جزوه درس مقاومت مصالح

استاد:

دکتر امیرعباس فاطمی

تهیه و تنظیم:

پوریا کاوه ئی

فصل اول

دیمانسیون ها:

در کمیت ها چه در سیستم بین المللی (SI) یا در سیستم انگلیسی کمیت های اصلی شامل جرم (m)، زمان (t) و طول (L) می باشند

بنابراین داریم: سایر کمیت ها

$F = ma = M \cdot L \cdot T^{-2}$ نیرو $\qquad F = k \cdot x$ نیرو

$V = \frac{L}{T} = LT^{-1}$ سرعت $\qquad P_a = \frac{\text{نیرو}}{\text{سطح}} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}$

$a = \frac{V}{T} = \frac{L}{T^2} = LT^{-2}$ شتاب

نکته: در بحث دیمانسیون ها عموماً از سه واحد بالا استفاده می شود

یادآوری

1 ft = 12 inch
1 inch = 2.54 cm
1 ft = 30.48 cm

مسئله ی اصلی مکانیک جامدات بررسی مقاومت داخلی و تغییر شکل اجسام تحت اثر بارهای خارجی می باشد

بر اساس مفهوم فوق در مکانیک جامدات بحث نیرو و تغییر شکل ها اهمیت دارد.

بر اساس دو مفهوم نیرو و تغییر شکل مفهوم انرژی تعریف می‌شود، این امر مستلزم مطالعه نیروهایی است که در داخل جسم به وجود می‌آیند تا همواره نیروهای خارجی مؤثر جسم تعادل آن را تأمین کنند.

در این گام در تحلیل، تهیه یک دیاگرام (Free body) از جسم یا قطعه‌ای مورد نظر می‌باشد که در آن کلیه نیروها در نقاط تأثیرشان مشخص شده‌اند.

اصطلاحاً این دیاگرام را دیاگرام جسم آزاد می‌گویند.

به دلیل اینکه محاسبه نیروهای داخلی ناشی از نیروهای خارجی بر جسم موضوع اصلی درس مقاومت مصالح می‌باشد، در گام بعدی مقطعی مفروض دلخواه از جسم عبور داده می‌شود تا جسم بطوری که جسم بطور کامل به دو قسمت جدا از هم تقسیم گردد. این روش را روش مقطع می‌گویند.

نکته: اگر جسمی کاملاً در تعادل باشد هر جزء آن نیز باید در تعادل باشد در نتیجه:

نیروهای خارجی مؤثر در یک طرف هر مقطع دلخواه با نیروهای به وجود آمده در سطح قطع شده (که نیروهای مقاوم داخلی نامیده می‌شود) در تعادل هستند. بنابراین:

نیروهای مقاوم داخلی، نیروهای خارجی را متعادل می‌کنند.

یادآوری از استاتیک:

تعریف جسم صلب (rigid):

جسم صلب جسمی است که با اثر اعمال نیرو هیچ گونه تغییر شکلی ندهد، به عبارت دیگر تغییر موقعیت نقاط یا اجزای مختلف آن جسم نسبت به یکدیگر صفر می‌باشد

معادلات تعادل:

برای اینکه معادلات اینجا برای تعادل یک جسم صلب (rigid) باید هم دارای تعادل انتقالی و هم تعادل دورانی داشته باشد یعنی

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma M_x = 0$$
$$\Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_y = 0$$
$$\Sigma F_z = 0 \quad \Sigma M_z = 0$$

بنابراین مجموع مؤلفه‌های تمام نیروهای مؤثر بر جسم در سه امتداد محور بهم (x, y, z) باید صفر باشند، همچنین برای حفظ تعادل مجموع گشتاورهای تمامی نیروها حول این 3 محور مختصات هم باید صفر گردد. بدیهی است در مورد مسائل دوبعدی، کلیه اعضا و نیروها در یک صفحه قرار دارند بطور مثال در صفحه‌ی ($x-y$) باید داشته باشیم:

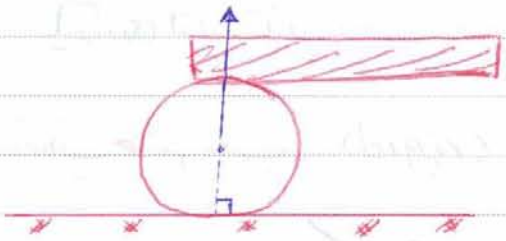
$$\Sigma F_x = 0$$
$$\Sigma F_y = 0$$
$$\Sigma M_z = 0$$

و سه رابطه‌ی دیگر که در فضا نیاز بود خود به خود ارضا می‌شوند.

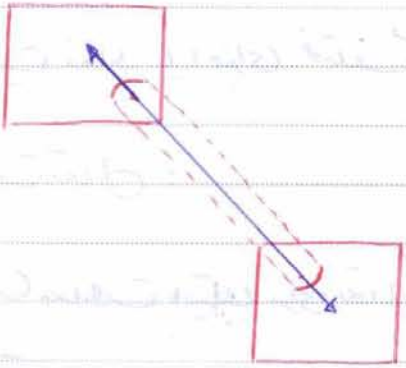
Shahab

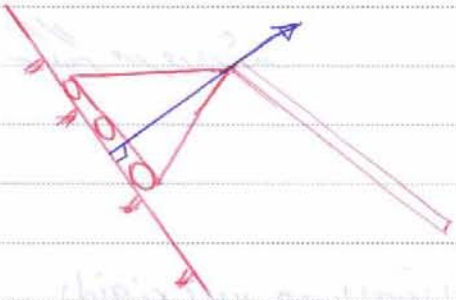
استاد: دکتر امیر عباس فاطمی گرداورنده: پوریا کاوه فی

علائم ترسیمی تکیه‌گاه‌ها:



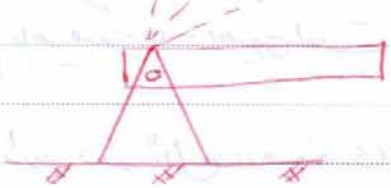
1- تکیه‌گاه غلتکی و صفحه‌ای:





با توجه به درجات آزادی این تکیه‌گاه (آزادی دوران) تنها امکان برای اعمال واکنش توسط خط عمل نمایش داده شده است.

نکته: در تکیه‌گاه غلتکی داریم $\sum F_z = 0$ است



2- تکیه‌گاه مفصلی

تکیه‌گاه مفصلی در برابر نیروها واکنش در جهت دلخواه می‌تواند مقاومت کند ولی در مقابل گشتاورها اصلاً مقاومتی ندارد به عبارت دیگر تکیه‌گاه مفصلی جهتی هم‌زمان تغییر مکان انتقالی را می‌گیرد و بنابراین دارای عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی انتقالی می‌باشد.

اما هیچ گونه مقاومتی در برابر لنگرهای یا مولفه های دورانی ندارد بنابراین هیچ گونه عکس العمل

یک گاهی دورانی ندارد.

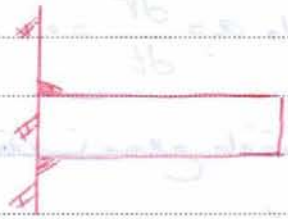
یک گاه: سه عکس العمل (در فضا) $\Sigma Fx=0$ $\Sigma Fy=0$ $\Sigma Fz=0$ و (در صفحه) $\Sigma Fx=0$ $\Sigma Fy=0$

3- تکیه گاه گیردار:

این نوع تکیه گاه ها تمامی نیروهای موثر در جهت دستگاه های مؤثر را تحمل می کند به علاوه گیر

اجازه هرگونه تغییر مکان انتقالی و تغییر مکان دورانی را از جسم می گیرد، بنابراین دارای

تمامی عکس العمل های یک گاهی انتقالی و دورانی می باشد.



یادآوری

Beam	Column	Brace	shear wall
تیر	ستون	بادبند	دیوار برشی

استاد:دکتر امیر عباس فاطمی گرداورنده:پوریا کاوه فی

grid شبکه	Engineering stiffness سختی
strengthe of materials	solid mechanics
stiffner سخت کننده	

تعریف: مطالعه‌ی حرکت یک جسم تحت اثر نیروهای خارجی را علم مکانیک می‌گویند.

زمانی که نیروهای وارده بر یک جسم یا یک سیستم سازه‌ای چنان ایجاد شتاب نمایند که آن نیروها را در حال تعادل و جسم و سیستم را متعادل می‌گویند.

یعنی $a=\frac{dv}{dt}=0$ و این یعنی یا سرعت صفر بوده یا سرعت مقداری ثابت داشته است.

در مقاومت مصالح حداقل با $V=0$ کار داریم، در این حالت مطالعه‌ی جسمی که در حال تعادل است موضوع علم استاتیک می‌باشد

فرض مهم استاتیک صلب بودن اجسام مورد مطالعه می‌باشد، اما موضوع علم مقاومت مصالح مطالعه‌ی اثرات داخلی ناشی از عوامل خارجی مؤثر بر اجسام شکل پذیر می‌باشد بنابراین هم نیرو و هم تغییر شکل اهمیت دارد.

چون دیگر جسم صلب فرض نمی‌شود، بنابراین بطور کلی فرق اساسی علم استاتیک با علم مقاومت مصالح این است که:

در استاتیک به عنوان مثال یک تیر برای توانایی کافی در تحمل بارهای وارده را دارد، اما در

استاد:دکتر امیر عباس فاطمی گرداورنده:پوریا کاوه فی

مقاومت مصالح منفن مزمن شکل پذیر بودن تیر بررسی ابعاد و اندازه های تیر تعیین کج تیر

شکست بیش از اندازه و حد مجاز خم شود.

کاربرد مقاومت مصالح در طرح سازه ها (structure) و سازه های ساختمانی (Bulding)

در تکنولوژی مرتبط مطرح می باشد:

1- مقاومت (strength)

2- سختی (stiffness) ← درجه انحطاف پذیری بررسی می شود

3- پایداری (stubility) ← سیستم طرح شده باید بتواند در مقابل بارهای وارده تعادل خود را حفظ نماید

فرضیات اساسی در مقاومت مصالح:

با توجه به پیچیدگی رفتار سیستم ها در حالت کلی معمولاً در مقاومت مصالح مزمن های زیر را می پذیریم

که بررسی سازه ها را بسیار ساده می نماید. این مزمن ها عموماً در مورد خواص مصالح بکار رفته

و همچنین در مورد چگونگی بارهای وارده و رفتار اعضای مختلف سازه تحت بارهای مؤثر خواهد بود.

استاد:دکتر امیر عباس فاطمی گرداورنده:پوریا کاوه فی

1- پیوستگی (continous)

مصالح بکار رفته در سازه ها معمولاً پیوسته در نظر گرفته می شوند، یکی از روش های اساسی در آنالیز یک جسم در مقاومت مصالح، بررسی خواص قطعه ای کوچکی از جسم و انتگرال گیری از نتایج حاصل می باشد که مفروض انتگرال گیری فرض پیوستگی خواص مصالح مطلوبی کلی رفتار سیستم را ساده تر می کند.

2- همگن بودن مصالح (Homogeneous)

یعنی خواص مصالح را در تمام نقاط یک جسم یکسان فرض می کنند، فلزات را معمولاً می توان کاملاً همگن در نظر گرفت، مصالح دیگر مانند بتن و چوب همگنی کمتری دارند، مثلاً در بتن خواص سیمان یا ماسه با یکدیگر متفاوت می باشد، اما تجربه نشان داده است برای کلیه مصالح ساختمانی، همین فرض همگن بودن نتایج قابل قبولی خواهد داشت.

ایزوتروپیک مصالح (Isotropic)

ضد: انیزوتروپ unisotropic

مصالح بکار رفته در ساختمان ها اغلب ایزوتروپ فرض می شوند یعنی خواص مصالح را در تمام جهات یکسان فرض می کنند. مطالعه دقیق نشان می دهد که خواص کریستال مصالح مختلف در جهات

استاد:دکتر امیر عباس فاطمی گرداورنده:پوریا کاوه نی

← در مورد جوش نقره ای، صفحه‌ای که چنین مرتبه یک جوش را که از نظر کیفیت مناسب نیست می شناسیم و دوباره پر می کنیم، این حرکت باعث تغییر در اندازه ی کریستال های فولاد می شود و دلیل آن قوس الکتریکی مکرر ایجاد شده در فولاد است.

Year. Month. Day. Subject.

مقاومت میکانی نیتیز، مثلاً کریستال مس در یک امتداد مقاومتی سه برابر مقاومت حرکت نمود برجهت اول را دارد.

ولی چون مصالح از کریستال هایی که بطور نامنظم قرار گرفته اند تشکیل شده است و تعداد این کریستال ها بسیار زیاد است، بنابراین جسم را می توان با خطا توجیه ایزوتروپ در نظر گرفت.

در مورد بتن مسلح (آلمانی Beton فرانسه concrete) (وقتی در داخل بتن آرماتور قرار می شود مسلح نامیده می شود) وقتی فولاد داخل بتن قرار می گیرد جسم را باید غیر ایزوتروپ در نظر گرفت.

از مصالح دیگر غیر ایزوتروپ می توان خاک و چوب را نام برد. در مورد چوب به دلیل اینکه تیرها در جهت الیاف و یا عمود بر الیاف چوب می توانند اعمال شوند، چوب در مقاومتی از خود نشان می دهد.

4- عدم وجود نیروهای داخلی قبل از بارگذاری

قبل از بارگذاری فرض می شود که در جسم هیچ نیروی داخلی وجود نداشته باشد، از نیروهای ایجاد شده حاصل از ذرات جسم بر یکدیگر، نیروهای مولکولی و... هم معمولاً صرف نظر می شود به عنوان نمونه در ماژول معمولاً در اثر سردشدن غیر یکنواخت قطعات یا حمل آنها نیروهای داخلی تولید می شوند.

Shahab

استاد:دکتر امیر عباس فاطمی گرداورنده:پوریا کاوه نی

در طراحی سازه ها معمولاً از این نیروها صرف نظر می شود اما بدیهی است اگر این نیروها قابل توجه باشند به سطح بحث دقیق تری در طراحی سازه نیاز داریم که معمولاً قطعاتی از این اجسام را جدا کرده و با آزمایش های ویژه مقدار نیروهای داخلی تولید شده را مشخص می کنند.

۵- اصل جمع آثار و مستقل (super position)

اثر یک مجموعه نیرو بر روی یک جسم برابر جمع آثار هر کدام از نیروها بوده و مستقل از ترتیب و نحوه ی اثر نیروها می باشد. این اصل در استفاده کاربردهای فراوانی دارد اما در مقاومت مصالح با شرایط زیر قابل استفاده می باشد:

شرط اول: تغییر مکان نقاط اثر نیروها در مقابل ابعاد جسم کوچک باشد (اصطلاحاً تغییر شکل های کوچک در ناحیه الاستیک داشته باشیم و وارد ناحیه پلاستیک نشویم)

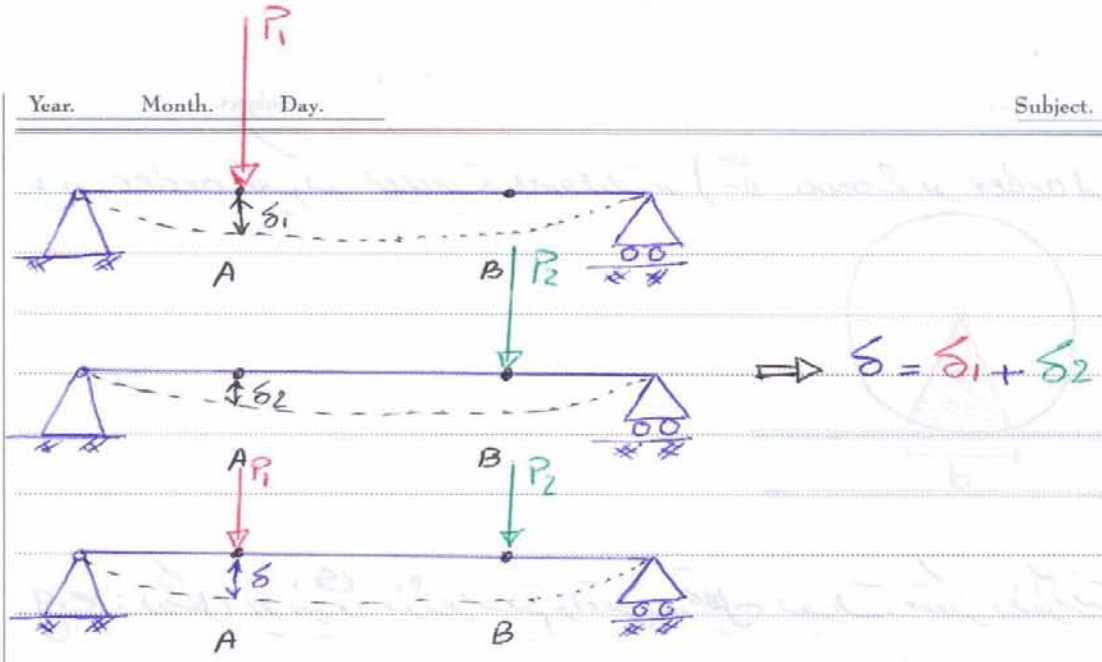
شرط دوم: تغییر شکل جسم تابع خطی از نیروها داده باشد

شرط سوم: شرایط تکیه گاهی نیز تغییر نکند

مثال: تیر شکل زیر تحت اثر نیروی P_1 در نقطه ی A به اندازه ی δ_1 تغییر شکل داده است و این نقطه تحت اثر نیروی P_2 که در نقطه ی B به اندازه ی δ_2 جابجا گردیده است. با استفاده از جمع آثار، تغییر مکان نقطه A تحت اثر دو نیروی P_1 و P_2 برابر $\delta_1 + \delta_2$ می باشد:

Shahab

استاد: دکتر امیر عباس فاطمی گرداورنده: پوریا کاوه فی



۶ - اصل سن - وِنن (saint_venant)

نیروهای داخلی نقاطی که دور از محل اثر نیروهای خارجی باشند بستگی کمی به چگونگی اثر نیروها دارند. به قبول این اصل می‌توان یک مجموعه نیرو یا مجموعه نیروی معادل از نظر استاتیکی جایگزین کرد و محاسبات را ساده‌تر نمود.

