a(x^2 - L^2)$$

$$\theta = \theta_0 + a_1(x^2 - L^2) + a_2(x^2 - L^2)^2$$

$$\delta\int_0^L \left[\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 + m^2\theta^2\right] dx = 0$$

$$\delta\int_0^L \left[\frac{d^2\theta}{dx^2} + m^2\theta\right]\phi_1(x)\, dx = 0$$

$$\theta = \left[\theta_0 + a(x^2 - L^2)\right]\left[1 + a_2(x^2 - L^2)\right]$$

$$\delta(a_1^2 + 2a_1 + a_2) = 0$$

$$\delta(a_1 a_2 + a_2^2) = 0$$

$$2a_1\delta a_1 + 2\delta a_1 + \delta a_2 = 0$$

$$(2a_1 + 2)\delta a_1 + \delta a_2 = 0$$

$$a_1\delta a_2 + a_2\delta a_1 + 2a_2\delta a_2 = 0$$

$$(a_1 + 2a_2)\delta a_2 + a_2\delta a_1 = 0$$

$$a_1 + 2a_2 = 0$$

$$a_2 = 0$$

$$\frac{\theta}{\theta_0} = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right)\left(a_0 + a_1\frac{x^2}{L^2} + a_2\frac{x^4}{L^4} + \cdots\right)$$

$$\frac{\theta}{\theta_0} = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right)a_0 - \left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right)^2 a_1 - \left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right)^3 a_2 - \cdots$$

$$\theta = ax^2 + bx + C$$

$$\theta = (ax^2 + bx + C)\,\phi_n(x)$$

$$\frac{d\theta(0)}{dx} = 0 \qquad , \theta(L) = \theta_0$$

$$\frac{d\theta}{dx} + A\theta\Big|_{x=a} = P_1$$

$$\frac{d\theta}{dx} + B\theta\Big|_{x=b} = P_2$$

$$\theta = (ax^2 + bx + C)\,\phi_n(x) \begin{cases} \theta_1 & \dfrac{d\theta_1}{dx} + A\theta_1\Big|_a = 0 & \dfrac{d\theta_1}{dx} + B\theta_1\Big|_b = 0 \\ \theta_2 & \dfrac{d\theta_2}{dx} + A\theta_2\Big|_a = 0 & \dfrac{d\theta_2}{dx} + B\theta_2\Big|_b = P_2 \\ \theta_3 & \dfrac{d\theta_3}{dx} + A\theta_3\Big|_a = P_1 & \dfrac{d\theta_3}{dx} + B\theta_3\Big|_b = 0 \end{cases}$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0$$

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

$$\frac{d}{dx}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + A(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = P_1$$

$$\frac{d}{dx}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + B(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = P_2$$

مثال:

$$y = f(x)$$

$$y(0) = A \qquad , y(L) = B$$

$y_1(0)=0 \quad , \quad y_1(L)=0$

$y_1=ax^2+bx+\overset{\nearrow 0}{c}$

$aL^2+bL=0 \longrightarrow b=-aL$

$\Rightarrow y_1=ax^2-aLx=ax(x-L)$

$y_2(0)=0 \quad , \quad y_2(L)=B$

$y_2=ax^2+bx+\overset{\nearrow 0}{c}$

$aL^2+bL=B \longrightarrow b=\frac{B-aL^2}{L}$

$\Rightarrow y_2=ax^2-\frac{B-aL^2}{L}x=x\left[ax-\frac{B}{L}-aL\right]=x\left[-\frac{B}{L}+a(x-L)\right]$

$y_3(0)=A \quad , \quad y_3(L)=0$

$y_3=ax^2+bx+c$

$c=A$

$0=aL^2+bL+c \longrightarrow b=-aL-\frac{A}{L}$

$\Rightarrow y_3=ax^2-(aL-\frac{A}{L})x+A$

$y_1=ax(x-L) \qquad y_1(0)=0 \quad , \quad y_1(L)=0$

$y_2=ax(x-L)-\frac{B}{L}x \qquad y_2(0)=0 \quad , \quad y_2(L)=B$

$y_3=ax^2-(aL+\frac{A}{L})x+A \qquad y_3(0)=A \quad , \quad y_3(L)=0$

$$y=y_1+y_2+y_3=x\left[a(x-L)-\frac{B}{L}\right]+ax^2-(aL+\frac{A}{L})x+A+\underbrace{ax(x-L)\times\phi_n(x)}_{\text{قسمت همگن}}$$

تکلیف شماره ۱ : معادله زیر با شرایط مرزی داده شده را با استفاده از روش variational حل کرده و با حل تحلیلی مقایسه کنید.

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}-m^2\theta=0$$

$\theta(L)=\theta_0 \quad , \quad \frac{d\theta}{dx}(0)=0$

برای مطالعه variational از text book زیر استفاده می‌کنیم.

"Conduction Heat Transfer", Arpaci, chapter 8

جلسه سوم: « یکشنبه ۱۳ مهر ۱۳۸۸ »

فرم Variational را برای معادله درجه دو در حالت کلی بدست می‌آوریم:

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)y = f(x)$$

$$\int_a^b \left\{\frac{d}{dx}\left[P\frac{dy}{dx}\right] + qy - f(x)\right\}\delta y\, dx = 0$$

$$\int_a^b \frac{d}{dx}\left[P\frac{dy}{dx}\right]\delta y\, dx = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[P\frac{dy}{dx}\right]dx = d\beta \qquad P\frac{dy}{dx} = \beta$$

$$\delta y = \alpha \qquad \frac{d}{dx}(\delta y)\,dx = d\alpha$$

$$\int_a^b \frac{d}{dx}\left[P\frac{dy}{dx}\right]\delta y\, dx = P\frac{dy}{dx}\delta y\Big|_a^b - \int_a^b \frac{1}{2}\delta P\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx + \int_a^b q\,\delta(y^2)\,dx - \int_a^b f\,\delta y\, dx = 0$$

$$P\frac{dy}{dx}\delta y\Big|_a^b + \delta\int_a^b \left[-\frac{1}{2}P\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{q}{2}y^2 - f(x)y\right]dx = 0$$

natural boundary condition $\Longrightarrow$ $-\frac{1}{2}P\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{q}{2}y^2 - fy = 0$

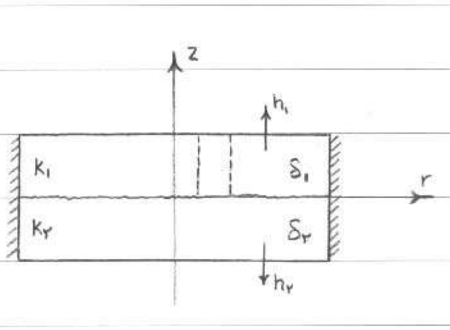
شرایط مرزی غیرطبیعی: $y(a) = y(0)$, $-k\frac{dy}{dx}\Big|_b = \dot{q}''$ $\Longrightarrow$ $P(b)\frac{dy}{dx}\Big|_b \delta[y(b)] - P(a)\frac{dy}{dx}\Big|_a \delta[y(a)] +$

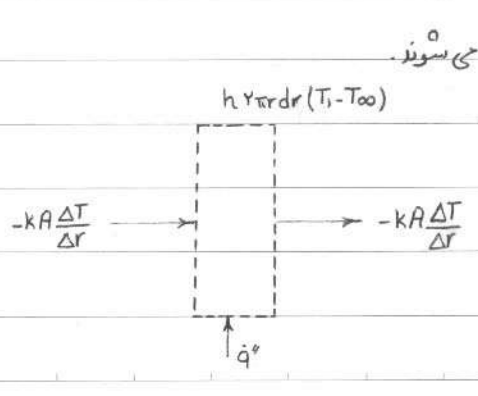
$$+\ \delta\int_a^b \left[-\frac{1}{2}P\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{q}{2}y^2 - fy\right]dy = 0$$

$$\Longrightarrow \delta\left[-\frac{\dot{q}''}{k}P(b)\,y(b) + \int_a^b\left[-\frac{1}{2}P\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{q}{2}y^2 - fy\right]dx\right] = 0$$

مثال:

دو کلاچ که برهم چرخیده و سائیده می‌شوند.





$$\sum E_{in} = \sum E_{out} + \cancelto{0}{\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)_{C.V.}}$$

$$-kA\frac{\Delta T}{\Delta x}\Big|_{r} + \dot q = h\,2\pi r\,\Delta r\,(T_1 - T_\infty) - kA\frac{\Delta T}{\Delta r}\Big|_{r+\Delta r}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[kA\frac{\partial T}{\partial r}\right] = h\,2\pi r\,(T_1 - T_\infty) - kA\frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r+\Delta r} - \dot q$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) - \frac{h}{k\delta_1}r(T_1 - T_\infty) + \frac{\dot q''}{k_1\delta}r = 0$$

$$\theta = T_1 - T_\infty$$

$$r^* = \frac{r}{R}$$

$$\dot q_1 + \dot q_2 = \int_0^R \Delta v\,dF = \int_0^R \mu\Delta v\,P\,2\pi r\,dr = 2\pi\mu\omega\int_0^R Pr^2\,dr = 2\pi\omega\mu\int_0^R P_0\,Pr\,dr = \pi\omega\mu_0 P_0 R^3$$

$$\frac{\partial}{R\partial r^*}\left(Rr^*\frac{\partial\theta_1}{R\partial r^*}\right) - \frac{h}{k\delta_1}Rr^*\theta_1 + \frac{\dot q''}{k_1\delta}Rr^{*2} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^*\frac{\partial\theta_1}{\partial r^*}\right) - \frac{hR^2}{k\delta_1}r^*\theta_1 + \frac{\dot q''R^2}{k_1\delta}r^{*2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^*\frac{\partial\theta_1}{\partial r^*}\right) - Hr^*\theta_1 + \varepsilon r^{*2} = 0$$

$$\int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^*\frac{\partial\theta_1}{\partial r^*}\right) - Hr^*\theta_1 + \varepsilon r^{*2}\right]\delta\theta_1\,dr^* = 0$$

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial r^*}(0) = 0 \qquad \frac{\partial\theta_1}{\partial r^*}(1) = 0$$

$$\theta = ar^{*3} + br^{*2} + \cancelto{0}{cr^*} + d$$

$$0 = 3a + 2b \longrightarrow b = -\frac{3}{2}a$$

$$\theta = ar^{*3} - \frac{3}{2}ar^{*2} + d = a\left(r^{*3} - \frac{3}{2}r^{*2} + \cancelto{\text{اختیاری}:\ \frac{1}{2}}{\frac{d}{a}}\right) = \frac{1}{2}a(2r^{*3} - 3r^{*2} + 1) = a_0(2r^{*3} - 3r^{*2} + 1)$$

$$\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^*\frac{\partial\theta}{\partial r^*}\right) = a_1\frac{\partial}{\partial r^*}(6r^{*3} - 6r^{*2}) - a_0(18r^{*2} - 12r^*)$$

$$\int_0^1 \left[a_0(18r^{*2} - 12r^*) - Ha_0(2r^{*2} - 3r^{*3} + r^*) + \varepsilon r^{*2}\right](2r^{*3} - 3r^{*2} + 1)\,\delta a_0\, dr^* = 0$$

$$a_0\left[6 - \frac{54}{5} + 6 - \frac{24}{5} + 9 - 6\right] - Ha_0\left[\frac{1}{2} - \frac{6}{7} + \frac{2}{5} - \frac{6}{7} + \frac{3}{2} - \frac{3}{4} + \frac{2}{5} - \frac{2}{4} + \frac{1}{2}\right] + \varepsilon\left(\frac{2}{5} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right)\delta a_0 = 0$$

$\longrightarrow \quad a_0 = ??$

$$\theta = a_0(2r^{*3} - 3r^{*2} + 1)\left[a_0 + a_1(2r^{*3} - 3r^{*2}) + a_2(2r^{*3} - 3r^{*2})^2 + \cdots\right]$$

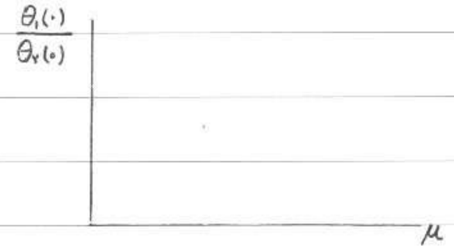
تکلیف شماره ٢ (بخش اول):

١- a_0 را حساب کنید. ضمناً مسیر محاسبات یک بار دیگر کنترل شود.

٢- a_0 و a_1 را برای Variational مرتبه دو بدست آورید.

٣- به صورت اختیاری Variational مرتبه سه نوشته شده و ضرایب a_0، a_1 و a_2 محاسبه شوند.

٤- نتایج Variational مرتبه ١ و ٢ در صفر به شکل نمودار زیر با هم مقایسه شوند.



حال شرایط مرزی را تغییر می‌دهیم:

$$\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^* \frac{\partial \theta_1}{\partial r^*}\right) - Hr^*\theta_1 + \varepsilon r^{*2} = 0$$

$$\frac{d\theta_1}{dx}(0) = 0 \qquad , \quad \theta_1 = T_0 - T_\infty = \theta_0$$

$$\theta_1 = \psi_1 + \psi_0$$

$$\frac{d\psi_1}{dr^*}(0) = 0 \qquad , \quad \psi_1(0) = \theta_0$$

$$\psi_1 = ar^{*2} + br^* + c$$

$$c = \theta_0 - a$$

$$\psi_1 = \theta_0 + a(r^{*2} - 1)$$

$$\frac{d\psi_2}{dr}(0)=0 \qquad , \psi_2(1)=0$$

$$\psi_2 = Mr^{*2} + Nr^* + P$$

$$P = -M$$

$$\psi_2 = M(r^{*2}-1)$$

$$\psi_1 + \psi_2 = \theta_0 + a(r^{*2}-1) + (r^{*2}-1)\left[M_1 + M_2(r^{*2}-1)^2 + M_3(r^{*2}-1)^3 + \cdots\right]$$

$$= \theta_0 + (r^{*2}-1)\left[a_0 + a_1(r^{*2}-1) + a_2(r^{*2}-1)^2 + \cdots\right]$$

تکلیف شماره ۲ (بخش دوم):

معادله با شرایط مرزی جدید را با استفاده از variational مرتبه یک و دو حل کنید.

$$\frac{dy}{dx}(0) + B_1 y(0) = n_1$$

$$\frac{dy}{dx}(L) + B_2 y(L) = n_2$$

$$y = y_1 + y_2 + y_3$$

$$\frac{dy_1(0)}{dx} + B_1 y_1(0) = n_1$$

$$\frac{dy_1(L)}{dx} + B_2 y_1(L) = 0 \quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}(L) = 0 \\ \\ y_1(L) = 0 \end{cases}$$

$$y_1 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$0 = 3aL^2 + 2bL + cL + d$$

$$0 = aL^3 + bL^2 + cL + d$$

$$n_1 = c + B_1 d \longrightarrow c = n_1 - B_1 d$$

$$d = \frac{bL + 2n_1}{2B_1 - \frac{3}{L}}$$

$$c = n_1 - B_1 \frac{bL + 2n_1}{2B_1 - \frac{3}{L}}$$

$$a = \frac{1}{3L^2}\left[2bL + L\left(n_1 - B_1 \frac{bL + 2n_1}{2B_1 - \frac{3}{L}}\right)\right]$$

$$y_1 = f_1(b)x^3 + bx^2 + f_2(b)x + f_3(b)$$

از روی کتاب ص ۴۵۴ $\longrightarrow \quad y_1(x) = (L-x)^2\left(x + \dfrac{L - \frac{n_2}{L}}{2 - B_2 L}\right)$

$$\frac{dy_2(0)}{dx} + B_1 y_2(0) = 0$$

$$\frac{dy_2(L)}{dx} + B_2 y_2(L) = n_2$$

$$y_2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\frac{dy_2(0)}{dx} = 0 \longrightarrow c = 0$$

$$y_2(0) = 0 \longrightarrow d = 0$$

$$3aL^2 + 2bL = 0 \longrightarrow b = -\frac{3}{2}aL$$

$y_2 = ax^3 - \frac{3}{2} a l x$

$y_2 = ax(2x^2 - 3L)$

از روی کتاب ص ٤٥٤ $\longrightarrow \quad y_2(x) = x^2\left(x - L - \dfrac{L - \frac{n_1}{L}}{2 + B_1 L}\right)$

$\dfrac{dy_3}{dx}(0) = 0 \qquad , \; B_1 y_3(0) = 0$

$\dfrac{dy_3}{dx}(L) = 0 \qquad , \; B_2 y_3(L) = 0$

$y_3 = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$y_3 = a(x-L)^2 x^2$

$y_3 = a_0 x^2 (L-x)^2 + a_1 x^3 (L-x)^3 + a_2 x^4 (L-x)^4 + \dots$

از روی کتاب ص ٤٥٤ $\begin{cases} y_2(x) = a_0 + a_1 (L-x)^2 x^2 + a_2 (L-x)^2 x^3 + a_3 (L-x)^2 x^4 + \dots \\ y_3(x) = a_0\left(1 + \cos \frac{\pi x}{L}\right) + a_1\left(1 + \cos\frac{3\pi x}{L}\right) + a_2\left(1 + \cos\frac{5\pi x}{L}\right) + \dots \end{cases}$

Variational (دوبعدی)

$I = \int_a^b F(x, y, y')\,dx$ شرط اویلر: $\dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$

$I = \iint_R F(x, y, T_x, T_y, T)\,dx\,dy$ شرط اویلر: ?

$$\delta I = \delta \iint_R F(x, y, T_x, T_y, T)\,dx\,dy = \iint \left(\frac{\partial F}{\partial T}\delta T + \frac{\partial F}{\partial T_x}\delta T_x + \frac{\partial F}{\partial T_y}\delta T_y\right) dx\,dy = 0$$

$$\iint_R \frac{\partial F}{\partial T_x}\delta T_x\,dx\,dy = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial F}{\partial T_x}\delta T \Big|_{x_1(y)}^{x_2(y)} dy - \iint_R \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial T_x}\right)\delta T\,dx\,dy$$ «با استفاده از روش جز به جزء»

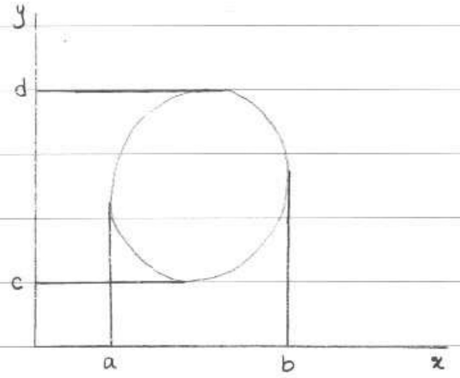
$$\delta(T_x) = \delta\left(\frac{dT}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(\delta T)$$

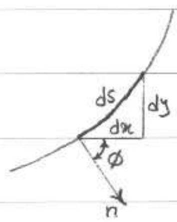
$$\Rightarrow \delta I = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial F}{\partial T_x}\delta T\Big|_{x_1(y)}^{x_2(y)} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial T_y}\delta T\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} + \iint_R \left[\frac{\partial F}{\partial T}\delta T - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial T_y}\right)\delta T - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial T_x}\right)\delta T\right] dx\,dy = 0$$

natural boundry condition $\longrightarrow \quad \delta I = \iint_R \left[\dfrac{\partial F}{\partial T} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial F}{\partial T_x}\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial F}{\partial T_y}\right)\right]\delta T\,dx\,dy = 0$

معادله اویلر یک بعدی : $\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$

معادله اویلر دو بعدی : $\frac{\partial F}{\partial T}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial T_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial T_y}\right)=0$





$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial T_y}\delta T\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)}dx+\int_c^d \frac{\partial F}{\partial T_x}\delta T\Big|_{x_1(y)}^{x_2(y)}dy=\oint_c\left(\frac{\partial F}{\partial T_x}\cos\phi+\frac{\partial F}{\partial T_y}\sin\phi\right)\delta T ds$$

تابع ریتز دو بعدی

$$y=\sum_{n=0}^{N}a_n\phi_n(x)$$

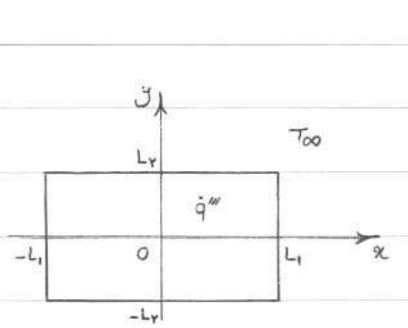
$$T=\sum_{n=0}^{N}a_n\phi_n(x,y)=\sum_{n=0}^{N}a_nX_n(x)Y(y)$$

تکلیف شماره ۳ :

تابع ریتز دما (فرم جدا شده) برای شکل مقابل را بدست آورید.

$$\theta=T-T_\infty$$

$$\theta(x,y)=\sum_{n=0}^{N}a_nX_n(x)Y_n(y)=?$$



معادله کلی گرما : $\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot{q}'''=\rho C_p\frac{\partial T}{\partial t} \quad \left(\frac{W}{m^3}\right)$

$$\frac{\dot{q}'''}{k}+\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=0 \qquad \theta=T-T_\infty$$

$$I=\iint_R\left(\frac{\dot{q}'''}{k}+\nabla^2\theta\right)\delta\theta\,dx\,dy=0$$

$\theta(L_1,y)=0 \quad ; \quad \theta(x,L_2)=0$

$\frac{\partial\theta}{\partial x}(0,y)=0 \quad ; \quad \frac{\partial\theta}{\partial y}(x,0)=0$

$\theta=X(x)\,Y(y)$

$X(x)=ax^2+bx+c$

$\frac{\partial X}{\partial x}(0)=0 \longrightarrow b=0$

$X(L_1)=0 \longrightarrow aL_1^2+c=0 \longrightarrow c=-aL_1^2$

$\Rightarrow X(x)=a(x^2-L_1^2)$

$Y(y)=b(y^2-L_2^2)$

$\theta(x,y)=(x^2-L_1^2)(y^2-L_2^2)(a_0+a_1x^2+a_2x^3+\dots+b_1y^2+b_2y^3+\dots)$

√اگر بخواهیم از term های second order استفاده کنیم، چون $L_2<L_1$ ، اولویت با استفاده از ترم a_1x^2 است تا b_1y^2 ، زیرا به دلیل طول بیشتر در راستای x تعیین دقیق‌تر دما در این راستا بیشتر مورد نیاز است.

first order approximation: $\delta I=\int_0^{L_2}\int_0^{L_1}\left[\frac{\dot{q}'''}{k}+2a_0(y^2-L_2^2)+2a_0(x^2-L_1^2)\right](x^2-L_1^2)(y^2-L_2^2)\,\delta a_0\,dx\,dy=0$

Second order approximation: $\delta I=\int_0^{L_2}\int_0^{L_1}\left[\frac{\dot{q}'''}{k}+(12a_1x^2+2a_0-2a_1L_1^2)(y^2-L_2^2)+2(x^2-L_1^2)(a_0+a_1x^2)\right](x^2-L_1^2)(y^2-L_2^2)\times$
$\times(\delta a_0+x^2\delta a_1)\,dx\,dy=0$

Kantorovich Method

روش کانتروویچ همان روش ریتز است اگر تنها یکی از تابع‌ها را به فرم ریتز درآوریم و دیگری را به شکل تابعی نگه داریم.

$$\theta(x,y) = X(x)\,Y(y) = (y^2 - L_2^2)\,X(x)$$

✓ دقت می‌کنیم که چون $L_1 > L_2$ ، بهتر است $X(x)$ را به فرم تابع نگه داریم تا دقت در طول x که بلندتر است، بیشتر باشد.

$$\delta I = \iint_R \left(\frac{\dot{q}'''}{k} + \nabla^2\theta\right)\delta\theta\, dx\, dy = \iint_R \left[\frac{\dot{q}'''}{k} + (y^2 - L_2^2)X'' + 2X\right](y^2 - L_2^2)\,\delta X\, dx\, dy = 0$$

$$= \int_0^{L_2}\int_0^{L_1} \left[\frac{\dot{q}'''}{k}(y^2 - L_2^2) + (y^4 - 2L_2^2 y^2 + L_2^4)X'' + 2X(y^2 - L_2^2)\right]\delta X\, dx\, dy$$

$$= \int_0^{L_1} \left\{\frac{\dot{q}'''}{k}\left(\frac{y^3}{3} - L_2^2 y\right) + \left(\frac{y^5}{5} - \frac{2L_2^2}{3}y^3 + L_2^4 y\right)X'' + 2X\left(\frac{y^3}{3} - L_2^2 y\right)\right\}\Bigg]_0^{L_2} dx\, \delta X = 0$$

چون X ، variational است مقدار داخل انتگرال بایستی صفر شود، پس:

$$\frac{\dot{q}'''}{k}\left(-\frac{2}{3}L_2^3\right) + \frac{8}{15}L_2^5 X'' - \frac{4}{3}L_2^3 X = 0$$

$$X'' - \frac{5}{2}\frac{X}{L_2^2} - \frac{5}{4}\frac{\dot{q}'''}{kL_2^2} = 0$$

$$X = a\,\sinh\sqrt{2.5}\,\frac{x}{L_2} + b\,\cosh\sqrt{2.5}\,\frac{x}{L_2} - \frac{\dot{q}'''}{2k}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x}(0) = 0 \longrightarrow a = 0$$

$$X(L_1) = 0 \longrightarrow b\,\cosh\sqrt{2.5}\,\frac{L_1}{L_2} - \frac{\dot{q}'''}{2k} = 0 \longrightarrow b = \frac{\dot{q}'''}{2k}\,\frac{1}{\cosh\sqrt{2.5}\,\frac{L_1}{L_2}}$$

$$X(x) = -\frac{\dot{q}'''}{2k}\left(1 - \frac{\cosh\sqrt{2.5}\,\frac{x}{L_2}}{\cosh\sqrt{2.5}\,\frac{L_1}{L_2}}\right)$$

$$\theta(x,y) = -\frac{\dot{q}'''}{2k}(y^2 - L_2^2)\left(1 - \frac{\cosh\sqrt{2.5}\,\frac{x}{L_2}}{\cosh\sqrt{2.5}\,\frac{L_1}{L_2}}\right)$$

second order: $\theta(x,y) = X(x)\,Y(y) \xrightarrow[\text{طول در جهت } y]{\text{طول در جهت } x \text{ بزرگتر از}} \theta(x,y) = (y^2 - L_2^2)(X_1(x) + y^2 X_2(x))$

$$\delta I = \iint_R \left(\frac{\dot{q}'''}{k} + \nabla^2\theta\right)\delta\theta \, dx\, dy$$

$$= \iint_R \left[\frac{\dot{q}'''}{k} + (y^2 - L_2^2)(X_1'' + y^2 X_2'') + (12y^2X_2 + 2X_1 - 2L_2^2X_2)\right](y^2 - L_2^2)(\delta X_1 + y^2\delta X_2)\, dx\, dy = 0$$

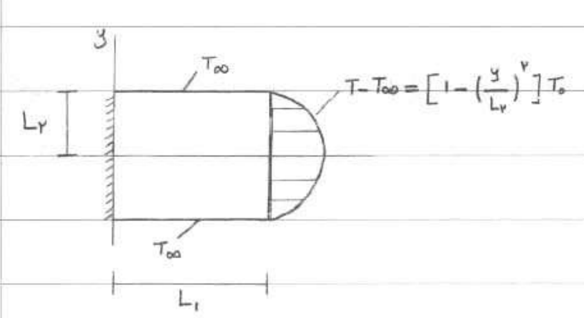
$$= \left[\int_0^L (\qquad\qquad)\, dx\right]\delta X_1 + \left[\int_0^L (\qquad\qquad)\, dx\right]\delta X_2 = 0$$

چون تک‌تک عبارت‌های جلوی انتگرال‌ها بایستی صفر باشند، به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} \phi_1(X_1, X_2, X_1', X_2', X_1'', X_2'') = 0 \\ \phi_2(X_1, X_2, X_1', X_2', X_1'', X_2'') = 0 \end{cases}$$

معمولاً بهترین روش برای حل این دستگاه روش اپراتورهاست.

گاهی فرم ریتز را برای هندسه‌های پیچیده‌تر نیز می‌توان بدست آورد.



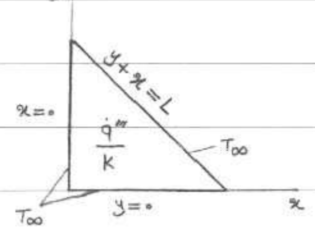
$$\theta(x,y) = X(x)\,Y(y)$$

$$Y(L_2) = 0 \quad , \quad \frac{dY}{dy}(0) = 0$$

$$\frac{dX}{dx}(0) = 0 \quad , \quad X(L_1) = 1$$

$$\theta(x,y) = T_0\left(1 - \frac{y^2}{L_2^2}\right)\left[1 + a_0\left(1 - \frac{x^2}{L_1^2}\right) + a_1\left(1 - \frac{x^2}{L_1^2}\right)^2 + \cdots\right]$$

همچنین در مسائلی که معادلات مرز هندسی کاملاً مشخص است، می‌توان فرم ریتز را با ضرب کردن معادلات در هم بدست آورد.

