



دانشگاه آزاد اسلامی واحد همدان

گروه مهندسی عمران

# جزوه درسی مکانیک سیالات

مدرس:

امیر حسین اسدیانی یکتا

نیمسال اول ۹۱-۹۰

## پیشگفتار

این متن، جزوه درسی مکانیک سیالات بوده که برای استفاده دانشجویان اولین بار در نیمسال اول سال تحصیلی ۸۷-۸۸ تهیه شده است. علی‌رغم تلاش فراوان جهت جلوگیری از خطا و اشتباه، متن حاضر خالی از اغلاط چاپی، ترسیمی و احیاناً محاسباتی مفهومی نمی‌باشد، که امید است با راهنمایی دانشجویان محترم تصحیح گردد.

در ادامه لازم به ذکر است که در تهیه این جزوه، از جزوه درسی مکانیک سیالات دانشکده فنی دانشگاه تهران، که توسط استاد ارجمندم جناب آقای دکتر محمد علی بنی‌هاشمی نگاشته شده، بهره فراوانی برده شده است.

نظرات خود را می‌توانید به آدرس [ahasadiany@gmail.com](mailto:ahasadiany@gmail.com) ارسال فرمایید.

امیرحسین اسدیانی یکتا - آذرماه ۱۳۸۷

# فصل اول

## بررسی خواص فیزیکی سیال

### ۱-۱- معرفی و تعاریف اولیه

- مکانیک سیالات شاخه ای از مکانیک کاربردی است که به بررسی رفتار سیال در حالت سکون و حرکت می پردازد.

- پدیده های طبیعی بسیاری وجود دارند که مکانیک سیالات در مطالعه آنها کاربرد دارد. از آن جمله می توان به حرکت ابرها، پرواز پرندگان، جریان آب در رودخانه ها، حرکت امواج دریا و نفوذ و حرکت آب در خاک اشاره نمود.

- علاوه بر نقش مکانیک سیالات در بررسی پدیده های طبیعی، بسیاری از مسائل مهندسی نیز وجود دارند که از کاربردهای مکانیک سیالات به شمار می آیند. به عنوان مثال در مطالعه و بررسی مسائلی نظیر جریان آب در لوله ها، نیروهای وارده از طرف آب بر سدها، نفوذ آب در خاک و ... نیاز به استفاده از قوانین مکانیک سیالات می باشد.

## - سیال چیست؟

سیال ماده‌ای است که سیلان داشته باشد، یعنی جاری باشد. همانطور که در فیزیک دیده‌ایم مواد را می‌توان به دو دسته کلی جامدات و سیالات تقسیم کرد. که سیالات خود به دو دسته مایعات و گازها تقسیم می‌شوند.

جامدات، مایعات و گازها از نظر فاصله بین مولکولها و دامنه حرکات مولکولها با یکدیگر تفاوت دارند که این خود به بزرگی نیروی جاذبه بین مولکولی این مواد بستگی دارد.

جامدات به دلیل نیروی زیاد جاذبه بین مولکولی به طور عمومی شکل خود را حفظ می‌کنند. لذا می‌توان به هر جامد یک شکل خاص نسبت داد.

در مایعات به دلیل کمتر بودن نیروی جاذبه بین مولکولی، ذرات مختلف مایعات موقعیت خاصی نداشته و در نتیجه مایعات شکل خاصی ندارند ولی حجم مشخصی دارند.

گازها به علت کم بودن نیروی جاذبه بین مولکولیشان نه تنها شکل مشخصی ندارند، بلکه حجم مشخصی هم نداشته و در تمام فضای اطراف خود پراکنده می‌شوند.

### ۱-۱-۲- تعریف دیگری از سیال:

از دیدگاه دیگر، سیال ماده‌ای است که قدرت تحمل تنش برشی را ندارد و در مقابل تنش‌های برشی (هرچند ناچیز) تغییر شکل می‌دهد یا به عبارتی جریان پیدا می‌کند. این نکته بدین معنا نیست که تنش‌های برشی در سیالات به هیچ وجه وجود ندارد. در سیال در حال حرکت تنش‌های برشی وجود داشته و در بررسی حرکت سیالات نقش مهمی ایفا می‌کند. اما در سیال ساکن تنش برشی وجود ندارد. در سیال ساکن فقط نیروهای عمودی (فشاری) وارد می‌شود.

سیالات برخلاف جامدات دارای خاصیت تراکم پذیری اند و این موضوع خصوصاً در مورد گازها مشخص تر است. ولی مایعات تراکم‌پذیری کمی دارند.

- از یک دیدگاه می‌توان مکانیک سیالات را به سه بخش کلی تقسیم نمود:

- (۱) سکون یا استاتیک سیالات که به بررسی قوانین مربوط به سیال ساکن می‌پردازد.
- (۲) سینماتیک سیالات که در آن حرکت سیال بدون در نظر گرفتن نیروها بررسی می‌شود.
- (۳) دینامیک سیالات که به بررسی حرکت سیال در حالت کلی اختصاص دارد.

## ۱-۲- ابعاد و واحدها

در بررسی پدیده‌های فیزیکی و اندازه‌گیری‌های مربوطه از سیستم‌ها یا واحدهای اندازه‌گیری مختلف استفاده می‌شود. سیستم‌های اندازه‌گیری مختلفی وجود دارد که در ذیل به آنها اشاره می‌شود.

- سیستم بین‌المللی واحدها یا SI

- سیستم وزنی بریتانیا یا BG

- سیستم MKS

- سیستم MTS

- سیستم CGS

- سیستم ft-lb-s

دو سیستم SI و BG به عنوان سیستم‌های اندازه‌گیری اصلی شناخته می‌شوند و سایر سیستم‌های اشاره شده از این دو سیستم منشعب می‌شوند.

## ۱-۲-۱- بعد یا دیمانسیون<sup>۱</sup>

بعد یا دیمانسیون یک کمیت فیزیکی، نشان داده دهنده نوع یا جنس یک کمیت می‌باشد. مثلاً بعد کمیت‌هایی نظیر ارتفاع، عرض، فاصله قطر و جابجایی "طول" می‌باشد. و بعد کمیت‌هایی نظیر فشار و ضریب ارتجاعی، نیرو تقسیم بر طول به طول دو است.

---

<sup>1</sup> - dimension

ابعاد را می‌توان به دو دسته اصلی یا اولیه و فرعی یا ثانویه تقسیم نمود. با انتخاب ابعاد اصلی می‌توان ابعاد فرعی را بر حسب آنها بیان نمود. مثلاً اگر طول و زمان از ابعاد اصلی باشند، سرعت یک بعد فرعی بوده که برابر طول تقسیم بر زمان است. در مکانیک سیالات از ابعاد اصلی زیر استفاده می‌شود.

- طول  $L$

- زمان  $T$

- جرم  $M$

- نیرو  $N$

- حرارت  $\theta$

واحد هر یک از ابعاد اصلی در سیستم‌های مختلف اندازه‌گیری متفاوت است. در عین حال ابعاد اصلی در دو سیستم  $SI$  و  $BG$  نیز متفاوتند. در سیستم  $SI$  ابعاد اصلی طول، جرم و زمان می‌باشند در حالیکه در سیستم وزنی انگلیسی ابعاد اصلی طول، نیرو و زمان هستند. از چهار بعد اصلی می‌توان ابعاد فرعی را بدست آورد. مثلاً با توجه به قانون دوم نیوتنی  $F = ma$  و در نظر گرفتن بعد شتاب  $(LT^{-2})$ ، بعد نیرو  $MLT^{-2}$  و یا بعد جرم  $FL^{-1}T^2$  خواهد بود.

در مثال فوق در سیستم  $SI$ ، واحدهای طول، جرم و زمان واحدهای اصلی است و بنابراین واحد نیرو  $(MLT^{-2})$  به عنوان یک واحد فرعی محاسبه می‌شود. ولی در سیستم وزنی انگلیسی واحدهای اصلی، طول، نیرو و زمان بوده و بنابراین واحد جرم  $(FL^{-1}T^2)$  به عنوان واحد فرعی محاسبه می‌شود. در جدول ۱-۱ واحد چهار بعد اصلی، طول، جرم، زمان و نیرو در سیستم‌های  $SI$ ،  $BG$ ،  $CGS$ ،  $MKS$ ،  $MTS$  و  $ft-Lb-s$  نشان داده شده است.

جدول ۱-۱ واحد ابعاد اصلی در سیستم‌های مختلف

| سیستم اندازه‌گیری         |             |              |                |                           |   | بعد    |
|---------------------------|-------------|--------------|----------------|---------------------------|---|--------|
| Ft-Lb-s                   | MTS         | MKS          | CGS            | BG                        | SI  |        |
| فوت (ft)                  | متر (m)     | متر (m)      | سانتی متر (cm) | فوت (ft)                  | متر (m)                                       | طول L  |
| پوند (Lb <sub>m</sub> )   | تن (Ton)    | کیلوگرم (kg) | گرم (gr)       | اسلاگ <sup>۲</sup> (slug) | کیلوگرم (kg)                                  | جرم M  |
| ثانیه (s)                 | ثانیه (s)   | ثانیه (s)    | ثانیه (s)      | ثانیه (s)                 | ثانیه (s)                                     | زمان T |
| پوندال (Lb <sub>f</sub> ) | استن (Sten) | کیلوگرم (kg) | دین (dyne)     | پوند (Lb)                 | نیوتن <sup>۱</sup> (N)<br>kg m/s <sup>2</sup> | نیرو N |

۱- نیرو در سیستم SI یک بعد فرعی است و واحد آن نیوتن یا همان  $kgm/S^2$  است.

۲- جرم در سیستم BG یک بعد فرعی است و واحد آن اسلاگ یا همان  $Lb.S^2/ft$  است.

۳-  $1Lbf$  عبارت است از نیرویی که هرگاه به جرم  $1Lb$  وارد آید، شتابی برابر  $32.2ft/s^2$  به آن بدهد. به عبارتی

$$1Lb_f = 1Lb \times 32.2 \frac{ft}{s^2}$$

همچنین

$$1Kg_f = 1Kg \times 9.81 \frac{m}{s^2}$$

در جدول ۱-۲ تعدادی از ابعاد فرعی نشان داده شده است. برای بدست آوردن ابعاد فرعی باید از قوانین

مربوطه استفاده نمود. مثلاً برای تعیین بعدی کمیتی نیز چگالی باید دانست چگالی نسبت جرم به حجم

است.

جدول ۱-۲ تعدادی از ابعاد فرعی

| واحد BG                       | واحد SI                        | بعد  | کمیت                    |
|-------------------------------|--------------------------------|--|-------------------------|
| $\text{Ft/s}^2$               | $\text{M/S}^2$                 | $\text{LT}^{-2}$                                   | شتاب (a)                |
| $\text{Ft}^2$                 | $\text{M}^2$                   | $\text{L}^2$                                       | مساحت (A)               |
| $\text{Ft}^3$                 | $\text{M}^3$                   | $\text{L}^3$                                       | حجم (V)                 |
| $\text{Slug/ft}^3$            | $\text{Kg/M}^3$                | $\text{ML}^{-3}$                                   | چگالی ( $\rho$ )        |
| $\text{Lb/in}^2 = \text{Psi}$ | $\text{N/m}^2 = \text{Pa}$     | $\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$ یا $\text{FL}^{-2}$  | فشار (P)                |
| $\text{Ft/s}$                 | $\text{M/S}$                   | $\text{LT}^{-1}$                                   | سرعت (V)                |
| $\text{Ft}^3/\text{s}$        | $\text{M}^3/\text{S}$          | $\text{L}^3\text{T}^{-1}$                          | دبی (Q)                 |
| $\text{Lb/ft}^3$              | $\text{N/M}^3$                 | $\text{ML}^{-2}\text{T}^{-2}$ یا $\text{FL}^{-3}$  | وزن حجمی ( $\gamma$ )   |
| $\text{Ft}^2/\text{s}$        | $\text{M}^2/\text{s}$          | $\text{L}^2\text{T}^{-1}$                          | لزجت سیستماتیکی (v)     |
| $\text{Lb.s/ft}^2$            | $\text{N.S/m}^2 = \text{Pa.s}$ | $\text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}$ یا $\text{FTL}^{-2}$ | لزجت دینامیکی ( $\mu$ ) |

## ۱-۲-۲- تبدیل واحدها

واحدهای جدول ۱-۱ به صورت زیر به یکدیگر تبدیل می‌شوند.

$$1\text{kgf} = 9.81\text{N}$$

$$1\text{N} = 10^5\text{dyne}$$

$$1\text{Lb}_m = 0.454\text{kg}$$

$$1\text{Lb}_f = 4.4482\text{N}$$

$$1\text{sten} = 10^{-3}\text{N}$$

به منظور تبدیل واحدها می‌توان از جدول ۱-۳ استفاده نمود.

## ۱-۲-۳- قانون همگنی ابعاد

کلیه معادلات حاکم بر پدیده‌های طبیعی باید مستقل از سیستم اندازه‌گیری باشد و یا به عبارت دیگر باید از نظر ابعادی همگن باشند. یک معادله زمانی از نظر ابعادی همگن است که تمام جملات آن از یک جنس یا بعد باشد.

به عنوان مثال کلیه جملات معادله حرکت، از جنس طول هستند و لذا این معادله از نظر ابعادی همگن

$$x = 1/2 at^2 + v_0 t + x_0 \quad \text{است.}$$



## جدول ۱-۳- جدول تبدیل واحدها

|  |  |
|--|--|
| <b>Length</b>  | <b>Volume</b>  |
| 1 ft = 12 in = 0.3048 m<br>1 mi = 5280 ft = 1609.344 m<br>1 nautical mile (nmi) = 6076 ft = 1852 m<br>1 yd = 3 ft = 0.9144 m<br>1 angstrom (Å) = 1.0 E-10 m  | 1 ft <sup>3</sup> = 0.028317 m <sup>3</sup><br>1 U.S. gal = 231 in <sup>3</sup> = 0.0037854 m <sup>3</sup><br>1 L = 0.001 m <sup>3</sup> = 0.035315 ft <sup>3</sup><br>1 U.S. fluid ounce = 2.9574 E-5 m <sup>3</sup><br>1 U.S. quart (qt) = 9.4635 E-4 m <sup>3</sup> |
| <b>Mass</b>  | <b>Area</b>  |
| 1 slug = 32.174 lbm = 14.594 kg<br>1 lbm = 0.4536 kg<br>1 short ton = 2000 lbm = 907.185 kg<br>1 tonne = 1000 kg   | 1 ft <sup>2</sup> = 0.092903 m <sup>2</sup><br>1 mi <sup>2</sup> = 2.78784 E7 ft <sup>2</sup> = 2.59 E6 m <sup>2</sup><br>1 acre = 43,560 ft <sup>2</sup> = 4046.9 m <sup>2</sup><br>1 hectare (ha) = 10,000 m <sup>2</sup>  |
| <b>Velocity</b>  | <b>Acceleration</b>  |
| 1 ft/s = 0.3048 m/s<br>1 mi/h = 1.466666 ft/s = 0.44704 m/s<br>1 kn = 1 nmi/h = 1.6878 fts = 0.5144 m/s  | 1 ft/s <sup>2</sup> = 0.3048 m/s <sup>2</sup>  |
| <b>Mass flow</b>   | <b>Volume flow</b>   |
| 1 slug/s = 14.594 kg/s<br>1 lbm/s = 0.4536 kg/s  | 1 gal/min = 0.002228 ft <sup>3</sup> /s = 0.06309 L/s<br>1 × 10 <sup>6</sup> gal/day = 1.5472 ft <sup>3</sup> /s = 0.04381 m <sup>3</sup> /s   |
| <b>Pressure</b>  | <b>Force</b>   |
| 1 lbf/ft <sup>2</sup> = 47.88 Pa<br>1 lbf/in <sup>2</sup> = 144 lbf/ft <sup>2</sup> = 6895 Pa<br>1 atm = 2116.2 lbf/ft <sup>2</sup> = 14.696 lbf/in <sup>2</sup> = 101,325 Pa<br>1 inHg (at 20°C) = 3375 Pa<br>1 bar = 1.0 E5 Pa | 1 lbf = 4.448222 N = 16 oz<br>1 kgf = 2.2046 lbf = 9.80665 N<br>1 U.S. (short) ton = 2000 lbf<br>1 dyne = 1.0 E-5 N<br>1 ounce (avoirdupois) (oz) = 0.27801 N  |
| <b>Energy</b>  | <b>Power</b>   |
| 1 ft · lbf = 1.35582 J<br>1 Btu = 252 cal = 1055.056 J = 778.17 ft · lbf<br>1 kilowatt hour (kWh) = 3.6 E6 J   | 1 hp = 550 ft · lbf/s = 745.7 W<br>1 ft · lbf/s = 1.3558 W   |
| <b>Specific weight</b>   | <b>Density</b>   |
| 1 lbf/ft <sup>3</sup> = 157.09 N/m <sup>3</sup>  | 1 slug/ft <sup>3</sup> = 515.38 kg/m <sup>3</sup><br>1 lbm/ft <sup>3</sup> = 16.0185 kg/m <sup>3</sup><br>1 g/cm <sup>3</sup> = 1000 kg/m <sup>3</sup>   |
| <b>Viscosity</b>   | <b>Kinematic viscosity</b>   |
| 1 slug/(ft · s) = 47.88 kg/(m · s)<br>1 poise (P) = 1 g/(cm · s) = 0.1 kg/(m · s)  | 1 ft <sup>2</sup> /h = 0.000025806 m <sup>2</sup> /s<br>1 stokes (St) = 1 cm <sup>2</sup> /s = 0.0001 m <sup>2</sup> /s  |

## ۳-۱- خواص سیال

در ادامه به تعدادی چند از خواص سیالات اشاره می‌شود.

۳-۱-۱- جرم مخصوص<sup>۲</sup> (چگالی)

جرم مخصوص، جرم در واحد حجم هر ماده است و با  $\rho$  نمایش داده می‌شود بنابراین جرم مخصوص از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

بعد جرم مخصوص به صورت زیر است:

$$[\rho] = ML^{-3}$$

واحد جرم مخصوص در سیستم SI،  $kg/m^3$  و در سیستم BG،  $lb/ft^3$  است.

## ۳-۱-۲- وزن مخصوص

نیروی جاذبه وارد بر واحد حجم، وزن مخصوص نامیده می‌شود. و آن را با  $\gamma$  نشان می‌دهند. در سیستم SI واحد وزن مخصوص  $N/m^3$  است و معمولاً با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\gamma = \rho g$$

وزن مخصوص دارای بعد  $[ \gamma ] = FL^{-3}$  می‌باشد.

## ۳-۱-۳- حجم مخصوص

حجم واحد جرم ماده را حجم مخصوص می‌نامند و آنرا با  $v$  نمایش می‌دهند.  $v$  عکس  $\rho$  بوده و بیشتر برای گازها استفاده می‌شود.

$$v = \frac{1}{\rho}$$

<sup>2</sup>- density

## ۱-۳-۴- چگالی نسبی

چگالی نسبی با  $Sg$  نشان داده می‌شود. طبق تعریف چگالی نسبی، نسبت چگالی مایع به چگالی آب خالص در شرایط استاندارد (دمای ۴ درجه سانتیگراد) است. چگالی آب در ۴ درجه سانتیگراد برابر  $1000 \text{ kg/m}^3$  یا  $1 \text{ gr/cm}^3$  است.

## ۱-۳-۵- تراکم‌پذیری:

اگر تغییرات چگالی با فشار قابل صرفه‌نظر کردن باشد، سیال تراکم‌ناپذیر نامیده می‌شود. مایعات غالباً چنین وضعیتی دارند. در مقابل برای سیالات تراکم‌ناپذیر با افزایش فشار، چگالی افزایش می‌یابد. در خصوص آب، فقط در پدیده چکش آبی (ضربه قوچ) آب را تراکم‌پذیر در نظر می‌گیرند. تراکم‌پذیری سیال به طور معکوس متناسب با کمیتی به نام ضریب ارتجاعی یا کشسانی حجمی است. که بعنوان مدول حجمی نیز شناخته می‌شود.

$$k \text{ or } E_v = -v \frac{dp}{dv} = -\frac{dp}{dv/v} = \frac{dp}{dp/\rho} = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V}$$

که در رابطه فوق  $v$  حجم مخصوص،  $dp$  و  $dv$  به ترتیب تغییر فشار و تغییر حجم مخصوص و  $V$  حجم سیال می‌باشد.  $E_v$  دارای بعد مشابه فشار و مشابه ضریب ارتجاعی جامدات (مدول یانگ) می‌باشد. تراکم‌پذیری نسبت عکس با ضریب کشسانی حجمی دارد، هرچقدر این ضریب بزرگتر باشد سیال تراکم‌ناپذیرتر است.

مدول حجمی تابعی از درجه حرارت و فشار می‌باشد. هرچه فشار بیشتر باشد، مدول حجمی بیشتر و یا به عبارت دیگر تراکم‌پذیری سیال کمتر است.

مدول حجمی آب با درجه حرارت تغییر می‌کند. بیشترین مقدار مدول حجمی (کمترین مقدار تراکم‌پذیری) آب در دمای ۵۰ درجه سانتیگراد مشاهده می‌شود.

بطوریکه آب در دمای  $50^{\circ}\text{C}$  دارای مدول حجمی  $2/3 \text{ Gpa}$  و در دمای صفر مدول حجمی آن  $2/10 \text{ Gpa}$  است

در جدول ۱-۵، خواص تعدادی از مایعات در دمای  $20$  درجه سانتیگراد و فشار  $1$  اتمسفر آمده است.

مثال ۱-۱:

مایعی در داخل یک سیلندر متراکم می‌شود و حجم و فشارش به ترتیب از یک لیتر و  $1 \text{ MPa}$  به  $955 \text{ cm}^3$  و  $2 \text{ MPa}$  می‌رسد. مطلوب است محاسبه مقدار ضریب کشسانی حجمی مایع.

حل:

$$V_1 = 1 \text{ Lit} = 1000 \text{ cm}^3$$

$$V_2 = 955 \text{ cm}^3$$

$$P_1 = 1 \text{ MPa}$$

$$P_2 = 2 \text{ MPa}$$

$$K = -\frac{\Delta P}{\Delta V / V} = -\frac{(2-1) \text{ MPa}}{\frac{955-1000}{1000}} = 200 \text{ MPa}$$

#### ۱-۴- لزجت و گرانیروی یا ویسکوزیته

لزجت، مهمترین ویژگی یک سیال است. لزجت وسیله‌ای برای اندازه‌گیری مقاومت سیال در مقابل تنش‌های برشی است. عامل اصلی در ایجاد مقاومت، اندرکنش بین مولکولی است که به دو صورت چسبندگی و تبادل مومنوم مشاهده می‌شود. در گازها که در آنها نیروهای جاذبه بین مولکولی خیلی کوچک است، آنچه باعث مقاومت در برابر تنش برشی می‌شود (عامل لزجت)، انتقال اندازه حرکت مولکولی گاز (مومنتم) است. در مقابل لزجت مایعات ناشی از چسبندگی مولکولی یا جاذبه مولکولی ذرات مایع است.

مقاومت سیال در مقابل حرکت و تنش‌های برشی را می‌توان به اصطکاک تعبیر کرد، زیرا نیروهای بین‌مولکولی در مقابل حرکت نسبی ذرات سیال نسبت به یکدیگر مخالفت و مقاومت می‌کنند. می‌توان چنین تعبیر کرد که در اثر خاصیت لزجت، سیال تلاش می‌کند تا سرعت ذرات جامد یکنواخت شود. یا به

عبارتی سیال در اثر خاصیت لزجت در مقابل گرادیان سرعت مقاومت می‌کند. در اثر این مقاومت مقداری از انرژی جنبشی به انرژی حرارتی تبدیل شده که سبب بالا رفتن دمای سیال می‌شود.

#### ۱-۴-۱- سیال واقعی و سیال ایده‌آل

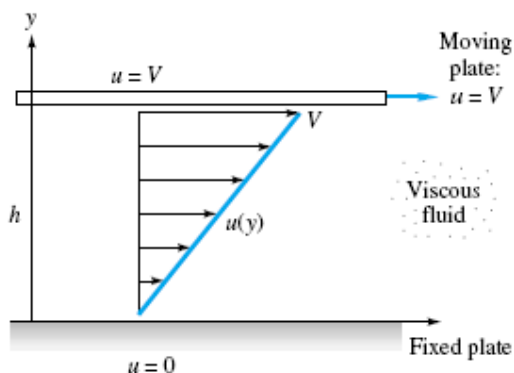
تمام سیالات واقعی لزج هستند ولی با تقریب قابل قبول در مهندسی بعضی سیالات را می‌توان غیر لزج (سیال ایده‌آل) فرض کرد. سیال ایده‌آل سیالی است که لزجت آن را صفر در نظر می‌گیریم، پس حتی در حالت حرکت هم در این سیال تنش وجود نخواهد داشت. پس در سیال ایده‌آل حتی در حالت حرکت نیز نیروی برشی وجود نداشته و فقط نیروهای فشاری خواهیم داشت.

#### ۱-۴-۲- عوامل مؤثر بر لزجت سیالات

از آنجا که عامل بوجود آورنده لزجت در گازها، تبادل مولکولی بین لایه‌های مختلف سیال در حال حرکت یا به عبارتی تبادل مومنتوم و ضرباتی که مولکول‌ها به یکدیگر وارد می‌کنند، می‌باشد، لذا با افزایش دما حرکات مولکولی افزایش یافته و در نتیجه لزجت گازها افزایش می‌یابد. در مایعات عامل اصلی بوجود آورنده لزجت، چسبندگی بین مولکولی است و از آنجا که با افزایش دما این چسبندگی کاهش می‌یابد، لذا لزجت مایعات با افزایش دما کاهش می‌یابد.

#### ۱-۴-۳- مثال کلاسیک جریان بین دو صفحه موازی

برای توضیح بیشتر در خصوص لزجت مایعات می‌توان به مثال کلاسیک جریان بین دو صفحه موازی مطابق شکل زیر پرداخت.



شکل ۱-۱ جریان بین دو صفحه موازی

فرضیات این حرکت چنین است:

۱- صفحه بالا با سرعت ثابت  $U$  حرکت می‌کند.

۲- صفحه پائین ثابت و فاصله دو صفحه از یک سیال پوشیده است.

۳- ابعاد صفحه‌ها چنان بزرگ است که از اثر لبه‌ها می‌توان صرفه نظر کرد.

۴- ذرات سیال در محل تماس با صفحات، سرعتی برابر همان صفحه دارند.

۵- سرعت  $U$  نسبت به فاصله بین دو صفحه ( $h$ ) خیلی زیاد است.

۶- تنها عامل حرکت، حرکت صفحه بالایی است.

با این فرضیات گویا ذرات سیال در لایه‌های موازی با یکدیگر، نسبت به هم می‌لغزند. براساس این آزمایشات مشاهده شد که نیرو وارد بر صفحه بالایی برای به حرکت درآوردن آن با سرعت  $U$  به صورت زیر می‌باشد.

$$F \approx \frac{AU}{h}$$

با توجه به فرضیات فوق ثابت می‌شود که پروفیل سرعت برابر است با

$$\frac{u}{h} = \frac{du}{dy}$$

که این مطلب توسط آزمایشات تأیید شده است. با معرفی ضریب تناسب خواهیم داشت:

$$\tau = \frac{F}{A} = \mu \frac{du}{dy}$$

این رابطه به رابطه سیال نیوتنی معروف است.  $\mu$  همان ضریب لزجت یا لزجت دینامیکی است. براساس

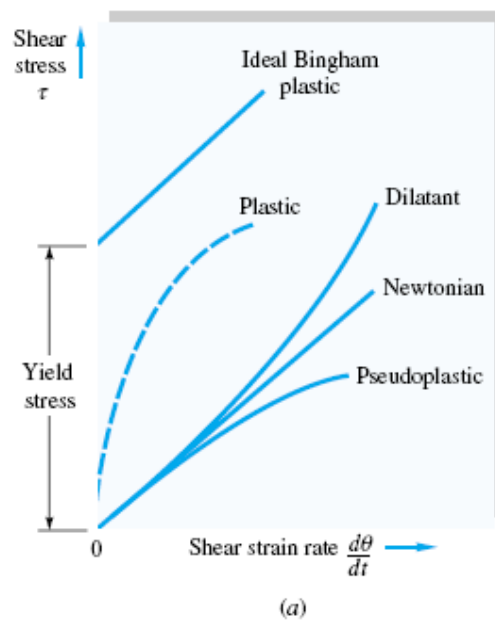
رابطه فوق هرچه گرادیان سرعت  $\frac{du}{dy}$  بیشتر و هرچه سیال لزج‌تر باشد، تنش برشی ایجاد شده بیشتر

است. بدین ترتیب در مثال فوق با افزایش گرادیان سرعت و لزج‌تر شدن سیال، نیروی  $F$  بیشتری برای به حرکت درآوردن صفحه فوقانی لازم خواهد بود.

براساس رابطه فوق اگر تنش برشی ثابت باشد، توزیع سرعت خطی است و اگر به صورت خطی تغییر نماید توزیع سرعت سهوی خواهد بود.

#### ۱-۴-۴- سیال نیوتنی و غیرنیوتنی

هر سیالی که از رابطه سیال نیوتنی پیروی کند، سیال نیوتنی نام دارد. همه سیالات از رفتار نیوتنی تبعیت نمی‌کنند. به سیالاتی که رفتار آنها در مقابل اعمال تنش برشی از رابطه فوق تبعیت نمی‌کند، سیالات غیرنیوتنی می‌گویند. بررسی رفتار مواد مختلف در مقابل تأثیر تنش برشی را رئولوژی می‌نامند و رفتار مواد مختلف در مقابل تنش برشی را رفتار رئولوژیک می‌گویند. در شکل زیر رفتار رئولوژیک مواد مختلف به صورت شماتیک نشان داده شده است.



شکل ۱-۲: رفتار رئولوژیک انواع سیالات

در سیال بینگهام رابطه تنش و نرخ کرنش بصورت زیر است :

$$\tau = \tau_y + \mu \left( \frac{du}{dy} \right)^m$$

مثال‌های از سیالات غیرنیوتنی عبارت‌اند از: رنگ، جوهر، ژل‌ها، خون و ....

### ۱-۴-۵- لزجت دینامیکی

بعد لزجت دینامیکی به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$[\mu] = \frac{[\tau]}{\left[ \frac{du}{dy} \right]} = \frac{FL^{-2}}{\frac{LT^{-1}}{L}} = FL^{-2}T$$

واحد لزجت در SI،  $\frac{N \cdot s}{M^2}$  یا Pa.S است. یکی از واحدهای معروف و قدیمی لزجت، پواز و سانتی‌پواز است.

پواز واحد لزجت دینامیکی در سیستم CGS است. لزجت آب در دمای ۲۰ درجه سانتیگراد برابر

یک سانتی‌پواز است. بدین ترتیب مقایسه لزجت دیگر سیالات با آب در مقیاس سانتی‌پواز آسان است.

پواز به صورت زیر بیان می‌شود

$$1 \text{ Poise} = \frac{\text{dyne} \times \text{s}}{\text{cm}^2}$$

$$1 \text{ Poise} = 0.1 \text{ Pa.S}$$

### ۱-۴-۶- لزجت سینماتیکی

لزجت سینماتیکی با  $\nu$  نشان داده شده و از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

بعد لزجت سینماتیکی  $[\nu] = L^2 T^{-1}$  است و در سیستم متریک واحد لزجت سینماتیکی  $m^2/s$

می‌باشد. واحد لزجت سینماتیکی در سیستم CGS استوکس بوده و برابر  $10^{-4} m^2/s$  است.

در محدوده فشارهای متعارف در کارهای مهندسی با تقریب قابل قبولی می‌توان لزجت سیالات را ثابت

فرض کرد ولی با افزایش بیش از حد فشار  $\mu$  افزایش می‌یابد.



در جدول ۴-۱، ویسکوزیته و دانسیته آب در فشار ۱ اتمسفر در دماهای مختلف آمده است.