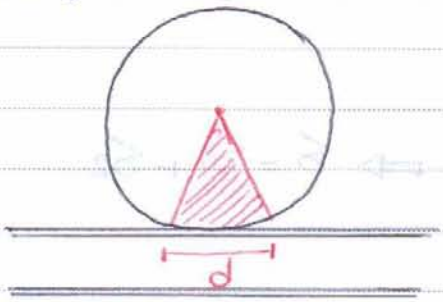
به عنوان نمونه در چرخ یک قطار ملاحظه می‌شود نیروها فوق بر روی ریل را می‌توان بصورت نیروی متمرکز در نظر گرفت که از نظر استاتیکی معادل نیروی حاصل از وزن قطار وارده بر چرخ می‌باشد.

تجربه نشان داده است که فقط 1.5d تا 2d از سطح اثر نیروی چرخ بارگذاری در نیروهای داخلی این نقاط اثر قابل توجهی ندارد.

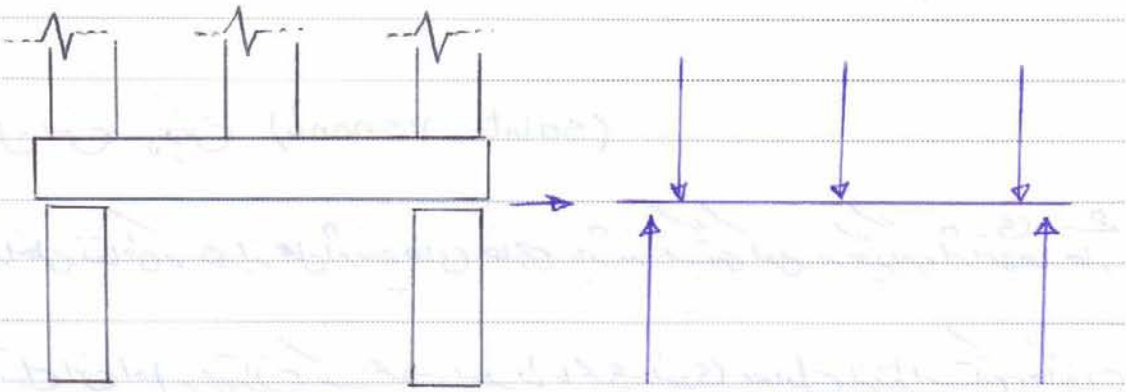
نکته: بی نهایت عددی یا بی نهایت در ریاضیات متفاوت است مثلاً در عددی اگر اعداد یک order

استاد:دکتر امیر عباس فاطمی گرداورنده:پوریا کاوه فی

با دو order تغییر کند می‌گویند ناهموار می‌شوند (مثلاً 2000 و order از 200 بیشتر است)



e.g: در شکل زیر نیروها مؤثر بر سیستم واقعی در تحلیل تیرها متمرکز در نظر گرفته می‌شود

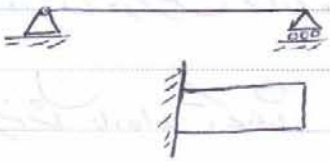


ولی بر اساس اصل متمرکز در نظر گرفته می‌شوند — این نیروها گسترده هستند

انواع تیرها:

تیرها معمولاً بر حسب شرایط و نوع تکیه‌گاه‌ها تقسیم می‌شوند به:

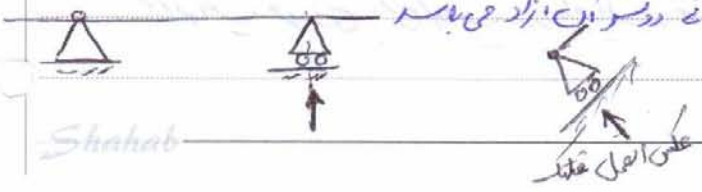
1- تیر ساده: یک سر ثابت یک سر متحرک



2- تیر طره یا کنسول: یک سر گیردار یک سر آزاد

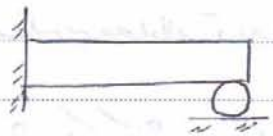
3- تیر دو سر گیردار:

4- تیر یکسر بار: همان تیر ساده است که دو سر آن آزاد می‌باشد



استاد: دکتر امیر عباس فاطمی
گرداورنده: پوریا کاوه ئی

5- تیر یک سرگیردار یک سر ساده



6- تیر ممتد: یک سر مفصل و بقیه غلتکی می باشد

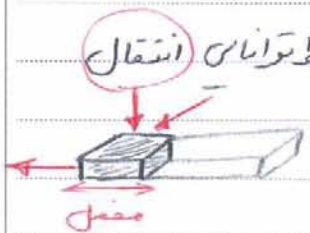
محاسبه ی واکنش تیرها:

اولین گام در تحلیل سازه تعیین واکنش های تکیه گاهی می باشد، واکنش ها عموماً نیروهای خارجی هستند که برای تعادل با بارهای خارجی مؤثر باید بر سازه مورد نظر اعمال گردد.

برای تعیین واکنش ها در فضا 6 معادله تعادل ایستایی و در صفحه 3 معادله تعادل ایستایی استفاده می شود

معادلات خاص:

برخی مواقع در تیرها مفصل های داخلی وجود دارند، یک مفصل مقاومت انتقال نیروهای محوری (کشش و فشار) و نیروی برشی (عرضی) را دارد



یعنی مفصل هیچ گونه نیروی (تلاش های درونی) را انتقال نمی دهد، بنابراین یک مفصل داخلی نقطه ای مناسب برای اعمال روش مقطع و انفصال سازه به دو قسمت جدا برای محاسبه ی واکنش ها می باشد

چون هر مفصل داخلی شرط جدیدی را برای نوشتن تعادل تیرها معرفی می کند بنابراین

استاد: دکتر امیر عباس فاطمی
گرداورنده: پوریا کاوه ئی

یک معادله به معادلات تعادل کل سیستم اضافه می‌شود بنابراین اگر سازه یک درجه نامعین

داشته باشد (یک واکنش مجهول اضافه) با تجزیه یک عضو داخلی در آن سازه معین می‌شود

ترجمه: واکنش های عضو داخلی در دو قسمت جدا از یکدیگر و در خلاف جهت یکدیگر رفتار می‌کنند

انواع تکیه گاه ها: (منظور نیروهایی است که می توانند بر سازه اثر کنند)

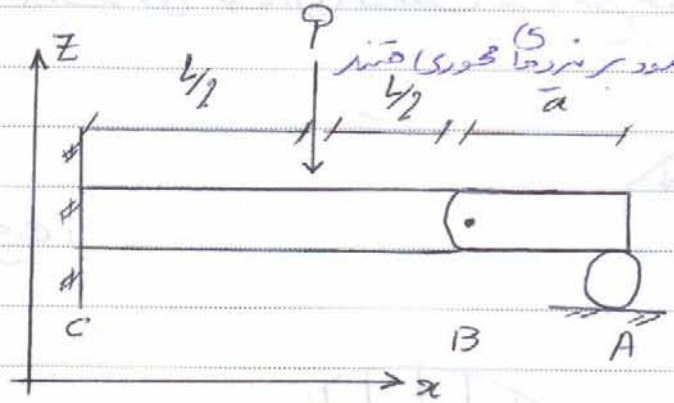
1- نیروهای محوری (کشش یا فشار): مثلاً در خرپاها اعضا فقط تحت نیروهای محوری هستند

2- گشتاور خمشی: مثلاً در تیرها معمولاً خمش داریم و معمولاً از نیروهای محوری صرف نظر می شود

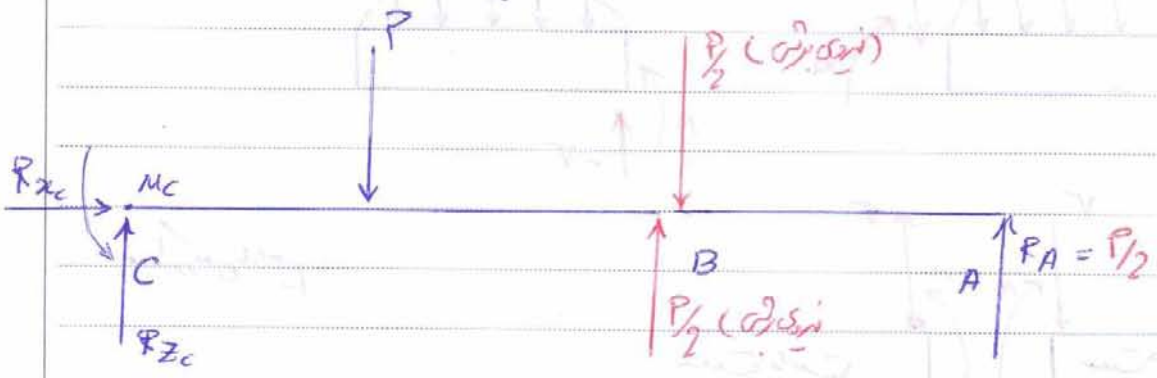
3- گشتاور پیچشی: مثلاً در عضو اصلی هواپیما پیچش وجود دارد

ساختمان و ستون ها دائم با زلزله تا حدی دچار پیچش می شوند

4- نیروهای عرضی یا برشی: معمولاً نیروهای عمود بر نیروهای محوری هستند



e.g: ابتدا دیاگرام آزاد (فقط نیروهای خارجی) رسم می شود



$\Sigma Fx = 0$

$\Sigma Fz = 0$

$\Sigma My = 0 \rightarrow \Sigma Mc = 0 \Rightarrow P \cdot L/2 - P/2 \times (L+a) = Mc$

$\rightarrow -\frac{P \cdot a}{2} = Mc$

Shahab

استاد: دکتر امیر عباس فاطمی گرداورنده: پوریا کاوه نی

نیروی برشی در تیرها:

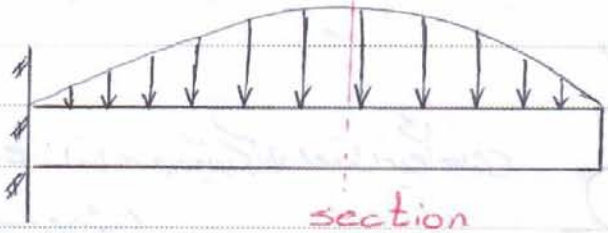
برای اینکه یک عضو از تیر در حال تعادل باقی بماند باید یک نیروی داخلی عاشم V در مقطع باشد تا معادله‌ی $\sum F = 0$ ارضا گردد، این نیروی داخلی V که عمود بر محور تیر می‌باشد نیروی برشی

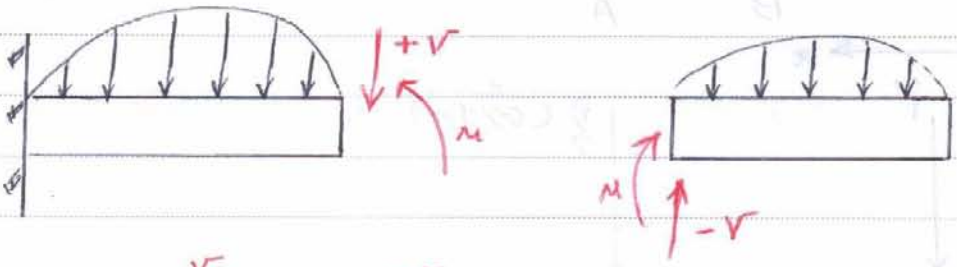
مقاوم داخلی یا به اختصار نیروی برشی گویند.

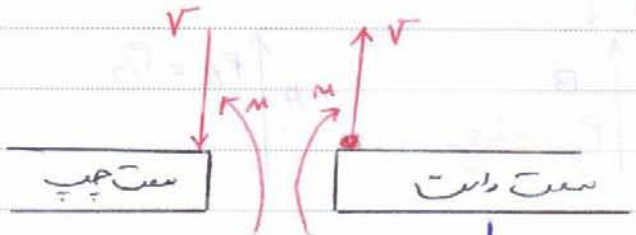
مقدار نیروی برشی برابر است با مجموع جبری مؤلفه‌های تمام نیروهای وارده بر قطعه جدا شده

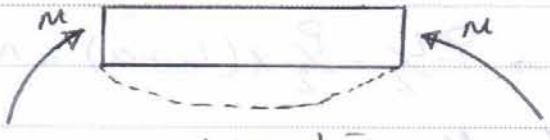
می‌باشد ولی جهت آن در خلاف جهت مجموع خواهد بود

e.g:









قطعه جدا شده

نیروهای محوری در تیرها:

در یک مقطع از تیر علاوه بر نیروی برشی (V) برای حفظ تعادل ممکن است یک نیروی افقی مانند P در امتداد محور تیر لازم باشد، مقدار و جهت این نیرو از معادله $\sum F_x = 0$ حاصل می‌گردد.

(اما بر دیاگرام اغلب روش‌ها بیشتر موارد از نیروی محوری تیر صرف نظر می‌شود)

لنگر خمشی در تیرها: (ترفیح سنه قبل)

وجود نیروهای برشی و محوری در یک مقطع تضمین می‌کند که معادلات تعادل (در تا $\sum F$ها) ارضا گردد. در مسائل دو بعدی معادله‌ی سوم تعادل یعنی $\sum M$ نیز باید صادق باشد، این امر فقط در صورت وجود یک لنگر مقاوم داخلی در مقطع امکان‌پذیر است.

این لنگر در مقابل لنگر حاصله از نیروهای خارجی در جهت عکس آن باید عمل کند تا معادله‌ی $\sum M_z = 0$ ارضا گردد.

دیاگرام تغییرات نیروی محوری، برشی و لنگر خمشی:

مقدار و جهت نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی را می‌توان در هر مقطع از تیر تعیین کرد. با در دست داشتن مقادیر و جهت این کمیت‌ها در مقاطع مختلف می‌توان تغییرات نیروی محوری، برشی و لنگر خمشی را در طول تیر بدست آورد و دیاگرام آن را رسم نمود.

Shahab

استاد: دکتر امیر عباس فاطمی گرداورنده: پوریا کاوه فی

معادلات دیفرانسیل تعادل:

تغییرات برش

$$\text{(I)}\quad \frac{dV}{dx} = q \;\rightarrow\; dV = q\,dx \xrightarrow[\text{انتگرال‌گیری}]{\text{از طرفین}} V = \int q\,dx$$

بارگسترده

تغییرات در طول (در متر)

$$\text{(II)}\quad \frac{dM}{dx} = V \;\Rightarrow\; dM = V\,dx \xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری}} M = \int V\,dx$$

با توجه به رابطه‌ی (I) با استفاده از شرایط تعادل، نیروهای قائم را محاسبه می‌نماییم و با استفاده از این روش می‌توان دیاگرام تغییرات نیروی برشی را رسم نمود.

به روش مشابه و با استفاده از رابطه (II) می‌توان تعادل لنگر و دیاگرام لنگر خمشی را بدست آورد.