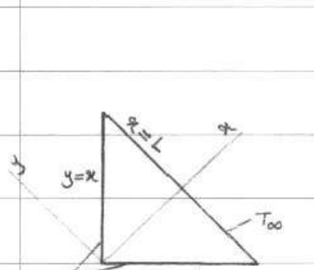


$$\theta(x,y) = a_0\left[xy(x+y-L)\right] + a_1\left[xy(x+y-L)\right]^2 + \cdots$$

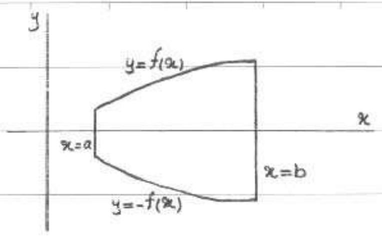
$$\iint_R \left(\frac{\dot{q}'''}{k} + \nabla^2\theta\right)\delta\theta\, dx\, dy = 0$$

$$1^{st}\text{ order}: \int_0^L \int_{y=0}^{y=L-x} \left(\frac{\dot{q}'''}{k} + 2x + 2y\right)(y^2x + x^2y - Lxy)\,\delta a_0\, dx\, dy = 0$$

گاهی می‌توان با تغییر مختصات فرم ریاضی مساله را ساده‌تر کرد:



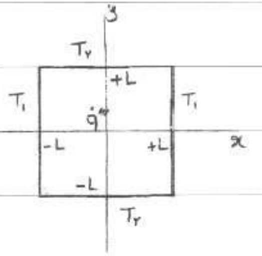
$$\theta(x,y) = a_0\left[(y^2 - x^2)(x - L)\right] + a_1\left[(y^2 - x^2)(x - L)\right]^2 + \cdots$$



$$\theta(x,y) = a_0\left[(y^2-f^2(x))(x-a)(x-b)\right] + a_1\left[(y^2-f^2(x))(x-a)(x-b)\right]^2 + \cdots$$

$$\delta I = \iint_R \left(\frac{\dot{q}'''}{k} + \nabla^2\theta\right)\delta\theta\, dx\, dy = 0$$

اما گاهی با مسائلی روبرو می‌شویم که آنها را نه از طریق روش ریتز و نه از طریق روش کانتروویچ نمی‌توان فرمول بندی کرد. مثلاً در صفحه مربعی زیر به طول L به دلیل وجود Singularity در گوشه‌ها به هیچ طریق نمی‌توان یک تابع تحلیلی به شکل $\theta(x,y)=X(x)\,Y(y)$ برای مسأله یافت.



$$\theta = T - T_1$$

$$\theta(L,y) = 0 \qquad \frac{\partial\theta(0,y)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial\theta(x,0)}{\partial y} = 0 \qquad \theta(x,L) = \theta_0$$

امتحان روش کانتروویچ روی مسأله

$$\theta(x,y) = (x^2-L^2)\,Y(y)$$

$$\delta I = \iint_R \left(\frac{\dot{q}'''}{k} + \nabla^2\theta\right)\delta\theta\, dx\, dy = 0$$

$$\iint_R \left(\frac{\dot{q}'''}{k} + 2Y + (x^2-L^2)Y''\right)(x^2-L^2)\,\delta Y\, dx\, dy = 0$$

$$\int_0^L \left(\frac{\dot{q}'''}{k}+2Y\right)\left(\frac{x^3}{3}-L^2x\right) + Y''\left(\frac{x^5}{5} - \frac{2L^2}{3}x^3 + L^4x\right)\Big]_0^L dy\,\delta Y = 0$$

$$-\frac{2L^3}{3}\frac{\dot{q}'''}{k} - \frac{4L^3}{3}Y + \frac{8L^5}{5}Y'' = 0$$

$$Y(y) = a\sinh\sqrt{2.5}\,\frac{y}{L} + b\cosh\sqrt{2.5}\,\frac{y}{L} - \frac{\dot{q}'''}{2k}$$

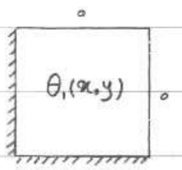
$$Y'(0) = 0 \longrightarrow a = 0$$

$$\theta(x,y)\Big|_{y=L} = \theta_0 \longrightarrow (x^2-L^2)\left(b\cos\sqrt{2.5} - \frac{\dot{q}''}{2k}\right) = \theta_0 \qquad \text{«غ ق ق»}$$

در چنین مسائلی تقسیم مسئله به دو بخش همگن و غیر همگن می‌تواند راهگشا باشد.

$$\theta(x,y) = T(x,y) - T_1 = \underbrace{\theta_1(x,y)}_{\text{بخش همگن}} + \underbrace{\theta_2(y)}_{\text{بخش ناهمگن}}$$

بخش همگن:

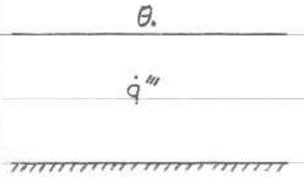


$$\frac{\partial^2\theta_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta_1}{\partial y^2} = 0$$

$$\theta_1(x,y)\Big|_{x=L} = 0 \qquad , \quad \theta_1(x,y)\Big|_{y=L} = 0$$

$$\frac{\partial\theta_1(x,y)}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0 \qquad , \quad \frac{\partial\theta_1(x,y)}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0$$

بخش ناهمگن:



$$\frac{\dot{q}'''}{K} + \frac{d^2\theta_2}{dy^2} = 0$$

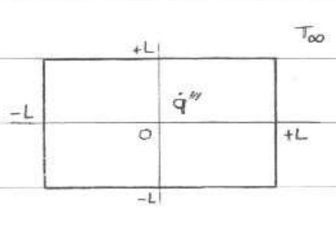
$$\theta_2(y)\Big|_{y=L} = \theta_0 \qquad , \quad \frac{d\theta(y)}{dy}\Big|_{y=0} = 0$$

تکلیف شماره ۴ :

با ادامه دادن مساله اخیر و حل بخش‌های همگن و ناهمگن، توزیع دمای دو بعدی در صفحه مربعی را بیابید.

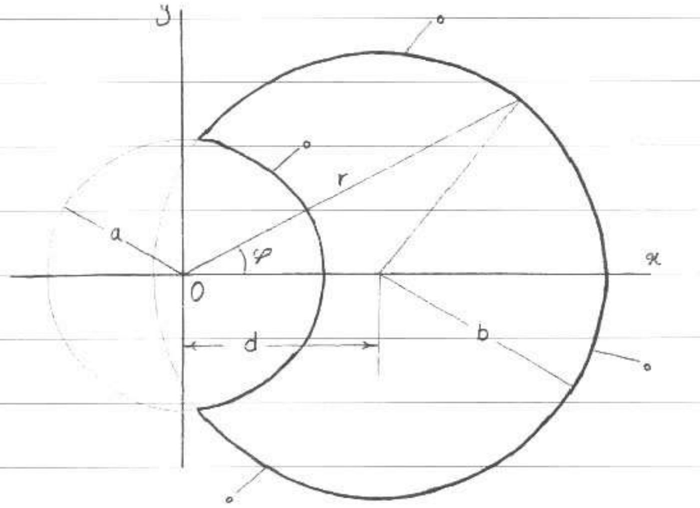
تکلیف شماره ۵ : (تحویل یک‌شنبه ۲۶ مهر)

۱- از روش کانترولیج با دقت مرتبه ۲ توزیع دمای شکل زیر (مثال ابتدای جلسه) را بدست آورید.



۲- از روش کانترولیج با دقت مرتبه ۱ ، توزیع دمای صفحه مثلثی (مثال داخل درس) را یکبار با مختصات کارتزین و یک بار با تغییر محورهای مختصات بدست آورید و مقایسه کنید.

جلسه ششم؛ «سه‌شنبه ۲۱ مهر ۱۳۸۸»



پروفیل ریتز در مختصات کارتزین به صورت زیر است:

$$\theta(x,y) = (a^2 - x^2 - y^2)\left[b^2 - (x-d)^2 - y^2\right](a_0 + a_1 x + b_1 y^2 + \cdots)$$

✓ دلیل آنکه در پروفیل ریتز عبارت $b_1 y$ را ننوشتیم و از $b_1 y^2$ شروع کردیم، تقارن مسأله نسبت به محور x است.

گاهی نوشتن پروفیل ریتز در مختصاتی غیر از کارتزین نظیر مختصات قطبی می‌تواند حجم محاسبات را کاهش دهد.

a : شعاع دایره کوچک ⟶ معادله دایره کوچک : $r = a$

b : شعاع دایره بزرگ ⟶ معادله دایره بزرگ : $r^2 + d^2 - 2rd\cos\varphi = b^2$

پروفیل ریتز در مختصات قطبی : $(a - r)(b^2 - d^2 - r^2 + 2rd\cos\varphi)(a_0 + a_1 r\cos\varphi + \cdots)$

تکلیف شماره ۴ را یکبار دیگر و دقیق‌تر حل کنید.

جلسه هفتم «یک شنبه ۲۶ مهر ۱۳۸۸»

$$\alpha = \frac{k}{\rho C_p} \quad \left(\frac{m^2}{s}\right)$$: ضریب نفوذ گرمایی

$$\frac{\text{قابلیت رسانش انرژی گرمایی}}{\text{قابلیت ذخیره انرژی گرمایی}}$$

معادله کلی گرما :
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{q}''' = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \qquad \left(\frac{W}{m^3}\right)$$

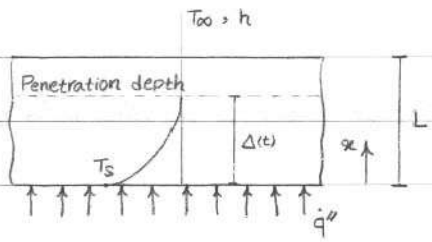
Unsteady Problems

$$\delta I = \int_{V}\int_{t_1}^{t_2}\left[\nabla^2\theta - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \theta}{\partial t}\right]\delta\theta \, dt \, dV = 0$$

$$\theta = \theta(V, f_1(t), f_2(t), \dots)$$

$$\delta\theta = \frac{\partial\theta}{\partial f_1}\delta f_1 + \frac{\partial\theta}{\partial f_2}\delta f_2 + \dots$$

مثال :



$$\theta = T - T_\infty$$

$$\delta I = \int_{V}\int_{t_1}^{t_2}\left[\nabla^2\theta - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \theta}{\partial t}\right]\delta\theta \, dt \, dV = 0$$

شرایط مرزی برای حل چنین معادله‌ای دو شرط مرزی بر روی x و یک شرط مرزی بر روی t است که عبارتند از :

$$-k\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \dot{q}''$$

$$\theta(x,t)\Big|_{x=\Delta} = 0$$

$$-k\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=\Delta} = 0$$

توجه شود که دو شرط آخر چون $\Delta(t)$ تابعی از t است، معادل یک شرط مکانی و یک شرط زمانی هستند.

$$\theta(x,t) = X(x) \times T(t)$$

روش استاندارد کانتروویچ از مرتبه اول می‌گوید که θ را به تابعی از x و تابعی از t گسسته کنیم و از روی شرایط مرزی $X(x)$ را تعیین کرده و اجازه دهیم $T(t)$ تغییر کند. اما چون شرایط مرزی x در خود t را نیز دارند چنین فرم گسسته‌ای به دست نخواهد آمد بلکه پروفیل کانتروویچ مرتبه اول شامل $\Delta(t)$ به صورت آمیخته با تابع معین x خواهد بود.

$$\theta(x,t)=a(t)x^2+b(t)x+C(t)$$

$$\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0}=-\frac{\dot q''}{k}\longrightarrow b(t)=-\frac{\dot q''}{k}$$

$$\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=\Delta}=0\longrightarrow 2a(t)\times\Delta(t)-\frac{\dot q''}{k}=0\longrightarrow a(t)=\frac{\dot q''}{2k\Delta(t)}$$

$$\theta(x,t)\Big|_{x=\Delta}=0\longrightarrow \frac{\dot q''}{2k\Delta(t)}\times(\Delta(t))^2-\frac{\dot q''}{k}\Delta(t)+C(t)=0\longrightarrow C(t)=\frac{\dot q''\Delta(t)}{2k}$$

⟸ پروفیل کانتوری مرتبه اول: $\theta(x,t)=\frac{\dot q''}{2k\Delta}x^2-\frac{\dot q''}{k}x+\frac{\dot q''\Delta}{2k}=\frac{\dot q''}{2k\Delta}(x^2-2\Delta x+\Delta^2)=\frac{\dot q''}{2k\Delta}(x-\Delta)^2$

$$\delta I=\int_{t_1}^{t_2}\int_0^{\Delta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)\delta\theta\,dt\,dx=0$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\int_0^{\Delta}\left[\frac{\dot q''}{k\Delta}-\frac{1}{\alpha}\frac{\dot q''}{2k}\left(-\frac{x^2}{\Delta^2}+1\right)\frac{\partial\Delta}{\partial t}\right]\times\left[\frac{\dot q''}{2k}\left(-\frac{x^2}{\Delta^2}+1\right)\delta\Delta\right]dx\,dt$$

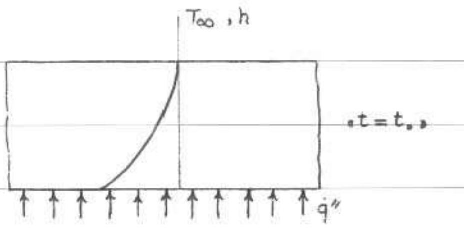
$$=\int_{t_1}^{t_2}\int_0^{\Delta}\left[\frac{2}{\Delta}-\frac{1}{\alpha}\left(-\frac{x^2}{\Delta^2}+1\right)\frac{\partial\Delta}{\partial t}\right]\times\left(-\frac{x^2}{\Delta^2}+1\right)\delta\Delta\,dx\,dt$$

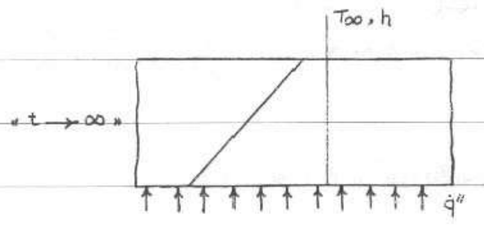
$$=\int_{t_1}^{t_2}\int_0^{\Delta}\left[-\frac{2}{\Delta^3}x^2+\frac{2}{\Delta}-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\Delta}{\partial t}\left(1-\frac{2}{\Delta^2}x^2+x^4\right)\right]dx\,dt\,\delta\Delta$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left[-\frac{2}{3}+2-\frac{1}{\alpha}\frac{d\Delta}{dt}\left(\Delta-\frac{2}{3}\Delta+\frac{\Delta}{5}\right)\right]dt\,\delta\Delta$$

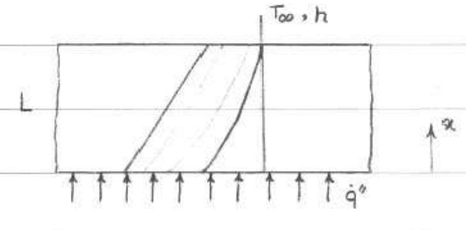
$$=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{\alpha}\frac{d\Delta}{dt}\times\frac{8}{15}\Delta\right)dt\,\delta\Delta=0$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{\alpha}\frac{2}{5}\Delta\frac{d\Delta}{dt}=1\longrightarrow\frac{d\Delta^2}{dt}=5\alpha\longrightarrow\Delta^2=5\alpha t+\cancel{c}^{\ \Delta(0)=0}\longrightarrow\Delta=\sqrt{5\alpha t}\quad,\ t_0=\frac{L^2}{5\alpha}$$





بخش دوم مسأله یعنی از $t=t_0$ تا زمان پایدار شدن دما را در جلسه بعد بررسی خواهیم کرد.



$\theta = T - T_\infty$

$t > t_0 \qquad , t_0 = \frac{L^2}{5\alpha}$

$\dot{q}'' = -k\frac{\partial\theta}{\partial x}\Big|_{x=0} \qquad , h\theta = -k\frac{\partial\theta}{\partial x}\Big|_{x=L}$

$\theta = \theta_1 + \theta_2$

$-k\frac{\partial\theta_1}{\partial x}\Big|_{x=0} = \dot{q}'' \qquad , -k\frac{\partial\theta_1}{\partial x}\Big|_{x=L} = h\theta_1$

$-k\frac{\partial\theta_2}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0 \qquad , -k\frac{\partial\theta_2}{\partial x}\Big|_{x=L} = h\theta_2$ « بخش همگن برای بسط کانتروویچ »

✓ توجه می‌کنیم که چون $h\theta = -k\frac{\partial\theta}{\partial x}$ تنها شامل θ است و عدد ثابت یا ترم غیرخطی ندارد برهم‌نهی برای آن صادق بوده و یک شرط همگن محسوب می‌شود.

$\theta_1(x,t) = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$

$-k\frac{\partial\theta_1}{\partial x}\Big|_{x=0} = \dot{q}'' \longrightarrow b = -\frac{\dot{q}''}{k}$

$-k\frac{\partial\theta_1}{\partial x}\Big|_{x=L} = h\theta_1\Big|_{x=L} \longrightarrow -k(2aL - \frac{\dot{q}''}{k}) = h(aL^2 + bL + c) \longrightarrow c = -\frac{2aLk}{h} + \frac{\dot{q}''}{h} - aL^2 + \frac{\dot{q}''L}{k}$

$\Rightarrow \theta_1(x,t) = a(t)(x^2 - L^2) - \frac{\dot{q}''}{k}x + \frac{\dot{q}''}{h} + \frac{\dot{q}''L}{k} - a(t)\frac{2Lk}{h}$

$\theta_2(x,t) = A(t)x^2 + B(t)x + C(t)$

$-k\frac{\partial\theta_2}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0 \longrightarrow B = 0$

$-k\frac{\partial\theta_2}{\partial x}\Big|_{x=L} = h\theta_2 \longrightarrow -k(2AL) = h(AL^2 + C) \longrightarrow C = -\frac{2ALk}{h} - AL^2$

$\Rightarrow \theta_2(x,t) = A(t)(x^2 - L^2) - A(t)\frac{2Lk}{h}$

توجه می‌کنیم که این بخش همگن است که پتانسیل بسط داده شدن به روش کانتروویچ را برای تعداد بیشتری تابع دارد و بنابراین می‌توان آن

را دقیق‌تر کرد.

$$\theta_2(x,t) = f_n(t)(x^n - L^n) + f_{n-1}(t)(x^{n-1} - L^{n-1}) + \dots + f_3(t)(x^3 - L^3) + f_2(t)(x^2 - L^2) - \frac{K}{h}(nf_nL^n + \dots + 3f_3L^3 + 2f_2L^2)$$

$$\delta I = \int_0^L \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)\delta\theta \, dx \, dt = 0$$

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = a(x^2 - L^2) - \frac{\dot{q}''}{K}x + \frac{\dot{q}''}{h} + \frac{\dot{q}''L}{K} - a\frac{2LK}{h} + A(x^2 - L^2) - A\frac{2LK}{h}$$

$$= (a+A)(x^2 - L^2) - \frac{\dot{q}''}{K}x + \frac{\dot{q}''}{h} + \frac{\dot{q}''L}{K} - (a+A)\frac{2LK}{h}$$

اگر $(a(t) + A(t))$ را $f(t)$ فرض کنیم، ماهیت مسأله همان کانترووچ مرتبه 1 باقی می‌ماند

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = 2f$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = f'(x^2 - L^2) - f'\frac{2LK}{h}$$

$$\delta\theta = \left(x^2 - L^2 - \frac{2LK}{h}\right)\delta f$$

$$\delta I = \int_0^L \left[2f - \frac{1}{\alpha}\left(x^2 - L^2 - \frac{2LK}{h}\right)f'\right]\left(x^2 - L^2 - \frac{2LK}{h}\right)\delta f \, dx \, dt = 0$$

می‌توان مسأله را به جای distributed به صورت Lumped نگاه کرد.

Lumped system

$$\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)_{C.V.} = \sum E_{in}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\rho ALC_v(T - T_\infty)\right] = \dot{q}''A - hA(T - T_\infty)$$

$$\rho LC_v\frac{d\theta}{dt} = \dot{q}'' - h\theta$$

$$\frac{d\theta}{h\theta - \dot{q}''} = \frac{-h\,dt}{\rho C_v L}$$

$$\ln\left(\theta - \frac{\dot{q}''}{h}\right) = -\frac{h}{\rho C_v L} t + C_1$$

$$\theta = \frac{\dot{q}''}{h} + C_0 e^{\frac{-ht}{\rho C_v L}}$$

$$t = 0 \longrightarrow \theta = 0 \longrightarrow C_0 + \frac{\dot{q}''}{h} = 0 \longrightarrow C_0 = -\frac{\dot{q}''}{h}$$

$$\Rightarrow \theta(t) = \frac{\dot{q}''}{h}\left(1 - e^{-\frac{ht}{\rho C_v L}}\right)$$

جلسه نهم :   « یک شنبه ۳ آبان ۱۳۸۸ »

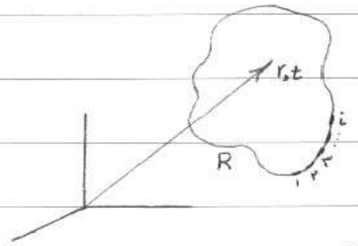
Green's function

توابع گرین معمولاً در مسائلی که شرط مرزی ، شرط اولیه یا خود معادله وابسته به زمان باشد ، کاربرد دارند.

$G(r,t|r',\tau)$

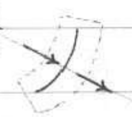
شرایط در r و t تابع اختلال در r' ، τ است.

$$\nabla^2\theta + \frac{1}{k}g(r,t) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \theta}{\partial t}$$



$$k_i \frac{\partial \theta}{\partial n_i} + h_i\theta = h_i\theta_{\infty,i} = f_i(r,t) \qquad i \in B_s$$

$$\theta(r,0) = F(r)$$



مسئله متناظر برای green function

$$\nabla^2 G(r,t|r',\tau) + \frac{1}{k}\delta(r-r')\delta(t-\tau) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial G}{\partial t}$$

$$k_i \frac{\partial G}{\partial n_i} + h_i G = 0$$

$$G(r,0) = 0$$

تابع دلتای دیراک : $\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}$; $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x)\,dx = 1$

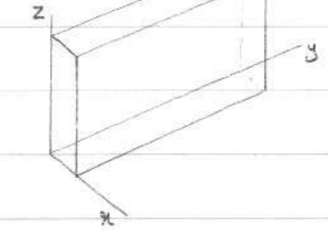
$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\delta(x)\,dx = F(0) \quad ; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,\delta(x-b)\,dx = F(b)$$

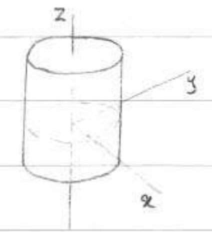
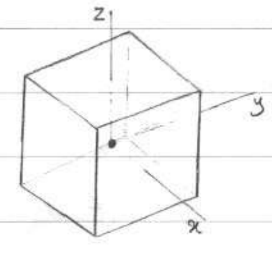
$$\delta(x) = \delta(-x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,\delta^{(n)}(x-b)\,dx = (-1)^n F^{(n)}(b)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,\delta'(x-b)\,dx = -F'(b) \quad ; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,\delta''(x-b)\,dx = +F''(b)$$

ترم تولید حرارت داخلی ، $g(r,\theta)$ ، را می‌توان به حالت‌های زیر طبقه‌بندی کرد.



g_s^c (Continuously)	g_s^i (instantaneously)	تولید صفحه‌ای (Surface)	یک بعدی	صفحه از دو جهت نامتناهی و از یک جهت محدود است.	
g_L^c	g_L^i	تولید میله‌ای (Line)	دو بعدی	خط از یک جهت نامتناهی و از دو جهت محدود است.	
g_p^c	g_p^i	تولید نقطه‌ای (Point)	سه بعدی	نقطه از هر سه جهت محدود است.	

$$\dot{g}''' = g_p^i\ \delta(x-x')\,\delta(y-y')\,\delta(z-z')\,\delta(t-\tau) \longrightarrow [g_p^i] = \frac{\frac{W}{m^3}}{\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{s}} = W.S = J$$

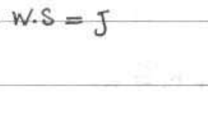
$$\dot{g}''' = g_L^i\ \delta(x-x')\,\delta(y-y')\,\delta(t-\tau) \longrightarrow [g_L^i] = \frac{\frac{W}{m^3}}{\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{s}} = \frac{W.S}{m} = \frac{J}{m}$$

$$\dot{g}''' = g_s^c\ \delta(x-x') \longrightarrow [g_s^c] = \frac{\frac{W}{m^3}}{\frac{1}{m}} = \frac{W}{m^2}$$

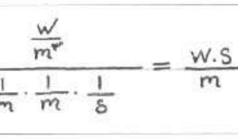
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x')\,dx = 1 \longrightarrow [\delta(x-x')]\times[dx] = [1] \longrightarrow [\delta(x-x')] = \frac{1}{m}$$

$$\int_{\theta'-\pi}^{\theta'+\pi} \delta(\theta-\theta')\,d\theta = 1 \longrightarrow [\delta(\theta-\theta')]\times[d\theta] = [1] \longrightarrow [\delta(\theta-\theta')] = 1$$

مختصات کروی : $\dot{g}''' = g_p^i\ \delta(r-r')\,\delta(r\theta-r'\theta')\,\delta(r\sin\theta\,\phi - r'\sin\theta'\phi')\,\delta(t-\tau)$



$$\dot{g}''' = g_p^i \frac{\text{عدد بی بعد}}{(\text{مشخصه طول})^n}\,\delta(u_1-u_1')\,\delta(u_2-u_2')\,\delta(u_3-u_3')\,\delta(t-\tau)\ ;\ n \begin{cases} \text{rectangular} & 0 \\ \text{Cylindrical} & 1 \\ \text{Spherical} & 2 \end{cases}$$



✓ برای تعیین $\frac{\text{عدد بی بعد}}{(\text{مشخصه طول})^n}$ از جدول مقابل استفاده شود:

$$\Rightarrow \quad [g_p^i]_{\text{کارتزین}} = [g_p^i]_{\text{استوانه‌ای}} = [g_p^i]_{\text{کروی}} \quad \Leftarrow$$

بردارهای یک مختصات کلی	مختصات کارتزین	مختصات استوانه‌ای	مختصات کروی
$\hat{\varepsilon}_{u_1}$	ε_x	ε_r	ε_ρ
$\hat{\varepsilon}_{u_2}$	ε_y	ε_θ	ε_φ
$\hat{\varepsilon}_{u_3}$	ε_z	ε_z	ε_θ
h_1	1	1	1
h_2	1	r	ρ
h_3	1	1	$\rho\sin\varphi$

طول دیفرانسیلی در مختصات کلی : $ds = (h_1\hat{\varepsilon}_{u_1})^2 + (h_2\hat{\varepsilon}_{u_2})^2 + (h_3\hat{\varepsilon}_{u_3})^3$

گرادیان در مختصات کلی : $\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}\hat{\varepsilon}_{u_1} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}\hat{\varepsilon}_{u_2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}\hat{\varepsilon}_{u_3}$

دیورژانس در مختصات کلی : $\operatorname{div}(A) = \nabla\cdot A = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3A_{u_1}) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1h_3A_{u_2}) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2A_{u_3})\right]$

کرل در مختصات کلی : $\operatorname{Curl}(F) = \nabla\times F = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\hat{\varepsilon}_{u_1} & h_2\hat{\varepsilon}_{u_2} & h_3\hat{\varepsilon}_{u_3} \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1F_{u_1} & h_2F_{u_2} & h_3F_{u_3} \end{vmatrix}$

برای دو هفته آینده یک موضوع مرتبط با ریاضی برای ارائه سمینار انتخاب شود و چکیده پیشنهاد در یک صفحه ارائه گردد.

---

	g_p^i یا g_p^c	g_L^i یا g_L^c	g_s^i یا g_s^c	برای تعیین $\frac{\text{عدد بی‌بعد}}{(\text{مشخصه طول})^n}$
مختصات کارتزین	1	1	1	
مختصات استوانه‌ای	$\frac{1}{r}$	$\frac{1}{2\pi r}$	$\frac{1}{2\pi r}$	
مختصات کروی	$\frac{1}{r^2\sin\theta}$	$\frac{1}{4\pi r^2}$	$\frac{1}{4\pi r^2}$	

جلسه دهم: ... سه‌شنبه ۵ آبان ۱۳۸۸ .

Green's function

$$\nabla^2 T + \frac{1}{k} g(r,t) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$K_i \frac{\partial T}{n} + h_i T(r,t) = h_i T_\infty = f_i(r,t)$$

$$T(r,0) = F(r)$$

برای چنین مسئله کلی انتقال حرارتی، تابع گرین از مسئله همگن زیر بایستی تعیین شود.

$$\nabla^2 G(r,t|r',\tau) + \frac{1}{k}\delta(r-r')\delta(t-\tau) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial G}{\partial t}$$

$$K_i \frac{\partial G}{\partial n} + h_i G = 0$$

✓ در مورد شرط زمانی بعداً بحث خواهیم کرد.

