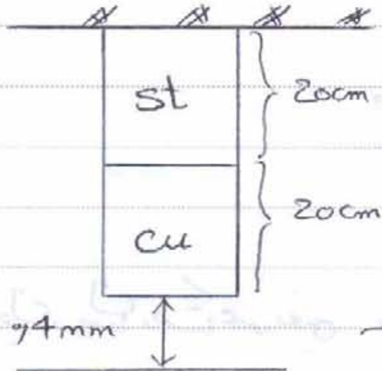
مثال- فاصله‌ی میله‌ی شکل زیر تا صفحه صلب پایین آن برابر 0/4mm می‌باشد. دما در این حالت 15- درجه سانتی‌گراد است، اگر دما تا 85 درجه سانتی‌گراد افزایش یابد تنش ایجاد شده در میله را محاسبه نمایید؟



حل: در برخی از سوال‌ها ابتدا باید مقدار افزایش طول (انبساط حرارتی) را محاسبه نمود و توجه کرد که آیا اصلاً میله به صفحه صلب می‌رسد یا خیر. درصورتی که میله به صفحه صلب نرسد هیچ گونه تنشی در میله ایجاد نمی‌شود (اگر مسئله حل شود جواب صفر است)

$\Delta T = T_2 - T_1 = 85-(-15) = 100^\circ$

$\alpha_{cu} = 165 \times 10^{-7} \frac{1}{^\circ C}$, $\alpha_{st} = 125 \times 10^{-7} \frac{1}{^\circ C}$

$E_{cu} = 1 \times 10^{6} \frac{kg}{cm^2}$, $E_{st} = 2 \times 10^{6} \frac{kg}{cm^2}$

افزایش حرارتی طول $= \alpha \cdot L \cdot \Delta T$

for st $= 125 \times 10^{-7} \times 20 \times 100$

for cu $= 165 \times 10^{-7} \times 20 \times 100$

جمع تغییر طول‌ها $\delta_{st} + \delta_{cu} = 0/58\ mm$

$0/58 - 0/4 = 0/18\ mm$ تغییر طولی که ایجاد تنش در میله می‌کند

تغییر طول در میله‌ی فولادی در اثر نیروی داخلی آن

" " " مسی " " "

$$\delta_{fst} + \delta_{fcu} = 0/18\,mm = 0/018\,cm$$

در اثر نیروی داخلی

$$\frac{P \times 20}{(2\times10^6)(A)} + \frac{P \times 20}{(10^6)(A)} = 0/018$$

$$\underbrace{\frac{P}{A}}_{\sigma}\left(\frac{20}{2\times10^6} + \frac{20}{10^6}\right) = 0/018 \Rightarrow \sigma = \dots$$

تنش فشاری، در اثر گرم شدن فشار می‌آورد

پیچش (Torsion)

تنش در محورها:

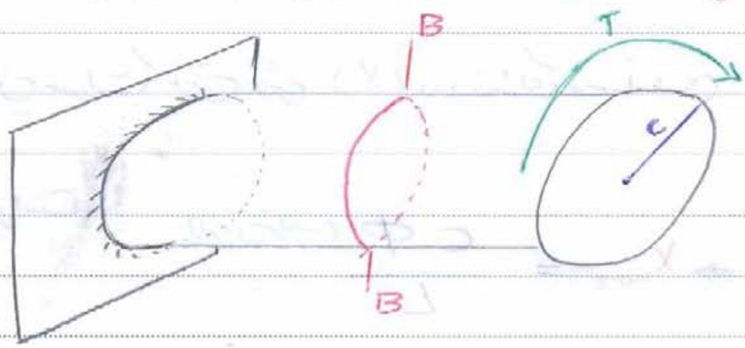
از مهمترین کاربردهای اعضای تحت پیچش می‌توان به محورهای انتقال نیرو مانند میل گاردان اشاره کرد

برای اعضای تحت پیچش مقاطع دایروی توپر یا توخالی مناسب تر می باشند؛ زیرا این مقاطع در پیچش بصورت مسطح باقی می‌مانند و اعوجاج پیدا نمی‌کند. منظور سطح مقطع عضو است که دچار پیچش (اعوجاج) نمی‌گردد

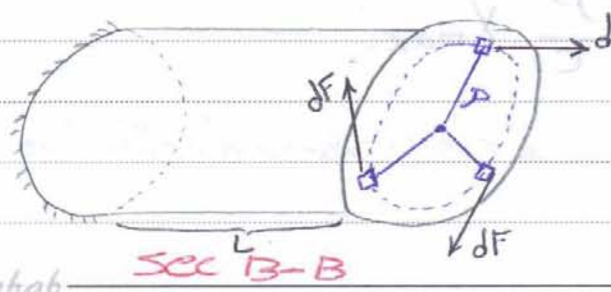
بر اساس این خاصیت نتیجه می‌شود که توزیع کرنش و تنش برشی بصورت خطی می باشد.

در شکل زیر میله‌ای تحت اثر پیچش T می باشد. با در نظر گرفتن تعادل میله از مقطع دلخواه B مقطعی عمود بر محور این میله می زنیم

در مقطع B باید برآیند گشتاور نیروهای dF برابر با T باشد پس خواهیم داشت:



c: شعاع مقطع دایروی



dF (جزء تغییرات نیرو)

$\rho_{MAX} = C$

$$\int \rho \cdot dF$$

تنش برشی

$$dF = \tau \cdot dA$$

$$dA = 2\pi \rho \cdot d\rho$$

محیط دایره

$$\boxed{\begin{array}{l} \tau = F/A \\ \to F = \tau \cdot A \\ dF = \tau \cdot dA \end{array}}$$

$$T = \int^{c} \rho \cdot \tau \cdot 2\pi \rho \cdot d\rho$$

$$T = 2\pi \int^{c} \tau \rho^{2} \cdot d\rho$$

نکته: بهترین مقطع برای پیچش مقاطع دایره‌ای شکل می‌باشند که کاملاً نسبت به نقطه‌ی مرکزی تقارن دارند. پس از دایره بهترین مقطع مربع خواهد بود که خواص تقارنی بیشتری نسبت به مستطیل دارد. بر این اساس بهترین شکل برای ستون‌ها در ساختمانها دایره و سپس مربع خواهد بود.

اگر طول میله برابر با L و شعاع مقطع برابر با ρ باشد و مقطع به میزان Φ پیچیده باشد

در این صورت کرنش برشی (γ) در نقطه‌ای که به فاصله‌ی ρ از مرکز محور عضو قرار دارد

برابر است با:

$$(\text{کرنش زاویه}) \ \gamma = \frac{\rho \Phi}{L} \Rightarrow \gamma_{max} = \frac{c\,\Phi}{L} \ (\text{کرنش زاویه})$$

$$\to \gamma = \frac{\rho}{c}\,\gamma_{max}$$

c فاصله کرنش برشی در عضو تحت پیچش

Shahab

براساس فرمول منطقی قبل و با توجه به قانون هوک برای تنش برشی $(\tau = G . \gamma)$

خواهیم داشت :

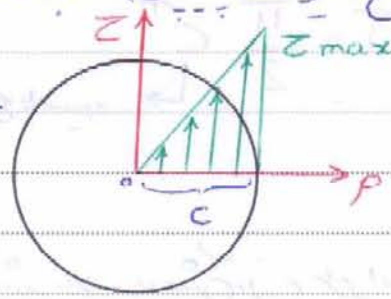
اگر طرفین را در G ضرب کنیم

$$\gamma . G = \frac{\rho}{c} . \gamma_{max} . G$$

$$\tau = \frac{\rho}{c} \tau_{max}$$

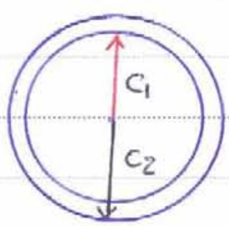
محل نقطه‌ای که رابطه هوک برقرار است هم

که این رابطه بیانگر این است که اگر در هیچ بخش از محور، از حد تناسب عبور نکنیم تنش برشی در میله‌های گاردان (عضو با مقطع دایره تحت پیچش) بصورت خطی با فاصله ρ از محور میله گاردان تغییر می‌کند :



توزیع تنش برشی τ در مقطع دایروی تحت پیچش

نکته: در میله محور دایروی توخالی به شعاع داخلی C_1 و شعاع خارجی C_2



تنش برشی بصورت خطی از τ_{min} (تنش برشی حداقل) در جدار داخلی مقطع به τ_{max} (تنش برشی حداکثر) در جدار خارجی مقطع می‌رسد بنابراین داریم :

$$\frac{C_1 \text{ (شعاع داخلی)}}{C_2 \text{ (شعاع خارجی)}} = \frac{\tau_{min}}{\tau_{max}}$$

محاسبه ممان اینرسی در مقاطع دایروی جدار نازک (توخالی)

$$J = \frac{1}{2} \pi C_2^4 - \frac{1}{2} \pi C_1^4 = \frac{1}{2} \pi (C_2^4 - C_1^4)$$

مقاطع توپر

$$J = \frac{\pi}{2} c^4$$

در مقطع دایره‌ای به شعاع c ممان اینرسی پیچشی J (ممان اینرسی از خواص هندسی هر مقطع می باشد و هیچ نوع ارتباطی به نوع مصالح مقطع ندارد) و دیمانسیون آن برابر ^{4} ام می باشد که تحت اثر گشتاور پیچشی T قرار دارد.

تنش برشی در فاصله ρ از محور دایره به صورت زیر محاسبه می شود:

گشتاور پیچشی ← T ، شعاع دایره ← c

$$\tau = \frac{T \cdot \rho}{J} \longrightarrow \tau_{max} = \frac{T \cdot c}{J}$$

مقطع دایره شکل

$$J = \frac{\pi}{2} c^4$$

c ← شعاع دایره

اگر طول این مقطع دایره‌ای L باشد زاویه پیچش آن برابر است با:

$$\phi = \frac{T \cdot L}{G \cdot J}$$

نکته: اگر دو میله که یکی شکل پذیر و دیگری ترد باشد و تحت اثر کوپل پیچشی اندازه‌ای قرار گیرد تا شکست رخ دهد مشاهده می شود که رفتار این دو میله کاملا متفاوت می باشد.

مصالح شکل پذیر در اثر پیچش در امتداد صفحه‌ای عمود بر محور طولی، ضعیف می‌شکنند زیرا در این

صفحه تنش برشی MAX می‌باشد.

مصالح شکل پذیر در برش نسبت به کشش ضعیف تر می‌باشد

مصالح ترد

مصالح ترد تحت پیچش در امتداد سطوحی که با محور طولی زاویه 45° می‌سازد دچار شکست

می‌شوند زیرا این صفحات عمود بر راستای تنش MAX هستند

مصالح ترد در کشش ضعیف تر از برش هستند

برای طراحی محورهای انتقال، باید مصالح و ابعاد مقطع به گونه‌ای انتخاب شوند که با انتقال

توان مورد نیاز در سرعت معین، تنش برشی MAX از تنش برشی مجاز فراتر نرود.

توان مربوط به چرخش میله‌ای که گشتاور T را با سرعت زاویه‌ای W (امگا) انتقال می‌دهد

برابر است با : سرعت زاویه‌ای ، گشتاور پیچشی

$$P = T \cdot W$$

$$W = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

فرکانس (HZ) ، دوره تناوب

انواع قوس نوردان: ۱- قوس نسبت به محور عرضی، قطوی و طولی

Year. Month. Day. ۲- قوس نسبت به نقطه‌ی مرکزی Subject.

توجه: rpm (واحد دور در دقیقه)

$$rpm = \frac{1}{60\,sec} = \frac{1}{60}\,sec^{-1} = \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30}\left(\frac{rad}{sec}\right)$$

پیچش مقاطع غیر دایروی:

در مقاطع دایروی چه توپر و چه توخالی تحت اثر پیچش، هیچ تنش طولی در مقطع به وجود نمی‌آید و تنها تنش برشی در مقطع خواهیم داشت.

در مقاطعی مانند چوب‌ها، مقاطع قوطی شکل (مقاطع غیر دایروی که نسبت به محور طولی مقطع تقارن نداریم)، اگر دو انتهای مقطع بطور آزادانه تحت اثر گشتاور پیچشی T قرار بگیرد تنش طولی در مقطع به وجود نمی‌آید.

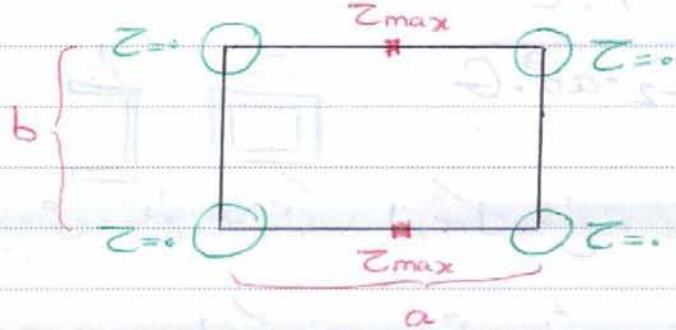
اگر یک انتهای مقطع ثابت باشد و توسط تکیه‌گاه گیردار اجازه پیچش و تغییر شکل آن گرفته شده باشد و انتهای دیگر را بپیچانیم، در مقطع تنش طولی به وجود می‌آید. البته در دو حالت اعوجاج در مقطع خواهیم داشت.

نکته: اگر یک مقطع مستطیلی شکل را که ضلع بزرگتر آن a و ضلع کوچکتر آن b باشد تحت اثر گشتاور پیچشی T قرار بگیرد، گوشه‌های مقطع مستطیلی دارای تنش برشی صفر می‌باشد و دلیل

Shahab

استاد: دکتر امیر عباس فاطمی گردآورنده: پوریا کاوه ئی

اضلاع بزرگتر دارای تنش برشی MAX خواهد بود



اگر ضرایب C_1 و C_2 که تنها وابسته به مقدار نسبت $\frac{a}{b}$ دارد و برای نسبت $\frac{a}{b} \geq 5$

خواهیم داشت:

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{3}\left(1 - .63\frac{b}{a}\right)$$

تذکر: برای نسبت های بزرگ $\frac{a}{b}$ (یعنی نسبت ها ی کوچک $\frac{b}{a}$) با تقریب خوبی خواهیم داشت:

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{3}$$

بنابر این اساس تنش برشی MAX که در مقاطع مستطیلی، در وسط ضلع بزرگتر رخ می دهد برابر

است با:

$$\tau_{max} = \frac{T}{C_1 \cdot ab^2}$$

سوالات صفحه 208 - 209

و زاویه پیچش برابر است با :

$$\varphi = \frac{T \cdot L}{C_2 \cdot a b^3 \cdot G}$$

نکته : در پیچش مقاطع جدار نازک باز شکل مقطع مهم نمی باشد بلکه ابعاد مقطع یعنی طول و ضخامت اهمیت دارد . اگر این ابعاد ثابت باشد ، مقاطع جدار نازک باز با هر شکلی ساخته شوند رفتار یکسانی از خود نشان می دهند .