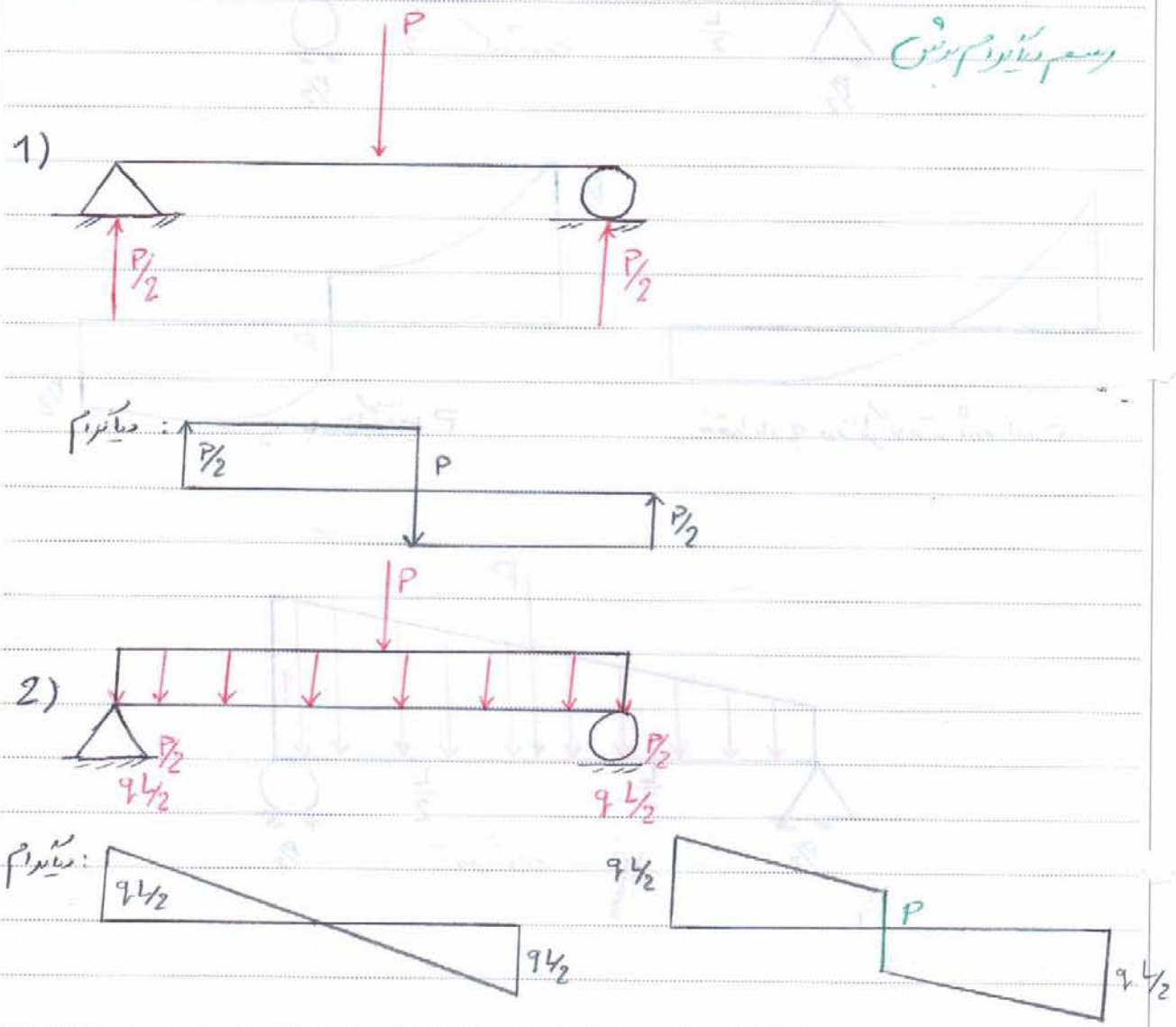
توجه: براین اساس بین هر دو مقطع مشخص یک تیر تغییر در نیروی برشی برابر است با جمع جبری کلیه نیروهایی که بین دو مقطع در تیر وارد می‌شوند.

توجه: اگر هیچ نیروی بین دو مقطع بر تیر وارد نشود هیچ گونه تغییری در مقدار نیروی برشی رخ نمی‌دهد.

اگر یک بار متمرکز اعمال گردد در جمع جبری در مقدار برش ناپیوستگی یا برشی رخ می‌دهد.

توجه: در رسم دیاگرام آزاد همیشه از چپ به راست حرکت می‌کنیم

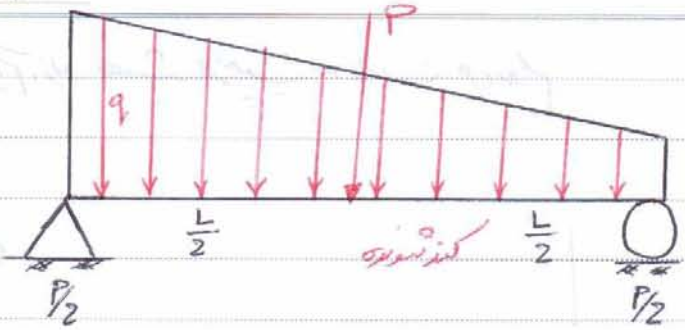
رسم دیاگرام برش

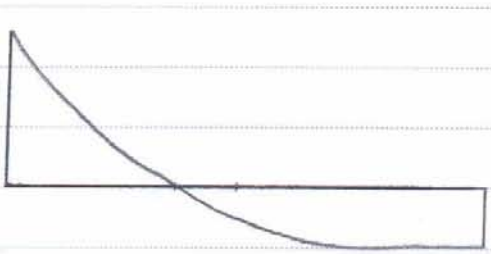


اگر نیروی خارجی P را هم در نظر بگیریم

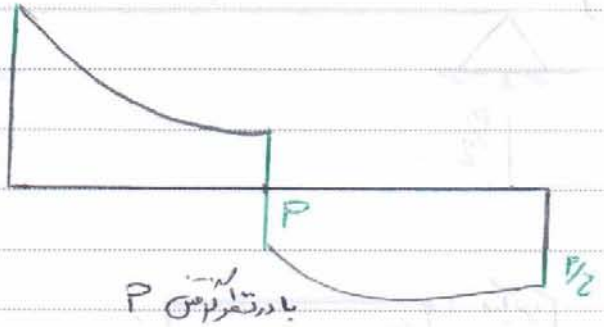
اگر فقط بار q را در نظر بگیریم

استاد: دکتر امیر عباس فاطمی
گرداورنده: پوریا کاوه ئی

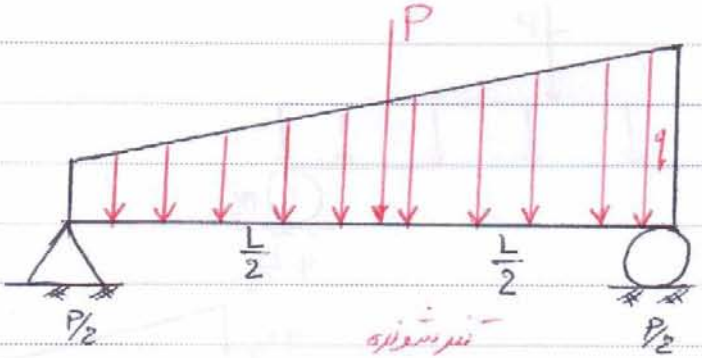


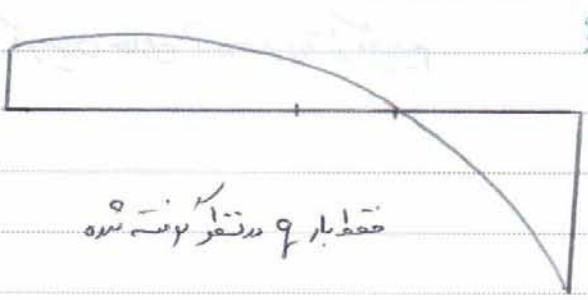


فقط بار q در تیر در نظر گرفته شده است

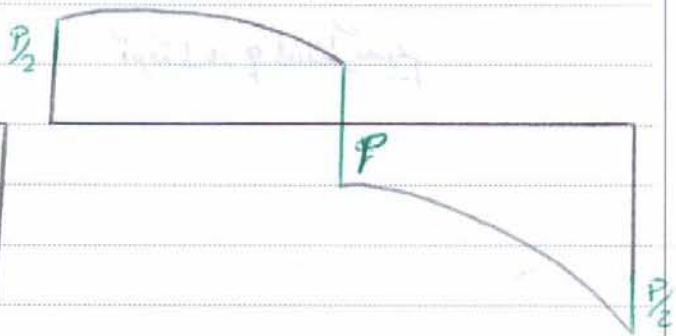


با در نظر گرفتن P

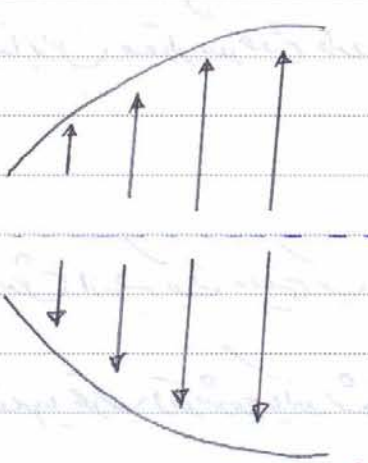




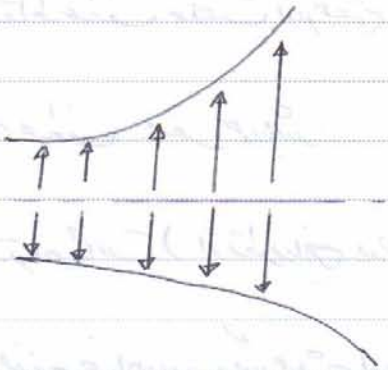
فقط بار q در تیر در نظر گرفته شده



نکته:



کندشونده



تندشونده

در کاربرد روش جمع نزدیک باید توجه خاصی به نیروهای متمرکز نیز داشته باشیم. چون اثر آنها در جمع نزدیک سطح زیر نمودار برش (دیاگرام آزاد نیرو) وارد می‌شود و در نقطه اثر نیرو متمرکز و خارجی یک تغییر ناگهانی (پرش) مساوی نیرو متمرکز در دیاگرام تغییرات نیروی برشی خواهیم داشت.

توجه:

در دیاگرام تغییرات نیروی برشی، شکلی که مجموعه تغییر در هنگام بارگذاری به خود می‌گیرد با منفی تغییر شکل انحنایی تیر یا منفی انحنایی می‌گویند.

در مقطعی از تیر که لنگر خمشی مثبت می‌باشد منفی انحنایی تغییرات محدب خواهد بود

در مقطعی از تیر که لنگر خمشی منفی می‌باشد منفی انحنایی مقعر خواهد بود.

در منفی انحنایی نقاط انتقالی که در آن جهت انحنای منحنی عوض می‌شود را نقاط عطف گویند

در نقاط عطف علامت تنگرفتی عوض می‌شود بنابراین مقدار تنگرفتی وارد بر تیر در نقطه‌ی عطف صفر می‌باشد.

اگر بارگسترده ثابت (از تغییر یافتن در جهت صفر) باشد برش از درجه یک یک خط با شیب مثبت یا منفی خواهد بود و تنگرفتی از درجه‌ی 2 یا تقعر یا تحدب (تندشونده یا کندشونده) منحنی خواهد بود

به همین ترتیب اگر بارگسترده از درجه یک باشد (یک خط با شیب مثبت یا منفی) برش از درجه 2 و تنگر از درجه 3 خواهد بود

همچنین اگر بار از درجه 2 (یک منحنی) برش از درجه 3 و تنگر از درجه 4 می‌باشد.

تنش

تنش عمودی (Normal stress)

تنش: نیرو بر واحد سطح

با این تعریف تنش عمودی که برای سطح مقطع A و تحت اثر نیروی محوری P ایجاد می‌شود به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

P ← بار محوری
A ← سطح
σ ← سیگما

ترجمه: سیگما (σ) بیانگر تنش متوسط در سطح مقطع می‌باشد و بیانگر تنش در نقطه‌ای خاص نخواهد بود

واحد تنش کششی (tensile stress) مثبت در نظر گرفته می‌شود و علامت تنش فشاری (compressive stress) را منفی در نظر می‌گیریم.

یکی از واحدهای مهم در تنش N/m^2 (نیوتن بر متر مربع) یا Pa (پاسکال) می‌باشد و در سیستم SI (یونیت) داریم:

$$Psi = \frac{lb}{in^2}$$ (پوند بر اینچ مربع)

$$ksi = \frac{klb}{in^2}$$ (کیپ بر اینچ مربع)

$$MPa = \frac{N}{mm^2}$$:نکته

$$mega = 10^6$$

استاد:دکتر امیر عباس فاطمی گرداورنده:پوریا کاوه ئی

یادآوری:

واحد	SI	BS
جرم	kg	پوند lb
زمان	sec	sec
طول	m	inch = 2.54cm ft = 12inch

با توجه به اینکه سطح مقطع عضو تحت اثر نیروی محوری، بسته به فشاری یا کششی بودن آن

افزایش یا کاهش می یابد تنش را با استفاده از سطح مقطع اولیه یا سطح مقطع می توان

بدست آورد. در حالت اول تنش محاسبه شده تنش مهندسی نام دارد و در حالت دوم تنش واقعی

تنش مهندسی: محاسبه تنش با استفاده از سطح مقطع اولیه تنش واقعی: محاسبه تنش در هر لحظه با استفاده از سطح مقطع

محاسبه می شود. (اغلب در مقاومت مصالح در سطح کار شناسی تنش مهندسی سروکار داریم)

تنش برشی (shearing stress)

چنانچه نیروی P عمود بر محور طولی عضو به موازات سطح مقطع A در عضو وارد گردد،

در عضو تنش برشی ایجاد خواهد شد.

با تقسیم برش P بر مساحت A تنش برشی میانگین در مقطع محاسبه می شود

$$\tau_{ave} = \frac{P}{A}$$

τ ← تاو P → نیروی برشی

توجه: برخلاف تنش قائم نمی‌توان توزیع تنش برشی در مقطع را پیش‌ساخت فرض کرد

و مقدار واقعی τ از صفر در سطح عضو تا مقدار τ_{MAX} تغییر می‌کند که ممکن است

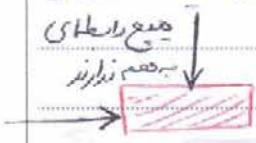
τ_{MAX} بسیار بزرگتر باشد. این تنش (برشی) اغلب در پیچ‌ها و پرچ‌ها مورد استفاده τ_{AVE}

برای اتصال اعضاء به وجود می‌آید.

توجه: با مقایسه تنش برشی و تنش قائم می‌توان به نکات زیر دست یافت:

1- تنش برشی بصورت مماس بر سطح مقطع اعمال می‌گردد، درصورتی که تنش قائم (نرمال) بصورت عمود بر سطح مقطع اعمال می‌گردد.

2- تنش برشی روی سطوح عمود بر هم بصورت هم‌زمان و مساوی به وجود می‌آید. اما در اثر تنش قائم روی سطوح عمود بر هم هیچ گونه رابطه‌ای با یکدیگر ندارند



3- در اثر تنش برشی در عضو اعوجاج (deflection) به وجود می‌آید و نرمال تغییر می‌کند اما در اثر تنش قائم اعوجاجی به وجود نمی‌آید.

4- تنش برشی خالص (زمانی که فقط یکی را داریم) هیچ تغییر طولی را در امتداد خود باعث نخواهد شد بلکه فقط باعث تغییر زوایا می‌گردد، بنابراین تحت اثر برش خالص هیچ تغییر حجمی نخواهیم داشت، ولی تنش قائم خالص باعث تغییر طول و تغییر حجم خواهد شد.

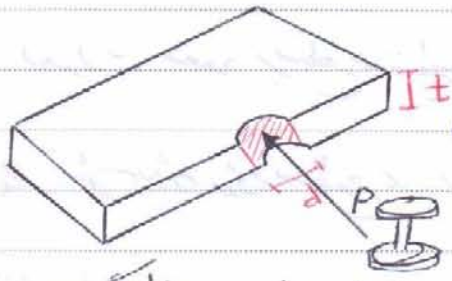
استاد: دکتر امیر عباس فاطمی گرداورنده: پوریا کاوه فی

تنش لهیدگی (crushing stress) ← از جنس نرمال می باشد

تنش ایجاد شده در سطح تماس اعضای یک اتصال و یا سطح تکیه گاه اعضا را تنش لهیدگی نامند.

اگر مطابق شکل توسط پرچ نیروی P بر سطح وارد گردد می توان سطح مؤثر در مقابل نیروی P را مستطیلی که همان تصویر پرچ بروی مقطع صفحه می باشد در نظر گرفت.

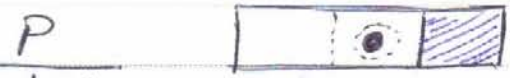
این مستطیل دارای ابعاد t (ضخامت صفحه) و d (قطر پرچ یا پیچ) می باشد. بنابراین تنش لهیدگی که آن را تنش تکیه گاهی نیز گویند بصورت زیر محاسبه می شود:



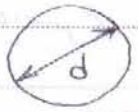
این مشکل را نیز در دایره در نظر نمی گیریم

$$\sigma_b = \frac{P}{A} = \frac{P}{t \cdot d}$$

مساحت مستطیل



$$\text{تنش لهیدگی} = \frac{\text{نیرو}}{\text{تصویر پیچ یا پرچ}} \rightarrow \left(\text{ارتفاع پیچ در هر قطعه} \times \text{قطر پیچ}\right)$$



تنش پسماند (Residual stress)

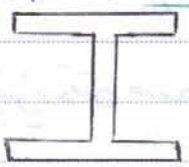
در مقاطع نورد شده در مرحله ی سرد شدن عضو، بولتال ها و وسط جانبها که تمرکز جرم

(web) (flange) ← cold forming نورد سرد / warm forming نورد گرم

در آنها کمتر می باشد زودتر سرد می شوند و تمایل به کاهش طول دارند ولی تماس جان و بال که تمرکز

جرم بیشتر می باشد مانع از این کاهش طول می گردد و در نتیجه در بولتال ها و وسط جانبها

تنش های پیچاند کششی و در محدوده ی تقاطع جان و بال تنش پیچاند فشاری به وجود می آید.