مثال ۲-۱:

صفحه مستطیل شکل نازکی در میان دو صفحه دیگر که با فاصله  $h$  از هم قرار دارند، واقع شده است. اگر صفحه با سرعت  $V$  کشیده شود و اگر در یک طرف، سیال با ویسکوزیته  $\mu$  و در طرف دیگر سیالی با ویسکوزیته  $K\mu$  باشد. نیرویی که به صفحه وارد می‌شود چقدر است؟



شکل ۳-۱: شکل مثال ۲-۱

حل:

$$\tau_1 = \mu_1 \frac{du}{dy} = \mu \frac{V - 0}{h - y} = \mu \frac{V}{h - y}$$

$$\tau_2 = \mu_2 \frac{du}{dy} = K\mu \frac{V}{y}$$

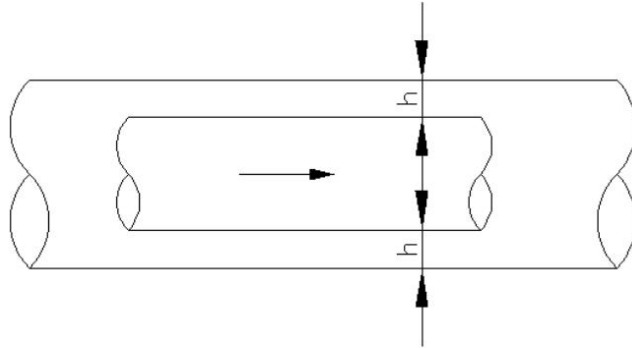
$$\tau = \tau_1 + \tau_2$$

$$F = \tau \times A = (\tau_1 + \tau_2)A = \left( \mu \frac{V}{h - y} + K\mu \frac{V}{y} \right) \times A$$

$$F = \mu A \left( \frac{V}{h - y} + K \frac{V}{y} \right)$$

مثال ۳-۱:

سیلندری به طول  $L=3\text{ft}$  و قطر  $d=8\text{ in}$  داخل لوله‌ای به قطر  $d=8.25\text{ in}$  با سرعت  $V=3\text{ft/s}$  حرکت می‌کند. سیال بین سیلندر و لوله، روغنی با لزجت سینماتیکی  $\nu=0.006\text{ ft}^2/\text{s}$  و  $Sg=0.92$  است. نیروی لازم برای حرکت لوله در سیلندر چقدر است؟



شکل ۴-۱: شکل مثال ۳-۱

حل:

$$dy = \frac{8.25 - 8}{2} = 0.125\text{ in}$$

ضخامت لایه روغن:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho_{\text{oil}}} \rightarrow \mu = \nu \rho_{\text{oil}}$$

$$\tau_w = \mu \frac{du}{dy}$$

$$Sg = \frac{\rho_{\text{oil}}}{\rho_w} \rightarrow \rho_{\text{oil}} = \rho_w \times Sg$$

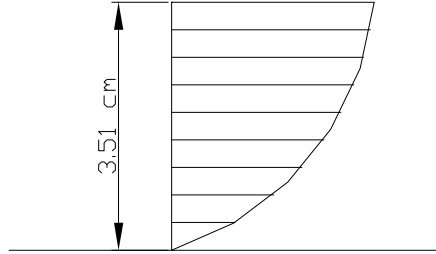
$$\tau_w = \mu \frac{du}{dy} = \nu \cdot Sg \cdot \rho_w \times \frac{3\text{ft}}{0.125\text{in} \times \frac{1\text{ft}}{12\text{in}}}$$

$$F = \tau \times A = \tau \times 2\pi r L$$

$$F = \nu \cdot Sg \cdot \rho_w \times \frac{3 \times 2\pi r h}{0.125 \times \frac{1\text{ft}}{12\text{in}}} = 0.006 \times 0.92 \times \frac{62.4}{32.2} \times \frac{3 \times 2\pi \times \frac{4}{12} \times 3}{0.125 \times \frac{1\text{ft}}{12\text{in}}} = 19.357\text{Lb}$$

مثال ۴-۱:

پروفیل سرعت برای جریان سیال گلیسیرین در دمای  $20^{\circ}\text{C}$  بر روی صفحه مسطح بصورت  $u=36y-472.4y^2$  می‌باشد.  $u$  بر حسب  $\text{m/s}$  و  $y$  بر حسب  $\text{m}$  است. تنش برشی را در  $y=0.5\text{cm}$ ،  $y=1\text{cm}$  و  $y=0$  از کف تعیین کنید.  $\mu=1.49\text{pa.s}$



شکل ۵-۱: شکل مثال ۴-۱

حل:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}, \quad u = 36y - 472.4y^2$$

$$\frac{du}{dy} = 36 - 472.4 \times 2y = 36 - 944.8y$$

$$\tau = 1.49 \times (36 - 944.8y)$$

نکته: اگر پروفیل سرعت خطی باشد  $\frac{du}{dy}$  ثابت است و تنش در عمق ثابت خواهد بود. زیرا

$$u = ax + b$$

$$\frac{du}{dx} = a$$

اما در این مثال پروفیل سرعت غیر خطی بوده و لذا تنش در عمق متغیر است به طوریکه در کف بیشترین مقدار را دارد.

$$y = 0 \rightarrow \tau = 53.64 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

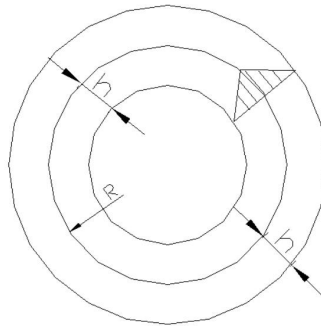
$$y = 0.5\text{cm} = 0.005\text{m} \rightarrow \tau = 46.6$$

$$y = 1\text{cm} = 0.01\text{m} \rightarrow \tau = 39.56$$

$$y = 1.5\text{cm} = 0.015\text{m} \rightarrow \tau = 32.52$$

### مثال ۱-۵:

سیلندر استوانه‌ای به طول  $L=0.305\text{m}$  با سرعت زاویه‌ای  $\omega=10\text{ rpm}$  دور بر دقیقه می‌چرخد. گشتاور لازم برای اعمال این دوران  $T=0.68\text{N.m}$  می‌باشد. این سیلندر در وسط دو سیلندر دیگر قرار دارد که این دو سیلندر به فاصله  $1.524\text{mm}$  از هم قرار گرفته‌اند. لزجت سیال بین دو استوانه را حساب کنید. قطر سیلندر میانی  $D=305\text{mm}$  است. (لزجت‌ها با هم برابر است).



شکل ۱-۶: شکل مثال ۱-۵

حل:

$$\begin{cases} \tau = \tau_1 + \tau_2 \\ \tau_1 = \tau_2 \end{cases} \Rightarrow \tau = 2\tau_1$$

$$\tau_1 = \left( \mu \frac{du}{dy} \right)_1 = \mu \frac{V}{h}$$

$$F = F_1 + F_2 = 2\tau_1 \times A = 2\mu \frac{V}{h} \times 2\pi rL$$

$$T = F.d \Rightarrow 4 \times \mu \frac{V}{h} \times \pi r L \times r$$

$$V = \frac{2\pi r \omega}{60}$$

$$T = \mu \times \frac{2\pi r \omega}{60} \times \frac{2\pi r L \times r \times 2}{h}$$

$$T = \frac{8\pi^2 \mu L \omega r^3}{60h}$$

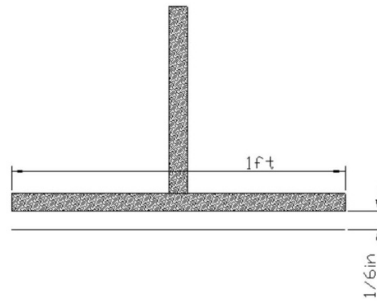
$$h = \frac{1.524}{2} \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\left. \begin{array}{l} T = \frac{8\pi^2 \mu L \omega r^3}{60h} \\ h = \frac{1.524}{2} \times 10^{-3} \text{ m} \end{array} \right\} \Rightarrow \mu = 0.036 \text{ Pa.s}$$

مثال ۱-۶:

گشتاور لازم برای چرخش دیسک دایره‌ای به قطر 1ft و با سرعت 200rpm چقدر است؟

$$\mu = 3.2 \times 10^{-3} \text{ Lb/ft}^2 \cdot \text{S}$$



شکل ۱-۷: شکل مثال ۱-۶

حل:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{V}{h}$$

$$dF = \left(\mu \frac{V}{h}\right) \times dA$$

$$dA = 2\pi r dr$$

$$dF = \mu \frac{V}{h} \times 2\pi r dr$$

$$dT = r.dF = r.\mu \frac{V}{h} 2\pi r dr$$

$$V = \frac{2\pi r \omega}{60}$$

$$T = \int_0^R dT = \int_0^R \frac{r \times \mu \times 2\pi r \omega}{60h} \times 2\pi r dr = \int_0^R \frac{4\pi^2 \omega r^3}{60h} dr$$

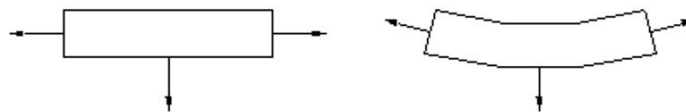
$$T = \frac{4\pi^2 \mu \omega}{4 \times 60h} \times R^4 = \frac{\pi^2 \mu \omega D^4}{60h \times 16}$$

### ۱-۵- کشش سطحی

کشش سطحی یکی از خواص سیال است. در اثر همین خاصیت سیال است که یک قطره آب می تواند در دهانه شیر باقی بماند یا سطح آب در داخل یک ظرف به حالت مقعر باشد. در اثر این خاصیت است که خاصیت موئینگی بوجود می آید و یا حشرات کوچک می توانند روی آب بنشینند.

عامل بوجود آورنده خاصیت کشش سطحی نیروهای جاذبه بین مولکولی است که این نیروها خود بر دو قسمت می باشند. نیروی پیوستگی<sup>۳</sup> که نیروی جاذبه بین مولکولهای مشابه است و نیروی چسبندگی<sup>۴</sup> که نیروی چسبندگی بین مولکولهای غیرمشابه است.

همانطور که در شکل ۱-۸ مشخص است، ذرات موجود در روی سطح مایع فقط نیروی پیوستگی را که ناشی از جاذبه مولکولهای مجاور هم سطح و پائین تر است تجربه می کند ولی بالاتر از سطح آب که مولکولهای آب و نتیجتاً جاذبه بین مولکولهای مشابه وجود ندارد، نیروی وارده از مولکولهای هوا در بالاتر از سطح آب ناچیز بوده و در نتیجه برآیند وارده بر مولکولهای سطح سیال رو به پائین است و اثر مکانیکی این وضعیت قابلیت تحمل نیروی کششی توسط سطح سیال است.



<sup>3</sup>- Cohesion

<sup>4</sup>- Adhesion

شکل ۸-۱: نیروهای بین مولکولی برای ذرات واقع بر سطح آب

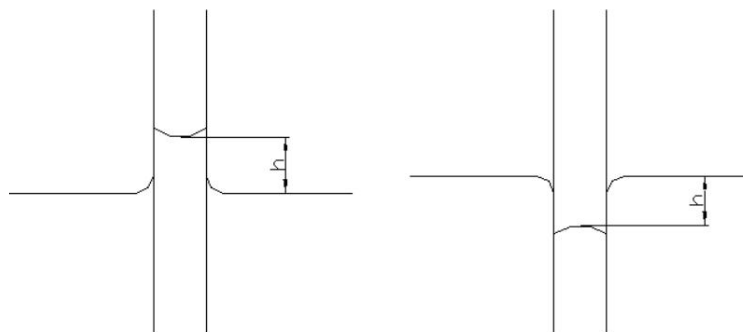
خاصیت کشش سطحی سیالات مختلف را با اندازه‌گیری کشش در واحد طول سطح مقایسه می‌کنند و واحد آن در سیستم متریک  $N/M$  می‌باشد.

کشش سطحی سیال در اثر افزایش درجه حرارت تا حدی کاهش می‌یابد. علاوه بر درجه حرارت، کشش سطحی به وجود املاح روی سطح سیال هم بستگی دارد.

کشش سطحی آب در مجاورت هوا بین  $0/0756$  تا  $0/0589$  نیوتن بر متر به ترتیب در درجه حرارت صفر و  $100$  درجه سانتیگراد است.

### ۱-۶- خاصیت موئینگی

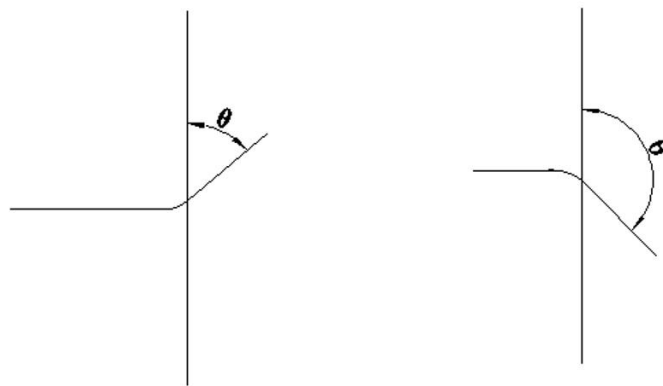
تفاوت بین نیروهای پیوستگی و چسبندگی باعث بوجود آمدن خاصیت موئینگی می‌شود. در اثر خاصیت موئینگی سیال در یک لوله نازک بالا رفته و یا پائین می‌آید.



شکل ۹-۱: بالا و پائین رفتن سیال در لوله موئین

در صورتیکه نیروهای چسبندگی بین سیال و جامد بیشتر از نیروی پیوستگی بین ذرات سیال باشد، در محل تماس سیال با سطح جامد، سطح سیال بالا می‌رود در این حالت زوایه سطح سیال در محل تماس

با جامد کمتر از ۹۰ درجه می‌باشد و در این حالت گفته می‌شود که سیال جسم جامد را خیس می‌کند. مثلاً در خصوص شیشه تمیز و آب زاویه  $\theta$  تقریباً برابر صفر درجه است. در حالتیکه نیروی چسبندگی بین سیال و جامد کمتر از نیروی پیوستگی بین ذرات سیال باشد، سیال در محل تماس با سطح جامد پائین می‌رود و زاویه  $\theta$  بیشتر از ۹۰ درجه بوده و اصطلاحاً گفته می‌شود سیال جامد را خیس نمی‌کند. مثل تماس جیوه با شیشه تمیز. شکل ۱-۱۰ زاویه تماس سیال با جسم جامد را نشان می‌دهد.



شکل ۱-۱۰: زاویه تماس سیال با جسم جامد

تعادل مایع در لوله موئین نتیجه تاثیر دو نیروی مخالف یکدیگر است. یکی از این نیروها، نیروی کشش سطحی است که جهت آن روبه بالا بوده و دیگری نیروی وزن مایع است که به سمت پایین اثر می‌کند. لذا برای یک لوله در تماس با سیال خواهیم داشت:

$$2\pi r\sigma\cos\theta - \pi r^2 h\gamma = 0$$

لذا ارتفاع موئینگی از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

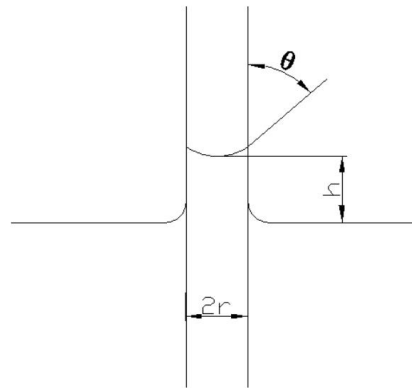
$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\gamma.r}$$

که  $\theta$  زاویه تماس سیال و جامد،  $\sigma$ : کشش سطحی سیال،  $r$  شعاع لوله موئین و  $h$  ارتفاع صعود موئینه می‌باشند.



برای محاسبه ارتفاع موئینگی کشش سطحی ( $\sigma$ ) و زاویه تماس ( $\theta$ ) هر دو مؤثر هستند که ارتفاع موئینگی از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$h = \frac{2\sigma \cos\theta}{\gamma \cdot r}$$



شکل ۱-۱: عوامل مؤثر در محاسبه ارتفاع موئین

مثال ۱-۷:

ارتفاع صعود آب با دمای ۲۰ درجه سانتی گراد را بین دو صفحه شیشه‌ای که با فاصله 1 mm از هم قرار گرفته‌اند را تعیین کنید:

حل:

در مورد سیال بین دو صفحه شیشه‌ای رابطه فوق اندکی متفاوت است. در این صورت اگر  $L$  فاصله بین دو صفحه و  $b$  عرض آنها باشد از تعادل نیروها داریم:

$$2b\sigma \cos\theta - bLh\gamma = 0$$

$$h = \frac{2\sigma \cos\theta}{\gamma \cdot L}$$

$$h = \frac{2 \times 0.0728 \times \cos 0}{\frac{1 \text{ mm}}{1000 \text{ mm}} \times 9810} = 0.015 \text{ m}$$

### ۷-۱- فشار بخار مایع

فشار جزئی مولکول‌های یک مایع را پس از تبدیل شدن به حالت گاز و در مجاورت سطح تماس سیال با هوا، فشار بخار می‌گویند. با افزایش درجه حرارت فشار بخار مایع افزایش می‌یابد. وقتی فشار بخار یک مایع معادل با فشار مطلق محلی و یا فشار گاز اطراف آن (هوا) می‌شود، مایع آماده تبخیر می‌گردد. از سوی دیگر اگر فشار گاز اطراف سطح آزاد مایع تا حد فشار بخار پائین بیاید در همان درجه حرارت مایع می‌جوشد. بنابراین فشار بخار یک مایع را می‌توان فشار جوش هم نامید.

به عنوان مثال با کاهش فشار روی مایع به مقدار کافی، آب می‌تواند در دمای اتاق بجوشد. در دمای  $20^\circ \text{C}$  فشار بخار آب  $2/447$  کیلوپاسکال و فشار بخار جیوه  $0/173$  پاسکال می‌باشد در حالیکه فشار بخار بنزین  $55$  کیلوپاسکال است.

در اغلب سیستم‌هایی که مایعات در آن جریان دارند احتمال اینکه در نقاطی از سیستم فشار بقدری کاسته شود تا مساوی فشار بخار یا کمتر از آن بشود وجود دارد. این موضوع سبب می‌شود که مایع سریعاً تبخیر شده و پدیده‌ای به نام کاویتاسیون رخ دهد. در این حالت حباب‌های بخار وارده مایع می‌شوند و سپس به طرف منطقه‌ای از سیال که در آن فشار بیشتر است حرکت می‌کنند و در آنجا متلاشی می‌شوند که این موضوع باعث وارد شدن نیروهایی به مولکول‌های سیال اطراف این حباب‌ها شده و انتقال انرژی و افزایش سرعت این ذرات می‌گردد. که این ذرات نهایتاً به جداره‌های مثل پمپ‌ها، توربین‌ها و ..... برخورد کرده و باعث تخریب شدید آنها می‌شوند.

در جدول ۱-۶، کشش سطحی و فشار بخار آب در دماهای مختلف آمده است.

## ۸-۱- معادله حاکم بر گازهای تراکم‌پذیر

با فرض گاز کامل یعنی گازی که از قانون مربوط به گازها تبعیت می‌کند و حرارت مخصوص آن نیز ثابت است داریم:

$$P.v = R.T$$

$$v = \frac{1}{\rho}$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{P}{RT}$$

که در آن  $P$  فشار (مطلق)،  $T$  درجه حرارت (کلوین)،  $v$ : حجم مخصوص و  $R$  ثابت گازها می‌باشد. که  $R_{air} = 287 \text{ m}^2 / \text{s}^2 . \text{k}$  است.

## مثال ۸-۱:

در درجه حرارت ۱۵ سانتیگراد و فشار یک اتمسفر چگالی هوا را محاسبه کنید.

حل:

$$\rho_{air} = \frac{P}{RT} = \frac{10^5 \text{ Pa}}{287 \times (15 + 273)} = 1.22 \text{ kg} / \text{m}^3$$

## مثال ۹-۱:

آب در درجه حرارت  $80^\circ \text{C}$  تحت چه فشار نسبی به حالت کاویتاسیون می‌رسد. فرض بر این است که فشار اتمسفر در این دما و در مکان مورد نظر  $70.6 \text{ kpa}$  است.

حل

با مراجعه به جدول ۶-۱ فشار بخار آب در دمای  $80^\circ \text{C}$  برابر  $46.4 \text{ kpa}$  است لذا در فشار نسبی منفی  $70.6 - 46.4 = 24.2$  کیلو پاسکال حالت کاویتاسیون رخ می‌دهد. یعنی اگر فشار سیال به  $-24.2 \text{ kpa}$  برسد در سیال مورد نظر پدیده کاویتاسیون بوجود می‌آید.

جدول ۴-۱: ویسکوزیته و دانسیته آب در فشار ۱ اتمسفر

| $T, ^\circ\text{C}$ | $\rho, \text{kg/m}^3$ | $\mu, \text{N} \cdot \text{s/m}^2$ | $\nu, \text{m}^2/\text{s}$ | $T, ^\circ\text{F}$ | $\rho, \text{slug/ft}^3$ | $\mu, \text{lb} \cdot \text{s/ft}^2$ | $\nu, \text{ft}^2/\text{s}$ |
|---------------------|-----------------------|------------------------------------|----------------------------|---------------------|--------------------------|--------------------------------------|-----------------------------|
| 0                   | 1000                  | 1.788 E-3                          | 1.788 E-6                  | 32                  | 1.940                    | 3.73 E-5                             | 1.925 E-5                   |
| 10                  | 1000                  | 1.307 E-3                          | 1.307 E-6                  | 50                  | 1.940                    | 2.73 E-5                             | 1.407 E-5                   |
| 20                  | 998                   | 1.003 E-3                          | 1.005 E-6                  | 68                  | 1.937                    | 2.09 E-5                             | 1.082 E-5                   |
| 30                  | 996                   | 0.799 E-3                          | 0.802 E-6                  | 86                  | 1.932                    | 1.67 E-5                             | 0.864 E-5                   |
| 40                  | 992                   | 0.657 E-3                          | 0.662 E-6                  | 104                 | 1.925                    | 1.37 E-5                             | 0.713 E-5                   |
| 50                  | 988                   | 0.548 E-3                          | 0.555 E-6                  | 122                 | 1.917                    | 1.14 E-5                             | 0.597 E-5                   |
| 60                  | 983                   | 0.457 E-3                          | 0.475 E-6                  | 140                 | 1.908                    | 0.975 E-5                            | 0.511 E-5                   |
| 70                  | 978                   | 0.405 E-3                          | 0.414 E-6                  | 158                 | 1.897                    | 0.846 E-5                            | 0.446 E-5                   |
| 80                  | 972                   | 0.355 E-3                          | 0.365 E-6                  | 176                 | 1.886                    | 0.741 E-5                            | 0.393 E-5                   |
| 90                  | 965                   | 0.316 E-3                          | 0.327 E-6                  | 194                 | 1.873                    | 0.660 E-5                            | 0.352 E-5                   |
| 100                 | 958                   | 0.283 E-3                          | 0.295 E-6                  | 212                 | 1.859                    | 0.591 E-5                            | 0.318 E-5                   |

جدول ۵-۱: خواص تعدادی از مایعات در دمای ۲۰ درجه سانتیگراد و فشار ۱ اتمسفر

| Liquid               | $\rho, \text{kg/m}^3$ | $\mu, \text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$ | $\gamma, \text{N/m}^3$ | $p_v, \text{N/m}^2$ | Bulk modulus, $\text{N/m}^2$ | Viscosity parameter $C^{\dagger}$ |
|----------------------|-----------------------|--|------------------------|---------------------|------------------------------|-----------------------------------|
| Ammonia              | 608                   | 2.20 E-4                                   | 2.13 E-2               | 9.10 E+5            | —                            | 1.05                              |
| Benzene              | 881                   | 6.51 E-4                                   | 2.88 E-2               | 1.01 E+4            | 1.4 E+9                      | 4.34                              |
| Carbon tetrachloride | 1,590                 | 9.67 E-4                                   | 2.70 E-2               | 1.20 E+4            | 9.65 E+8                     | 4.45                              |
| Ethanol              | 789                   | 1.20 E-3                                   | 2.28 E-2               | 5.7 E+3             | 9.0 E+8                      | 5.72                              |
| Ethylene glycol      | 1,117                 | 2.14 E-2                                   | 4.84 E-2               | 1.2 E+1             | —                            | 11.7                              |
| Freon 12             | 1,327                 | 2.62 E-4                                   | —                      | —                   | —                            | 1.76                              |
| Gasoline             | 680                   | 2.92 E-4                                   | 2.16 E-2               | 5.51 E+4            | 9.58 E+8                     | 3.68                              |
| Glycerin             | 1,260                 | 1.49                                       | 6.33 E-2               | 1.4 E-2             | 4.34 E+9                     | 28.0                              |
| Kerosine             | 804                   | 1.92 E-3                                   | 2.8 E-2                | 3.11 E+3            | 1.6 E+9                      | 5.56                              |
| Mercury              | 13,550                | 1.56 E-3                                   | 4.84 E-1               | 1.1 E-3             | 2.55 E+10                    | 1.07                              |
| Methanol             | 791                   | 5.98 E-4                                   | 2.25 E-2               | 1.34 E+4            | 8.3 E+8                      | 4.63                              |
| SAE 10W oil          | 870                   | 1.04 E-1 <sup>†</sup>                      | 3.6 E-2                | —                   | 1.31 E+9                     | 15.7                              |
| SAE 10W30 oil        | 876                   | 1.7 E-1 <sup>†</sup>                       | —                      | —                   | —                            | 14.0                              |
| SAE 30W oil          | 891                   | 2.9 E-1 <sup>†</sup>                       | 3.5 E-2                | —                   | 1.38 E+9                     | 18.3                              |
| SAE 50W oil          | 902                   | 8.6 E-1 <sup>†</sup>                       | —                      | —                   | —                            | 20.2                              |
| Water                | 998                   | 1.00 E-3                                   | 7.28 E-2               | 2.34 E+3            | 2.19 E+9                     | Table A.1                         |
| Seawater (30%)       | 1,025                 | 1.07 E-3                                   | 7.28 E-2               | 2.34 E+3            | 2.33 E+9                     | 7.28                              |

جدول ۶-۱: کشش سطحی و فشار بخار آب

| T, °C | Y, N/m | p <sub>10</sub> , kPa |
|-------|--------|-----------------------|
| 0     | 0.0756 | 0.611                 |
| 10    | 0.0742 | 1.227                 |
| 20    | 0.0728 | 2.337                 |
| 30    | 0.0712 | 4.242                 |
| 40    | 0.0696 | 7.375                 |
| 50    | 0.0679 | 12.34                 |
| 60    | 0.0662 | 19.92                 |
| 70    | 0.0644 | 31.16                 |
| 80    | 0.0626 | 47.35                 |
| 90    | 0.0608 | 70.11                 |
| 100   | 0.0589 | 101.3                 |
| 120   | 0.0550 | 198.5                 |
| 140   | 0.0509 | 361.3                 |
| 160   | 0.0466 | 617.8                 |
| 180   | 0.0422 | 1,002                 |
| 200   | 0.0377 | 1,554                 |
| 220   | 0.0331 | 2,318                 |
| 240   | 0.0284 | 3,344                 |
| 260   | 0.0237 | 4,688                 |
| 280   | 0.0190 | 6,412                 |
| 300   | 0.0144 | 8,581                 |
| 320   | 0.0099 | 11,274                |
| 340   | 0.0056 | 14,586                |
| 360   | 0.0019 | 18,651                |
| 374*  | 0.0*   | 22,090*               |

# فصل دوم

## استاتیک سیالات

### ۲-۱- تنش در سیال ساکن

در سیال ساکن تنش برشی وجود ندارد (چون  $\frac{du}{dy} = 0$  است)، لذا تنها نیروهایی که از طرف سیال ساکن بر محیط اطراف وارد می‌شود مربوط به نیروهای فشاری (عمودی) می‌باشد. اگرچه در مقایسه با نیروهای برشی ناشی از حرکت سیال، محاسبه این نیروهای فشاری ساده‌تر است، ولی بررسی آنها بسیار با اهمیت بوده و کاربردهای فراوانی دارد. بعنوان مثال در محاسبه نیروهای وارد بر سدها و محاسبه پایداری سدها، این نیروها از جایگاه خاصی برخوردارند.

### ۲-۲- تعریف فشار:

در هر نقطه از سیال ساکن فشار برابر است با نیرویی که بوسیله سیال بر واحد سطح (در آن نقطه) وارد می‌شود. ماهیت فشار در مایعات و گازها با هم متفاوت است. که در ادامه به آن اشاره می‌شود. پس داریم:

$$P = \frac{F}{A}$$

بعد فشار  $FL^{-2}$  خواهد بود.

در سیستم SI واحد فشار  $N/m^2$  یا پاسکال (Pa) می باشد.

در سیستم BG واحد فشار  $Lb/ft^2$  و یا  $Lb/in^2$  که PSI هم نامیده می شود، می باشد.

در سیستم CGS واحد فشار  $dyne/cm^2$  یا باری می باشد.

در سیستم MKS واحد فشار  $kgf/cm^2$  می باشد.

واحدهای فشار را می توان به صورت زیر به یکدیگر تبدیل نمود.

$$10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ bar} = 10^6 \text{ bari} = 1.2 \text{ kg / cm}^2 = 14.7 \text{ Psi} = 1 \text{ atm}$$

### ۲-۳- فشار در مایعات

فشار در مایعات به علت فواصل کم مولکولی، توسط مولکولها از یک سطح به سطح دیگر منتقل می شود بنابراین فشار در هر نقطه از یک مایع ساکن از وزن ذرات مایع که در ارتفاع بالاتر از آن قرار دارند ناشی می شود.

$$P = \gamma h$$

که  $h$  فاصله نقطه موردنظر تا سطح آزاد سیال می باشد.

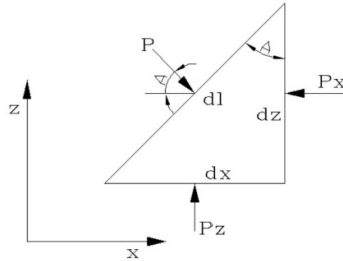
### ۲-۴- فشار در گازها

در گازها فواصل مولکولی به حدی است که مولکولها مستقل از یکدیگر هستند. بنابراین وزن یک مولکول نمی تواند به مولکولهای دیگر منتقل شود. بنابراین عامل ایجاد فشار در گازها ضربات مولکولهای گاز به سطح محصور شده در آن است و با کاهش دمای گاز، این فشار کم می شود. در این درس عمدتاً به بررسی فشار ناشی از مایعات و خصوصاً آب پرداخته خواهد شد.

### ۲-۵- مشخصات فشار استاتیکی سیالات (فشار هیدرواستاتیکی)

اولین نکته مهم در محاسبه نیروهای فشاری سیال در حالت سکون توجه به این نکته است که به دلیل عدم وجود تنشهای برشی فشار در همه جهات در یک سیال ساکن یکسان است. که بعنوان قانون پاسکال شناخته می شود و نشان می دهد فشار یک کمیت اسکالر است.

به منظور بررسی این نکته یک المان از سیال را در صفحه  $Z$  و  $Y$  و  $X$  در نظر می‌گیریم. ابعاد المان  $dx$ ،  $dy$  و  $dz$  است.



شکل ۱-۲: نیروهای وارد بر المان سیال در حال سکون

با توجه به شکل ۱-۲، برای تعادل نیروها در جهت افقی خواهیم داشت.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -P_x \cdot dz \cdot dy + P \cdot dl \cdot dy \cdot \cos \alpha = 0$$

از طرفی داریم:

$$dl \cdot \cos \alpha = dz$$

پس:

$$P_x = P$$

همچنین با نوشتن رابطه تعادل نیروها در جهت محور  $Z$  خواهیم داشت:

$$\sum F_z = 0 \rightarrow -P \cdot dl \cdot \sin \alpha \cdot dy - 1/2 \rho g \cdot dx \cdot dy \cdot dz + P_z \cdot dx \cdot dy = 0$$

$$dl \sin \alpha = dx$$

$$1/2 \gamma dx \cdot dy \cdot dz = 0$$

$$-P \cdot dl \cdot \sin \alpha \cdot dy = P_z \cdot dx \cdot dy$$

$$\Rightarrow P = P_z$$

در نتیجه خواهیم داشت:

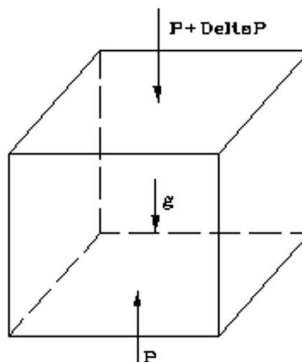
$$P = P_x = P_z$$

یعنی فشار در یک نقطه از سیال در تمام جهت یکسان است.



## ۲-۶- تغییرات فشار در امتداد قائم شاغولی

برای یک سال ساکن تراکم‌ناپذیر، تغییرات فشار در امتداد قائم بصورت خطی تغییر نموده و متناسب با وزن حجمی سیال ( $\gamma$ ) است. موضوع با بررسی یک المان حجمی سیال بررسی می‌گردد.



شکل ۲-۲: نیروهای سطحی و حجمی وارد و بر المان سیال ساکن

در المان شکل فوق به علت عدم وجود نیروهای بدنه‌ای در جهات  $X$  و  $Y$  و با بررسی تعادل نیروها در این دو جهت ملاحظه می‌گردد که برای سیال ساکن و بر روی یک سطح افقی، فشار در جهات  $X$  و  $Y$  ثابت و تغییرات آن صفر است. ولی برای جهت  $Z$  و با بررسی تعادل نیروها خواهیم داشت.

$$\sum F_Z = 0$$

$$-(P + \Delta P)\Delta x\Delta y + P\Delta x\Delta y - \gamma\Delta x\Delta y\Delta z = 0$$

با تقسیم نیروها بر  $\Delta x\Delta y\Delta z$  داریم:

$$-\gamma - \frac{\Delta P}{\Delta z} = 0$$

که در حالت حدی وقتی ابعاد المان به سمت صفر میل کند داریم:

$$\frac{dp}{dz} = -\gamma = -\rho g$$

با انتگرال گیری و اعمال شرایط مرزی:

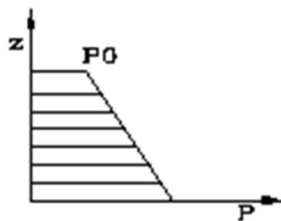
$$Z = Z_0 \rightarrow P = P_0$$

$$\Rightarrow P = P_0 - \gamma(Z - Z_0)$$

از رابطه فوق مشاهده می‌شود که اگر  $\gamma$  ثابت باشد، تغییرات فشار در امتداد قائم به صورت خطی خواهد بود و از آن به توزیع هیدرواستاتیک فشار یاد می‌شود مطابق شکل ۲-۳:

اگر فشار سطح مایع را صفر فرض کرده و عمق را به سمت پایین اندازه‌گیری نمایم، رابطه فوق به صورت زیر خواهد بود

$$P = \gamma h$$



شکل ۲-۳: توزیع هیدرواستاتیک فشار

### مثال ۲-۱:

با فرض  $\rho$  ثابت و فشار جو برابر یک اتمسفر در سطح آب، فشار مطلق در عمق ۸ کیلومتری آب اقیانوس را محاسبه کنید:

**حل:**

$$P = P_0 - \gamma Z$$

$$= 1.013 \times 10^5 - (9.81 \times 1000) \times (-8000) = 78.58 \text{ Mpa}$$

### ۲-۷- فشار اتمسفر، مطلق، نسبی

فشار وارده از طرف هوا به سطح زمین، فشار هوا یا اتمسفر نام دارد. فشار اتمسفر در سطح دریاهای آزاد برابر ۷۶۰ میلیمتر جیوه می‌باشد.