اگر تابع گرین مرتبط با مسأله فوق تعیین شود، آنگاه جواب کلی دما برحسب تابع گرین به صورت زیر خواهد بود. (اثبات خارج از برنامه این درس است.)

$$T(r,t) = \int_R G(r,t|r',\tau)\Big|_{\tau=0} F(r')\,dV' + \frac{\alpha}{k}\int_{\tau=0}^{t}\int_R G(r,t|r',\tau)\,g(r',\tau)\,dV'\,d\tau$$

$$+ \alpha \int_{\tau=0}^{t} \sum_{i=1}^{N} \int_{S_i} G(r,t|r',\tau)\Big|_{r'=r_i} \frac{1}{K_i} f_i(r',\tau)\,dS_i'\,d\tau$$

برای مسئله یک بعدی N=2 است. یعنی تنها دو شرط مرزی داریم. با یادآوری weight function از جلسه قبل، دمای یک بعدی برحسب تابع گرین به صورت زیر خواهد بود.

$$T(x,t) = \int_{x'=0}^{L} x'^P G(x,t|x',\tau)\Big|_{\tau=0} F(x')\,dx' + \frac{\alpha}{k}\int_{\tau=0}^{t}\int_{x'=0}^{L} x'^P G(x,t|x',\tau)\,g(x',\tau)\,dx'\,d\tau$$

$$+ \alpha \int_{\tau=0}^{t} \sum_{i=1}^{2} \left[x'^P G(x,t|x',\tau)\right]_{x'=0,L} \frac{1}{K_i} f_i \; d\tau$$

$$\text{Weight function, } P \begin{cases} 0 & \text{مختصات کارتزین} \\ 1 & \text{مختصات استوانه‌ای} \\ 2 & \text{مختصات کروی} \end{cases}$$

انواع شرایط مرزی:

- نوع اول (دیریکله) : $T=T_w$, $k_i\frac{\partial T}{\partial n}+h_iT=h_iT_w \xrightarrow{k_i=0} T=T_w$
- نوع دوم (نیومن) : $k\frac{\partial T}{\partial n}=\dot{q}''$, $k_i\frac{\partial T}{\partial n}+h_iT=f_i(r_{\text{مرز}},t) \xrightarrow[f_i(r,t)=\dot{q}'']{h_i=0} k_i\frac{\partial T}{\partial n}=\dot{q}''$
- نوع سوم : $k_i\frac{\partial T}{\partial n}+h_iT=h_iT_\infty=f_i(r_{\text{مرز}},t)$

همانطور که می‌بینیم در مواردی که شرط مرزی از نوع دیریکله باشد، هنگام بدست آوردن دما از روی تابع گرین، در مرز باید قرار دهیم $k_i=0$ که این محاسبه انتگرال سوم را با مشکل مواجه می‌کند. به همین دلیل در این مورد از برابری زیر استفاده می‌شود:

کلی: $$\frac{1}{k_i}G_i(r,t|r',\tau)\Big|_{r'=r_i} = -\frac{1}{h_i}\frac{\partial G(r,t|r',\tau)}{\partial n_i}\Big|_{r'=r_i}$$

یک بعدی: $$\frac{1}{k_i}G_i(x,t|x',\tau)\Big|_{x'=0\ \text{یا}\ L} = -\frac{1}{h_i}\frac{\partial G(x,t|x',\tau)}{\partial n_i}\Big|_{x'=0\ \text{یا}\ L} \qquad n_i\begin{cases} x'=0 \longrightarrow n_i=-x' \\ x'=L \longrightarrow n_i=x' \end{cases}$$

برای محاسبه خود تابع گرین سه روش کلی وجود دارد که عبارتند از:

$$\text{determination of Green's function} \begin{cases} \text{Laplace transformation} \\ \text{method of images} \\ \text{seperation of variables} \end{cases}$$

✓ در اینجا ما تنها به بررسی مورد سوم یعنی جداسازی متغیرها می‌پردازیم.

مثال: تابع گرین را برای مسئله زیر تعیین کنید.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{1}{k}g(x,t)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad 0<x<L \quad , t>0$$

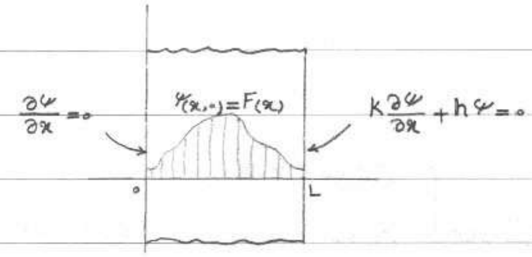
$$\frac{\partial T}{\partial x}=f_1(t) \quad \text{«شرط نیومن»} \qquad x=0 \quad , t>0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}+HT=f_2(t) \qquad x=L \quad , t>0$$

$$T=F(x) \qquad 0<x<L \quad , t=0$$

مسئله همگن متناظری که بایستی حل شود به صورت زیر است :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \psi}{\partial t} \qquad 0<x<L \quad , \quad t>0$$



$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \qquad x=0 \quad , \quad t>0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + H\psi = 0 \qquad x=L \quad , \quad t>0$$

$$\psi = F(x) \qquad 0<x<L \quad , \quad t=0$$

$$\psi(x,t) = X(x)\Gamma(t)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \psi}{\partial t} \longrightarrow \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{\alpha\Gamma}\frac{d\Gamma}{dt}$$

چون طرف چپ تابع x و طرف راست تابع t است، پس هردو ثابت هستند. چون دما یعنی T و از آنجا ψ با زمان کم می‌شود تا نهایتاً در $t\to\infty$ ، $\psi(t)=0$ ، پس عدد ثابت باید منفی باشد.

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{\alpha\Gamma}\frac{d\Gamma}{dt} = -\lambda^2$$

$$\frac{d\Gamma}{\Gamma} = -\alpha\lambda^2 dt$$

$$\ln\Gamma = -\alpha\lambda^2 t + c_1$$

$$\Gamma = C_1 e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\lambda^2$$

$$\left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=0} = 0 \quad , \quad \left.\frac{dX}{dx} + HX\right|_{x=L} = 0$$

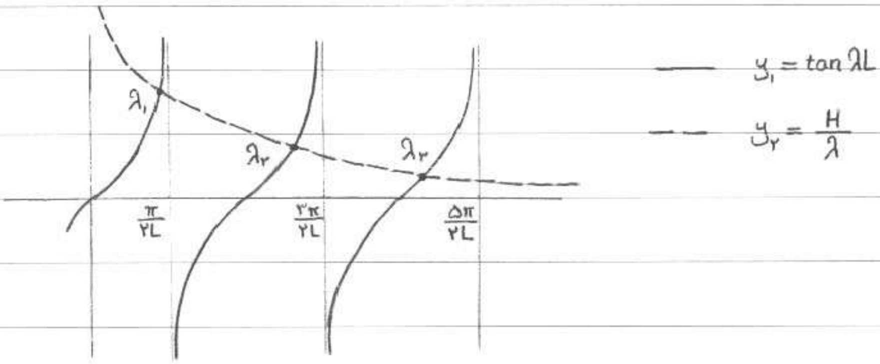
$$\frac{d^2X}{dx^2} = -\lambda^2 X$$

$$\longrightarrow X = C_2 \sin\lambda x + C_3 \cos\lambda x$$

$$\left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=0} = 0 \longrightarrow C_2 = 0$$

$$\frac{dX}{dx} + HX = -\lambda C_3 \sin\lambda x + H C_3 \cos\lambda x = 0 \longrightarrow \left.\lambda \sin\lambda x = H\cos\lambda x\right|_{x=L}$$

$$\longrightarrow \tan\lambda L = \frac{H}{\lambda} \quad \left(= \frac{h}{k\lambda} = \frac{\frac{hL}{k}}{\lambda L} = \frac{Bi}{\lambda L}\right)$$



$$\theta(x,t) = X(x)T(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_1 e^{-\alpha\lambda_n^2 t} \times C_3 \cos\lambda_n x = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\alpha\lambda_n^2 t} \cos\lambda_n x$$

✓ چون تابع $\theta(x,t)$ نسبت به λ_n زوج است ، می‌توانیم تنها مقادیر مثبت λ_n را حساب کنیم.

✓ معمولاً نیازی پیدا نمی‌شود که برای محاسبه $\theta(x,t)$ بیش‌تر از چهار یا پنج جمله را در نظر بگیریم. (تا λ_4 یا λ_5 کافیست)

تا اینجا از هر دو شرط مرزی استفاده کرده‌ایم و شکل تابع θ را بدست آورده‌ایم. حال با استفاده از شرط اولیه ، مقادیر C_n را حساب خواهیم کرد.

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\lambda_n x$$

$$\int_{x=0}^{L} F(x)\cos\lambda_n x\, dx = \int_{x=0}^{L} C_n \cos^2\lambda_n x\, dx$$

$$C_n = \frac{\int_{x=0}^{L} F(x)\cos\lambda_n x\, dx}{\int_{x=0}^{L} \cos^2\lambda_n x\, dx} = \frac{\int_{x=0}^{L} F(x)\cos\lambda_n x\, dx}{\int_{x=0}^{L} \left(\frac{1+\cos 2\lambda_n x}{2}\right)} = \frac{\int_{x=0}^{L} F(x)\cos\lambda_n x\, dx}{\frac{1}{2}L + \frac{1}{4\lambda_n}\sin 2\lambda_n L}$$

اما باتوجه به اینکه $\tan\lambda_n L = \frac{H}{\lambda_n}$ ، می‌توان نوشت :

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \longrightarrow \sin 2\lambda_n L = \frac{2\tan\lambda_n L}{1+\tan^2\lambda_n L} = \frac{\frac{2H}{\lambda_n}}{1+\frac{H^2}{\lambda_n^2}} = \frac{2\lambda_n H}{\lambda_n^2 + H^2}$$

$$\longrightarrow C_n = \frac{\int_{x=0}^{L} F(x)\cos\lambda_n x\,dx}{\frac{L}{2} + \frac{1}{4\lambda_n}\frac{2\lambda_n H}{\lambda_n^2 + H^2}} = \frac{2(\lambda_n^2 + H^2)}{L(\lambda_n^2 + H^2) + H}\int_{x=0}^{L} F(x)\cos\lambda_n x\,dx$$

نهایتاً تابع ψ به فرم زیر خواهد بود:

$$\psi(x,t) = \int_{x'=0}^{L}\left[2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\lambda_n^2 t}\,\frac{\lambda_n^2 + H^2}{L(\lambda_n^2 + H^2) + H}\cos\lambda_n x\,\cos\lambda_n x'\right]F(x')\,dx'$$

به عبارت داخل کروشه، kernel انتگرال‌گیری گفته می‌شود. اگر آن را با $K(r,r',t)$ نشان دهیم، آنگاه ψ را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$\psi(r,t) = \int_R K(r,r',t)\,F(r')\,dV'$$

با مقایسه این عبارت و انتگرال مربوط به تاثیر دمای اولیه بر روی T با استفاده از تابع گرین، یعنی:

$$T(r,t) = \int_R G(r,t|r',\tau)\big|_{\tau=0}\,F(r')\,dV'$$

نتیجه می‌گیریم که برای $\tau=0$، kernel همان تابع گرین است.

$$G(r,t|r',\tau)\big|_{\tau=0} = K(r,r',t)$$

برای بدست آوردن تابع گرین کلی کافیست در کرنل، t را به $t-\tau$ تبدیل کنیم.
پس تابع گرین برای این مسئله به شکل زیر خواهد بود:

$$G(x,t|x',\tau) = 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\lambda_n^2(t-\tau)}\,\frac{\lambda_n^2 + H^2}{L(\lambda_n^2 + H^2) + H}\cos\lambda_n x\,\cos\lambda_n x'$$

در نهایت برای محاسبه دما به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$K_i\frac{\partial T}{\partial x} + h_i T = h_i T_\infty = f_i(t)$$

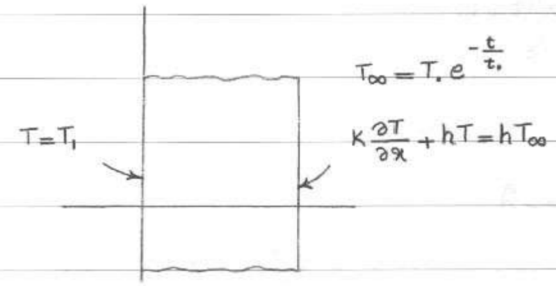
شرط مرزی اول: $\frac{\partial T}{\partial x} = f_1(t) \longrightarrow k_1 = 1,\quad h_1 = 0,\quad f_1 = f_1(t)$

شرط مرزی دوم: $\frac{\partial T}{\partial x} + HT = f_2(t) \longrightarrow k_2 = 1,\quad h_2 = H,\quad f_2 = f_2(t)$

$$T(x,t) = \int_{x'=0}^{L} G(x,t|x',\tau)\big|_{\tau=0}\,F(x')\,dx' + \frac{\alpha}{K}\int_{\tau=0}^{t}\int_{x'=0}^{L} G(x,t|x',\tau)\,g(x',\tau)\,dx'\,d\tau$$

$$+\,\alpha\int_{\tau=0}^{t}\left[G(x,t|x',\tau)\big|_{x'=0} f_1(\tau) + G(x,t|x',\tau)\big|_{x'=L} f_2(\tau)\right]d\tau$$

مثال : تابع گرین برای مسئله زیر را تعیین کنید.



$L = 0/1 \ m$

$T_0 = 280 \ K$

$T_1 = 300 \ K$

$h = 100 \ \frac{W}{m^2 K}$

$K = 30 \ \frac{W}{m \cdot K}$

$\alpha = 7/5 \times 10^{-6} \ \frac{m^2}{s}$

$t_0 = 10^s \longrightarrow T_\infty = 280 e^{-0/1 t}$

$g_0 = 1000 \ \frac{W}{m^3} \longrightarrow g''' = 1000 e^{-0/1 t}$

$$\nabla^2 T + g(x,t) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T(x,0) = T_0 = 280 \ K$$

$$T(x,t)\Big|_{x=0} = T_1 = 300 \ K \quad ; \quad \left[K\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + hT(x,t)\right]_{x=L} = hT_\infty$$

ابتدا با تغییر متغیر $\theta = T - T_1$ شرط مرزی در $x=0$ را همگن می‌کنیم.

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + g(x,t) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \theta}{\partial t}$$

$$\theta(x,0) = T_0 - T_1 = \theta_0 = -20 \ K$$

$$\theta(x,t)\Big|_{x=0} = 0 \quad ; \quad \left[K\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} + h\theta(x,t)\right]_{x=L} = hT_\infty - hT_1$$

مسئله همگن متناظری که بایستی برای یافتن تابع گرین حل شود به صورت زیر است :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \psi}{\partial t} \qquad 0 < x < L \quad , \quad t > 0$$

$$\psi(0,t) = 0 \quad ; \quad \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} + H\psi\right]_{x=L} = 0$$

$$\psi(x,0) = \theta_0$$

$$\psi(x,t) = X(x)\,\Gamma(t)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \psi}{\partial t} \longrightarrow \frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{\alpha \Gamma}\frac{d\Gamma}{dt} = -\lambda^2$$

$$\frac{dT}{T} = -\alpha\lambda^2 dt$$

$$\ln T = -\alpha\lambda^2 t + C_1$$

$$T = C_1 e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\lambda^2$$

$$X_{(0)} = 0 \qquad ; \quad \frac{dX}{dx} + HX \Big|_{x=L} = 0$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} = -\lambda^2 X$$

$$\longrightarrow X = C_2 \sin\lambda x + C_3 \cos\lambda x$$

$$X_{(0)} = 0 \longrightarrow C_3 = 0$$

$$\frac{dX}{dx} + HX = C_2 \lambda \cos\lambda x + HC_2 \sin\lambda x = 0 \longrightarrow H\sin\lambda x = -\lambda\cos\lambda x$$

$$\xrightarrow{x=L} \tan\lambda L = -\frac{\lambda}{H}$$

$$\varphi(x,t) = X(x)\,T(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_1 e^{-\alpha\lambda_n^2 t} \times C_2 \sin\lambda_n x = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\alpha\lambda_n^2 t} \sin\lambda_n x$$

✓ برای ارزیابی سری تنها مقادیر مثبت λ_n را در نظر می‌گیریم و به چهار جمله اول بسنده خواهیم کرد.

تا اینجا از هر دو شرط مرزی استفاده کرده‌ایم و شکل تابع φ را بدست آورده‌ایم. حال با استفاده از شرط اولیه، مقادیر C_n را حساب خواهیم کرد:

$$\theta_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\lambda_n x$$

$$\int_{x=0}^{L} \theta_0 \sin\lambda_n x\, dx = \int_{x=0}^{L} C_n \sin^2\lambda_n x\, dx$$

$$C_n = \frac{\int_{x=0}^{L} \theta_0 \sin\lambda_n x\, dx}{\int_{x=0}^{L} \sin^2\lambda_n dx} = \frac{\int_{x=0}^{L} \theta_0 \sin\lambda_n x\, dx}{\int_{x=0}^{L} \left(\frac{1-\cos 2\lambda_n x}{2}\right) dx} = \frac{\int_{x=0}^{L} \theta_0 \sin\lambda_n x\, dx}{\frac{1}{2}L - \frac{1}{4\lambda_n}\sin 2\lambda_n L}$$

اما با توجه به اینکه $\tan\lambda_n L = -\frac{\lambda_n}{H}$، می‌توان نوشت:

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \longrightarrow \sin 2\lambda_n L = \frac{2\tan\lambda_n L}{1+\tan^2\lambda_n L} = \frac{\frac{-2\lambda_n}{H}}{1+\frac{\lambda_n^2}{H^2}} = \frac{-2\lambda_n H}{\lambda_n^2 + H^2}$$

$$\longrightarrow \quad C_n = \frac{\int_{x=0}^{L} \theta_0 \sin\lambda_n x \, dx}{\frac{L}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{H}{\lambda_n^2 + H^2}} = \frac{2(\lambda_n^2 + H^2)}{L(\lambda_n^2 + H^2) + H} \int_{x=0}^{L} \theta_0 \sin\lambda_n \, dx$$

نهایتاً تابع ψ به فرم زیر خواهد بود :

$$\psi(x,t) = \int_{x'=0}^{L} \left[2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\lambda_n^2 t} \, \frac{\lambda_n^2 + H^2}{L(\lambda_n^2 + H^2) + H} \sin\lambda_n x \, \sin\lambda_n x' \right] \theta_0 \, dx'$$

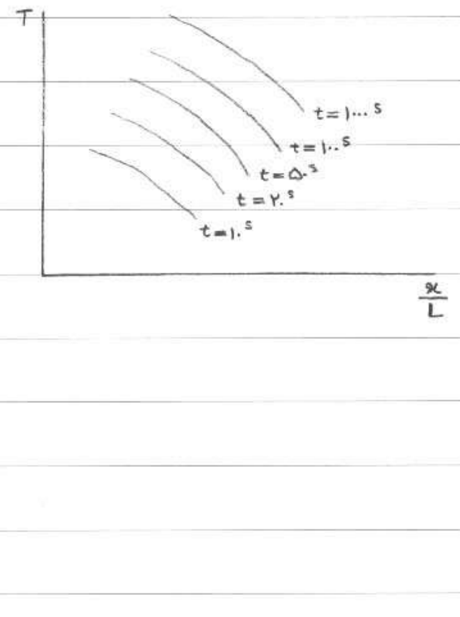
با برابر قرار دادن kernel یعنی عبارت داخل کروشه با تابع گرین در $\tau = 0$:

$$G(x,t \,|\, x',\tau)\Big|_{\tau=0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\lambda_n^2 t} \, \frac{\lambda_n^2 + H^2}{L(\lambda_n^2 + H^2) + H} \sin\lambda_n x \, \sin\lambda_n x'$$

پس تابع گرین برای این مسئله به صورت زیر است :

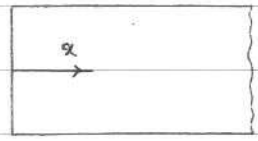
$$G(x,t \,|\, x',\tau) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\lambda_n^2 (t-\tau)} \, \frac{\lambda_n^2 + H^2}{L(\lambda_n^2 + H^2) + H} \sin\lambda_n x \, \sin\lambda_n x'$$

تکلیف شماره ۶ : مثال بالا را یکبار دیگر از ابتدا حل کنید و توزیع دما را در زمان‌های مختلف به صورت نمودار زیر رسم کنید.



جلسه یازدهم : «یک شنبه ۱۷ آبان ۱۳۸۸»

جسم نیمه متناهی



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{k} g(x,t) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad 0 < x < \infty \quad , \quad t > 0$$

$$T(0,t) = 0$$

$$T(x,0) = F(x)$$

مسئله همگن متناظری که برای یافتن تابع گرین بایستی حل شود به صورت زیر است :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \psi}{\partial t} \qquad 0 < x < \infty \quad , \quad t > 0$$

$$\psi(0,t) = 0$$

$$\psi(x,0) = F(x)$$

$$\psi(x,t) = X(x)\,\Gamma(t)$$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{\alpha \Gamma}\frac{d\Gamma}{dt} = -\lambda^2$$

$$\frac{d\Gamma}{\Gamma} = -\alpha\lambda^2 dt$$

$$\ln\Gamma = -\alpha\lambda^2 t + c_1$$

$$\Gamma = C_1 e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = -\lambda^2 X$$

$$X = C_2 \sin\lambda x + C_3 \cos\lambda x$$

$$X(0) = 0 \longrightarrow C_3 = 0$$

$$\psi(x,t)=\int_{\lambda=0}^{\infty} C\, e^{-\alpha\lambda^2 t}\sin\lambda x\, d\lambda$$

$$F(x)=\int_{\lambda=0}^{\infty} C\sin\lambda x\, d\lambda$$

یادآوری از ریاضیات مهندسی

$f(x)$ بر $\mathbb{R}$ در شرایط دیریکله صدق کند.
$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx$ موجود باشد.

$$\rightarrow\quad f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right]d\omega$$

$$A(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\, dt$$

$$B(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t\, dt$$

انتگرال فوریه سینوسی : $f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} B(\omega)\sin\omega x\, d\omega \quad , B(\omega)=2\int_0^{\infty} f(t)\sin\omega t\, dt$

$$\rightarrow\quad C=\frac{2}{\pi}\int_{x'=0}^{\infty} F(x')\sin\lambda x'\, dx'$$

$$\psi(x,t)=\int_{\lambda=0}^{\infty}\frac{2}{\pi}e^{-\alpha\lambda^2 t}\int_{x'=0}^{\infty} F(x')\underbrace{\sin\lambda x'\sin\lambda x}_{\frac{1}{2}\left[\cos\lambda(x-x')-\cos\lambda(x+x')\right]}\, dx'\, d\lambda$$

یادآوری : $\int_{\lambda=0}^{\infty} e^{-\alpha\lambda^2 t}\cos\lambda(x\pm x')\, d\lambda=\sqrt{\frac{\pi}{4\alpha t}}\; e^{\left[-\frac{(x\pm x')^2}{4\alpha t}\right]}$

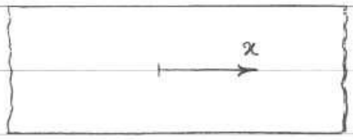
$$\psi(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{x'=0}^{\infty} F(x')\sqrt{\frac{\pi}{4\alpha t}}\left[e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha t}}-e^{-\frac{(x+x')^2}{4\alpha t}}\right]dx'$$

$$\psi(x,t)=\int_{x'=0}^{\infty} F(x')\, G(x,t\,|\,x',\tau=0)\, dx'$$

$$G(x,t\,|\,x',\tau)=\frac{e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+x')^2}{4\alpha(t-\tau)}}}{\sqrt{4\pi\alpha(t-\tau)}}$$

$$T(x,t)=\int_{x'=0}^{\infty} F(x')\, G(x,t\,|\,x',\tau=0)\, dx'+\frac{\alpha}{k}\int_{x'=0}^{\infty}\int_{\tau=0}^{t} g(x',\tau)\, G(x,t\,|\,x',\tau)\, dx'\, d\tau$$

جسم نامتناهی



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{1}{k}g(x,t)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad -\infty < x < +\infty \quad , t>0$$

$$T(x,0)=F(x)$$

مسئله همگن متناظری که برای یافتن تابع گرین بایستی حل شود به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$$\psi(x,t)=X(x)\,\Gamma(t)$$

$$\frac{\Gamma'}{\alpha\Gamma}=\frac{X''}{X}=-\lambda^2$$

$$\Gamma=C_0 e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

$$X(x)=C_1\sin\lambda x+C_2\cos\lambda x$$

$$\psi(x,t)=\int_{\lambda=0}^{\infty}e^{-\alpha\lambda^2 t}\left[C_3\sin\lambda x+C_4\cos\lambda x\right]d\lambda$$

$$C_3=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(x')\sin\lambda x'\,dx' \quad , \quad C_4=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(x')\cos\lambda x'\,dx'$$

$$\psi(x,t)=\int_{\lambda=0}^{\infty}\frac{1}{\pi}e^{-\alpha\lambda^2 t}\int_{-\infty}^{+\infty}F(x')\underbrace{\left(\cos\lambda x'\cos\lambda x+\sin\lambda x'\sin\lambda x\right)}_{\cos\lambda(x-x')}dx'\,d\lambda$$

$$\psi(x,t)=\int_{\lambda=0}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{x'=-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha\lambda^2 t}F(x')\cos\lambda(x-x')\,dx'\,d\lambda$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{x'=-\infty}^{+\infty}\int_{\lambda=0}^{\infty}F(x')e^{-\alpha\lambda^2 t}\cos\lambda(x-x')\,d\lambda\,dx'$$

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{x'=-\infty}^{+\infty} F(x')\sqrt{\frac{\pi}{4\alpha t}}\; e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha t}}\, dx' = \int_{x'=-\infty}^{+\infty} F(x')\, G(x,t\,|\,x',\tau=0)\, dx'$$

$$G(x,t\,|\,x',\tau) = \frac{e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha(t-\tau)}}}{\sqrt{4\alpha\pi(t-\tau)}}$$

$$T(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x')\, G(x,t\,|\,x',\tau=0)\, dx' + \frac{\alpha}{K}\int_{\tau=0}^{t}\int_{x'=-\infty}^{+\infty} g(x',\tau)\, G(x,t\,|\,x',\tau)\, dx'\, d\tau$$

حالت خاص:

$$F(x') = \begin{cases} T_0 & -L < x < L \\ 0 & x < -L\,,\ x > L \end{cases}$$

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\alpha\pi t}}\int_{-L}^{L} T_0\, e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha t}}\, dx'$$

$$\eta = \frac{x-x'}{\sqrt{4\alpha t}} \qquad , \qquad d\eta = -\frac{1}{\sqrt{4\alpha t}}\, dx'$$

$$\psi(x,t) = \frac{T_0}{\sqrt{4\alpha\pi t}}\int_{\frac{x+L}{\sqrt{4\alpha t}}}^{\frac{x-L}{\sqrt{4\alpha t}}} e^{-\eta^2}\left(-\sqrt{4\alpha t}\right) d\eta$$

$$= -T_0\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{\frac{x+L}{\sqrt{4\alpha t}}}^{0} e^{-\eta^2}\, d\eta + \int_{0}^{\frac{x-L}{\sqrt{4\alpha t}}} e^{-\eta^2}\, d\eta\right]$$

$$= T_0\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{0}^{\frac{x+L}{\sqrt{4\alpha t}}} e^{-\eta^2}\, d\eta + \int_{0}^{\frac{L-x}{\sqrt{4\alpha t}}} e^{-\eta^2}\, d\eta\right]$$

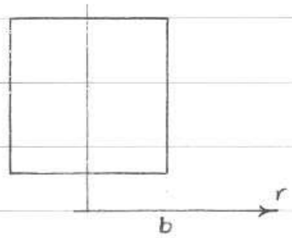
$$\Rightarrow \frac{\psi(x,t)}{T_0} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{L+x}{\sqrt{4\alpha t}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{L-x}{\sqrt{4\alpha t}}\right)\right]$$

در حالتی که $L=0$ باشد، یعنی یک نقطه در جسم نامتناهی دارای دمای T_0 و بقیه جسم در دمای ۰ باشد، می‌توان نوشت:

$$\frac{\psi(x,t)}{T_0} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}\right)$$

جلسه دوازدهم «سه‌شنبه ۱۹ آبان ۱۳۸۸»

مختصات استوانه‌ای



$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{k}g(r,t)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T(r,t)\big|_{t=0}=F(r)$$

$$T(r,t)\big|_{r=b}=f(t)$$

مسئله متناظر همگنی که بایستی حل شود، عبارت است از :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$$\psi(r,t)\big|_{t=0}=F(r)$$

$$\psi(r,t)\big|_{r=b}=0$$

$$\psi(r,t)=R(r)\Gamma(t)$$

$$\frac{1}{rR}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right)=\frac{1}{\alpha\Gamma}\frac{\partial \Gamma}{\partial t}=-\lambda^2$$

$$\Gamma(t)=C_0e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

$$\frac{1}{rR}\left(\frac{\partial R}{\partial r}+r\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}\right)=-\lambda^2$$