جهت این تنش های پیچاند عمود بر سطح مقطع در راستای طولی می باشد.

هرچه صفحات پروفیل ها بیشتر باشد تنش پیچاند بیشتر می شود مثلاً پروفیل IPE300 تنش پیچاند بیشتری نسبت به پروفیل IPE180 دارد. تنش پیچاند در مقاومت اعضای کششی تنشی ندارد ولی در رفتار آنها تاثیر دارد و باعث می شود مقطعات کششی به هنگام جاری شدن، کرنش بیشتری از خود نشان دهند.

از مهم تنش پیچاند در مقاومت اعضای فشاری می باشد که در محاسبات آئین نامه ای باید مورد توجه قرار گیرد.

تنش وارد بر صفحه ی مایل در بارگذاری محوری

نیروی محوری وارد بر صفحاتی که بر محور عضو عمود نباشند تنش برشی و تنش قائم را بصورت هم زمان ایجاد می کند. در شکل زیر که عضو دو نیرویی تحت اثر نیروی محوری P قرار دارد، اگر مقطعی از عضو را در نظر بگیریم که با صفحه ی قائم زاویه θ را بسازد مقادیر تنش برشی و تنش قائم از روابط زیر محاسبه می شود:

در روابط زیر A_0 بیانگر سطح مقطع عمود بر محور عضو می باشد (یعنی $\theta = 0$) و تنش قائم

استاد:دکتر امیر عباس فاطمی گرداورنده:پوریا کاوه ئی

تنش نرمال بعدوت عمود بر هم
تنش برشی بعدوت هم جهت با محور طولی

ماکزیمم $\left(\frac{P}{A_0}\right)$ با صورتی حی شد و تنش برشی صفر خواهد بود.

همچنین وقتی صفحه‌ی مقطع با صفحه‌ی قائم زاویه 45° بسازد تنش برشی به مقدار ماکزیمم خود یعنی $\frac{P}{2A_0}$ می‌رسد

$$if\ \theta=0 \Rightarrow \sigma=\frac{P}{A_0}$$

$$if\ \theta=45^\circ \Rightarrow \tau_{MAX}=\frac{P}{2A_0}$$

در صفحات مایل نسبت به جهت طولی نمونه

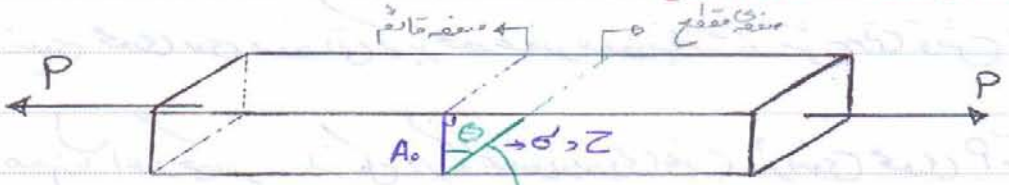
$$\text{تنش قائم} = \frac{P}{A}=\frac{P\cos\theta}{\frac{A_0}{\cos\theta}}=\frac{P}{A_0}\cos^2\theta$$

$$\text{تنش برشی } \tau=\frac{P}{2A_0}\sin2\theta \rightarrow \text{اثبات}$$

$$\tau=\frac{P}{A}=\frac{P\sin\theta}{\frac{A_0}{\cos\theta}}=\frac{P}{A_0}\sin\theta\cos\theta=\frac{P}{2A_0}\sin2\theta$$

$$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$$

$$\frac{1}{2}\sin2\theta=\sin\theta\cdot\cos\theta$$

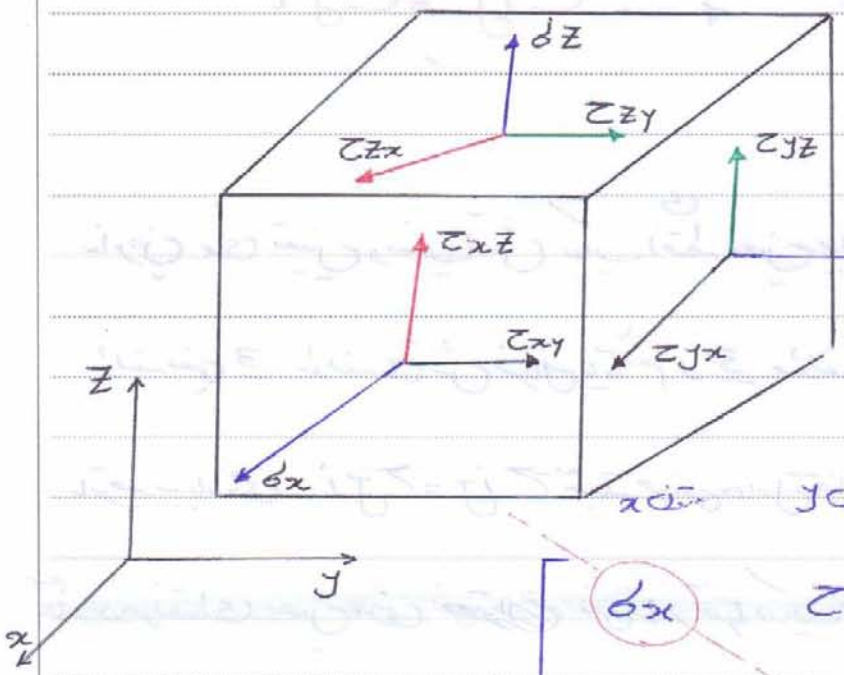


$\frac{A_0}{\cos\theta}$ → چون سطح افزایش یافته اگر A_0 را بر $\cos\theta$ ضرب کنیم بعد از $\cos\theta$ تقسیم کنیم تا عدد برگردد و سطح ما برجا

مؤلفه‌های تنش (تانسور تنش)

اگر یک عضو مکعبی شکل را از جسمی که تحت اثر نیرو قرار دارد ازدایی کنیم مشاهده می‌شود که این عضو دارای ۹ مؤلفه‌ی تنش می‌باشد که ۳ تا مؤلفه‌ی آن مربوط به تنش‌های قائم و ۶ تا مؤلفه‌ی آن مربوط به تنش‌های برشی خواهد بود.

البته بدیهی است تنش‌های برشی مستقل از یکدیگر نمی‌باشند. اگر همه‌ی مؤلفه‌های تنش را درون یک ماتریس قرار دهیم، این ماتریس را تانسور تنش گویند که روابط خاصی بین مؤلفه‌های آن حاکم می‌باشد.



ستون x ستون y ستون z

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

قطر اصلی

نشان دهنده جهت محور می‌باشد

استاد: دکتر امیر عباس فاطمی گرداورنده: پوریا کاوه ئی

ترسیم ← i در مؤلفه‌ی تنش j از کدام محور عمود بر صفحه‌ی تنش را مشخص می‌کند

و j نیز راستای تنش را مشخص می‌کند. به عنوان نمونه τ_{xy} بیانگر تنشی است که بر

صفحه‌ای عمود بر محور x ها وارد می‌شود و در جهت y ها می‌باشد. بدیهی است جنس

تنش از نوع برشی (عرضی) خواهد بود. در انتها حکمی معادلات تعادل گشتاور را حول 3 محور

مختصات بنویسیم خواهیم داشت:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \leftarrow \quad \tau_{ij} = \tau_{ji}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

بنابراین برای تعیین وضعیت تنش در یک نقطه‌ی معین به جای 9 مؤلفه‌ی تنش ابتدایی تنها 6

مؤلفه یعنی 3 مؤلفه‌ی تنش نرمال یا قائم و 3 مؤلفه‌ی تنش برشی داریم

با توجه به رابطه‌ی $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ نتیجه مهمی حاصل می‌شود:

+ در هر نقطه‌ای معین برش نمی‌تواند تنها در یک صفحه رخ دهد بلکه باید تنش برشی

یکسانی بر صفحه‌ی دیگر عمود بر صفحه‌ی اول نیز وارد شود.

هر تانسور تنش را می توان بصورت مجموع دو تانسور تنش باز نویسی نمود، یکی از تانسورها تانسور برش خالص

دیگری تانسور تنش قائم خالص می باشد (مانند فشار هیدرواستاتیک)

اگر $\bar{\sigma} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$ باشد داریم:

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} =$$

تنش های برشی

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \bar{\sigma} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \bar{\sigma} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \bar{\sigma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{bmatrix}$$

T_1 (تانسور برش خالص) T_2 (تانسور تنش نرمال خالص)

در تانسور T_1 مجموع عناصر روی قطر اصلی که همان مجموع تنش های قائم می باشد برابر صفر خواهد بود بنابراین

آن را تانسور برش خالص گویند.

(برای) به دلیل اینکه مانند تانسور برش خالص باعث اعمال هیچ گونه تغییر حجمی نمی گردد و تنها باعث

ایجاد اعوجاج می‌شود می‌توان با چرخاندن المان تنش یا تانسور T_1 یا تانسور اصلی برش خالص

بصورت زیر تبدیل نمود:

تانسور اصلی برش خالص

$$\begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{bmatrix}$$

تانسور T_2 (مخصوص تنش نرمال) فقط باعث ایجاد تغییر حجم در المان می‌شود ولی هیچ‌گونه اعوجاجی تولید نمی‌کند

- برش خالص: تغییر حجم نمی‌شود / ایجاد اعوجاج می‌شود
- تنش نرمال خالص: ایجاد تغییر حجم می‌شود / اعوجاج تولید نمی‌کند

نکته: تانسور تنش دارای دو ویژگی زیر می‌باشد:

1- مجموع عناصر روی قطر اصلی تانسور تنش با چرخاندن المان تغییر نمی‌کند و ثابت می‌ماند یعنی روی قطر اصلی تانسور تنش (در تانسور برش نیز همین گونه خواهد بود)

2- مقادیر ویژه‌ی تانسور تنش همان تنش‌های اصلی المان هستند با چرخاندن المان می‌توان به آنها رسید.

مقادیر ویژه با استفاده از معادله‌ی مشخصه بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\left| [\delta_{ij}] - \lambda I \right| = 0$$

(مقادیر ویژه ←، ماتریس همانی →)

$$[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$$

حالت های خاص تنش به دو صورت زیر قابل بررسی می باشد :

1- حالت تنش مسطح (تنش صفحه ای) (plane stress)

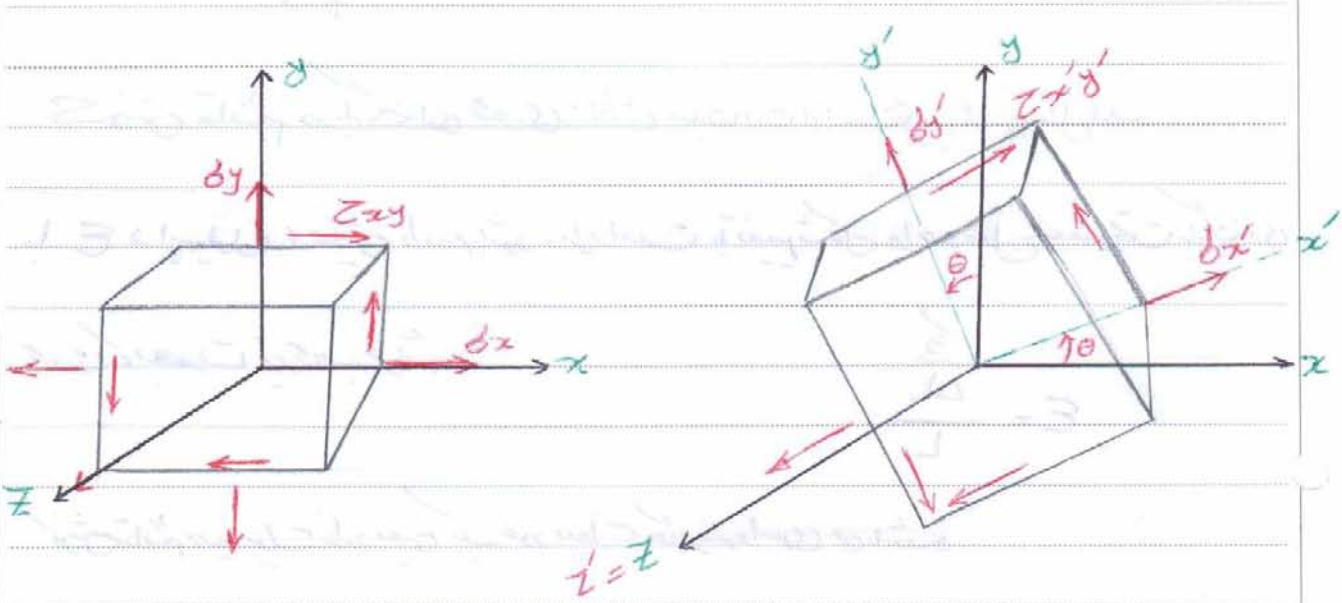
در این حالت تمام مؤلفه های تنش در یک امتداد برابر صفر می باشد بطور مثال در راستای Z تنش ها

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$$

به صورت روبرو صفر می باشد

یادآوری:

اگر داشته باشیم آنگاه در این مؤلفه تنش نرمال محور عمود بر صفحه تنش اصلی راستای آن می باشد



معادله ها : در حالت دوبعدی یافته :

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta$$

Shahab

گرداورنده:پوریا کاوه نی
استاد:دکتر امیر عباس فاطمی

2- حالت کرنش مسطح (کرنش صفحه‌ای) (plane strain)

در این حالت تمام مؤلفه‌های کرنش در یک امتداد برابر صفر می‌باشد، بعنوان مثال کرنش‌ها در راستای z برابر صفر می‌باشد

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

ε_z: کرنش عادی (محوری) — γ_{xz}, γ_{yz}: کرنش برشی

توجه: معمولاً حالت کرنش مسطح صفحه‌ای که می‌دهد شبیه ظاهری جسم طلب و طولی باشد

کرنش عادی در بارگذاری محوری: کرنش عبارت است از نسبت تغییر طول به طول اولیه

با ε (اپسیلون) نمایش داده می‌شود و برابر است با تغییر شکل واحد طول عضو تحت بارگذاری محوری که بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

کرنش عادی دیمانسیون ندارد یعنی یک عدد بدون هر گونه واحدی می‌باشد

در صورتی که بار محوری وارد بر عضو کششی باشد (بار محوری مثبت) عضو افزایش طول خواهد داد و اصطلاحاً گوییم کرنش کششی (tensile strain) رخ می‌دهد

به همین ترتیب اگر در عضو، بار محوری فشاری (بار محوری منفی) اعمال گردد کرنش فشاری (compressive strain) رخ می دهد یعنی عضو کاهش طول داده است.

منفی تنش - کرنش

با رسم منفی تنش ($\sigma = \frac{P}{A}$) برحسب کرنش ($\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$) یک منفی (curve) می رسیم که بستگی به ابعاد نمونه ندارد و مشخص کننده خواص می باشد. این منفی، منفی تنش - کرنش نامیده می شود که برای بدست آوردن آن معمولاً این از نمونه گیری از عضو مورد نظر و انجام آزمایش کشش در آزمایشگاه مقاومت مصالح نتایج را با خواص مقادیر مناظر تنش و کرنش بصورت یک منفی ارائه می دهند.

در شکست مواد شکل پذیر، گرنش نقش اساسی دارد، بطور مثال برای یک نمونه فولادی تحت اثر بار محوری کششی نسبتی در سطح مخروطی شکل رخ می دهد که با سطح اولیه نمونه تقریباً زاویه 45° می سازد.

برخلاف مواد شکل پذیر که تنشی برشی دارند مواد ترد تنش کششی دارند در شکست آنها تنش عامل نقش اساسی دارد.

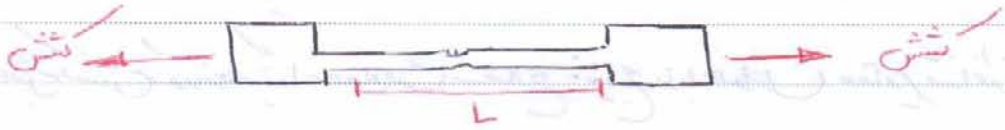
مواد شکل پذیر (Ductile Materials)

مواد ترد (Brittle Materials)

استاد: دکتر امیر عباس فاطمی گرداورنده: پوریا کاوه ئی

بعنوان مثال یک میله‌ی چدنی تحت اثر بارمحوری کششی با یک تنش عمود بر سطحی عمود بر بار وارده دچار شکست می‌شود (شکست کششی) و تعاوت عمده‌ی این شکست مواد شکل پذیر با مواد ترد این است که در مواد شکل پذیر تحت کشش باریک شدگی (necking) رخ می‌دهد و در حالی که در مواد ترد قبل از هرگونه تغییر شکل عضو دچار شکست می‌شود.

توجه: در مواد شکل پذیر از ورود طولی معادل 200 برابر تغییر شکل آن عضو قبل از تسلیم یا جاری شدن (Yield) بعد از شروع تسلیم دیده می‌شود.