فشار را می‌توان نسبت به هر مبنای دلخواهی بیان نمود. معمولاً مبنای فشار، صفر مطلق و یا فشار اتمسفر محلی می‌باشد. زمانی که فشار برحسب اختلاف آن با خلاء کامل بیان گردد، آن را فشار مطلق گفته و زمانی که برحسب اختلاف با اتمسفر محلی بیان شود، فشار را فشار نسبی می‌نامند.

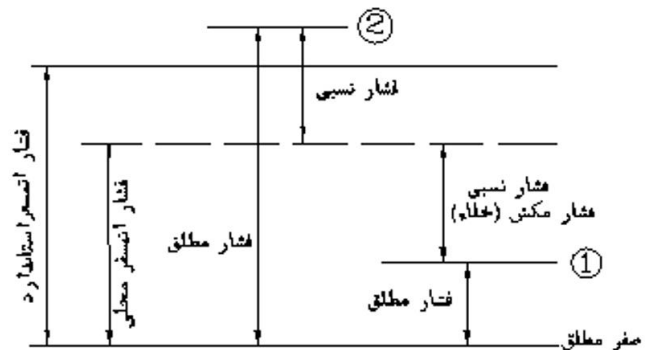
فشار اتمسفر محلی توسط بارومتر جیوه‌ای (شکل زیر) اندازه‌گیری می‌شود. که این وسیله اختلاف فشار بین اتمسفر و خلاء یا لوله‌ای که هوای آن تخلیه شده باشد را اندازه می‌گیرد.

در شکل ۲-۴ رابطه صفر مطلق و فشار اتمسفر محلی نشان داده شده است. اگر نقطه‌ای در زیر خط فشار اتمسفر محلی، که به عنوان مبدأ اندازه‌گیری معین شده، قرار داشته باشد، آنرا فشار منفی، مکش و یا خلاء می‌نامند. رابطه بین فشار اتمسفر و مطلق به صورت زیر است.

$$P_{abs} = P_{atm} + P_{gage}$$

که  $P_{abs}$  فشار مطلق،  $P_{atm}$  فشار اتمسفر و  $P_{gage}$  فشار نسبی است.

شکل ۲-۴: رابطه صفر مطلق و فشار اتمسفر محلی



## ۲-۷-۱- اندازه‌گیری فشار اتمسفر و

### فشار مطلق

بارومتر جیوه‌ای یکی از وسایل اندازه‌گیری فشار می‌باشد. براساس شکل ۲-۵، فشار مطلق در نقطه O براساس فاصله تا سطح مایع در لوله فشارسنج برابر است با:

$$P_0 = \gamma h + P_{vapor}$$

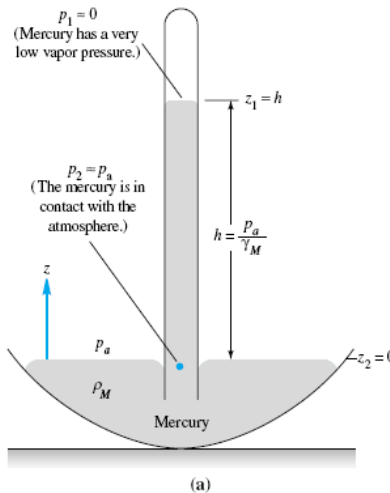
که با تقریب قابل قبولی می‌توان فرض کرد  $P_{vap} = 0$  از سوی دیگر فشار مطلق در نقطه a برابر با فشار اتمسفر است یعنی:

$$P_a = P_{atm}$$

بنابراین باتوجه به همسطح بودن نقطه a و 0 در یک سیال واحد داریم:

$$P_{atm} = \gamma h$$

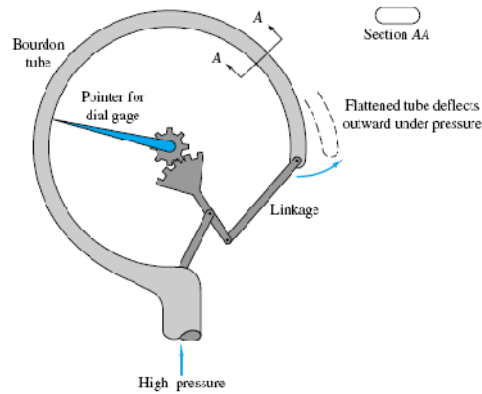
اگر سیال جیوه باشد و بارومتر در سطح دریای آزاد باشد، مقدار h برابر ۷۶۰ میلیمتر و اگر سیال آب باشد مقدار h برابر ۱۰/۳۴ متر خواهد بود.



شکل ۲-۵: بارومتر جیوه ای

## ۲-۷-۲- اندازه‌گیری فشار نسبی

اندازه‌گیری فشار نسبی توسط وسیله‌ای به نام اندازه‌گیر بوردن انجام می‌شود. در این وسیله قسمت فشاری از یک لوله فلزی خمیده یکنواخت تشکیل شده است که یک سر آن بسته و سر دیگرش به محلی که باید فشار آن اندازه‌گیری شود، متصل می‌باشد. با افزایش فشار داخلی، لوله تمایل به راست شدن خواهد داشت و اتصال بین عقربه و لوله خمیده کشیده می‌شود و در نتیجه عقربه شروع به گردش می‌کند. صفحه عقربه دار زمانی صفر را نمایش می‌دهد که فشار بیرونی و درونی لوله برابر باشد.



شکل ۲-۶: فشارسنج بوردن

## ۲-۸- فشار برحسب ارتفاع یک سیال (ارتفاع معادل فشار)

اگر فشار سطح مایع را صفر فرض کرده و عمق را به سمت پایین اندازه‌گیری نمایم، یعنی با استفاده از

رابطه  $P = \gamma h$  می‌توان فشار در هر نقطه را معادل ارتفاع  $h$  از سیالی با وزن مخصوص  $\gamma$  در نظر گرفت.

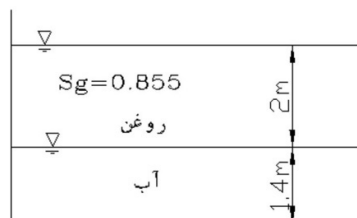
بعنوان مثال اگر فشار در نقطه‌ای ۹۸۱۰ پاسکال باشد، می‌توان این فشار را معادل یک متر آب با

$\gamma = 9810$  دانست. تأکید می‌شود این رابطه تنها برای سیال تراکم‌ناپذیر که در آن  $\gamma$  ثابت می‌باشد صادق

می‌باشد.

### مثال ۲-۲:

برای شکل زیر ارتفاع معادل فشار در کف مخزن برحسب آب را حساب کنید:



شکل ۲-۷: شکل مثال ۲-۲

حل:

$$\gamma_{oil} = 0.855 \times 9810 = 8390 \text{ N/m}^3$$

$$P_{oil} = \gamma_{oil} \times h_{oil} = 8390 \times 2 = 16.78 \text{ KN/m}^2$$

ارتفاع نظیر فشار روغنی بر حسب آب

$$h = \frac{16.78}{9.81} = 1.71 \text{ m}$$

ارتفاع نظیر فشار کل بر حسب آب

$$h = 1.71 + 1.4 = 3.11 \text{ m}$$

**۲-۹- اندازه‌گیری فشار**

وسایل اندازه‌گیری فشار به شرح زیر است.

**۲-۹-۱- بارومتر جیوه‌ای**

یکی از وسایل اندازه‌گیری فشار اتمسفر می‌باشد که پیشتر شرح داده شد.

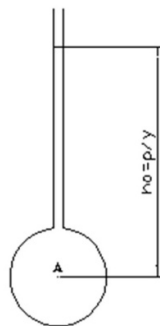
**۲-۹-۲- فشارسنج بوردن**

وسیله‌ای است برای اندازه‌گیری فشار که پیشتر شرح داده شد.

**۲-۹-۳- مانومترها**

در این دستگاه‌ها از قرائت اختلاف ارتفاع ستون مایع، جهت تعیین اختلاف فشار استفاده می‌شود. ساده‌ترین نوع این دستگاه‌ها، پیزومتر نامیده می‌شود و در حالتی از آنها استفاده می‌شود که فشار نسبی مایع مثبت باشد.

اگر لوله A در شکل زیر تحت فشار قرار داشته باشد، با سوراخ کردن لوله و اتصال شیشه‌ای (پیزومتر) به آن، مایع در پیزومتر تا جایی بالا می‌آید که به حالت تعادل برسد. بدین منظور طول لوله باید به اندازه کافی بلند باشد تا مایع از آن سرریز نکند. ارتفاع مایع در لوله‌های پیزومتر مستقیماً مقدار فشار نسبی در محل اتصال به لوله را بدست می‌دهد.



شکل ۲-۸: استفاده از پیزومتر در اندازه‌گیری فشار

پیزومترها دارای دو اشکال اساسی هستند. اول آنکه زمانی که فشار زیاد باشد و در نتیجه ارتفاع نظیر فشار زیاد باشد ارتفاع لوله پیزومتر باید بسیار زیاد باشد. مثلاً اگر در شکل قبل سیال جاری در لوله آب بوده و فشار آن یک اتمسفر باشد ارتفاع نظیر آب این فشار برابر حدود  $10/33$  متر آب خواهد بود و بنابراین نیازی به پیزومتری با حداقل ارتفاع  $10/33$  متر برای اندازه‌گیری این فشار خواهد بود. ثانیاً این وسیله امکان اندازه‌گیری فشارهای منفی را ندارد برای حل مشکلات مذکور از مانومترهای جیوه‌ای و تفاضلی استفاده می‌شود. در ادامه به شرح کار این دستگاه‌ها پرداخته می‌شود. اما پیشتر ذکر نکات زیر در این خصوص ضروری است.

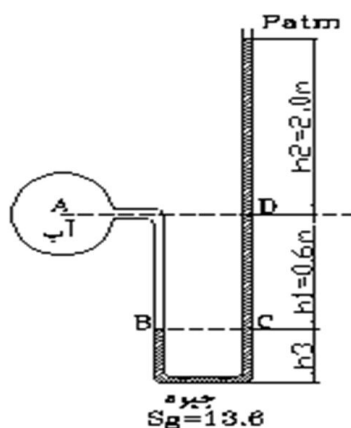
۱- همانطور که پیشتر اثبات شد، نقاط هم‌تراز در یک سیال ثابت هم‌فشار می‌باشند.

۲- با حرکت به سمت پائین فشار زیاد شده و بالعکس.

۳- در خصوص گازها چون وزن حجمی آنها خیلی کم است، از تغییرات فشار با عمق در آنها (در محدوده تغییرات عمق در مانومترها) صرفه نظر می‌شود.

### مثال ۲-۳

در شکل زیر برای اندازه‌گیری فشار در لوله‌ای در نقطه A، از یک مانومتر جیوه‌ای استفاده شده است، فشار در نقطه A را محاسبه کنید.



شکل ۲-۹: شکل مثال ۲-۳

حل:

$$\begin{aligned}
 P_B &= \gamma_w \cdot h_1 + P_A \\
 &= 9.81 \times 1000 \times 0.6 + P_A \\
 P_B &= 5886 + P_A
 \end{aligned}$$

فشار در نقطه B و C یکسان است پس:

$$P_B = P_C$$

چرا فشار در نقطه B و C ثابت است؟

$$\begin{aligned}
 P_B + h_3 \cdot \gamma_{Hg} - h_3 \cdot \gamma_{Hg} &= P_C \\
 \Rightarrow P_B &= P_C
 \end{aligned}$$

پس خواهیم داشت:

$$P_C = 5886 + P_A \quad (I)$$

$$P_C - h_1 \cdot \gamma_{Hg} - h_2 \cdot \gamma_{Hg} = P_D$$

$$P_C - 0.6 \times 9810 \times 13.6 - 0.20 \times 9810 \times 13.6 = 0 \quad (II)$$

$$I, II \Rightarrow P_A = -(9810 \times 0.6) + 13.6 \times 9.81 \times 1000 \times 0.8$$

$$P_A = 100846.8 \text{ Pa}$$

راه حل خلاصه تر

$$P_A + h_1 \cdot \gamma_w - h_1 \cdot \gamma_{Hg} - h_2 \cdot \gamma_{Hg} = P_D$$

$$P_A = -h_1 \cdot \gamma_w + (h_1 + h_2) \gamma_{Hg}$$

$$P_A = -0.6 \times 9810 + 0.8 \times 9810 \times 13.6$$

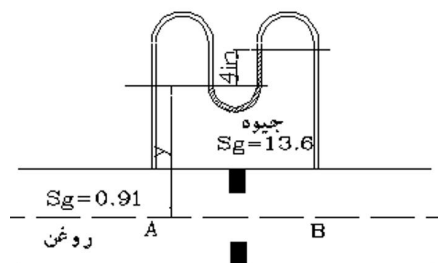
$$P_A = 100846.8 \text{ Pa}$$

مثال ۲-۴:

یک مانومتر تفاضلی مطابق شکل به یک لوله متصل است. اختلاف فشار بین نقطه A و B را بدست

آورید.





شکل ۱۰-۲: شکل مثال ۴-۲

حل:

$$P_A - \gamma_{oil} \times y - \gamma_{Hg} \times \left(\frac{4}{12}\right)ft + \gamma_{oil} \times \left(\frac{4}{12} + y\right)ft = P_B$$

$$P_A - P_B = 0.91 \times 62.4 \times y + 13.6 \times 62.4 \times \frac{4}{12} - \left(\frac{4}{12} + y\right) \times 0.91 \times 62.4$$

$$P_A - P_B = 264.2 \text{ Lb/ft}^2$$

نکته: در سیستم BG مقدار  $\rho$  آب در دمای  $20^\circ$  برابر  $1.94 \text{ Slug/ft}^3$  و شتاب جاذبه  $32.2 \text{ ft/s}^2$

است پس در این سیستم  $\gamma$  آب برابر  $62.4 \text{ Lb/ft}^3$  است.

۱۰-۲- نیروهای وارد بر سطوح از طرف سیال ساکن (نیروهای هیدرواستاتیکی)

یادآوری می‌شود در سیال ساکن نیروی برشی و تنش برشی وجود ندارد و نیروی وارده از طرف سیال

ساکن بر هر سطح واقعی یا فرضی که در نظر گرفته شود، عمود خواهد بود.

نیروهای هیدرواستاتیکی در چند تقسیم‌بندی به صورت زیر مورد بررسی خواهند گرفت.

۱- نیروهای وارد بر سطوح صاف

الف- نیروی وارده بر سطح افقی

ب- نیروی وارده بر سطح قائم

ج- نیروی وارده بر سطح مورب

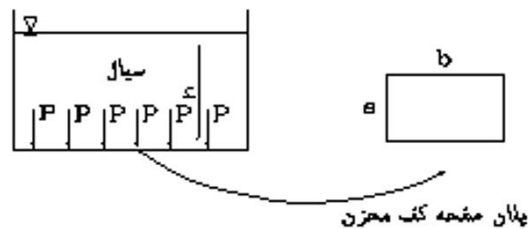
۲- نیروهای وارده بر سطح منحنی الشكل

## ۲-۱۰-۱ - نیروهای هیدرواستاتیکی وارد بر سطوح افقی

اگر سطح صاف مورد نظر در یک صفحه افقی باشد، محاسبه نیرو کار ساده‌ای خواهد بود زیرا فشار در هر نقطه از سطح مورد نظر یکسان است و از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$F = P.A$$

که  $P$  فشار در سطح مورد بررسی بوده و از رابطه  $P = \gamma h$  بدست می‌آید و  $A$  سطحی است که نیروی هیدرواستاتیکی به آن وارد می‌شود.



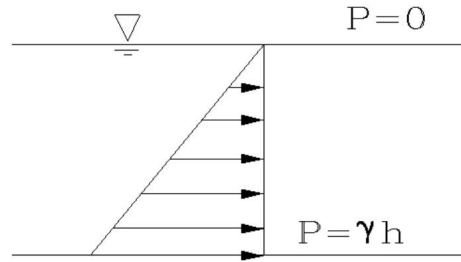
شکل ۱۱-۲: نیروی وارد بر سطوح افقی صاف

$$F = PA \Rightarrow F = \gamma h \times (a \times b)$$

## ۲-۱۰-۲ - نیروهای هیدرواستاتیکی وارد بر سطوح قائم

یک صفحه قائم که لبه آن در سطح آزاد آب است و عرض آن (عمود بر صفحه) ثابت است، به صورت شکل ۱۲-۲ را در نظر بگیرید. در این حالت اگر نوع سیال ( $\gamma$  آن) در عمق تغییر نیابد، فشار از صفر در سطح آزاد تا  $\gamma h$  در کف به صورت خطی تغییر می‌کند. اگر توزیع فشار یکنواخت بود مرکز فشار (محل اثر نیروی برآیند) همان مرکز سطح صفحه قائم خواهد بود، ولی با توجه به توزیع خطی فشار مرکز فشار پائین‌تر از مرکز سطح خواهد بود. در این حالت نیروی افقی وارد بر صفحه قائم از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$F = \gamma h_C A$$

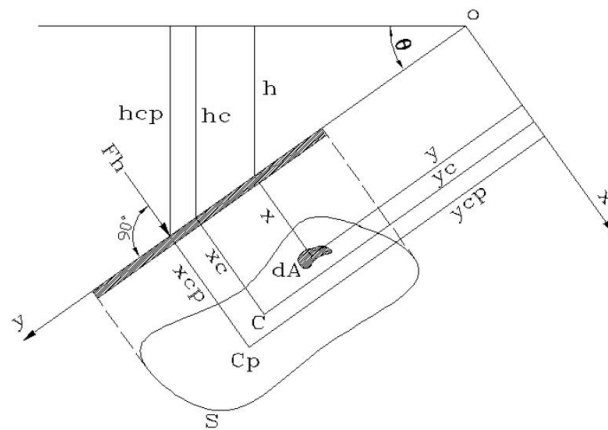


شکل ۲-۱۲: تغییرات فشار و نیروی فشاری وارد بر صفحه قائم در عمق

که رابطه فوق  $h_C$  فاصله مرکز سطح تا سطح آزاد سیال می‌باشد و با توجه به شکل صفحه قائم، متغیر است. در ادامه این فصل روابط مورد نیاز برای تعیین  $h_C$  هر سطح ارائه گردیده است.

### ۲-۱۰-۳- نیروهای هیدرواستاتیکی وارده بر سطوح مورب

اگر صفحه مستغرق نسبت به امتداد افق زاویه  $\theta$  را بسازد (مطابق شکل ۲-۱۳)، آنگاه نیروی افقی وارد بر سطح مورب به صورت زیر محاسبه می‌شود:



شکل ۲-۱۳: نیروی فشاری وارد بر سطح مورب

برای محاسبه نیروی وارد بر سطح مورب  $S$ ، المان  $dA$  از این سطح را در نظر گرفته و نیروی عمودی وارد بر این صفحه را از رابطه زیر محاسبه می‌کنیم:

$$dF = PdA$$

در این رابطه  $F$  نیروی وارد بر المان،  $P$  فشار وارد بر المان و  $dA$  مساحت المان می‌باشد. بدین ترتیب نیروی وارد بر کل صفحه  $S$  را می‌توان از جمع نیروهای وارد بر المان‌های  $dA$  از این صفحه به ترتیب زیر

$$F = \int_S P \cdot dA \quad \text{محاسبه کرد:}$$

که  $F$  نیروی وارد بر صفحه به مساحت  $S$  می‌باشد

$$F = \int_S \gamma h dA$$

$$h = y \sin \theta$$

$$F = \int_S \gamma \cdot y \cdot \sin \theta \cdot dA$$

$$F = \gamma \sin \theta \int_S y dA$$

در رابطه فوق  $\int_S y \cdot dA$  همان ممان اول سطح حول محور  $X$ ها است. و از قبل می‌دانیم:

$$\int_S y dA = y_C \times A$$

$$y_C = \frac{\int_S y dA}{A}$$

بنابراین نیروی وارد بر سطوح مورب برابر است با:

$$F = \gamma \cdot \sin \theta \cdot y_C \cdot A$$

که برابر است با:

$$F = \gamma \cdot h_C \cdot A$$

که در این رابطه  $h_C$  ارتفاع قائم مرکز سطح صفحه مورب تا سطح سیال می‌باشد و  $A$  مساحت سطح مورب است.  $y_C$  نیز فاصله افقی مرکز سطح صفحه مورب تا سطح آزاد سیال است.  $h_C$  و  $y_C$  با رابطه زیر به یکدیگر مرتبط می‌شوند:

$$h_C = y_C \sin \theta$$

## ۲-۱۱- مرکز فشار:

مرکز فشار محل اثر نیروی فشاری برآیند روی یک جسم مستغرق است. مرکز فشار به صورت  $C_p(x_{CP}, y_{CP})$  نمایش داده می‌شود. موقعیت مرکز فشار را برای صفحه قائم و مورب می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

## ۲-۱۱-۱- تعیین محل $y_{CP}$

مجموع لنگرهای نیروهای فشارهای جزئی نسبت به محور  $X$  = گشتاور نیروی  $F$  حول محور  $X$

بنابراین

$$\begin{aligned} F \times y_{CP} &= \int_S y \cdot dF \\ &= \int_S y \cdot dF \\ &= \int_S y \cdot (PdA) \\ &= \int_S y \cdot (\gamma h) \cdot dA \\ &= \int_S y \cdot \gamma \cdot y \cdot \sin \theta \cdot dA \\ &= \int_S \gamma \cdot \sin \theta \cdot y^2 \cdot dA \\ F \times y_{CP} &= \gamma \cdot \sin \theta \cdot \int_S y^2 dA \end{aligned}$$

در این رابطه  $\int_S y^2 dA$ ، ممان دوم سطح نسبت به محور  $X$ ها است یعنی:

$$I_X = \int y^2 dA$$

بنابراین از رابطه فوق خواهیم داشت:

$$y_{CP} = \frac{\gamma \cdot \sin \theta \cdot I_X}{\gamma \cdot \sin \theta \cdot y_C \cdot A}$$

$$y_{CP} = \frac{I_X}{y_C \cdot A}$$

که  $y_{CP}$  فاصله مرکز فشار تا محور  $X$ ها است. در رابطه فوق برای محاسبه مرکز فشار از  $I_X$  یا ممان دوم سطح نسبت به محور  $X$ ها استفاده می‌شود. در ادامه به محاسبه  $I_{XC}$  یا ممان اینرسی نسبت به مرکز سطح جسم بجای  $I_X$  پرداخته می‌شود.

بنابراین داریم:

$$I_X = I_{XC} + y_C^2 A$$

با توجه به این رابطه  $y_{CP}$  به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$y_{CP} = y_C + \frac{I_{XC}}{y_C \cdot A}$$

همانطور که از رابطه فوق مشخص است چون  $\frac{I_{XC}}{y_C \cdot A}$  همیشه بزرگتر از صفر می‌باشد بنابراین مقدار  $y_{CP}$  همیشه بزرگتر از  $y_C$  خواهد بود. و در حالت حدی زمانی  $y_{CP}$  برابر  $y_C$  خواهد شد که  $y_C$  بسیار بزرگ باشد تا حاصل  $\frac{I_{XC}}{y_C \cdot A}$  به صفر میل کند. پس نتیجه گرفته می‌شود در همه حال مرکز فشار پائین‌تر از مرکز سطح است و با افزایش عمق سیال این فاصله کمتر می‌شود.

## ۲-۱۱-۲- تعیین محل $X_{CP}$

برای تعیین فاصله افقی مرکز فشار تا محور  $Y$ ها، همانند آنچه در قسمت پیشین برای محاسبه  $y_{CP}$  انجام گردید، عمل می‌شود. بنابراین خواهیم داشت:

$$F.x_{CP} = \int_S x.P.dA$$

$$= \gamma \sin \theta \int_S xy dA$$

در رابطه فوق

$$I_{xy} = \int_S xy dA$$

پس:

$$x_{CP} = \frac{I_{xy}}{y_C \cdot A}$$

از طرفی داریم:

$$I_{xy} = I_{xyc} + A.x_C.y_C$$

در نهایت خواهیم داشت:

$$x_{CP} = x_C + \frac{I_{xyc}}{y_C \cdot A}$$

**نکته:** اگر یکی از محورهای موازی  $x$  و  $y$  که از مرکز سطح می‌گذرد محور تقارن باشد،  $I_{xyc} = 0$

می‌شود و  $x_{CP} = x_C$  خواهد شد.

۲-۱۲- یادآوری:

مرکز سطح و ممان اینرسی اشکال زیر به صورت زیر می باشد.

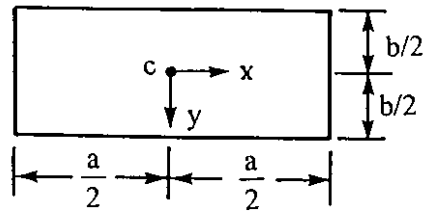
۱- مستطیل

$$x_C = a/2$$

$$y_C = b/2$$

$$I_{x_C} = \frac{1}{12}ba^3$$

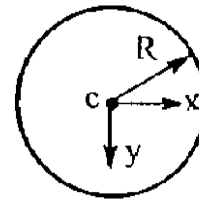
$$I_{y_C} = \frac{1}{12}ab^3$$



۲- دایره

C : O

$$I_{x_C} = I_{y_C} = \frac{\pi R^4}{4}$$



۳- ربع دایره

$$x_C = \frac{4R}{3\pi}$$

$$y_C = \frac{4R}{3\pi}$$

$$I_{x_C} = \frac{\pi \times R^4}{16}$$

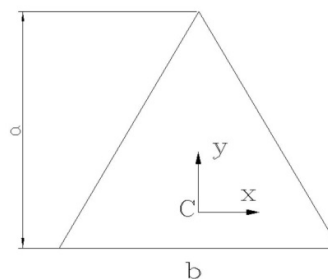


۴- مثلث

$$x_C = \frac{b}{2}$$

$$y_C = \frac{1}{3}a$$

$$I_{xc} = \frac{1}{36}ba^3$$

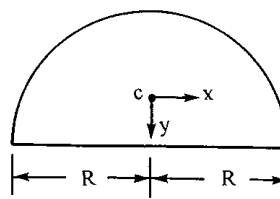


۵- نیم دایره

$$x_C = 0$$

$$y_C = \frac{4R}{3\pi}$$

$$I_{xc} = \frac{\pi \times R^4}{8}$$

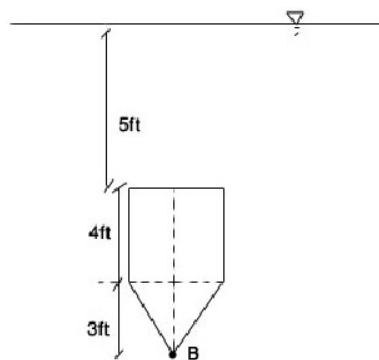


۶- اشکال مرکب

با مثال زیر به شرح روش‌های موجود برای تعیین مرکز سطح و ممان اینرسی اشکال مرکب پرداخته می‌شود.

مثال ۲-۵-

مقدار و محل اثر فشاری آب را بر یک طرف سطح شکل زیر که بصورت قائم در آب قرار گرفته است، تعیین کنید.



شکل ۲-۱۴: شکل مثال ۲-۵

حل:

راه حل اول:

$$Fh_1 = \gamma h_{c_1} A_1 = 62.4 \times \left(5 + \frac{4}{2}\right) \times 4 \times 4$$

$$Fh_1 = 6988.8 \text{ lb}$$

$$y_{cp_1} = y_{c_1} + \frac{I_{xx}}{y_{c_1} A_1} = 7 + \frac{(4^4 / 12)}{4 \times 4 \times 7} = 7.19 \text{ ft}$$

$$Fh_2 = \gamma h_{c_2} A_2 = 62.4 \times \left(9 + 3 \times \frac{1}{3}\right) \times \frac{3 \times 4}{2}$$

$$Fh_2 = 3744 \text{ lbf}$$

$$y_{cp_2} = 10 + \frac{(3^2 \times 4) / 36}{10 \times \frac{3 \times 4}{2}} = 10.05 \text{ ft}$$

$$B_p = \frac{\sum MB}{\sum F}$$

فاصله مرکز فشار تا کف

$$MB = (12 - 7.19) \times 6988.8 + (12 - 10.05) \times 3744 = 40916.92 \text{ lb.ft}$$

$$\sum F = Fh_1 + Fh_2 = 10732.8 \text{ lb}$$

$$B_p = 3.812 \rightarrow y_{cp} = 12 - 3.812 = 8.188 \text{ ft}$$

محاسبه فاصله مرکز فشار جسم تا سطح آب

راه حل دوم:

محاسبه مرکز ثقل جسم

$$y_c \times \left(4^2 + \frac{3 \times 4}{2}\right) = (5 + 2) \times 4^2 + (9 + 1) \times \frac{3 \times 4}{2} \Rightarrow y_c = 7.818$$

$$Fh = \gamma h_c A = 62.4 \times 7.818 \times 22 = 10732.80 \text{ lb}$$

محاسبه نیروی وارد بر جسم

$$(I_{xx})_1 = \frac{4 \times 3^3}{36} + (10 - 7.818)^2 \times \frac{3 \times 4}{2} = 31.567 \text{ ft}^4$$

محاسبه ممان اینرسی قسمت مثلثی نسبت

$$(I_{xx})_2 = \frac{4^2}{12} + 4^2 \times (7.818 - 7)^2 = 32.039 \text{ ft}^4$$

به مرکز سطح جسم

$$I_{xx} = (I_{xx})_1 + (I_{xx})_2 = 63.606 \text{ ft}^4$$

محاسبه ممان اینرسی قسمت مربعی نسبت

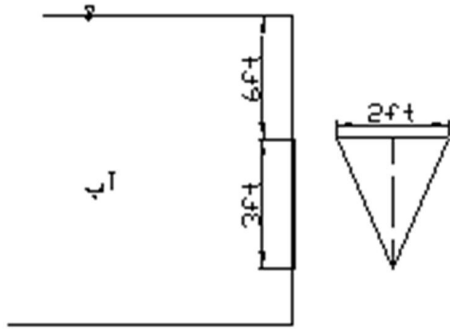
$$y_{cp} = 7.818 + \frac{63.606}{7.818 \times 22} = 8.188 \text{ ft}$$

به مرکز سطح جسم

مرکز سطح جسم

مثال ۲-۶:

یک دریچه مثلثی قائم را که یک طرف آن مطابق شکل در معرض آب قرار گرفته است در نظر بگیرید:



الف: نیروی برآیند بر دریچه را حساب کنید.

ب: موقعیت مرکز فشار دریچه را بدست آورید.

شکل ۲-۱۵: شکل مثال ۲-۶

$$F_h = \gamma h_C A = 62.4 \times \left( \frac{1}{3} \times 3 + 6 \right) \times \frac{2 \times 3}{2} = 1310 \text{ Lb}$$

حل

$$h_{CP} = h_C + \frac{I}{h_C \times A}$$

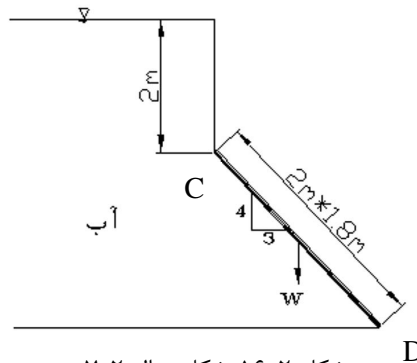
$$h_{CP} = 7 + \frac{bh^3}{7 \times 3} = 7.07 \text{ ft}$$

مثال ۲-۷:

دریچه مستطیلی CD به عرض ۱/۸ متر (عمود بر صفحه کاغذ) و طول ۲ متر را مطابق شکل زیر در نظر

بگیرید. وزن لازم برای بسته نگاه داشتن دریچه تا زمانی که سطح آب ۲ متر بالاتر از محور لولای دریچه

قرار گیرد، چقدر است.



شکل ۲-۱۶: شکل مثال ۲-۷

حل:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{3}{4} \Rightarrow \theta = 36.87^\circ$$

$$F_h = \gamma \cdot h_c \cdot A$$

$$9810 \times 2.8 \times 1.8 \times 2 = 98800N$$

$$y_c = \frac{2}{2} \times (2 / \cos 36.87^\circ) = 3.5m$$

$$h_c = 2 + \frac{2}{2} \times \cos(36.87) = 2.8m$$

$$y_{cp} = y_c + \frac{I}{y_c A} = 3.5 + \frac{\frac{1.8 \times 2^3}{12}}{1.8 \times 2 \times \frac{h_c}{\cos(36.87)}} = 3.59m$$

- نیروی وزن به مرکز ثقل مستطیل اثر می‌کند.

دریچه باز نخواهد شد اگر:

$$\sum M_c = 0$$

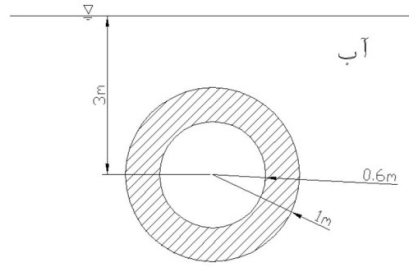
$$F_h \times \left( y_{CP} - \frac{2}{\cos \theta} \right) - W \sin \theta \times 2 \times \frac{1}{2} = 0$$

$$W = 180.3KN \rightarrow$$

اگر وزن دریچه ۱۸۰/۳ کیلو نیوتن باشد، در این صورت اگر ارتفاع آب تا ۲ متر نیز افزایش یابد، دریچه باز نمی‌شود.