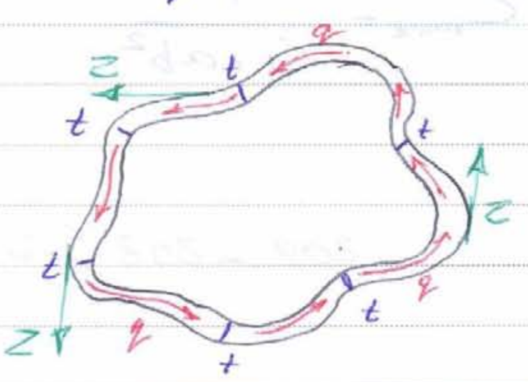
پیچش مقاطع جدار نازک بسته :

در این مقاطع که مثلا در شکل زیر نمایش داده شده است

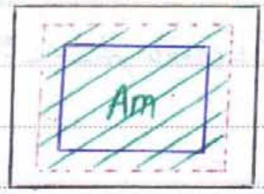
حاصل ضرب تنش برشی (τ) در ضخامت جداره (t) در سراسر مقطع مقداری ثابت می باشد

که این مقدار ثابت را جریان برش گویند و با q نمایش می دهند

$$(\text{جریان برشی})\ q = \tau \cdot t\ (\text{ضخامت جداره})$$



اگر سطح محدود به خط مرکزی مقطع را A_m گوییم



تنش برشی برابر است با:

در جدار نازک

$$\tau = \frac{T \text{ (گشتاور پیچشی)}}{2 \cdot A_m \cdot t \text{ (ضخامت جداره)}}$$

زاویه پیچش آن

$$\varphi = \frac{T \cdot L}{4 A_m \cdot G} \cdot \int \frac{ds}{t}$$

$$\varphi = \frac{T \cdot L}{G \cdot J}$$

$$J \text{ (ممان اینرسی پیچشی)} = \frac{4 A_m}{\int \frac{ds}{t}}$$

در بعضی مقاطع جدار نازک هر شکلی که داشته باشیم ابتدا مساحت هر قسمت را جداگانه محاسبه می‌کنیم و در آخر با هم جمع می‌کنیم. تنش برشی هر قسمت را که از ما خواستند با استفاده از مساحت صلبیت پیچشی و مقاومت پیچشی کل بدست می‌آوریم.

اگر k_1 را صلبیت پیچشی مقطع و k_2 را مقاومت پیچشی مقطع بنامیم داریم:

به طور مطلق:

$$\tau_{max} = \frac{T}{k_2} \qquad \varphi = \frac{T}{k_1}$$

برای مقاطع مختلف خواهیم داشت:

۱- مقاطع جدار نازک بسته	۲- مقاطع جدار نازک باز
1) $k_1 = \frac{GJ}{L}$	1) $k_1 = \frac{GJ}{L}$
2) $k_2 = 2 A_m \cdot t_{min}$	2) $k_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i t_i^3}{3 t_{max}}$
3) $J = \frac{4 A_m}{\int \frac{ds}{t}}$	3) $J = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} a_i t_i^3$

۳_ مقطع دایروی با شعاع R :

$$1)\ K_1 = \frac{GJ}{L} \qquad J = \frac{\pi}{2} R^4 \qquad K_2 = \frac{\pi}{2} R^3$$

۴_ لوله‌ای با شعاع R و ضخامت t :

$$1)\ K_1 = \frac{GJ}{L} \qquad J = 2\pi R^3 . t \qquad K_2 = 2\pi R^2 . t$$

۵_ مقطع دایروی با شعاع داخلی R_1 و شعاع خارجی R_2 :

$$1)\ K_1 = \frac{GJ}{L} \qquad J = \frac{\pi}{2}(R_2^4 - R_1^4) \qquad K_2 = \frac{\pi (R_2^4 - R_1^4)}{2R_2}$$

نکته: صلبیت پیچشی مقطع (K_1)؛ هم جنس و هم دیمانسیون با گشتاور پیچشی T می‌باشد

مقاومت پیچشی مقطع (K_2) دارای دیمانسیون مکعب طول (L^3) می‌باشد

نکته: تنش کششی و تنش فشاری MAX در یک استوانه جدار نازک تحت پیچش (T)

با ضخامت t و شعاع متوسط R به ترتیب برابر است با:

$$\sigma_{max} = \frac{T}{\underline{2\pi R^2}.t}$$

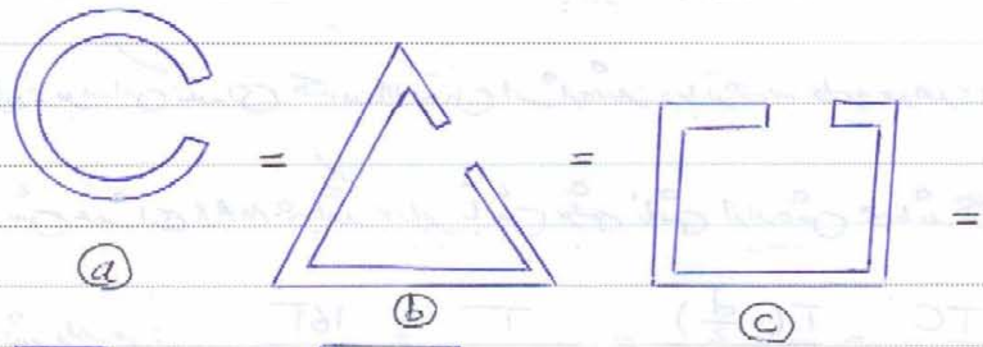
مساحت میانی (Am)

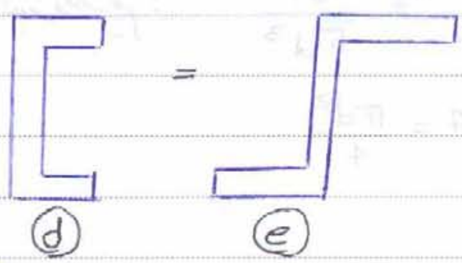
فرمول فوق هم برای تنش کششی MAX و هم تنش فشاری MAX صادق می‌باشد

نکته: در پیچش (مقاطع مدور) از تنش محوری و همینطور تنش ها در جهت شعاع به دلیل ناچیز بودن صرف نظر می شود (بدیهی است در حالتی که مقطع حول محور متقارن می باشد) بنابراین تنش های وارد بر المان فقط تنش های برشی و تنش MAX یا تنش های اصلی بر اساس قوانین دایره موهر محاسبه می شود.

مقادیر تنش های اصلی در این حالت خاص برابر تنش برشی می باشد.

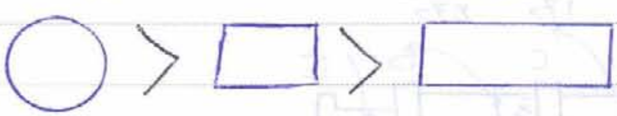
مثال - ظرفیت پیچشی کدامیک از مقاطع جدار نازک زیر با فرض اینکه محیط و ضخامت جداره ها برابر باشد بیشتر است؟





حل: همه باهم برابر است

مثال - ظرفیت پیچشی کدامیک از مقاطع زیر با در نظر گرفتن سطح مقطع ثابت برای سه مقطع بیشتر است؟



مثال - وقتی که یک محور تشکیل شده از مواد ترد تحت اثر پیچش قرار گرفته باشند جهت انتشار ترک چگونه می باشد؟ (مقطع دایروی فرض داشته باشد)

حل: ترک ها با زاویه 45° نسبت به محور طولی گسترش می یابند زیرا مواد ترد تحت کشش و مواد شکل پذیر تحت برش می شکنند.

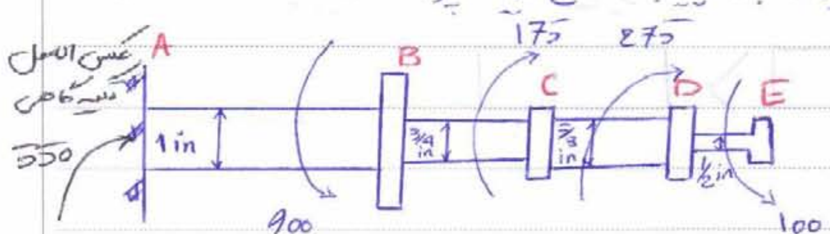
مثال - هرگاه کوپل $T=F.d$ به دو انتهای یک میله به قطر d و سطح مقطع A اعمال شود MAX تنش کششی در میله چقدر خواهد بود؟ (مقاومت پیچشی برابر T می باشد)

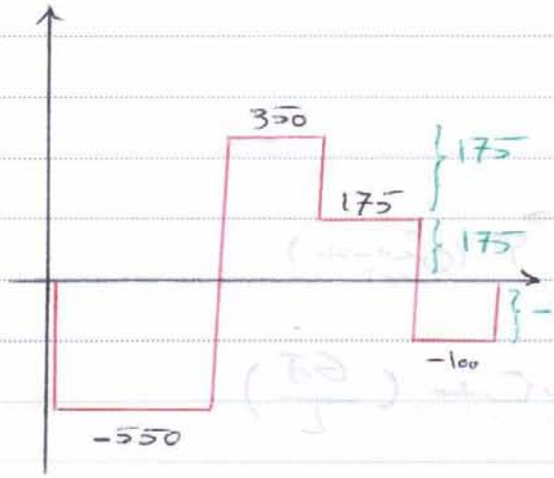
حل: براساس نکته ای که در بالا به آن اشاره شد و با توجه به دایره موهر، تنش کششی MAX برابر با تنش فشاری MAX می باشد و برابر با تنش برشی ناشی از پیچش می باشد ولی چون مقطع توپر می باشد داریم:

$$\tau_{max} = \frac{TC}{J} = \frac{T(\frac{d}{2})}{\frac{\pi}{2}(\frac{d}{2})^4} = \frac{T}{\frac{\pi . d^3}{16}} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

$= \frac{4T}{Ad} \leftrightarrow$ برحسب A نوشته شده $\quad if \; A = \frac{\pi d^2}{4}$

مثال - حداکثر تنش برشی را در قطعه زیر محاسبه نمایید؟ (مقطع دایروی توپر)





حل: همواره در بیشتر مسائل مکانیک جامدات

بلا رسم دیاگرام آزاد تلاش (نیرویی که اعمال شده

و جای خواهیم با آن کار کنیم) مورد نظر را از انتها

آغاز آن شروع می کنیم.

$$\tau_{AB} = \frac{T.C}{J} = \frac{-550 \times \frac{1}{2}\,in}{\pi/2\,(1/2)^4} = 2810{,}12 \ \frac{lb}{in^2}$$

$$\tau_{BC} = \frac{T.C}{J} = \frac{350 \times \frac{3}{8}}{\pi/2\,(\frac{3}{8})^4} = 4225{,}26 \ \frac{lb}{in^2}$$

$$\tau_{CD} = \frac{T.C}{J} = \frac{175 \times 3/16}{\pi/2\,(3/16)^4} = 3650{,}6 \ \frac{lb}{in^2}$$

$$\tau_{DE} = \frac{T.C}{J} = \frac{-100 \times 1/4}{\pi/2\,(1/4)^4} = 4074{,}36 \ \frac{lb}{in^2}$$

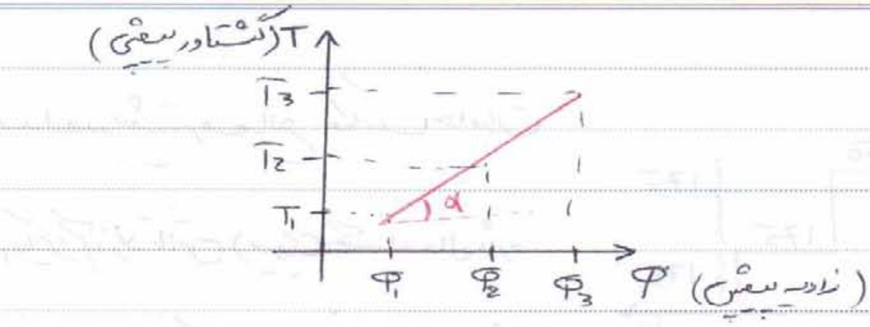
محاسبه آزمایشگاهی صلبیت پیچشی:

میله را تحت پیچش های مختلف مانند T_1 یا T_2 یا ..... قرار می دهیم و برای هر پیچش زاویه

پیچش تغییرشکل یعنی φ_1، φ_2، φ_3، φ_4 ... اندازه می گیریم پس از وصل کردن این چهار

نقطه در منحنی پیچش - زاویه پیچش، شیب این منحنی برابر است با صلبیت پیچشی

Year.　Month.　Day.　　　　Subject.