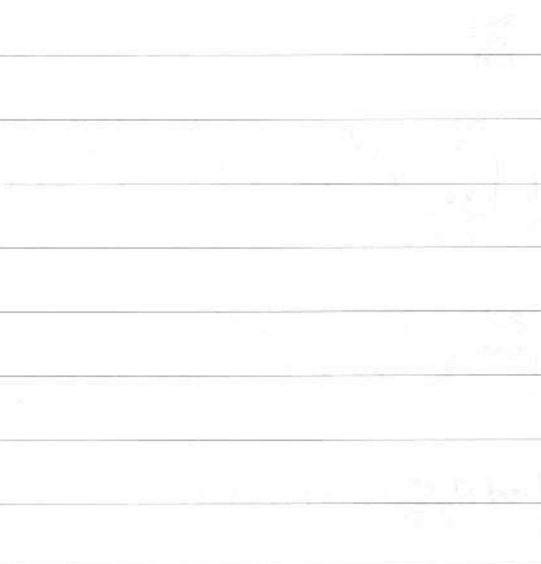
$$R'+rR''=-\lambda^2 rR$$

$$r^2R''+rR'+(\lambda^2r^2-0^2)R=0$$

یادآوری از معادلات

معادله بسل : $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$

جواب کلی : $y=AJ_\nu(x)+BY_\nu(x)$

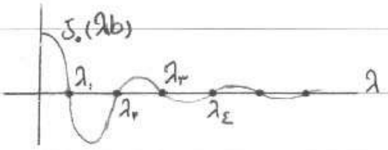


$$x^2y'' + xy' + (\lambda^2x^2 - \nu^2)y = 0 \xrightarrow{\lambda x = z} z^2\frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz} + (z^2-\nu^2)y = 0$$

$$R(r) = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 Y_0(\lambda r)$$

$$R(0) = \text{finite} \longrightarrow C_2 = 0$$

$$R(\lambda b) = 0 \longrightarrow J_0(\lambda b) = 0 \longrightarrow \lambda_n \text{ تعیین می‌شود}$$



$$\psi(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\alpha\lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r)$$

$$F(r) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(\lambda_n r)$$

$$\int_{r'=0}^{b} r' F(r') J_0(\lambda_n r')\, dr' = \int_{r'=0}^{b} C_n r' J_0^2(\lambda_n r')\, dr'$$

$$C_n = \frac{\int_{r'=0}^{b} r' F(r') J_0(\lambda_n r')\, dr'}{\int_{r'=0}^{b} r' J_0^2(\lambda_n r')\, dr'}$$

یادآوری : خاصیت تعامد توابع بسل

$$J_\nu(a) = 0 \quad , \quad J_\nu(b) = 0$$

در موارد پیچیده‌تر بایستی از جداول ۱-۳، ۲-۳ و ۳-۳ (صفحه ۱۱۲-۱۰۸) "Heat Conduction, Özişik" استفاده کرد.

$$\Rightarrow \int_0^1 x J_\nu(ax) J_\nu(bx)\, dx = \begin{cases} 0 & a \neq b \\ \frac{1}{2} J_{\nu+1}^2(a) & a = b \end{cases}$$

$$x = \frac{r'}{b} \longrightarrow dx = \frac{1}{b}\, dr'$$

$$\int_{r'=0}^{b} r' J_0^2(\lambda_n r')\, dr' = \int_{x=0}^{1} bx\, J_0^2(\lambda_n b x)\, b\, dx = b^2 \int_{x=0}^{1} x J_0^2(\lambda_n b x)\, dx = \frac{b^2}{2} J_1^2(\lambda_n b)$$

$$C_n = \frac{\int_{r'=0}^{b} r' F(r') J_0(\lambda_n r')\, dr'}{\frac{b^2}{2} J_1^2(\lambda_n b)}$$

$$\psi(r,t) = \int_{r'=0}^{b} r' \left[\frac{2}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\lambda_n^2 t} \frac{1}{J_1^2(\lambda_n b)} J_0(\lambda_n r') J_0(\lambda_n r) \right] F(r')\, dr$$

$$\psi(r,t) = \int_{r'=0}^{b} r' G(r,t|r',\tau=0)\, F(r')\, dr'$$

$$G(r,t|r',\tau)=\frac{2}{b^2}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\alpha\lambda_n^2(t-\tau)}\frac{1}{J_1^2(\lambda_n b)}J_0(\lambda_n r')J_0(\lambda_n r)$$

$$T(r,t)=\int_{r'=0}^{b}r'G(r,t|r',\tau=0)F(r')dr'+\frac{\alpha}{K}\int_{\tau=0}^{t}\int_{r'=0}^{b}r'G(r,t|r',\tau)g(r',\tau)dr'$$

$$-\alpha\int_{\tau=0}^{t}\left[r'\frac{\partial G}{\partial r'}\right]_{r'=b}f(\tau)d\tau$$

تابع گرین برای مسائل سه بعدی

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T(x,y,z,0)=F(x,y,z)$$

$$T(0,y,z,t)=T(a,y,z,t)=0$$

$$T(x,0,z,t)=T(x,b,z,t)=0$$

$$T(x,y,0,t)=T(x,y,c,t)=0$$

$$T(x,y,z,t)=X(x)\,Y(y)\,Z(z)\,\Gamma(t)$$

$$\underbrace{\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}}_{-\lambda^2}+\underbrace{\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}}_{-\beta^2}+\underbrace{\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}}_{-\delta^2}=\underbrace{\frac{1}{\alpha\Gamma}\frac{d\Gamma}{dt}}_{-\gamma^2}$$

$$\Gamma(t)=C_0e^{-\alpha\gamma^2t}$$

$$X(x)=C_1\sin\lambda_n x \qquad \lambda_n a=n\pi$$

$$Y(y)=C_2\sin\beta_n y \qquad \beta_n b=n\pi$$

$$Z(z)=C_3\sin\delta_n z \qquad \delta_n c=n\pi$$

$$\gamma_{nmp}^2=\lambda_n^2+\beta_m^2+\delta_p^2$$

$$\psi(x,y,z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}C_{nmp}e^{-\alpha\gamma_{nmp}^2t}\sin\lambda_n x\sin\beta_m y\sin\delta_p z$$

$$F(x,y,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}C_{nmp}\sin\lambda_n x\sin\beta_m y\sin\delta_p z$$

$$C_{nmp} = \frac{\int_{z'=0}^{c}\int_{y'=0}^{b}\int_{x'=0}^{a} F \sin\lambda_n x' \sin\beta_m y' \sin\delta_p z' \, dx' dy' dz'}{\int_{z'=0}^{c}\int_{y'=0}^{b}\int_{x'=0}^{a} \sin^2\lambda_n x' \sin^2\beta_m y' \sin^2\delta_p z' \, dx' dy' dz'}$$

$$C_{nmp} = \frac{\iiint \cdots \, dx' dy' dz'}{\frac{abc}{8}}$$

$$\psi(x,y,z,t) = \frac{8}{abc} \iiint \sum\sum\sum e^{-\alpha\gamma_{nmp}^2 t} (\sin\lambda_n x \sin\lambda_n x')(\sin\beta_m y \sin\beta_m y')(\sin\delta_p z \sin\delta_p z') F \, dx' dy' dz'$$

$$G(x,y,z,t|x',y',z',\tau) = \frac{8}{abc} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} e^{-\alpha\gamma_{nmp}^2(t-\tau)} (\sin\lambda_n x \sin\lambda_n x')(\sin\beta_m y \sin\beta_m y')(\sin\delta_p z \sin\delta_p z')$$

$$T(x,y,z,t) = \int_{V} G(x,y,z,t|x',y',z',\tau=0)\, F(x',y',z')\, dx' dy' dz'$$

$$+ \frac{\alpha}{K}\int_{\tau=0}^{t}\int_{V} G(x,y,z,t|x',y',z',\tau)\, g(x',y',z',\tau)\, dx' dy' dz' d\tau$$

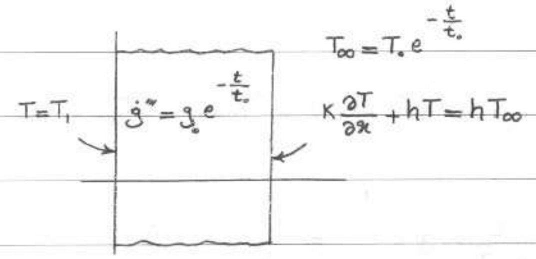
بی‌بعدسازی معادلات

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{K} g(x,t) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T(x,0) = T_0$$

$$T(x,t)\big|_{x=0} = T_1$$

$$\left[K\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + hT(x,t)\right]_{x=L} = hT_\infty$$



بایستی T ، x و t را بی‌بعد کنیم، پس :

$$\theta = \frac{T - T_{ref}}{\Delta T_{ref}} \longrightarrow T = T_{ref} + \Delta T_{ref}\,\theta$$

$$x^* = \frac{x}{x_{ref}} \longrightarrow x = x_{ref}\, x^*$$

$$t^* = \frac{t}{t_{ref}} \longrightarrow t = t_{ref}\, t^*$$

با جایگزاری در معادله خواهیم داشت :

$$\Delta T_{ref}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{1}{K} g(x,t) = \frac{1}{\alpha}\Delta T_{ref}\frac{\partial\theta}{\partial t}$$

$$\frac{\Delta T_{ref}}{x_{ref}^{2}}\frac{\partial^{2}\theta}{\partial x^{*2}} + \frac{1}{K}\, g_{r}(x^*,t^*) = \frac{1}{\alpha}\frac{\Delta T_{ref}}{t_{ref}}\frac{\partial\theta}{\partial t^*}$$

$$\frac{\partial^{2}\theta}{\partial x^{*2}} + \frac{x_{ref}^{2}}{K\Delta T_{ref}}\, g(x,t) = \frac{x_{ref}^{2}}{\alpha t_{ref}}\frac{\partial\theta}{\partial t^*}$$

همچنین برای شرایط مرزی می‌توان نوشت:

$$T(x,0) = T_0 \longrightarrow \theta(x^*,0) = \frac{T_0 - T_{ref}}{\Delta T_{ref}}$$

$$T(x,t)\Big|_{x=0} = T_1 \longrightarrow \theta(x^*,t^*)\Big|_{x^*=0} = \frac{T_1 - T_{ref}}{\Delta T_{ref}}$$

$$\left[K\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + hT(x,t)\right]_{x=L} = hT_\infty \longrightarrow \left[\frac{K\Delta T_{ref}}{x_{ref}}\frac{\partial\theta(x^*,t^*)}{\partial x^*} + h\Delta T_{ref}\,\theta(x^*,t^*)\right]_{x^*=1} = hT_\infty - hT_{ref}$$

به نظر می‌رسد انتخاب $T_{ref}=T_1$ مناسب‌ترین انتخاب باشد، زیرا به این ترتیب شرط مرزی مکانی در $x^*=0$ همگن می‌شود.
همچنین با توجه به اینکه تنها مشخصه طول در مسئله L است، منطقی به نظر می‌رسد که $x_{ref}=L$ انتخاب شود.

$T_{ref} = T_1$

$x_{ref} = L$

حال اگر به معادله رجوع کنیم در آن دو ضریب وجود دارد که با انتخاب مناسب t_{ref} و ΔT_{ref} می‌توان آنها را برابر یک کرد.

$$\frac{\partial^{2}\theta}{\partial x^{*2}} + \frac{L^{2}}{K\Delta T_{ref}}\, g_0 e^{-\frac{t}{t_0}} = \frac{L^{2}}{\alpha t_{ref}}\frac{\partial\theta}{\partial t^*}$$

$$\frac{L^{2} g_0}{K\Delta T_{ref}} = 1 \longrightarrow \Delta T_{ref} = \frac{L^{2} g_0}{K}$$

$$\frac{L^{2}}{\alpha t_{ref}} = 1 \longrightarrow t_{ref} = \frac{L^{2}}{\alpha}$$

پس مسئله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{\partial^{2}\theta}{\partial x^{*2}} + e^{-\frac{L^{2}}{\alpha t_0}t^*} = \frac{\partial\theta}{\partial t^*}$$

$$\theta(x^*,0) = \frac{K}{L^{2} g_0}(T_0 - T_1)$$

$$\theta(x^*,t^*)\Big|_{x^*=0} = 0$$

$$\left[\frac{\partial\theta(x^*,t^*)}{\partial x^*}+\frac{hL}{K}\theta(x^*,t^*)\right]_{x^*=1}=\frac{hL}{K}\left(\frac{T_\infty-T_1}{\Delta T_{ref}}\right)=\frac{hL}{K}\left[\frac{T_0e^{-\frac{L^2}{\alpha t_0}t^*}-T_1}{\frac{L^2g_0}{K}}\right]$$

در نهایت با معرفی اعداد بی بعد، شکل نهایی و بی بعد مسئله به دست خواهد آمد:

$$Fo=\frac{L^2}{\alpha t_0}$$

$$\theta_0=\frac{K}{L^2g_0}(T_0-T_1)$$

$$Bi=\frac{hL}{K}$$

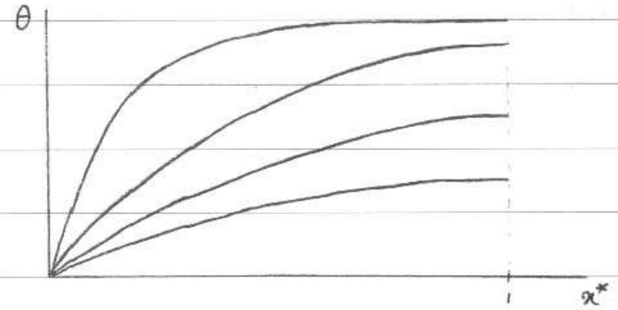
$$f_2(t^*)=Bi\,\theta_0\left[\frac{T_0e^{-Fo\,t^*}-T_1}{T_0-T_1}\right]$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^{*2}}+e^{-Fo\,t^*}=\frac{\partial\theta}{\partial t^*}$$

$$\theta(x^*,0)=\theta_0$$

$$\theta(x^*,t^*)\Big|_{x^*=0}=0\quad;\quad\left[\frac{\partial\theta(x^*,t^*)}{\partial x^*}+Bi\,\theta(x^*,t^*)\right]_{x^*=1}=f_2(t^*)$$

تکلیف شماره ۷: این مسئله را با استفاده از روش گرین حل کرده و نمودار زیر را رسم کنید.



$$t^*=\frac{nt_0}{t_{ref}}\qquad(n=0,1,2,5,10,100)$$

جلسه سیزدهم «یک شنبه ۲۴ آبان ۱۳۸۸»

بررسی حالت‌های خاص در مختصات استوانه‌ای

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{K}g(r,t)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$T(r,0)=F(r)$

$T(b,t)=f(t)$

$$G(r,t|r',\tau)=\frac{2}{b^2}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\alpha\lambda_n^2(t-\tau)}\frac{J_0(\lambda_n r')}{J_1^2(\lambda_n b)}J_0(\lambda_n r)$$

حالت اول:

$F(r)=0 \qquad , f(t)=0 \qquad , g(r,t)=g_0$

$$T(r,t)=\frac{\alpha}{K}\int_{\tau=0}^{t}\int_{r'=0}^{b}r'\frac{2}{b^2}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\alpha\lambda_n^2(t-\tau)}\frac{J_0(\lambda_n r')}{J_1^2(\lambda_n b)}J_0(\lambda_n r)\,g_0\,dr'd\tau$$

یادآوری از معادلات

$$\int x^{\nu}J_{\nu-1}(x)\,dx=x^{\nu}J_{\nu}(x) \qquad ; \qquad \int x^{\nu}Y_{\nu-1}(x)\,dx=x^{\nu}Y_{\nu}(x)$$

$$\int x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)\,dx=-x^{-\nu}J_{\nu}(x) \qquad ; \qquad \int x^{-\nu}Y_{\nu+1}(x)\,dx=-x^{-\nu}Y_{\nu}(x)$$

$$\int_{r'=0}^{b}r'J_0(\lambda_n r')\,dr'$$

$x=\lambda_n r' \longrightarrow dx=\lambda_n dr'$

$$\int_{r'=0}^{b}r'J_0(\lambda_n r')\,dr'=\int_{x=0}^{\lambda_n b}\frac{x}{\lambda_n}J_0(x)\frac{dx}{\lambda_n}=\frac{1}{\lambda_n^2}\int_{x=0}^{\lambda_n b}xJ_0(x)\,dx=\frac{1}{\lambda_n^2}\left[xJ_1(x)\right]_0^{\lambda_n b}=\frac{b}{\lambda_n}J_1(\lambda_n b)$$

$$T(r,t)=\frac{2\alpha g_0}{Kb}\int_{\tau=0}^{t}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\alpha\lambda_n^2(t-\tau)}\frac{J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n J_1(\lambda_n b)}\,d\tau$$

$$\int_{\tau=0}^{t} e^{-\alpha\lambda_n^2(t-\tau)}\, d\tau$$

$$x = t - \tau \longrightarrow dx = -d\tau$$

$$\int_{\tau=0}^{t} e^{-\alpha\lambda_n^2(t-\tau)}\, d\tau = \int_{x=t}^{0} e^{-\alpha\lambda_n^2 x}(-dx) = \int_{x=0}^{t} e^{-\alpha\lambda_n^2 x}\, dx = \frac{-1}{\alpha\lambda_n^2} e^{-\alpha\lambda_n^2 x}\Big]_{x=0}^{t} = \frac{1}{\alpha\lambda_n^2}\left(1 - e^{-\alpha\lambda_n^2 t}\right)$$

$$\Rightarrow T(r,t) = \frac{2g_0}{Kb}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n b)}\left(1 - e^{-\alpha\lambda_n^2 t}\right)$$

$t \to \infty \Rightarrow$ Steady State temperature

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{g_0}{K} = 0$$

$$r\frac{dT}{dr} + \frac{g_0}{K}\frac{r^2}{2} = C_1 \xrightarrow{r=0} C_1 = 0$$

$$\frac{dT}{dr} + \frac{g_0}{2K} r = 0$$

$$T = -\frac{g_0}{2K}\frac{r^2}{2} + C_2 \xrightarrow{r=b} C_2 = \frac{g_0 b^2}{4K}$$

$$T = \frac{g_0}{4K}(b^2 - r^2)$$

$$\underset{t\to\infty}{T(r,t)} = \frac{2g_0}{Kb}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n b)} = \frac{g_0}{4K}(b^2 - r^2)$$

حالت دوم :

$F(r) = 0$, $f(t) = 0$, line heat Source of strength $g_L^c(t)$ $\left(\frac{W}{m}\right)$

$$g(r',\tau) = g_L^c(\tau)\frac{1}{2\pi r'}\delta(r'-0)$$

$$G(r,t|r',\tau) = \frac{2}{b^2}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\lambda_n(t-\tau)}\frac{J_0(\lambda_n r')}{J_1^2(\lambda_n b)}J_0(\lambda_n r)$$

$$T(r,t)=\frac{\alpha}{K}\int_{\tau=0}^{t}\int_{r'=0}^{b} r'\,\frac{2}{b^2}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\lambda_n^2(t-\tau)}\,\frac{J_0(\lambda_n r')}{J_1^2(\lambda_n b)}\,J_0(\lambda_n r)\,g(r',\tau)\,dr'\,d\tau$$

$$=\frac{2\alpha}{Kb^2}\times\frac{1}{2\pi}\int_{\tau=0}^{t}\int_{r'=0}^{b}\sum_{n=1}^{\infty} g_L^c(\tau)\,e^{-\alpha\lambda_n^2(t-\tau)}\,\frac{J_0(\lambda_n r')}{J_1^2(\lambda_n b)}\,J_0(\lambda_n r)\,\delta(r')\,dr'\,d\tau$$

$$=\frac{\alpha}{K\pi b^2}\int_{\tau=0}^{t}\sum_{n=1}^{\infty} g_L^c(\tau)\,e^{-\alpha\lambda_n^2(t-\tau)}\,\frac{J_0(\lambda_n r)}{J_1^2(\lambda_n b)}\,d\tau$$

$$=\frac{\alpha}{K\pi b^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{J_0(\lambda_n r)}{J_1^2(\lambda_n b)}\int_{\tau=0}^{t} g_L^c(\tau)\,e^{-\alpha\lambda_n^2(t-\tau)}\,d\tau\right]$$

حالت سوم:

$F(r)=0$, $f(t)=0$, instantaneous volume heat source $g^i(r)$ $\frac{W.S}{m^3}$

$$g(r',\tau)=g^i(r')\,\delta(\tau-0)$$

$$T(r,t)=\frac{\alpha}{K}\int_{\tau=0}^{t}\int_{r'=0}^{b} r'\,\frac{2}{b^2}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\lambda_n^2(t-\tau)}\,\frac{J_0(\lambda_n r')}{J_1^2(\lambda_n b)}\,J_0(\lambda_n r)\,g(r',\tau)\,dr'\,d\tau$$

$$=\frac{2\alpha}{b^2K}\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-\alpha\lambda_n^2 t}\,\frac{J_0(\lambda_n r)}{J_1^2(\lambda_n b)}\int_{r'=0}^{b} r'\,J_0(\lambda_n r')\,g^i(r')\,dr'\right]$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{K}g(r,t)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}\qquad a<r<b\qquad t>0$$

$T(a,t)=0$

$T(b,t)=0$

$T(r,0)=F(r)$

مسئله همگن متناظر برای یافتن تابع گرین به صورت زیر است:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$$\varphi = R(r)\,T(t)$$

$$\frac{1}{rR}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) = \frac{1}{\alpha T}\frac{dT}{dt} = -\lambda^{2}$$

$$T = C_0\, e^{-\alpha\lambda^{2} t}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \lambda^{2} r R = 0$$

$$r\frac{d^{2}R}{dr^{2}} + \frac{dR}{dr} + \lambda^{2} r R = 0$$

$$r^{2}\frac{d^{2}R}{dr^{2}} + r\frac{dR}{dr} + (\lambda^{2} r^{2} - 0)R = 0$$

$$R(r) = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 Y_0(\lambda r)$$

$$r=a \longrightarrow R(a)=0 \quad \Rightarrow \quad C_1 J_0(\lambda a) + C_2 Y_0(\lambda a) = 0$$

$$r=b \longrightarrow R(b)=0 \quad \Rightarrow \quad C_1 J_0(\lambda b) + C_2 Y_0(\lambda b) = 0$$

شرط وجود جواب : $\begin{vmatrix} J_0(\lambda a) & Y_0(\lambda a) \\ J_0(\lambda b) & Y_0(\lambda b) \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow J_0(\lambda a)Y_0(\lambda b) - J_0(\lambda b)Y_0(\lambda a) = 0 \longrightarrow$ λ_n تعیین می‌شود

$$C_1 = -\frac{Y_0(\lambda_n a)}{J_0(\lambda_n a)}\, C_2$$

$$R(r) = C_2\left[-\frac{Y_0(\lambda_n a)}{J_0(\lambda_n a)} J_0(\lambda_n r) + Y_0(\lambda_n r)\right]$$

$$\varphi(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\alpha\lambda_n^{2} t}\left[-\frac{Y_0(\lambda_n a)}{J_0(\lambda_n a)} J_0(\lambda_n r) + Y_0(\lambda_n r)\right]$$

$$F(r) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{1}{J_0(\lambda_n a)}\left[J_0(\lambda_n a)Y_0(\lambda_n r) - Y_0(\lambda_n a)J_0(\lambda_n r)\right]$$

$$C_n = \frac{\int_{r'=a}^{b} r' F(r')\left[J_0(\lambda_n a)Y_0(\lambda_n r) - Y_0(\lambda_n a)J_0(\lambda_n r)\right] dr'}{\frac{1}{J_0(\lambda_n a)}\int_{r'=a}^{b} r'\left[J_0(\lambda_n a)Y_0(\lambda_n r) - Y_0(\lambda_n a)J_0(\lambda_n r)\right]^{2} dr'}$$

برای ارزیابی مقدار مخرج کسر از جدول ۳-۳ در صفحه ۱۱۳ کتاب استفاده می‌کنیم.

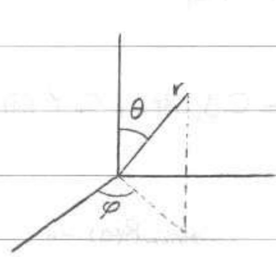
$$C_n = J_0(\lambda_n a) \times \overbrace{\left[\frac{\pi^2}{2} \frac{\lambda_n^2 J_0^2(\lambda_n a)}{J_0^2(\lambda_n a) - J_0^2(\lambda_n b)} \right]}^{\text{از جدول}} \int_{r'=a}^{b} r' F(r') \left[J_0(\lambda_n a) Y_0(\lambda_n r') - Y_0(\lambda_n a) J_0(\lambda_n r') \right] dr'$$

$$\psi(r,t) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} r' e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \frac{\lambda_n^2 J_0^2(\lambda_n a)}{J_0^2(\lambda_n a) - J_0^2(\lambda_n b)} \left[J_0(\lambda_n a) Y_0(\lambda_n r') - Y_0(\lambda_n a) J_0(\lambda_n r') \right] \left[J_0(\lambda_n a) Y_0(\lambda_n r) - Y_0(\lambda_n a) J_0(\lambda_n a) \right] F(r') dr'$$

$$G(r,t|r',\tau) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \frac{\lambda_n^2 J_0^2(\lambda_n a)}{J_0^2(\lambda_n a) - J_0^2(\lambda_n b)} \left[J_0(\lambda_n a) Y_0(\lambda_n r') - Y_0(\lambda_n a) J_0(\lambda_n r') \right] \left[J_0(\lambda_n a) Y_0(\lambda_n r) - Y_0(\lambda_n a) J_0(\lambda_n a) \right]$$

$$T(r,t) = \int_{r'=a}^{b} r' G(r,t|r',\tau=0) F(r') dr' + \frac{\alpha}{K} \int_{\tau=0}^{t} \int_{r'=a}^{b} r' G(r,t|r',\tau)\, g(r',\tau)\, dr' d\tau$$

مختصات کروی



$$\nabla^2 T + \frac{1}{k} g'''(r,t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{K} g'''(r,t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{k} g'''(r,t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$ حالت یک بعدی.