مثال ۲- ۸

مرکز فشار نیروی وارد از طرف آب به یک سطح حلقوی قائم مطابق شکل زیر را بدست آورید.



۱۷-۲: شکل مثال ۷-۲

حل:

$$F_h = \gamma h_c A$$

$$F_h = 9810 \times 3 \times (\pi \times 1^2 - \pi \times 0.6^2) = 59.05 \text{ KN}$$

$$h_{cp} = h_c + \frac{I}{h_c \times A}$$

$$I_{\bar{X}} = \frac{\pi \times 1^4}{4} - \frac{\pi \times 0.6^4}{4} = 0.6836 \text{ m}^4$$

$$h_{cp} = 3 + \frac{0.6836}{3(\pi \times 1^2 - \pi \times 0.6^2)} = 3.113 \text{ m}$$

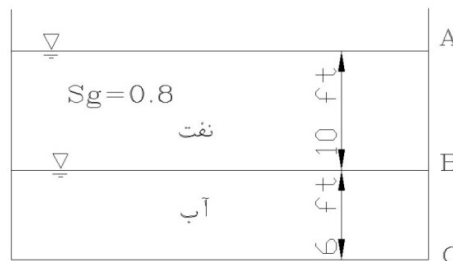
### ۱۳-۲- نیروی هیدرواستاتیک در سیال چند لایه

با یک مثال به بررسی نیروی هیدرواستاتیک در سیال چند لایه پرداخته می‌شود.

مثال ۹-۲:

مخزن شکل زیر حاوی نفت و آب است. نیروی برآیند بر روی ضلع ABC را بدست آورید. در صورتی که

مخزن (عمود بر صفحه کاغذ) ۴ فوت باشد.



۱۸-۲: شکل مثال ۷-۲

حل:

برای قسمت AB :

$$F_{AB} = \gamma h_c A = 0.8 \times 62.4 \times 5 \times 40 = 9980 \text{Lb}$$

$$(h_{c,p})_{AB} = \frac{2}{3} \times 10 = 6.67 \text{ft}$$

برای قسمت BC :

$$h_w = sg \times h_{oil} = 0.8 \times 10 = 8 \text{ft}$$

$$F_{BC} = \gamma h_c A = 62.4 \times (8 + 3) \times 6 \times 4 = 16470 \text{Lb}$$

$$(h_{cp})_{BC} = h_c + \frac{I}{h^c \times A} = 11 + \frac{4 \times 6^3}{11 \times 24} = 11.27 \text{ft}$$

مرکز فشار قسمت BC، ۱۱/۲۷ فوت زیر نقطه O یا ۱۳/۲۷ فوت زیر نقطه A قرار دارد.

$$F = F_{AB} + F_{BC} = 26450 \text{Lb}$$

برای تعیین نقطه اثر نیروی برآیند می توان نوشت

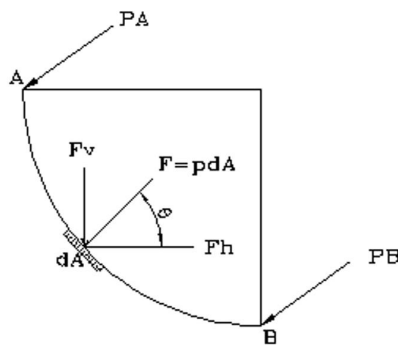
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 26450 \times h_{cp} = 9980 \times 6.67 + 16470 \times 13.27$$

$$h_{cp} = 10.78 \text{ft}$$

## ۲-۱۴- نیروهای وارد بر سطوح منحنی

از آنجا که نیروی وارده از طرف سیالات بر سطوح مختلف عمود بر آنها است، وقتی با سطوح منحنی مواجه هستیم امتداد جزء نیروهای وارده به جزء سطوح با یکدیگر متفاوت بوده و محاسبه برآیند آنها کاملاً پیچیده است. لذا معمولاً برای محاسبه نیروی وارده بر این سطوح، اقدام به محاسبه مؤلفه نیروهای فشاری در امتداد مختلف می گردد.

در شکل ۲-۱۹ نیروی وارد بر یک سطح منحنی و مؤلفه های آن نمایش داده شده است.



شکل ۱۹-۲: نیروی وارد بر یک سطح منحنی و مؤلفه‌های آن

### ۲-۱۴-۱- مؤلفه افقی وارد بر سطوح منحنی

همانطور که در شکل ۱۹-۲ مشاهده می‌شود نیروی وارد بر المان A به مساحت dA که روی سطح منحنی شکل AB قرار دارد برابر با  $F = PdA$  است. لذا مؤلفه افقی نیروی وارد بر المان  $PdA \cos \theta$  خواهد بود. لذا با جمع کردن نیروهای وارد بر مجموع المانهای A روی سطح AB نیروی افقی وارد بر این سطح بصورت زیر خواهد بود:

$$F_h = \int_{AB} P \cdot dA \cdot \cos \theta$$

در رابطه فوق  $dA \cos \theta$  همان تصویر قائم جز سطح dA خواهد بود لذا خواهیم داشت:

$$F_h = P \times A$$

که در رابطه فوق A، تصویر قائم سطح AB خواهد بود. بطور مثال برای یک سطح منحنی الشكل به صورت استوانه تصویر قائم سطح برابر یک مستطیل به عرض برابر قطر استوانه و طول برابر ارتفاع استوانه خواهد بود.

از آنجا که

$$P = \gamma h_C$$

است. خواهیم داشت:

$$F = \gamma h_C A$$

بنابراین مؤلفه افقی نیروی فشاری وارد بر یک سطح منحنی الشكل برابر با نیروی فشاری است که بر تصویر قائم سطح مزبور وارد شده و از مرکز فشار تصویر قائم سطح عبور خواهد نمود.

### ۲-۱۴-۲- مؤلفه قائم نیروی وارد بر سطوح منحنی

مطابق شکل ۱۷-۲ مؤلفه قائم نیروی وارد بر المان A به مساحت dA برابر  $PdA \sin \theta$  می‌باشد. بنابراین نیروی قائم وارد بر سطح منحنی AB به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} F_V &= \int_{AB} P.dA.\sin \theta \\ &= \int_{AB} \gamma.h.dA.\sin \theta \\ &= \gamma \int h.\sin \theta.dA \\ &= \gamma \int dV \\ F_V &= \gamma V \end{aligned}$$

که  $V$  حجم آبی است که بطور قائم روی تصویر افقی سطح AB قرار می‌گیرد. بنابراین مؤلفه قائم نیروی فشاری که بر یک سطح منحنی اثر می‌کند برابر وزن ستونی از مایع است که بر سطح مزبور و سطح آزاد آب محدود می‌شود. محل اثر این نیروی حجمی، مرکز حجم این ستون سیال است.

### ۲-۱۴-۳- برآیند نیروهای وارد بر سطح منحنی

پس از محاسبه نیروهای  $F_h$  و  $F_V$  می‌توان برآیند نیروی وارد بر سطح منحنی الشكل را از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$F = \sqrt{F_V^2 + F_h^2}$$

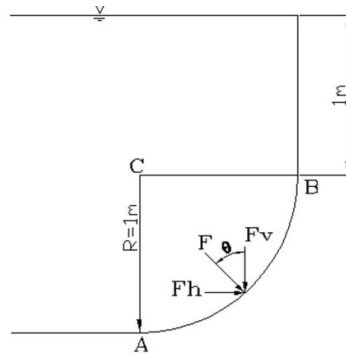


$\theta$  زاویه اثر این نیرو نسبت به امتداد افق برابر است با:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{F_V}{F_h}$$

مثال ۲-۱۰:

برآیند نیروهای وارد بر دریچه AB در شکل زیر را حساب کنید. شعاع دریچه ۱ متر می‌باشد. زاویه‌ای که نیروی برآیند اثر می‌کند را نیز بدست آورید.



شکل ۲-۲۰: شکل مثال ۲-۸

حل:

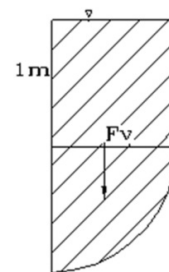
$$F_h = \gamma h_C A = 9810 \times \left(1 + 1 \times \frac{1}{2}\right) \times (1 \times 1) = 14.72 \text{ KN}$$

$$F_V = \gamma \times V$$

$$F_V = \gamma W \left( \frac{\pi \times 1^2}{4} \times 1 + 1 \times 1 \times 1 \right) = 17.51 \text{ KN}$$

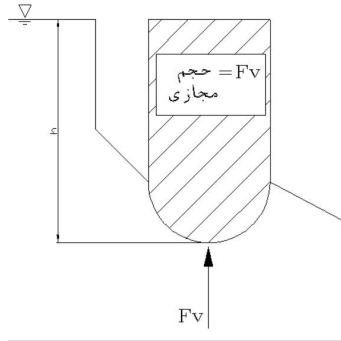
$$F = \sqrt{14.72^2 + 17.51^2} = 22.87 \text{ KN} \quad \text{برآیند نیروها}$$

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{F_V}{F_h} \right) \Rightarrow \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{17.51}{14.72} \right) = 49.95^\circ$$



مثال ۲-۱۱ (مفهومی)

فرض کنید که در شکل زیر باید نیروهای قائم وارد بر سطح منحنی الشکل زیر تعیین شود

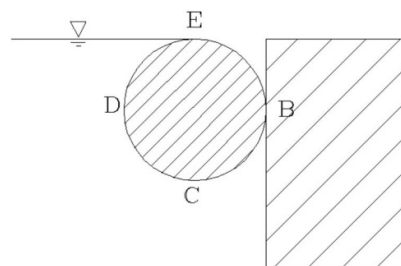


شکل ۲-۲۱: شکل مثال ۲-۹

همانطور که در شکل فوق مشخص است، روی سطح منحنی حجم آبی وجود ندارد، و بنابراین نیروی قائمی از طرف بالا به این سطح وارد نخواهد شد. ولی به علت اختلاف ارتفاع کف قسمت منحنی با سطح آب، نیروی قائمی متناسب با ارتفاع  $h$ ، از سمت پایین و به طرف بالا به قسمت منحنی وارد می‌گردد. برای محاسبه این نیرو از یک حجم مجازی استفاده می‌شود بدین ترتیب که حجم آب فرضی بین قسمت منحنی الشکل و سطح آب محاسبه شده و در وزن مخصوص سیال ضرب می‌شود.

مثال ۲-۱۲:

استوانه‌ای به قطر ۱ متر و طول ۸ متر (عمود بر صفحه کاغذ) مطابق شکل در نقطه B در حالت تعادل قرار دارد. وزن استوانه را حساب کنید.



شکل ۲-۲۲: شکل مثال ۲-۱۲

حل:

دو نیرو داریم:

۱- نیروی وزن بشکه

۲- نیروی فشاری عمود بر سطح

$$F_V = F_{V2} - F_{V1}$$

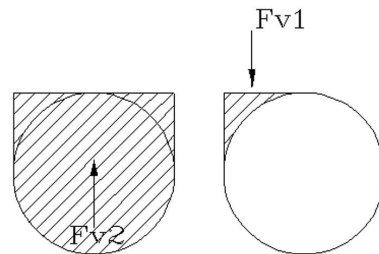
اگر  $F_V = w$  باشد، جسم در حال تعادل خواهد بود.

$$F_{V2} = [(0.5 \times 1 \times 8) + (\frac{\pi \times 0.5^2}{2} \times 8) \gamma w$$

$$F_{V1} = [(0.5 \times 0.5 \times 8) - (\frac{\pi \times 0.5^2}{4} \times 8) \gamma w$$

$$F_V = F_{V2} - F_{V1} = 65.71 \text{KN}$$

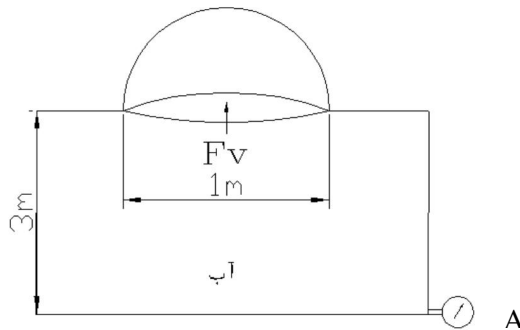
$$\sum F_Y = 0 \rightarrow F_V - w = 0 \rightarrow F = w$$



پس وزن استوانه باید  $65.71 \text{ KN}$  باشد تا جسم در تعادل باشد.

مثال ۲-۱۳:

هنگامی که فشار،  $70 \text{KPa}$  است، در شکل زیر، نیروی وارد بر نیمکره چقدر خواهد بود؟



شکل ۲-۲۳: شکل مثال ۲-۱۳

حل:

فشار در نقطه A

$$P_a = \gamma h \rightarrow h = \frac{P_a}{\gamma} = \frac{70 \times 10^3 \text{ Pa}}{9810 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}} = 7.14 \text{ m}$$

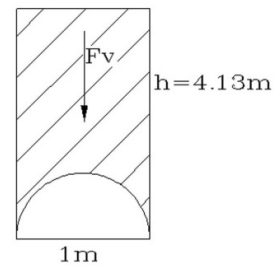
ارتفاع نظیر فشار در نقطه B

$$h = 7.14 - 3 = 4.14 \text{ m}$$

$$FV = \gamma V$$

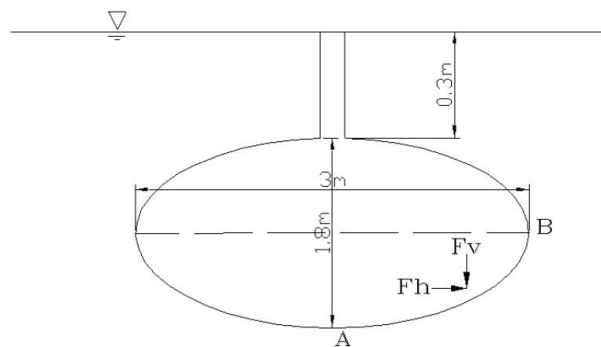
$$= \left[ (\pi \times 0.5^2 \times 4.13) - \left( \frac{4}{6} \pi \times 0.5^3 \right) \right] \times 9810$$

$$= 29.33 \text{ KN } \uparrow$$



مثال ۲-۱۴:

تانک شکل زیر 2.4m در جهت عمود بر صفحه کاغذ طول دارد. مقدار و جهت مؤلفه های نیروی افقی و قائم را بر قطعه AB مشخص کنید.



شکل ۲-۲۴: شکل مثال ۲-۱۴

حل:

$$F_h = \gamma h_c A = 9810 \times \left( 0.3 + 0.9 + \frac{0.9}{2} \right) \times 0.9 \times 2.4 = 34962.8 \text{ N}$$

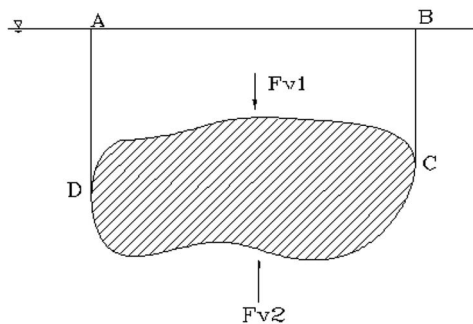
$$F_v = \gamma V$$

$$S = \frac{\pi ab}{4} = \frac{\pi \times 1.5 \times 0.9}{4} = 1.06 \text{m}^2$$

$$F_v = 9810 \times (1.06 \times 2.4 + 1.5 \times 2.4 \times 1.2) = 67.34 \text{N}$$

## ۲-۱۵- شناوری و پایداری اجسام غوطه‌ور و شناور

به نیروی قائم روبه بالا که از طرف سیال ساکن بر یک جسم شناور یا غوطه‌ور در آن وارد می‌شود، نیروی شناوری می‌گویند. این نیرو مؤلفه افقی ندارد. نیروی شناوری بر مرکز شناوری یک جسم وارد می‌شود که همان مرکز جرم یا مرکز ثقل سیال جابجا شده است که لزوماً با مرکز ثقل جسم یکی نیست. اگر قسمتی از جسم داخل سیال و قسمت دیگر بیرون از آن باشد، آن جسم را شناور می‌نامیم. ولی اگر تمام جسم در سیال واحد فرو رفته باشد آن جسم را غوطه‌ور یا مستغرق می‌گویند. در شکل زیر یک جسم غوطه‌ور و نیروهای وارد بر آن نمایش داده شده است.



شکل ۲-۲۵: جسم غوطه‌ور و نیروهای وارد بر آن

بر این جسم دو نیرو وارد می‌شود.

الف- نیروهای قائم ناشی از وزن سیال ساکن

$$F_{V1} = \gamma \nabla_{ABCD}$$

$$F_{V2} = \gamma \nabla_{ADCB}$$

که  $F_{V1}$  به سمت پائین و  $F_{V2}$  به سمت بالا وارد می‌شود که برآیند آنها برابر است با:

$$F_V = F_{V2} - F_{V1}$$

$$= \gamma (\nabla_{ADCB} - \nabla_{ABCD})$$

$$F_V = \nabla \gamma$$

که  $F_V$  برآیند نیروهای فشاری سیال ساکن به طرف بالا و  $\nabla$  حجم جسم غوطه‌ور در سیال و  $\gamma$  وزن مخصوص سیال می‌باشد. نیروی  $F_V$  از مرکز ثقل جسم غوطه‌ور می‌گذرد. به این نیرو، نیروی شناوری گفته شده و با  $F_b$  نمایش داده می‌شود.

همانطور که از رابطه فوق مشخص است، این نیرو متناسب با حجم جسم است. یا به عبارتی برابر با وزن سیال جابجا شده می‌باشد که این همان قانون ارشمیدس است.

(ب) نیروی وزن

این نیرو ناشی از اثر نیروی جاذبه بر جسم بوده و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$W = \gamma_s \nabla$$

که  $\gamma_s$  وزن مخصوص جسم می‌باشد. نیروی  $W$  به سمت پائین اثر می‌کند و از مرکز ثقل جسم می‌گذرد در حالتی که جسم در حال تعادل است باید:

$$F_b = W$$

باشد. که برای یک جسم توپر این رابطه بدان معنی است که  $\gamma$  جسم با  $\gamma$  سیال یکی است. اگر نیروی شناوری بزرگتر از وزن باشد یعنی:

$$F_b > W$$

جسم به سمت بالا حرکت کرده و اگر نیروی وزن بزرگتر از نیروی شناوری باشد یعنی

$$W > F_b$$

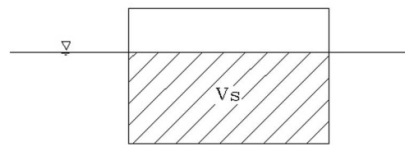
جسم در سیال غرق خواهد شد.

## ۲-۱۶- نیروی شناوری در اجسام شناور

اگر جسم مورد بررسی به صورت شناور در سیال باشد آنگاه نیروی شناوری وارد بر آن به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$F_b = \gamma \times \nabla_s$$

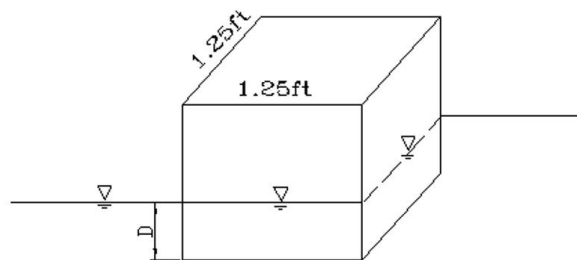
که  $\gamma$  وزن مخصوص سیال و  $\nabla_s$  حجم قسمت غوطه‌ور در سیال مطابق شکل ۲-۲۶ می‌باشد. خاطر نشان می‌شود نیروی شناوری در اجسام شناور از مرکز ثقل جسم شناور می‌گذرد.



شکل ۲-۲۶: جسم شناور و نیروهای وارد بر آن

## مثال ۲-۱۵:

یک جسم مکعبی شکل به اضلاع  $1.25\text{ft}$  مطابق شکل در آب شناور است. وزن مخصوص نسبی جسم  $0.6$  است. عمق غوطه‌وری جسم ( $D$ ) را بدست آورید.



شکل ۲-۲۷: شکل مثال ۲-۱۵

حل:

$$W = mg$$

$$W = \rho g \nabla = 0.6 \rho_w \times g \times 1.25^3 = 73.1 \text{Lb}$$

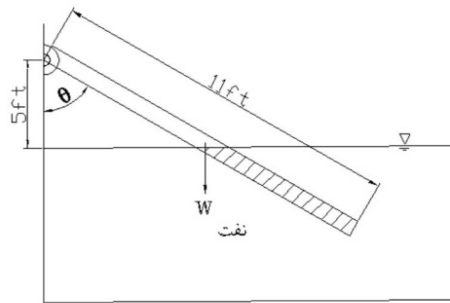
$$F_b = \gamma_{\omega} \nabla_s = 62.4 \times (1.25 \times 1.25 \times D)$$

$$F_b = W \Rightarrow D = 0.75 \text{ft}$$

مثال ۲-۱۶:

یک تیر به وزن واحد طول 2.2Lb/ft و سطح مقطع  $8 \text{in}^2$  در نقطه A لولا شده و سر دیگر آن داخل

نفت ( $\gamma = 53 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^3}$ ) قرار دارد. تحت چه زاویه‌ای این تیر شناور خواهد ماند.



شکل ۲-۲۸: شکل مثال ۲-۱۶

حل:

$$W = 2.2 \times 11 = 24.2 \text{Lb}$$

$$F_b = \gamma_{\text{oil}} \nabla = 53 \times (x \times 8 \text{in}^2 \times \frac{1}{12^2 \text{in}^2}) = 2.94x$$



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow W \times 5.5 \times \sin \theta - 2.94x \times (11 - \frac{x}{2}) \sin \theta = 0$$

$$1.47x^2 - 32.38x + 133.1 = 0$$

$$x_1 = 16.53 \quad \text{غ.ق.ق}$$

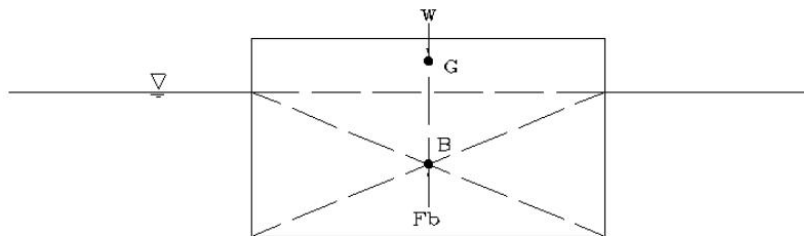
$$x_2 = 5.47$$

$$\cos^{-1} \theta = \frac{5}{11 - 5.47}$$

$$\theta = 25.3^\circ$$

## ۲-۱۷- پایداری

یک جسم ممکن است به سه صورت، پایدار، ناپایدار و خنثی، شناور باشد. مرکز شناوری یک جسم، مرکز جسم یا مرکز ثقل سیال جابجا شده یا جسم قسمت شناور است. که با  $B$  نمایش داده می‌شود. برای جسم غوطه‌ور و توپر همگن مرکز ثقل جسم بر مرکز شناوری منطبق است در حالیکه که در اجسام شناور اینگونه نیست. مرکز ثقل جسم شناور با  $G$  نمایش داده می‌شود. در شکل ۲-۲۹ نیروها و مرکز اثر نیروهای وارد بر یک جسم شناور نشان داده شده است.

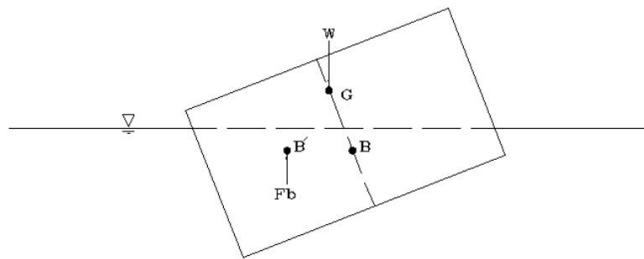


شکل ۲-۲۹: نیروها و مرکز اثر نیروهای وارد بر یک جسم شناور

در یک جسم شناور نیروهای شناوری و وزن هم‌راستا می‌باشند. در این حالت لنگری به جسم وارد نمی‌شود و جسم در حال تعادل است.

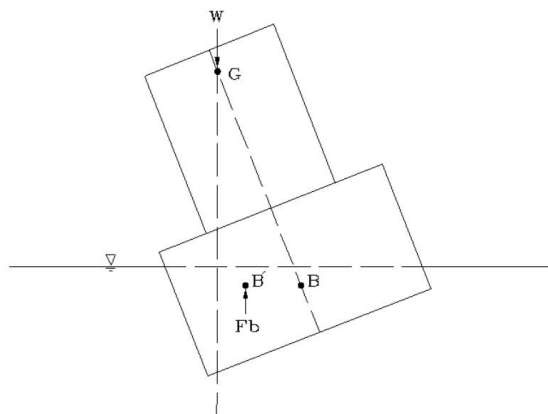
اگر تغییر مکان زاویه‌ای کوچکی به جسم بالا وارد شود، جسم به صورت شکل ۲-۳۰ تغییر شکل می‌دهد. در این حالت مرکز ثقل تغییر مکانی نمی‌دهد، اما مرکز شناوری بدلیل تغییر شکل جسم شناور به حالت

ذوزنقه‌ای، تغییر مکان داده و بجای نقطه  $B$  به نقطه  $B'$  وارد می‌شود. چون دو نیروی  $F_b$  و  $W$  در این حالت هم‌راستا نیستند و فاصله‌ای بین  $B'$  و  $G$  وجود دارد و باعث ایجاد لنگری می‌شود که باعث حفظ تعادل جسم و برگشت آن به موقعیت شکل ۲-۲۹ خواهد شد، در این حالت تعادل جسم را پایدار می‌نامیم. بنابراین پایداری اجسام شناور بستگی به موقعیت نسبی مرکز شناوری و مرکز ثقل جسم دارد. در اجسام پایدار مرکز شناوری بالاتر از مرکز ثقل جسم قرار دارد.



شکل ۲-۳۰: نیروها و مرکز اثر نیروهای وارد بر یک جسم پایدار

اگر جسم مستطیل شکل نسبتاً بلندی بر روی جسم مستطیل شکل قبل قرار گیرد باعث می‌شود تا مرکز ثقل جسم ترکیبی،  $G$ ، بالاتر از حالت قبل قرارگیرد. ولی محل نیروی شناوری تغییری نخواهد کرد. در شکل ۲-۳۱ این حالت نشان داده شده است.



شکل ۲-۳۱: نیروها و مرکز اثر نیروهای وارد بر یک جسم ناپایدار

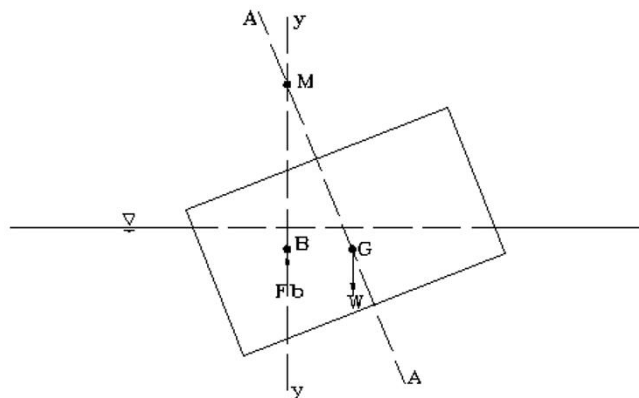
در این حالت امکان تشکیل زوج نیروی راستگردی که جسم را به حالت اولیه خود بازگرداند نیست و هر دو نیروی  $W$  و  $F_b$  تلاش می‌کنند تا جسم را واژگون سازند. به این حالت تعادل ناپایدار گفته می‌شود.

هرگاه جسم با تغییر کوچکی موقعیت جدیدی را حاصل کند و در آن حالت ساکن باقی بماند، آن جسم را در حالت تعادل خنثی می‌گویند.

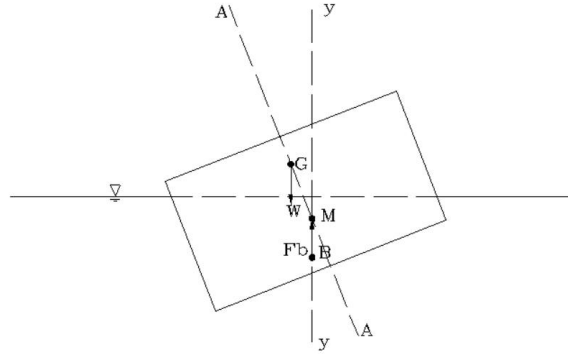
### ۲-۱۸- ارتفاع متاسنتریک

نقطه متاسنتریک محل تلاقی محور  $A-A$  (محور عمودی از مرکز ثقل) و خط اثر نیروی شناوری ( $Y-Y$ ) است که با  $M$  نمایش داده می‌شود. فاصله بین نقطه  $M$  و مرکز ثقل را ارتفاع متاسنتریک می‌نامند. یک جسم شناور هنگامی پایدار است که مرکز ثقل آن زیر نقطه متاسنتریک آن قرار گیرد (مطابق شکل ۲-۳۲). و هنگامی ناپایدار است که مرکز ثقل آن بالای نقطه متاسنتریک آن قرار گیرد. (مطابق شکل ۲-۳۳)

( ۳۳ )



شکل ۲-۳۲: موقعیت مرکز ثقل و نقطه متاسنتریک در جسم پایدار



شکل ۲-۳۳: موقعیت مرکز ثقل و نقطه متاسنتریک در جسم ناپایدار

برای تعیین موقعیت مرکز ثقل نسبت به نقطه متاسنتریک از رابطه زیر استفاده می‌شود

$$MB = \frac{I}{\nabla_s}$$

که

$MB$ : فاصله نقطه متاسنتریک از مرکز شناوری

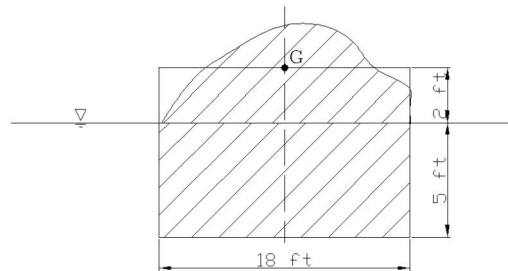
$I$ : ممان اینرسی یک مقطع افقی از جسم شناور در سطح مایع و

$\nabla$ : حجم سیال جابجا شده است

مثال ۲-۱۷:

یک قایق مستطیل شکل به ابعاد  $7 \times 18 \times 32 \text{ft}$  از شن پر شده است، مرکز ثقل آن ۲ فوت بالای سطح

آزاد آب است. آیا قایق پایدار خواهد بود



شکل مثال ۲-۱۷: ۲-۳۴

حل:

$$MB = \frac{I}{\nabla_s} = \frac{32 \times 18^3}{5 \times 18 \times 32} = 5.4 \text{ft}$$

فاصله مرکز ثقل تا مرکز شناوری

$$\left(\frac{5}{2} + 2\right) = 4.5 \text{ft}$$

فاصله مرکز ثقل تا متاسنتریک

$$5.4 - \left(\frac{5}{2} + 2\right) = 0.9 \text{ft}$$

پس قایق پایدار است

## فصل سوم

# اصول بنیادی حرکت سیالات

### ۳-۱- مقدمه

در این فصل به بررسی حرکت مایعات بدون اشاره به نیروهای عامل حرکت پرداخته می‌شود. به این شاخه از علم مکانیک سیالات هیدروسینماتیک می‌گویند. در این فصل ابتدا خلاصه‌ای از انواع جریان آورده شده است. و سپس به بررسی قوانین حاکم بر حرکت سیال و دینامیک سیال پرداخته می‌شود.

### ۳-۲- طبقه بندی جریان سیال

جریان را می‌توان از نقطه نظرهای مختلف و در نتیجه از راههای گوناگون طبقه‌بندی کرد. در این قسمت به بیان برخی از تقسیم‌بندی‌های با اهمیت جریان سیال پرداخته می‌شود.

۳-۳- جریان دائم<sup>۵</sup> و غیردائم

اگر مشخصات جریان و سیال در هر نقطه از مسیر حرکت سیال، به زمان بستگی نداشته باشد و فقط تابع شرایط مکانی آن نقطه باشد، جریان را دایم یا ماندگار می‌گویند.

مثلاً اگر سرعت سیالی در یک نقطه معین و در امتداد  $x$  برابر  $V$  باشد، در جریان دایمی همواره میزان سرعت در این نقطه از نظر مقدار و جهت ثابت خواهد ماند.

در جریان دائمی:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0, \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$$

اگر مشخصات جریان و سیال با زمان تغییر کند جریان غیردائمی است.

۳-۴- جریان یکنواخت<sup>۶</sup> و غیریکنواخت

جیرانی که سرعت سیال در تمام نقاط آن از نقطه نظر مقدار و جهت ثابت باشد یکنواخت نامیده می‌شود.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

بر اساس تقسیم‌بندی‌ها فوق، می‌توان تقسیم‌بندی دیگری به صورت زیر می‌توان ارائه نمود.