مقطع جدا شده

توجه: باریک شدگی فقط مربوط به مواد شکل پذیر تحت اثر بارمحوری کششی می‌باشد و در حالت بارمحوری فشاری هیچ گاه باریک شدگی رخ نمی‌دهد و در مواردی تنها کمانش جوامع راست در مواد شکل پذیر تحت تنش عمودی که با بار P تناسب مستقیم دارد، بغایر مرحله‌ی باریک شدگی همراه بار P تنش عمودی نیز کاهش می‌یابد اما تنش واقعی (σ_t) وابسته به زمانی که با بار P متناسب است با سطح A نیز تناسب معکوس دارد.

بنابراین همچنان افزایش می یابد تا نمونه گسیخته گردد.

بطور مشابه برای کرنش نیز مقادیر مهندسی و مقادیر واقعی تعریف می گردد

کرنش مهندسی برابر است با:

تغییر شکل واحد طول عضو، رابطه ی آن $\varepsilon = \frac{\delta}{L}$ (ل رابطه ی مورها)

و کرنش واقعی از رابطه ی $\varepsilon_t = \ln \frac{L}{L_0}$ محاسبه می شود بطوری که L طول نمونه در هر زمان

بارگذاری می باشد و L_0 طول اولیه نمونه خواهد بود

قانون رابرت هوک Hook law

مواد با رفتار هوک Hookian materials

بیان می کند تنش (σ) با کرنش (ε) رابطه ی خطی دارد

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

(E ضریب الاستیسیته، ضریب ارتجاعی، الاستیک شدن)

برای محاسبه ی دوبل و میانسول تنش داریم

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}$$

P: نیرو $M.a = MLT^{-2}$ ($\frac{L}{T^2}$)

A: L^2 (دیمانسیون سطح)

استاد:دکتر امیر عباس فاطمی گرداورنده:پوریا کاوه فی

در رابطه‌ی هوک به دلیل ثابت گرفتن فاکتور دیفرانسیل می‌باشد، E (ضریب ارتجاعی) با تنش هم دیفرانسیل می‌باشد.

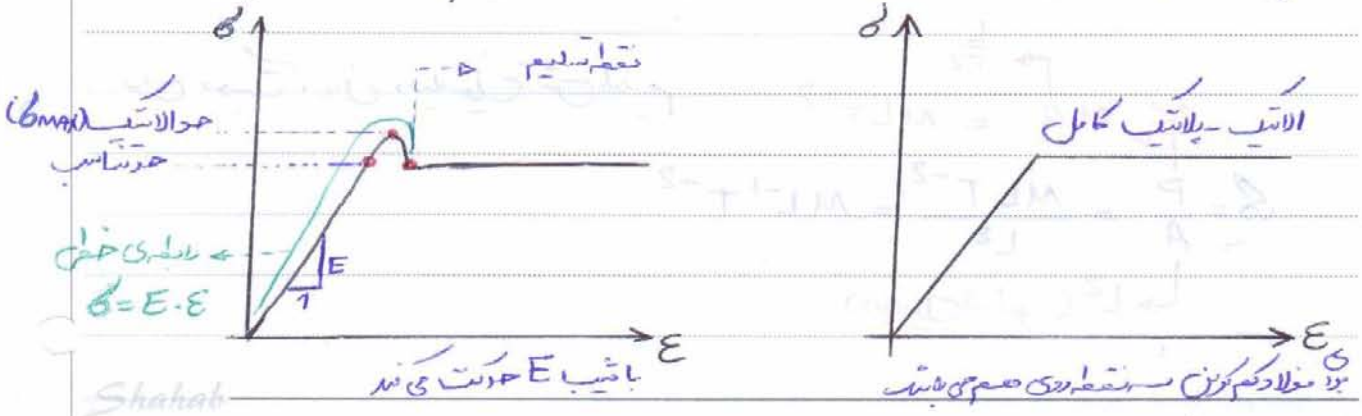
تعاریف

← بزرگترین مقداری تنش که به ازای آن می‌توان قانون هوک را برای ماده‌ی معینی بکار برد حدتناسب (limit of proportionality) آن ماده می‌گویند.

یعنی تا این حد بین تنش و کرنش یک تناسب خطی وجود دارد.

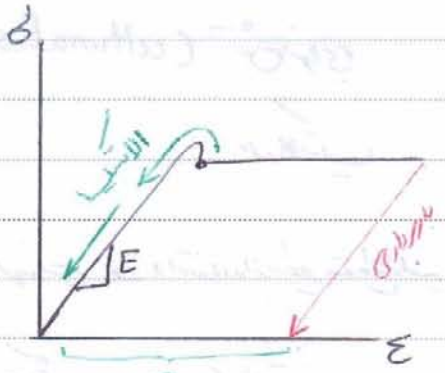
← بزرگترین مقداری تنش که به ازای آن ماده رفتار الاستیک (Elastic) (ارتجاعی یا تنش سان) دارد، یعنی با برداشتن بار هیچگونه تغییر شکل ماندگاری در عضو نماند و تغییر شکل صفر شود که به این، حدکشسان می‌گویند.

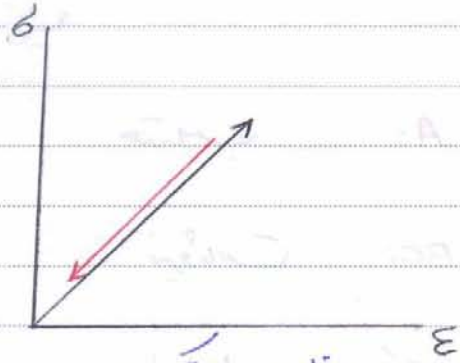
اگر ماده‌ای مانند فولاد کم کربن (low carbon steel) نقطه‌ی تسلیم به خوبی تعریف شده‌ای داشته باشد حدکشسان و حدتناسب و نقطه‌ی تسلیم همگی بر هم منطبق هستند



توجه: باید توجه داشت که بحث خطی بودن مصالح (قانون هوک) از بحث الاستیک بودن مصالح متفاوت است. بحث خطی بودن مصالح اشاره به تناسب خطی تنش با کرنش دارد که ضریب این تناسب E می‌باشد. درحالی که الاستیک بودن مصالح بستگی به نحوه رفتار عضو در بارگذاری و بار برداری دارد، یعنی پس از بارگذاری بدون هیچ گونه تغییر شکل یا کرنش عضو به حالت اول خود باز می‌گردد.

بر این اساس می‌توان مصالحی داشت که در عین خطی بودن، الاستیک رفتار نماند و برعکس می‌توان مصالحی یافت که در عین غیرخطی بودن الاستیک رفتار کند.





هم خطی هم الاستیک

غیرخطی - الاستیک (مانند لاستوکاپل)

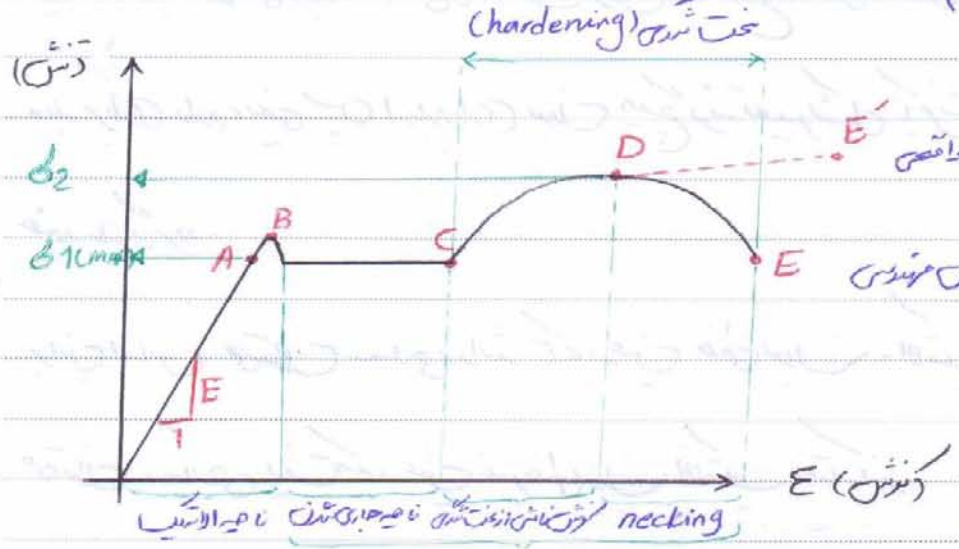
Shahab

39 Collapse سقوط - فروریختگی

نکته: تانزل سول مصالح الاستیک خطی تعریف می‌شود

میله متشوری: میله‌ای (عضوی) است که مقطع آن در طول عضو ثابت و مستقیم باشد

(یعنی تغییر نکرده باشد)



D: تنش نهایی (ultimat stress)

A: حد تناسب

B: حد الاستیک

BC: نیرو ثابت

DE: تنش مهندسی ⇐ (استفاده از سطح مقطع اولیه)

DE': استفاده از سطح مقطع لحظه‌ای ⇒ تنش واقعی

CD: (سخت شدن مجدد) مکانیزم تغییر

نرخ تغییر سطح مقطع از تغییر (کاهش) تنش ( ) می‌باشد

$$\sigma_2 > \sigma_1 \Rightarrow \sigma_2 = \sigma_{MAX}$$

نکته: اگر میله ای بطول L با سطح مقطع متغیر تحت اثر نیروی محوری P قرار گیرد بر اساس

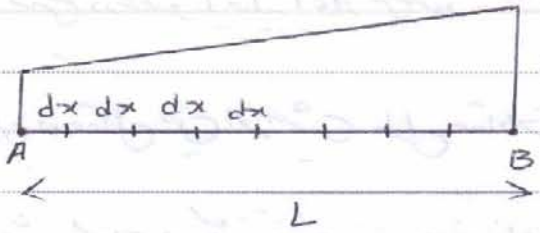
قانون هوک تغییر شکل ناشی از اعمال بار P بر عضو از رابطه زیر محاسبه می شود (P و A تابعی

از طول عضو (x) می باشد)

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

$$\frac{P}{A} = E \cdot \frac{\delta}{L} \Rightarrow \delta = \frac{P \cdot L}{A \cdot E}$$ چون سطح متغیر است

$$\delta = \int_0^L \frac{P_x \cdot dx}{A_x \cdot E}$$ نمایش داده می شود



در حقیقت dx آخر کل dx ها را جاروب می کند پس می توان آن را جای L قرار داد

حال اگر سطح مقطع عضو ثابت باشد:

$$\delta = \frac{P \cdot L}{A \cdot E}$$

تغییر دما:

میله ای با سطح مقطع یکنواخت بطول L با ضریب انبساط حرارتی α معروف است که آزادانه

روی یک سطح مقطع افقی صیقلی قرار گرفته است. اگر این میله تحت اثر تغییر دمای ΔT

گرداورنده: پوریا کاوه نی
استاد: دکتر امیر عباس فاطمی

مقدار داشته باشد تغییر طول آن برابر است با:

$\delta = L \cdot \alpha \cdot \Delta T$ (تغییر طول ناشی از تغییر دما ی ΔT)

و برای کرنش حرارتی داریم:

$\varepsilon_T = \frac{L \cdot \alpha \cdot \Delta T}{L} = \alpha \cdot \Delta T$ (کرنش حرارتی ناشی از تغییر دما ی ΔT)

این کرنش را کرنش گرمایی (حرارتی) نویند.

در این حالت هیچ گونه تنشی در عضو یا میله ایجاد نمی شود ← دلیل: زیرا میله آزادانه تغییر طول می تواند بدهد و تکیه گاهی در مقابل این افزایش طول مقاومت نمی کند، بنابراین هیچ گونه نیروی بر عضو وارد نمی شود، پس هیچ گونه تنشی نیز در عضو نداریم)

اگر مطابق شکل زیر این عضو بین دو تکیه گاه ثابت Fix شده باشد که فاصله ها از هم مقدار دارند و تکیه گاه ها مانع از افزایش طول میله می شوند، اگر از طرف تکیه گاه ها نیروی مقاری F بر میله اعمال گردد خواهیم داشت:

$$\frac{F \cdot L}{A \cdot E} - L \cdot \alpha \cdot \Delta T = 0 \Rightarrow \frac{F \cdot L}{A \cdot E} = L \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

تنش ناشی از نیروی F

$$\frac{F}{A} = E \cdot \alpha \cdot \Delta T \Rightarrow F = A \cdot E \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

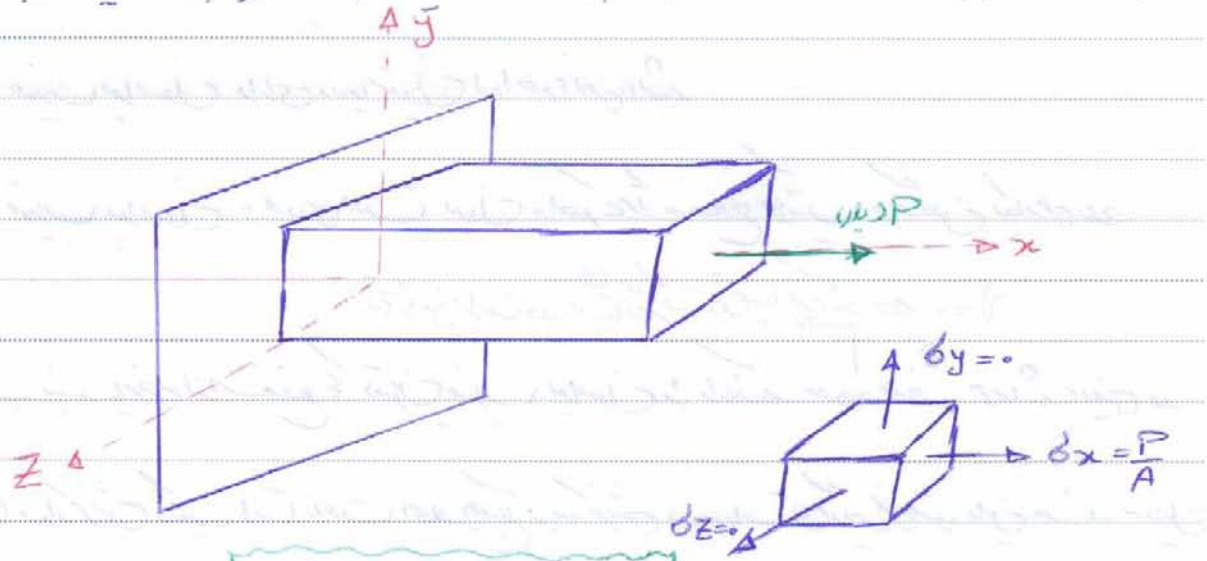
تنش ایجاد شده در عضو بدلیل تغییر دمای ΔT

بارگذاری حرارتی: بارگذاری خاصی می باشد که می توان در آن بدون وجود کرنش تنش ایجاد کرد و یا اینکه بدون وجود تنش کرنش ایجاد کرد. به ازای تغییر این بارگذاری متفاوت از انواع دیگر بارگذاری است.

نسبت پواسون (ν) (نو)

در میله‌ای تحت اثر بار محوری قرار دارد تنش‌های عامل در وجوه جانبی برابر صفر می‌باشد اما کرنش‌های متناظر $\varepsilon_y, \varepsilon_z$ صفر نمی‌باشد.

نسبت کرنش جانبی به کرنش محوری را نسبت پواسون گویند و بصورت زیر قابل تعریف می‌باشد:



$$-\nu\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z$$

$$\nu = \left| \frac{\text{کرنش جانبی}}{\text{کرنش محوری}} \right| = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

ν همواره مثبت است

$\varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x$ (کرنش جانبی) $\quad \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x$ (کرنش جانبی)

براساس قانون هوک $\Rightarrow \sigma_x = E \cdot \varepsilon_x \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$ (کرنش محوری)

Shahab

استاد: دکتر امیر عباس فاطمی گرداورنده: پوریا کاوه نی

$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$ ، $\varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x$ ، $\Rightarrow \varepsilon_x = \frac{-\varepsilon_y}{\nu}$ $\Rightarrow \frac{-\varepsilon_y}{\nu} = \frac{\sigma_x}{E} \Rightarrow \varepsilon_y = \frac{-\nu \sigma_x}{E}$

$\frac{-\varepsilon_z}{\nu} = \frac{\sigma_x}{E} \Rightarrow \varepsilon_z = \frac{-\nu \sigma_x}{E}$

Year. Month. Day. Subject.

بنابراین: زمانی که خواستیم بین مدول یانگ پواسون و قانون هوک ارتباط برقرار کنیم

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu \sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_z = -\frac{\nu \sigma_x}{E}$$

علامت منفی در روابط فوق بدلیل آن است که عکس تأثیر تنش محوری همواره کرنش جانبی

و کرنش محوری مخالف یکدیگر می‌باشد.