مسئله همگن متناظری که در این حالت بایستی حل شود عبارت است از:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$$\psi(r,t) = R(r)\Gamma(t)$$

$$\frac{1}{r^2 R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = \frac{1}{\alpha \Gamma} \frac{d\Gamma}{dt} = -\lambda^2$$

$$\frac{1}{r^2 R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = \frac{1}{r^2 R} \left[2r \frac{dR}{dr} + r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} \right] = \frac{2}{rR} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} = -\lambda^2$$

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + \lambda^2 r^2 R = 0$$

در مختصات کروی معمولاً می‌توانیم با یک تغییر متغیر مناسب مسئله را ساده‌تر کنیم.

$$u = rT$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial\left(\frac{u}{r}\right)}{\partial r} = \frac{r\frac{\partial u}{\partial r} - u}{r^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial u}{\partial r} - u\right] = \frac{\partial u}{\partial r} + r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{\partial u}{\partial r} = r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial\left(\frac{u}{r}\right)}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{K} g'''(r,t) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \quad \equiv \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{r}{K} g'''(r,t) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t}$$

«سه‌شنبه ۲۶ آبان ۱۳۸۸»   جلسه چهاردهم

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{K}\dot{g}'''=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rT)+\frac{1}{K}\dot{g}'''=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$T(0,t)=0$

$T(b,t)=0$

$T(r,0)=0 \xrightarrow{\text{به طور صوری}} T(r,0)=F(r)$

$u=rT$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{r}{K}\dot{g}'''=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2\psi_u}{\partial r^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\psi_u}{\partial t}$$

$\psi_u(0,t)=0$

$\psi_u(b,t)=0$

$\psi_u(r,0)=rF(r)$

$\psi_u(r,t)=R(r)\Gamma(t)$

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2}=\frac{1}{\alpha\Gamma}\frac{d\Gamma}{dt}=-\lambda^2$$

$$\Gamma=C_0 e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

$R=C_1\sin\lambda r+C_2\cos\lambda r$

$R(0)=0 \longrightarrow C_2=0$

$R(b)=0 \longrightarrow \sin\lambda b=0 \longrightarrow \lambda_n b=n\pi$

$$\psi_u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n\, e^{-\alpha\lambda_n^2 t}\,\sin\lambda_n r$$

$$rF(r)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\lambda_n r$$

$$C_n=\frac{\int_{r'=0}^{b} r'F(r')\sin\lambda_n r'\,dr'}{\int_{r'=0}^{b}\sin^2\lambda_n r'\,dr'}=\frac{\int_{r'=0}^{b} r'F(r')\sin\lambda_n r'\,dr'}{\int_{r'=0}^{b}\left(\frac{1-\cos 2\lambda_n r'}{2}\right)dr'}=\frac{\int_{r'=0}^{b} r'F(r')\sin\lambda_n r'\,dr'}{\left.\frac{b}{2}-\frac{1}{4\lambda_n}\sin 2\lambda_n r'\right]_0^b}=\frac{2}{b}\int_{r'=0}^{b} r'F(r')\sin\lambda_n r'\,dr'$$

$$\psi_u(r,t)=\frac{2}{b}\int_{r'=0}^{b} r'^2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\lambda_n^2 t}\,\frac{F(r')}{r'}\sin\lambda_n r'\sin\lambda_n r\,dr'$$

$$\psi_T(r,t)=\frac{2}{b}\int_{r'=0}^{b} r'^2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\lambda_n^2 t}\,\frac{F(r')}{rr'}\sin\lambda_n r'\sin\lambda_n r\,dr'$$

$$\psi_T(r,t)=\int_{r'=0}^{b} r'^2 F(r')\,G(r,t|r',\tau=0)\,dr'$$

$$G(r,t|r',\tau)=\frac{2}{brr'}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\lambda_n^2(t-\tau)}\sin\lambda_n r'\sin\lambda_n r$$

$$T(r,t)=\frac{\alpha}{k}\int_{\tau=0}^{t}\int_{r'=0}^{b} r'^2\,G(r,t|r',\tau)\,g'''(r',\tau)\,dr'\,d\tau$$

حالت خاص اول

instantaneous volume heat source $g^i(r)$ $\left(\frac{W.s}{m^3}\right)$

$g'''=g^i(r')\,\delta(\tau-0)$

$$T(r,t)=\frac{\alpha}{k}\,\frac{2}{br}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\lambda_n^2 t}\sin\lambda_n r\int_{r'=0}^{b} r' g^i(r')\sin\lambda_n r'\,dr'$$

حالت خاص دوم:

instantaneous point heat source g_p^i $(W.s)$

$$g'''=\frac{1}{4\pi r'^2}\,g_p^i\,\delta(r'-0)\,\delta(\tau-0)$$

$$T(r,t)=\frac{\alpha}{k}\,\frac{2}{br}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\lambda_n^2 t}\sin\lambda_n r\cdot\frac{1}{4\pi}\,g_p^i\left(\frac{\sin\lambda_n r'}{r'}\right)_{r'\to 0}\qquad ,\ \lambda_n=\frac{n\pi}{b}\ ,$$

$$=\frac{\alpha}{k}\,\frac{1}{2b^2 r}\sum_{n=1}^{\infty} n\,e^{-\alpha\lambda_n^2 t}\sin\lambda_n r\,g_p^i$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{k}\dot{g}'''=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

تغییر متغیر : $\mu=\cos\theta$

$$\frac{\partial T}{\partial\theta}=\frac{\partial T}{\partial\mu}\frac{\partial\mu}{\partial\theta}=-\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\mu}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)=\frac{\partial}{\partial\mu}\left(-\sin^2\theta\frac{\partial T}{\partial\mu}\right)\frac{\partial\mu}{\partial\theta}=+\sin\theta\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial T}{\partial\mu}\right]$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial T}{\partial\mu}\right]+\frac{1}{r^2(1-\mu^2)}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{K}\dot{g}'''=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

تغییر متغیر : $v=r^{\frac{1}{2}}\,T=\sqrt{r}\,T$

$$\frac{\partial T}{\partial r}=\frac{\partial\left(\frac{v}{\sqrt{r}}\right)}{\partial r}=\frac{\sqrt{r}\,\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{1}{2\sqrt{r}}v}{r}=\frac{2r\frac{\partial v}{\partial r}-v}{2r\sqrt{r}}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left[r\sqrt{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{\sqrt{r}}{2}v\right]=\frac{3}{2}\sqrt{r}\frac{\partial v}{\partial r}+r\sqrt{r}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}-\frac{1}{4\sqrt{r}}v-\frac{\sqrt{r}}{2}\frac{\partial v}{\partial r}=r\sqrt{r}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\sqrt{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{1}{4\sqrt{r}}v$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r\sqrt{r}}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{1}{4r^2\sqrt{r}}v$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial T}{\partial\mu}\right]=\frac{1}{r^2\sqrt{r}}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial v}{\partial\mu}\right]$$

$$\frac{1}{r^2(1-\mu^2)}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}=\frac{1}{r^2(1-\mu^2)}\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}$$

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{1}{4}\frac{v}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial v}{\partial\mu}\right]+\frac{1}{r^2(1-\mu^2)}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}+\frac{\sqrt{r}}{K}\dot{g}'''=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial v}{\partial t}$$

$v=R(r)\,M(\mu)\,\Phi(\varphi)\,\Gamma(t)$

$$\frac{1}{R}\left[\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}-\frac{1}{4}\frac{R}{r^2}\right]+\frac{1}{r^2M}\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dM}{d\mu}\right]+\frac{1}{r^2(1-\mu^2)\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=\underbrace{\frac{1}{\alpha\Gamma}\frac{d\Gamma}{dt}}_{-\lambda^2}$$ معادله همگن .

$$\frac{d\Gamma}{dt}+\alpha\lambda^{2}\Gamma=0 \qquad \text{(۱)}$$

$$\underbrace{\frac{r^{2}}{R}\left[\frac{d^{2}R}{dr^{2}}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}-\frac{1}{4}\frac{R}{r^{2}}\right]+\lambda^{2}r^{2}}_{+n(n+1)}+\frac{1}{M}\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^{2})\frac{dM}{d\mu}\right]+\frac{1}{(1-\mu^{2})\Phi}\frac{d^{2}\Phi}{d\varphi^{2}}=0$$

$$\frac{d^{2}R}{dr^{2}}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\left[\lambda^{2}-\left(n+\frac{1}{2}\right)^{2}\frac{1}{r^{2}}\right]R=0 \qquad \text{(۲)}$$

$$+n(n+1)(1-\mu^{2})+\frac{1-\mu^{2}}{M}\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^{2})\frac{dM}{d\mu}\right]+\underbrace{\frac{1}{\Phi}\frac{d^{2}\Phi}{d\varphi^{2}}}_{-m^{2}}=0$$

$$\frac{d^{2}\Phi}{d\varphi^{2}}+m^{2}\Phi=0 \qquad \text{(۳)}$$

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^{2})\frac{dM}{d\mu}\right]+\left[n(n+1)-\frac{m^{2}}{1-\mu^{2}}\right]M=0 \qquad \text{(٤)}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{K}\dot{g}'''=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\mu=\cos\theta$$

$$u=r^{\frac{1}{2}}T$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{4}\frac{u}{r^2}+\frac{\partial}{r^2\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial u}{\partial\mu}\right]+\frac{1}{r^2(1-\mu^2)}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\sqrt{r}}{K}\dot{g}'''=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$u=R(r)\,M(\mu)\,\Psi(\varphi)\,\Gamma(t)$$

$$\frac{1}{R}\left(\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}-\frac{R}{4r^2}\right)+\frac{1}{Mr^2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial M}{\partial\mu}\right]+\frac{1}{r^2(1-\mu^2)}\underbrace{\frac{\partial^2\Psi}{\Psi\,\partial^2\varphi^2}}_{-\nu^2}=\underbrace{\frac{1}{\alpha\Gamma}\frac{d\Gamma}{dt}}_{-\lambda^2}$$

$$\frac{1}{\alpha\Gamma}\frac{d\Gamma}{dt}=-\lambda^2 \qquad (۱)$$

$$\frac{1}{\Psi}\frac{d^2\Psi}{d\varphi^2}=-\nu^2 \qquad (۲)$$

$$\frac{1}{R}\left(\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}-\frac{R}{4r^2}\right)+\frac{1}{r^2}\left\{\frac{1}{M}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial M}{\partial\mu}\right]-\frac{\nu^2}{1-\mu^2}\right\}=-\lambda^2$$

$$\underbrace{\frac{r^2}{R}\left(\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}-\frac{R}{4r^2}\right)}_{n(n+1)}+\lambda^2r^2+\frac{1}{M}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial M}{\partial\mu}\right]-\frac{\nu^2}{1-\mu^2}=0$$

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}-\frac{R}{4r^2}+\lambda^2R=n(n+1)\frac{R}{r^2}$$

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\left[\lambda^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{r^2}\right]R=0 \qquad (۳)$$

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dM}{d\mu}\right]+\left[n(n+1)-\frac{\nu^2}{1-\mu^2}\right]M=0 \qquad (۴)$$

جواب‌های عمومی معادلات (۱) تا (۴) به فرم صفحه بعد است :

$$T(t) = C_0 e^{-\alpha \lambda^2 t}$$

$$\psi(\varphi) = C_1 \sin \nu\varphi + C_2 \cos \nu\varphi$$

$$R(r) = C_3 J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r) + C_4 Y_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r)$$

$$M(\mu) = C_5 P_n^{\nu}(\mu) + C_6 Q_n^{\nu}(\mu)$$

مختصات استوانه‌ای در حالت سه بعدی

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{k}\dot{g}''' = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T = R(r)\psi(\theta)Z(z)\Gamma(t)$$

$$\frac{1}{rR}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\underbrace{\frac{\partial^2 \psi}{\psi\,\partial \theta^2}}_{-\nu^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 Z}{Z\,\partial z^2}}_{-\eta^2} = \underbrace{\frac{1}{\alpha}\frac{\partial \Gamma}{\Gamma\,\partial t}}_{-\lambda^2}$$

$$\frac{d\Gamma}{dt} + \alpha\lambda^2\Gamma = 0 \quad\longrightarrow\quad \Gamma(t) = C_0 e^{-\alpha\lambda^2 t} \qquad (1)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \eta^2 Z = 0 \quad\longrightarrow\quad Z(z) = C_1 \sin \eta z + C_2 \cos \eta z \qquad (2)$$

$$\frac{d^2 \psi}{d\theta^2} + \nu^2 \psi = 0 \quad\longrightarrow\quad \psi(\theta) = C_3 \sin \nu\theta + C_4 \cos \nu\theta \qquad (3)$$

$$\frac{1}{rR}\frac{dR}{dr} + \frac{1}{R}\frac{d^2 R}{dr^2} - \frac{\nu^2}{r^2} + (\lambda^2 - \eta^2) = 0$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left[\underbrace{(\lambda^2 - \eta^2)}_{\beta^2} - \frac{\nu^2}{r}\right]R = 0$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(\beta^2 - \frac{\nu^2}{r}\right)R = 0 \quad\longrightarrow\quad R(r) = C_5 J_\nu(\beta r) + C_6 Y_\nu(\beta r) \qquad (4)$$

انواع شرایط مرزی

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{1}{k}g'''=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\begin{cases} x=a & -k\frac{\partial T}{\partial x}=h(T-T_\infty) \\ x=b & -k\frac{\partial T}{\partial x}=h(T-T_\infty)\end{cases} \qquad \begin{cases} x=a & \frac{\partial T}{\partial x}=0 \\ x=b & \frac{\partial T}{\partial x}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} x=a & -k\frac{\partial T}{\partial x}=h(T-T_\infty) \\ x=b & \frac{\partial T}{\partial x}=0\end{cases} \qquad \begin{cases} x=a & \frac{\partial T}{\partial x}=0 \\ x=b & T=Const\end{cases}$$

$$\begin{cases} x=a & -k\frac{\partial T}{\partial x}=h(T-T_\infty) \\ x=b & T=Const\end{cases} \qquad \begin{cases} x=a & T=Const \\ x=b & T=Const\end{cases}$$

$6\times6\times6=216$

Product of Green function

در مختصات کارتزین، تابع گرین سه بعدی را می‌توان با حساب کردن تابع گرین یک بعدی برای هر بعد و ضرب توابع گرین بدست آورد. این روش در مختصات استوانه‌ای در برخی موارد امکان‌پذیر است و در مختصات کروی امکان‌پذیر نیست.

$0\leqslant x\leqslant a \quad ; \quad 0\leqslant y\leqslant b \quad ; \quad 0\leqslant z\leqslant c$

$$G(x,y,z,t\,|\,x',y',z',\tau)=G_1(x,t\,|\,x',\tau)\cdot G_2(y,t\,|\,y',\tau)\cdot G_3(z,t\,|\,z',\tau)$$

$$=\left[\sum_{m=1}^{\infty}e^{-\alpha\lambda_m^2(t-\tau)}\frac{X(\lambda_m,x)X(\lambda_m,x')}{N(\lambda_m)}\right]$$

$$\times\left[\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\alpha\gamma_n(t-\tau)}\frac{Y(\gamma_n,y)\,Y(\gamma_n,y')}{N(\gamma_n)}\right]$$

$$\times\left[\sum_{p=1}^{\infty}e^{-\alpha\eta_p(t-\tau)}\frac{Z(\eta_p,z)\,Z(\eta_p,z')}{N(\eta_p)}\right]$$

$$-\infty < x < +\infty \quad ; \quad 0 \leqslant y \leqslant b \quad ; \quad 0 \leqslant z \leqslant c$$

$$G(x,y,z,t \mid x',y',z',\tau) = \left[\frac{e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha(t-\tau)}}}{\sqrt{4\pi\alpha(t-\tau)}} \right]$$

$$\times \left[\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\gamma_n^2(t-\tau)} \frac{Y(\gamma_n,y)\,Y(\gamma_n,y')}{N(\gamma_n)} \right]$$

$$\times \left[\sum_{p=1}^{\infty} e^{-\alpha\eta_p^2(t-\tau)} \frac{Z(\eta_p,z)\,Z(\eta_p,z)}{N(\eta_p)} \right]$$

Transformation of Nonhomogenous B.C.s into Homogenous One

$$\frac{1}{x^P}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^P\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{1}{k}\dot{g}'''=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$-k\frac{\partial T}{\partial x}+h_1T=h_1f_1(t) \qquad x=x_0$$

$$+k\frac{\partial T}{\partial x}+h_2T=h_2f_2(t) \qquad x=x_L$$

$$T(x,t=0)=F(x)$$

$$T=T_1(x,t)+f_1(t)T_2(x)+f_2(t)T_3(x)$$

$$\frac{1}{x^P}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^P\left(\frac{\partial T_1}{\partial x}+f_1\frac{\partial T_2}{\partial x}+f_2\frac{\partial T_3}{\partial x}\right)\right]+\frac{1}{k}\dot{g}'''=\frac{1}{\alpha}\left[\frac{\partial T_1}{\partial t}+T_2\frac{df_1}{dt}+T_3\frac{df_2}{dt}\right]$$

$$-K\left[\frac{\partial T_1}{\partial x}+f_1\frac{\partial T_2}{\partial x}+f_2\frac{\partial T_3}{\partial x}\right]+h_1\left(T_1+f_1T_2+f_2T_3\right)=h_1f_1 \qquad (1)$$

$$K\left[\frac{\partial T_1}{\partial x}+f_1\frac{\partial T_2}{\partial x}+f_2\frac{\partial T_3}{\partial x}\right]+h_2\left(T_1+f_1T_2+f_2T_3\right)=h_2f_2 \qquad (2)$$

$$(1)\begin{cases}-K\frac{\partial T_1}{\partial x}+h_1T_1=0\\ -Kf_1\frac{\partial T_2}{\partial x}+h_1f_1T_2=h_1f_1 \longrightarrow -K\frac{\partial T_2}{\partial x}+h_1T_2=h_1\\ -Kf_2\frac{\partial T_3}{\partial x}+h_1f_2T_3=0 \longrightarrow -K\frac{\partial T_3}{\partial x}+h_1T_3=0\end{cases}$$

$$(2)\begin{cases}+K\frac{\partial T_1}{\partial x}+h_2T_1=0\\ +Kf_1\frac{\partial T_2}{\partial x}+h_2f_1T_2=0 \longrightarrow -K\frac{\partial T_2}{\partial x}+h_2T_2=0\\ +Kf_2\frac{\partial T_3}{\partial x}+h_2f_2T_3=h_2f_2 \longrightarrow +K\frac{\partial T_3}{\partial x}+h_2T_3=0\end{cases}$$

بنابراین مساله را می‌توان به دو مساله Steady State و یک مساله همگن تبدیل کرد.

$$\frac{d}{dx}\left(x^P \frac{dT_2}{dx}\right) = 0 \qquad x_0 < x < x_L$$

$$-K\frac{dT_2}{dx} + h_1 T_2 = h_1 \qquad x = x_0$$

$$+K\frac{dT_2}{dx} + h_2 = 0 \qquad x = x_L$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^P \frac{dT_3}{dx}\right) = 0 \qquad x_0 < x < x_L$$

$$-K\frac{dT_3}{dx} + h_1 T_3 = 0 \qquad x = x_0$$

$$+K\frac{dT_3}{dx} + h_2 T_3 = h_2 \qquad x = x_L$$

$$\frac{1}{x^P}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^P \frac{\partial T_1}{\partial x}\right) + \underbrace{\left[\frac{1}{K}\dot{g}'''(x,t) - \frac{1}{\alpha}\left(T_2 \frac{\partial f_2}{\partial t} + T_3 \frac{\partial f_3}{\partial t}\right)\right]}_{\frac{1}{K}g^*(x,t)} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T_1}{\partial x}$$

$$-K\frac{\partial T_1}{\partial x} + h_1 T_1 = 0$$

$$+K\frac{\partial T_1}{\partial x} + h_1 T_1 = 0$$

$$T_1(x,0) = F(x) - f_1 T_2(x) - f_2 T_3(x)$$

مثال:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T(0,t) = \theta_1$$

$$T(L,t) = \theta_2$$

$$T(x,0) = F(x)$$

$$T(x,t) = T_1(x,t) + \theta_1 T_2(x) + \theta_2 T_3(x)$$

$$T(x,t) = T_1(x,t) + \phi(x)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \begin{cases} \dfrac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial T}{\partial t} \\ \dfrac{d^2\phi}{dx^2} = 0 \end{cases}$$

$$T(0,t) = T_1(0,t) + \phi(0) = \theta_1 \begin{cases} T_1(0,t) = 0 \\ \phi(0) = \theta_1 \end{cases}$$

$$T(L,t) = T_1(L,t) + \phi(L) = \theta_2 \quad \begin{cases} T_1(L,t) = 0 \\ \phi(L) = \theta_2 \end{cases}$$

$$T(x,0) = F(x) \longrightarrow T_1(x,0) = F(x) - \phi(x)$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 0$$

$$\phi(0) = \theta_1$$

$$\phi(L) = \theta_2$$

$$\Rightarrow \phi(x) = \frac{\theta_2 - \theta_1}{L} x + \theta_1$$

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T_1}{\partial t}$$

$$T_1(0,t) = 0$$

$$T_1(L,t) = 0$$

$$T_1(x,0) = F(x) - \phi(x) = F(x) - \frac{\theta_2 - \theta_1}{L} x - \theta_1 = F^*(x)$$

$$T_1(x,t) = X(x)\Gamma(t)$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{\alpha \Gamma} \frac{d\Gamma}{dt} = -\lambda^2$$

$$\Gamma(t) = C_0 e^{-\alpha \lambda^2 t}$$

$$X(x) = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x$$

$$X(0) = 0 \longrightarrow C_2 = 0$$

$$X(L) = 0 \longrightarrow \sin \lambda L = 0 \longrightarrow \lambda L = n\pi$$

$$T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \sin \lambda_n x$$

$$T_1(x,0) = F(x) - \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{L} x + \theta_1\right) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \lambda_n x = F^*(x)$$

$$C_n = \frac{\int_{x'=0}^{L} F^*(x') \sin \lambda_n x' \, dx'}{\int_{x'=0}^{L} \sin^2 \lambda_n x' \, dx'} = \frac{2}{L} \int_{x'=0}^{L} F^*(x') \sin \lambda_n x' \, dx'$$

$$T_1(x,t)=\frac{2}{L}\int_{x'=0}^{L}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\alpha\lambda_n t}\left[F(x')-\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{L}x'+\theta_1\right)\right]\sin\lambda_n x'\,\sin\lambda_n x\,dx'+\left[\frac{\theta_2-\theta_1}{L}x+\theta_1\right]$$

حذف کردن اثر Heat Source

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{1}{k}\dot{g}'''=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=0$$
$$T(L,t)=0$$
$$T(x,0)=F(x)$$

$$T(x,t)=T_1(x,t)+T_2(x)$$

$$\frac{d^2T_2}{dx^2}+\frac{1}{k}\dot{g}'''=0$$

$$\dot{g}'''=cte\longrightarrow\quad\frac{dT_2}{dx}+\frac{1}{k}\dot{g}'''x=C_1\xrightarrow{\left.\frac{dT_2(x)}{dx}\right|_{x=0}=0}C_1=0$$
$$T_2+\frac{\dot{g}'''}{2k}x^2=C_2\xrightarrow{T_2(L)=0}C_2=\frac{\dot{g}'''L^2}{2k}$$

$$T_2(x)=\frac{\dot{g}'''}{2k}(L^2-x^2)$$

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T_1}{\partial x}$$

$$\left.\frac{\partial T_1(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=0$$
$$T_1(L,t)=0$$
$$T_1(x,0)=F(x)-T_2(x)=F(x)-\frac{\dot{g}'''}{2k}(L^2-x^2)$$

$$T_1(x,t)=X(x)\Gamma(t)$$

$$\frac{d^2X}{dx^2}=\frac{1}{\alpha\Gamma}\frac{d\Gamma}{dt}=-\lambda^2$$

$$\Gamma(t)=C_0e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

$$X(x) = C_1 \sin\lambda x + C_2 \cos\lambda x$$

$$\left.\frac{dX(x)}{dx}\right|_{x=0} = 0 \longrightarrow C_1 = 0$$

$$X(L) = 0 \longrightarrow \cos\lambda L = 0 \longrightarrow \lambda L = n\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$T_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\alpha\lambda_n^2 t} \cos\lambda_n x$$

$$T_1(x,0) = F^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\lambda_n x$$

$$C_n = \frac{\int_{x'=0}^{L} F^*(x') \cos\lambda_n x' \, dx'}{\int_{x'=0}^{L} \cos^2\lambda_n x' \, dx'} = \frac{2}{L}\int_{x'=0}^{L} F^*(x') \cos\lambda_n x' \, dx'$$

$$T(x,t) = \frac{2}{L}\int_{x'=0}^{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\lambda_n^2 t}\left[F(x') - \frac{\dot{g}'''}{2K}(L^2 - x'^2)\right] \cos\lambda_n x' \cos\lambda_n x \, dx'$$

حذف اثر Convection term

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{K}\dot{g}''' + \gamma T = \beta \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T(x,t) = \psi(x,t)\, e^{Ax + Ct}$$

$$\alpha\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} e^{Ax+Ct} + 2A\frac{\partial\psi}{\partial x} e^{Ax+Ct} + A^2\psi e^{Ax+Ct}\right] + \frac{1}{K}\dot{g}''' + \gamma\psi e^{Ax+Ct} =$$

$$= \beta\left[\frac{\partial\psi}{\partial x} e^{Ax+Ct} + A\psi e^{Ax+Ct}\right] + \lambda\left[\frac{\partial\psi}{\partial t} e^{Ax+Ct} + C\psi e^{Ax+Ct}\right]$$

ضرایب $\frac{\partial\psi}{\partial x}$: $2\alpha A = \beta$

ضرایب ψ: $A^2\alpha + \gamma = \beta A + \lambda C$

$$A = \frac{\beta}{2\alpha}$$

$$C = \frac{1}{\lambda}\left[\alpha A^2 - \beta A + \gamma\right] = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{\beta^2}{4\alpha} - \frac{\beta^2}{2\alpha} + \gamma\right] = \frac{1}{\lambda}\left(\gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha}\right)$$

$$\alpha\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{1}{K}\dot{g}''' e^{-(Ax+Ct)} = \lambda\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

جلسه هفدهم

« یکشنبه ۸ آذر ۱۳۸۸ »

Perturbation

$u = 1 + \varepsilon u^3$

$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \dots$

$u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 = 1 + \varepsilon\left[u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3\right]^3$

$$= 1 + \varepsilon\left[u_0^3 + 3\varepsilon u_0^2 u_1 + 3\varepsilon^2 u_0 u_1^2 + 3\varepsilon^2 u_0^2 u_2 + \dots\right]$$

ε^0 ضریب : $u_0 = 1$

ε^1 ضریب : $u_1 = u_0^3 \longrightarrow u_1 = 1$

ε^2 ضریب : $u_2 = 3u_0^2 u_1 \longrightarrow u_2 = 3$

ε^3 ضریب : $u_3 = 3u_0 u_1^2 + 3u_0^2 u_2 \longrightarrow u_3 = 12$

$\Rightarrow u = 1 + \varepsilon + 3\varepsilon^2 + 12\varepsilon^3$

$\dfrac{d^2u}{dt^2} + u = \varepsilon(1-u^2)\dfrac{du}{dt}$ « van der Pol equation »

$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2$

$\dfrac{d^2}{dt^2}(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2) + \left[u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2\right] = \varepsilon\left[1 - (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2)^2\right]\dfrac{d}{dt}\left[u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2\right]$

$$= \varepsilon\left[1 - u_0^2 - 2\varepsilon u_0 u_1 - \varepsilon^2 u_1^2 - 2\varepsilon^2 u_0 u_2\right]\left[\frac{d}{dt}(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2)\right]$$

ε^0 ضریب : $\dfrac{d^2u_0}{dt^2} + u_0 = 0$

ε^1 ضریب : $\frac{d^2u_1}{dt^2} + u_1 = (1-u_0^2)\frac{du_0}{dt}$

ε^2 ضریب : $\frac{d^2u_2}{dt^2} + u_2 = (1-u_0^2)\frac{du_1}{dt} - 2u_0u_1\frac{du_0}{dt}$

$$\frac{d^2u_0}{dt^2} + u_0 = 0$$

$$u_0 = C_1 \operatorname{Sin} t + C_2 \operatorname{Cos} t = C_0 \operatorname{Sin}(t+\varphi)$$

$$\frac{d^2u_1}{dt^2} + u_1 = \left[1 - C_0^2 \operatorname{Sin}^2(t+\varphi)\right] C_0 \operatorname{Cos}(t+\varphi) = C_0 \operatorname{Cos}(t+\varphi) - C_0^3 \operatorname{Sin}^2(t+\varphi)\operatorname{Cos}(t+\varphi)$$

$$= C_0 \operatorname{Cos}(t+\varphi) - C_0^3 \operatorname{Cos}(t+\varphi) + C_0^3 \operatorname{Cos}^3(t+\varphi)$$

$$\operatorname{Cos}^3\theta = \frac{3}{4}\operatorname{Cos}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{Cos}3\theta$$

$$\frac{d^2u_1}{dt^2} + u_1 = C_0 \operatorname{Cos}(t+\varphi) - C_0^3 \operatorname{Cos}(t+\varphi) + \frac{3}{4}C_0^3 \operatorname{Cos}(t+\varphi) + \frac{1}{4}C_0^3 \operatorname{Cos}3(t+\varphi)$$

$$\frac{d^2u_1}{dt^2} + u_1 = \left(C_0 - \frac{1}{4}C_0^3\right) \operatorname{Cos}(t+\varphi) + \frac{1}{4}C_0^3 \operatorname{Cos}3(t+\varphi)$$

یادآوری از معادلات ـ روش اپراتوری ـ

$$\frac{1}{(D-p)^k F(D)}\left[ce^{px}\right] = \frac{c x^k e^{px}}{k!\,F(D)}$$

$$\frac{1}{F(D^2)}\operatorname{Sin}qx = \frac{1}{F(-q^2)}\operatorname{Sin}qx \quad ; \quad \frac{1}{F(D^2)}\operatorname{Cos}qx = \frac{1}{F(-q^2)}\operatorname{Cos}qx$$

$$(D^2+1)\,u_1 = \left(C_0 - \frac{C_0^3}{4}\right)\operatorname{Cos}(t+\varphi) + \frac{C_0^3}{4}\operatorname{Cos}(3t+3\varphi)$$

$$u_{1p} = \frac{1}{D^2+1}\left(C_0 - \frac{C_0^3}{4}\right)\operatorname{Cos}(t+\varphi) + \frac{1}{D^2+1}\frac{C_0^3}{4}\operatorname{Cos}(3t+3\varphi)$$

$$= \left(C_0 - \frac{C_0^3}{4}\right)\frac{1}{(D-i)(D+i)}\left[\frac{e^{i(t+\varphi)} + e^{-i(t+\varphi)}}{2}\right] + \frac{C_0^3}{4}\frac{1}{(-9)+1}\operatorname{Cos}(3t+3\varphi)$$

$$= \frac{1}{2}\left(C_0 - \frac{C_0^3}{4}\right)\left[\frac{te^{i(t+\varphi)}}{2i} + \frac{te^{-i(t+\varphi)}}{-2i}\right] - \frac{C_0^3}{32}\operatorname{Cos}(3t+3\varphi)$$

$$u_{1p} = \frac{1}{2}\left(C_0 - \frac{C_0^3}{4}\right) t \operatorname{Sin}(t+\varphi) - \frac{C_0^3}{32}\operatorname{Cos}(3t+3\varphi)$$

$$u_1 = C_2 \sin(t+\theta) + \frac{1}{2}\left(C_0 - \frac{C_0^3}{4}\right) t \sin(t+\varphi) - \frac{C_0^3}{32}\cos(3t+3\varphi)$$

$$u(t) = u_0(t) + \varepsilon\, u_1(t)$$

$$\text{Perturbation}\begin{cases} \text{Parameter Perturbation} \\ \\ \text{Coordinate Perturbation} \end{cases}$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + (x^2 - 0)y = 0$$

$$y = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x)$$

می‌توانیم معادله بالا را با استفاده از روش سری مستقیماً حل کنیم.