جریان یکنواخت-دایمی ← حرکت آب در یک لوله بلند با شدت جریان ثابت یا کانال طولانی

جریان یکنواخت-غیردایمی ← حرکت آب در یک لوله بلند با شدت جریان ثابت متغیر با زمان

جریان غیریکنواخت-دائمی ← حرکت آب در لوله‌ای با سطح مقطع متغیر و با شدت جریان ثابت

جریان غیریکنواخت-غیردائمی ← حرکت آب در لوله‌ای با سطح مقطع متغیر و با شدت جریان متغیر

<sup>5</sup> - Steady Flow

<sup>6</sup> - Uniform

### ۳-۵- جریان آرام- جریان مغشوش

در جریان آرام حرکت ذرات مختلف سیال در طول خطوط و لایه‌های موازی انجام می‌گیرد و حرکت یک ذره اثری بر حرکت ذرات دیگر ندارد. ویژگی این جریان سرعت کم و لزجت زیاد می‌باشد. در این جریان تنش برشی از رابطه زیر تعیین می‌شود.

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

در جریان مغشوش حرکت ذرات در مسیرهای درهم انجام می‌شود و حرکت هر ذره بر حرکت سایر ذرات متأثر می‌باشد. در این جریان افت انرژی نسبت به جریان آرام بیشتر است. در این جریان تنش برشی از رابطه زیر تعیین می‌شود.

$$\tau = \eta \frac{du}{dy}$$

که  $\eta$  لزجت گردابه‌ای بوده که به خواص سیال و جریان بستگی دارد.

### ۳-۶- جریان یک بعدی - دوبعدی - سه بعدی

اگر تمام خواص جریان و سیال فقط تابع یک مختص مکانی و زمانی باشد، جریان یک بعدی است. جریانی که در آن ویژگی‌های جریان تابعی از زمان و مختصات  $X$  و  $Y$  است، دوبعدی می‌باشد. جریانی سیالی که تابعی از زمان و مختصات  $X$  و  $Y$  و  $Z$  است، جریان سه بعدی می‌باشد.

### ۳-۷- مسیر جریان، خط جریان، لوله جریان:

مسیری که یک ذره سیال در حرکت خود طی می‌کند مسیر جریان نام دارد. مسیر جریان جهت سرعت ذره در لحظات متوالی را نشان می‌دهد.

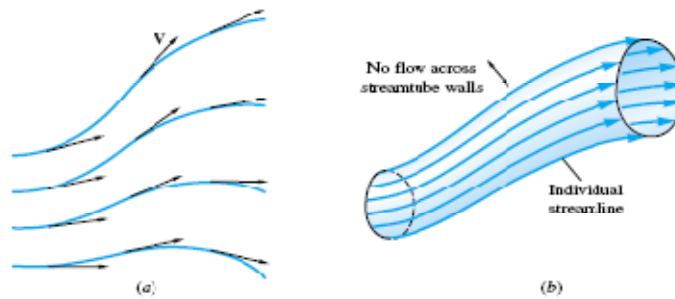
منحنی‌ای که در تمام حالات بر بردار سرعت یک ذره سیال مماس می‌باشد، خط جریان نامیده می‌شود. در جریان دائمی که مؤلفه سرعت نوسانی ندارد خط جریان و مسیر جریان بر هم منطبق‌اند.



معادله خط جریان به صورت زیر است:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

به یک دسته خطوط جریان که از یک سطح بسته عبور می کند لوله جریان می گویند.



شکل ۱-۳: خط جریان و لوله جریان

### مثال ۱-۳

اگر میدان سرعت یک جریان توسط رابطه  $\mathbf{V} = x^2y\mathbf{i} + x^2t\mathbf{j}$  ارائه شود. خطوط جریان عبوری از مبدأ مختصات در  $t=0,1,2$  را محاسبه کنید.

حل:

$$\bar{\mathbf{V}} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$$

$$u = x^2y, v = x^2t$$

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \Rightarrow \frac{v}{u} = \frac{dy}{dx} = \frac{x^2t}{x^2y}$$

$$ydy = tdx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = tx + c$$

عبور از مبدأ

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow c = 0$$

$$\Rightarrow y^2 = 2tx \rightarrow y = \sqrt{2tx}$$

$$t = 1 \rightarrow y = \sqrt{2x}$$

$$t = 2 \rightarrow y = 2\sqrt{x}$$

$$t = 0 \rightarrow y = 0$$

### ۳-۸- شدت جریان (دبی) و سرعت متوسط

دبی مقدار سیالی عبوری در واحد زمان از یک مقطع مشخص است. و انواع آن دبی حجمی، دبی وزنی و دبی جرمی می‌باشد. دبی حجمی از رابطه زیر بدست می‌آید

$$dQ = v dA$$

$$Q = \int_A v dA$$

در این رابطه  $v$  سرعت جریان می‌باشد.

از آنجا که سرعت سیال در قسمت‌های مختلف یک مقطع یکسان نیست، شدت جریان با استفاده از سرعت متوسط مقطع به صورت روبرو می‌باشد.

$$Q = V_m A$$

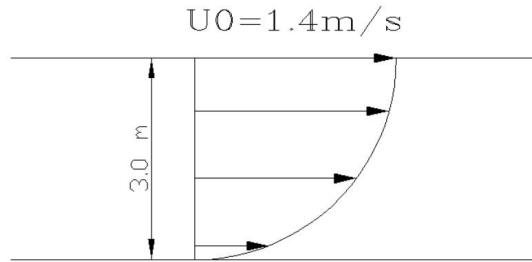
که  $V_m$  سرعت متوسط جریان می‌باشد. سرعت متوسط برابر است با:

$$V_m = \frac{Q}{A}$$

### مثال ۳-۲

اگر پروفیل سرعت در کانالی به صورت  $u = u_0 \left(\frac{y}{h}\right)^{1/7}$  باشد، دبی جریان را حساب کنید. عرض جریان

17 متر و  $u_0 = 1.4 \text{ m/s}$  است.



شکل ۳-۲: شکل مثال ۳-۲

حل:

$$Q = \int_0^h u dA = \int_0^h u_0 \left( \frac{y}{h} \right)^{1/7} (b dy)$$

$$\frac{1}{h} u_0 b \times \frac{7}{8} y^{8/7} \Big|_0^h = \frac{7}{8} u_0 b h^{1/7} = \frac{7}{8} \times h^{-1/7} \times u_0 b h^{8/7}$$

$$\frac{7}{8} b u_0 h = \frac{7}{8} \times 17 \times 1.4 \times 3 = 62.6 \text{ m}^3 / \text{s}$$

### ۳-۹- روش‌های تحلیلی جریان سیال

تحلیل جریان سیال به سه روش امکان‌پذیر است

۱- روش انتگرالی یا حجم کنترل: با استفاده از مفهوم حجم کنترل، معادلات و قوانین اساسی را به

شکل انتگرالی بیان می‌کند. در این روش اطلاعات بدست آمده بسیار کلی هستند. و فقط

می‌توانیم مقادیر متوسط کمیت‌هایی نظیر سرعت و فشار را محاسبه کنیم بدون آنکه از تغییرات

این کمیت‌های از یک نقطه به نقطه‌ای دیگر در حجم کنترل آگاهی داشته باشیم.

۲- روش دیفرانسیلی: با روشی مشابه روش اول ولی در مقیاس کوچک، قوانین اساسی با شکل

معادلات دیفرانسیل نمایش داده می‌شود. در این روش برای رفتار سیال باید معادله‌ای یافت شود

و از حل این معادلات به روش‌های عددی و تحلیلی به مشخصات دقیق سیال دست پیدا

خواهیم کرد.

۳- روش تجربی: با استفاده از نتایج آزمایشگاهی و تحلیل ابعادی به بررسی حرکت سیال می‌پردازد.

### ۳-۹- بررسی حرکت سیال

برای مطالعه حرکت سیال می‌توان یکی از دو روش لاگرانژی یا اویلری را بکار برد. در روش لاگرانژی، حرکات یک ذره به طور مستقل دنبال می‌گردد و تغییرات سرعت، وزن مخصوص و سایر ویژگی‌های آن نسبت به زمان بررسی می‌شود.

در روش اویلری، الگوی جریان تمام ذرات بطور همزمان در یک مقطع مورد مطالعه قرار می‌گیرد. یعنی حرکت ذرات از یک مقطع و در یک زمان مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در مکانیک سیالات از روش اویلری استفاده می‌شود. یعنی در مکانیک سیالات بر خلاف مکانیک جامدات مطالعه حرکت یک ذره مستقل دارای اهمیت نیست. بطور مثال نمی‌توان حرکت قسمتی از آب در رودخانه را تعقیب کرد اما می‌توان یک تکه چوب را که بر روی آب روان است دنبال نمود.

در حالت کلی مشخصات یک سیال، یعنی جرم مخصوص، لزجت، فشار و سرعت تابع شرایط زمانی و مکانی است. یعنی

$$\rho = f(x, y, z, t)$$

$$\mu = f(x, y, z, t)$$

$$v = f(x, y, z, t)$$

$$p = f(x, y, z, t)$$

### ۳-۱۰- سیستم و حجم کنترل

برای بررسی حرکت سیالات، بخشی از آن‌ها را به طور فرضی از بقیه جدا کرده و حرکت آن را مطالعه می‌کنیم. این بخش می‌تواند به صورت جرم یا حجم مشخص در نظر گرفته شود. که به ترتیب جرم مشخصه (سیستم) و حجم مشخصه (حجم کنترل) خوانده می‌شوند. در ادامه به تعریف سیستم و حجم کنترل پرداخته خواهد شد.

سیستم عبارت است از یک حجم اختیاری که از مرزهای آن هیچ‌گونه جرمی عبور نمی‌کند. به عبارت دیگر مقدار معینی از ماده را سیستم می‌گوئیم. سطح سیستم ممکن است نسبت به زمان تغییر یابد. گاز محبوس در یک سیلندر، مثالی از یک سیستم می‌باشد.

حجم کنترل، حجم اختیاری مشخص با شکل ثابت است. در حجم کنترل جرم می‌تواند متغیر باشد و امکان عبور جرم سیال از مرزهای آن وجود دارد. حجم کنترل را معمولاً منطبق بر مرزها و یا عمود بر جهت جریان در نظر می‌گیرند.

رابطه بین سیستم و حجم کنترل در بسیاری از موارد مانند تحلیل جریان به روش‌های لاگرانژی و اولری است. در روش سیستم یا لاگرانژی ما سیال را تعقیب می‌کنیم و رفتار آن را هنگام حرکت مشاهده می‌کنیم. در حالیکه در روش حجم کنترل یا اولری، ما ثابت باقی مانده و رفتار سیال را در یک مکان خاص مشاهده می‌کنیم.

### ۳-۱۱- قوانین اصلی برای محیط پیوسته:

به منظور بررسی حرکت سیالات غالباً از قوانین و روابط زیر استفاده می‌شود.

۱- اصل بقا جرم (معادله پیوستگی)

۲- قانون دوم نیوتن (اصل بقای حرکت - مومنتوم)

۳- اصل بقای انرژی (قانون اول ترمودینامیک)

۴- قانون دوم ترمودینامیک

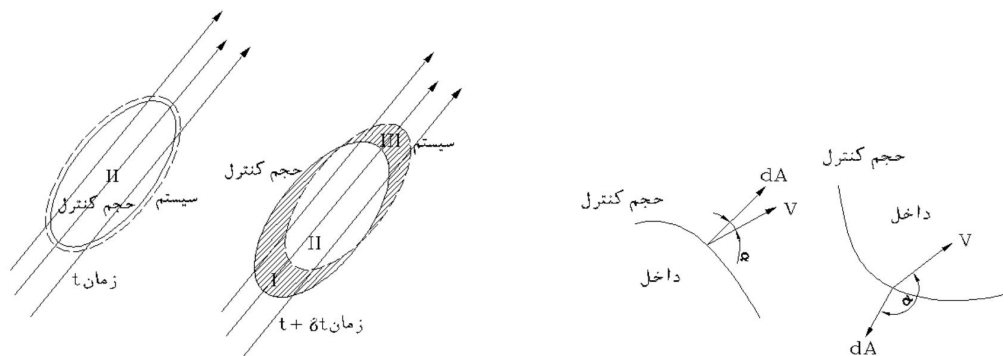
### ۳-۱۲- قضیه انتقال رینولدز:

کلیه قوانین سیالات برای یک سیستم، که عبارت است از مقدار معینی از جرم، بیان می‌شود. مثلاً قانون بقای جرم در یک سیستم به صورت زیر است

$$m_{sys} = cte$$

برای انتقال از یک تحلیل سیستمی به تحلیل حجم کنترلی از قضیه انتقال رینولدز استفاده می‌شود. به بیان دیگر قضیه انتقال رینولدز، به منظور ارتباط بین قوانین اساسی مکانیک سیالات در سیستم و حجم کنترل مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در ادامه اقدام به بررسی نحوه دستیابی به رابطه مربوط به قضیه انتقال رینولدز پرداخته می‌شود. بدین منظور در شکل زیر در زمان  $t$  سیستمی که جرم آن با خط چین نشان داده شده و دارای جرم مشخصی می‌باشد و نیز حجم کنترلی را در همان لحظه منطبق بر مرزهای سیستم در نظر می‌گیریم. در زمان  $t + \delta t$  سیستم مقداری حرکت کرده و بنابراین به شکل زیر در می‌آید.



شکل ۳-۳: سیستم‌های دارای حجم کنترلی یکسان در زمان  $t$  در یک میدان سرعت

فرض کنید  $N$  مقدار کل یک خاصیت سیال نظیر جرم، انرژی و اندازه حرکت در سیستم در لحظه  $t$  باشد و  $\eta$  مقدار این خاصیت در واحد جرم سیال باشد. یعنی

$$\eta = \frac{dN}{dm}$$

$$dm = \rho \cdot d\forall$$

$$\eta = \frac{dN}{\rho \cdot d\forall}$$

$$N_{cv} = \int_{cv} \eta \cdot \rho \cdot d\forall$$

حال مقدار ازدیاد  $N$  نسبت به زمان را بر حسب حجم کنترل می‌نویسیم. در زمان  $t+\delta t$  سیستم شامل حجم‌های II و III می‌باشد در حالی که در زمان  $t$  حجم II را اشغال کرده بود.

افزایش خاصیت  $N$  در فاصله زمانی  $\delta t$  برای سیستم برابر خواهد بود با:

$$N_{\text{sys}(t+\delta t)} - N_{\text{sys}(t)} = \left( \int_{\text{II}} \eta \rho \cdot d\forall + \int_{\text{III}} \eta \rho \cdot d\forall \right)_{t+\delta t} - \left( \int_{\text{II}} \eta \rho \cdot d\forall \right)_t$$

به سمت راست رابطه فوق مقدار

$$\left( \int_{\text{I}} \eta \rho \cdot d\forall \right)_{t+\delta t}$$

را اضافه و کم می‌کنیم و طرفین را بر  $\delta t$  تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{N_{\text{sys}(t+\delta t)} - N_{\text{sys}(t)}}{\delta t} = \frac{\left( \int_{\text{II}} \eta \rho \cdot d\forall + \int_{\text{I}} \eta \rho \cdot d\forall \right)_{t+\delta t}}{\delta t} - \frac{\left( \int_{\text{II}} \eta \rho \cdot d\forall \right)_t}{\delta t} + \frac{\left( \int_{\text{III}} \eta \rho \cdot d\forall \right)_{t+\delta t}}{\delta t} - \frac{\left( \int_{\text{I}} \eta \rho \cdot d\forall \right)_{t+\delta t}}{\delta t}$$

در معادلات بدست آمده اگر  $\delta t \rightarrow 0$  هر کدام از عبارات به صورت زیر خواهد بود:

بدین ترتیب برای عبارت سمت چپ معادله فوق داریم:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{N_{\text{sys}(t+\delta t)} - N_{\text{sys}(t)}}{\delta t} = \frac{dN_{\text{sys}}}{dt}$$

حد دو ترم اول در سمت راست معادله به صورت زیر است

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\left( \int_{\text{II}} \eta \rho \cdot d\forall + \int_{\text{I}} \eta \rho \cdot d\forall \right)_{t+\delta t} - \left( \int_{\text{II}} \eta \rho \cdot d\forall \right)_t}{\delta t} = \frac{d}{dt} \int_{cv} \eta \rho \cdot d\forall$$

$\delta t \rightarrow 0$

عبارت چهارم در سمت راست معادله، نمایانگر مقدار خروجی  $N$  از حجم کنترل است، و می‌توان نوشت:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\left( \int_{III} \eta \rho \cdot d\forall \right)_{t+\delta t}}{\delta t} = \int_{\text{outflow area}} \eta \rho \cdot v \cdot dA = \int \eta \rho \cdot v \cdot \cos \alpha \cdot dA_{\text{out}}$$

در این رابطه  $dA$  برابر با بردار سطح خروجی جریان که در شکل ۳-۳ نمایش داده شده، می‌باشد. بردار  $dA$  عمود بر سطح خروجی حجم کنترل بوده و هنگامی که به سمت خارج باشد مثبت است.  $\alpha$  زاویه بین بردار سرعت و بردار سطح می‌باشد.

آخرین عبارت، میزان جریان ورودی به حجم کنترل است و در حالت حدی برابر خواهد بود با:

$$\lim_{\delta t} \frac{\left( \int_I \eta \rho \cdot d\forall \right)_{t+\delta t}}{\delta t} = - \int_{\text{inflow area}} \eta \rho \cdot v \cdot dA = - \int \eta \rho \cdot v \cdot \cos \alpha \cdot dA$$

دو عبارت آخر می‌تواند بصورت یک عبارت درآید. سپس از آن در روی سطح کل حجم کنترل (CS) انتگرال گرفته می‌شود.

$$\lim_{\delta t} \frac{\left( \int_{III} \eta \rho \cdot d\forall \right)_{t+\delta t}}{\delta t} - \frac{\left( \int_I \eta \rho \cdot d\forall \right)_{t+\delta t}}{\delta t} = \int_{\text{CS}} \eta \rho \cdot v \cdot dA = \int_{\text{CS}} \eta \rho \cdot v \cdot \cos \alpha \cdot dA$$

با جایگزینی این عبارت داریم:

$$\left( \frac{dN}{dt} \right)_{\text{sys}} = \frac{d}{dt} \int_{\text{cv}} \eta \rho \cdot d\forall + \int_{\text{CS}} \eta \rho \cdot v \cdot \cos \alpha \cdot dA_{\text{out}} - \int_{\text{CS}} \eta \rho \cdot v \cdot \cos \alpha \cdot dA_{\text{in}}$$

$$\left( \frac{dN}{dt} \right)_{\text{sys}} = \frac{d}{dt} \int_{\text{cv}} \eta \rho \cdot d\forall + \int_{\text{CS}} \eta \rho \cdot (v \cdot n) \cdot dA$$



این معادله بیان می‌کند که میزان افزایش  $N$  در سیستم دقیقاً برابر مجموع افزایش خاصیت  $N$  در حجم کنترل بعلاوه میزان خالص جریان  $N$  از مرزهای حجم کنترل است. رابطه فوق به رابطه انتقال رینولدز موسوم است.

### ۳-۱۳- معادله پیوستگی - قانون بقاء جرم

معادله پیوستگی از قانون کلی بقای جرم استنتاج می‌شود. برای دستیابی به قانون بقای جرم در معادله انتقال رینولدز به جای متغیر  $N$ ، جرم  $m$  را جایگزین می‌کنیم:

$$N = m \rightarrow \eta = \frac{dN}{dm} = \frac{dm}{dm} = 1$$

$$\left( \frac{dm}{dt} \right)_{\text{sys}} = \frac{d}{dt} \int_{\text{cv}} \rho dV + \int_{\text{cs}} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

با توجه به معادله بقای جرم، در یک سیستم مقدار جرم همواره ثابت می‌باشد، یعنی

$$\left( \frac{dm}{dt} \right)_{\text{sys}} = 0$$

در نتیجه

$$\frac{d}{dt} \int_{\text{cv}} \rho dV + \int_{\text{cs}} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = 0$$

معادله فوق، معادله پیوستگی برای سیال تراکم پذیر و جریان غیر دائمی می‌باشد. معادله پیوستگی بیان می‌کند که میزان افزایش جرم در حجم کنترل دقیقاً برابر میزان جرم خالص ورودی به حجم کنترل می‌باشد.

اگر فرض کنیم جریان در داخل یک حجم کنترل دائمی (پایدار) باشد (عدم وابستگی به زمان)، آنگاه قانون بقای جرم برای جریان دائمی به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{d}{dt} = 0 \rightarrow \int_{\text{cs}} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = 0$$

معادله بقای جرم در حالت یک بعدی به صورت زیر خواهد بود

$$\int_{cs} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = 0 \Rightarrow \sum (\rho_i v_i A_i)_{out} - \sum (\rho_i v_i A_i)_{in} = 0$$

نکته: سرعت و خواص سیال که در رابطه بالا به کار رفته‌اند سرعت‌ها و خواص متوسط در هر مقطع جریان می‌باشد.

در حالت دائمی داریم:

$$\sum (\rho_i A_i v_i)_{in} = \sum (\rho_i A_i v_i)_{out}$$

$$\sum (\dot{m})_{in} = \sum (\dot{m})_{out}$$

طبق معادله فوق در جریان دائمی و تراکم‌پذیر، مجموع دبی‌های جرمی ورودی و خروجی از حجم کنترل برابر است.

در جریان تراکم‌ناپذیر، یا جریانی که تغییرات جرم مخصوص در جریان قابل چشم پوشی باشد. داریم:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{cs} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA \rightarrow \int (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = 0$$

با فرض جریان تراکم‌ناپذیر یک بعدی و دائمی، معادله پیوستگی به صورت زیر است

$$\sum (v_i A_i)_{in} = \sum (v_i A_i)_{out}$$

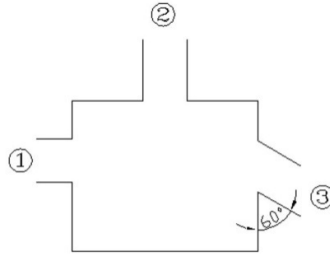
$$\sum Q_{out} = \sum Q_{in}$$

با در نظر گرفتن تقریب یک بعدی و برای جریان غیر دائمی تراکم‌ناپذیر داریم:

$$\int_{cv} \frac{d\rho}{dt} dV + \sum (\rho_i A_i v_i)_{out} - \sum (\rho_i A_i v_i)_{in} = 0$$

مثال ۳-۳:

جریان مایعی با  $\rho = 1050 \text{ kg/m}^3$  به طور دائمی در جعبه مستطیلی شکل زیر برقرار است بردار  $V_3$  را مشخص کنید.



شکل ۳-۴: شکل مثال ۳-۳

$$V_1=4\text{m/s}, V_2=-8\text{m/s}$$

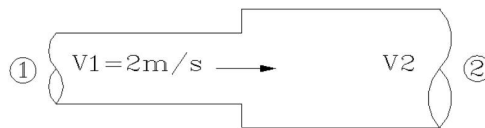
$$A_1=0.05\text{m}^2, A_2=0.01\text{m}^2, A_3=0.06\text{m}^2$$

حل:

$$\begin{aligned} \sum \dot{m} &= 0 \rightarrow \sum Q = 0 \\ (4 \times -0.05) + 0.01 \times (-8) + 0.06V_3 &= 0 \\ V_3 &= 4.67\text{ m/s} \\ V_3 &= 4.67 \sin 60i - 4.67 \cos 60j \\ V_3 &= 4.04i - 2.33j \end{aligned}$$

مثال ۳-۴:

مطابق شکل لوله ای از دو قسمت با قطرهای 5cm و 10cm تشکیل شده است. اگر سرعت حرکت آب در قسمتی که قطر آن 5cm است، 2m/s باشد شدت جریان (دبی) و سرعت در قسمتی از لوله که قطر آن 10cm است را محاسبه کنید.



شکل ۳-۵: شکل مثال ۳-۴

حل:

$$Q_{in} = Q_{out}$$

$$(AV)_{in} = (AV)_{out}$$

$$A_1 V_1 = A_2 V_2$$

$$\frac{\pi \times 5^2}{4} \times 2 = \frac{\pi \times 10^2}{4} \times V_2$$

$$\Rightarrow V_2 = 0.5 \text{ m/s}$$

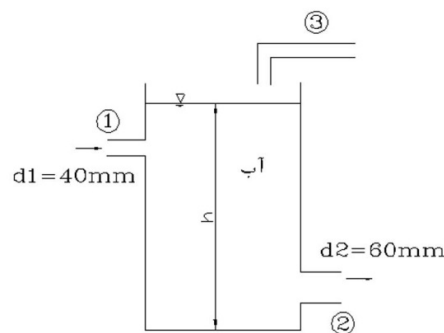
$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2$$

$$Q = \frac{\pi \times 0.05^2}{4} \times 2 = 3.927 \times 10^{-3} \text{ m}^3 / \text{s}$$

مثال ۳-۵:

مخزن آبی مطابق شکل از طریق مقطع ۱ با سرعت  $V_1=5\text{m/s}$  و از طریق مقطع ۳ با دبی  $Q_3=0.012\text{m}^3/\text{s}$  در حال پر شدن است. اگر سطح آب در مخزن ثابت باشد، سرعت خروجی در مقطع

دو ( $V_2$ ) چقدر است؟



شکل ۳-۶: شکل مثال ۳-۵

حل:

چون سطح آب ثابت است بنابراین دبی ورودی و خروجی با هم برابر هستند و جریان دائمی است یعنی

دائمی است. پس

$$\sum Q_i = 0 \rightarrow Q_1 + Q_3 = Q_2$$

$$Q = AV$$

$$\Rightarrow \frac{\pi \times 0.04^2}{4} \times 5 + 0.012 = Q_2$$

$$Q_2 = 0.0182 \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{A_2} = \frac{0.0182}{\frac{\pi \times 0.06^2}{4}} = 6.47 \text{ m/s}$$

مثال ۳-۶:

اگر در مثال قبل مقدار  $V_2 = 8 \text{ m/s}$  باشد، تغییر عمق را نسبت به زمان  $\left(\frac{dh}{dt}\right)$  تعیین کنید با فرض

اینکه قطر مخزن 1 m باشد.

حل:

چون جریان غیردائمی است پس

$$Q_1 + Q_3 = Q_2 + \frac{dV}{dt}$$

$$V = \frac{\pi d^2}{4} \times h$$

$$Q_1 + Q_3 = Q_2 + \frac{\pi d^2}{4} \frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = -5.52 \text{ mm/s}$$

بعد از ۲۰ ثانیه ارتفاع آب چقدر می‌شود:

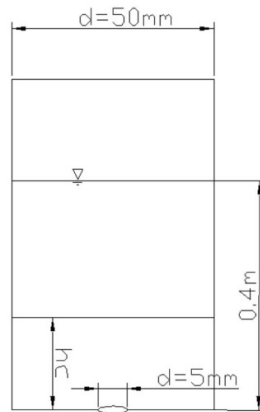
$$\frac{dh}{dt} = -5.52 \text{ mm/s}$$

$$\Rightarrow \int dh = \int -5.52 dt \Rightarrow \Delta h = \Delta t \times (-5.52 \times 10^{-3})$$

$$\Rightarrow \Delta h = 110.4 \text{ mm}$$

مثال ۳-۷:

در تانک استوانه‌ای به قطر 50mm حفره‌ای به قطر 5mm در ته تانک وجود دارد. سرعت مایع خروجی از معادله  $V = \sqrt{2gh}$  بدست می‌آید. اگر عمق آب در ابتدا، 0/4 متر باشد پس از ۱۲ ثانیه، عمق آب در تانک چقدر خواهد بود.



شکل ۳-۷: شکل مثال ۳-۷

حل:

جریان غیردائمی است یعنی  $\frac{dh}{dt} \neq 0$  است پس:

$$\sum Q_i + \frac{dV}{dt} = 0$$

$$\sum Q_i + A \frac{dh}{dt} = 0$$

$$\sqrt{2gh} \times \frac{\pi}{4} \times 0.005^2 + \frac{\pi}{4} \times 0.05^2 \frac{dh}{dt} = 0$$

$$25\sqrt{2gh} + 2500 \frac{dh}{dt} = 0$$

$$\int_{0.4}^{hc} -h^{0.5} dh = \int_0^{12} \frac{\sqrt{2g}}{100} dt$$

$$= -2(\sqrt{hc} - \sqrt{0.4}) = 0.523 \rightarrow hc = 0.134m$$

راه حل دوم:

استفاده از فرمول:

$$2(\sqrt{H_0} - \sqrt{H}) = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 \sqrt{2g} \times C.T$$

که:

$H_0$ : ارتفاع اولیه آب

$H$ : سطح آب پس از نزول

$D_2$ : قطر روزنه

$D_1$ : قطر مخزن

$T$ : زمان

$C \approx 0.8$ : ضریب تخلیه

### ۳-۱۴- قانون بقای انرژی (قانون اول ترمودینامیک)

براساس قانون بقای انرژی، انرژی از حالتی به حالت دیگر تبدیل می‌شود ولی همواره مقدارش ثابت است.

بنابراین در معادله انتقال رینولدز بجای  $E$ ،  $N$  قرار می‌دهیم.

انرژی انتقالی

$$N = E, \eta = \frac{dE}{dm} = e$$

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{\text{sys}} = \frac{d}{dt} \int_{cv} \eta \rho dV + \int_{cs} \eta \rho (v \cdot n) dA$$

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{sys}} = \frac{d}{dt} \int_{cv} e \rho dV + \int_{cs} e \rho (v \cdot n) dA$$

در رابطه فوق، ترم اول سمت راست معادله بیانگر انرژی ذخیره‌ای و ترم دوم انرژی انتقالی است

در حالت کلی دو دسته انرژی وجود دارد:

۱- انرژی ذخیره‌ای: انرژی که مربوط به یک جرم مشخصی باشد. و شامل انرژی‌های زیر است:

- انرژی جنبشی ( $E_k$ ): انرژی که مربوط به حرکت جرم است.

- انرژی پتانسیل ( $E_p$ ): انرژی مربوط به محل جرم در یک میدان است.

انرژی داخلی ( $u$ ): انرژی مولکولی و اتمی مربوط به میدان‌های داخلی جرم است.

انرژی ذخیره‌ای از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$E = E_k + E_p + u$$

۲- انرژی‌های انتقالی: انرژی که در حال انتقال از یک سیستم به سیستم دیگر است. و شامل انرژی‌های

زیر است:

- حرارت  $Q$ : نوعی انرژی که در اثر اختلاف دما از یک سیستم به سیستم دیگر منتقل می‌شود.

- کار  $W$ : انرژی منتقل شده از یک سیستم به یک سیستم، هنگامی که نیروهای خارجی وارد بر سیستم

مسافتی را طی می‌کنند، است

تغییرات انرژی ذخیره‌ای همواره معادل انرژی انتقالی می‌باشد. یعنی

$$Q - w = \Delta E = (E_{k2} + E_{p2} + u_2) - (E_{k1} + E_{p1} + u_1)$$

بعبارتی، حرارت افزوده شده به سیستم برابر است با کار انجام شده توسط سیستم بعلاوه انرژی افزوده

شده به آن است.

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dQ}{dt} - \frac{dw}{dt}$$

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{cv} \rho p dV + \int_{cs} \rho p (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

که  $e$  انرژی ذخیره‌ای در واحد جرم است که بصورت زیر تعریف می‌شود:



$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \frac{dE_K}{dm} = e_k = \frac{v^2}{2}$$

$$E_P = mgz \Rightarrow \frac{dE_P}{dm} = e_p = gz$$

$$u = \frac{du}{dm}$$

$$e = e_K + e_p + u$$

کار ارائه شده در رابطه بقای انرژی (W) شامل مؤلفه های زیر می باشد.

$$\frac{dw}{dt} = \dot{w} = \dot{w}_S + \dot{w}_P + \dot{w}_V$$

$w_S$  کار محوری: کاری است که توسط یک ماشینی (پره یک پمپ، پروانه، پیستون و ...) انجام می شود.

$w_P$  کار فشاری: کار انجام توسط نیروهای فشاری می باشد و فقط روی سطوح کنترل (مرزها) اتفاق

می افتد. و به صورت زیر است

$$w_P = \int_{cv} P(v \cdot n) dA$$

اگر رابطه فوق را در  $\rho$  ضرب و تقسیم نماییم خواهیم داشت

$$\int_{cs} \frac{P}{\rho} \rho (v \cdot n) dA = m \frac{\Delta P}{\rho}$$

کار برشی: مربوط به تنش های لزوج که در سطح کنترل اتفاق می افتد بوده و متشکل از حاصل ضرب سرعت

در مؤلفه های تنش لزوج می باشد.

$$\dot{w}_V = \int_{cs} \tau \cdot v dA$$

بنابراین رابطه قضیه رینولدز به شکل زیر درمی آید:

$$\begin{aligned}\dot{Q} - \dot{w}_S - \dot{w}_P - \dot{w}_V &= \frac{d}{dt} \int_{cv} \rho dV + \int_{cs} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA \\ \dot{Q} - \dot{w}_S - \dot{w}_V &= \frac{d}{dt} \int_{cv} \rho dV + \int_{cs} \left( e + \frac{P}{\rho} \right) \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA \\ e + \frac{P}{\rho} &= \left( u + \frac{v^2}{2} + gz \right) + \frac{P}{\rho} = \left( u + \frac{P}{\rho} \right) + \left( \frac{v^2}{2} + gz \right) = h + \frac{v^2}{2} + gz \\ \dot{Q} - \dot{w}_S - \dot{w}_V &= \frac{d}{dt} \int_{cv} \rho \left( u + \frac{v^2}{2} + gz \right) dV + \int_{cs} \left( h + \frac{v^2}{2} + gz \right) \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA\end{aligned}$$

در رابطه فوق عبارت

$$h = \left( u + \frac{P}{\rho} \right)$$

به آنتالپی معروف است.