چند نکته:

معمولاً ضریب پواسون فلزات بین 0.25 تا 0.35 می‌باشد

ضریب پواسون بتن معمولاً حدود 0.1 می‌باشد

ضریب پواسون دارای دیمانسیون (واحد) نمی‌باشد

ضریب پواسون: عددی است بدون واحد که برای مصالح الاستیک و همگن یکسان می‌باشد

حداقل ضریب پواسون در راستای کمترین کرنش پیدا می‌شود $\nu = 0$

چون بیشتر مواد از انبساط در کمترین راستای خود منفعل می‌شوند، یعنی در

این مواد کرنش در یک راستا باعث ایجاد هیچ گونه کرنشی در دو راستای دیگر نمی‌شود، این مشاهده به دلیل

تخلخل موجود در این مواد می‌باشد

در بین الاستیک‌ها و بیشتر مواد (جامدات، آب و نفت) که غیر قابل تراکم می‌باشند ضریب پواسون

بیشترین مقدار خود یعنی 0.5 می‌باشد، چون با افزایش بارگذاری حجم آن‌ها ثابت مانده و تغییر نمی‌کند

هرچه یک ماده تراکم‌پذیرتر باشد $\nu \uparrow$ هرچه یک ماده تراکم‌ناپذیرتر باشد $\nu \downarrow$

استاد: دکتر امیر عباس فاطمی گرداورنده: پوریا کاوه ئی

بالاترین مقدار ضریب پواسون ½ است.

Year. Month. Day. Subject.

نکته: ماده‌ای که تغییر شکل پلاستیک پیدا کرده است تغییر حجم نخواهد داشت و دارای ضریب پواسون ½ خواهد بود.

بار کارهای عملی می‌توان مقدار عددی ضریب پواسون را با تحت کشش دقت مشاهده کنیان ضرض کرد.

$0 < \nu < \frac{1}{2}$ (کاملاً تراکم‌پذیر) ← (غیرقابل تراکم)

با پیشرفت علم در سالهای اخیر مواد مرکب و مواد هوشمند ساخته شده‌اند که ضریب پواسون منفی دارند.

کرنش حجمی:

تغییر حجم نسبت حجم اولیه

بارگذاری چند محوری:

برای عضوی تحت اثر تنش‌های $(\sigma x, \sigma y, \sigma z)$ در جهت اصلی محورهای مختصات قرار گرفته باشد

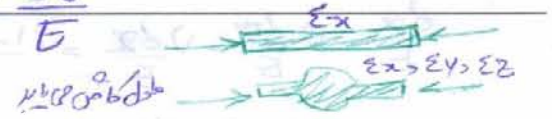
با استفاده از قانون هوک و ضریب پواسون و اصل جمع آثار مقادیر خواهیم داشت:

$$\varepsilon x = \frac{\sigma x}{E} - \nu\frac{\sigma y}{E} - \nu\frac{\sigma z}{E}$$

$$\varepsilon y = \frac{\sigma y}{E} - \nu\frac{\sigma x}{E} - \nu\frac{\sigma z}{E}$$

$$\varepsilon z = \frac{\sigma z}{E} - \nu\frac{\sigma x}{E} - \nu\frac{\sigma y}{E}$$

دقت علاوه بر راستای اصلی در راستای دیگر نیز کرنش می‌باید ($\varepsilon y, \varepsilon z$) طول را کاهش می‌دهد



Shahab

45

روابط فوق تنها برای تغییر شکل های حاصل کوچک و تنش هایی که از حد تناسب تجاوز نکرده اند صادق می باشند.

انبساط حجمی: (e)

انبساط حجمی یا کرنش حجمی برابر است با:

تغییرات حجم ÷ حجم اولیه

و برای عضوی که تحت اثر تنش های قائم در سه راستای اصلی (x, y, z) می باشد کرنش حجمی بصورت زیر تعریف می شود:

$$e = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad \text{(کرنش حجمی)}$$

(تغییرات حجم ← ΔV ، حجم → V)

$$= \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

در حالت خاصی که جسم تحت اثر فشار هیدرواستاتیک P قرار دارد $(-P = \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z)$

$$\Rightarrow \quad e = \frac{1-2\nu}{E}(-3P)$$

اثبات فرمول کرنش حجمی با استفاده از فرمول های بارگذاری چند محوری

$$e = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} + \frac{\sigma_z}{E} - \nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E}$$

$$\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_x}{E} = \left(\frac{1-2\nu}{E}\right)\sigma_x \;,\; \frac{1-2\nu}{E}\sigma_y \;,\; \frac{1-2\nu}{E}\sigma_z$$

اگر K عددل حجمی ماده‌ای نامیم که با ضریب ارتجاعی یا الاستیک (E) هم دیافنول باشد

خواهیم داشت

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -P$$

$$\rightarrow e = \frac{1-2\nu}{E}(-3P)$$

$$\Rightarrow e = \frac{-P}{E} \longrightarrow K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

کرنش برشی :

اگر عضوی تحت تنش برشی قرار داشته باشد کرنش برشی بر اساس قانون هوک بصورت زیر

قابل بیان است :

$$\tau = G \cdot \gamma$$

(τ: تنش برشی ، γ: کرنش برشی ، G: ضریب ارتجاعی (الاستیک) برشی)

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

(E: ضریب ارتجاعی ، ν: ضریب پواسون)

توجه : کرنش برشی نیز مانند کرنش محوری بدون دیمانسیون می‌باشد بنابراین دیمانسیون G

(ضریب الاستیک برشی) همان دیمانسیون تنش برشی می‌باشد

گرداورنده:پوریا کاوه نی
استاد:دکتر امیر عباس فاطمی

توجه: تنسور تنش وجوه الف (عمود) بیانگر برش برش می باشد، اگر محور های نرمال بر این وجوه x و y باشد، این کرنش برشی را با γ_{xy} نمایش می دهند که بر اساس رابطه ی هوک برابر است با:

1) $\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$

2) $\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$

3) $\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$

نکات مهم:

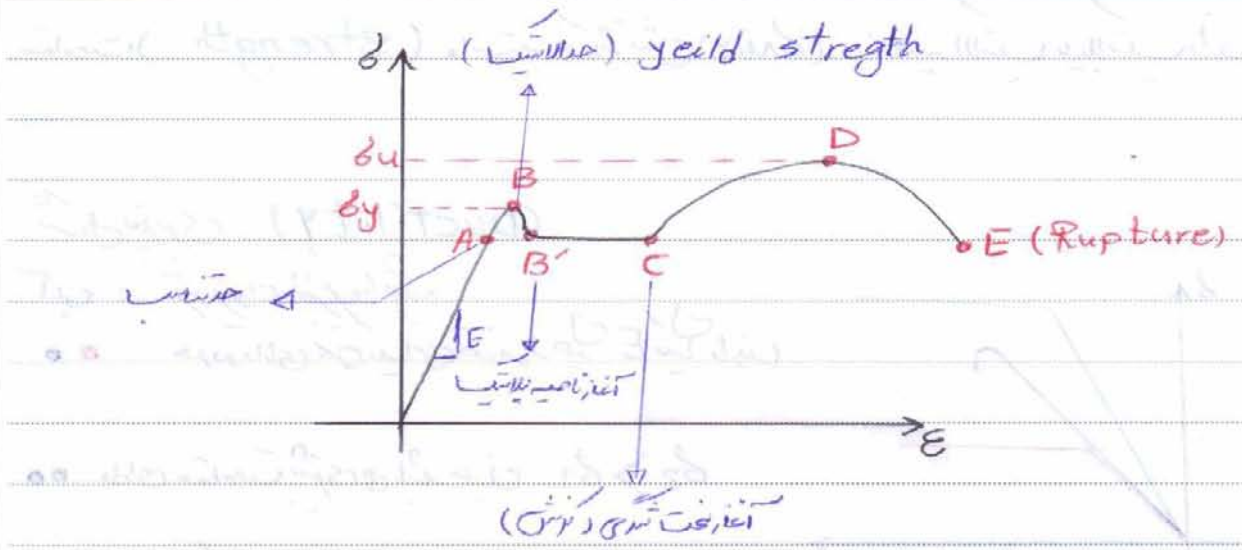
1- برای مصالح ایزوتروپیک تنسور درجه حرارت هیچ گونه کرنش برشی تولید نمی شود ($\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$)

2- یک ماده ایزوتروپیک ماده ای است که خواص الاستیک یکسان در تمام جهات داشته باشد

3- در کشش یک محوری نرمال ی بیشینه تنش برشی MAX و نوع کشش برابر است با 45°

4- تنسور حجم واحد حجم، برای عضوی که تحت برش خالص قرار دارد برابر صفر می باشد

(کرنش حجمی) e



D: σ_u تنش نهایی (ultimate stress)

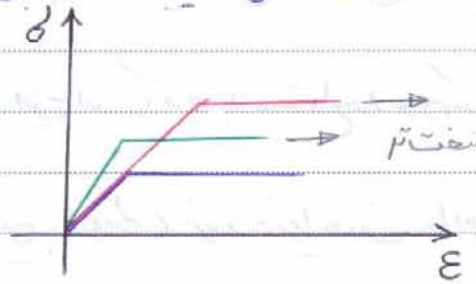
B: σ_y تنش تسلیم (yield stress)

بحث نحنی دنری را فقط در خط اول داریم چون وابسته به E می باشد

سفتی (سفتی دنری) (Flexibility)

وابسته به E می باشد (همانند شیب خط) در واقعیت مثلاً برای فولاد بسیار E بزرگ است و خط او به تر نسبت به 90° می باشد ← مصالح سخت‌تر ⇒ E↑

مقاومت مصالح رابطه مستقیم با σ دارد ولی سفتی با شیب خط (برای عامی مصالح صادق است)



استاد:دکتر امیر عباس فاطمی گرداورنده:پوریا کاوه ئی

مقاومت (strength) وابسته به حداکثر تنش (σ_{MAX}) در ناحیه الاستیک یا پلاستیک دارد.

شکل پذیری (Ductility)

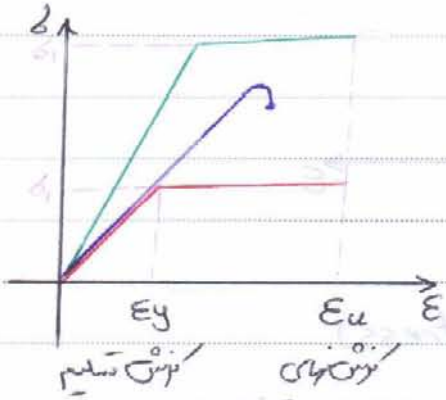
آلیاژ : ترد ترین نیز می باشد.

- هر دو دارای مدول یانگ یا E یکسان دارند

- دارای مقاومت بیشتری می باشد چون $\sigma_2 > \sigma_1$

- مصالح ترد فقط دارای شکل پذیری بیشتری است

- دارای مقاومت و سختی بیشتری می باشد ولی شکل پذیری برابر با صفر دارد



هرچه شکل پذیری بیشتر μ_l ↑

μ_l (شکل پذیری) $= \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_y}$

هرچه کرنش بیشتر باشد ← شکل پذیری بیشتر است (شکل پذیرتر)

ضریب اطمینان Factor of safty (F.S.)

ضریب اطمینان در هر مصالحی با توجه به هدف طراحی تعریف و معین می شود

هر جسم تحت اثر بارگذاری به یک تنش مشخص به گسیختگی می رسد (σ_u تنش نهایی)

هدف یک طراحی این است که ابعاد مقطع را برای یک عضو به نوعی تعیین کند که مصالح هیچ گاه تنش نهایی (σ_u) نرسد زیرا هدف طراحی یک قطعه این نیست که آنقدر

برعضله بار وارد شود که به کشیدگی میرسد، در این راستا تنش با نام تنش مجاز که با σ_a نمایش

می دهند (allowable stress) تعریف می شود که برابر است با

$$\sigma_{all} = \frac{\sigma_u}{F.S.} \quad \text{(باید عددی بزرگتر از یک باشد)}$$

ضریب اطمینان تابع عوامل زیر می باشد

1- تغییرات خواص مصالح در حین اجرا برخلاف آنچه در طراحی در نظر گرفته شده است

2- تغییرات (دفعات بارگذاری) و همچنین تنش های حاصل به دریل ها با به وجود بیاید (عبور بیار خودرو و ...)

3- بارگذاری های اتفاقی که در طراحی در نظر گرفته نشده است

4- عدم اطمینان نسبت به روش های تحلیل سازه به علت فرضیات ساده کننده مهندسی که در تحلیل ها

در نظر گرفته شده است و ممکن است نوع پایداری که در طراحی استفاده شده است دقیق یا واقعی نباشد

5- میزان اهمیت عضو و اینکه عضو اصلی یا فرعی باشد (عضو اصلی منظور عضوی است که پایداری

سازه وابسته به آن است در حالی که اعضایی که نقش زیادی در پایداری کلی سازه ندارند، اعضا فرعی

خواهند بود پس برای طراحی اعضای اصلی باید ضریب اطمینان بزرگتری در نظر گرفته شود

Shahab

گرداورنده:پوریا کاوه ئی
استاد:دکتر امیر عباس فاطمی

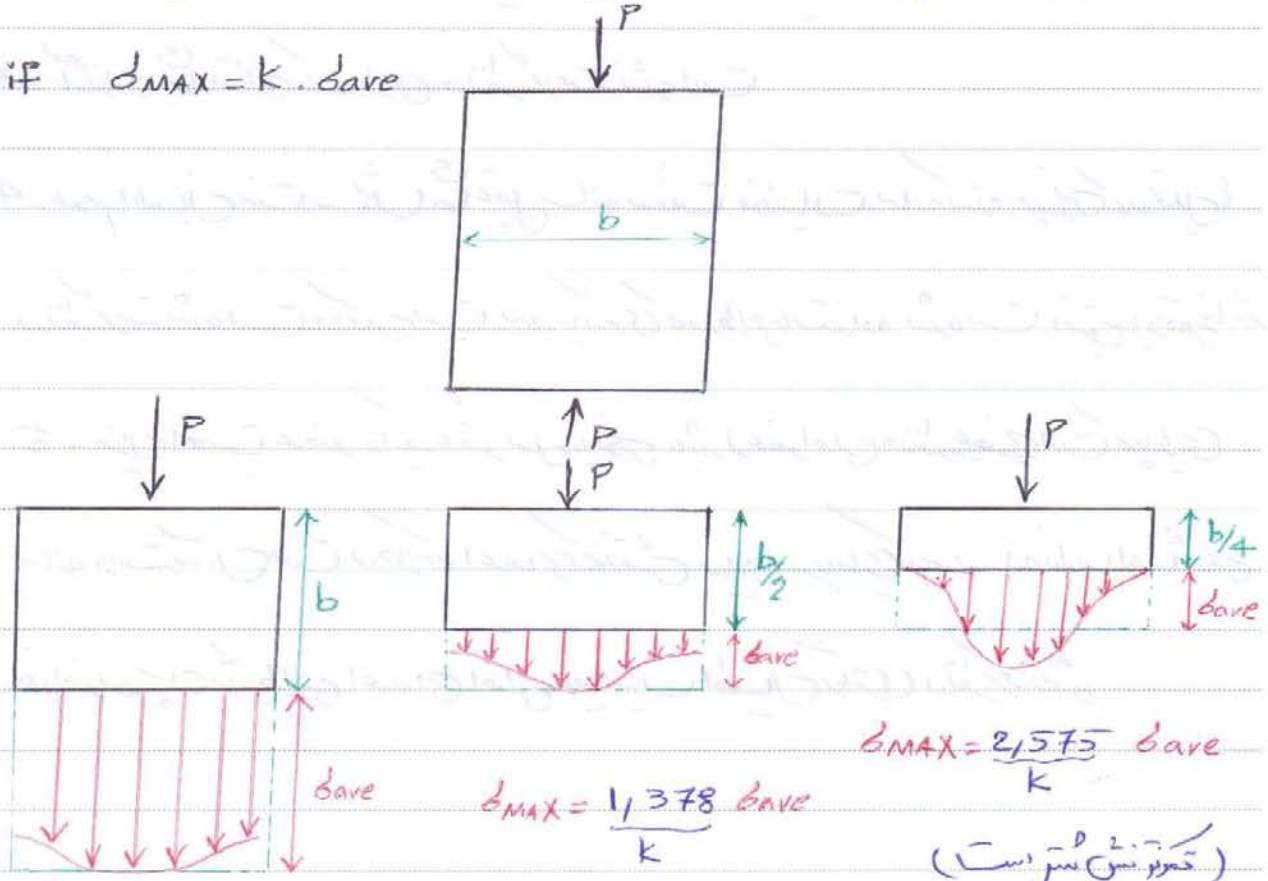
تمرکز تنش

همیشه در طراحی ها سعی می شود از تمرکز تنش در اعضا جلوگیری گردد.

براساس شکل های زیر مشاهده می شود که با دور شدن از محل تاثیر نیرو، عملاً در امتداد قائم از ارتفاع تنش حداکثر کم می شود بطوری که در مقطعی به فاصله ی عرض مقطع از محل تاثیر نیرو توزیع تنش تقریباً بصورت یکنواخت درمی آید.

برای محاسبه ی تنش حداکثر (σ_{MAX}) ابتدا با استفاده از روابط مقاومتی مانند $\sigma = \frac{P}{A}$ تنش متوسط (σ_{ave}) بدست می آوریم و سپس آن را در ضریب تمرکز تنش (k) ضرب می کنیم.