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{\mu+m} = a_0 x^{\mu} + a_1 x^{\mu+1} + a_2 x^{\mu+2} + \cdots$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0$$

$$\begin{aligned} & x a_0 \mu(\mu-1) x^{\mu-2} + x a_1 (\mu+1)\mu x^{\mu-1} + x a_2 (\mu+2)(\mu+1) x^{\mu} + \cdots \\ & a_0 \mu x^{\mu-1} + a_1(\mu+1) x^{\mu} + a_2(\mu+2) x^{\mu+1} + \cdots \\ & \qquad + a_0 x^{\mu+1} + \cdots = 0 \end{aligned}$$

$$a_0 \mu(\mu-1) + a_0 \mu = 0 \longrightarrow a_0 \mu^2 = 0$$

$$a_1(\mu+1)\mu + a_1(\mu+1) = 0 \longrightarrow a_1(\mu+1)^2 = 0$$

$$a_2(\mu+2)(\mu+1) + a_2(\mu+2) + a_0 = 0 \longrightarrow a_2 = \frac{-a_0}{(\mu+2)^2}$$

$$\mu = 0$$

$a_0 = C_1$ (ثابت اول)

$a_1 = 0$

$a_2 = \frac{-a_0}{2^2}$

$a_3 = 0$

$a_4 = \frac{a_0}{2^2 \times 4^2}$

$a_5 = 0$

$a_6 = \frac{-a_0}{2^2 \times 4^2 \times 6^2}$

تکلیف شماره ۸ :

۱ـ مسأله اخیر را یک بار دیگر حل کنید و ثابت دوم را بررسی نمایید.

۲ـ معادله زیر را با استفاده از روش سری حل کنید:

$$\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{x}$$

به عنوان مرجع از کتاب زیر استفاده شود.

"Perturbation Methods" , Ali Hasan Nayfeh. 1973, by John Wiley & Sons.

« سه‌شنبه ۱۰ آذر ۱۳۸۸ »

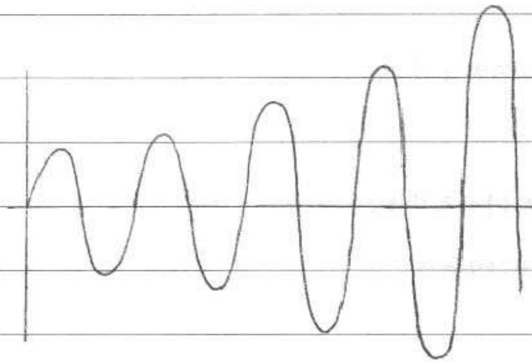
جلسه هیجدهم

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sin(\varepsilon) = \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3!} + \frac{\varepsilon^5}{5!} - \frac{\varepsilon^7}{7!} + \dots = 0$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\cos(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2!} + \frac{\varepsilon^4}{4!} - \frac{\varepsilon^6}{6!} + \dots = 1$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\tan(\varepsilon) = \frac{\sin(\varepsilon)}{\cos(\varepsilon)} = 0$$

$$\lim_{t\to \infty} t\sin(t) = \infty$$ « Secular term »



✓ اگر معادله شامل ترم‌های Secular باشد، بایستی آن را در سه ناحیه بررسی کرد. یعنی جواب در ناحیه مقادیر کوچک و ناحیه مقادیر بزرگ محاسبه شده و در ناحیه مقادیر متوسط میانیابی شود.

$$\ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0$$

$$u(0) = a$$

$$\dot{u}(0) = 0$$

$$2\dot{u}\ddot{u} + 2\dot{u}u + 2\varepsilon\dot{u}u^3 = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{u}^2) + \frac{d}{dt}(u^2) + \frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}(u^4) = 0$$

$$\dot{u}^2 + u^2 + \frac{\varepsilon}{2}u^4 = c$$

$$\dot{u}^2(0) + u^2(0) + \frac{\varepsilon}{2}u^4(0) = a^2 + \frac{\varepsilon}{2}a^4 = c$$

$$\longrightarrow \dot{u}^2 + u^2 + \frac{\varepsilon}{2}u^4 = a^2\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}a^2\right)$$

$$\dot{u}=\sqrt{a^2\left(1+\frac{\varepsilon}{2}a^2\right)-u^2-\frac{\varepsilon}{2}u^4}$$

$$\ddot{u}+u+\varepsilon u^3=0$$

$$u(0)=a$$

$$\dot{u}(0)=0$$

$$u=u_0+\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_2$$

$$u(0)=u_0(0)+\varepsilon u_1(0)+\varepsilon^2 u_2(0)=a$$

$$\longrightarrow \quad u_0(0)=a \quad , \quad u_1(0)=0 \quad , \quad u_2(0)=0$$

$$\dot{u}(0)=\dot{u}_0(0)+\varepsilon \dot{u}_1(0)+\varepsilon^2 \dot{u}_2(0)=0$$

$$\longrightarrow \quad \dot{u}_0(0)=0 \quad , \quad \dot{u}_1(0)=0 \quad , \quad \dot{u}_2(0)=0$$

$$(\ddot{u}_0+\varepsilon\ddot{u}_1+\varepsilon^2\ddot{u}_2)+(u_0+\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_2)+\varepsilon(u_0+\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_2)^3=0$$

ضریب ε^0 : $\ddot{u}_0+u_0=0$

ضریب ε^1 : $\ddot{u}_1+u_1+u_0^3=0$

ضریب ε^2 : $\ddot{u}_2+u_2+3u_0^2u_1=0$

$$\ddot{u}_0+u_0=0$$

$$u_0(0)=a$$

$$\dot{u}_0(0)=0$$

$$u_0(t)=C_1\,\text{Sin}t+C_2\,\text{Cos}t$$

$$u_0(0)=a \longrightarrow C_2=a$$

$$\dot{u}_0(0)=0 \longrightarrow C_1=0$$

$$u_0(t) = a\cos t$$

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -u_0^3$$

$$u_1(0) = 0$$

$$\dot{u}_1(0) = 0$$

$$(D^2+1)\,u_1 = -a^3\cos^3 t = -a^3\left(\frac{3}{4}\cos t + \frac{1}{4}\cos 3t\right)$$

$$u_{1p} = -\frac{3}{4}a^3\frac{1}{(D-i)(D+i)}\left[\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right] - \frac{1}{4}a^3\frac{1}{D^2+1}\cos 3t$$

$$= -\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}a^3\left[\frac{te^{it}}{2i} + \frac{te^{-it}}{-2i}\right] - \frac{1}{4}a^3\frac{1}{(-9)+1}\cos 3t$$

$$= \frac{-3}{8}a^3 t\sin t + \frac{1}{32}a^3\cos 3t$$

$$u_1(t) = C_3\sin t + C_4\cos t - \frac{3}{8}a^3 t\sin t + \frac{1}{32}a^3\cos 3t$$

$$u_1(0) = 0 \longrightarrow C_4 = -\frac{1}{32}a^3$$

$$\dot{u}_1(0) = 0 \longrightarrow C_3 = 0$$

$$u_1(t) = -\frac{3}{8}a^3 t\sin t + \frac{a^3}{32}(\cos 3t - \cos t)$$

$$u_2(t) = \dots$$

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2$$

A Weak Nonlinear Instability

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u = u^3$$

$$u(x,0) = \varepsilon\cos kx$$

$$u_t(x,0) = 0$$

با توجه به اینکه شرایط اولیه تابعی از ε است، بسط زیر را برای u در نظر می‌گیریم:

$$u=\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_2+\varepsilon^3 u_3+\dots$$

$$u(x,0)=\varepsilon u_1(x,0)+\varepsilon^2 u_2(x,0)+\varepsilon^3 u_3(x,0)=\varepsilon \cos kx$$

$$\longrightarrow u_1(x,0)=\cos kx \quad , \quad u_2(x,0)=0 \quad , \quad u_3(x,0)=0$$

$$u_t(x,0)=\varepsilon u_{1t}(x,0)+\varepsilon^2 u_{2t}(x,0)+\varepsilon^3 u_{3t}(x,0)=0$$

$$\longrightarrow u_{1t}(x,0)=0 \quad , \quad u_{2t}(x,0)=0 \quad , \quad u_{3t}(x,0)=0$$

$$\left(\varepsilon\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}+\varepsilon^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}+\varepsilon^3\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}\right)-\left(\varepsilon\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\varepsilon^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\varepsilon^3\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}\right)-(\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_2+\varepsilon^3 u_3)=(\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_2+\varepsilon^3 u_3)^3$$

ضریب ε^1: $\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-u_1=0$

ضریب ε^2: $\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}-u_2=0$

ضریب ε^3: $\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}-u_3=u_1^3$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-u_1=0$$

$$u_1(x,0)=\cos kx$$

$$u_{1t}(x,0)=0$$

$$u_1(x,t)=X(x)T(t)$$

$$XT''-X''T-XT=0 \longrightarrow \frac{T''}{T}=\frac{X''+X}{X}=-\sigma^2$$

$$u_1(x,0)=T(0)X(x)=\cos kx \longrightarrow T(0)=1 \quad , \quad X(x)=\cos kx$$

$$-\sigma^2=\frac{X''+X}{X}=1-k^2 \longrightarrow \sigma^2=k^2-1$$

$$T(t)=A\sin\sigma t+B\cos\sigma t$$

$$\left.\frac{dT(t)}{dt}\right|_{t=0}=0 \longrightarrow A=0$$

$$T(0)=1 \longrightarrow B=1$$

$$\Rightarrow u_1(x,t)=\cos kx\cos\sigma t$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - u_2 = 0$$

$$u_2(x,0) = 0$$

$$u_{2t}(x,0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad u_2(x,t) = 0$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} - u_3 = u_1^3$$

$$u_3(x,0) = 0$$

$$u_{3t}(x,0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad u_3(x,t) = \frac{3\cos kx}{128\,\sigma_1^2}\left[12\sigma_1 t \sin\sigma_1 t + \cos\sigma_1 t - \cos 3\sigma_1 t\right] + \frac{\cos 3kx}{128\,k^2}\left[3(\cos\sigma_1 t - \cos\mu t) + k^2(\cos 3\sigma_1 t - \cos\mu t)\right]$$

$$\text{«}\ \mu^2 = 9k^2 - 1\ \text{»}$$

تکلیف شماره ۹ : این معادله را یک بار دیگر و همراه با جزئیات حل کنید.

Finite process expansion matching

General Asymptotic Expansion

$$f(x,\varepsilon) = \frac{-\varepsilon e^{-x}}{x+\varepsilon}$$

$$\phi_n = \varepsilon^n$$

$$f(x,\varepsilon) = a_1\phi_1 + a_2\phi_2 + a_3\phi_3 + \dots$$

$$a_1 = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x,\varepsilon)}{\phi_1} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{-\varepsilon e^{-x}}{x+\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{-e^{-x}}{x+\varepsilon} = \frac{-e^{-x}}{x}$$

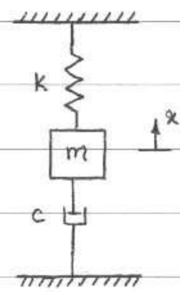
$$a_2 = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x,\varepsilon) - a_1\phi_1}{\phi_2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\frac{-\varepsilon e^{-x}}{x+\varepsilon} - \left(\frac{-e^{-x}}{x}\right)\varepsilon}{\varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon^2}\left[\frac{-x e^{-x}}{x+\varepsilon} + \frac{\varepsilon e^{-x}}{x}\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon^2}\,\frac{\varepsilon^2 e^{-x}}{x(x+\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{e^{-x}}{x(x+\varepsilon)} = \frac{e^{-x}}{x^2}$$

$$a_3 = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x,\varepsilon) - a_1\phi_1 - a_2\phi_2}{\phi_3} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon^3}\left[\frac{-\varepsilon e^{-x}}{x+\varepsilon} - \frac{-\varepsilon e^{-x}}{x} - \frac{\varepsilon^2 e^{-x}}{x^2}\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon^3}\,\frac{-\varepsilon x^2 e^{-x} + \varepsilon x(x+\varepsilon)e^{-x} - \varepsilon^2(x+\varepsilon)e^{-x}}{x^2(x+\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon^3}\,\frac{-\varepsilon^3 e^{-x}}{x^2(x+\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{-e^{-x}}{x^2(x+\varepsilon)} = \frac{-e^{-x}}{x^3}$$

$$\Rightarrow \quad f(x,\varepsilon) = \frac{-\varepsilon e^{-x}}{x+\varepsilon} = -\varepsilon\frac{e^{-x}}{x} + \varepsilon^2\frac{e^{-x}}{x^2} - \varepsilon^3\frac{e^{-x}}{x^3} + \dots$$



$$\sum F = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$-kx - c\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

بی‌بعدسازی : $x^* = \dfrac{x}{L_{ref}}$; $t^* = \dfrac{t}{t_{ref}}$

$$\frac{mL_{ref}}{t_{ref}^2}\frac{d^2x^*}{dt^{*2}} + \frac{cL_{ref}}{t_{ref}}\frac{dx^*}{dt^*} + kL_{ref}\,x^* = 0$$

روش اول ایجاد پارامتر Perturbation :

«تقسیم طرفین بر ضریب $\dfrac{d^2x^*}{dt^{*2}}$»

$$\frac{d^2x^*}{dt^{*2}} + \frac{ct_{ref}}{m}\frac{dx^*}{dt^*} + \overbrace{\left(\frac{kt_{ref}^2}{m}\right)}^{1}x^* = 0$$

$$t_{ref} = \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\frac{d^2x^*}{dt^{*2}} + \overbrace{\left(\frac{c}{\sqrt{km}}\right)}^{\varepsilon}\frac{dx^*}{dt^*} + x^* = 0$$

$$\frac{d^2x^*}{dt^{*2}} + \varepsilon\frac{dx^*}{dt^*} + x^* = 0$$

روش دوم ایجاد پارامتر Perturbation :

«تقسیم طرفین بر ضریب $\dfrac{dx^*}{dt^*}$»

$$\frac{m}{ct_{ref}}\frac{d^2x^*}{dt^{*2}} + \frac{dx^*}{dt^*} + \overbrace{\left(\frac{kt_{ref}}{c}\right)}^{1}x^* = 0$$

$$t_{ref} = \frac{c}{k}$$

$$\overbrace{\left(\frac{km}{c^2}\right)}^{\varepsilon}\frac{d^2x^*}{dt^{*2}} + \frac{dx^*}{dt^*} + x^* = 0$$

$$\varepsilon\frac{d^2x^*}{dt^{*2}} + \frac{dx^*}{dt^*} + x^* = 0$$

بنابراین در صورتی که $\dfrac{c^2}{km} < 1$ از روش اول و در صورتی که $\dfrac{c^2}{km} > 1$ از روش دوم استفاده می‌کنیم.

$$\varepsilon\frac{d^2x^*}{dt^*} + \frac{dx^*}{dt^*} + x^* = 0$$

$$x^* = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots$$

$$\varepsilon(x_0'' + \varepsilon x_1'' + \varepsilon^2 x_2'') + (x_0' + \varepsilon x_1' + \varepsilon^2 x_2') + (x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2) = 0$$

ε^0 ضرایب : $x'_0 + x_0 = 0$

ε^1 ضرایب : $x'_1 + x_1 = -x''_0$

ε^2 ضرایب : $x'_2 + x_2 = -x''_1$

همانطور که می‌بینیم اگر ε ضریب بزرگترین مشتق باشد، به کارگیری روش معمول Perturbation با حذف عامل درجه دوم، ماهیت فیزیکی مسئله را تغییر می‌دهد، زیرا معادله درجه اول تنها با یک شرط مرزی به طور دقیق تعیین می‌شود. بنابراین اگر از هر کدام از شرایط مرزی استفاده کنیم، دیگری تامین نخواهد شد.

اگر ضرایب معادله دیفرانسیل ثابت باشند با استفاده از تکنیک Stretching transformation می‌توان با یک تغییر متغیر، ε را از پشت بزرگترین مشتق حذف کرد.

$$\eta = t^* \varepsilon^\alpha$$

$$\frac{dx^*}{dt^*} = \frac{dx^*}{d\eta}\frac{d\eta}{dt^*} = \varepsilon^\alpha \frac{dx^*}{d\eta}$$

$$\frac{d^2x^*}{dt^{*2}} = \varepsilon^\alpha \frac{d}{d\eta}\left(\frac{dx^*}{d\eta}\right)\frac{d\eta}{dt^*} = \varepsilon^{2\alpha}\frac{d^2x^*}{d\eta^2}$$

$$\varepsilon\frac{d^2x^*}{dt^{*2}} + \frac{dx^*}{dt^*} + x^* = 0 \longrightarrow \varepsilon^{2\alpha+1}\frac{d^2x^*}{d\eta^2} + \varepsilon^\alpha\frac{dx^*}{d\eta} + x^* = 0$$

$$2\alpha + 1 = \alpha \longrightarrow \alpha = -1$$

$$\varepsilon^{-1}\frac{d^2x^*}{d\eta^2} + \varepsilon^{-1}\frac{dx^*}{d\eta} + x^* = 0$$

$$\frac{d^2x^*}{d\eta^2} + \frac{dx^*}{d\eta} + \varepsilon x^* = 0$$

$$x^*(0) = 0 \qquad , \quad \frac{dx^*(0)}{d\eta} = 1$$

$$x^* = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots$$

$$(x''_0 + \varepsilon x''_1 + \varepsilon^2 x''_2) + (x'_0 + \varepsilon x'_1 + \varepsilon^2 x'_2) + \varepsilon(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2) = 0$$

ضریب ε^0 : $x_0'' + x_0' = 0$ $\qquad x_0(0) = 0 \quad , \quad x_0'(0) = 1$

ضریب ε^1 : $x_1'' + x_1' = -x_0$ $\qquad x_1(0) = 0 \quad , \quad x_1'(0) = 0$

ضریب ε^2 : $x_2'' + x_2' = -x_1$ $\qquad x_2(0) = 0 \quad , \quad x_2'(0) = 0$

Linear Singular Perturbation with Variable Coefficient

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} + (1+\alpha x)\frac{dy}{dx} + \alpha y = 0$$

$$y(0) = 0 \qquad ; \quad y(1) = 1$$

هنگامی که ضرایب معادله دیفرانسیل متغیر باشند، دیگر به سادگی با تکنیک Stretching transformation و یک تغییر متغیر، نمی‌توان ضریب ε را از پشت بزرگترین مشتق حذف کرد. در این حالت از تکنیک دیگری به نام Matching استفاده می‌کنیم. به این ترتیب که جواب را در دو سر بازه به صورت مستقل حساب کرده و سپس آنها را Match می‌کنیم.

در اینجا برای نشان دادن شیوه کار تنها از Perturbation درجه صفر استفاده خواهیم کرد اما روش کار به سادگی قابل تعمیم است.

$$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 \xrightarrow{\text{درجه صفر}} y = y_0$$

بنابراین کافیست همه جا $\varepsilon \to 0$ را اعمال کنیم.

انتهای بازه : « $x = 1$ »

$$(1+\alpha x)\frac{dy}{dx} + \alpha y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\alpha y}{1+\alpha x} \longrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{-\alpha dx}{1+\alpha x} \longrightarrow \ln y = -\ln(1+\alpha x) + \ln c$$

$$\to y = c\, e^{\frac{1}{1+\alpha x}}$$

اعمال شرط مرزی انتهای بازه : $y(1) = 1 \longrightarrow c = e^{\frac{-1}{1+\alpha}}$

پروفیل انتهای بازه : $y(x) = e^{\frac{-1}{1+\alpha}}\, e^{\frac{1}{1+\alpha x}}$

ابتدای بازه : «$x = 0$»

حال برای ابتدای بازه از روش Stretching transformation استفاده می‌کنیم. دقت شود که چگونه یک ضریب ثابت در پروفیل نهایی این بازه باقی می‌ماند.

$$\eta = x\varepsilon^{\beta}$$

$$\varepsilon \frac{d^2y}{d\eta^2}\varepsilon^{2\beta} + (1+\alpha x)\frac{dy}{d\eta}\varepsilon^{\beta} + \alpha y = 0$$

$$2\beta + 1 = \beta \longrightarrow \beta = -1 \longrightarrow \eta = \frac{x}{\varepsilon}$$

$$\frac{d^2y}{d\eta^2} + (1+\alpha\varepsilon\eta)\frac{dy}{d\eta} + \alpha\varepsilon y = 0$$

Perturbation درجه صفر $\longrightarrow \varepsilon \to 0$

$$\frac{d^2y}{d\eta^2} + \frac{dy}{d\eta} = 0$$

$$Y = \frac{dy}{d\eta} \longrightarrow \frac{dY}{d\eta} = -Y \longrightarrow \frac{dY}{Y} = -d\eta \longrightarrow \ln Y = -\eta + C_0 \longrightarrow Y = C_1 e^{-\eta}$$

$$\frac{dy}{d\eta} = C_1 e^{-\eta} \longrightarrow y = -C_1 e^{-\eta} + C_2 \longrightarrow y = -C_1 e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + C_2$$

اعمال شرط مرزی ابتدای بازه : $y(0) = 0 \longrightarrow C_2 = C_1$

پروفیل نهایی ابتدای بازه : $y = C_1(1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}})$

اکنون دو جواب داریم که اولی با اعمال شرط مرزی $y(1) = 1$ بدست آمده و بنابراین بیشتر در بازه انتهایی ($x \to 1$)، صادق است و دومی با اعمال شرط مرزی $y(0) = 0$ بدست آمده و بیشتر در بازه ابتدایی ($x \to 0$) صادق است. در روش matching ثابت نامعلوم C_1 را اینگونه می‌یابیم که حد جواب اول وقتی $x \to 0$ را برابر با حد جواب دوم وقتی $x \to 1$ قرار می‌دهیم. نام این حد را y_m می‌گذاریم.

$$y_m = \lim_{\substack{x \to 1 \\ \varepsilon \to 0}} C_1(1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ \varepsilon \to 0}} e^{\frac{-1}{1+\alpha}} e^{\frac{1}{1+\alpha x}}$$

$$y_m = c_1 = e^{1-\frac{1}{1+\alpha}} = e^{\frac{1+\alpha-1}{1+\alpha}} = e^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}$$

جواب نهایی به صورت زیر خواهد بود :

$$\begin{cases} x \to 0 \quad \text{: در ابتدای بازه} \quad y = e^{\frac{-1}{1+\alpha}} e^{\frac{1}{1+\alpha x}} \\ x \to 1 \quad \text{: در انتهای بازه} \quad y = e^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left(1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\right) \end{cases}$$

معمولاً انتخاب xای که در آن باید از یک پروفیل به پروفیل دیگر سوئیچ کرد دشوار است. به همین منظور می‌توان از روش Composite expansion به عنوان ساده‌ترین روش ترکیب جوابها استفاده کرد.

$$y_{\text{نهایی}} = y_{(\text{ابتدای بازه})} + y_{(\text{انتهای بازه})} - y_m$$

$$y = e^{-\frac{1}{1+\alpha}} e^{\frac{1}{1+\alpha x}} + e^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left(1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\right) - e^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}$$

$$\Rightarrow y = e^{\frac{-1}{1+\alpha}} e^{\frac{1}{1+\alpha x}} - e^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$$

تکلیف شماره ۱۰ : معادله بلازیوس را با استفاده از روش Perturbation حل کنید.

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 0$$

$$f'(\infty) = 1$$

«یک شنبه ۲۲ آذر ۱۳۸۸»　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　جلسه بیستم

method of strained coordinate

$$(x+\varepsilon y)\frac{dy}{dx}+y=0$$
$$y(1)=1$$

$$x(s)=s+\varepsilon x_1(s)+\varepsilon^2 x_2(s)+\cdots$$
$$y(s)=y_0(s)+\varepsilon y_1(s)+\varepsilon^2 y_2(s)+\cdots$$

$$\left[s+\varepsilon x_1+\varepsilon(y_0+\varepsilon y_1)\right]\left[\frac{dy}{ds}\frac{ds}{dx}\right]+y_0+\varepsilon y_1=0$$

$$\frac{dy}{ds}=\frac{dy_0}{ds}+\varepsilon\frac{dy_1}{ds}$$

$$\frac{ds}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{ds}}=\frac{1}{1+\varepsilon\frac{dx_1}{ds}}=1-\left(\varepsilon\frac{dx_1}{ds}\right)+\left(\varepsilon\frac{dx_1}{ds}\right)^2-\left(\varepsilon\frac{dx_1}{ds}\right)^3+\cdots$$

$$\left[s+\varepsilon(x_1+y_0)+\varepsilon^2 y_1\right]\left[\left(\frac{dy_0}{ds}+\varepsilon\frac{dy_1}{ds}\right)\left(1-\varepsilon\frac{dx_1}{ds}\right)\right]+y_0+\varepsilon y_1=0$$

ضریب ε^0 : $s\frac{dy_0}{ds}+y_0=0$

ضریب ε^1 : $(x_1+y_0)\frac{dy_0}{ds}+s\left(\frac{dy_1}{ds}-\frac{dy_0}{ds}\frac{dx_1}{ds}\right)+y_1=0 \longrightarrow s\frac{dy_1}{ds}+y_1=s\frac{dy_0}{ds}\frac{dx_1}{ds}-(x_1+y_0)\frac{dy_0}{ds}$

برای اعمال شرط مرزی $y(1)=1$ بایستی $s=\bar{s}$ ای را پیدا کنیم که به ازای آن $x(\bar{s})=1$ و $y(\bar{s})=1$.

$$x(\bar{s})=1$$
$$x(\bar{s})=\bar{s}+\varepsilon x_1(\bar{s})+\varepsilon^2 x_2(\bar{s})$$
$$1=\bar{s}+\varepsilon x_1(\bar{s})+\varepsilon^2 x_2(\bar{s})$$

برای یافتن $\bar{s}$ آن را با استفاده از پارامتر Perturbation حول 1 بسط می‌دهیم و بعد در رابطه جایگزاری می‌کنیم.

$$\bar{s} = 1 + \varepsilon \bar{s}_1 + \varepsilon^2 \bar{s}_2 + \dots$$

پیش از ادامه کار با یادآوری بسط تیلور، بسط تابع دلخواه $f(\bar{s})$ را حول 1 پیدا می‌کنیم.

$$\text{بسط تیلور}: f(z) = f(z_0) + \frac{(z-z_0)}{1!}\frac{df(z_0)}{dz} + \frac{(z-z_0)^2}{2!}\frac{d^2f(z_0)}{dz^2} + \dots$$

$$f(\bar{s}) = f(1) + \frac{(\varepsilon\bar{s}_1 + \varepsilon^2\bar{s}_2)}{1!}\frac{df(1)}{d\bar{s}} + \frac{(\varepsilon\bar{s}_1 + \varepsilon^2\bar{s}_2)^2}{2!}\frac{d^2f(1)}{d\bar{s}^2} + \dots$$

$$= f(1) + \varepsilon\bar{s}_1\frac{df(1)}{d\bar{s}} + \varepsilon^2[\dots]$$

$$1 = \bar{s} + \varepsilon x_1(\bar{s}) + \varepsilon^2 x_2(\bar{s})$$

$$1 = 1 + \varepsilon\bar{s}_1 + \varepsilon^2\bar{s}_2 + \varepsilon\left[x_1(1) + \varepsilon\bar{s}_1\frac{dx_1(1)}{d\bar{s}}\right] + \varepsilon^2\left[x_2(1) + \varepsilon\bar{s}_1\frac{dx_2(1)}{d\bar{s}}\right]$$

$$\text{ضریب } \varepsilon^1: \quad \bar{s}_1 = -x_1(1)$$

$$\text{ضریب } \varepsilon^2: \quad \bar{s}_2 = -\bar{s}_1\frac{dx_1(1)}{d\bar{s}} - x_2(1) = x_1(1)\frac{dx_1(1)}{d\bar{s}} - x_2(1)$$

$$y(\bar{s}) = 1$$

$$y(\bar{s}) = y_0(s) + \varepsilon y_1(s)$$

$$1 = y_0(s) + \varepsilon y_1(s)$$

$$1 = \left[y_0(1) + \varepsilon\bar{s}_1\frac{dy_0(1)}{d\bar{s}}\right] + \varepsilon\left[y_1(1) + \varepsilon\bar{s}_1\frac{dy_1(1)}{d\bar{s}}\right]$$

$$1 = y_0(1) - \varepsilon x_1(1)\frac{dy_0(1)}{d\bar{s}} + \varepsilon y_1(1) - \varepsilon^2 x_1(1)\frac{dy_1(1)}{d\bar{s}}$$

$$\text{ضریب } \varepsilon^0: \quad y_0(1) = 1$$

$$\text{ضریب } \varepsilon^1: \quad y_1(1) = x_1(1)\frac{dy_0(1)}{ds}$$

حال با داشتن شرایط مرزی به سراغ تعیین توابع می‌رویم.