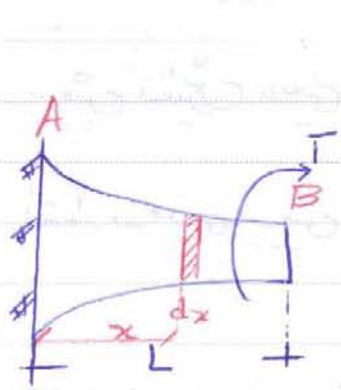
$$\tan\alpha \ (\text{شیب خط}) = \text{سفتی پیچشی} \left(\frac{GJ}{L}\right)$$

توجه: اگر مانند مثال قبل تعدادی میله با مقطع‌های متفاوت دنبال هم داشته باشیم و گشتاورهای پیچشی متفاوتی بر آنها اعمال شده باشد، زاویه پیچش کل را می‌توان با جمع کردن تک تک زاویه‌های پیچشی محاسبه نمود.

$$\varphi_{Total} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{T \cdot L}{J \cdot G}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{T}{\underbrace{\left(\frac{GJ}{L}\right)}_{\text{سفتی پیچشی}}}$$

در این روابط گشتاور پیچشی باید با علامت مربوط به خود وارد روابط شود یعنی نمودار مربوط به پیچش رسم شود و هر قسمت که پیچش مثبت بود با علامت (+) و هرگاه منفی بود با علامت (−)

مثال - مقدار پیچش در نقطه‌ی انتهای را به دست آورید؟ (φ_B)



حل:

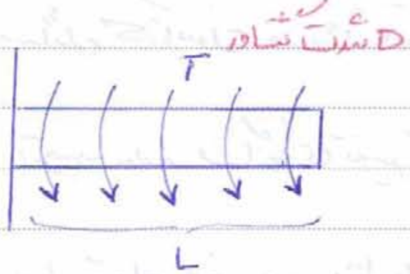
$$\varphi = \int d\varphi = \int \frac{T\,dx}{GJ(x)}$$

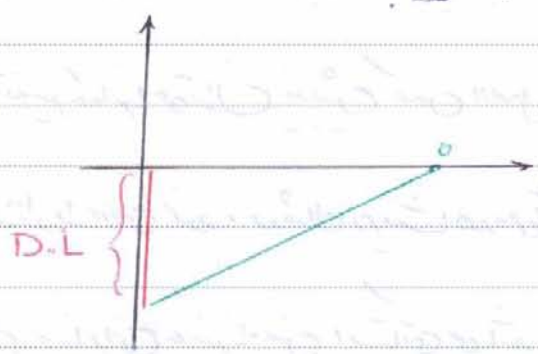
چون مربوط به طول است

مربوط به نقاط x

Shahab

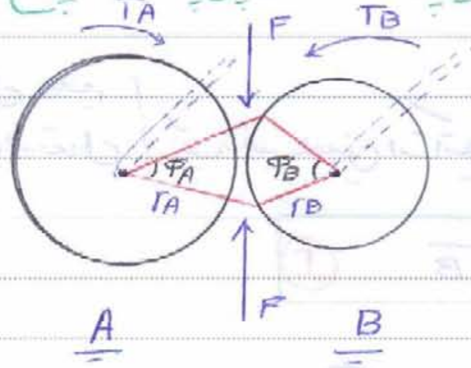
مثال - زاویه پیچش را برای حالتی که بر روی میله زیر با طول L گشتاور پیچشی گسترده در طول میله اعمال شده باشد را محاسبه نمایید؟





$$\varphi = \frac{1}{GJ}\int T\,dx = \frac{1}{GJ}\int DL\,dx$$

رابطه میان مقدار پیچش (گشتاور پیچشی) و زاویه پیچش در دو چرخ دنده درگیر



$$\varphi_A \cdot r_A = \varphi_B \cdot r_B = cte \quad \text{ثابت}$$

$$\left.\begin{aligned} T_A &= F\cdot r_A \\ T_B &= F\cdot r_B \end{aligned}\right\} \quad \frac{T_A}{T_B} = \frac{r_A}{r_B}$$

بنابراین:

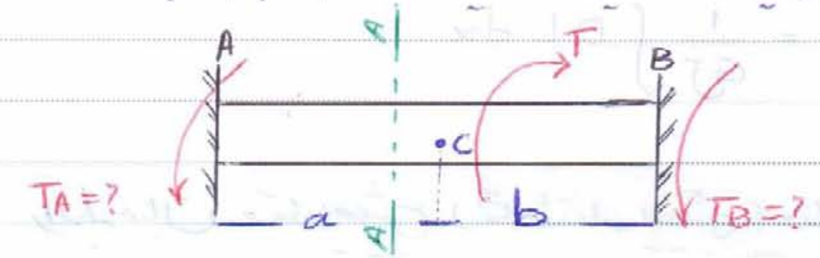
زاویه پیچش چرخ دنده ها با شعاع چرخ دنده ها نسبت معکوس دارند

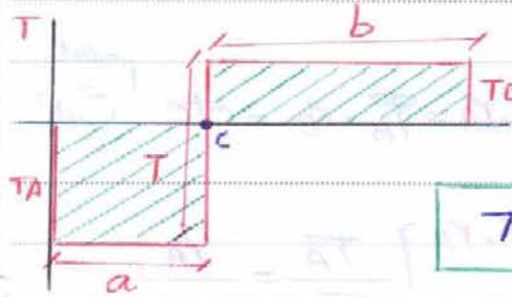
پیچش شفت ها با شعاع شفت ها نسبت مستقیم دارند

چرخ دنده‌ها و شفت‌های نامعین استاتیکی ← از روابط سازگاری تغییر مکان‌ها

مسائلی که تاکنون مورد بحث قرار گرفته‌اند معین استاتیکی بودند. اما در مورد شفت‌های نامعین با توجه به روابط سازگاری تغییر مکان‌ها می‌توان بیشتر عکس العمل‌های تکیه‌گاهی را در شفت روابط تعادل عضو مورد نظر را بررسی نمود، در مثال زیر مشاهده می‌شود:

یک معادله و دو مجهول داریم، بنابراین عضو نامعین استاتیکی می‌باشد. با توجه به رابطه‌ی سازگاری تغییر مکان‌ها داریم:





دو مجهول داریم
یک معادله تعادل } یک درجه نامعین استاتیکی

$$\boxed{T = T_A + T_B \quad (\mathrm{I})}$$

رابطه‌ی سازگاری تغییر مکان‌ها $\underset{\sim}{\varphi}$: $\varphi_{A/B} = \varphi_{A/C} + \varphi_{C/B}$

چون دو سر گیردار می‌باشد $\varphi_{AB} = 0$ است

(B نسبت به A پیچش) $\underbrace{\varphi_{A/B}}_{\text{صفر}} = \underbrace{\varphi_{A/C}}_{\varphi_C - \varphi_A} + \underbrace{\varphi_{C/B}}_{\varphi_B - \varphi_C} \leftrightarrow 0 = \varphi_C - \varphi_C$

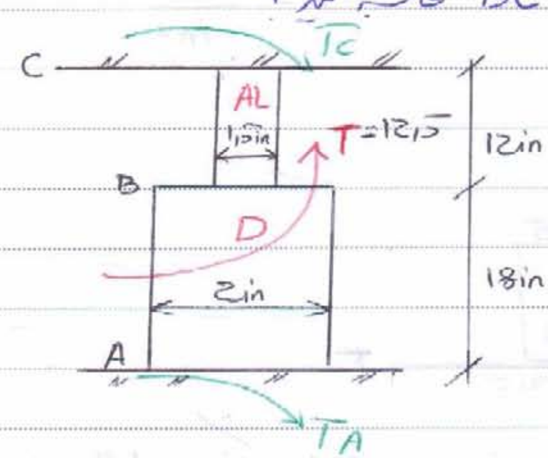
φ_A : گیردار = 0 ، φ_B : گیردار = 0

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{T_A \cdot a}{GJ} - \frac{T_B \cdot b}{GJ} \Rightarrow T_A \cdot a - T_B \cdot b = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T_A \cdot a = T_B \cdot b \quad \text{II}}$$

حال از رابطه‌ی (I), (II) می‌توان $T_A, T_B, \ldots\ldots$ را حساب کرد

مثال- تنش برشی حداکثر را در لوله‌ی AB, BC حساب کنید؟



$G_{AL} = 4 \times 10^6$

$G_D = 6 \times 10^6$ psi یا $\frac{lb}{in^2}$

حل:

$$\text{I} \quad T = T_A + T_C$$

$$\Rightarrow 12.5 = T_A + T_C \quad \text{I}$$

$$\varphi_{A/C} = \varphi_{A/B} + \varphi_{B/C} \Rightarrow 0 = \varphi_B - \varphi_B$$

$$J = \frac{\pi}{2} R^4 \rightarrow J_{AC} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1.5}{2}\right)^4, \quad J_D = \frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{2}\right)^4$$

با رابطه‌ی فوق:

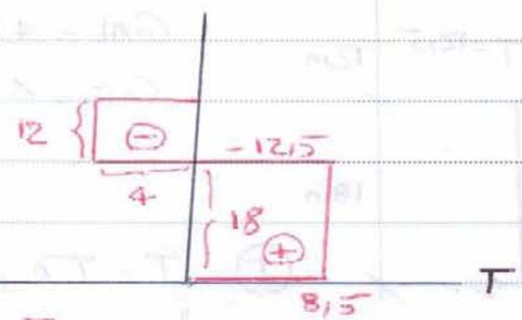
$$0 = \frac{T_A \times 18}{(6 \times 10^6)(\pi/2)} - \frac{T_C\,(12)}{(4 \times 10^6)\left(\frac{\pi}{2} \times (0.75)^4\right)} \quad \text{II}$$

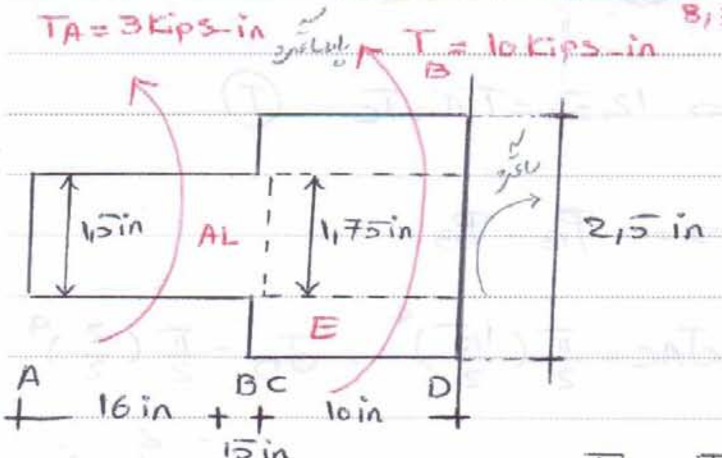
$$\text{I and II} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} T_C = 4,03 \ \text{kip-in} \\ T_A = 8,5 \ \text{kip-in} \end{cases}$$

با جایگذاری T_A و T_C در معادله ی $\tau = \frac{TC}{J}$ ، مقدار MAX را محاسبه می کنیم:

$$\tau_{AB} = \frac{(8,5)(\frac{2}{2})}{\pi/2} = 5,41 \ \frac{\text{kips}}{\text{in}^2}$$

$$\tau_{BC} = \frac{(4,03)(.75)}{\pi/2\,(.75)^4} = 6,03 \ \frac{\text{kips}}{\text{in}^2}$$





از D تا C مقطع هم از نازک است.

مثال_ زاویه پیچش حداکثر را محاسبه کنید؟

حل:

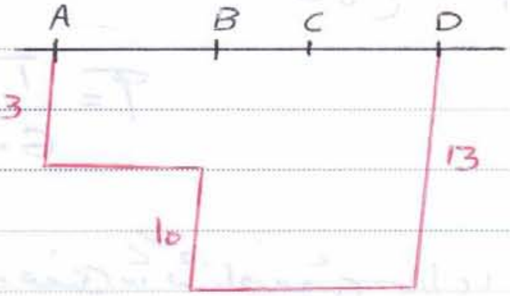
$G_{AL} = 4\times10^6$

$G_E = 6\times10^6$

$T_D = T_A + T_B \Rightarrow T = 10 + 3 = 13$ Kips-in

$$\varphi_{A/D} = \varphi_{A/B} + \varphi_{B/C} + \varphi_{C/D}$$

$$\varphi_{A/B} = \frac{3\,(16)}{(4\times 10^{6})\left(\frac{\pi}{2}\times(0.75)^4\right)}$$

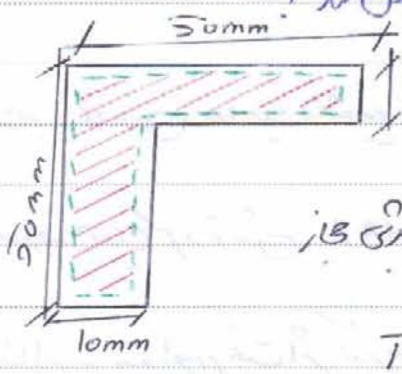


$$\varphi_{BC} = \frac{13\,(15)}{(6\times 10^{6})\left(\frac{\pi}{2}\times(1.125)^4\right)}$$

$$\varphi_{CD} = \frac{13\,(10)}{(6\times 10^{6})\left(\frac{\pi}{2}\left(\underbrace{(1.125)^4}_{\text{شعاع خارجی}} - \underbrace{\left(\frac{1.75}{2}\right)^4}_{\text{شعاع داخلی}}\right)\right)}$$

مقطع توخالی

مثال - اگر عضوی با مقطع جدار نازک زیر با ضخامت 10 mm و تنش برشی مجاز 2.5 Mpa داشته باشیم، این الفا حداکثر چه گشتاور پیچشی را می‌تواند تحمل کند؟



$T_{max} = ?$

$$\text{تنش برشی مجاز} = \frac{T_{max}}{2A_m \cdot t}$$

$$T_{max} = 2\tau A_m \cdot t$$

$A_m = 758/875\ mm^2$ جمع مساحت دو مستطیل

نکته مهم: در این نوع مسائل اگر ضخامت مقطع جدار نازک متغیر بود، برای هر قسمت باید جداگانه محاسبه شود و از ضخامت همان قسمت در محاسبات استفاده شود و نهایتاً پاسخ ها با هم جمع شوند.

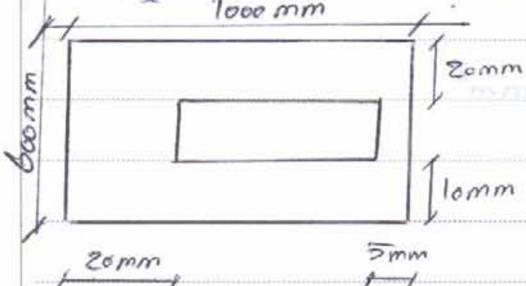
$$\varphi = \frac{T\cdot L}{G\cdot 4A_m^2}\int \frac{ds}{t}$$

مثال- اگر بخواهیم با مصالحی با تنش برشی مجاز 60 MPa، عضوی برای گشتاور پیچشی معادل با 300 N.m طراحی کنیم d را در حالت های زیر تعیین نمایید؟

$C_1 = 0/208$ $C_1 = 0/248$

توجه: براساس خاصیت مقطع توخالی می توان در مصالح مصرفی برای مقابله با گشتاور پیچشی صرفه جویی کرد. تنش MAX در وسط ضلع بزرگتر در اعضای منشوری رخ می دهد (نسبت به ضلع کوچکتر)

مثال- مقطع زیر تحت اثر گشتاور پیچشی 12 N/m قرار دارد. تنش برشی MAX را محاسبه کنید؟



حل: در مقاطع جدار نازک، جریان برشی q ثابت می باشد و چون $q=\tau t$ است، تنش برشی در نقطه ای حداکثر می باشد که ضخامت (t) حداقل باشد. بنابراین تنش برشی حداکثر در جدار BD اتفاق می افتد.