$w_V$  به ندرت از اهمیت برخوردار بوده و در بسیاری مسائل در نظر گرفته نمی شود. لذا

$$w_V = 0$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\dot{Q} - \dot{w}_S = \frac{d}{dt} \int_{cv} \rho \left( u + \frac{v^2}{2} + gz \right) dV + \int_{cs} \left( h + \frac{v^2}{2} + gz \right) \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

در جریان دائمی داریم:

$$\dot{Q} - \dot{w}_S = \int_{cs} \left( h + \frac{v^2}{2} + gz \right) \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

اگر ورودی و خروجی حجم کنترل یک بعدی باشند، عبارت‌های شار انرژی به شکل زیر به دست می آیند.

$$\int_{cs} \left( h + \frac{v^2}{2} + gz \right) \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \sum_{out} \left( h + \frac{v^2}{2} + gz \right) \times \dot{m}_{out} - \sum_{in} \left( h + \frac{v^2}{2} + gz \right) \times \dot{m}_{in}$$

### ۳-۱۵- معادله برنولی:

معادله برنولی بیانگر رابطه بین فشار، سرعت و ارتفاع یک جریان در شرایط خاص (غیرقابل تراکم و غیرلزج بودن) جریان است.

یک لوله جریان را در نظر می‌گیریم اگر  $dA$  به سمت صفر میل کند، لوله جریان به یک خط جریان تبدیل می‌شود. قانون بقای انرژی را برای حجم کنترل در نظر گرفته شده می‌نویسیم

$$\dot{Q} - \dot{w}_s = \frac{d}{dt} \int_{CV} \left( u + \frac{v^2}{2} + gz \right) \rho dV + \int_{CS} \left( h + \frac{v^2}{2} + gz \right) \rho (v \cdot n) dA$$

با فرض جریان دائمی ترم اول سمت راست معادله فوق برابر صفر خواهد بود و با فرض، عدم وجود اصطکاک، عدم وجود هرگونه انتقال حرارت در سیستم ( $\dot{Q} = 0$ ) و عدم وجود کار محوری در سیستم ( $\dot{w}_s = 0$ ) خواهیم داشت:

$$\int_{CS} \left( h + \frac{v^2}{2} + gz \right) \rho (v \cdot n) dA = 0$$

چون سطح مقطع جریان در ورودی و خروجی کوچک است جریان یک بعدی فرض می‌شود و

$$\dot{m}_2 \left( h_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 \right) - \dot{m}_1 \left( h_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 \right) = 0$$

چون جریان دائمی و دبی جرمی ثابتی وجود دارد:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2$$

$$h_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 = h_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1$$

$$h = u + \frac{P}{\rho}$$

$$\Rightarrow u_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 = u_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1$$

چون اصطکاک، انتقال حرارت و کار در سیستم وجود ندارد، بنابراین تغییرات انرژی داخلی نیز نخواهیم

داشت. پس

$$\frac{P_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 = \frac{P_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1$$

این رابطه به معادله برنولی معروف است. معادله برنولی بیان می‌کند که روی یک خط جریان انرژی مکانیکی کل بر واحد حجم، تغییر نمی‌کند (ثابت است) به عبارت دیگر برای هریک از خطوط جریان می‌توان نوشت:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{const}$$

با تقسیم طرفین رابطه برنولی بر  $g$  داریم:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

بعد هر کدام از جملات ( $L$ ) می‌باشد به همین علت هریک از جملات ارتفاع یا هد نامیده می‌شوند. که به ترتیب ارتفاع نظیر فشار، ارتفاع نظیر سرعت و ارتفاع می‌باشد.

- خط انرژی (EGL)

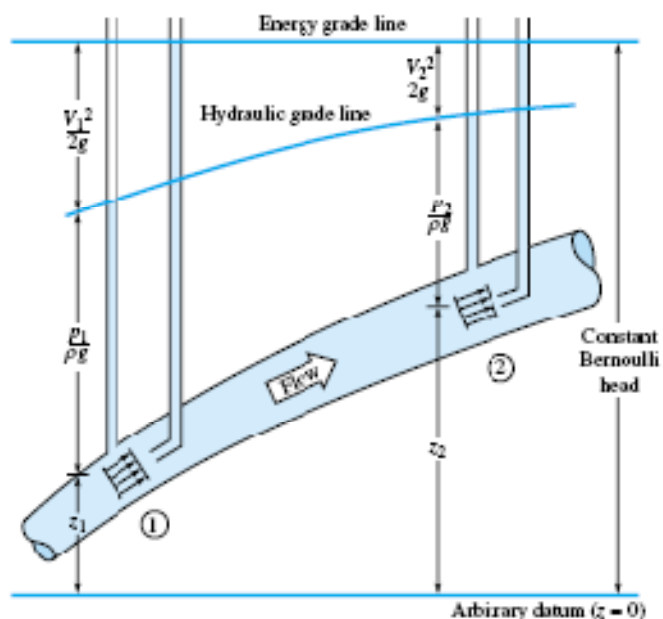
نشانگر ارتفاع کل ثابت برنولی است

$$h_0 = z + \frac{P}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \text{const}$$

در جریان بدون اصطکاک EGL ثابت است. این خط شامل دو قسمت زیر است.

- خط گرادیان هیدرولیکی HGL که نشانگر ارتفاع مربوط به ارتفاع و هد فشار است  $Z + \frac{P}{\gamma}$

$$\frac{v^2}{2g} \text{ هد سرعت}$$



شکل ۸-۳- خط انرژی و گرادیان هیدرولیکی

### مثال ۸-۳

گازوئیل از یک لوله به قطر 0.3 متر با فشار 300kpa به لوله‌ای به قطر 0.15 متر که در آن فشار 120kpa است، جریان دارد. اگر لوله افقی باشد و از اثر لزجت صرفه نظر کنیم مقدار دبی گازوئیل را

حساب کنید. ( $\gamma_{oil} = 6.67 \frac{KN}{m^3}$ )



شکل ۹-۳- شکل مثال ۸-۳

حل:

$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2$$

$$\frac{\pi \times 0.3^2}{4} V_1 = \frac{\pi \times 0.15^2}{4} V_2 \Rightarrow 0.09 V_1 = 0.0225 V_2 \Rightarrow V_2 = 4 V_1$$

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

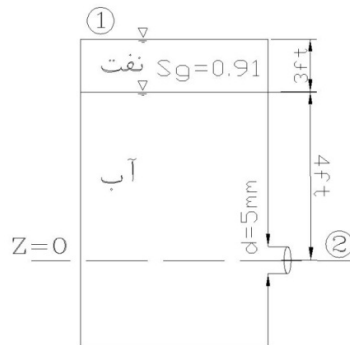
$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} \Rightarrow \frac{300 - 120}{6.67} = \frac{16V_1^2 - V_1^2}{2g} \Rightarrow V_1 = 5.94 \Rightarrow V_2 = 23.76$$

$$Q = A_1 V_1 = 0.42 m^3 / s$$

نکته: سطح مبنا را طوری در نظر بگیرید که Zها همیشه مثبت باشند یا با یکدیگر حذف شوند.

مثال ۳-۹:

با چشم پوشی از تلفات مقدار دبی جریان در شکل زیر را بدست آورید.



شکل ۳-۱۰: شکل مثال ۳-۹

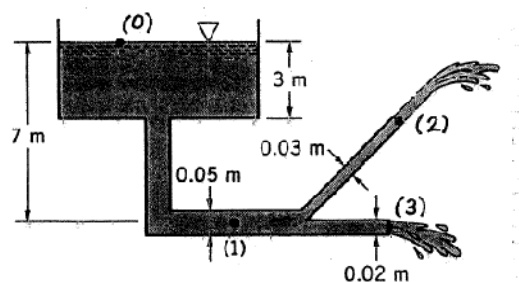
$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

$$4 + 3 \times 0.91 = \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\frac{v_2^2}{2g} = 6.73 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2 \times 32.2 \times 6.73} = 20.81$$

مثال ۳-۱۰:

جریان آب از مخزن آب بزرگی وارد لوله ای شده و سپس به دو لوله کوچکتر تقسیم می شود. (مطابق شکل) اگر از اثر لزجت بتوان صرفه نظر کرد، دبی خروجی از مخزن و فشار آب در نقطه ۱ را محاسبه کنید



شکل ۳-۱۱: شکل مثال ۳-۱۰

حل:

$$\frac{P_0}{\gamma} + \frac{v_0^2}{2g} + z_0 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

$$0 + 0 + 7 = 0 + \frac{v_2^2}{2g} + 4 \Rightarrow v_2 = 7.67$$

$$\frac{P_0}{\gamma} + \frac{v_0^2}{2g} + z_0 = \frac{P_3}{\gamma} + \frac{v_3^2}{2g} + z_3$$

$$0 + 0 + 7 = 0 + \frac{v_3^2}{2g} + 0 \Rightarrow v_3 = 11.72$$

$$Q_2 = \frac{\pi \times 0.03^2}{4} \times 7.67 = 5.42 \times 10^{-3}$$

$$Q_3 = \frac{\pi \times 0.02^2}{4} \times 11.72 = 3.68 \times 10^{-3}$$

$$Q_1 = 9.1 \times 10^{-3} \Rightarrow v_1 = 4.63$$

$$\frac{P_0}{\gamma} + \frac{v_0^2}{2g} + z_0 = \frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1$$

$$0 + 0 + 7 = \frac{P_1}{\gamma} + \frac{4.63^2}{2g} + 0 \Rightarrow p_1 = 57.9 \text{ KPa}$$

### ۳-۱۶- وسایل اندازه‌گیری جریان

در این قسمت به تعدادی از وسایل اندازه‌گیری دبی و رابطه‌ای که برای محاسبه دبی در آنها بکار گرفته می‌شود اشاره می‌گردد.

### ۳-۱۶-۱- ونتوری متر

این وسیله که در شکل ۳-۱۲ نمایش داده شده برای اندازه‌گیری جریان در لوله‌ها بکار می‌رود. و از رابطه زیر استفاده می‌کند.

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

$$v_1 = \frac{Q}{A_1}, v_2 = \frac{Q}{A_2}$$

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = \frac{Q^2}{2g} \left( \frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2} \right)$$

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \frac{Q^2}{2gA_2^2} \left( 1 - \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right)$$

$$Q = A_2 \sqrt{\frac{2(P_2 - P_1)}{\rho \left( 1 - \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right)}}$$

دبی تئوری / دبی واقعی  $Cd =$

ونتوری متر  $cd=0.8-0.98$

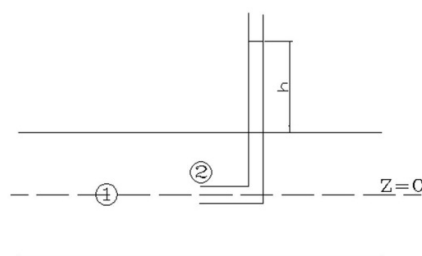
روزنه  $cd=0.6$

۳-۱۶-۲- لوله پیتوت (کانال)

وسیله‌ای ساده‌ای برای اندازه‌گیری جریان است که در شکل ۳-۱۳ نشان داده شده است. رابطه جریان در این وسیله به صورت زیر است.

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

$$\frac{P_2 - P_1}{\gamma} = \frac{v_1^2}{2g} \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$



شکل ۳-۱۳: لوله پیتوت

۳-۱۶-۳- روزنه و شیبوره

دبی خروجی از روزنه از رابطه زیر تعیین می‌گردد.

$$v = \sqrt{2gh}$$



۳-۱۶-۴- پارشال فلوم

این وسیله برای اندازه‌گیری دبی در کانال‌های بوده و رابطه جریان در آن همانند رابطه دبی در ونتوری متر می‌باشد.

۳-۱۶-۵- دبی عبوری از زیر دریچه

دبی عبوری از زیر دریچه‌ها از رابطه زیر تعیین می‌شود.

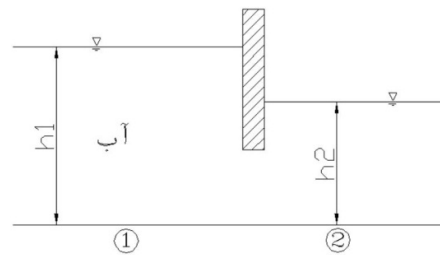
$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = h_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\Rightarrow \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = h_1 - h_2$$

$$A_1 V_1 = A_2 V_2 = Q$$

$$bh_1 v_1 = bh_2 v_2 \rightarrow v_1 = \frac{h_2 v_2}{h_1}$$

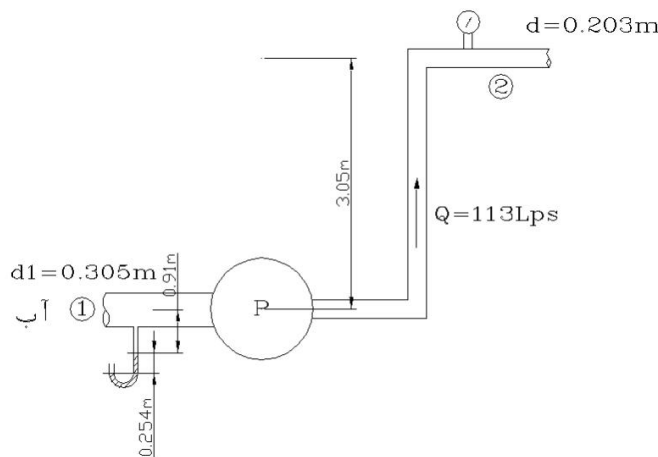


شکل ۳-۱۴: عبور جریان از زیر دریچه

مثال ۳-۱۱:

در شکل زیر توانی را که پمپ به جریان آب می‌دهد، را حساب کنید. فشارسنج، فشار 414Kpa را در

نقطه ۲ نشان می‌دهد



شکل ۳-۱۵: شکل مثال ۳-۱۱

حل:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + hp = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

$$0 - 0.254 \times \gamma_{\omega} \times 13.6 - 0.91 \gamma_{\omega} = P_1$$

$$P_1 = 42815 \text{ Pa}$$

$$Q = A_1 V_1 \Rightarrow V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{113 \times 10^{-3} \text{ m}^3 / \text{s}}{\frac{\pi \times 0.305^2}{4}}$$

$$v_1 = 1.55$$

$$v_2 = 3.5 \text{ m/s}$$

$$4.37 + \frac{1.5^2}{2g} + 0.91 + hp = \frac{414000}{9810} + \frac{3.5^2}{2g} + (3.05 + 0.91)$$

$$hp = 40.88 \text{ m}$$

$$P = \frac{\gamma Q h_p}{746} = \frac{9810 \times 113 \times 10^{-3} \times 40.88}{746} = 60.74 \text{ hp}$$

### ۳-۱۷-۱- قانون بقای اندازه حرکت خطی:

قانون دوم نیوتن برای سیستم بعنوان اساس محاسبه معادله اندازه حرکت خطی در حجم کنترل بکار می‌رود. براساس قانون دوم نیوتن اگر بخواهیم تغییر اندازه حرکت داشته باشیم باید یک نیروی خارجی وجود داشته باشد.

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

اندازه حرکت خطی (مومنتوم) حاصلضرب جرم در سرعت  $m \times v$  می‌باشد. تغییر اندازه حرکت ناشی از تغییر جهت و یا اندازه سرعت جریان می‌باشد. معادله فوق نشان می‌دهد که نیروی وارد بر سیستم باعث تغییر گذر یا شار اندازه حرکت می‌شود یا به عبارتی نرخ تغییر اندازه حرکت با زمان مساوی است با نیروی وارد بر سیستم.

اگر در معادله انتقال رینولدز  $N=mv$  قرار داده شود خواهیم داشت:

$$N = mv$$

$$\eta = \frac{d(mv)}{dm} = v$$

بنابراین با توجه به رابطه انتقال رینولدز

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{sys} = \frac{d}{dt} \int_{cv} \eta \cdot \rho \cdot dV + \int_{cs} \eta \cdot \rho \cdot (v \cdot n) dA$$

$$\left(\frac{d(mv)}{dt}\right)_{sys} = \sum F = \frac{d}{dt} \int_{cv} \vec{v} \cdot \rho \cdot dV + \int_{cs} \vec{v} \cdot \rho \cdot (v \cdot n) dA$$

که

$\sum F$  شامل مجموع برداری تمام نیروهای وارد بر ماده سازنده حجم کنترل است یا به عبارت دیگر شامل دو گروه از نیروها می باشد.

- اول: نیروهای سطحی ( $T$ ) که بر تمام سطوح سیال و جامدی که توسط سطح کنترل جدا شده است، اعمال می شود

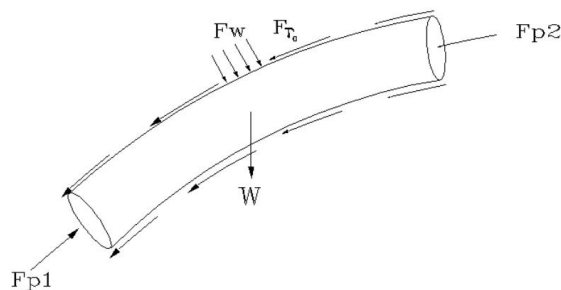
- دوم: نیروهای حجمی یا بدنه‌ای ( $B$ ) که به جرم داخل حجم کنترل وارد می شود. از جمله نیروهای جاذبه‌ای و الکترومغناطیسی

بنابراین خواهیم داشت

$$\vec{F} = \int_{cs} \vec{T} dA + \int_{Cv} B dV \rightarrow \vec{F} = \vec{W} + \vec{F}_{P1} + \vec{F}_{P2} - \vec{F}_{\tau 0} + \vec{F}_W$$

که

$W$  نیروی وزن بوده که نوعی نیروی بدنه‌ای است.  
 $F_{P1}$  و  $F_{P2}$  نیروهای فشاری بوده که از جمله نیروهای سطحی‌اند.  
 $F_{\tau 0}$  نیروی برشی جداره‌ها است و  $F_W$  نیروهای فشاری می باشند.



شکل ۳-۱۶: نیروهای بدنه‌ای و سطحی

در حالت یک بعدی:

$$\text{خروجی } \dot{M}_i = v_i \rho_i v_{ni} A_i = \dot{m}_i v_i$$

$$\text{ورودی } \dot{M}_i = v_i (-\rho_i v_{ni} A_i) = -\dot{m}_i v_i$$

$$\sum F = \frac{d}{dt} \int_{cv} v \rho dV + \sum (\dot{m}_i v_i)_{out} - \sum (\dot{m}_i v_i)_{in}$$

معادله فوق بیان می‌کند که نیروهای برداری خالص روی یک حجم کنترل مساوی خواهد بود با نرخ تغییر اندازه حرکت برداری داخل حجم کنترل بعلاوه جمع برداری شار اندازه حرکت خروجی منهای جمع برداری شار اندازه حرکت ورودی.

با فرض جریان دائمی داریم:

$$\sum F = \int_{cs} \vec{v} \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA$$

برای جریان یک بعدی:

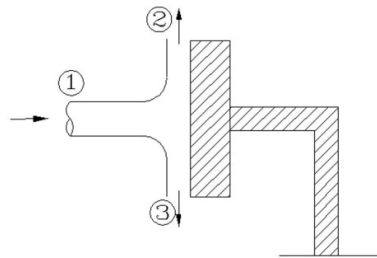
$$\sum F = (\vec{v} \rho \vec{v} A)_{out} - (\vec{v} \rho \vec{v} A)_{in} = \Delta(\rho Q \vec{v})$$

و برای سیال تراکم ناپذیر:

$$\begin{aligned} \sum F &= \rho Q \Delta \vec{v} = \rho Q (\vec{v}_{out} - \vec{v}_{in}) \\ &= \rho Q (v_2 - v_1) \end{aligned}$$

مثال ۳-۱۲: (محاسبه نیروی اعمال شده از طرف آب به یک دیواره قائم)

در شکل زیر سرعت جریان خروجی  $15\text{m/s}$  و سطح مقطع  $0.01\text{m}^2$  است. مطلوب است نیروی وارده از طرف آب به تکیه گاه.



شکل ۳-۱۷: شکل مثال ۳-۱۲

حل :

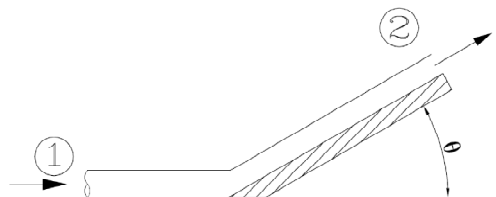
$$\sum F_x = \int \bar{v} \rho (\bar{v} \cdot \bar{n}) dA = \rho Q (v_{2x} - v_{1x}) = \rho Q (0 - v_{1x})$$

$$\sum F_x = -\rho v_1^2 A_1 = -2.25\text{KN}$$

$$R_x = 2.25$$

مثال ۳-۱۳:

مطابق شکل، یک پره ثابت، فواره‌ای به مقطع  $A$  را به اندازه زاویه  $\theta$  و بدون تغییر سرعت منحرف می‌کند، جریان دائمی و فشار در همه جا برابر فشار اتمسفر بوده و اصطکاک روی پره قابل چشم‌پوشی است. نیروهای عمودی و افقی  $F_x$  و  $F_y$  وارده بر پره را حساب کنید.



شکل ۳-۱۸: شکل مثال ۳-۱۳

حل :

$$\sum F = \int_{cs} \vec{v} \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA$$

$$\sum F = \dot{m} v_2 - \dot{m}_1 v_1 = \dot{m} (v_2 - v_1)$$

$$F_x = \dot{m} (v_{2x} - v_{1x}) = \dot{m} (v \cos \theta - v) = \dot{m} v (\cos \theta - 1)$$

$$F_y = \dot{m} (v_{2y} - v_{1y}) = \dot{m} (v \sin \theta - 0) = \dot{m} v \sin \theta$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(\dot{m} v (\cos \theta - 1))^2 + (\dot{m} v \sin \theta)^2}$$

### ۳-۱۷-۲- حجم کنترل با سرعت ثابت

اگر حجم کنترل انتخاب شده با سرعت ثابت حرکت کند باید سرعت‌های نسبی را در رابطه انتقال رینولدز جایگزین کرد. یعنی :

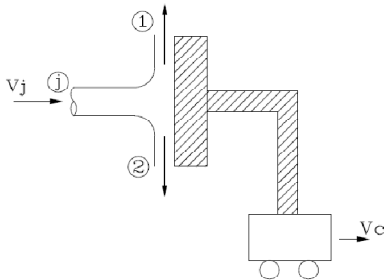
$$\left( \frac{dN}{dt} \right)_{sys} = \frac{d}{dt} \int_{cv} \eta \rho dV + \int \eta \rho (v_r \cdot n) dA$$

$$V_r = V - V_{cv}$$

که  $V_r$ ، سرعت نسبی سیال از دید ناظری است که بر حجم کنترل سوار است و  $V_{cv}$ ، سرعت حجم کنترل نسبت به دستگاه ساکن و  $V$  سرعت سیال نسبت به دستگاه ساکن است.

### مثال ۳-۱۴:

یک فواره با سرعت  $v_j$  به طور عمودی به صفحه دستگاه شکل این مثال که با سرعت ثابت  $v_c$  در حال



حرکت به جهت راست است، برخورد می‌کند. اگر جرم مخصوص

فواره  $1000 \text{ kg/m}^3$ ، مساحت سطح آن  $3 \text{ cm}^2$  و  $v_j$  و  $v_c$  به ترتیب

$20$  و  $15$  متر بر ثانیه باشند، نیروی لازم برای ثابت نگاه داشتن

سرعت صفحه را پیدا کنید (از وزن فواره و صفحه چشم پوشی کرده

و جریان را پایدار فرض کنید).

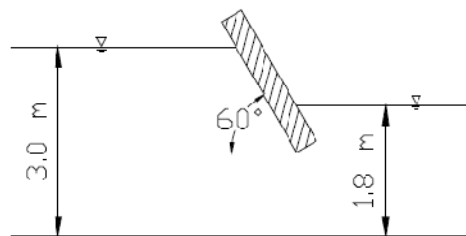
شکل ۳-۱۹: شکل مثال ۳-۱۴

بقای اندازه حرکت:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= V_{1x} \rho V_{1x} A_1 + V_{2x} \rho V_{2x} A_2 - V_j \rho (V_{jx} - V_{cx}) A \\ \sum F_x &= -\rho A_j (V_j - V_c) \\ \sum F_y &= V_{1y} \rho V_{1y} A_1 + V_{2y} \rho V_{2y} A_2 - \rho V_j A_j (V_{jy} - V_{cy}) \\ V_{1y} &= V_{2y} \\ \sum F_y &= 0 \end{aligned}$$

مثال ۳-۱۵:

جریان آب در کانالی مطابق شکل روبرو برقرار است. با صرفه نظر کردن از اصطکاک، نیروی افقی و قائم وارد بر دریچه را محاسبه کنید. (عرض کانال ۴ متر عمود بر صفحه کاغذ است)



شکل ۳-۲۰: شکل مثال ۳-۱۵

حل:

$$\begin{aligned} Q &= A_1 V_1 = A_2 V_2 \\ 3 \times 4 \times V_1 &= 1.8 \times 4 \times V_2 \Rightarrow V_2 = 1.7 V_1 \\ \frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 &= \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 \\ 3 - 1.8 &= \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} \Rightarrow 1.2 = \frac{1.7^2 V_1^2 - V_1^2}{2g} \Rightarrow V_1 = 3.5 \Rightarrow V_2 = 5.95 \end{aligned}$$

$$Q = A_1 V_1 = 42 \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$\sum F = \rho Q \Delta \bar{v} = \rho Q (v_2 - v_1)$$

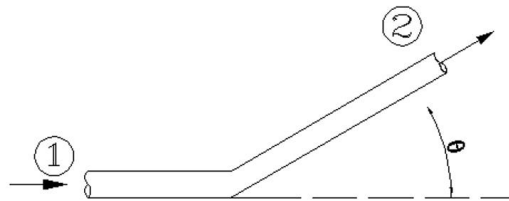
$$\gamma h_{c1} A_1 - \gamma h_{c2} A_2 - F \cos \theta = 1000 \times 42 \times (5.95 - 3.5) = 102900 \text{ N}$$

$$\frac{1}{2} \times 9810 \times 3^2 \times 4 - \frac{1}{2} \times 9810 \times 1.8^2 \times 4 - F \cos \theta = 1000 \times 42 \times (5.95 - 3.5)$$

$$F = 20222 \text{ N}$$

مثال ۳-۱۶:

آب در یک زانویی با زاویه ۴۵ درجه در یک سطح افقی جریان دارد. فشار در مقطع ورودی برابر 50KPa با قطر 600mm و در مقطع خروجی فشار 40Kpa و قطر 300mm می باشد. چنانچه شدت جریان عبوری برابر با 0.45m<sup>3</sup>/s باشد، نیروی لازم جهت ثابت نگاه داشتن زانویی را محاسبه کنید.



شکل ۳-۲۱: شکل مثال ۳-۱۶

حل:

$$\sum F = \rho Q \Delta \vec{v} = \rho Q (v_2 - v_1)$$

$$P_1 A_1 - P_2 A_2 \cos \theta - F_x = \rho Q (v_2 \cos \theta - v_1)$$

$$50000 \times \frac{\pi \times 0.6^2}{4} - 40000 \times \frac{\pi \times 0.3^2}{4} \times \cos 45 - F_x = 1000 \times 0.45 \times (6.37 \times \cos 45 - 1.59)$$

$$F_x = 10826 \text{ N}$$

$$P_1 A_1 - P_2 A_2 - F_y = \rho Q (v_{2y} - v_{1y})$$

$$0 - 40 \times \frac{\pi \times 0.3^2}{4} \times \sin 45 + F_y = 1000 \times 0.45 \times (6.37 \times \sin 45 - 0)$$

$$F_y = 4026 \text{ N}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \Rightarrow F = 11550 \text{ N}$$

۳-۱۷-۳- قانون بقای اندازه حرکت زاویه ای

برای رسیدن به رابطه بقای اندازه حرکت زاویه ای در رابطه مربوط به قضیه انتقال رینولدز به جای متغیر کمکی N از بردار حرکت زاویه ای H استفاده می شود.



$$N = H_0 = \int_{\text{sys}} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) dm \Rightarrow \eta = \frac{dN}{dm} = \frac{dH_0}{dm} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

$$\left( \frac{dH_0}{dt} \right)_{\text{sys}} = \frac{d}{dt} \int_{\text{cv}} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \rho dV + \int_{\text{cs}} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

براساس قانون بقای اندازه حرکت زاویه‌ای، تغییر اندازه حرکت زاویه‌ای با تمام گشتاورهایی که حول نقطه O روی حجم کنترل وارد می‌شوند برابر است:

$$\left( \frac{dH_0}{dt} \right)_{\text{sys}} = \sum M_0 = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F})_0$$

$$\sum M_0 = \frac{d}{dt} \int_{\text{cv}} (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \rho dV + \int_{\text{cs}} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

$$\int_{\text{cs}} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{v})_{\text{out}} \dot{m}_{\text{out}} - \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{v})_{\text{in}} \dot{m}_{\text{in}}$$

مسائل مومنتوم به سه حالت زیر می‌باشند

۱- پره و نازل ساکن باشند

در این حالت از رابطه زیر استفاده می‌شود

$$\sum \mathbf{F} = \sum \dot{m} \cdot \mathbf{v}$$

که از دبی جرمی و سرعت مطلق در این رابطه استفاده می‌شود

۲- پره یا تیغه متحرک و نازل ساکن باشد

در این حالت از رابطه زیر استفاده می‌شود

$$\sum \mathbf{F} = \sum \dot{m}_r \cdot \mathbf{v}_r$$

که از دبی جرمی نسبی و سرعت نسبی در این رابطه استفاده می‌شود

۳- نازل ساکن و یک سری پره با سرعت زاویه‌ای  $\omega$  یا سرعت خطی  $u$  حرکت می‌کنند.

در این حالت از رابطه زیر استفاده می‌شود

$$\sum \mathbf{F} = \sum \dot{m}_{\text{abs}} \cdot \mathbf{v}_r$$

که از دبی جرمی مطلق و سرعت نسبی زاویه‌ای در این رابطه استفاده می‌شود

## فصل چهارم

# جریان دائمی تراکم ناپذیر در لوله‌ها و

## مجاری تحت فشار

### ۴-۱- جریان سیال لزج

در فصل قبل حرکت سیال با فرض غیرلزج بودن یا به عبارت دیگر سیال ایده‌آل بررسی گردید. در این حرکت حالت ذره از یک نقطه به نقطه دیگر بدون تغییر انرژی (بدون اصطکاک) صورت می‌گیرد. در حالتی که هیچ‌گونه تبادل انرژی اعم از حرارتی، مکانیکی و ..... با محیط اطراف صورت نگیرد به معادله برنولی دست پیدا نمودیم. اما واقعیت این است که هیچ حرکتی در وضعیت بدون اتلاف انرژی نیست. علت این اتلاف در مرحله اول ماهیت لزج بودن سیال است و در مرحله دوم که مؤثرتر از عامل اول در افت انرژی نقش دارد، پدیده بی‌نظمی یا آشفتگی جریان است.

#### ۴-۲- جریان آرام و آشفته

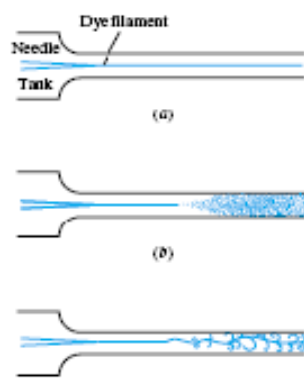
جریان آرام به جریانی اطلاق می‌شود که در آن سیال به صورت لایه‌ای با خطوط جریان منطبق بر هم و بدون تداخل در یکدیگر حرکت می‌نماید. نکته شاخص این نوع جریان، نظم میدان حرکت و یا لایه‌ای بودن آن می‌باشد. ذرات سیال در کنار هم و بر روی خطوط جریان متمایز از یکدیگر در حرکتند. جهت نمایش این نوع میدان حرکت، آزمایشی به نام آزمایش رینولدز صورت می‌گیرد.

#### ۴-۲-۱- جریان آشفته:

جریانی است که در آن حرکت ذرات سیال تصادفی بوده و از یک لایه به لایه دیگر در حالت حرکت و تبادل اندازه حرکت می‌باشند.

#### ۴-۲-۲- آزمایش رینولدز

تمایز جریان‌های آرام و آشفته ابتدا توسط رینولدز تشخیص داده شده. و در آزمایشی که به نام خود شناخته می‌شود تمایز این دو جریان را نشان داد. در این آزمایش در داخل محفظه از آب که دارای یک لوله خروجی مجهز به شیر قطع و وصل برای کنترل جریان می‌باشد، لوله‌ای شیشه‌ای قرار داده می‌شود که یک سر آن به مخزن حاوی ماده رنگی و قسمت دیگر آب به لوله خروجی محفظه آب مطابق شکل ۴-۱ متصل شده است. در ابتدا به آب اجازه داده می‌شود با دبی و در نتیجه سرعت کمی از قسمت خروجی تخلیه شود. به علت حرکت لایه‌ای ذرات جریان در این حالت، ماده رنگی خارج شده از لوله شیشه‌ای به صورت خطی و بدون برهم‌خوردگی از قسمت خروجی به همراه آب تخلیه می‌شود. با افزایش جریان و وقوع آشفتگی در جریان نوسانات و آشفتگی شدیدی در حرکت ماده رنگی صورت می‌گیرد به نحوی که در نهایت کاملاً با آب خروجی مخلوط می‌گردد.