$$s\frac{dy_0}{ds}+y_0=0$$
$$y_0(1)=1$$

$$s\frac{dy_0}{ds}=-y_0 \longrightarrow \frac{dy_0}{y_0}=-\frac{ds}{s} \longrightarrow \ln y_0=-\ln s+\ln c \longrightarrow y_0(s)=\frac{c}{s}$$

$$y_0(1)=1 \longrightarrow c=1$$

$$\Rightarrow y_0(s)=\frac{1}{s}$$

$$s\frac{dy_1}{ds}+y_1=s\frac{dy_0}{ds}\frac{dx_1}{ds}-(x_1+y_0)\frac{dy_0}{ds}$$
$$y_1(1)=x_1(1)\frac{dy_0(1)}{ds}$$

$$s\frac{dy_1}{ds}+y_1=s\frac{-1}{s^2}\frac{dx_1}{ds}-\left(x_1+\frac{1}{s}\right)\frac{-1}{s^2}=\frac{-1}{s}\frac{dx_1}{ds}+\frac{x_1}{s^2}+\frac{1}{s^3}=-\frac{d}{ds}\left(\frac{x_1}{s}+\frac{1}{2s^2}\right)$$

$$\frac{d}{ds}(sy_1)=-\frac{d}{ds}\left(\frac{x_1}{s}+\frac{1}{2s^2}\right)$$

$$sy_1=-\left(\frac{x_1}{s}+\frac{1}{2s^2}\right)+c$$

$$y_1=-\frac{x_1}{s^2}-\frac{1}{2s^3}+\frac{c}{s}$$

$$y_1(1)=x_1(1)\frac{dy_0(1)}{ds}=-x_1(1) \longrightarrow -x_1(1)=-x_1(1)-\frac{1}{2}+c \longrightarrow c=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y_1(s)=-\frac{x_1}{s^2}-\frac{1}{2s^3}+\frac{1}{2s}$$

$y_0(s)=\frac{1}{s}$ یک نقطه Singular در $s=0$ دارد و مرتبه این Singularity یک است. $x_1(s)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $y_1(s)$ نیز در $s=0$، Singular از مرتبه یک شود.

$$-\frac{x_1}{s^2}-\frac{1}{2s^3}=0 \longrightarrow \frac{x_1}{s^2}=\frac{-1}{2s^3} \longrightarrow x_1(s)=\frac{-1}{2s}$$

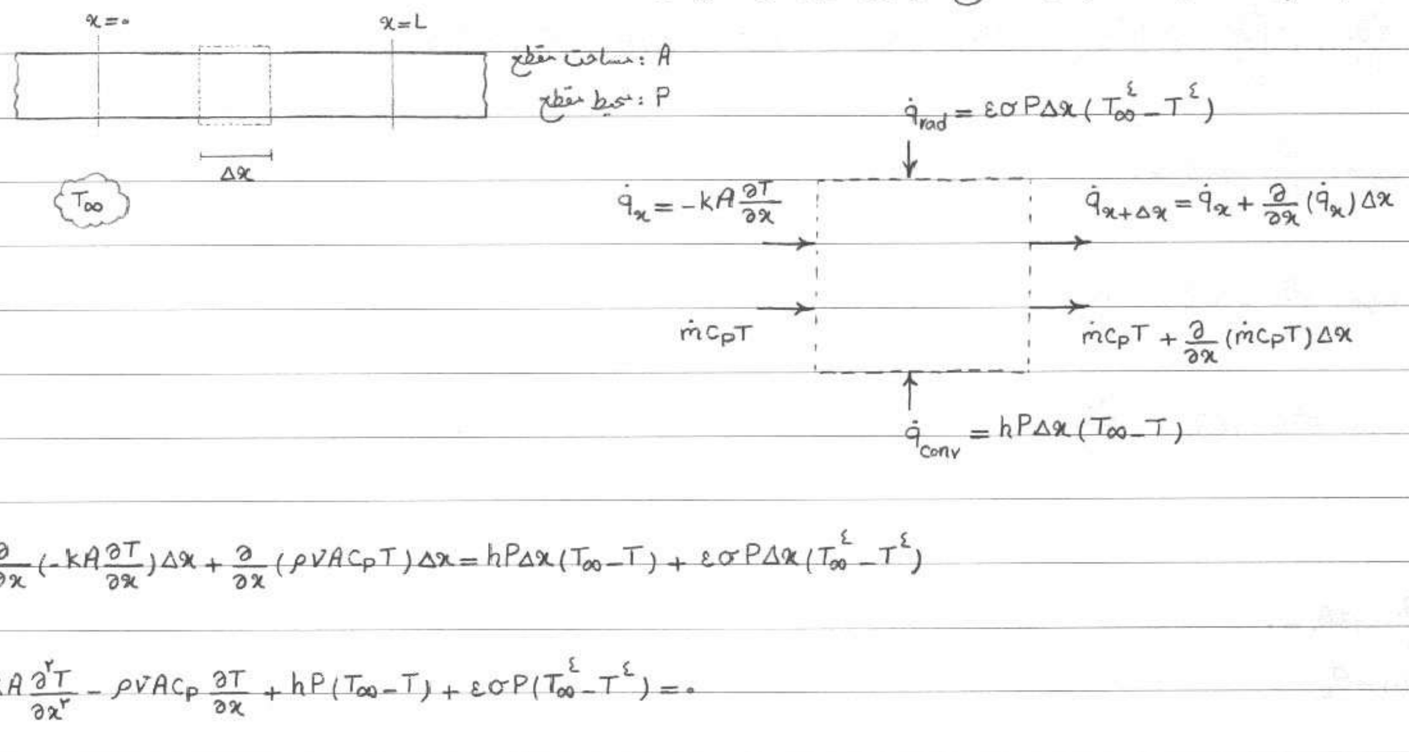
به این ترتیب جواب نهایی را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$x(S) = S + \varepsilon x_1(S) = S - \frac{\varepsilon}{2S}$$

$$y(S) = y_0(S) + \varepsilon y_1(S) = \frac{1}{S} + \frac{\varepsilon}{2S}$$

$$\text{Perturbation}\begin{cases} \text{regular} & (\text{ε روی بزرگترین مشتق قرار نگیرد}) \\ \text{Singular} & (\text{ε روی بزرگترین مشتق قرار گیرد}) \begin{cases} \text{Matched asymptotic expansion} \\ \text{Strained coordinate} \end{cases} \end{cases}$$

انتقال حرارت پایای یک بعدی همراه با تشعشع در عبور سیال از داخل لوله



$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-kA\frac{\partial T}{\partial x}\right)\Delta x + \frac{\partial}{\partial x}(\rho VAc_pT)\Delta x = hP\Delta x(T_\infty - T) + \varepsilon\sigma P\Delta x(T_\infty^4 - T^4)$$

$$kA\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \rho VAc_p\frac{\partial T}{\partial x} + hP(T_\infty - T) + \varepsilon\sigma P(T_\infty^4 - T^4) = 0$$

$$\frac{k}{\rho Vc_p}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial x} - (T - T_\infty)\left[hP + \varepsilon\sigma P(T^3 + T^2T_\infty + TT_\infty^2 + T_\infty^3)\right] = 0$$

با یک سری تغییر متغیر می‌توان این معادله را بی بعد کرد.

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_\infty} \quad ; \quad \theta_i = \frac{T(0) - T_\infty}{T_\infty} \quad ; \quad \theta_L = \frac{T(L) - T_\infty}{T_\infty}$$

$$\varepsilon = \frac{k}{\rho Vc_p}$$

$$S = 1 - \frac{x}{L}$$
$$\beta = \frac{2hLT_\infty}{\rho VRC}$$

و بنابراین معادله‌ای که بایستی حل شود به همراه شرایط مرزی آن به صورت زیر است:

$$\varepsilon \frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{d\theta}{ds} - \beta\theta = 0$$
$$\theta(0) = \theta_L$$
$$\theta(1) = \theta_i$$

از روش matching برای حل معادله استفاده می‌کنیم.

ناحیه اول : $S \to 0$

$$\theta(s) = \theta_0(s) + \varepsilon\theta_1(s) + \varepsilon^2\theta_2(s) + \dots$$

$$\varepsilon\left(\frac{d^2\theta_0}{ds^2} + \varepsilon\frac{d^2\theta_1}{ds^2} + \varepsilon^2\frac{d^2\theta_2}{ds^2}\right) + \left(\frac{d\theta_0}{ds} + \varepsilon\frac{d\theta_1}{ds} + \varepsilon^2\frac{d\theta_2}{ds}\right) - \beta(\theta_0 + \varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2) = 0$$

ضریب ε^0 : $\frac{d\theta_0}{ds} - \beta\theta_0 = 0 \qquad \theta_0(0) = \theta_L$

ضریب ε^1 : $\frac{d\theta_1}{ds} - \beta\theta_1 = -\frac{d^2\theta_0}{ds^2} \qquad \theta_1(0) = 0$

ضریب ε^2 : $\frac{d\theta_2}{ds} - \beta\theta_2 = -\frac{d^2\theta_1}{ds^2} \qquad \theta_2(0) = 0$

$$\frac{d\theta_0}{ds} - \beta\theta_0 = 0$$
$$\theta_0(0) = \theta_L$$

$$\frac{d\theta_0}{ds} = \beta\theta_0 \longrightarrow \frac{d\theta_0}{\theta_0} = \beta\, ds \longrightarrow \ln\theta_0 = \beta S + \ln C_1 \longrightarrow \theta_0 = C_1 e^{\beta S}$$
$$\theta_0(0) = \theta_L \longrightarrow C_1 = \theta_L$$
$$\Rightarrow \theta_0(s) = \theta_L e^{\beta S}$$

$$\frac{d\theta_1}{ds} - \beta\theta_1 = -\frac{d^2\theta_0}{ds^2}$$
$$\theta_1(0) = 0$$

$$\frac{d\theta_1}{ds} - \beta\theta_1 = -\theta_L \beta^2 e^{\beta s}$$

$$(D-\beta)\theta_1 = -\theta_L \beta^2 e^{\beta s}$$

$$\theta_1 = -\theta_L \beta^2 \frac{1}{D-\beta} e^{\beta s} = -\theta_L \beta^2 \frac{s e^{\beta s}}{1!} = -\theta_L \beta^2 s e^{\beta s}$$

$$\theta_1(s) = C_2 e^{\beta s} - \theta_L \beta^2 s e^{\beta s}$$

$$\theta_1(0) = 0 \longrightarrow C_2 = 0$$

$$\Rightarrow \theta_1(s) = -\theta_L \beta^2 s e^{\beta s}$$

چون $S \to 0$ معادل با $x \to L$ است ما این ناحیه را outer می‌نامیم. پس برای θ در این ناحیه داریم:

$$\theta_{outer}(s) = \theta_0(s) + \varepsilon\theta_1(s) = \theta_L e^{\beta s} - \theta_L \beta^2 s e^{\beta s} = \theta_L e^{\beta s}(1-\beta^2 s)$$

ناحیه دوم: $S \to 1$

$$\varepsilon \frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{d\theta}{ds} - \beta\theta = 0$$

$$\eta = s\varepsilon^{\alpha}$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{d\eta}\frac{d\eta}{ds} = \varepsilon^{\alpha}\frac{d\theta}{d\eta}$$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = \frac{d}{d\eta}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)\frac{d\eta}{ds} = \varepsilon^{2\alpha}\frac{d^2\theta}{d\eta^2}$$

$$\varepsilon^{2\alpha+1}\frac{d^2\theta}{d\eta^2} + \varepsilon^{\alpha}\frac{d\theta}{d\eta} - \beta\theta = 0$$

$$2\alpha+1=\alpha \longrightarrow \alpha=-1$$

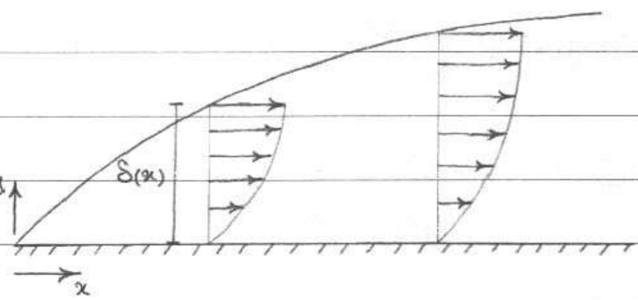
$$\varepsilon^{-1}\frac{d^2\theta}{d\eta^2}+\varepsilon^{-1}\frac{d\theta}{d\eta}-\beta\theta=0$$

$$\frac{d^2\theta}{d\eta^2}+\frac{d\theta}{d\eta}-\beta\varepsilon\theta=0$$

تکلیف شماره 11: حل ناحیه دوم را دنبال کرده و مسأله را تکمیل کنید.

جلسه بیست و یکم «سه شنبه ۲۴ آذر ۱۳۸۸»

Similarity Solution



$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u(x,y)\big|_{x=0}=U_\infty$$
$$u(x,y)\big|_{y=0}=0$$
$$u(x,y)\big|_{y\to\infty}=U_\infty$$

$$\frac{u}{U_\infty}=f'(\eta) \qquad ; \quad \eta=\frac{y}{\delta(x)}$$

یافتن $\delta(x)$ از Scale up: $\quad u\frac{\partial u}{\partial x}\sim\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$$U_\infty\frac{U_\infty}{x}\sim\nu\frac{U_\infty}{\delta^2(x)} \longrightarrow \delta(x)\sim\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$$

$$\Rightarrow \quad \eta=\frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}}$$

تعیین v از معادله پیوستگی: $\quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$

$$\int_0^y\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy=\int_0^y\frac{\partial u}{\partial x}dy+\left[v(x,y)-\cancel{v(x,0)}^{\,0}\right]=0$$

$$v(x,y)=-\int_0^y\frac{\partial u}{\partial x}dy=-\int_0^\eta\frac{du}{d\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial\eta}d\eta$$

$$\frac{du}{d\eta}=U_\infty f''(\eta)$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}}\right)=\frac{y}{\sqrt{\frac{\nu}{U_\infty}}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\frac{y}{\sqrt{\frac{\nu}{U_\infty}}}\left(\frac{-1}{2x\sqrt{x}}\right)=\frac{-1}{2x}\frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}}=\frac{-\eta}{2x}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}\,\eta\right) = \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$$

$$\Rightarrow v(x,y) = -\int_0^\eta \frac{du}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial \eta}\,d\eta = -\int_0^\eta U_\infty f''(\eta)\frac{-\eta}{2x}\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}\,d\eta = \frac{U_\infty}{2x}\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}\int_0^\eta \eta f''(\eta)\,d\eta$$

روش جزء به جزء : مشتقات : $\eta \quad 1 \quad 0$

انتگرال : $f'' \quad f' \quad f \longrightarrow \int \eta f''(\eta)\,d\eta = \eta f' - f$

$$v(x,y) = \frac{U_\infty}{2x}\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}\left(\eta f' - f\right)\Big]_0^\eta \xrightarrow{\text{فرض می‌کنیم } f(0)=0} v(x,y) = \frac{U_\infty}{2x}\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}\left(\eta f' - f\right)$$

جایگذاری در معادله اصلی : $u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$$u = U_\infty f'(\eta)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = U_\infty f''(\eta)\frac{-\eta}{2x}$$

$$v(x,y) = \frac{U_\infty}{2x}\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}\left(\eta f' - f\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{du}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = U_\infty f''(\eta)\frac{1}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{d}{d\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y} = U_\infty f'''(\eta)\frac{1}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}}\frac{1}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}} = U_\infty\frac{1}{\frac{\nu x}{U_\infty}}f'''(\eta)$$

$$\rightarrow U_\infty f'(\eta)\times U_\infty f''(\eta)\frac{-\eta}{2x} + \frac{U_\infty}{2x}\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}\left(\eta f' - f\right)\times U_\infty f''(\eta)\frac{1}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}} = \nu U_\infty\frac{1}{\frac{\nu x}{U_\infty}}f'''(\eta)$$

$$-U_\infty^2\frac{\eta}{2x}f'f'' + U_\infty^2\frac{\eta}{2x}f'f'' - U_\infty^2\frac{1}{2x}ff'' = U_\infty^2\frac{1}{x}f'''$$

$$f''' + \frac{1}{2}ff'' = 0$$

بررسی شرایط مرزی

$\eta = \dfrac{y}{\sqrt{\dfrac{\nu x}{U_\infty}}}$ $\qquad u = U_\infty f'(\eta) \qquad v = \dfrac{U_\infty}{2x}\sqrt{\dfrac{\nu x}{U_\infty}}\,(\eta f' - f)$

$x = 0 \longrightarrow u = U_\infty$ معادل است با $\eta \to \infty \longrightarrow f'(\eta) = 1$

$y = 0 \longrightarrow u = 0$ معادل است با $\eta = 0 \longrightarrow f'(\eta) = 0$

$y \to \infty \longrightarrow u = U_\infty$ معادل است با $\eta \to \infty \longrightarrow f'(\eta) = 1$

همانطور که می‌بینیم شرط مرزی اول و سوم به یک نتیجه منجر می‌شوند، اما اگر توجه کنیم در خلال حل برای سادگی فرض کردیم $f(0)=0$. این فرض تأثیری در پروفیل سرعت u که از مشتق f بدست می‌آید ($u = U_\infty f'(\eta)$)، نخواهد داشت. زیرا تغییر این شرط تنها یک عدد ثابت به f اضافه می‌کند که در f' حذف می‌شود.

بنابراین نهایتاً مسئله تبدیل می‌شود به:

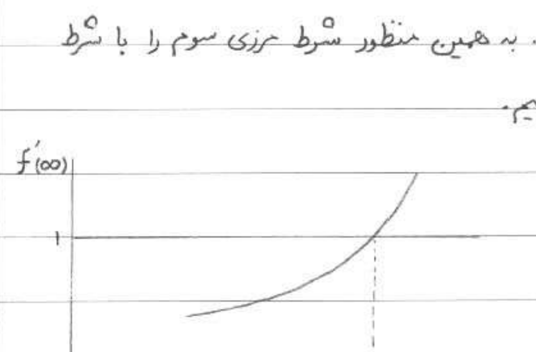
$$f'''(\eta) + \frac{1}{2} f(\eta) f''(\eta) = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 0$$

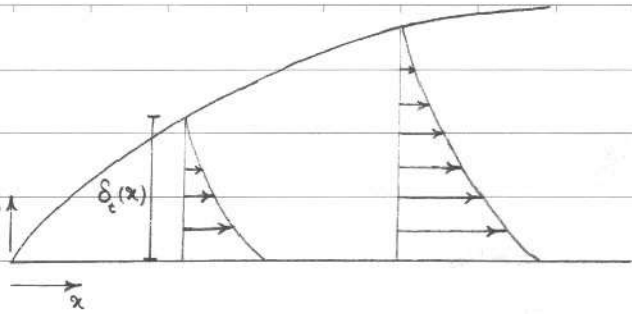
$$\lim_{\eta \to \infty} f'(\eta) = 1$$

این مسئله یک ODE از نوع BVP است که برای حل بایستی آن را به IVP تبدیل کنیم. به همین منظور شرط مرزی سوم را با شرط $f''(0) = A$ جایگزین می‌کنیم. با امتحان کردن مقادیر مختلف برای A نمودار زیر را می‌کشیم.



واضح است که $A_{\text{مطلوب}}$ مقداری است که به ازای آن $\lim_{\eta \to \infty} f'(\eta) = 1$ باشد.

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$



$$T(x,y)\big|_{x=0}=T_\infty$$

$$T(x,y)\big|_{y=0}=T_w$$

$$T(x,y)\big|_{y\to\infty}=T_\infty$$

$$\frac{u}{U_\infty}=f'(\eta) \qquad \eta=\frac{y}{\delta(x)}$$

$$\frac{T-T_w}{T_\infty-T_w}=\theta(\eta)$$

از مثال قبل $\delta(x)$: $\quad \delta(x)\sim\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$

از مثال قبل $v(x,y)$: $\quad v(x,y)=\frac{U_\infty}{2x}\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}\,(\eta f'-f)$

جایگذاری در معادله اصلی: $\quad u\frac{\partial\theta}{\partial x}+v\frac{\partial\theta}{\partial y}=\alpha\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}$

$$u=U_\infty f'(\eta)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{d\theta}{d\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\theta'\frac{-\eta}{2x}$$

$$v=\frac{U_\infty}{2x}\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}\,(\eta f'-f)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{d\theta}{d\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=\theta'\frac{1}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}}$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)\frac{\partial\eta}{\partial y}=\theta''\frac{1}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}}\frac{1}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}}=\theta''\frac{1}{\frac{\nu x}{U_\infty}}$$

$$\rightarrow\ U_\infty f'\theta'\frac{-\eta}{2x}+\frac{U_\infty}{2x}\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}\,(\eta f'-f).\theta'\frac{1}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}}=\alpha\frac{U_\infty}{\nu x}\theta''$$

$$-\frac{\eta}{2}f'\theta'+\frac{\eta}{2}f'\theta'-\frac{1}{2}f\theta'=\frac{\alpha}{\nu}\theta''$$

$$\Rightarrow \theta'' + \frac{Pr}{2} f \theta' = 0$$

بررسی شرایط مرزی

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}} \qquad \theta(\eta) = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w}$$

$x = 0 \longrightarrow \theta = 1$	معادل است با	$\eta \to \infty \longrightarrow \theta(\eta) = 1$
$y = 0 \longrightarrow \theta = 0$	معادل است با	$\eta = 0 \longrightarrow \theta(\eta) = 0$
$y \to \infty \longrightarrow \theta = 1$	معادل است با	$\eta \to \infty \longrightarrow \theta(\eta) = 1$

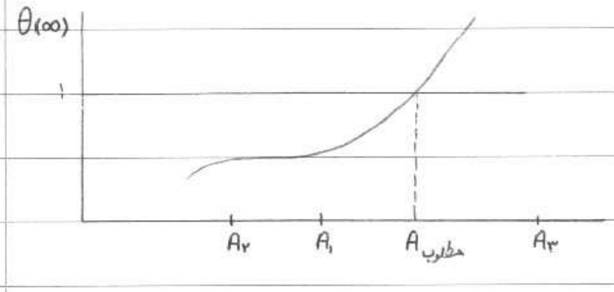
باز هم شرط اول و سوم یکی هستند. اما توجه می‌کنیم که چون معادله درجه دو است تنها دو شرط برای حل آن نیاز داریم.
بنابراین نهایتاً مسئله تبدیل می‌شود به مسئله زیر که در آن f تابعی معلوم است و از حل مثال قبل بدست می‌آید.

$$\theta''(\eta) + \frac{Pr}{2} f(\eta)\theta'(\eta) = 0$$

$$\theta(0) = 0$$

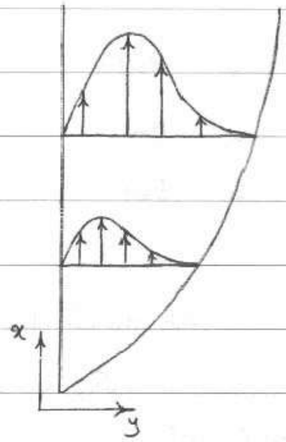
$$\theta(\eta) = 1$$
$$\eta \to \infty$$

با فرض $\theta'(0) = A$ ، از طریق نمودار زیر می‌توان جواب مسئله را تعیین کرد.



در جابه‌جایی آزاد معادله ممنتوم و انرژی با هم کوپل هستند و برای یافتن توزیع سرعت و توزیع دما، بایستی هر دو را با هم حل کرد.

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(T-T_\infty)$$



$$u(x,y)\big|_{x=0} = 0$$

$$u(x,y)\big|_{y=0} = 0$$

$$u(x,y)\big|_{y\to\infty} = 0$$

$$\frac{u}{U_{ref}} = f'(\eta) \qquad , \quad \eta = \frac{y}{\delta(x)}$$

$$\frac{T-T_\infty}{T_w-T_\infty} = \frac{T-T_\infty}{\Delta T} = \theta(\eta) \qquad , \quad (\Delta T = T_w - T_\infty)$$

یافتن $\delta(x)$ از scale up: $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim g\beta(T-T_\infty)$

$$\frac{\nu u}{\delta^2} \sim g\beta\Delta T \longrightarrow u \sim \frac{g\beta\Delta T\delta^2}{\nu}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} \sim \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{u^2}{x} \sim \frac{\nu u}{\delta^2} \longrightarrow u \sim \frac{\nu x}{\delta^2}$$

$$\Rightarrow \frac{g\beta\Delta T\delta^2}{\nu} \sim \frac{\nu x}{\delta^2} \longrightarrow \delta^4 \sim \frac{\nu^2 x}{g\beta\Delta T}$$

$$A^4 = \frac{\nu^2}{g\beta\Delta T} \longrightarrow \delta(x) \sim A x^{0.25}$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{y}{\delta(x)} = \frac{y}{A x^{0.25}} = \frac{1}{A} y x^{-0.25}$$

$$U_{ref} = \frac{g\beta\Delta T}{\nu}\delta^2 = \frac{g\beta\Delta T}{\nu}A^2 x^{0.5} = \frac{g\beta\Delta T}{\nu}\frac{\nu}{\sqrt{g\beta\Delta T}}x^{0.5} = \sqrt{g\beta\Delta T}\, x^{0.5} = \sqrt{g\beta\Delta T x}$$

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$: تعیین v از معادله پیوستگی

$$\int_0^y \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy = \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}\, dy + \left[v(x,y) - \cancel{v(x,0)}^{\,0}\right] = 0$$

$$v(x,y) = -\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}\, dy = -\int_0^y \frac{\partial}{\partial x}(U_{ref} f')\, dy = -\int_0^y \frac{\partial U_{ref}}{\partial x} f'\, dy - \int_0^y U_{ref} \frac{\partial f'}{\partial x}\, dy$$

$$= -\frac{U_{ref}}{2x} \int_0^\eta f' \frac{\partial y}{\partial \eta}\, d\eta - U_{ref} \int_0^\eta \frac{\partial f'}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial \eta}\, d\eta$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \delta(x) = A x^{0/25}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{A} y (-0/25) x^{-1/25} = -\frac{1}{4x} \frac{1}{A} y x^{-0/25} = -\frac{\eta}{4x}$$

$$v(x,y) = -\frac{U_{ref}}{2x} A x^{0/25} \int_0^\eta f'(\eta)\, d\eta - U_{ref} \frac{-1}{4x} A x^{0/25} \int_0^\eta \eta f''(\eta)\, d\eta$$

: روش جزء به جزء

: مشتقات	η	1	0
: انتگرال	f''	f'	f

$(+)\;\; (-)$ $\longrightarrow \int \eta f''(\eta)\, d\eta = \eta f' - f$

$$v(x,y) = \frac{-U_{ref}}{2x} A x^{0/25} f \Big]_0^\eta + \frac{U_{ref}}{4x} A x^{0/25} (\eta f' - f)\Big]_0^\eta$$

باز هم با فرض $f(0)=0$ و توجه به این نکته که $u(x,0) = U_{ref} f'(0) = 0$ ، می‌رسیم به :

$$v(x,y) = \frac{U_{ref}}{4x}(-3f + \eta f') A x^{0/25}$$

با جایگزاری در معادله اصلی ،

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(T - T_\infty)$$

$$u = U_{ref} f'(\eta)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(U_{ref} f') = \frac{\partial U_{ref}}{\partial x} f' + U_{ref} \frac{\partial f'}{\partial x} = \frac{U_{ref}}{2x} f' + U_{ref} f'' \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{U_{ref}}{2x} f'(\eta) + U_{ref} f''(\eta) \frac{-\eta}{4x}$$

$$v=\frac{U_{ref}}{4x}(-3f+\eta f')Ax^{0.25}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{du}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=U_{ref}f''\frac{1}{Ax^{0.25}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y}=U_{ref}f'''\frac{1}{A^2x^{0.5}}$$

$$g\beta(T-T_\infty)=g\beta\Delta T\,\theta(\eta)$$

$$\rightarrow\ U_{ref}f'\frac{U_{ref}}{2x}f'+U_{ref}f'U_{ref}f''\frac{-\eta}{4x}+\frac{U_{ref}}{4x}(-3f+\eta f')Ax^{0.25}U_{ref}f''\frac{1}{Ax^{0.25}}=\nu U_{ref}f'''\frac{1}{A^2x^{0.5}}+g\beta\Delta T\theta$$

$$U_{ref}^2\frac{1}{2x}f'^2-U_{ref}^2\frac{1}{4x}ff''+U_{ref}^2\frac{1}{4x}(-3f+\eta f')f''=\nu U_{ref}\frac{1}{\frac{\nu}{\sqrt{g\beta\Delta T}}x^{0.5}}f'''+g\beta\Delta T x\frac{1}{x}\theta$$

$$U_{ref}^2\frac{1}{2x}f'^2-U_{ref}^2\frac{3}{4x}ff''=U_{ref}^2\frac{1}{x}f'''+U_{ref}^2\frac{1}{x}\theta$$

$$\frac{1}{2}f'^2-\frac{3}{4}ff''=f'''+\theta$$

$$\Rightarrow\ f'''+\frac{3}{4}ff''-\frac{1}{2}f'^2+\theta=0$$

بخش دوم: معادله انرژی

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

$$T(x,y)|_{x=0}=T_\infty$$
$$T(x,y)|_{y=0}=T_w$$
$$T(x,y)|_{y\to\infty}=T_\infty$$

$$\frac{u}{U_{ref}}=f'(\eta)\qquad,\qquad \eta=\frac{y}{\delta(x)}$$

از بخش قبل $U_{ref}(x)$: $U_{ref}(x)=\sqrt{g\beta\Delta T x}$

$$\frac{T-T_\infty}{T_w-T_\infty}=\frac{T-T_\infty}{\Delta T}=\theta(\eta)$$

از بخش قبل $\delta(x)$: $\delta(x)=\left(\frac{\nu^2 x}{g\beta\Delta T}\right)^{\frac{1}{4}}=Ax^{0.25}$