Year. Month. Day. Subject.

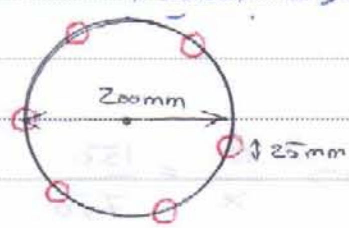
والازم است واحدها را به kg و cm تبدیل کنیم

$$\text{(جریان برشی)}\ q = \tau . t \Rightarrow \tau = \frac{q}{t} = \frac{T}{2A_m . t} = \frac{12\times10^{5}}{2(A_m)(0.5\,cm)}$$

$$\text{مساحت نازکها}\ A_m = \left(1000 - \frac{5}{2} - \frac{20}{2}\right)\cdot\left(600 - \frac{20}{2} - \frac{10}{2}\right) = 577687.5\ mm^2$$

$$= 5776.875\ cm^2$$

مثال - یک محور اتصال دهنده‌ی نیروی پیچشی از 6 پیچ به قطر 25mm که در محیط دایره‌ای به قطر 200mm قرار دارد تشکیل شده است. اگر این اتصال تحت اثر نیروی پیچشی 20kN.m قرار داشته باشد، تنش برشی ایجاد شده در پیچ‌ها را محاسبه نمائید؟



$T = 20\ KN.m$

تعداد پیچ = 6

d پیچ = 25mm

قطر دایره = 200mm

حل: با توجه به شکل:

$$\text{پیچش} = \text{تعداد پیچ} \times \underbrace{\text{نیرو} \times \text{شعاع}}_{\text{کوپل}}$$

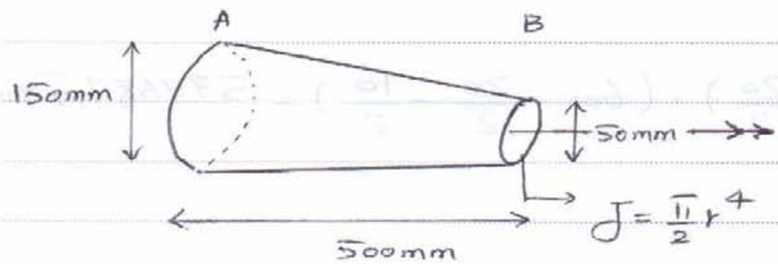
$$T = n . P . r$$

$$\text{نیروی وارد شده بر هر پیچ}\ 20\times10^{3} = 6 . P . (12.5\times10^{-3}) \Rightarrow P = \frac{20\times10^{3}}{6\times12.5\times10^{-3}} = 0.2\times10^{6}\,N$$

$$\tau = \frac{P}{A} \Rightarrow \tau = \frac{0.2\times10^{6}}{\pi\underbrace{(0.125)^2}_{r^2}} = 53.57\times10^{6}\ N/m^2$$

مثال – محور فولادی با ضریب ارتجاعی برشی $0/84\times10^{5}$ تحت پیچش 3000 N.m

بصورت شکل زیر قرار دارد، زاویه پیچش انتهای آزاد آن را محاسبه کنید؟ (مقطع مخروطی)

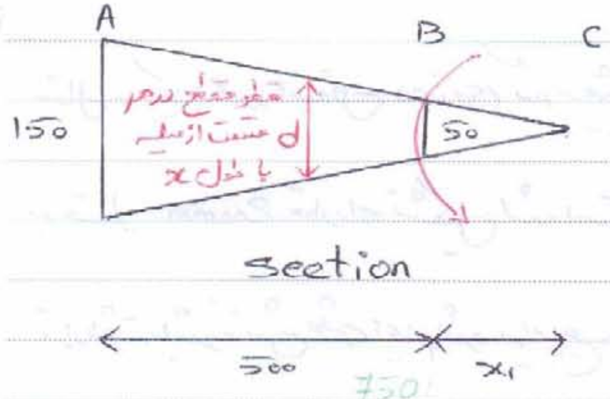


با مقطع دایره توپر

سر پیچش

$J=\frac{\pi}{2}r^4$ مقطع دایروی

حل:



$$\frac{x}{50}=\frac{500+x}{150} \Rightarrow x_1=250\ mm$$

طول

$$750 \xrightarrow{\text{تناسب}} 150 \Rightarrow \frac{d}{x}=\frac{150}{750} \Rightarrow d=\frac{x}{5}$$

$$x \text{ --- } d$$

$$r=\frac{x}{10}$$

$$J=\frac{\pi}{2}r^4 \Rightarrow J=\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{10}\right)^4$$

$$\varphi=\int_{x_B}^{x}\frac{T\cdot dx}{G\cdot\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{10}\right)^4\right)}=\int_{250}^{750}\frac{3000\cdot dx}{0/85\times10^{5}\left(\frac{1/57x^4}{10000}\right)}=4/67\times10^{-9}\ rad$$

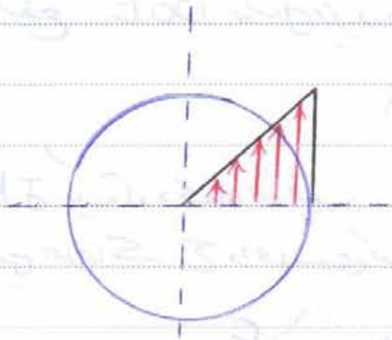
تبدیل واحدها

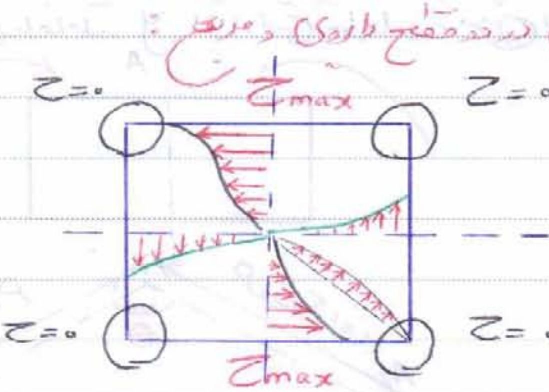
$$\boxed{\frac{R}{2\pi}=\frac{D}{360}=\frac{G}{400}}$$

زاویه

Shahab

نمودار تنش برشی در مقطع دایره‌ای و مربع :





خمش (Flexure)

خمش الاستیک :

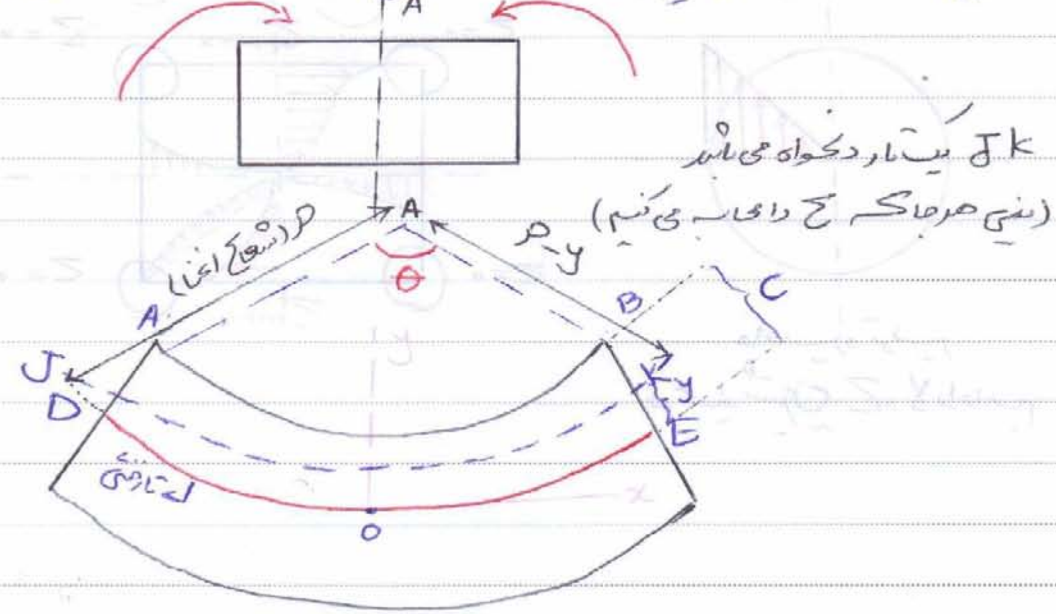
اعضای منشوری در خمش محض :

به صورت شکل زیر عضوی که در معرض کوپل های مساوی و مخالف قرار دارد بر یک صفحه طولی قرار دارد، عضو تحت خمش محض نامیده می شود.

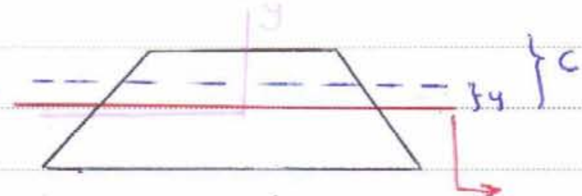
این عضو به خوبی نمای از دایره به شعاع انحنای ρ خم می شود

در خمش محض سطحی موازی با وجوه بالا و پایین عضو وجود دارد که در آن ϵ_x و σ_x صفر می باشد، این سطح، سطح خنثی نامیده می شود.

سطح DOE در شکل زیر در انتهایی با فاصله y از تار خنثی قرار دارد، کرنش به صورت زیر محاسبه می‌شود:



section



تار خنثی (N.A)
Nutral Axes

section

$$\text{I}\quad \varepsilon_x = -\frac{y}{\rho} \Rightarrow \varepsilon_{max} = \frac{-c}{\rho}$$

$$\varepsilon_x = \frac{y}{c}\,\varepsilon_{max}$$

برای تعیین موقعیت محور خنثی از تعادل نیروها در راستای طولی مقطع استفاده می‌کنیم.

$$\text{I}$$

مجموع نیروها $\int \sigma_x\, dA = \int E\cdot\varepsilon_x\cdot dA = E\int \frac{-y}{\rho}\cdot dA = 0$ تعادل نیروها

$\sigma = E\cdot\varepsilon$

$$E \neq 0 \Rightarrow \int \overbrace{y\, dA}^{Q} = 0 \rightarrow Q = \int y\, dA = 0$$

گشتاور سطح

بطور مشابه در نقاطی با فاصله y از تار خنثی، تنش بصورت:

$$\varepsilon_x = \frac{y}{c}\varepsilon_{max} \xrightarrow{\sigma = E \cdot \varepsilon} E\varepsilon_x = \frac{y}{c}E\varepsilon_{max} \rightarrow \sigma_x = \frac{y}{c}\sigma_{max}$$

Year. Month. Day. Subject.

این رابطه بیان می‌کند که گشتاور اول سطح مقطع حول محور خنثی آن مقطع باید صفر باشد به عبارت دیگر:

در عضوی که در معرض خمش محض قرار دارد تا زمانی که تنش در محدوده‌ی الاستیک می‌باشد، محور خنثی از مرکز سطح مقطع می‌گذرد.

مرکز انحنا

«تا وقتی تنش‌ها در ناحیه الاستیک هستند محور خنثی هر مقطع عرضی از مرکز سطح آن می‌گذرد»

تنش خمشی در نقاطی که به فاصله y از محور خنثی می‌باشد برابر است با:

$$\sigma = \frac{-M \cdot y}{I}$$

گشتاور خمشی، فاصله نقطه تا تار خنثی، I (ممان اینرسی مقطع)

ایجاد کشش

نکته: هرگاه گشتار خمشی مثبت باشد، تنش خمشی بالای محور خنثی $(y>0)$ فشاری خواهد بود یعنی پایین تار خنثی $(y<0)$ تنش خمشی، کششی خواهد بود.

وقتی گشتاور خمشی M منفی باشد، تنش خمشی برعکس حالت فوق خواهد بود.

با توجه به رابطه‌ی $\sigma = \frac{-M \cdot y}{I}$ داریم:

$$\sigma_{max} = \frac{MC}{I} = \frac{M}{S}$$

(اساس مقطع یا مدول مقطع)

$$\rightarrow S = \frac{I}{C}$$

استاد: دکتر امیر عباس فاطمی — گردآورنده: پوریا کاوه ئی

اثبات رابطه زیر:

$$\varepsilon_m = \frac{c}{\rho} \rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_m}{c} \xrightarrow{\sigma = E\cdot\varepsilon} \frac{1}{\rho} = \frac{\frac{\sigma}{E}}{c} = \frac{\sigma}{E\cdot c}$$

$$\xrightarrow{\sigma = \frac{Mc}{I}} \frac{M\cancel{c}}{I} \times \frac{1}{E\cdot \cancel{c}} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E\cdot I}}$$

S (ابعاد مقطع) تنها به شکل هندسی مقطع وابسته است.

در خمش محض شعاع انحنای خمش مقطع را می‌توان بصورت زیر حساب کرد:

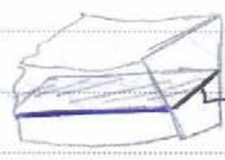
$$\text{انحنا} \quad \frac{1}{\rho_{\text{شعاع انحنا}}} = \frac{M}{E\cdot I}$$

$I \rightarrow$ ممان اینرسی مقطع حول محور خمش

در مقطع تحت خمش تنش در یک طرف تار خنثی کششی و در طرف دیگر آن فشاری می‌باشد.

در قسمتی که تنش خمشی کششی می‌باشد، تارهای طولی مقطع افزایش طول دارند و بخاطر اثر پواسون عرض مقطع کاهش می‌یابد و در قسمتی که تنش خمشی فشاری می‌باشد تارهای طولی مقطع کاهش طول دارند و بخاطر اثر پواسون عرض مقطع افزایش می‌یابد.

اثر پواسون موجب می‌شود که محور خنثی مقطع عرضی بصورت دایره‌ای با شعاع $\rho' = \frac{\rho}{\nu}$ خم شود.



مرکز انحنای تیر ناشی از خمش و مرکز انحنای مقطع عرضی در بالا و پایین محور خنثی قرار دارند و در یک طرف تار خنثی نمی‌باشد.