- الف) جریان آرام  
ب) جریان انتقالی  
ج) جریان آشفته

شکل ۴-۱: دستگاه آزمایش رینولدز و انواع جریان

عدد رینولدز معیاری است برای شناسایی جریان آرام و آشفته که عددی بی بعد می باشد و از رابطه زیر تعیین می گردد.

$$Re = \frac{VD\rho}{\mu} = \frac{VD}{\nu}$$

تقسیم بندی جریان برای لوله ها با استفاده از عدد رینولدز به صورت زیر است:

جریان آرام:  $Re \leq 2000$

جریان آشفته:  $Re \geq 4000$

انتقالی:  $2000 < Re < 4000$

#### ۴-۳- افت انرژی در طول جریان

در حالت بدون اصطکاک داشتیم

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

وقتی افت هد نیز داشته باشیم. داریم

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \Delta H$$

$$H_1 = H_2 + \Delta H$$

که  $\Delta H$  افت انرژی در واحد وزن سیال است.

با فرض سطح مقطع ثابت برای یک لوله:

$$h_L = \left( \frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 \right) - \left( \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 \right)$$

$$h_L = \left( \frac{P_1}{\gamma} + z_1 \right) - \left( \frac{P_2}{\gamma} + z_2 \right)$$

اگر لوله افقی باشد داریم:

$$h_L = \frac{P_1}{\gamma} - \frac{P_2}{\gamma}$$

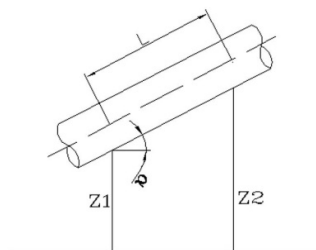
یعنی برای لوله افقی منشوری افت انرژی برابر همان افت ارتفاع معادل فشار می‌باشد. طبق بررسی‌های آزمایشگاهی در سرعت‌های پائین (جریان آرام)،  $h_L$  با سرعت رابطه مستقیم و خطی دارد  $h_L \approx V$  و با افزایش رینولدز،  $h_L$  با توان  $n$ م سرعت مناسب است که  $n=1.75-2$  است.

#### ۴-۴- رابطه داریسی ویسباخ

این رابطه برای تعیین افت هدهای اصطکاکی در لوله‌ها بوده و به صورت زیر است.

$$hf = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}$$

اگر لوله شیبدار شکل ۴-۲ را در نظر بگیریم داریم



شکل ۴-۲: لوله شیبدار

$$P_1 A_1 - P_2 A_2 - w \sin \alpha - \tau_0 PL = 0$$

$$\sin \alpha = \frac{Z_2 - Z_1}{L}$$

$$P_1 A - P_2 A - \gamma LA \frac{Z_2 - Z_1}{L} = \tau_0 PL$$

$$\frac{P_1}{\gamma} - \frac{P_2}{\gamma} - Z_2 + Z_1 = \tau_0 \frac{L}{\gamma R}$$

$$v_1 = v_2$$

$$\left( \frac{P_1}{\gamma} + Z_1 + \frac{v_1^2}{2g} \right) - \left( \frac{P_2}{\gamma} + Z_2 + \frac{v_2^2}{2g} \right) = \tau_0 \frac{L}{\gamma R}$$

$$\tau_0 \frac{L}{\gamma R} = H_1 - H_2$$

$$\frac{h_L}{L} = S_f$$

$$\tau_0 = \gamma R \frac{h_L}{L} = \gamma R S_f$$

$$h_L = \tau_0 \frac{L}{\gamma R}$$

$$\tau_0 = K \rho v^2$$

$$h_L = K \rho v^2 \frac{L}{\gamma R} = K \frac{L}{R} \frac{v^2}{g}$$

$$h_L = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}$$

$$f = 8k$$

$$R = \frac{A}{P} \text{ شعاع هیدرولیکی}$$

رابطه فوق رابطه دارسی ویسباخ برای مقاطع دایره‌ای توپر است. که  $f$  تابعی از  $Re$  و  $\varepsilon/D$  است. این

رابطه در بررسی جریان آشفته و آرام صادق است.

#### ۴-۵- جریان آرام در لوله‌های مدور

اگر جریان عبوری از لوله آرام باشد خواهیم داشت:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

$$y = r_0 - r, dy = -dr$$

$$\tau = \mu \left( -\frac{du}{dr} \right)$$

$$\tau_0 \left( \frac{r}{r_0} \right) = -\mu \frac{du}{dr}$$

$$\frac{du}{dr} = -\frac{\tau_0}{r_0 \mu} r \Rightarrow u = -\frac{\tau_0}{2\mu r_0} r^2 + c$$

$$r = r_0 \rightarrow u = 0 \Rightarrow C = \frac{\tau}{2\mu} r_0$$

$$u = \frac{\tau_0}{2r_0\mu} (r_0^2 - r^2)$$

$$u_{\max} = u|_{r=0} = \frac{\tau_0}{2\mu} r_0$$

$$u = u_{\max} \left( 1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right)$$

$$u_{\max} = \frac{\gamma r_0 h_L}{2\mu L} r_0 = \frac{\gamma h_L}{4\mu L} r_0^2 = \frac{\gamma h_L}{16\mu L} D_0^2$$

$$u_{\text{avg}} = \frac{1}{2} u_{\max} = \frac{\gamma h_L}{32\mu L} D^2$$

$$Q = \bar{V}A = \frac{\gamma h_L \pi}{128\mu L} D^4$$

رابطه فوق به رابطه هیگن-پوزی موسوم است. و برای تعیین افت هدهای اصطکاکی در لوله‌ها با فرض

جریان آرام بکاربرده می‌شود.

#### ۴-۶- تعیین ضریب اصطکاک در رابطه داریسی و سیباخ

افت هد در جریان آرام عبوری از لوله طبق رابطه هیگن-پوزی به صورت زیر است. که متناسب با توان

اول سرعت است.

$$h_L = 32 \frac{\mu}{\gamma} \frac{L}{D^2} V$$

$$h_L \approx V$$

از طرفی از رابطه دارسی ویسباخ که برای تعیین افت هد در لوله‌ها هم در جریان آرام و هم در جریان آشفته است داریم

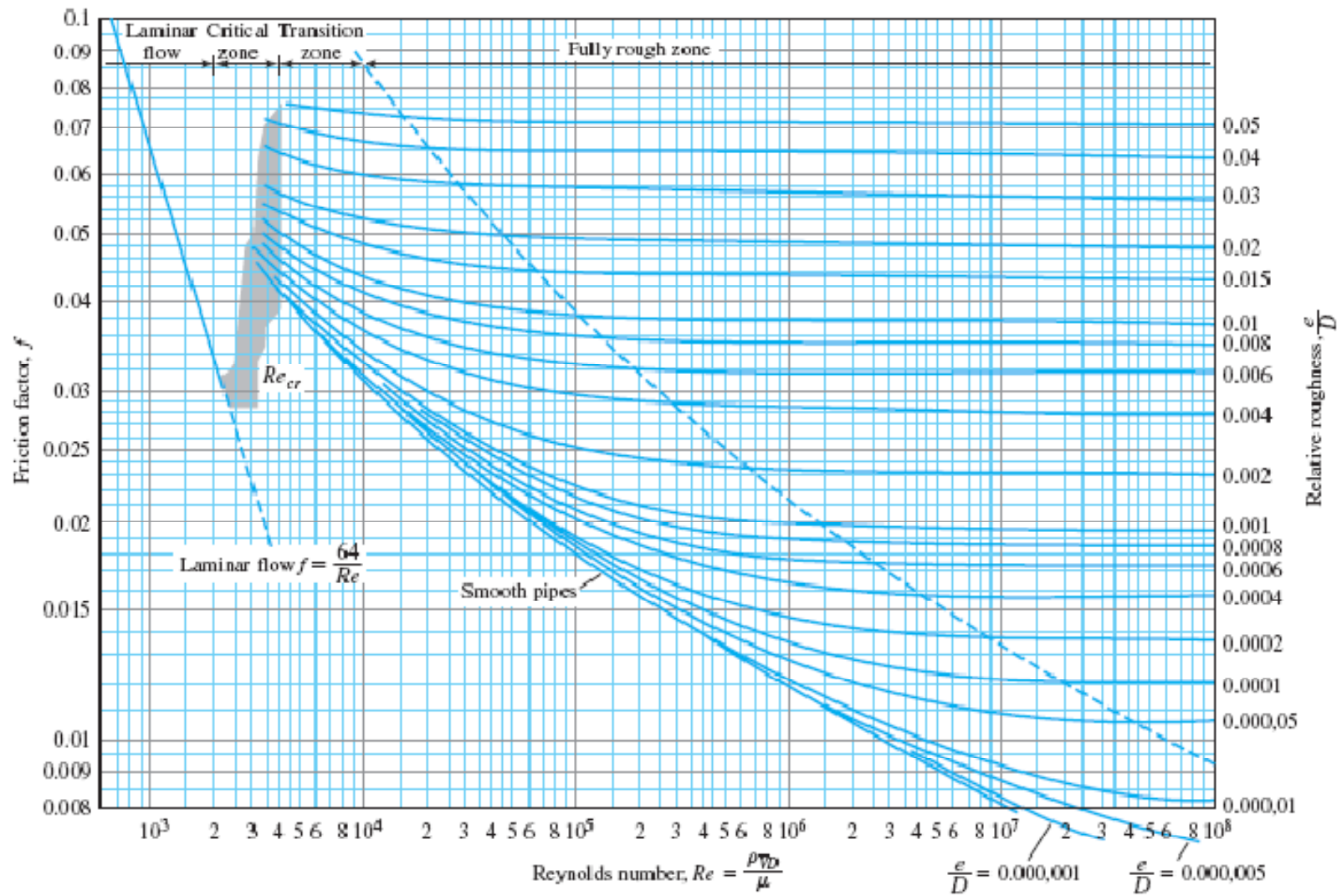
$$h_L = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}$$

با مقایسه دو رابطه و استفاده از رابطه عدد رینولدز، به ضریب افت هد در رابطه دارسی ویسباخ در جریان آرام به صورت زیر دست می‌یابیم

$$f = \frac{64}{Re}$$

پس در جریان لایه ای  $f$  تابعی از  $\varepsilon/D$  یعنی زبری نسبی نیست و فقط به  $Re$  بستگی دارد. محققین زیادی از جمله نیکورادزه (۱۹۳۳) و مودی به مطالعه ضریب  $f$  برای جریان آرام و آشفته پرداخته‌اند. نیکورادزه ۱۹۳۳ به بررسی اثر زبری لوله با استفاده از ذره‌های ماسه با اندازه‌های مختلف اقدام نمود. او نشان داد که  $\varepsilon$  را می‌توان برابر با قطر ذرات ماسه در نظر گرفت. و در حالت کلی  $f$  تابعی از  $\varepsilon/D$ ،  $Re$  است. طبق این آزمایش  $f$  در جریان‌های آشفته در اعداد  $Re$  بالا تابعی از زبری نسبی است. مودی ۱۹۴۴ بر روی زبری واقعی لوله‌های تجاری کارکرد و دیاگرام مودی را بوجود آورد. این دیاگرام در شکل ۳-۴ نمایش داده شده است.





شکل ۴-۳: دیاگرام مودی

جدول ۴-۱: زبری نسبی تعدادی از لوله‌ها با جنس مختلف

| Pipe Material                    | Equivalent Roughness, $e$ |          |
|----------------------------------|---------------------------|----------|
|                                  | ft                        | mm       |
| Riveted steel                    | 0.003–0.03                | 0.9–9.0  |
| Concrete                         | 0.001–0.01                | 0.3–3.0  |
| Wood stave                       | 0.0006–0.003              | 0.18–0.9 |
| Cast iron                        | 0.00085                   | 0.26     |
| Galvanized iron                  | 0.0005                    | 0.15     |
| Asphalted cast iron              | 0.0004                    | 0.12     |
| Commercial steel or wrought iron | 0.00015                   | 0.045    |
| Drawn tubing                     | 0.000005                  | 0.0015   |
| Plastic or glass                 | Smooth                    | Smooth   |

#### ۴-۷ - رابطه هیزن - ویلیامز

این رابطه، یک رابطه تجربی برای تعیین افت هدهای اصطکاکی در لوله‌هاست که به صورت زیر می‌باشد

$$hl = \frac{10.68LQ^{1.852}}{C^{1.852}D^{4.87}}$$

$C$  ضریب مربوط به افت هد است که با توجه به جنس لوله‌ها از طرف کارخانجات سازنده معرفی می‌گردد

که حدوداً به صورت زیر است.

لوله‌های GRP،  $C=140$

لوله‌های فولادی،  $C=120-140$

لوله‌های پلی‌اتیلن،  $C=120-140$

لوله‌های چدنی،  $C=100-120$

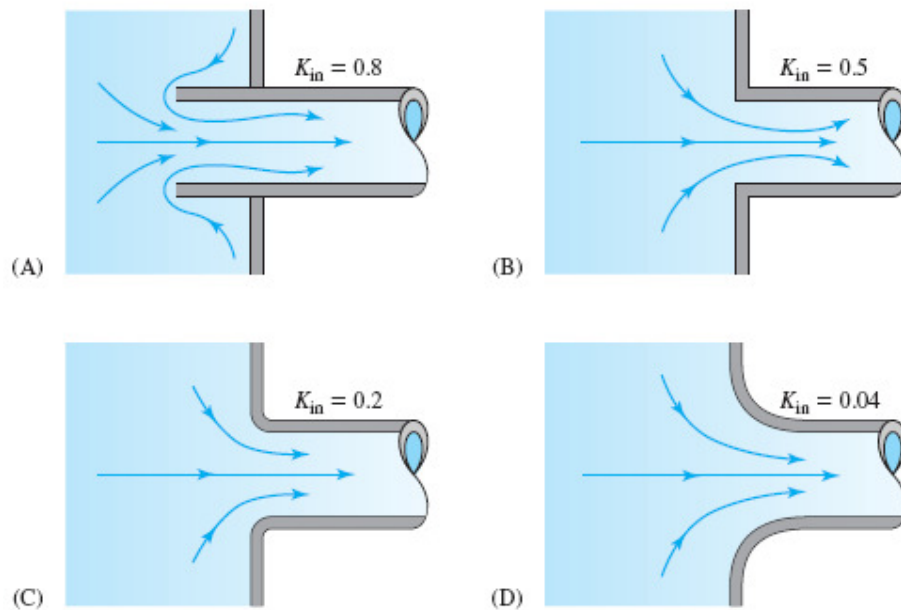
لوله‌های آزیست سیمان،  $C=120$

#### ۴-۸- انواع افت هدها

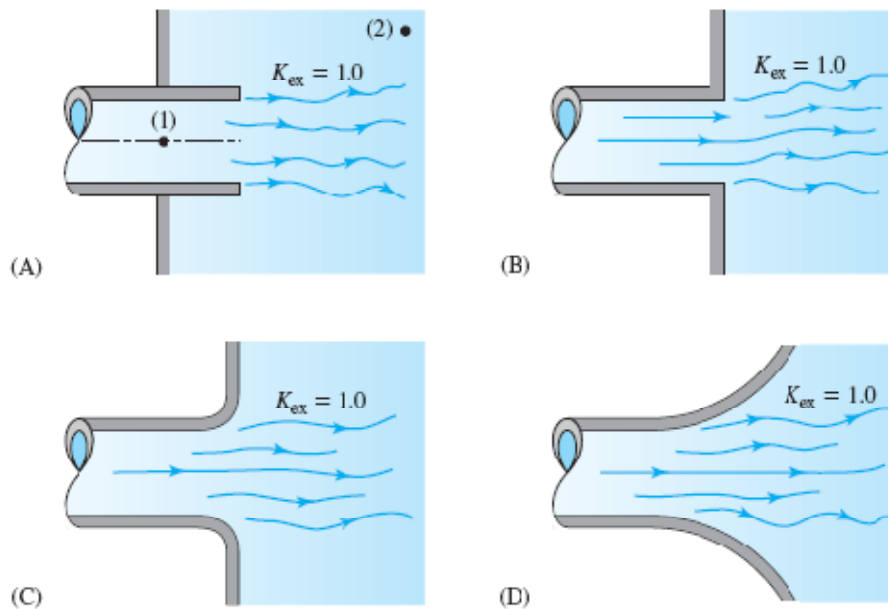
افت هدها شامل دو نوع افت هدهای اصطکاکی و افت هدهای موضعی می‌باشند. افت هدهای اصطکاکی که پیشتر شرح داده شده ناشی از وجود تنش‌های لزج می‌باشند و افت هدهای موضعی ناشی از تغییرات ناگهانی در مسیر جریان از جمله به خمیدگی‌ها، زانو، شیرها، بازشدگی و تنگ‌شدگی ناگهانی و ..... است. افت هدهای موضعی عموماً به صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$h_l = k \frac{V^2}{2g}$$

$K$ ، با توجه به جداول و نمودارها مربوطه تعیین می‌گردد. به طور مثال در شکل ۴-۴،  $K$  برای تخلیه از مخزن به لوله با فرم‌های مختلف ارائه شده است.



شکل ۴-۴- ضریب افت هد موضعی برای خروج از مخزن



شکل ۴-۵- ضریب افت هد موضعی برای ورود به مخزن

انبساط ناگهانی

$$h = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{V_1^2}{2g}$$

انقباض ناگهانی

$$h = \left(\frac{1}{cc} - 1\right)^2 \frac{V_2^2}{2g}$$

#### ۴-۹- لوله‌های سری و موازی

نحوه آرایش لوله‌ها می‌تواند به دو صورت موازی و سری صورت گیرد. در لوله‌های سری دبی در تمام

لوله‌ها برابر بوده و افت هد کل از جمع افت هد هر یک از لوله‌ها تعیین می‌گردد.

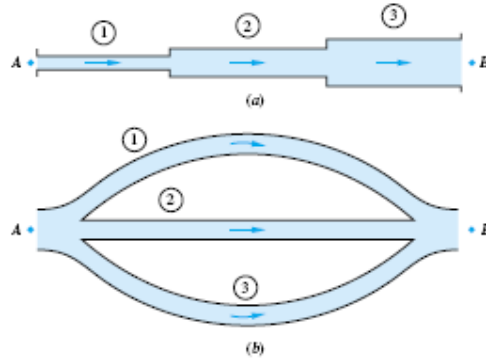
$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2 \dots$$

$$\sum hf = hf_1 + hf_2 + \dots$$

در لوله‌های موازی، دبی کل از جمع دبی تک، تک لوله‌ها حاصل شده ولی افت هد تمام لوله‌ها به هم برابر است.

$$\sum Q = Q_1 + Q_2 + \dots$$

$$hf_1 = hf_2 \dots$$



شکل ۴-۶: لوله‌های سری و موازی

#### ۴-۱۰-۱- انواع مسائل جریان در لوله‌ها

مسائل مربوط به جریان در لوله‌ها می‌تواند به سه صورت کلی زیر باشد

مسائل نوع ۱: دبی یا سرعت متوسط، قطر، طول، زبری معلوم ← افت فشار مجهول

مسائل نوع ۲: قطر، طول، زبری و افت فشار معلوم ← سرعت یا دبی مجهول

مسائل نوع ۳: طول، زبری، دبی، افت فشار معلوم ← قطر مجهول

#### ۴-۱۰-۱-۱- مسائل نوع ۱ (محاسبه افت بار)

این گونه از مسائل ساده ترین نوع مسائل جریان در لوله‌ها می‌باشد که هدف در آنها محاسبه افت بار در لوله است

مثال ۴-۱:

روغنی با دبی 350 لیتر بر دقیقه،  $Sg=0.9$  و ویسکوزیته دینامیکی  $0.0574\text{Pas}$  در یک لوله به قطر 75 میلیمتر جریان دارد، مطلوب است محاسبه سرعت ماکزیمم در لوله و افت هد در طول 300 متر از این لوله

حل:

$$Q = 350 \frac{\text{L}}{\text{min}} \times \frac{1\text{m}^3}{1000\text{l}} \times \frac{1\text{min}}{60\text{s}} = 5.83 \times 10^{-3} \text{m}^3/\text{s} \Rightarrow V = \frac{Q}{A} = 1.32 \dots \text{m/s}$$

$$sg = 0.9, \mu = 0.05764$$

$$Re = \frac{VD\rho}{\mu} = \frac{1.32 \times 75 \times 10^{-3} \times 1000 \times 0.9}{0.0574} = 1550 < 2000$$

پس جریان آرام است

$$\bar{V} = \frac{1}{2} V_{\max} \Rightarrow V_{\max} = 2\bar{V} = 2 \times 1.32 = 2.64$$

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \Rightarrow h_f = 0.0413 \times \frac{300}{75 \times 10^{-3}} \times \frac{1.32^2}{2g} = 14.67\text{m}$$

$$f = \frac{64}{Re} = \frac{64}{1550} = 0.0413$$

مثال ۴-۲:

اطلاعات یک خط لوله آب به صورت زیر است. مطلوب است تعیین افت هد در لوله

$$D = 0.075$$

$$Re = 80000$$

$$\varepsilon = 0.15\text{mm}$$

$$L = 300$$

$$v = 0.658 \times 10^{-6}$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.15 \times 10^{-3}}{0.075} = 2 \times 10^{-3} \quad \rightarrow f = 0.0255$$

$$R = 80000$$

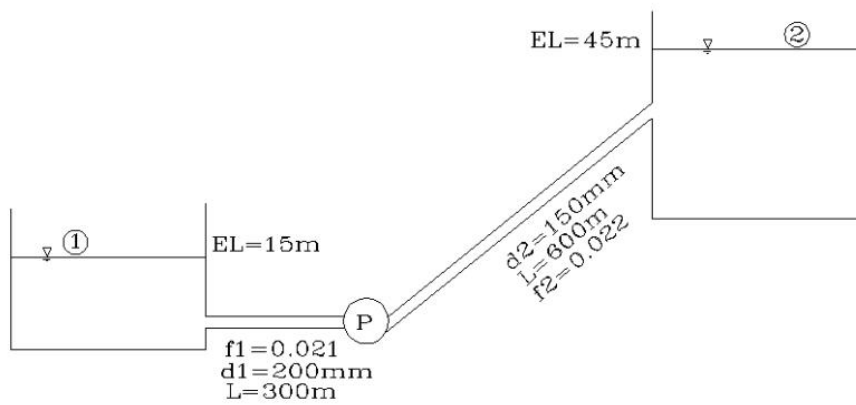
$$h_f = f \frac{L V^2}{D 2g}$$

$$= 0.0255 \times \frac{300}{0.075} \times \frac{0.7^2}{2g} = 2.55 \text{m}$$

$$Re = \frac{VD}{\nu} \Rightarrow V = \frac{Re \nu}{D} = \frac{80000 \times 0.658 \times 10^{-6}}{0.075} = 0.7$$

مثال ۳-۴:

در شکل زیر با توجه به داده های ذیل هد پمپاژ را بدست آورید. دبی ۷۰ لیتر بر ثانیه می باشد.



شکل ۷-۴: شکل مثال ۳-۴

حل:

$$H_1 + h_P = H_2 + h_L$$

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 + h_P = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 + h_{L1} + h_{L2}$$

$$15 + h_P = 45 + h_{L1} + h_{L2}$$

$$h_{L1} = f_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{V_1^2}{2g}$$

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{70 \times 10^{-3}}{\frac{\pi \times 0.2^2}{4}} = 2.33$$

$$h_{L1} = 0.02 \times \frac{300}{200 \times 10^{-3}} \times \frac{2.33^2}{2g} = 8m$$

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{70 \times 10^{-3}}{\frac{7 \times 0.15^2}{4}} = 3.96$$

$$h_{L2} = 0.022 \times \frac{600}{0.15} \times \frac{3.96^2}{2g} = 70.3m$$

$$15 + h_P = 45 + 8 + 70.3$$

$$h_P = 108.3$$

$$P = \frac{108.3 \times 9810 \times 70 \times 10^{-3}}{746} = 99.96h_P$$

توان

#### ۴-۱۰-۲- مسائل نوع ۲ (محاسبه دبی)

در این مسائل باید  $f$  معلوم باشد و از آنجایی که خود  $f$  تابعی از سرعت است که مجهول مسئله می باشد، این مسائل به کمک فرآیند سعی و خطا حل می شوند. به طوریکه در ابتدا مقداری برای ضریب  $f$  فرض می شود. سپس با استفاده از مقدار فرض شده و رابطه داری ویسباخ و مقدار افت هد معلوم مسئله مقدار سرعت تعیین می گردد. با مشخص شدن سرعت، مقدار عدد رینولدز محاسبه می شود. با داشتن عدد رینولدز و زبری نسبی می توان با استفاده از دیاگرام مودی مقداری برای ضریب  $f$  تعیین نمود. اگر این مقدار با مقدار فرض شده برای ضریب  $f$  یکسان بود، نشان از درست بودن مقدار فرضی  $f$  دارد. در غیر



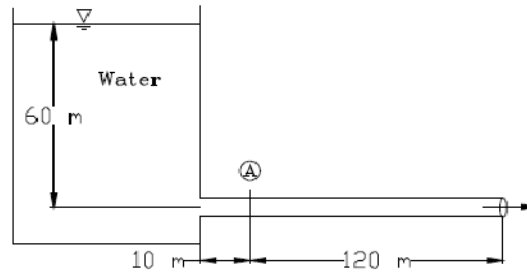
اینصورت با ید مقدار جدیدی برای  $f$  فرض نمود و محاسبات را تکرار کرد. بهتر است از مقدار  $f$  بدست آمده از مرحله قبل بعنوان مقداری برای  $f$  فرضی در مرحله جدید استفاده نمود.

$$hf = f_1 \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \Rightarrow V \rightarrow Re \Rightarrow f_2$$

$$f_1 = f_2 \rightarrow \text{ok}$$

#### مثال ۴-۴:

در شکل زیر قطر لوله ۱۵۰ میلیمتر و جنس آن از چدن می باشد. میزان دبی خط لوله و فشار در نقطه A را محاسبه کنید.  $e=0.225\text{mm}$  و لزجت سینماتیکی سیال  $1.27 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$  می باشد.



شکل ۴-۸: شکل مثال ۴-۴

حل:

$$h_L = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

$$60 = f \frac{130}{0.15} \frac{V^2}{2g}$$

$$f = 0.02 \Rightarrow v = 8.24 \Rightarrow Re = \frac{VD}{\nu} = 973355, \frac{e}{D} = 1.5 \times 10^{-3} \Rightarrow f = 0.021$$

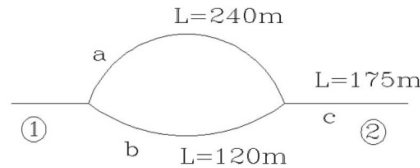
$$\frac{P_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g} + Z_0 = \frac{P_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} + Z_A + h_L$$

$$h_L = 0.021 \frac{10}{0.15} \frac{8.24^2}{2g} = 4.85\text{m}$$

$$0 + 0 + 60 = \frac{P_A}{\gamma} + \frac{8.24^2}{2g} + 0 + 4.85 \Rightarrow P_A = 507.07\text{KPa}$$

مثال ۴-۵:

اگر در لوله کشی موازی - سری شکل ۴-۴، جنس کلیه لوله ها از آهن چکش خوار، قطر آنها 6cm و حاوی آب با ۲۰ درجه باشد، با فرض اینکه دبی کل جریان از لوله ۱ به لوله ۲،  $0.013\text{m}^3/\text{s}$  باشد، افت فشار کلی  $p_1-p_2$  را محاسبه کنید. از افت های موضعی چشمپوشی کنید ( $\gamma_{\text{آب}} = 9.8\text{KN}/\text{m}^3$ )



شکل ۴-۹: شکل مثال ۴-۵

حل:

برای لوله c:

$$v_C = \frac{Q_C}{A_C} = \frac{0.013}{\left[\frac{\pi \times 0.060^2}{4}\right]} = 4.598\text{m/s}$$

$$(\text{Re})_C = \frac{DV}{\nu} = \frac{0.060 \times 4.598}{1.02 \times 10^{-6}} = 2.70 \times 10^5, \quad \frac{\epsilon}{D} = \frac{0.000046}{0.060} = 0.00077$$

بر اساس نمودار مودی  $f_c = 0.020$  است، بنابراین

$$h_L = (f) \left(\frac{L}{D}\right) \left(\frac{V^2}{2g}\right) \rightarrow (h_L)_C = 0.020 \left[\frac{175}{0.060}\right] \left\{ \frac{4.598^2}{(2)(9.8)} \right\} = 62.88\text{m}$$

$$\Delta p_c = (\gamma)(h_f)_c = (9.8)(62.88) = 616\text{kPa}$$

بنابراین برای لوله های a, b داریم:

$$(h_L)_a = (h_L)_b$$

$$V_a = \frac{Q_a}{A_a} = \frac{Q_a}{\left[\frac{\pi \times \left(\frac{6}{100}\right)^2}{4}\right]} = 353.7Q_a$$

$$V_b = \frac{Q_b}{A_b} = \frac{Q_b}{\left[\frac{\pi \times \left(\frac{6}{100}\right)^2}{4}\right]} = 353.7Q_b$$

$$f_a \left[ \frac{240}{0.060} \right] \left\{ \frac{(353.7Q_a)^2}{[(2)(9.8)]} \right\} = f_b \left[ \frac{120}{0.060} \right] \left\{ \frac{(353.7Q_b)^2}{[(2)(9.8)]} \right\}$$

اگر

$$f_a = f_b$$

$$, Q_a = 0.7071Q_b$$

$$Q_a + Q_b = 1.7071Q_b = 0.013 \text{ m}^3 / \text{s}, Q_b = 0.007615 \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$Q_a = (0.7071)(0.007615) = 0.005385 \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$(\text{Re})_a = \frac{6}{100} \frac{[(353.7)(0.005385)]}{(1.02 \times 10^{-6})} = 1.12 \times 10^5 f_a = 0.0219$$

$$(\text{Re})_b = \frac{6}{100} \frac{[(353.7)(0.007615)]}{(1.02 \times 10^{-6})} = 1.58 \times 10^5 f_b = 0.0208$$

این مقادیر  $f$  را در معادله (۱) جایگزین می کنیم:

$$0.0219 \left[ \frac{240}{0.060} \right] \left\{ \frac{(353.7Q_a)^2}{[(2)(9.8)]} \right\} = 0.0208 \left[ \frac{120}{0.060} \right] \left\{ \frac{(353.7Q_b)^2}{[(2)(9.8)]} \right\}$$

$$Q_a = 0.6891Q_b$$

$$, Q_a + Q_b = 1.6891Q_b = 0.013$$

$$Q_b = 0.007696 \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$Q_a = (0.6891)(0.007696) = 0.005303 \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$(\text{Re})_a = \frac{0.060[(353.7)(0.005303)]}{(1.02 \times 10^{-6})} = 1.10 \times 10^5 f_a = 0.0219$$

قابل قبول

$$(\text{Re})_b = \frac{0.060[(353.7)(0.007696)]}{(1.02 \times 10^{-6})} = 1.60 \times 10^5 f_b = 0.0208$$

قابل قبول

بنابراین:

$$Q_b = 0.007696 \text{ m}^3 / \text{s}, Q_a = 0.005303 \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$(h_f)_a = (h_f)_b = 0.0219 \left[ \frac{240}{0.060} \right] \left\{ \frac{[(353.7)(0.005303)]^2}{[(2)(9.8)]} \right\} = 15.71\text{m}$$

$$(\Delta p)_{a,b} = (9.8)(15.71) = 154\text{kPa}$$

$$(\Delta p)_{\text{کل}} = 616 + 154 = 770\text{kPa}$$

## فصل پنجم

# تحلیل و تشابه ابعادی

### ۵-۱- مقدمه

همانگونه که پیشتر اشاره شد، علاوه بر روش‌های دیفرانسیلی و انتگرالی، مشاهدات آزمایشگاهی و تحلیل ابعادی راه حل دیگری برای بررسی حرکت سیال است. در مکانیک سیالات همیشه برای حل مسائل عملی طراحی به نتایج تئوری و آزمایشگاهی نیاز است. همچنین تعیین بعضی از پارامترها (مثل ضریب افت بار در لوله‌ها) به روش‌های تحلیلی امکان پذیر نبوده و نیاز به روش‌های آزمایشگاهی دارد. تحلیل ابعادی می‌تواند تعداد آزمایشات مورد نیاز را با کاهش تعداد متغیرها به شدت کاهش داده و در وقت و هزینه صرفه جویی قابل ملاحظه‌ای نماید. به بیان دیگر تحلیل ابعادی را می‌توان روشی برای فشردن کردن داده‌ها و تعمیم نتایج به حالت کلی دانست.

### ۵-۲- فشردن داده‌ها

می‌دانیم افت فشار در یک لوله، به قطر لوله، سرعت سیال، لزجت سیال و جرم مخصوص سیال بستگی دارد لذا

$$\Delta P = \varphi(D, V, \mu, \rho)$$

که امکان تعیین تابع  $\varphi$  از روش های تحلیلی وجود ندارد و باید از روش آزمایشگاهی تعیین شود. اگر برای رسم یک منحنی از روش های آزمایشگاهی نیاز به ده نقطه تجربی (ده آزمایش) باشد، آنگاه برای بدست آوردن اثر قطر، سرعت، لزجت و دانسیته سیال بر روی تابع  $\varphi$  نیاز به انجام  $10^4$  آزمایش است. در حالیکه با تحلیل ابعادی می توان معادله فوق را به شکل ساده تر زیر درآورد:

$$\frac{D\Delta P}{\rho V^2} = G_1\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right)$$

این معادله در برگیرنده تمام پارامترهای معادله اول است اما بجای ۵ پارامتر دارای ۲ پارامتر می باشد. بنابراین فقط با انجام ۱۰ آزمایش می توان یک تابع مناسب برای ضریب افت هد بدست آورد.