از بخش قبل $V(x,y)$: $V(x,y)=\frac{U_{ref}}{4x}(-3f+\eta f')Ax^{0.25}$

با جایگذاری در معادله اصلی ،

$$u\frac{\partial\theta}{\partial x}+v\frac{\partial\theta}{\partial y}=\alpha\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}$$

$$u=U_{ref}\,f'$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{d\theta}{d\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\theta'\,\frac{-\eta}{4x}$$

$$V=\frac{U_{ref}}{4x}(-3f+\eta f')Ax^{0.25}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{d\theta}{d\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=\theta'\,\frac{1}{Ax^{0.25}}$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)\frac{\partial\eta}{\partial y}=\theta''\,\frac{1}{A^2x^{0.5}}$$

$$\longrightarrow\ U_{ref}\,f'\theta'\frac{-\eta}{4x}+\frac{U_{ref}}{4x}(-3f+\eta f')Ax^{0.25}\,\theta'\,\frac{1}{Ax^{0.25}}=\alpha\theta''\,\frac{1}{A^2x^{0.5}}$$

$$-\frac{3}{4x}U_{ref}\,f\theta'=\alpha\theta''\,\frac{1}{\frac{\nu}{\sqrt{g\beta\Delta T}}x^{0.5}}$$

$$-\frac{3}{4x}U_{ref}\,f\theta'=\frac{\alpha}{\nu}\sqrt{g\beta\Delta T x}\;\frac{1}{x}\,\theta''$$

$$-\frac{3}{4x}U_{ref}\,f\theta'=\frac{1}{P_r}U_{ref}\,\frac{1}{x}\theta''$$

$$\Rightarrow\ \theta''+\frac{3}{4}Pr\,f\theta'=0$$

بررسی شرایط مرزی :

$$\eta = \frac{y}{A x^{0.25}} \quad , u = U_{ref} f'(\eta) \quad , \theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}$$

$x = 0 \longrightarrow u = 0$ معادل است با $\eta \to \infty \longrightarrow f'(\eta) = 0$

$y = 0 \longrightarrow u = 0$ 〃 $\eta = 0 \longrightarrow f'(\eta) = 0$

$y \to \infty \longrightarrow u = 0$ 〃 $\eta \to \infty \longrightarrow f'(\eta) = 0$

$x = 0 \longrightarrow T = T_\infty$ معادل است با $\eta \to \infty \longrightarrow \theta(\eta) = 0$

$y = 0 \longrightarrow T = T_w$ 〃 $\eta = 0 \longrightarrow \theta(\eta) = 1$

$y \to \infty \longrightarrow T = T_\infty$ 〃 $\eta \to \infty \longrightarrow \theta(\eta) = 0$

با یادآوری شرط $f(0) = 0$ ، نهایتاً مسأله به صورت زیر فرمول بندی می‌شود :

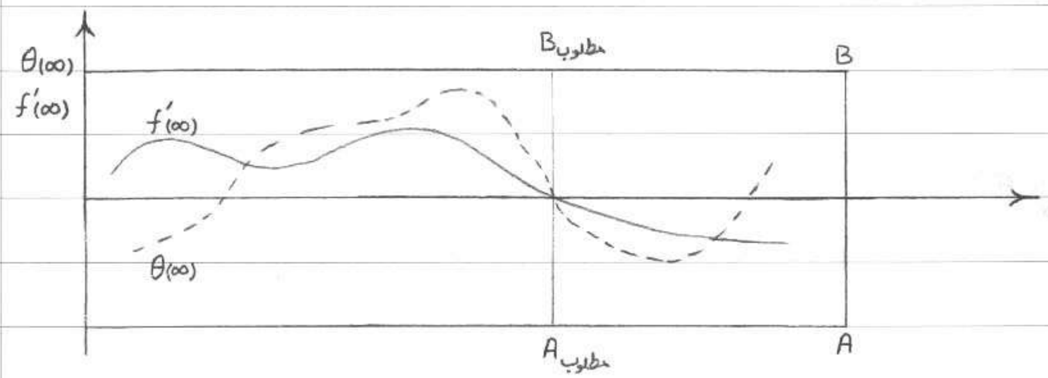
$$f''' + \frac{3}{4} f f'' - \frac{1}{2} f'^2 + \theta = 0 \qquad \theta'' + \frac{3}{4} Pr f \theta' = 0$$

$f(0) = 0$ $\qquad$ $\theta(0) = 1$

$f'(0) = 0$ $\qquad$ $\theta(\infty) = 0$

$f'(\infty) = 0$

با فرض $f''(0) = A$ و $\theta'(0) = B$ ، از طریق نمودار زیر می‌توان جواب مسأله را تعیین کرد :



free parameters method

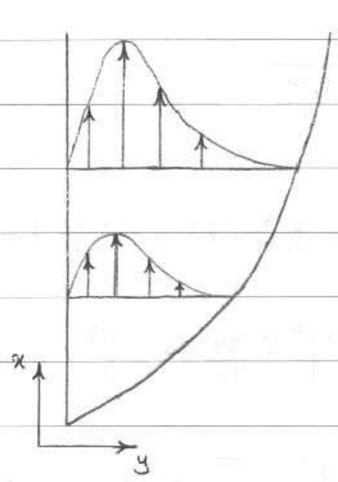
$$\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) f'(\eta)$$

$$\eta = \eta(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$$

متغیری که شرایط مرزی زیادی دارد.

مثال:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = g\beta(T - T_\infty) + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$



$$u(x,y) \equiv \phi$$

$$\text{شرایط مرزی} \begin{cases} u(x,y)\big|_{x=0} = 0 \\ u(x,y)\big|_{y=0} = 0 \\ u(x,y)\big|_{y\to\infty} = 0 \end{cases}$$

چون شرایط مرزی روی متغیر y بیشتر است،

$$u(x,y) = \psi(x) f'(\eta)$$

$$\eta = \eta(x,y)$$

تعیین v از معادله پیوستگی: $V = -\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy = -\int_0^y \frac{\partial}{\partial x}(\psi f') dy = -\int_0^y \left(f'\frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi\frac{\partial f'}{\partial x}\right) dy$

$$= -\int_0^\eta f'\frac{d\psi}{dx}\frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta - \int_0^\eta \psi\frac{df'}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta$$

$$= -\frac{d\psi}{dx}\int_0^\eta f'\frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta - \int_0^\eta \psi f''\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta$$

با جایگذاری در معادله،

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = g\beta(T - T_\infty) + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$(\psi f')\left(f'\frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi\frac{\partial f'}{\partial x}\right) + v\left(\psi f''\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) = g\beta\Delta T\theta + \nu\frac{\partial}{\partial y}\left(\psi f''\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)$$

$$\psi f'\left(f'\psi' + \psi f''\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) + v\left(\psi f''\frac{\partial\eta}{\partial y}\right) = g\beta\Delta T\,\theta + \underbrace{\nu\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\psi f''\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\frac{\partial\eta}{\partial y}}_{\nu\psi f'''\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2}$$

با تقسیم طرفین بر $\psi\psi'$ ،

$$f'\left(f' + \frac{\psi}{\psi'}f''\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) + \frac{v}{\psi'}f''\frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{g\beta\Delta T\theta}{\psi\psi'} + \frac{\nu}{\psi'}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 f''' \qquad (*)$$

برای وجود حل Similarity : $\frac{\nu}{\psi'}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 = c_1$

$$\frac{\partial\eta}{\partial y} = \sqrt{\frac{c_1\psi'}{\nu}} \longrightarrow \eta = \sqrt{\frac{c_1\psi'}{\nu}}\,y + \cancel{c} \qquad \eta(x,y)|_{y=0} = 0$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = \sqrt{\frac{c_1}{\nu}}\,y\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{\psi'}\right) = \sqrt{\frac{c_1}{\nu}}\,y\,\frac{1}{2}\psi''(\psi')^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c_1\psi'}{\nu}}\,y\,\psi''(\psi')^{-1} = \frac{\eta}{2}\frac{\psi''}{\psi'}$$

$$v = -\psi'\int_0^\eta f'\frac{\partial y}{\partial\eta}d\eta - \int_0^\eta \psi f''\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial\eta}d\eta = -\psi'\int_0^\eta f'\frac{1}{\frac{\partial\eta}{\partial y}}d\eta - \int_0^\eta \psi f''\frac{\eta}{2}\frac{\psi''}{\psi'}\frac{1}{\frac{\partial\eta}{\partial y}}d\eta$$

$$= -\psi'\int_0^\eta \sqrt{\frac{\nu}{c_1\psi'}}\,f'\,d\eta - \int_0^\eta \psi f''\sqrt{\frac{\nu}{c_1\psi'}}\,\frac{\eta}{2}\frac{\psi''}{\psi'}d\eta$$

$$= -\psi'\sqrt{\frac{\nu}{c_1\psi'}}\,f - \frac{\psi\psi''}{2\psi'}\sqrt{\frac{\nu}{c_1\psi'}}\int_0^\eta \eta f''\,d\eta$$

توجه شود که برای بدست آوردن آخرین خط فرض کرده‌ایم $f(0)=0$ ، حال با استفاده از روش جزء به جزء ،

$$v = -\psi'\sqrt{\frac{\nu}{c_1\psi'}}\,f - \frac{\psi\psi''}{2\psi'}\sqrt{\frac{\nu}{c_1\psi'}}\left(\eta f' - f\right)$$

حال با جایگذاری در $(*)$ ،

$$f'^2 + \frac{\psi}{\psi'}f'f''\left(\frac{\eta}{2}\frac{\psi''}{\psi'}\right) - \frac{1}{\psi'}\left[\psi'\sqrt{\frac{\nu}{c_1\psi'}}\,f + \frac{\psi\psi''}{2\psi'}\sqrt{\frac{\nu}{c_1\psi}}\left(\eta f' - f\right)\right]f''\sqrt{\frac{c_1\psi'}{\nu}} = \frac{g\beta\Delta T\theta}{\psi\psi'} + \frac{\nu}{\psi'}\left(\frac{c_1\psi'}{\nu}\right)f'''$$

$$f'^2 + \frac{\psi}{\psi'}\frac{\psi''}{\psi'}\frac{\eta}{2}f'f'' - ff'' - \frac{\psi\psi''}{2\psi'^2}\left(\eta f' - f\right)f'' = \frac{g\beta\Delta T\theta}{\psi\psi'} + c_1 f'''$$

$$f'^2 - ff'' + \frac{\psi\psi''}{2\psi'^2}ff'' = \frac{g\beta\Delta T\theta}{\psi\psi'} + c_1 f'''$$

$$f'^2 - \left(1 - \frac{\varphi\varphi''}{2\varphi'^2}\right) f f'' = \frac{g\beta\Delta T\theta}{\varphi\varphi'} + C_1 f'''$$

Similarity برای وجود حل : $1 - \frac{\varphi\varphi''}{2\varphi'^2} = C_2$

$$1 - C_2 = \frac{\varphi}{2\varphi'}\frac{\varphi''}{\varphi'} \longrightarrow 2(1-C_2)\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\varphi''}{\varphi'} \longrightarrow 2(1-C_2)\,\mathrm{Ln}\,\varphi = \mathrm{Ln}\,\varphi' - \mathrm{Ln}\,C_3$$

$$\mathrm{Ln}\,\varphi^{2(1-C_2)} = \mathrm{Ln}(C_3\varphi') \longrightarrow C_3\varphi' = \varphi^{2(1-C_2)} \longrightarrow C_3\frac{\varphi'}{\varphi^{2(1-C_2)}} = 1$$

$$C_3\varphi'\varphi^{2C_2-2} = 1$$

$$C_2 \neq \frac{1}{2} \rightarrow \frac{C_3}{2C_2-1}\varphi^{2C_2-1} = x + C_4$$

$$\varphi^{2C_2-1} = \left(\frac{2C_2-1}{C_3}\right)x + \left(\frac{2C_2-1}{C_3}\right)C_4$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = (C_5 x + C_6)^n$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \rightarrow C_3\,\mathrm{Ln}\,\varphi = x + C_4$$

$$\varphi = e^{\left(\frac{x}{C_3} + \frac{C_4}{C_3}\right)} = e^{\frac{C_4}{C_3}}\, e^{\frac{1}{C_3}x}$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = C_5\, e^{C_6 x}$$

گزارش ۴ یکشنبه قبل از امتحان تحویل داده شود.

جلسه بیست و سوم «سه‌شنبه ۸ دی ۱۳۸۸»

حل مسائل امتحان میان‌ترم

۱- حل تقریبی معادله زیر را با دقت درجه سه بکمک روش ریتز بدست آورید (a، b و c مقادیر ثابتی می‌باشند).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - au^2 - bu + c = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0) = 0 \qquad , \; u(1) = 0$$

ابتدا فرم پروفیل ریتز را تعیین می‌کنیم.

$$u(y) = Ay^2 + By + C$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0) = 2Ay + B \Big|_{y=0} = B = 0$$

$$u(1) = 0 \longrightarrow Ay^2 + C\Big|_{y=1} = 0 \longrightarrow A + C = 0 \longrightarrow C = -A$$

$$\Rightarrow u(y) = A(y^2 - 1)$$

پروفیل ریتز درجه سه $\begin{cases} u(y) = (1-y^2)(a_0 + a_1 y^2 + a_2 y^4) \\ \qquad\qquad\text{یا} \\ u(y) = a_0(1-y^2) + a_1(1-y^2)^2 + a_2(1-y^2)^3 \end{cases}$

توجه شود که ضریب y^3 در پروفیل ریتز نوع اول صفر بوده و عملاً پروفیل با تعیین ضریب y^4 درجه سه می‌شود. این مطلب به دلیل تقارن موجود در معادله و البته تجربه و حس فیزیکی است و در صورتی که ضریب y^3 را وارد مسأله می‌کردیم، پس از انجام محاسبات صفر می‌شد.

حال سعی می‌کنیم با حذف ضریب ترم خطی در معادله، مسأله را کمی ساده‌تر کنیم.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - au^2 - bu + c = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - a\left(u^2 + \frac{b}{a}u + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \frac{b^2}{4a} + c = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-a\left(u+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{b^2+4ac}{4a}=0$$

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-a^2\left(u+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{b^2+4ac}{4}=0$$

تغییر متغیر : $W=a\left(u+\frac{b}{2a}\right)$, $m=\frac{b^2+4ac}{4}$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}-W^2+m=0$$

$$u=a_0(1-y^2)+a_1(1-y^2)^2+a_2(1-y^2)^3$$

$$W=\underbrace{aa_0}_{A_0}(1-y^2)+\underbrace{aa_1}_{A_1}(1-y^2)^2+\underbrace{aa_2}_{A_2}(1-y^2)^3+\frac{b}{2}$$

$$\delta I=\int_0^1\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}-W^2+m\right)\delta W\,dy=0$$

در این مرحله با قرار دادن پروفیل $W(y)$ در انتگرال و انجام محاسبات لازم، می‌توان ضرایب A_0 ، A_1 و A_2 را یافت. اما مناسب‌تر است که برای ساده‌تر شدن کار، تغییر متغیر زیر را نیز انجام دهیم.

$$\eta=1-y^2$$

$$W(\eta)=A_0\eta+A_1\eta^2+A_2\eta^3+\frac{b}{2}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial y}=-2y=-2\sqrt{1-\eta}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y}=\frac{\partial W}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=\left(-2\sqrt{1-\eta}\right)\frac{\partial W}{\partial\eta}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(-2\sqrt{1-\eta}\right)\frac{\partial W}{\partial\eta}\right]\left(-2\sqrt{1-\eta}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{1-\eta}}\frac{\partial W}{\partial\eta}-2\sqrt{1-\eta}\,\frac{\partial^2 W}{\partial\eta^2}\right)\left(-2\sqrt{1-\eta}\right)$$

$$=-2\frac{\partial W}{\partial\eta}+4(1-\eta)\frac{\partial^2 W}{\partial\eta^2}$$

$$\longrightarrow \delta I = \int_0^1 \left[4(1-\eta)\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial w}{\partial \eta} - w^2 + m \right] \delta w \, d\eta \, \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{1-\eta}} \left[4(1-\eta)\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial w}{\partial \eta} - w^2 + m \right] \delta w \, d\eta$$

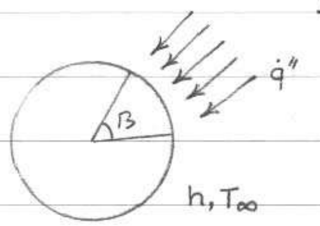
$$\Rightarrow \quad w(\eta) = A_0 \eta + A_1 \eta^2 + A_2 \eta^3 + \frac{b}{2}$$

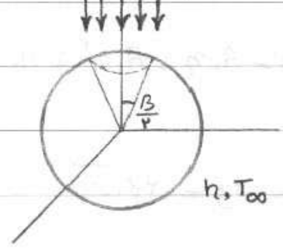
$$\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{1-\eta}} \left[4(1-\eta)\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial w}{\partial \eta} - w^2 + m \right] (\delta A_0 \eta + \delta A_1 \eta^2 + \delta A_2 \eta^3) \, d\eta = 0$$

با ادامه دادن حل می‌توان ضرایب A_0 ، A_1 و A_2 را تعیین کرد.

***

۲- بخشی از یک کره با دمای اولیه T_0 تحت شار حرارتی ثابت $\dot{q}''$ قرار می‌گیرد. توزیع دمای کره را بدست آورید. دمای محیط T_∞ و ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی بین کره و محیط اطراف h می‌باشد. شعاع کره r_0 است.





با انتخاب مناسب محور مختصات و استفاده از تقارن مسأله می‌توان وابستگی به φ را در مختصات کروی (r, θ, φ) حذف کرد.

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial T}{\partial \theta}\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\mu = \cos\theta$$

$$u = \sqrt{r}\, T$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{4}\frac{u}{r^2} + \frac{\partial}{r^2 \partial \mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial u}{\partial \mu}\right] = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$u = R(r)\,M(\mu)\,T(t)$$

$$\frac{1}{R}\left(\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}-\frac{1}{4}\frac{R}{r^2}\right)+\frac{1}{Mr^2}\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dM}{d\mu}\right]=\underbrace{\frac{1}{\alpha T}\frac{dT}{dt}}_{-\lambda^2}$$

$$\frac{1}{\alpha T}\frac{dT}{dt}=-\lambda^2 \qquad \Rightarrow \qquad T(t)=C_0 e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

$$\frac{1}{R}\left(\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}-\frac{1}{4}\frac{R}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{1}{M}\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dM}{d\mu}\right]=-\lambda^2$$

$$\underbrace{\frac{r^2}{R}\left(\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}-\frac{R}{4r^2}+\lambda^2 r^2\right)}_{n(n+1)}+\frac{1}{M}\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dM}{d\mu}\right]=0$$

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}-\frac{R}{4r^2}+\lambda^2 r^2=n(n+1)\frac{R}{r^2}$$

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\left[\lambda^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{r^2}\right]R=0 \qquad \Rightarrow \qquad R(r)=C_1 J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r)+C_2 Y_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r)$$

$$\frac{1}{M}\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dM}{d\mu}\right]=-n(n+1)$$

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dM}{d\mu}\right]+n(n+1)M=0$$

$$(1-\mu^2)M''-2\mu M'+n(n+1)M=0 \qquad \Rightarrow \qquad M(\mu)=C_3 P_n(\mu)+C_4 Q_n(\mu)$$

برای حل مسأله نیاز به دو شرط مرزی بر روی r ، دو شرط مرزی بر روی μ و یک شرط مرزی بر روی t داریم.

$$T(r,\theta,t)\big|_{t=0}=T_0$$

$$T(r,\theta,t)\big|_{r=0}=\text{finite}$$

$$T(r,\theta,t)\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\text{finite}$$

$$\begin{cases} -k\dfrac{\partial T}{\partial r}+h(T_\infty-T)+\dot{q}''=0 & ,\ r=r_0\ ,\quad 0\leqslant\theta<\dfrac{\beta}{2} \\[2ex] -k\dfrac{\partial T}{\partial r}+h(T_\infty-T)=0 & ,\ r=r_0\ ,\quad \dfrac{\beta}{2}<\theta<\pi \end{cases}$$

توجه شود که شرط مرزی چهارم، هم یک شرط مرزی برای r و هم یک شرط مرزی برای θ حساب می‌شود. حال این شرایط مرزی را به شرایط مرزی مورد نیاز برای تغییر متغیرهای صورت گرفته، تبدیل می‌کنیم.

$$\mu=\cos\theta$$

$$u=\sqrt{r}\,T$$

$$u(r,\mu,t)\big|_{t=0}=\sqrt{r}\,T_0$$

$$u(r,\mu,t)\big|_{r=0}=finite$$

$$u(r,\mu,t)\big|_{\mu=0}=finite$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}=\frac{\partial(ur^{-\frac{1}{2}})}{\partial r}=-\frac{1}{2}ur^{-\frac{3}{2}}+\frac{\partial u}{\partial r}r^{-\frac{1}{2}}$$

$$-k\frac{\partial T}{\partial r}+h(T_\infty-T)+\dot{q}''=-k\left[-\frac{1}{2}ur^{-\frac{3}{2}}+\frac{\partial u}{\partial r}r^{-\frac{1}{2}}\right]+h(T_\infty-ur^{-\frac{1}{2}})+\dot{q}''=0$$

$$-k\left[-\frac{1}{2}\frac{u}{r}+\frac{\partial u}{\partial r}\right]+h(T_\infty\sqrt{r}-u)+\dot{q}''\sqrt{r}=0$$

$$\longrightarrow\ k\frac{\partial u}{\partial r}+\left(h-\frac{k}{2r}\right)u=(hT_\infty+\dot{q}'')\sqrt{r}\qquad ,\ r=r_0$$

بنابراین شرط مرزی آخر نیز به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\frac{\partial u}{\partial r}+Hu=f(\theta)\qquad ,\ r=r_0$$

$$H=\frac{h}{k}-\frac{1}{2r_0}\qquad ,\ f(\theta)=\begin{cases}\left(\dfrac{hT_\infty}{k}+\dfrac{\dot{q}''}{k}\right)\sqrt{r_0} & 0\leqslant\theta<\dfrac{\beta}{2}\\[2ex] \dfrac{hT_\infty\sqrt{r_0}}{k} & \dfrac{\beta}{2}<\theta\leqslant\pi\end{cases}$$

یا برحسب μ ،

$$\frac{\partial u}{\partial r} + Hu = f(\mu) \qquad , r=r_0$$

$$H = \frac{h}{k} - \frac{1}{2r_0} \qquad , f(\mu) = \begin{cases} \dfrac{hT_\infty \sqrt{r_0}}{k} & -1 \leqslant \mu < \cos\frac{\beta}{2} \\[2ex] \left(\dfrac{hT_\infty}{k} + \dfrac{q''}{k}\right)\sqrt{r_0} & \cos\frac{\beta}{2} < \mu \leqslant 1 \end{cases}$$

با همگن کردن شرط مرزی اخیر، می‌توان تابع گرین را برای u تعیین کرد.

$$\psi(r,\mu,t) = R(r)\,M(\mu)\,T(t)$$

$$\psi(r,\mu,t)\Big|_{r=0} = finite \longrightarrow R(0) = finite$$

$$\Rightarrow R(r) = C_1 J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r) + \cancelto{0}{C_2 Y_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r)}$$

$$\psi(r,\mu,t)\Big|_{\mu=0} = finite \longrightarrow M(0) = finite$$

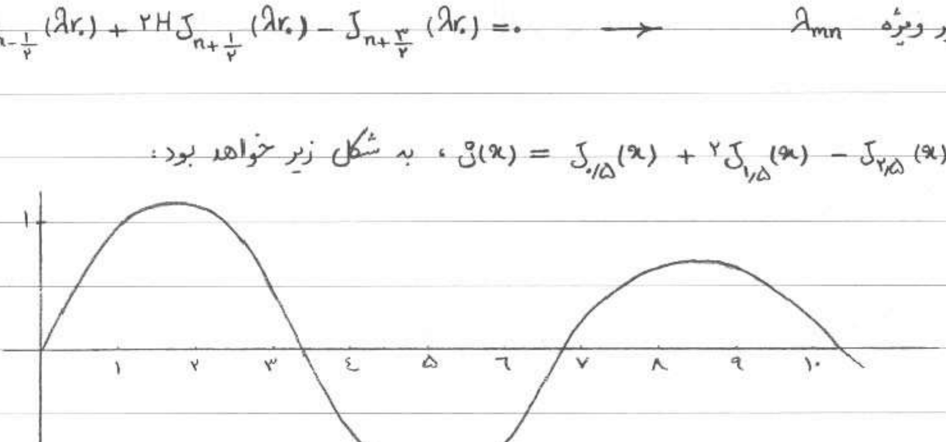
$$\Rightarrow M(\mu) = C_3 P_n(\mu) + \cancelto{0}{C_4 Q_n(\mu)}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} + H\psi = 0 \qquad , r=r_0$$

$$\left[\frac{dR}{dr} + HR\right]_{r=r_0} = 0 \longrightarrow \frac{1}{2}\left[J_{n-\frac{1}{2}}(\lambda r_0) - J_{n+\frac{3}{2}}(\lambda r_0)\right] + H J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r_0) = 0$$

$$J_{n-\frac{1}{2}}(\lambda r_0) + 2H J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r_0) - J_{n+\frac{3}{2}}(\lambda r_0) = 0 \longrightarrow \lambda_{mn}$$ تعیین مقادیر ویژه

برای مثال اگر $n=1$ و $H=1$، تابع $g(x) = J_{0.5}(x) + 2J_{1.5}(x) - J_{2.5}(x)$، به شکل زیر خواهد بود:



دقت شود که برای هر n ، مقادیر ویژه λ به طور جداگانه تعیین می‌شوند و بنابراین از اندیس λ_{mn} استفاده شده است.

نهایتاً جواب ψ به صورت زیر در می‌آید:

$$\psi(r,\mu,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} C_{mn}\, e^{-\alpha\lambda_{mn}^{2} t}\, J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{mn} r)\, P_n(\mu)$$

حال با اعمال شرط مرزی زمانی می‌توان C_{mn} را یافت:

$$\sqrt{r}\, T_0=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} C_{mn}\, J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{mn} r)\, P_n(\mu)$$

$$\int_{r'=0}^{r_0}\int_{\mu'=-1}^{1} r'\sqrt{r'}\, T_0\, J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{mn} r')\, P_n(\mu')\, d\mu'\, dr' = C_{mn}\int_0^{r_0} r' J_{n+\frac{1}{2}}^{2}(\lambda_{mn} r')\, dr' \times \int_{-1}^{1}\left[P_n(\mu')\right]^2 d\mu'$$

$$C_{mn}=\frac{T_0\int_{r'=0}^{r_0}\int_{\mu'=-1}^{1} r'\sqrt{r'}\, J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{mn} r')\, P_n(\mu')\, d\mu'\, dr'}{\int_0^{r_0} r' J_{n+\frac{1}{2}}^{2}(\lambda_{mn} r')\, dr' \times \int_{-1}^{1}\left[P_n(\mu')\right]^2 d\mu'}$$

$$\int_0^{r_0} r' J_{n+\frac{1}{2}}^{2}(\lambda_{mn} r')\, dr' = -\frac{r_0^2}{2} J_{n-\frac{1}{2}}(\lambda_{mn} r_0)\, J_{n+\frac{3}{2}}(\lambda_{mn} r_0)$$

$$\int_{-1}^{1}\left[P_n(\mu')\right]^2 d\mu' = \frac{2}{2n+1}$$

با انجام محاسبات لازم، می‌توان تابع گرین را تعیین کرد،

$$G(r,\mu,t\,|\,r',\mu',\tau)$$

و از آنجا $u(r,\mu,t)$ به صورت زیر تعیین می‌شود.

$$u(r,\mu,t)=\int_{r'=0}^{r_0}\int_{\mu'=-1}^{1} r'^2\, G(r,\mu,t\,|\,r',\mu',0)\sqrt{r'}\, T_0\, dr'\, d\mu' + \alpha\int_{\tau=0}^{t}\int_{\mu'=-1}^{1} r'^2\, G(r,\mu,t\,|\,r_0,\mu',\tau)\frac{1}{k} f\, d\mu'\, d\tau$$

$$\longrightarrow u(r,\mu,t)=T_0\int_{r'=0}^{r_0}\int_{\mu'=-1}^{1} r'^2\sqrt{r'}\, G(r,\mu,t\,|\,r',\mu',0)\, d\mu'\, dr'$$

$$+\frac{\alpha}{k}\int_{\tau=0}^{t}\int_{\mu'=-1}^{\cos\frac{\beta}{2}} r'^2\left(\frac{hT_\infty\sqrt{r_0}}{k}\right) G(r,\mu,t\,|\,r_0,\mu',\tau)\, d\mu'\, d\tau$$

$$+\frac{\alpha}{k}\int_{\tau=0}^{t}\int_{\mu'=\cos\frac{\beta}{2}}^{1} r'^2\left(\frac{hT_\infty}{k}+\frac{q''}{k}\right)\sqrt{r_0}\, G(r,\mu,t\,|\,r_0,\mu',\tau)\, d\mu'\, d\tau$$

پس از تعیین $u(r,\mu,t)$ ، می‌توان به سادگی T را تعیین کرد.

$$T(r,\theta,t) = \frac{1}{\sqrt{r}}\, u(r, \cos\theta, t)$$

بشوی اوراق اگر همدرس مایی
که علم عشق در دفتر نباشد

پایان