عکس شعاع خمیدگی ρ انحنای خمیدگی مقطع عرضی می‌باشد و خمیدگی دوانحنایی نامیده می‌شود.

پس داریم:

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{\nu}{\rho}$$ خمیدگی دوانحنایی

خمش اعضای مرکب:

اگر عضو مورد بررسی در معرض خمش، از دو یا چند ماده با ضریب الاستیک متفاوت ساخته شده باشد، پیوستگی کرنش همچنان برقرار می باشد

چون مقطع یکپارچه رفتار می کند - ولی با توجه به اینکه تنش برابر حاصل ضرب مدول یانگ در کرنش می باشد تغییر می شود که:

در محل اتصال اعضا پیوستگی تنش برقرار نیست، برای بررسی رفتار اینگونه اعضا که از دو مصالح مختلف ساخته شده اند اگر نسبت ضریب الاستیک دو مصالح برابر با $n=\frac{E_2}{E_1}$ باشد، براساس شکل های زیر پهنای مصالح با ضریب ارتجاعی E_2، n برابر می شود و آنگاه مقطع جدید را با عنوان مقطعی که کلاً دارای ضریب الاستیک E_1 می باشد مورد بررسی قرار می دهیم. بنابراین هر کدام از دو نوع مصالح از رابطه زیر بدست می آید:

$\boxed{E_1}$

$\boxed{E_2}$

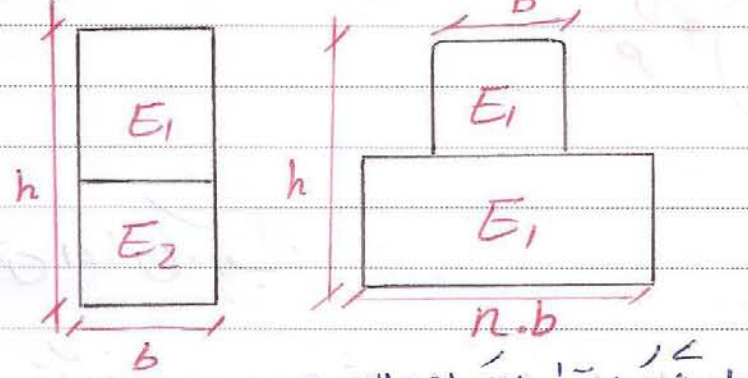
$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon_x \rightarrow \sigma_1 = \frac{-E_1 y}{\rho} \quad , \quad \sigma_2 = E_2 \varepsilon_x \rightarrow \sigma_2 = \frac{-E_2 y}{\rho}$$

حال نیروهای موثر بر یک جزء از سطح مقطع مقطعی به مساحت A:

$$dF_1 = \frac{E_1 y}{\rho} \cdot dA$$

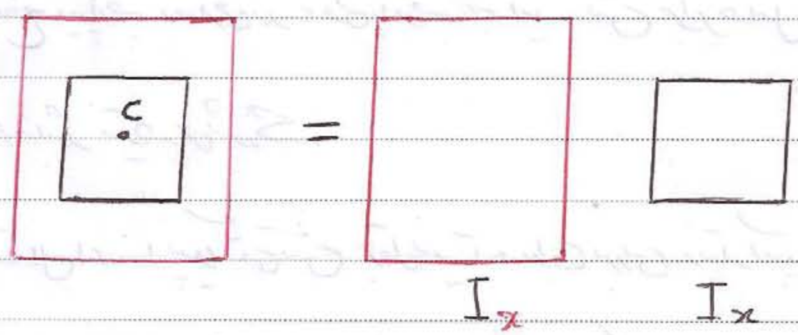
$$dF_2 = \frac{E_2 y}{\rho} \cdot dA$$

توجه: برای این مقطع جدید باید موقعیت مرکز سطح و محور خنثی که از مرکز سطح مقطع عبور می‌کند را محاسبه کرد.



معادل سازی یک مقطع با ۲ نوع مصالح

نکات: اگر یک مقطع جدار نازک داشته باشیم I (ممان اینرسی آن) اینطور محاسبه می‌شود:



و در آخر ممان اینرسی سطح زیری را از بزرگتر کم می‌کنیم تا ممان اینرسی کل شکل بدست آید.

خمش نامتقارن :

درحالتی که بردار خمشی M در مقطع وارد می شود باید آن را در راستای محورهای اصلی تجزیه کرد و تنش های خمشی مقطع حول محورهای اصلی را با یکدیگر جمع کرد.

می دانیم که محورهای اصلی محورهایی است که I_{yz} در آنها صفر باشد و تنها در صورتی محور خنثی بر محور بردار خمشی M منطبق می شود که بردار در امتداد یکی از محورهای اصلی مقطع باشد.

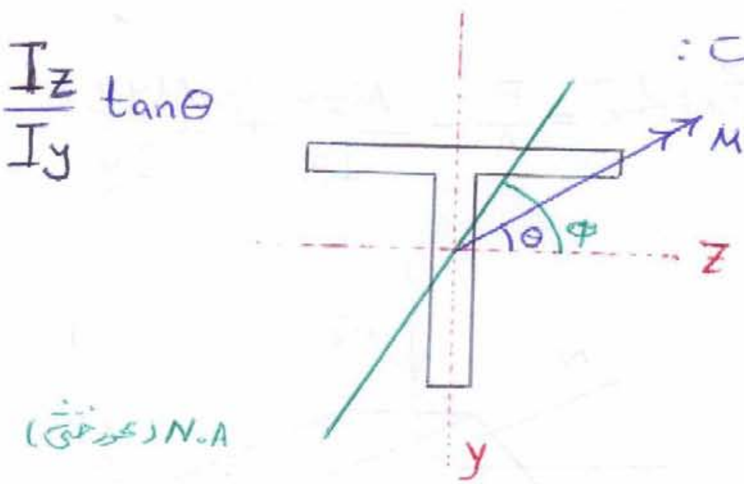
هنگامی که مقطعی دو محور متقارن داشته باشد، محورهای اصلی مقطع همان محورهای تقارن می باشند.

در n ضلعی های منتظم، تمام محورهایی که از مرکز مقطع می گذرد محور اصلی می باشد، یعنی برای هر دو محور متعامد گذرنده از مرکز مقطع، همان اینرسی I_{yz} صفر می باشد.

و همان اینرسی مقطع حول محوری که از مرکز مقطع بگذرد مقدار ثابتی می باشد.

در شکل اگر بردار خمشی M زاویه θ با محور اصلی z می سازد، اگر زاویه محور خنثی با محور z ها φ باشد خواهیم داشت:

$$\tan\varphi = \frac{I_z}{I_y}\tan\theta$$



با توجه به مثبت بودن I_z و I_y در رابطه فوق نتیجه می شود که:

φ و θ هم علامت هستند

اگر $I_z > I_y$ باشد پس $\tan\phi > \tan\theta$ می‌باشد و در نتیجه $\phi > \theta$ خواهد بود.

اگر $I_y > I_z$ باشد بالعکس مشابه $\theta > \phi$ است.

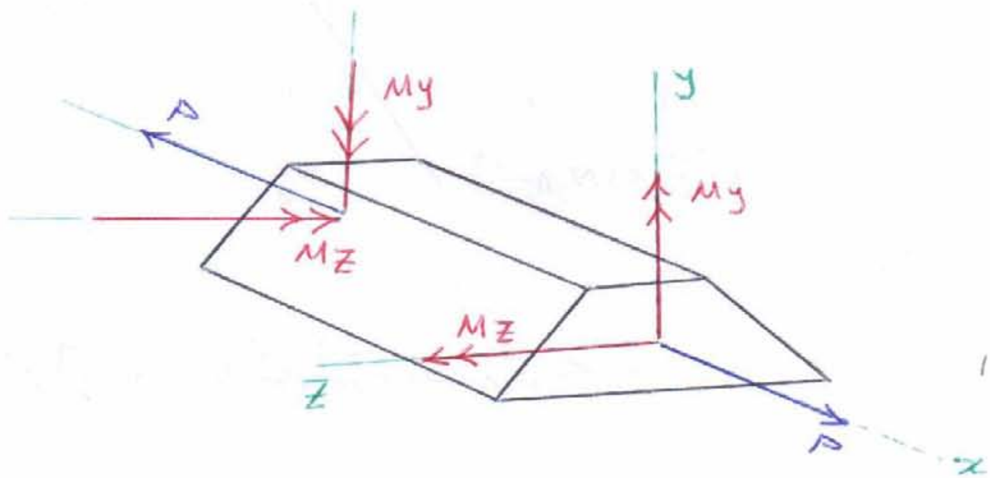
پس در معادله محور خنثی (N.A) بین بردار لنگر خمشی M و محور اصلی متناظر با ممان اینرسی Minimum قرار دارد.

$$I_y \tan\phi = I_z \tan\theta$$

حالت کلی:

بارگذاری روی مقطعی که مطابق شکل تحت نیروی محوری P و لنگر خمشی M_z و M_y می‌باشد، برای محاسبه تنش خمشی در نقطه‌ای به مختصات (y, z) روی مقطع داریم:

$$\sigma_x \text{ (راستای طولی عضو)} = \frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$



در شکل فوق محورهای y و z، محورهای اصلی مقطع می‌باشند.

رابطه فوق بیان می‌کند که توزیع تنش در مقطع خطی می‌باشد.

در محاسبه‌ی تنش مرکب (σ_x) باید در تعیین علامت هر یک از ترم‌ها دقت شود، زیرا هر یک از این بخش‌ها بسته به جهت بار یا گشتاور می‌توانند مثبت یا منفی باشند.

اگر معادله‌ی فوق برابر صفر باشد، معادله خط راستی بدست می‌آید که همان معادله محور خنثی می‌باشد، چون در محور خنثی تنش در تمام نقاط برابر صفر است.

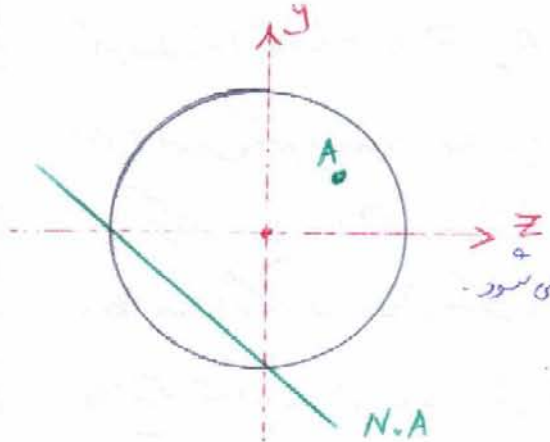
P کششی +
P فشاری −

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

(معادله *)

هسته‌ی مقطع:

در مقطع اگر اگر بار محوری P در نقطه A اعمال شود، تار خنثی به صورت نشان داده شده می‌باشد.



← اگر A در ربع اول باشد، تار خنثی در ربع سوم خواهد بود.

← اگر A در ربع دوم باشد، تار خنثی در ربع چهارم خواهد بود.

← اگر بار P از مقطع دور شود، تار خنثی به مرکز مقطع نزدیک می‌شود.

← اگر بار P دقیقاً در مرکز وارد شود، تار خنثی به بی‌نهایت می‌رود.

نکته: در مورد معادله *، عملاً تنش تماماً ناشی از P و My و Mz می‌باشد که با توجه به اصل جمع آثار قوا با هم جمع می‌شوند و معیار مثبت بودن یا منفی بودن هر بخش عملاً تابع کششی یا فشاری بودن تنش محوری اعمال شده توسط هر یک از بخش‌ها می‌باشد.

وقتی جمع تنش ناشی از اثرهای خمشی مجاز می‌باشد که:

اولاً ترکیب تنش از تنش حد تناسب مصالح فراتر نرود.

دوماً تغییر شکل‌ها ناشی از اثر My تنش ناشی از Mz را تحت تاثیر قرار ندهد و برعکس.

توجه: در مسائل برای یافتن تار خنثی کافی است یکی را مساوی صفر قرار دهیم.

اگر بار P از نقطه‌ی A به طرف مرکز مقطع حرکت کند، نقطه‌ای وجود دارد که با اعمال بار P در آن نقطه تار خنثی بر مقطع مماس می‌شود.

تعریف: «هسته‌ی مقطع»

مجموعه نقاطی که اگر بار در آنها وارد شود، تار خنثی بر مقطع مماس می‌شود سطحی را مشخص می‌کند که به آنها هسته‌ی مقطع گویند.

اگر بار در هسته‌ی مقطع وارد شود، تنش در مقطع تغییر علامت نمی‌دهد.

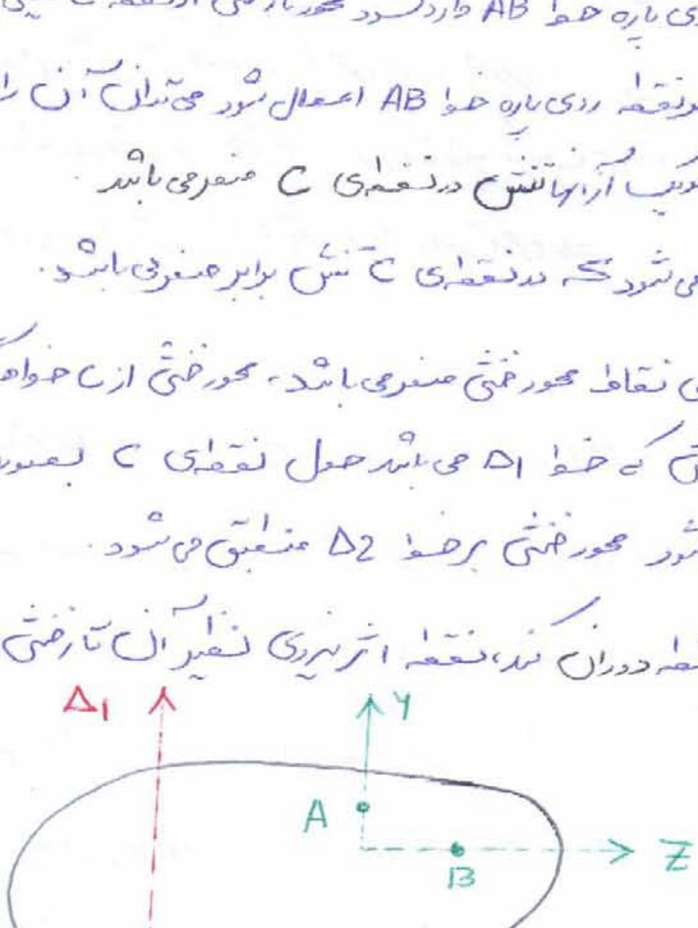
هسته‌ی مقطع از خصوصیات هندسی مقطع می‌باشد و ثابت خواهد بود و مشخص می‌شود که همواره محدب می‌باشد.