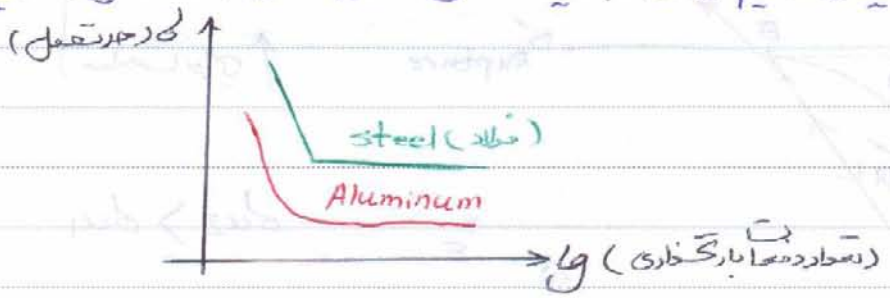
if $\sigma_{MAX} = k \cdot \sigma_{ave}$



آسیب پذیری خستگی

اگر ماده‌ای در حد الاستیک بارگذاری شود و در همین محدوده نیز باربرداری شود، هیچ گونه تنش دیده به منفر می‌رسد و این حالت وقتی صحیح است که تعداد دفعاتی که این کار را انجام می‌دهیم کم باشد، اما اگر تعداد دفعات بارگذاری و باربرداری را افزایش دهیم مصالح در تنشی کمتر از تنش تسلیم می‌شکند (دفعات خستگی E در تعداد تنش - کرنش)

در این حالت در لحظه‌ی شکست رفتار مصالح شکل زیر مثل رفتار مصالح ترد می‌شود، اصطلاحاً این پدیده را خستگی می‌نامند و برای مصالح مختلف نمودارهای مرجع، که گاهی تعداد دفعات بارگذاری و تنش تسلیم می‌شود، بر این اساس منحنی جدی (حد تحمل) تعریف می‌شود



سخت شدگی کرنشی (strain hardening)

عضوی تحت اثر بار محوری آنقدر تحت بار قرار می‌گیرد، تا از حد الاستیک عبور کرده تغییر دارد ناحیه پلاستیک گردد، قبل از اینکه در اثر ادامه افزایش بارگیری ایجاد شود بار را برمی‌داریم

گرداورنده:پوریا کاوه نی
استاد:دکتر امیر عباس فاطمی

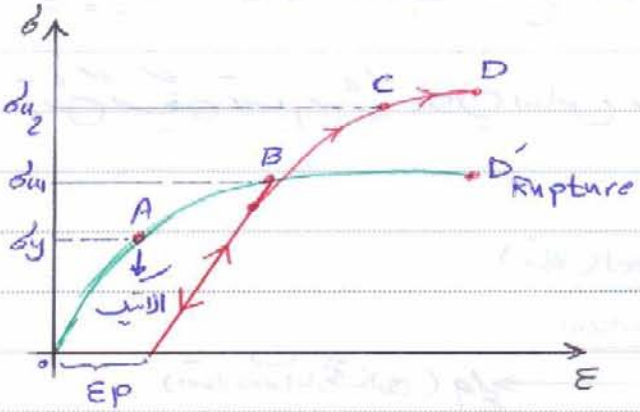
بنابراین منحنی در امتداد خطی مستقیم موازی ناحیه الاستیک بازگشت می‌کند.

حال اگر مجدداً از همان نقطه برخورد با محور تنش بارگذاری را آغاز نمایم، منحنی در نزدیکی نقطه B منحرف می‌شود و نقطه‌ای تغییر شکل کمتری دارد جابجا می‌شود و نهایتاً در نقطه‌ای شیب خواهد شد

با مشاهده منحنی زیر به دو نکته مهم پی می‌بریم:

① وجود کرنش پسماند موجب تحمل تنش کمتری برای عضو می‌گردد

② از قابلیت شکل پذیری عضو کاسته می‌شود و اصطلاحاً موجب ترد تر شدن عضو می‌گردد.



شکل پذیری ↓
مقاومت نهایی ↑
} سخت شدگی کرنشی

$\sigma_{u2} > \sigma_{u1}$

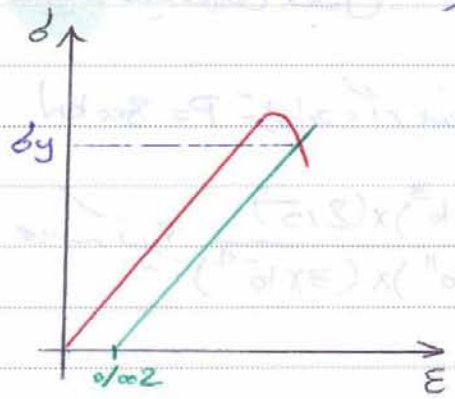
روش OFFSET

برای یافتن تنش حاصل از جاری شدن در مصالح ترد، از این روش استفاده می‌شود. بر این ترتیب

کرنش معادل 0.2٪ = کرنش خطی موازی ناحیه الاستیک خطی

از کرنش 0.2٪ رسم می‌شود که در نتیجه تنش محل تقاطع این خط و منحنی اصلی

تنش-کرنش واقعی تسلیم (عاری شدن) در نظر می‌گیرند



(برای مصالح نرد که منحنی yield ندارد

از این روش استفاده می‌شود)

مسائل نامعین استاتیکی

اگر در سازه‌ای تعداد مجهولات سازه، که همان نیروهای تکیه‌گاهی یا نیروهای داخلی اعضای باشد

از تعداد معادلات تعادل بیشتر باشد، سازه اصطلاحاً نامعین استاتیکی (hyperstatic)

گوییم.

درجات نامعینی برابر است با: اختلاف میان تعداد مجهولات و معادلات

در سازه‌های مستوی (صفحه‌ای) ۳ معادله تعادل و در فضا ۶ معادله‌ی تعادل داریم

که به کمک این معادلات و با استفاده از اصل جمع آثار قوا می‌توان مجهولات را محاسبه کرد.

مثال - طول میله‌ای 2m می‌باشد، تغییر طول میله در اثر باری برابر 0.4mm می‌باشد

کرنش محوری میله را محاسبه کنید؟

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{0.4}{2000} = 0/0002$$

استاد:دکتر امیر عباس فاطمی گرداورنده:پوریا کاوه نی

مثال - میله فولادی بطول 2/5 m با سطح مقطع $3 \times 10^{-4}\ m^2$ تحت بارمحوری $P = 800\ kN$ قرارداد، اگر ضریب الاستیسیته میله برابر 200 Gpa باشد، تغییر طول میله را محاسبه کنید؟

$A = 3 \times 10^{-4}$

$P = 800\ kN$

$E = 200\ Gpa$

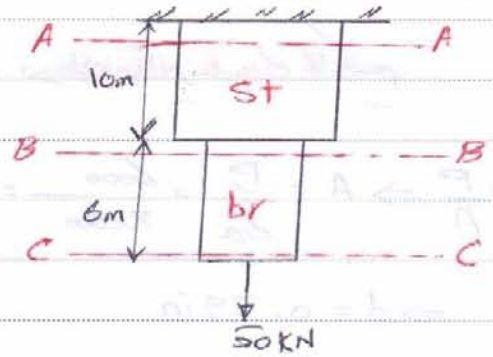
$$\delta = \frac{P.L}{E.A} = \frac{(800 \times 10^3) \times (2/5)}{(2 \times 10^{11}) \times (3 \times 10^{-4})}$$

مثال - یک استوانه توپر به قطر 50 mm و طول 900 mm تحت اثر نیروی کششی 120 kN قرار دارد. قسمتی از این استوانه را بطول L_2 از جنس فولاد و قسمت دیگر این استوانه بطول L_1 از جنس Al می باشد، طول های L_1 و L_2 را به گونه ای تعیین کنید که افزایش طول میله در دو بخش یکسان باشد؟

$$\frac{E_{st}}{E_{Al}} = \frac{2}{0/7}$$ نسبت ضرایب الاستیسیته فولاد به Al

مثال - دو میله‌ی متصل به هم بار 50kN را تحمل می‌کنند. میله‌ی فولادی از فولاد با وزن مخصوص $\gamma_{st} = 7.7 \times 10^4 \ N/m^3$ و طول 10m و با سطح مقطع $6000 \ mm^2$ و میله‌ی برنجی با وزن مخصوص $\gamma_{br} = 8.25 \times 10^4 \ N/m^3$ و طول 6m می‌باشد. تنش محوری حداکثر را در کدام یک از میله‌ها می‌یابید؟ و سطح مقطع $5000 \ mm^2$

حل: باید وزن میله‌ها را هم در نظر گرفت



تنش در مقطع B-B از تنش در مقطع C-C می‌باشد زیرا علاوه بر نیروی 50kN وزن میله نیز باید تحمل کند.

متغیر از آنجا که سطح مقطع میله ثابت است.

$$A_{st} = 6000 \ mm^2 = 6 \times 10^{-3} \ m^2$$
$$A_{br} = 5000 \ mm^2 = 5 \times 10^{-3} \ m^2$$

$$W_{st} = 6 \times 10^{-3} \times 10 \times 7.7 \times 10^4 = 462 \ N$$
$$W_{br} = 5 \times 10^{-3} \times 6 \times 8.25 \times 10^4 = 247.5 \ N$$

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

(st) A-A:
$$\sigma_{A-A} = \frac{4.62 \times 10^3 + 2.475 \times 10^3 + 50 \times 10^3}{6 \times 10^{-3}} = 2.5 \ MPa$$

(br) B-B:
$$\sigma_{B-B} = \frac{2.475 \times 10^3 + 50 \times 10^3}{5 \times 10^{-3}} = 10.5 \ \frac{MPa}{N/mm^2}$$

پس σ_{MAX} در مقطع B-B در میله‌ی برنجی می‌باشد

مثال - عضوی فولادی با مقطع دایره طوری تعیین کنید که بتواند نیروی کششی 6000 lb را تحمل نماید

با فرض اینکه تنش مجاز برابر با $22000 \frac{lb}{in^2}$ باشد، فرض شود هریک از اعضا افزایش قطری

معادل با $\frac{1}{16}$ in نسبت به عضو مشابه بارتر از خود داده، ضریب اطمینان طراحی را پیدا

کرده، با در نظر گرفتن اینکه تنش تسلیم این فولاد $36000 \frac{lb}{in^2}$ باشد؟

حل:

$$\sigma_y = 36000 \frac{lb}{in^2} \qquad F.S = \frac{\sigma_y}{\sigma_a} = \frac{36000}{22000} = 1.64$$

$$\Delta d = \frac{1}{16} in$$

در طراحی باید با σ_a کار کنیم

$$\sigma_a = \frac{P}{A} \Rightarrow A = \frac{P}{\sigma_a} = \frac{6000}{22000} = 0.273 in^2 \qquad A = \frac{\pi d^2}{4} \text{ (مقطع دایره)}$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow 0.273 = \frac{3.14 d^2}{4} \Rightarrow d = 0.59 in$$

بنابر فرض اگر قطر $\frac{1}{16}$ افزایش یابد $\sigma_a = ?$ $A = \frac{\pi (d + d/16)^2}{4}$

با افزایش $\frac{1}{16}$ قطر بر قطر عضو فولادی با مقطع دایره سطح مقطع عضو افزایش یافته و در نتیجه

تنش محوری در عضو کاهش می‌یابد که ($\sigma = 19557 \frac{lb}{in^2}$) با تقسیم σ_a (36000)

بر 19557 ضریب اطمینانی معادل 1.84 بدست می‌آید که بیشتر از ضریب اطمینان

اولیه که برابر با 1.64 بود می‌باشد بنابراین قابل قبول است.

استاد: دکتر امیر عباس فاطمی گرداورنده: پوریا کاوه ئی

مثال - میله‌ای با جنس Al بطول 0/8m و ضریب الاستیک 70Gpa تحت اثر نیروی محوری 36kN قرار گرفته است. اگر تنش محوری مجاز برای میله 70Mpa باشد و تغییر طول مجاز 0/65mm باشد، ابعاد مقطع این میله را طراحی نمایید؟

$L = 0/8m$

$E = 70Gpa$

$P = 36KN$

$\sigma_a = 70Mpa$

$\Delta L_a = 0/65mm$

حل:

$\sigma_a = \frac{P}{A} \Rightarrow A = \frac{P}{\sigma_a} = \frac{36 \times 10^3}{70 \times 10^6} = 0/5 A \times 10^{-3}\ m^2$

سطح مقطع با توجه به تنش مجاز

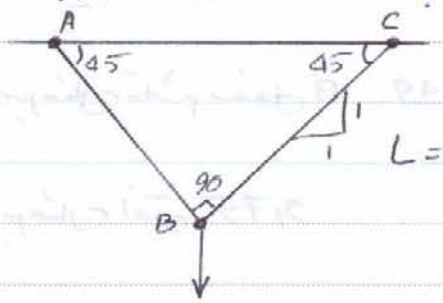
A بالا سطح مقطعی است که در اثر σ_a بوجود آمده

$0/65mm > \delta = \frac{P.L}{E.A} = \frac{(36 \times 10^3)(0/8)}{(70 \times 10^9)A} \Rightarrow A = 0/633 \times 10^{-3}\ m^2$

سطح مقطع با توجه به تغییر طول مجاز

در این مورد A بیشتر را انتخاب می‌کنیم زیرا رابطه $\sigma_a = \frac{P}{A}$ هم نیز، ما به تنش کمتری از تنش مجاز دست خواهیم یافت.

مثال - میله‌های مولادی AB و BC چه سطح مقطعی داشته باشند تا تنش عمودی ایجاد شده در آنها از σ_a (200Mpa) تجاوز نشود. اگر ضریب الاستیک برابر با 200Gpa فرض شود تغییر طول مکان مفصل B را با توجه به شکل زیر محاسبه نمایید؟



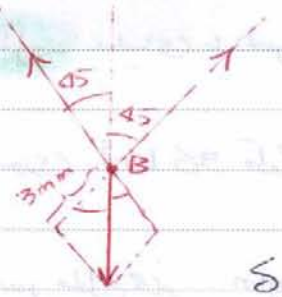
حل:

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F\cos 45 + F\cos 45 = 475KN$

$2F\frac{\sqrt{2}}{2} = 475 \Rightarrow F = \frac{475}{\sqrt{2}} \Rightarrow F = 336\ kN$

نیرو در هریک از میله‌ها

استاد:دکتر امیر عباس فاطمی گرداورنده:پوریا کاوه نی



$$\sigma_a = \frac{F}{A} \Rightarrow 200\times10^6 = \frac{336\times10^3}{A}$$

$$\Rightarrow A = 1680\ mm^2$$ سطح مقطع مورد نیاز برای تنش مجاز

$$\delta_{BC} = \delta_{AB} = \frac{F.L}{E.A} = \frac{(336\times10^3)(3)}{(200\times10^9)(1168\times10^{-3})} = 0/003m = 3mm$$

حال باید بررسی کنیم B چقدر پایین آمده

$$\cos 45 = \frac{\delta_{AB}\ (\text{طول محلول})}{\delta_B\ (\text{وتر})} \Rightarrow \delta_B = 4/24mm$$

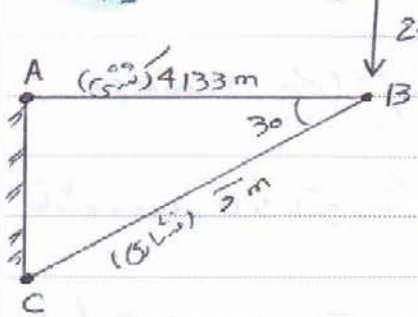
مثال - تعدادی فولاد AB و BC با اتصال مفصلی به یکدیگر و به تکیه‌گاه وصل شده‌اند.

نیروی 250 kN مطابق شکل زیر بر سازه وارد شده است. در صورتی که تنش تسلیم برابر 350 Mpa

باشد و ضریب اطمینان در فشار برابر 3/5 و در کشش برابر 2 باشد، سطح مقطع میله‌ها را

تعیین نمایید؟ تغییر مکان افقی و قائم مفصل B را محاسبه نمایید در صورتی که مدول

الاستیک برابر 200 Gpa باشد؟



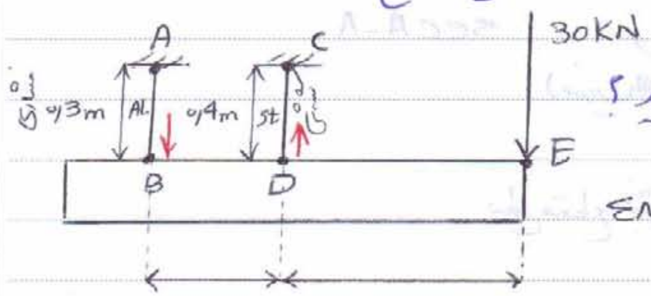
تغییر مکان قائم مفصل B 11/49

تغییر مکان افقی 3/75

سطح مقطع برای عضو BC برابر $5000\ mm^2$ و برای AB $2500\ mm^2$

مثال- جسم صلب BDE به وسیله‌ی دو میله‌ی AB و CD به تکیه‌گاه متصل شده است.

میله‌ی AB از جنس Al با ضریب الاستیک 70 Gpa و سطح مقطع $500 mm^2$ و میله‌ی CD از جنس فولاد با ضریب الاستیک 200 Gpa و سطح مقطع $600 mm^2$ می‌باشد.