### ۵-۲- تعمیم نتایج

به کمک قوانین تشابه حاصل از تحلیل ابعادی می توان داده های مربوط به یک مدل کوچک را به داده های طراحی یک مدل نمونه اصل تعمیم داد. مثلا برای ساختن یک سد باید ابتدا از پایداری آن درمقابل نیروهای وارده اطمینان حاصل کرد. بدین منظور می توان از یک مدل کوچک شده، نیروهای مزبور را مطالعه کرد و به کمک قانون تشابه، نتایج این مطالعه را برای نمونه اصلی بکار برد.

### ۵-۳- قضیه $\pi$ باکینگهام

بر اساس این قضیه اگر در یک پدیده فیزیکی  $n$  متغیر موثر وجود داشته باشد و تعداد ابعاد اصلی این پارامترها  $r$  باشد آنگاه تعداد ابعاد بی بعد مستقل (گروه های  $\pi$ ) در این پدیده  $n-r$  خواهد بود. به عنوان مثال نیروی وارد بر پایه پل توسط جریان سیال تابعی است از سرعت سیال، ابعاد پایه، چگالی سیال و لزجت سیال پس:

$$F = \varphi(V, D, \rho, \mu)$$

در این پنج معادله متغیر اصلی شامل  $F$  و  $D$  و  $\rho$  و  $\mu$  بوده که ابعاد آنها به صورت زیر است:

$$[F] = MLT^{-2}$$

$$[V] = LT^{-1}$$

$$[D] = L$$

$$[\rho] = ML^{-3}$$

$$[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$$

همانطور که مشاهده می‌شود ابعاد اصلی این متغیرها شامل سه بعد  $T, L, M$  است پس در این پدیده  $n-r$ ، یعنی دو عدد بی‌بعد خواهیم داشت.

برای بدست آوردن اعداد یا گروه‌های بی‌بعد مورد نظر به شکل زیر عمل می‌کنیم.

- به تعداد  $r$ ، متغیر انتخاب می‌کنیم که باید شامل همه ابعاد اصلی موجود در مسئله باشد و از نظر ابعادی با یکدیگر متفاوت بوده و نتوانند تشکیل یک گروه بی‌بعد دهند.

- به  $r$  متغیر انتخاب شده، تک تک پارامترهای باقی مانده را اضافه کرده و فرض می‌کنیم در عدد بی‌بعد مورد نظر توان متغیر اضافه شده یک و توان  $r$  متغیر تکراری، مجهول باشد.

- اگر بخواهیم گروه بدست آمده بی‌بعد باشد باید توان  $r$  بعد دخیل در این گروه صفر باشد، لذا  $r$  معادله و  $r$  مجهول خواهیم داشت که با حل آنها عدد بی‌بعد مورد نظر بدست می‌آید.

### مثال ۵-۱

اگر متغیرهای موثر در نیروی وارد بر جسم خارجی به شکل زیر باشد، اعداد بی‌بعد را بر اساس قضیه باکینگهام بدست آورید.

$$F = \varphi(V, D, \rho, \mu)$$

**حل:**

همانطور که گفته شد  $r=3$  بوده و بنابراین دو عدد بی‌بعد باید بدست آوریم

گام اول: سه متغیر  $V, D, \rho$  را انتخاب می‌کنیم. این متغیرها مستقل از یکدیگرند، هر سه بعد  $T, L, M$  دارند و امکان تشکیل یک گروه بی بعد از این سه متغیر وجود ندارد.

گام دوم: متغیرهای باقی مانده را به سه متغیر انتخاب شده اضافه می‌کنیم و گروه‌های بی بعد را با  $\pi$  نشان می‌دهیم

$$\pi_1 = \rho^a V^b D^c F = [ML^{-3}]^a [LT^{-1}]^b [L]^c \frac{ML}{T^2}$$

$$\pi_2 = \rho^d V^e D^f \mu = [ML^{-3}]^d [LT^{-1}]^e [L]^f ML^{-1}T^{-1}$$

$$[\pi_1] = M^0 L^0 T^0 = M^{a+1} L^{-3a+b+c+1} T^{-b-2}$$

$$\rightarrow a = -1, b = -2, c = -2$$

$$\pi_1 = \rho^{-1} V^{-2} D^{-2} F = \frac{F}{\rho V^2 D^2}$$

$$[\pi_2] = M^0 L^0 T^0 = M^{d+1} L^{-3d+e+f+1} T^{-e-2}$$

$$\rightarrow d = -1, e = -1, f = -1$$

$$\pi_2 = \rho^{-1} V^{-1} D^{-1} \mu = \frac{\mu}{\rho V D}$$

**نکته:** قضیه  $\pi$  باکینگهام، فقط تعداد اعداد بی بعد و نحوه بدست آوردن آنها را بیان می‌کند ولی در خصوص رابطه بین اعداد یا گروه‌های بی بعد اطلاعاتی را نمی‌دهد. برای بدست آوردن این رابطه باید به نتایج آزمایشگاهی مراجعه کرد.

#### ۵-۴- روش رایلی

در این روش متغیر  $A$  را تابعی از متغیرهای مستقل  $A_1$  و  $A_2$  و... در نظر می‌گیریم بطوریکه:

$$A = \varphi(A_1, A_2, A_3, \dots)$$

از اصل همگنی برداری داریم:

$$A = C(A_1)^a (A_2)^b (A_3)^c, \dots$$



که در آن  $c$  یک عدد ثابت است.

### مثال ۵-۲:

یک انفجار هسته‌ای را می‌توان به صورت آزاد سازی لحظه‌ای مقدار مشخصی از انرژی متمرکز شده در یک نقطه در نظر گرفت شعاع موج شوک ( $r$ ) صریحا تابعی است از:

- چگالی هوای بر نیاشفته  $\rho$

- فشار هوای بر نیاشفته  $P$

- انرژی آزاد شده  $E$

- زمان سپری شده  $t$

چون فشار  $P$  خیلی کمتر از شدت فشار در ناحیه انفجار می‌باشد می‌توان از آن چشم پوشی کرد بنابراین:

$$r = f(E, \rho, t)$$

پس

$$r = \lambda [E]^\alpha [\rho]^\beta [t]^\gamma$$

$$[L] = [ML^2T^{-2}]^\alpha [ML^{-3}]^\beta [T]^\gamma$$

با مساوی قرار دادن ابعاد

$$M : 0 = \alpha + \beta$$

$$L : 1 = 2\alpha - 3\beta$$

$$T : 0 = -2\alpha + \gamma$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{1}{5}, \beta = -\frac{1}{5}, \gamma = \frac{2}{5}$$

بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$r = \lambda \left[ \frac{E}{\rho} \right]^{\frac{1}{5}} t^{\frac{2}{5}}$$

مثال ۵-۳:

نشان دهید که رابطه منطقی برای قشر جداره برای سیال جاری در یک لوله عبارت است از:

$$\tau = \rho V^2 \phi \left[ \text{Re} \left( \frac{\varepsilon}{D} \right) \right]$$

حل:

با استفاده از روش رایلی:

$$\tau = \phi(\rho, V, D, \mu, \varepsilon)$$

$$\tau = k \rho^a V^b D^c \mu^d \varepsilon^e$$

$$ML^{-1}T^{-2} = k(ML^{-3})^a (LT^{-3})^b (L)^c (ML^{-1}T^{-1})^d (L)^e$$

$$M : 1 = a + b$$

$$L : -1 = b + c - 3a - d + e$$

$$T : -2 = -b - d$$

$$\rightarrow d = 1 - a, b = 1 + a, c = a - 1 - e$$

بنابراین

$$\tau = k \rho^a V^{1+a} D^{a-1-e} \mu^{1-e} \varepsilon^e$$

$$= k \rho V^2 \left[ \frac{DV\rho}{\mu} \right]^{a-1} \left[ \frac{\varepsilon}{D} \right]^e$$

$$\tau = \rho V^2 \phi \left[ \text{Re}, \frac{\varepsilon}{D} \right]$$

$$\Delta P \frac{\pi}{u} D^2 = z \pi D L$$

$$h_f = \frac{\Delta P}{\rho g L} = \frac{4\tau}{D \rho g}$$

۵-۵- اعداد بدون بعد اصلی در مکانیک سیالات

اعداد بی‌بعدی که کاربرد بیشتری در مکانیک سیالات کارشناسی دارند عبارت‌اند از :

## ۵-۵-۱- عدد رینولدز

این عدد نسبت نیروهای اینرسی به نیروی لزجت می‌باشد

$$Re = \frac{VL}{\nu}$$

این عدد در لوله ها و کانال های باز دارای اهمیت است. و نوع جریان به لحاظ آرام یا آشفته بودن را مشخص می‌کند.

## ۵-۵-۲- عدد فرود

این عدد نسبت نیروی اینرسی به نیروی ثقل است

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gL}}$$

عدد فرود در جریان‌های با سطح آزاد مانند کانال‌ها، برای تقسیم‌بندی نوع جریان بسیار با اهمیت است. اگر  $Fr$  کمتر از ۱ باشد جریان زیر بحرانی است، اگر  $Fr$  مساوی ۱ باشد، جریان بحرانی و اگر  $Fr$  بزرگتر از ۱ باشد جریان فوق بحرانی است.

## ۵-۵-۳- عدد وبر

این عدد نسبت نیروی اینرسی به نیروی کشش سطحی است

$$We = \frac{\rho LV^2}{\sigma}$$

و در مطالعه سطح مشترک گاز - مایع ، مایع - مایع و مایع - جامد اهمیت دارد.

## ۵-۵-۴- عدد ماخ

این عدد نسبت نیروی اینرسی به نیروی الاستیک (تراکم پذیری) است

$$Ma = \frac{v}{c}$$

که  $c$  سرعت موج در یک سیال است

پس عدد ماخ، نسبت سرعت سیال به سرعت موج صوتی در همان سیال است. در مواردی مانند پدیده ضربه قوچ در لوله ها اهمیت دارد.

### ۵-۶- نکات تکمیلی:

۱- قضیه  $\pi$  باکینگام، فقط تعداد اعداد بی بعد و نحوه بدست آوردن آن ها را بیان می کند ولی در خصوص رابطه بین این اعداد یا گروه های بی بعد ساکت است. برای بدست آوردن این رابطه باید به نتایج آزمایشگاهی مراجعه کرد.

۲- توان مختلف گروه های بی بعد و یا ترکیب مختلف آنها نیز بی بعد بوده و ممکن است در آزمایشات استفاده از آنها نتایج بهتری بدست بدهد و یا از نظر تئوری شناخت بیشتری از آنها داشته باشیم. مثلاً در

قسمت قبل  $\frac{\mu}{\rho V D}$  را بدست آوردیم در حالی که عکس آن یعنی  $\frac{\rho V D}{\mu}$  را بهتر می شناسیم که همان عدد رینولدز است.

۳- اگر یکی از متغیر های موثر بدون بعد است، خود آن متغیر یکی از عوامل بی بعد ( $\pi$ ) بوده و نیازی به وارد کردن آن در روال محاسبات ذکر شده نیست. مثلاً اگر شیب لوله یا کانال جزء عوامل موثر است می توان آن را جداگانه در نظر گرفت.

۴- به همین ترتیب اگر دو متغیر موثر از یک بعد باشند، نسبت آنها خود یکی از عوامل بی بعد می تواند باشد.

۵- بدیهی است هر عامل بی بعد را می توان در اعداد ثابت هم ضرب کرد (به شرط آنکه آن عدد بی بعد باشد).

۶- اگر بعضی از متغیرهایی که فکر کرده‌ایم در پدیده مورد نظر موثر هستند، واقعا موثر نباشند، نتایج آزمایشات به نوعی این مطلب را روشن خواهد کرد. و یا ممکن است در فرآیند تحلیل ابعادی اضافی حذف شود.

۷- اگر بعضی از متغیرهای موثر را فراموش کرده باشیم، از بدست آوردن تصویر کاملی از پدیده مورد نظر محروم می شویم ولی بهر حال قادر به درک قسمتی از پدیده خواهیم بود.

۸- مشکل ترین قسمت مسئله، تشخیص عوامل موثر است. با توجه به نکته ۶ در نظر گرفتن پارامتری که نسبت به آن شک داریم بهتر از حذف آن است.

۹- در انتخاب سیستم آحاد اصلی ممکن است گزینه *MLT* جواب متفاوتی نسبت به گزینه *FLT* بدهد.

۱۰- توصیه می‌شود همیشه بی‌بعد بودن گروه‌های بدست آمده را کنترل کرده و آن‌ها را نسبت به اعداد یا گروه‌های بی‌بعد شناخته شده مقایسه کنیم.

## ۵-۷- قوانین تشابه و مدل سازی فیزیکی

### ۵-۷-۱- مقدمه:

آزمایش و اندازه‌گیری یکی از ارکان اساسی مکانیک سیالات می باشد. بدست آوردن جواب برای مسائل واقعی مکانیک سیالات، صرفا بر اساس تئوری‌های موجود و بدون توسل به اندازه‌گیری و آزمایش، تقریبا غیر ممکن است. از سوی دیگر هزینه انجام آزمایشات بالا و روبه افزایش است. آنالیز ابعادی این امکان را به وجود می آورد که بتوان با حداقل آزمایشات به حداکثر نتایج دست یافت و بدین ترتیب هزینه‌ها را کاهش داد. یکی دیگر از راههای کاهش هزینه، انجام آزمایشات بر روی مدل فیزیکی در آزمایشگاههای هیدرولیک و سیالات می باشد. در این روش بجای ساختن مسئله مورد نظر در ابعاد واقعی، مدل یا ماکتی از آن را با مقیاس متفاوت در آزمایشگاه می سازیم و آزمایشات مورد نظر را بر روی آن انجام می دهیم. قوانین تشابه به ما کمک می کنند تا بتوانیم نتایج اندازه گیری شده در مدل را به مسئله واقعی مورد نظر خود در طبیعت تعمیم دهیم و بتوانیم روابط بین پارامترهای مختلف در مدل و طبیعت را بیابیم. مثلا

باید بدانیم سرعت های اندازه گیری شده در مدل آزمایشگاهی چه نسبتی با سرعت های واقعی در طبیعت دارند.

در مدل سازی فیزیکی و ساخت مدل های آزمایشگاهی تنوع و درجات آزادی زیادی وجود دارد. به عنوان مثال سیال مورد استفاده در مدل و طبیعت (پروتوتایپ - *prototype*) لزوما یکسان نیستند. و یا ممکن است ابعاد مدل آزمایشگاهی بزرگتر از مشابه واقعی آن در طبیعت باشد. از نظر کاربرد ها نیز با تنوع زیادی روبرو هستیم. شبیه سازی حرکت کشتی ها در بنادر و لنگر گاهها، سرریز سد ها، کانال های کنترل سیلاب، توربین های هیدرولیکی، حرکت توام آب و رسوب یا آب و هوا ( جریان های چند فازه) و پمپهای سانتریفوژ و حتی مطالعات آزمایشگاهی بر روی مدل های هواپیما در تونل های باد می توانند همگی موضوع مورد بحث در مدل سازی فیزیکی مکانیک سیالات باشند.

پیچیدگی های تئوریک، محدودیت های اجرایی، ملاحظات اقتصادی و درجات آزادی زیاد در انتخاب پارامتر های مختلف باعث شده است که مدل سازی فیزیکی به عنوان ترکیبی از علم و هنر شناخته شود. گستردگی مباحث مربوط به مدل سازی در حدی است که کتاب های مستقل آن اختصاص داده شده و به عنوان درس مستقل قابل ارائه می باشد. لذا مطالب ارائه شده در حد درس مکانیک سیالات دوره کارشناسی صرفا مقدمه ای به بحث مدل سازی تلقی می شود.

### ۵-۷-۲- انواع تشابه. به طور کلی سه نوع تشابه بین مدل و طبیعت می توان در نظر گرفت.

۱- تشابه هندسی. اگر بخواهیم مدل را به طبیعت تعمیم دهیم، اولین شرط، تشابه هندسی بین مدل و طبیعت است. بدین معنا که شکل مدل و طبیعت یکی بوده و احتمالا ابعاد آن ها با یکدیگر متفاوت باشد (غالباً ابعاد متفاوت است) بدین ترتیب زاویه ها نیز در مدل و طبیعت یکی خواهند بود. اگر اندیس  $P$  را برای طبیعت (پروتوتایپ) استفاده کنیم و  $m$  را برای مدل استفاده کنیم، نسبت طول ها در طبیعت به مدل را با  $L_r = \frac{L_P}{L_m}$  نشان داده و آن را مقیاس طولی می خوانیم. {عکس  $L_r$  را با  $\lambda_r$  نشان می دهیم:

$\lambda_L = \frac{L_m}{L_p}$ . بدیهی است در حالتی که تشابه هندسی کامل داریم نسبت مساحت ها مجذور نسبت طول ها می باشد  $A_r = \frac{A_p}{A_m} = L_r^2$  و بطور مشابه داریم  $V_r = L_r^3$  شایان ذکر است که بدست آوردن تشابه کامل هندسی بین مدل و طبیعت در مواردی با محدودیت های جدی همراه است. مثلا اگر بخواهیم طول زیادی از یک رودخانه را در آزمایشگاه شبیه سازی کنیم، با توجه به محدودیت های فضا در آزمایشگاه ممکن است  $\lambda_L$  خیلی کوچک و یا  $L_r$  خیلی بزرگ باشد. در چنین حالتی رعایت تشابه کامل هندسی منجر به ساخت مدلی خواهد شد که عمق آب در آن بسیار ناچیز است و همان طور که بعدا خواهیم دید این امر مشکلات جدی در امر مدل سازی ایجاد خواهد نمود. و یا تشابه هندسی در مدل سازی ذرات رسوب باعث می شود که معادل آزمایشگاهی ذرات درشت دانه و غیر چسبنده در طبیعت، ذرات ریزدانه چسبنده در مدل باشد که قاعدتا رفتاری متفاوت با ذرات درشت دانه طبیعی دارند. در چنین مواردی از مدل هایی با مقیاس کج و یا (*distorted*) استفاده می شود که آنها مثلا مقیاس ارتفاع با مقیاس طول متفاوت است. بهر حال بدیهی است وقتی تشابه هندسی داریم که مقیاس طولی در کلیه نقاط ثابت باشد.

۲- تشابه سینماتیکی. اگر علاوه بر مقیاس طولی، مقیاس سرعت نیز در مدل و طبیعت ثابت باشد می گوئیم تشابه سینماتیک وجود دارد. به عبارت دیگر علاوه بر مقیاس طولی، مقیاس زمانی نیز در کلیه نقاط ثابت است و یا می توان گفت خطوط جریان با یکدیگر تشابه دارند.

$$V_r = \frac{V_p}{V_m} \ \& \ L_r = \frac{L_p}{L_m} \ \rightarrow \ T_r = \frac{T_p}{T_m} = \frac{L_r}{V_r}$$

و به طور مشابه می توان رابطه شتاب ها در مدل و طبیعت را بدست آورد:

$$a_r = \frac{L_r}{T_r^2} = \frac{V_r^2}{T_r}$$

به عبارت دیگر در تشابه سینماتیکی مقیاس شتاب هم در کلیه نقاط ثابت است.

۳- **تشابه دینامیکی.** دو جریان از نظر دینامیکی مشابه هستند، اگر علاوه بر تشابه سینماتیکی، مقیاس نیرو در کلیه نقاط ثابت باشد.

$$F_r = \frac{F_p}{F_m}$$

بدیهی است با توجه به ماهیت سرعت و نیرو، در تشابه سینماتیکی و دینامیکی، علاوه بر مقدار سرعت و نیرو، جهت ها هم مهم هستند و اگر بخواهیم دقیق تر تعریف کنیم باید سرعت ها و نیرو ها موازی یکدیگر بوده و نسبت مشخصی داشته باشند.

با توجه به تعریف تشابه سینماتیکی و دینامیکی و قانون دوم نیوتن، می توان گفت اگر تشابه سینماتیکی داشته باشیم و علاوه بر آن تشابه توزیع جرمی هم داشته باشیم، تشابه دینامیکی داریم.

تشابه دینامیکی بسیار محدود کننده است زیرا انواع نیروهای موثر در حرکت سیال، که تعداد آن قابل ملاحظه است، باید همگی دارای نسبت یکسان در مدل و طبیعت داشته باشند. نیروهای موثر را می توان به نیروی وزن ( $F_G$ )، نیروی فشاری ( $F_p$ )، نیروی ناشی از چسبندگی ( $F_V$ )، نیروی ناشی از خاصیت ارتجاعی ( $F_E$ )، نیروی کششی سطحی ( $F_T$ ) و نیروی اینرسی ( $F_I$ ) تفکیک کرد و لازمه تشابه کامل دینامیکی آن است که داشته باشیم:

$$\frac{F_{G_p}}{F_{G_m}} = \frac{F_{P_p}}{F_{P_m}} = \frac{F_{V_p}}{F_{V_m}} = \frac{F_{E_p}}{F_{E_m}} = \frac{F_{T_p}}{F_{T_m}} = \frac{F_{L_p}}{F_{L_m}} = F_r$$

در این فصل بیان شد که نسبت نیروهای مختلف موثر بر حرکت سیال، بعضا در قالب اعداد بی بعد بیان می شوند، مثلا نسبت اینرسی به چسبندگی با عدد رینولدز  $\frac{\rho v L}{\mu}$  بیان می شود و یا نسبت اینرسی به

ثقل با عدد فرود  $\frac{v^2}{gL}$  (یا  $\frac{v}{\sqrt{gL}}$ ) بیان می شود. بنابراین بیان دیگر تشابه دینامیکی به شکل زیر است:

$$\left( \frac{F_L}{F_V} \right)_p = \left( \frac{F_L}{F_V} \right)_m \quad \text{یا} \quad (\text{Re})_p = (\text{Re})_m$$



و به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$\left(\frac{F_L}{F_V} = W_e\right)_P = (W_e)_m \ \& \ (F_r)_P = (F_r)_m \ \& \ \left(\frac{F_L}{F_G}\right)_P = \left(\frac{F_L}{F_G}\right)_m$$

$$\left(\frac{F_L}{F} = M_a\right)_P = (M_a)_m$$

بنابراین اگر در یک پدیده مشخص نیروهای اینرسی، ثقل، چسبندگی، کشش سطحی و تراکم پذیری مهم باشند باید اعداد بی بعد رینولدز، فرود، وبر و ماخ در مدل طبیعت یکی باشند. ارضاء این شرایط تقریباً غیر ممکن است. مثلاً اگر قرار باشد فقط و فقط اعداد فرود و رینولدز در مدل و طبیعت یکی باشند، با مشکل زیر روبرو خواهیم شد.

$$F_{r_m} = \frac{V_m}{(gL_m)^{\frac{1}{2}}} = F_{r_p} = \frac{V_p}{(gL_p)^{\frac{1}{2}}} = V_r = (L_r)^{\frac{1}{2}}$$

یعنی بر اساس یکی بودن اعداد فرود در مدل و طبیعت مقیاس سرعت باید جذر مقیاس طول باشد. حال لازمه برابر بودن اعداد رینولدز در مدل و طبیعت این است که:

$$\frac{V_m L_m}{\nu_m} = \frac{V_p L_p}{\nu_p} \rightarrow v_r = V_r L_r = L_r^{\frac{3}{2}}$$

$$v_r = 1 \rightarrow V_r = \frac{1}{L_r}$$

در همین نگاه اول مشخص است که سیال مورد استفاده در مدل و طبیعت نمی تواند یکی باشد. یکی از مواردی که ممکن است هر عدد فرود و رینولدز مهم باشند بدست آوردن نیروی مقاوم در حرکت یک کشتی است. در این گونه موارد معمولاً مقیاس طول حدود ۱۰۰ است. بنابراین مقیاس لزجت سینماتیک حدود ۱۰۰۰ خواهد بود. یعنی باید سیالی را پیدا کنیم که لزجت آن  $\frac{1}{1000}$  لزجت آب باشد که چنین سیالی وجود ندارد. (تنها سیالی که لزجت آن کمتر از آب است و آن را می شناسیم که ممکن است در دسترس باشد، جیوه است که هم گران است و هم کار کردن با آن برای سلامتی ضرر دارد).

یکی از نتایج بحث فوق این است که اگر از سیال واحد در مدل و طبیعت استفاده کنیم (و با فرض ثابت بودن شتاب ثقل!) لازمه یکی بودن عدد فرود و عدد رینولدز در مدل و طبیعت ساختن مدل با مقیاس یک به یک است (که بسیارگران خواهد بود و عملاً نقض غرض است).

خوشبختانه در عمل، به ندرت با حالاتی رو برو هستیم که همه نیروهای ذکر شده موثر باشند و می توان در بسیاری از موارد از بعضی نیروها و تاثیر آنها صرف نظر کرد. در جریان های با سطح آزاد مانند جریان در رودخانه ها و سازه های هیدرولیکی موثرترین نیروها، نیروهای ثقل و اینرسی هستند. لذا برای مدل سازی آنها از تساوی اعداد فرود استفاده می شود. همچنین در مدل سازی حرکت امواج و موج شکن ها و فرسایش و رسوب در رودخانه ها و سواحل از تساوی اعداد فرود، که اصطلاحاً قانون فرود (برای مدل سازی) نامیده می شود، استفاده می کنند. برای مدل سازی جریان در لوله ها، نیروهای وارده به اجسام مستغرق در جریان های غیر قابل تراکم، و جریان های لایه مرزی از تساوی اعداد رینولدز در مدل و طبیعت استفاده می شود.

برای شبه سازی جریان های تراکم پذیر از تساوی اعداد ماخ استفاده می شود. در هر صورت در این موارد مدل ها تشابه کامل دینامیکی ندارند.

### ۵-۷-۳- مقیاس های مدل سازی

با توجه به قانون مورد استفاده در مدل سازی فیزیکی می توان نسبت پارامتر های مختلف در طبیعت و مدل را بدست آورد. البته از آنجا که لازمه تشابه دینامیکی، تشابه هندسی است، فرض بر این است که نسبت طول ها  $L_r$  مشخص است. حال اگر قانون فرود استفاده کرده باشیم می توان قبلاً مقیاس زمان را به شکل زیر محاسبه کرد.

در حالت کلی

$$T_r = \frac{L_r}{V_r} \quad V = L/T \rightarrow T = \frac{L}{V}$$

بر اساس تشابه فرود (تساوی اعداد فرود):

(با فرض  $g$  ثابت)

$$(Fr)_m = (Fr)_p \quad \left( \frac{V}{\sqrt{gL}} \right)_m = \left( \frac{V}{\sqrt{gL}} \right)_p \rightarrow V_r = L_r^{\frac{1}{2}}$$

یعنی اگر مثلاً مقیاس مکانی (طولی) ۱۰۰ باشد، مقیاس زمانی ۱۰ بوده بنابراین وقایع در مدل ۱۰ برابر سریع تر از طبیعت اتفاق می افتد.

$$\left( T_m = \frac{1}{10} T_p \right)$$

از جمله نکات قابل ملاحظه در این مقیاس ها، مقیاس سرعت بر اساس قانون رینولدز است که داریم:

$$(Re)_p = (Re)_m \quad \left( \frac{VL}{\nu} \right)_p = \left( \frac{VL}{\nu} \right)_m \quad V_r = \frac{\nu_r}{L_r}$$

حال اگر از یک نوع سیال در مدل و طبیعت استفاده کنیم مقیاس سرعت عکس مقیاس طولی است و بنابراین اگر مقیاس مدل سازی  $\frac{1}{10}$  باشد ( $L_r=10$ ) سرعت ها در مدل باید ۱۰ برابر سرعت ها در طبیعت (بیشتر) باشد.

به همین ترتیب پارامترهای مختلف و بر اساس معیارهای مختلف (قوانین فرود - رینولدز و ماخ) می توان مقیاس ها را به شرح جدول زیر بدست آورد:

جدول ۵-۱: جدول مقیاس‌ها مدل‌سازی

| مقیاس      | قانون رینولدز                    | قانون فرود                | قانون ماخ                             |
|------------|----------------------------------|---------------------------|---------------------------------------|
| $L_r$ طول  | $L_r$                            | $L_r$                     | $L_r$                                 |
| $T_r$ زمان | $\frac{L_r^2 \rho}{\mu_r}$       | $\sqrt{\frac{L_r}{g_r}}$  | $L_r \sqrt{\frac{\rho_r}{E_v}}$       |
| $V_r$ سرعت | $\frac{\mu}{L_r \rho_r}$         | $\sqrt{L_r g_r}$          | $\sqrt{\frac{E_{v_r}}{\rho_r}}$       |
| $a_r$ شتاب | $\frac{\mu_r^2}{\rho_r^2 L_r^3}$ | $g_r$                     | $\frac{E_{v_r}}{L_r \rho_r}$          |
| $Q_r$ دبی  | $\frac{L_r \mu}{\rho_r}$         | $L_r^2 g_r^{\frac{1}{2}}$ | $L_r^2 \sqrt{\frac{E_{v_r}}{\rho_r}}$ |
| $F_r$ نیرو | $\frac{\mu_r^2}{\rho_r}$         | $L_r^3 \rho_r g_r$        | $L_r^2 E_{v_r}$                       |
| $M_r$ جرم  | $L_r^3 \rho_r$                   | $L_r^3 \rho_r$            | $L_r^3 \rho_r$                        |

مثال ۵-۴:

مقیاس دبی را برای قانون فرود بدست آورید.

$$[Q] = \frac{L^3}{T} \rightarrow Q_r = \frac{L_r^3}{T_r}$$

قبلا دیدیم که در قانون فرود  $T_r = \sqrt{L_r}$  (با فرض  $g_r=1$ ) لذا

$$Q_r = \frac{L_r^3}{\sqrt{L_r}} = L_r^{\frac{5}{2}}$$

مثال ۵-۵:

اگر قصد مدل سازی جریان بر روی سرریز یک سد را داشته باشیم که حداکثر دبی آن  $10000 \text{ m}^3/\text{s}$  باشد و در آزمایشگاه محدودیت دبی  $350 \text{ lit/s}$  را داشته باشیم، مقیاس مدل سازی را تعیین کنید. چون جریان با سطح آزاد مورد نظر است از قانون فرود استفاده می کنیم با فرض  $g_r=1$

$$Q_r = L_r^{\frac{5}{2}}$$

$$Q_m = \frac{Q_p}{Q_r} \quad Q_m \leq 0.35 \text{ m}^3/\text{s} \quad Q_p = 10000$$

$$\rightarrow Q_r = \frac{Q_p}{Q_m} \quad Q_r \geq 28571.4 \rightarrow L_r \geq Q_r^{\frac{2}{5}}$$

مقیاس واقعی مدل سازی ممکن است توسط عوامل دیگر نیز مفید باشد ولی معمولاً محدودیت دبی مهمترین قید است. لذا مقیاس  $\frac{1}{64}$  ( $L_r=64$ ) مناسب به نظر می رسد (عدد ۶۴ نسبت به دیگر اعداد در این محدوده نسبت های طولی بهتر را می دهد:

$$\left( \frac{1}{64} = 0.015625 \quad \frac{1}{61} = 0.016393442... \right)$$

توضیح بیشتر در خصوص اعداد بی بعد، برای بیان اعداد بی بعد به صورت نسبت نیروهای مختلف متداول است که نیروها را به شکل زیر و در قالب ابعادی بیان کنند. پارامترهای داخل گروه برای تاکید آمده است.

نیروی ثقل:

$$Mg = \rho L^3 [g]$$

نیروی چسبندگی:

$$\tau A = \mu \left( \frac{du}{dy} \right) L^2 = \mu \frac{V}{L} L^2 = [\mu] VL$$

نیروی اینرسی:

$$Ma = \rho L^3 \frac{V}{T} = \rho L^3 \frac{V^2}{T} = [\rho] L^2 V^2$$

نیروی فشاری:

$$(\Delta P)A = [\Delta P]L^2$$

نیروی کششی سطحی:

$$[\sigma]L$$

نیروی تراکم پذیری:

$$[E_v]L^2$$

و به همین ترتیب می توان بصورت سمبلیک و در قالب ابعادی نشان داد که مثلا عدد فرود نسبت نیروهای اینرسی و ثقل است:

$$F_r = \frac{V^2}{\sqrt{Lg}} \quad \text{یا} \quad F_r = \frac{[\rho]L^2V^2}{\rho L^3[g]} = \frac{V^2}{Lg}$$

در چنین نمایشی پارامترهایی مثل سرعت  $V$  و طول  $L$  یک بیان عمومی است و در هر مسئله خاص تعریف جداگانه دارد. مثلا در جریان سیال در یک لوله  $V$  سرعت متوسط و  $L$  قطر لوله است و لذا برای عدد رینولدز که در جریان در لوله ها مهم است، داریم:

$$Re = \frac{\rho VD}{\mu} = \frac{VD}{\nu}$$

$V$  در عدد فرود سرعت متوسط و  $L$  معمولا عمق آب می باشد. زیرا عدد فرود در جریان های با سطح آزاد مهم است که در آنجا با عمق سرو کار داریم.

### فهرست منابع

- ۱- مکانیک سیالات، استریتیر و وایلی، ترجمه ملک‌زاده، کاشانی حصار، معتمدی،
- ۲- مکانیک سیالات و هیدرولیک، حسن مدنی، جهاد دانشگاهی امیرکبیر
- ۳- آموزش میکانیک سیالات از طریق نکته، مساله و تست، حسین افضلی‌مهر، انتشارات ارکان
- ۴- مکانیک سیالات، محمد حسین حامدی، دانشگاه خواجه نصیر
- ۵- جزوه درسی مکانیک سیالات، محمدعلی بنی‌هاشمی، دانشکده فنی دانشگاه تهران