اگر مطابق شکل بار محوری P در A وارد شود، محور خنثی Δ_1 و اگر بار در B وارد شود محور خنثی Δ_2 می‌باشد در این صورت اگر در نقطه‌ای روی پاره خط AB وارد شود محور تار خنثی از نقطه C یعنی محل تلاقی Δ_1 و Δ_2 عبور می‌کند، زیرا اگر بار P در هر نقطه روی پاره خط AB اعمال شود می‌توان آن را با دو بار معادل در A و B معادل کرد که تحت اثر هر یک از آنها تنش در نقطه‌ی C صفر می‌باشد.

و از جمع آثار دو حالت نتیجه می‌شود که در نقطه‌ی C تنش برابر صفر می‌باشد.

و با توجه به اینکه تنش در تمامی نقاط محور خنثی صفر می‌باشد، محور خنثی از C خواهد گذشت. وقتی بار از A به سمت B حرکت کند، محور خنثی که خط Δ_1 می‌باشد حول نقطه‌ی C به صورت پادساعتگرد دوران می‌کند تا اینکه بار در B وارد شود محور خنثی بر خط Δ_2 منطبق می‌شود.

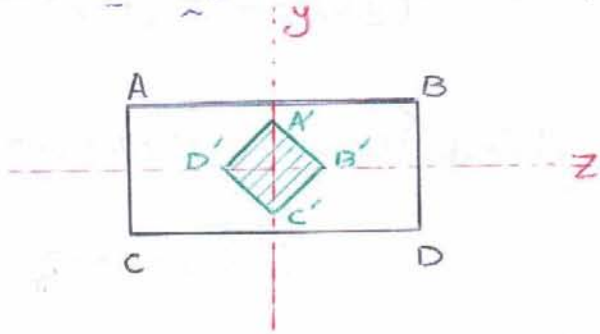
پس اگر تار خنثی حول یک نقطه دوران کند، نقطه اثر نیروی نظیر آن تار خنثی بر روی یک خط راست داخل مقطع حرکت می‌کند



چند نکته مهم در بحث هسته‌ی مقطع:

① اگر نیرو روی مرز هسته وارد شود، تنش‌ها در یک رأس محیط مقطع صفر می‌شود، ولی اگر نیرو دقیقاً از رأس‌های هسته مقطع وارد شود، تنش‌ها در یک ضلع محیط مقطع صفر می‌شود.

مثال - در مقطع مستطیلی زیر هسته‌ی آن لوزی شکل خواهد بود، بنابراین اگر نیرو در نقطه‌ی بین A' و B' وارد شود تنش در نقطه‌ی D برابر صفر می‌شود، در حالی که اگر نیرو دقیقاً در نقطه‌ی A' وارد شود، تنش در ضلع CD مقطع صفر خواهد شد.



② اگر تار خنثی حول یک نقطه دوران کند، نقطه اثر نیروی متناظر آن تار خنثی بر روی یک خط راست حرکت می‌کند.

③ اگر تار خنثی بر یکی از محورهای تقارن عمود باشد، نقطه اثر نیروی متناظر آن بر روی همان محور تقارن و در داخل هسته‌ی مقطع خواهد بود.

۴ الی 7 در جزوه کپی شده

خمش پلاستیک:

در خمش الاستیک برای محاسبه کرنش در الیافی که به فاصله‌ی y از تار خنثی قرار دارد رابطه‌ی زیر بکار می‌رود:

$$\varepsilon = \frac{-y}{\rho}$$

طبق قانون هوک با ضرب ضریب الاستیک در کرنش متناظرش ($\sigma = E\cdot\varepsilon$) تنش بدست می‌آید.

ولی در حالت پلاستیک تنها رابطه $\varepsilon = \frac{-y}{\rho}$ صادق است و دیگر قانون هوک برقرار نمی باشد

زیرا برخلاف کرنش، تنش نمی تواند از تنش تسلیم (σ_y) تجاوز نماید.

برای بدست آوردن تنش در تاری از مقطع می توان کرنش آن را با کرنش تسلیم $\varepsilon_Y = \frac{\sigma_y}{E}$

مقایسه کرد. اگر کرنش کمتر از کرنش تسلیم بود ($\varepsilon_y > \varepsilon$) می توان از قانون هوک تنش آن تار را

محاسبه کرد ولی اگر کرنش بزرگتر از کرنش تسلیم بود ($\varepsilon_y < \varepsilon$) تنش آن تار برابر مقدار ثابت (σ_y) است

ضریب شکل (shape factor)

یکی از پارامترهای مهم در حالت پلاستیک، ضریب شکل مقطع می باشد که تنها از خصوصیات

مقطع است و ارتباطی به نوع مصالح ارتباطی ندارد.

نسبت لنگر پلاستیک شدن مقطع (M_p) به لنگر جاری شدن (M_y) که با توجه به روابط زیر برابر با نسبت

مدول مقطع پلاستیک (Z) به مدول مقطع الاستیک (S) را ضریب شکل گویند

$\rightarrow S = \frac{I}{C}$

s shape factors

$$S.F = \frac{M_p}{(\text{Yeild})\,M_y} = \frac{Z \times \cancel{\sigma_y}}{S \times \cancel{\sigma_y}} = \frac{Z}{S}$$

مثال - یک مقطع مستطیلی در شکل زیر مفروض است، چون این مقطع حول محور x (محور zها)

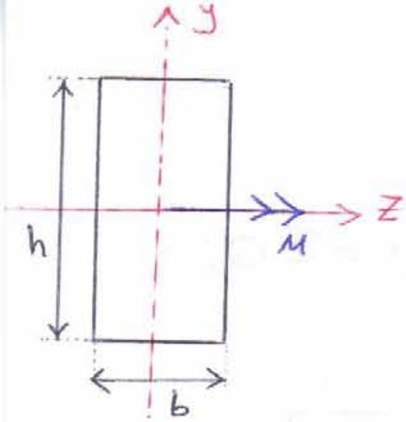
متقارن است پس محور خنثی در حالت تغییر نمی کند. در حالت پلاستیک تارهای بالای محور خنثی جاری می شوند

و تنش کششی $+\sigma_y$ دارند و تارهای پایین محور خنثی نیز جاری شده و دارای تنش فشاری σ_y می باشند.

برآیند نیروها در بالا و پایین محور خنثی برابر $\frac{bh}{2}\sigma_y$ می باشد که در مرکز سطح مستطیل های به عرض b

و ارتفاع $\frac{h}{2}$ اثر می کند. پس فاصله برآیند نیروهای کششی و فشاری $2 \times \frac{h}{4} = \frac{h}{2}$ خواهد بود

پس داریم :



ثابت

$$M_p = F \times d = (\underbrace{\frac{bh}{2}\cdot \sigma_y}_{\sigma}) \times \frac{h}{2}$$

$$= \frac{bh^2}{4}\cdot \sigma_y \Rightarrow \underline{Z = \frac{bh^2}{4}}$$

مدول مقطع پلاستیک

مدول مقطع الاستیک $S = \dfrac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \dfrac{bh^2}{6}$

$$S.F. = \frac{Z}{S} = \frac{\frac{bh^2}{4}}{\frac{bh^2}{6}} = 1.5$$

یعنی همواره ضریب شکل مقطع مستطیلی برابر 1.5 می باشد.

اگر مقطع تحت خمش پلاستیک نسبت به محور خمش نامتقارن باشد، دیگر محور خنثی از مرکز سطح مقطع نمی گذرد، بلکه مقطع را به دو بخش با مساحت مساوی تقسیم می کند.

اگر فاصله ی مرکز سطح قسمت های جاری شده ی کششی و فشاری برابر d باشد لنگر پلاستیک مقطع برابر است با

$$M_p = \left(\frac{\sigma_y A}{2}\right) d$$

مشخص است که برای خمش حول محور ضعیف مقطع نیز، ضریب شکل برابر 1.5 می باشد.
برای یک مقطع کلی که دارای اجزای مختلف به سطح مقطع A_i می باشد و فاصله ی مرکز سطح این اجزا تا محور خنثی a_i باشد. با توجه به اینکه در خمش پلاستیک مقدار تنش در تمامی تارهای مقطع ثابت و برابر σ_y می باشد داریم :

بسیار مهم $\boxed{M_P = Z \cdot \sigma_y} \Rightarrow Z = \frac{M_P}{\sigma_y}$

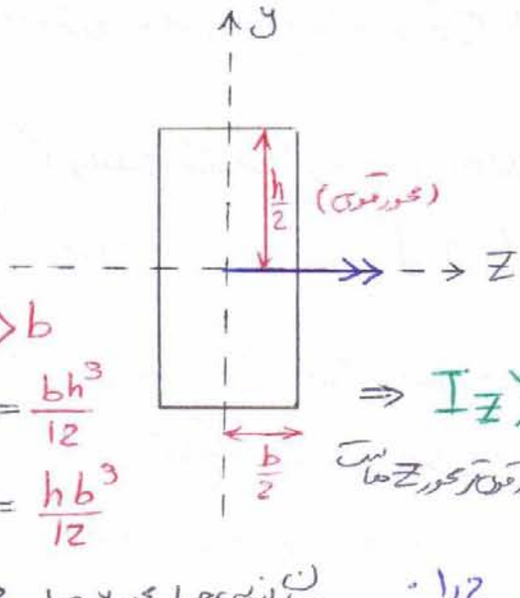
$$\Rightarrow Z = \frac{\cancel{\sigma_y} \sum A_i y_i}{\cancel{\sigma_y}} \Rightarrow Z = \sum A_i y_i = \sum Q_i$$

$$\boxed{\begin{aligned} M_P &= \sum F_i y_i = \sum (A_i \underbrace{\sigma_y}_{\text{ثابت}}) \cdot y_i \\ &= \sigma_y \sum A_i \cdot y_i \end{aligned}}$$

توجه: مدول مقطع پلاستیک برابر می‌شود با جمع ممان استاتیک اجزاء مختلف مقطع در بالا و پایین محور خنثی (متناظر نواحی کششی و فشاری مقطع)

توجه: چون y_i بیانگر فاصله‌ی مرکز سطح تا محور خنثی می‌باشد همواره مثبت است. و نباید برای اجزای واقع در پایین محور خنثی علامت آن را منفی در نظر گرفت.

نکته: ضریب شکل برخی از مقاطع برابر است با:



$h > b$

$I_Z = \frac{bh^3}{12} \Rightarrow I_Z > I_y$

پس محور قوی‌تر محور Z ها است

$I_y = \frac{hb^3}{12}$

ممان اینرسی حول محور y ها

۱- مقطع مربع و مستطیل برابر 1,5 .

۲- مقطع لوزی برابر 2 .

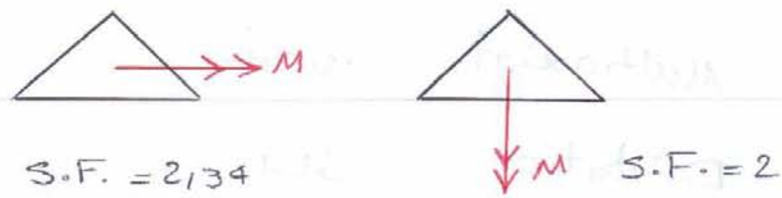
۳- دایره‌ای و بیضوی حدود 1,7 .

۴- لوله‌ای دایره جدار نازک $\frac{4}{\pi}$.

۵- مقاطع I شکل در خمش حول محور قوی برابر 1,1 تا 1,2 .

در خمش مقطع I شکل حول محور ضعیف (جان تأثیری ندارد) و دو بال مقطع مانند دو مستطیل رفتار می‌کنند و ضریب شکل برابر 1,5 می‌باشد.

6 - در مثلث متساوی الساقین نسبت به محور خمشی ضریب شکل 2 تا 2,34 است



بطورکلی هرچه تمرکز مصالح حول محور خمشی بیشتر باشد ضریب شکل بزرگتر است و مطلوب است از حداکثر ظرفیت یک مقطع در خمش استفاده کرد و مقطع دارای تغییر شکل‌های پلاستیک غیرقابل برگشت می‌باشد نشود پس :

مقطع با بیشترین ضریب شکل بهینه‌ترین مقطع می‌باشد

پس برای سازه‌های خمشی از مقطع I شکل استفاده می‌شود و در این مقطع ضریب شکل 1,1 تا 1,2 می‌باشد و در نتیجه اختلاف Mp با My حداقل است.

بارگذاری :

از راه‌حل پی‌ها مطالعه شود

Axial محوری

True واقعی

Member عضو

Multiaxial چندمحوری

Dilatation اتساع

معرفی چند کلمه:

خمش Flexure — خم کردن bending — پیچش Torsion

خرپا Truss — پیچاندن twist — گشتاور پیچشی Torque

تیر چوبی Timber — جدار نازک thin-walled — معیار تسلیم Yield ereteria

بارگذاری loading — بار Load — باربرداری unloading

معین determinate — نامعین in determinate — تک محوری uniaxial

تراکم ناپذیر incompressible — تغییر مکان (خیز) defleetion

تغییر شکل deformation — مرکز جرم centroid

بارگذاری مرکزی centric Loading — ساعتگرد clock wise — پادساعتگرد " " Conter

تیره طره (کنسول) Cantilerer Beam

روش تغییر شکل سازگار

(در برخی از موارد، برای محاسبه خیز، شیب تیرها، عکس العمل تکیه گاهی مورد استفاده قرار می گیرد)

هر سازه ی نامعین را می توان با حذف قیود اضافی موسوم به نیروهای زاید یعنی آن تعداد مؤلفه ها نیرو که مازاد بر حداقل تعداد لازم برای تعادل استاتیکی سازه می باشد، به یک سازه ی معین و پایدار تبدیل نمود.

سازه معین و پایداری که پس از برداشتن قیود اضافی حاصل می شود، **سازه ی اولیه** نامیده می شود.

در این صورت سازه اصلی معادل خواهد بود با سازه ی اولیه که تحت اثر مجموعه بارهای اصلی و نیروهای زاید مجهول قرار گرفته است.