جابجایی نقاط B و D و E را مشخص نمایید؟

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow 30 \times 0.6 = F_{CD} \times 0.2$$

$$\Rightarrow F_{CD} = \frac{30 \times 0.6}{0.2} = +90\ kN$$ کششی

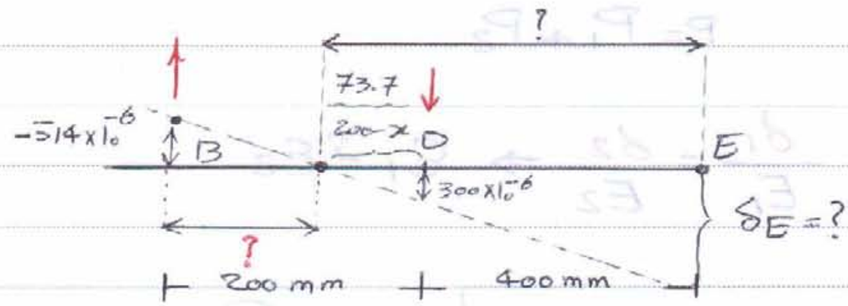
$$\Sigma M_D = 0 \Rightarrow 30 \times 0.4 = -F_{AB} \times 0.2$$

$$\Rightarrow F_{AB} = \frac{30 \times 0.4}{0.2} = -60\ kN$$ فشاری

عضو AB فشاری ⇐ کاهش طول دارد: $\delta_{AB} = \frac{(-60 \times 10^3)(0.3)}{(70 \times 10^9)(500 \times 10^{-6})} = -514 \times 10^{-6}\ m$

(E_{AL}, $A(m^2)$)

عضو CD کششی ⇐ افزایش طول دارد: $\delta_{CD} = \frac{(90 \times 10^3)(0.4)}{(200 \times 10^9)(600 \times 10^{-6})} = 300 \times 10^{-6}\ m$

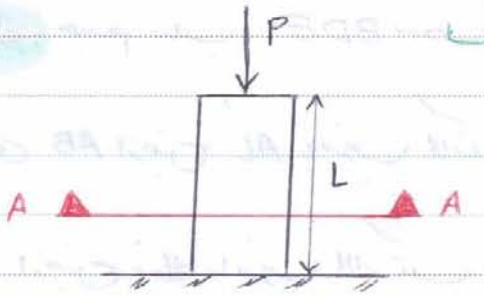


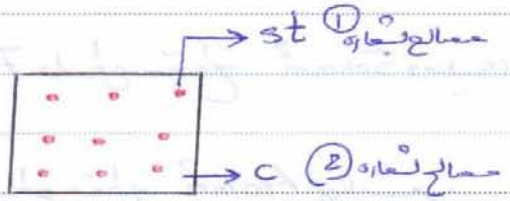
$$\frac{x}{-0.514} = \frac{200 - x}{0.3} \Rightarrow x = 126.3\ mm$$

$$\delta E = \frac{73.7}{473.7} = \frac{0.3}{\delta E} \Rightarrow \delta E = 1.928\ mm$$

استاد:دکتر امیر عباس فاطمی
گردآورنده:پوریا کاوه نی

اعضای محوری متشکل از دو مصالح مختلف





SECCA-A

$E_1 > E_2$ (ضریب الاستیسیته st) (ضریب الاستیسیته بتن)

$A_1 = \Sigma A_i$ سطح مقطع بخش فولادی (مثلاً آرماتور)

$A_2 =$ مساحت بخش بتنی

$P_1 =$ سهم مصالح شماره ① از نیروی P

$P_2 =$ سهم مصالح شماره ② از نیروی P

در اکثر موارد مصالح داریم:

$$\delta_1 = \delta_2 \Rightarrow \frac{P_1 \cdot L}{E_1 \cdot A_1} = \frac{P_2 \cdot L}{E_2 \cdot A_2}$$

$$P = P_1 + P_2$$

$$\frac{\delta_1}{E_1} = \frac{\delta_2}{E_2} \Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

$$\boxed{\delta_1 E_2 = \delta_2 E_1}$$ رابطه ی شماره (I)

حال از رابطه‌ی $P = P_1 + P_2$

$$P = \sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2$$

طرفین رابطه فوق را در E_1 ضرب می‌کنیم:

$$P.E_1 = \sigma_1 A_1 E_1 + \underbrace{\sigma_2 A_2 E_1}_{A_2 \sigma_1 E_2}$$

$$P.E_1 = \sigma_1 (A_1 E_1 + A_2 E_2) \Rightarrow \sigma_1 = \frac{P.E_1}{A_1 E_1 + A_2 E_2}$$

$$\sigma_2 = \frac{P.E_2}{A_1 E_1 + A_2 E_2}$$

بصورت مشابه داریم:

$n = \frac{E_1}{E_2}$ نسبت مدول الاستیسیته st به تن (مدول الاستیسیته سخت‌تر به نرم‌تر) برای مواد و تن حدود 10 است.

بازنویسی:

اگر از E_1 فاکتور بگیریم

$$\sigma_1 = \frac{P.E_1}{E_1 (A_1 + \frac{A_2}{n})}$$

$$\sigma_2 = \frac{P.E_2}{E_2 (A_1 . n + A_2)}$$

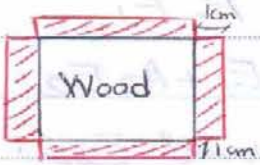
$$\boxed{\sigma_1 = n \sigma_2}$$

گرداورنده:پوریا کاوه نی
استاد:دکتر امیر عباس فاطمی

مثال: ستون چوبی با مقطع مربع با ابعاد $20 \times 20\ cm^2$ توسط مهفات فولادی با ضخامت 1cm مطابق شکل زیر تقویت شده است. بار محوری 70ton بر این ستون وارد گردیده است، مدول ارتجاعی فولاد و چوب به ترتیب $2 \times 10^6\ \frac{kg}{cm^2}$ و $10^5\ \frac{kg}{cm^2}$ است.

الف) تنش عمود در فولاد و چوب را تحت اثر بار محوری محاسبه کنید؟

ب) حداکثر بار محوری که می‌تواند تحمل کند؟ اگر تنش مجاز فولاد و چوب به ترتیب $1350\ \frac{kg}{cm^2}$ و $80\ \frac{kg}{cm^2}$ باشد.



حداکثر چه فشاری می‌تواند باشد؟ (P_{max})

① فولاد ② چوب

① فولاد مصالح تقویت ② چوب مصالح تقویت

$$\sigma_{\text{فولاد}} = \frac{P}{A_1 + \frac{A_2}{n}} \qquad n = \frac{E_1}{E_2} = 20$$

$$\Rightarrow \frac{70 \times 10^3}{80 + \frac{400}{20}} = \frac{70 \times 10^3}{80+20} = 700\ \frac{kg}{cm^2}$$

$$\sigma_{\text{چوب}} = \frac{P}{nA_1 + A_2} = \frac{70 \times 10^3}{20 \times 80 + 400} = 35\ \frac{kg}{cm^2}$$

ب) تنش در فولاد به مقدار مجاز برسد

$$\sigma_1 = \sigma_{st_a} = 1350\ \frac{kg}{cm^2}$$

$$1350 = \frac{P}{80+20} \Rightarrow P = 135000\ kg = 135\ ton$$

Shahab

استاد: دکتر امیر عباس فاطمی گرداورنده: پوریا کاوه فی

② تنش در چوب به مقدار مجاز رسد

$$\sigma_z = 80 = \frac{P}{2000} \Rightarrow P = 160000\ kg = 160\ ton$$

تحمل این ستون 135 ton می باشد (اگر فشار وارد کنیم تا 135 ton مواد جاری می شود

پس چوب هم جاری می شود و به مقدار 160 ton نمی رسد)

مثال - یک ستون کوتاه بتن مسلح با مقطع مربع با ابعاد $30 \times 30\ cm^2$ باید بارگذاری 68 ton را تحمل نماید. اگر تنش مجاز بتن برابر با $60\ kg/cm^2$ و تنش مجاز فولاد $1350\ \frac{kg}{cm^2}$ باشد،

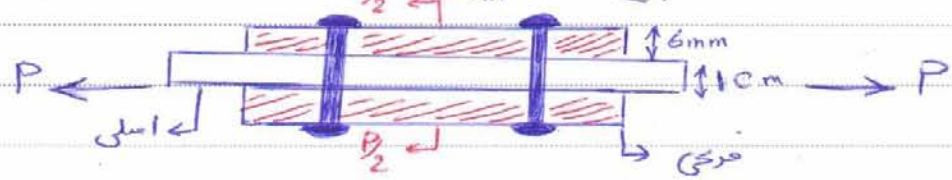
تعداد میلگردهای لازم به قطر 16mm را که باید در سطح مقطع ستون تعبیه شود را محاسبه نمایید. با فرض اینکه $E_c = 1.4 \times 10^5\ \frac{kg}{cm^2}$ ، $E_{st} = 2.1 \times 10^6\ \frac{kg}{cm^2}$

سپس میلگردها را انتخاب می کنیم سپس تنش را تقسیم بر میلگردها می کنیم تا مقدار مورد نظر شود.

مثال - در اتصال شکل زیر تعداد پرچ های لازم در هر طرف را محاسبه نمایید اگر قطر پرچ ها 18mm

ضخامت صفحات اصلی 1cm و ضخامت تسمه اتصال 6mm باشد. نیروی P برابر

15 ton و تنش مجاز برشی پرچ ها برابر $1000\ \frac{kg}{cm^2}$ و تنش مجاز کوبیدگی برابر $2500\ \frac{kg}{cm^2}$ در نظر گرفته شود؟



استاد: دکتر امیر عباس فاطمی گرداورنده: پوریا کاوه نی

حل: تنش کهرکی در مقطع اصلی:

$P = 15000\ kg$

پیچ $d = 18\ mm$

$\tau_a = 1000\ \frac{kg}{cm^2}$

$\sigma_a = 2500\ \frac{kg}{cm^2}$

$\sigma_p = \frac{P}{A} = \frac{15000}{n(1.8 \times 1)} \Rightarrow \frac{15000}{2500 \times 1.8 \times 1} \Rightarrow \boxed{n = 4}$

σ_p: تنش کهرکی در مقطع اصلی

σ_a: تنش مجاز

P: نیروی وارد

A: سطح مقطع اصلی

n: تعداد پیچ‌های لازم

1.8: قطر پیچ

1: ارتفاع مقطع اصلی

تعداد پیچ: 4

کنترل تنش کهرکی در مقطع فرضی (تقویتی)

به دلیل $\frac{P}{2}$

$2500 = \frac{15000/2}{n \times 1.8 \times 0.6} \Rightarrow n = \frac{7500}{2500 \times 1.8 \times 0.6} \Rightarrow \boxed{n = 3}$

تعداد پیچ‌ها

کنترل تنش برشی در پیچ: تعادل به برش پیچ وارد

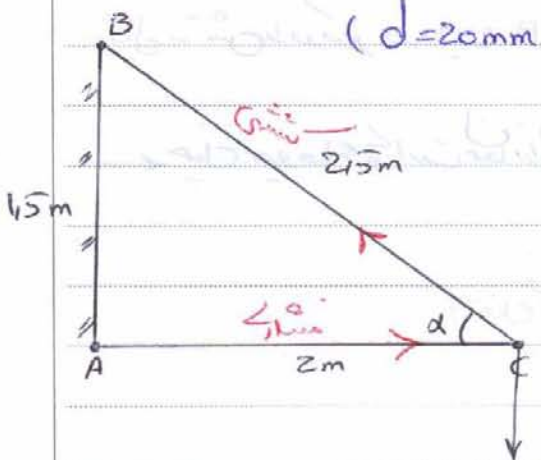
$\tau_a = \frac{P/2}{n \times (\frac{\pi d^2}{4})} \Rightarrow 1000 = \frac{7500}{n(5.14 \times \frac{1.8^2}{4})}$

تعداد پیچ ← n

$\Rightarrow \boxed{n = 3}$ تعداد پیچ‌ها

باید تعداد پیچ‌ها را حساب کرد بنابراین 4 عدد پیچ نیاز داریم

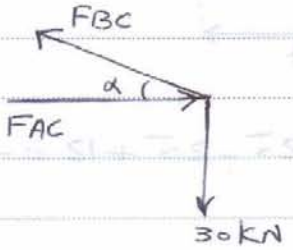
مثال - تنش اعضا را حساب کنید؟ (مقطع اعضا دایره ای $d=20mm$)



حل:

$$\sin\alpha = \frac{1.5}{2.5} = \frac{3}{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{2.5} = \frac{4}{5}$$



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{BC} \times \sin\alpha = 30\,kN$$

$$F_{BC} = \frac{30}{\sin\alpha} = \frac{30}{\frac{3}{5}} = \frac{5\times 30}{3} = 50\,kN$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{AC} = -F_{BC}\cos\alpha$$

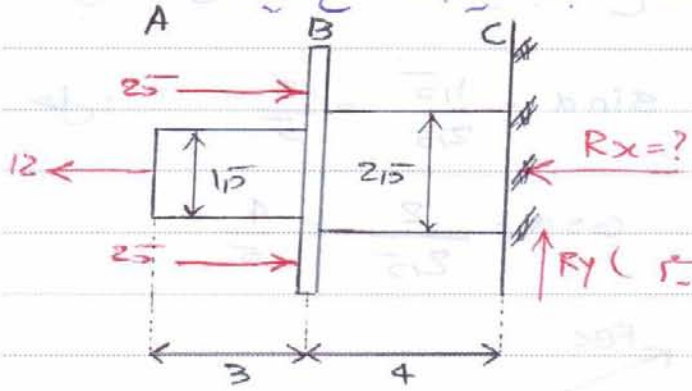
$$F_{AC} = 50 \times \frac{4}{5} = -40\,kN$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \begin{cases} \sigma_{BC} = \dfrac{50\times 10^3}{314} = 159\ N/mm^2 \\ \sigma_{AC} = \dfrac{-40\times 10^3}{314} = -127\ N/mm^2 \end{cases}$$

$$A_{\substack{BC\\AC}} = \pi r^2 = 3.14 \times 10^2 = 314\ mm^2$$

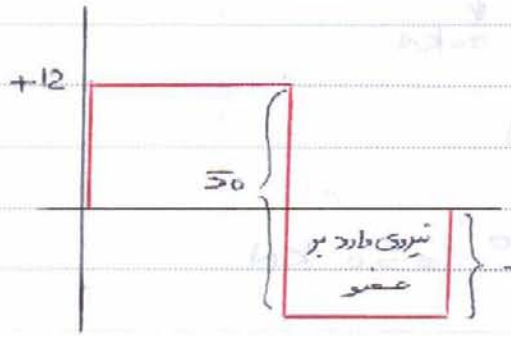
استاد:دکتر امیر عباس فاطمی گرداورنده:پوریا کاوه نی

مثال - تنش را در مقاطع دو میله‌ی AB و BC محاسبه نمایید؟ (مقطع داریم)



حل: $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -25 - 25 + 12 = -R_x \Rightarrow R_x = -38$

$R_x = 38$ تعیین علامت



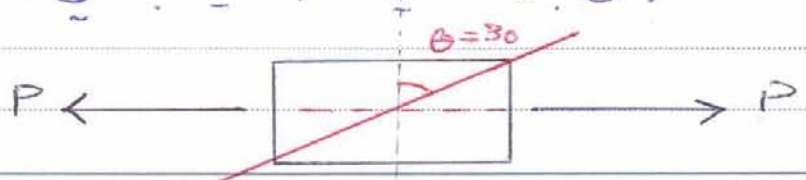
$\sigma = \frac{P}{A}$

$\sigma_{AB} = \frac{12 \times 10^3}{\pi (\frac{1.5}{4})^2}$

$\sigma_{BC} = \frac{-38 \times 10^3}{\pi (\frac{2.5}{4})^2}$

مثال - میله‌ای با سطح مقطع $850\ mm^2$ مطابق شکل تحت اثر نیروی کششی 60kN قرار گرفته است، تنش عمودی و برشی را روی صفحه‌ای با زاویه‌ی 30 درجه نسبت به مقطع محور طولی میله را محاسبه نمایید؟

حداکثر تنش عمودی و حداکثر تنش برشی را در میله محاسبه نمایید و بیان این دو را شرح دهید؟



استاد:دکتر امیر عباس فاطمی
گرداورنده:پوریا کاوه ئی

حل:

$$\sigma_\theta = \frac{P}{A}\cos^2\theta = \frac{60\times10^3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{850}$$

$$\tau_\theta = \frac{P}{2A}\sin 2\theta = \frac{60\times10^3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2\times 850}$$

σ_x = تنش محوری در راستای میله $= \frac{60\times10^3}{850}$

چون در راستای محور بدنی $\theta = 0$، $\cos$ ماکزیمم است پس $\sigma_{max} = \sigma_\theta$

$$\tau_{max} = \frac{P}{2A} = \frac{60\times10^3}{2(850)}$$

$\theta = 45$ ✓

$\sin 2\theta = 1$

صفحاتی که دارای بیشترین و کمترین تنش های عمودی هستند، صفحات اصلی نامیده می‌شوند

در صفحات اصلی تنش های برشی برابر صفر خواهند بود

گرداورنده:پوریا کاوه ئی

استاد:دکتر امیر عباس فاطمی