پس از آن باید معادلات یکسان بودن شرایط هندسی در سازه‌ی اولیه و سازه حامل را در نقطه اثر نیروهای زائد نوشت . این معادلات را معادلات سازگاری گویند .

می‌توان به همان تعداد نیروهای زاید مجهول معادله‌ی سازگاری بدست آورد و به این ترتیب نیروهای زاید را با حل دستگاه معادلات چند مجهولی بدست آمده ، تعیین کرد . این روش را روش تغییر شکل سازگار گویند که می‌تواند برای تحلیل هر نوع سازه تحت اثر بارگذاری یا نشست تکیه‌گاهی تحلیل شود و چه تحت اثر تغییر درجه حرارت .

در حد مسائل مقاومت مصالح و تحلیل سازه در مقطع کارشناسی باید برای استفاده از این روش اصل جمع آثار برقرار باشد که این مسئله مستلزم خطی بودن دیاگرام تنش کرنش مصالح تشکیل دهنده سازه می‌باشد . در این صورت معادله دیفرانسیل تغییر شکل تیر خطی می‌باشد که برای یک شیب و خیز تیرها (به طور مثال) جمع آثار برقرار می‌باشد .

طراحی شفت‌های انتقال قدرت :

منظور از طراحی شفت تعیین مشخصات شفت از نظر طول ، قطر و نوع مصالح آن می‌باشد تا بتواند پیچش مورد نظر را انتقال دهد بنابراین طراحی شفت وابسته به دو مورد می‌باشد :

(1) مقدار پیچش انتقالی (2) ابعاد شفت به لحاظ طول و قطر که البته جنس مصالح بسیار مهم است .

اگر شفتی پیچش T را با سرعت زاویه‌ای W منتقل کند ، توان یا قدرت انتقال یافته توسط شفت برابر است با :

$$P = T \cdot W \quad (\text{سرعت زاویه‌ای}) \quad (\text{توان})$$

$$W = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

از آنجا که انتخاب مصالح شفت در اختیار طراح می باشد بنابراین مدول ارتجاعی برشی آن (G) مشخص می باشد و همچنین تنش برشی مجاز آن نیز مشخص خواهد بود ، بر این اساس تنش حداکثر را برابر تنش برشی مجاز در نظر گرفته و داریم :

$$P = T \cdot \overbrace{(2\pi f)}^{w}$$

$$\text{if} \quad \tau_{max} = \tau_{all} \quad (\text{تنش برشی مجاز})$$

$$\Rightarrow \tau_{all} = \frac{T \cdot C}{J} \Rightarrow \begin{cases} J = \frac{\pi}{2} c^4 \\ \frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{all}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} C^3 = \frac{T}{\tau_{all}} \rightarrow C = \sqrt[3]{\frac{2T}{\pi \tau_{a}}}$$

C ← شعاع شفت طراحی شده

حداقل شعاع مورد نیاز برای شفت جهت اینکه بتواند پیچش T را براساس توان P بدست آمده است تحمل کند بصورت فوق محاسبه می شود همچنین طول شفت نیز برای اینکه بتواند زاویه پیچشی مجاز φ_{all} را تحمل کند بصورت زیر محاسبه می شود :

$$\varphi_{max} = \varphi_{all} = \frac{T \cdot L}{GJ}$$

$$L = \frac{\varphi_{all} \cdot G \cdot J}{T}$$

مقطع دایروی

تمرکز تنش در شفت های مدور :

اگر در طول شفت قطر آن ثابت باقی بماند تنش برشی حداکثر ناشی از پیچش نیز در طول میله ثابت می باشد

اما اگر در بخشی از طول میله قطر مقطع آن تغییر کند تنش برشی حداکثر نیز تغییر خواهد کرد و در محل تغییر مقطع تنش برشی بطور ناگهانی افزایش می یابد که این مسئله را تمرکز تنش در شفت های مدور گویند

حداکثر تنش برشی حداکثر با توجه به مفهوم تمرکز تنش

$$\tau_{max} = \underbrace{k}_{\text{ضریب تمرکز تنش}}\frac{T\cdot C}{J}$$

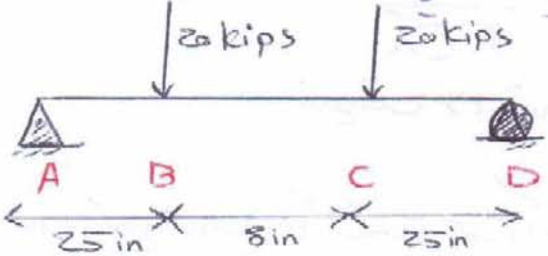
براساس مشخصات مقطع کوچکتر محاسبه می شود

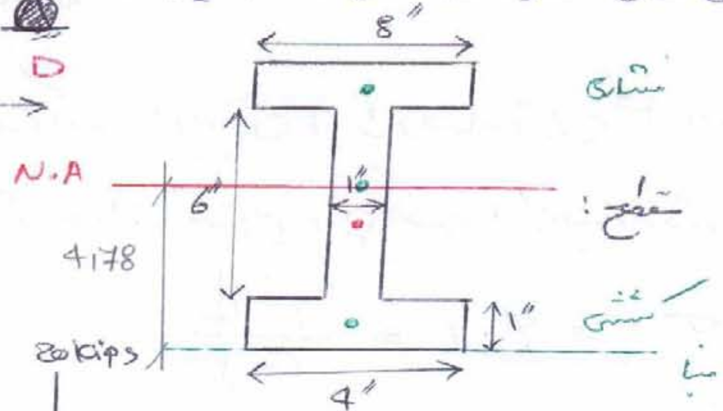
$$\begin{cases} k \propto \dfrac{d}{D} \\[2ex] k \propto \dfrac{r}{d} \end{cases}$$

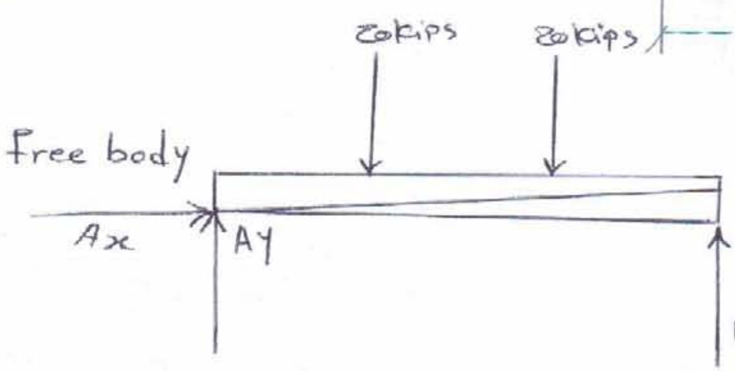
خمش خالص (بدون اثر کشش)

اگر عضوی را داشته باشیم که این عضو در دو انتهای خود تحت تاثیر دو نیروی مساوی ولی مختلف العلامت قرار داشته باشد که در یک صفحه قرار دارند، اصطلاحاً گویند که این عضو تحت اثر خمش خالص است.

مثال: تنش نرمال حداکثر فشاری و کششی را محاسبه کنید؟





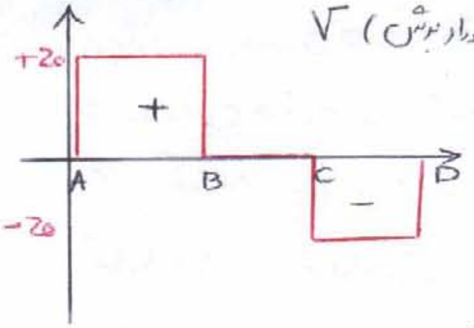


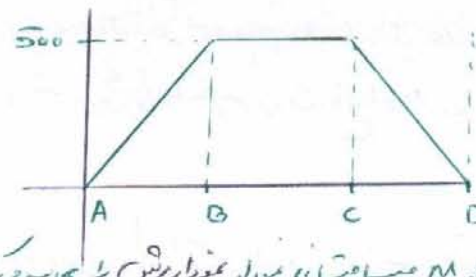
$\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_Y = 0 \Rightarrow A_Y = 20\ kips$

$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow 20\times 25 + 20\times 33 - D_Y \times 58 = 0 \Rightarrow D_Y = 20\ kips$

گشتاور خمشی (M)





(برای بدست آوردن نمودار M مساحت زیر نمودار برش را محاسبه می‌کنیم)

برای محاسبه‌ی تنش حداکثر در فشار و کشش باید از فرمول $\sigma = \dfrac{MC}{I}$ استفاده شود، در این فرمول

M (گشتاور خمشی) براساس مطالب فوق از دیاگرام آزاد گشتاور خمشی محاسبه می‌شود و اما C که فاصله‌ی دورترین تار فشاری و کششی از تار خنثی می‌باشد بعد از تعیین محل محور خنثی بدست می‌آید.

نسبت فاصله تا محور مبنا در شکل I شکل

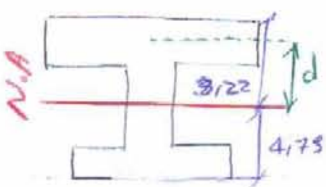
با استفاده از مقطع I شکل $\bar{y}$ را محاسبه می‌کنیم

$$\bar{Y} = \frac{\underbrace{8\times1}_{A_1}\times\underbrace{7{,}5}_{\bar{y}_1} + \underbrace{6\times1}_{A_2}\times\underbrace{4}_{\bar{y}_2} + \underbrace{4\times1}_{A_3}\times\underbrace{0{,}5}_{y_3}}{8\times1 + 6\times1 + 4\times1} = 4{,}78\ in$$

دورترین تار فشاری تا تار خنثی

دورترین تار کششی تا تار خنثی

$$\sigma_{max}\ \text{فشاری} = \frac{(500)(8-4{,}78)}{I} \qquad \sigma_{max}\ \text{کششی} = \frac{(500)(4{,}78)}{I}$$



$$I_{\text{حول محور خنثی}} = \underbrace{\frac{8\times1^3}{12} + \overbrace{(8\times1)}^{A}\overbrace{(3{,}22-0{,}5)}^{d^2}}_{\text{برای قسمت فوقانی}} + \underbrace{\frac{1\times6^3}{12} + (6\times1)(0{,}78)^2}_{\text{قسمت وسطی}}$$

$$+ \underbrace{\frac{4\times1^3}{12} + (4\times1)(4{,}78-0{,}5)^2}_{\text{برای قسمت پایینی}} = 155{,}2\ in^4$$

155,2 را در فرمول فوق جایگذاری می‌کنیم

اگر مقطعی از عضوی که تحت اثر خمش خالص می باشد در نظر بگیریم ، ابتدا باید تعادل نیروهای داخلی ایجاد شده ، این خمش در مقطع جبران شود به عبارتی نیروهای داخلی در مقطع انتخاب شده باید نیرویی برابر لنگر M ایجاد کنند تا تعادل برقرار شود.

قراردادی که به لحاظ جهت لنگرها در این بخش می بینیم قطعاً قرارداد استاتیکی می باشد.

خمش خالص اگرچه کمتر به ندرت رخ می دهد اما بحث تئوریک آن اجتناب ناپذیر است ، در خمش خالص یکی از فرض های اساسی این است که

خمش خالص

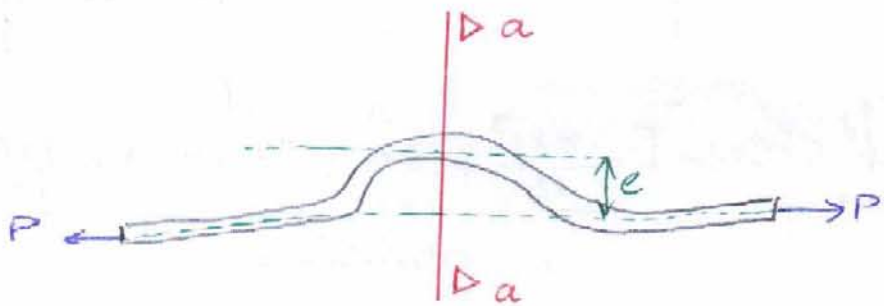
عضو مورد نظر دارای صفحه تقارن باشد و لنگر خمشی در این صفحه تقارن اعمال شود.

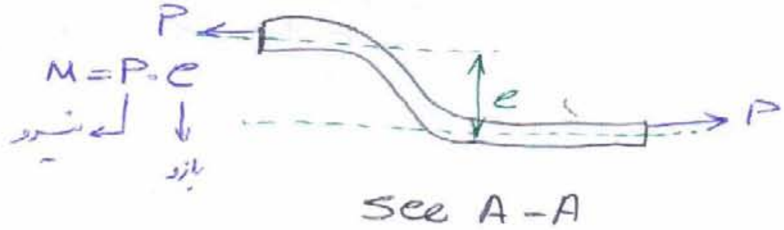
تعریف :

اگر لنگر خارج از صفحه تقارن بر مقطع اعمال شود خمش ایجاد شده را خمش کج یا نامتقارن گویند

در این نوع خمش در یک مقطع به صورت ها دو لنگر می تواند وجود داشته باشد.

به طور مثال در مقطع A-A علاوه بر بار محوری لنگر خمشی نیز اعمال می شود (خمش مرکب)





See A-A

نکته : در خمش خالص تنش برشی در عضو ایجاد نمی شود

چون نیروهای داخلی به صورت فشاری یا کششی رفتار می کنند تنش ایجاد شده در مقطع ناشی از خمش خالص از نوع تنش عمودی می باشد . (از نوع σ می باشد و هیچ گونه τ ندارد)

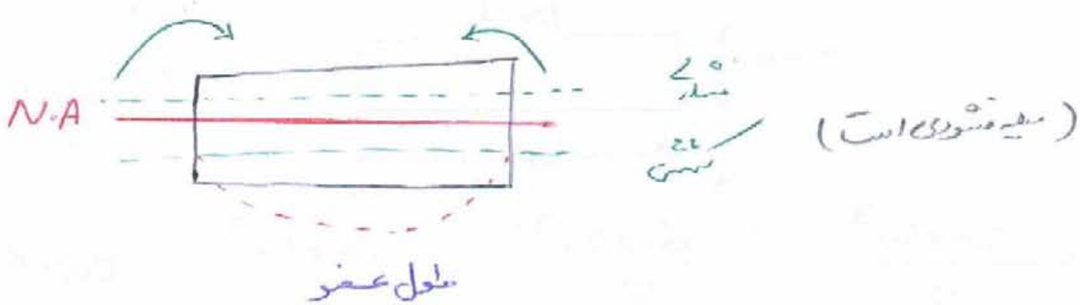
توجه: تعیین توزیع تنش، در تنش خالص یک مسئله نامعین استاتیکی می باشد که علاوه بر دو رابطه تعادل در خمش خالص لازم است، روابط سازگاری بین تغییر شکل ها نیز استفاده شوند

فرضیات اساسی خمش خالص (در اعضا دارای صفحه تقارن)

1) صفحات مستوی بعد از اعمال خمش همچنان مستوی باقی می مانند

2) از آنجا که در خمش خالص لنگر M در طول عضو ثابت می باشد، انحنا در تمام نقاط مقطع یکسان خواهد بود یعنی عضو به عبارت قوسی از دایره در می آید.

3) تارهای فوقانی (طولی) مطابق شکل زیر برای لنگر M تحت فشار و تارهای تحتانی تحت کشش می باشند



4) از آنجا که تنش ایجاد شده از نوع تنش عمودی (σ_x) می باشد کرنشی که در راستای طول عضو ایجاد می شود ε_x می باشد بنابراین در تارهای بالای کاهش طول و در تارهای پایینی افزایش طول داریم.

5) بین تارهای بالای و پایینی تاری وجود دارد که کرنش آن تار برابر صفر می باشد یعنی بعد از تغییر شکل طول آن ثابت باقی مانده است، این تار همان تار خنثی می باشد.

6) تحت خمش خالص در محدوده ی کرنش های کوچک بررسی می شود، یعنی قانون هوک صادق خواهد بود و ما در محدوده ی الاستیک خواهیم بود.

7) در خمش خالص بجز تنش نرمال (σ_x) در راستای طولی عضو سایر تنش ها از جمله σ_y و σ_z و τ_{xz}، τ_{xy}، τ_{yz} همگی برابر با صفر می باشند

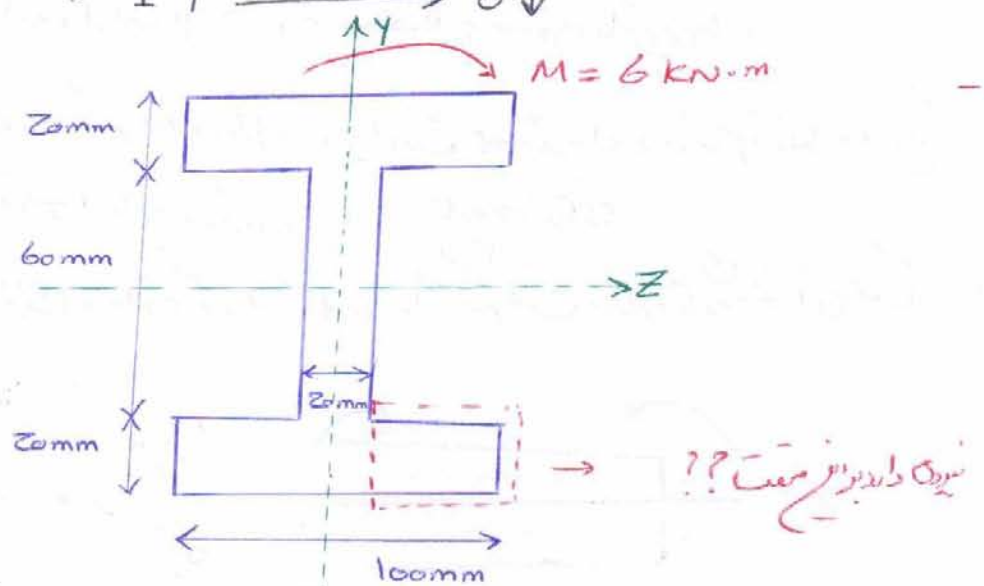
نکته: مربوط به بخش ممان اینرسی

در طراحی تیرها و یا بطور کلی اعضای سازه‌ای برای طرح خمشی عضو با یک سطح مقطع ثابت هرچه ارتفاع عضو بیشتر شود مقدار ممان اینرسی آن افزایش می‌یابد بنابراین مقدار تنش خمشی ناشی از تنش کاهش می‌یابد

$A : cte$

$$\uparrow h \longrightarrow I\uparrow \xrightarrow{\sigma = \frac{MC}{I\uparrow}} \sigma\downarrow$$

مثال -



$$I_y = \frac{20\times100^3}{12} + \frac{60\times20^3}{12} + \frac{20\times100^3}{12} = 20{,}04\times10^{-6}\ m^4$$

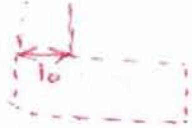
$$\sigma_x = \frac{M_y Z}{I}$$ ضلع در راستای عمود بر محور

$$\sigma = \frac{F}{A} \Rightarrow F = \sigma\cdot A \Rightarrow dF = \sigma\cdot dA = \frac{M_y\cdot Z}{I_y}(20)\,dZ$$

$$dF = \frac{6\times10^3\times Z\times20\times dZ\times\cancel{10^{-6}}}{20{,}04\times\cancel{10^{-6}}}$$

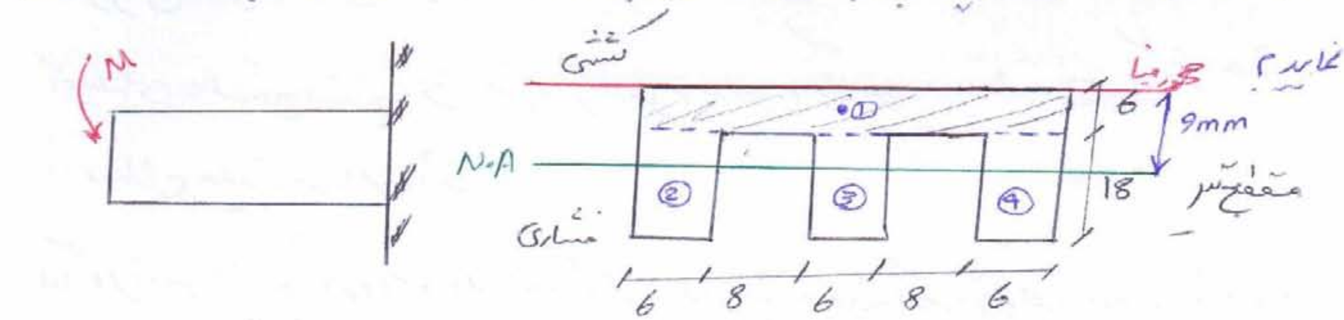
$$F = \int_{10}^{50} dF = 7{,}18\ kN$$

از تار خنثی محاسبه می‌شود



سوال کنم؟

مثال - حداکثر گشتاور قابل اعمال بر تیر زیر برود با تنش فشاری مجاز 150 Mpa و تنش کششی مجاز 120 Mpa را حساب



حل:

$$\sigma_{c\,all} = 150\ Mpa = \frac{N}{mm^2} \quad \text{فشار}$$

$$\sigma_{t\,all} = 120\ Mpa \quad \text{کشش}$$

$$\bar{y} = \frac{\overbrace{(6\times34)}^{A_1} \cdot \overbrace{\frac{6}{2}}^{\bar{y}_1} + \overbrace{3}^{\text{تعداد}} \times \overbrace{(6\times18)}^{A_{2,3,4}} \cdot \overbrace{(6+\frac{18}{2})}^{\bar{y}_{2,3,4}}}{6\times34 + 3(6\times18)} = 9mm$$

فاصله تار خنثی تا محور مبنا

«اگر مرکز سطح جسم تا تار خنثی فاصله داشته باشد در Ad^2 ضرب می‌شود»

$$I_Z = \underbrace{\frac{6^3 \times 34}{12} + \overbrace{(6\times34)}^{A} \cdot \overbrace{(9-3)}^{d}{}^2}_{\text{قطعه شماره 1}} + 3\times\overbrace{\left(\frac{6\times18^3}{12} + (6\times18)(6)^2\right)}^{\text{سه قطعه}}$$

$$= 33048\ mm^4$$

حداکثر فاصله فشاری

$$\sigma_{\text{فشاری}} = \frac{Mc}{I} \Rightarrow 150 = \frac{Mc \times 15}{33048} \Rightarrow Mc = 330480\ N.mm$$

$$\sigma_{\text{کششی}} = \frac{Mc}{I} \Rightarrow 120 = \frac{Mt \times 9}{33048} \Rightarrow Mt = 440640\ N.mm$$

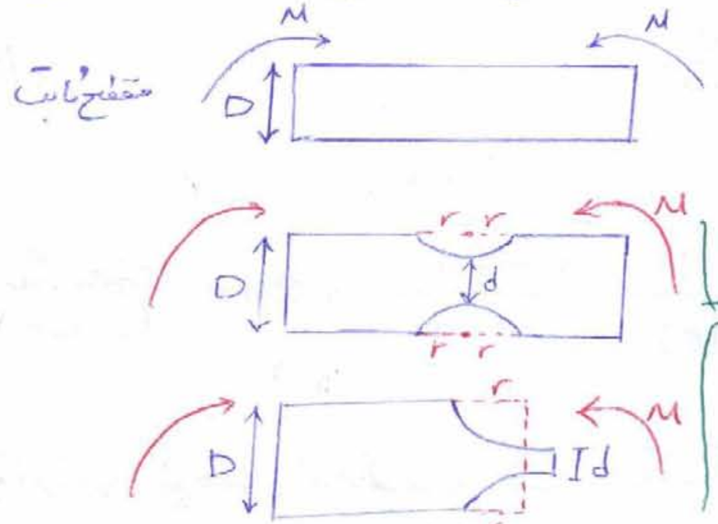
$$M = \min(Mc\ , Mt)$$ حداکثر نیرویی که می‌تواند تحمل کند

$$\boxed{M = 330480\ N.mm}$$

تمرکز تنش ناشی از خمش

اگر میله‌ای با سطح مقطع ثابت تحت اثر خمش خالص قرار بگیرد، مقدار تنش حداکثر خمشی در طول میله ثابت می‌باشد

اما اگر تغییر مقطع ناگهانی در میله ایجاد شود در محل تغییر مقطع تمرکز تنش ایجاد می‌شود، تغییر مقطع معمولاً به یکی از دو صورت زیر می‌باشد



$\rightarrow \sigma_{max} = \frac{MC}{I}$

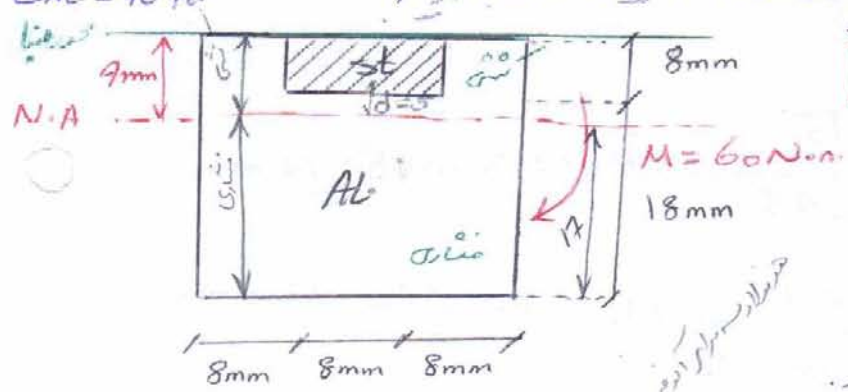
$\sigma_{max} = k \frac{MC}{I}$

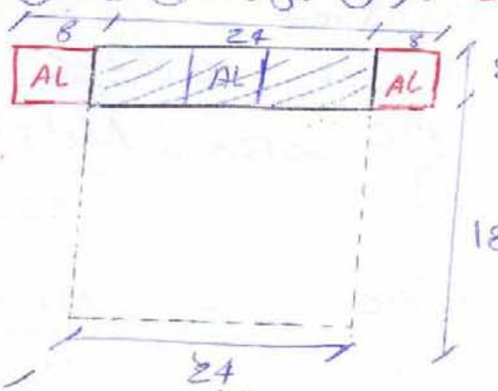
ضریب تمرکز تنش $k \begin{cases} \propto D/d \\ \propto r/d \end{cases}$

$E_{st} = 210\ GPa$

$E_{AL} = 70\ GPa$

مثال - حداکثر تنش کششی و فشاری را در بخش فولادی و آلومینیومی حساب کنید؟





عرض فولاد ۳ برابر می‌شود

بعد از معادل‌سازی مقطع ناهمگن و I را محاسبه می‌کنیم

$n = \frac{E_{st}}{E_{AL}} = \frac{210}{70} = 3$ (برابر)

$\bar{Y} = \frac{\overset{A}{(8\times 40)}\times 4 + (24\times 18)\times \overset{\bar{y}}{17}}{8\times 40 + 24\times 18} = 9mm$

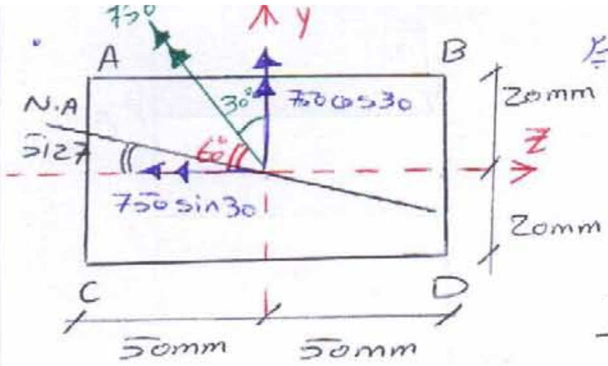
$I_Z = \frac{40\times(8)^3}{12} + (40\times 8)\times 5^2 + \frac{24\times(18)^3}{12} + (24\times 18)(8^2)$

$= 10/41\times 10^3$

st: $\left\{ \sigma_{max}^{\text{کششی}} = \frac{3\times 60\times 9}{10/41\times 10^3} \right.$

AL: $\begin{cases} \sigma_{t\,max} = \frac{60\times 9}{10/41\times 10^3} \\ \sigma_{c\,max} = \frac{60\times 17}{10/41\times 10^3} \text{ فشاری} \end{cases}$

مثال: مقطع مستطیلی تیر $\sigma_A = ?$ $\sigma_C = ?$



$$\tan\phi = \frac{I_Z}{I_Y}\underbrace{\tan\overset{60}{\theta}}_{\sqrt{3}}$$

$$I_Z = \frac{(100)(40)^3}{12} = 0/533 \times 10^{-6}\ m^4$$

$$I_Y = \frac{(40)(100)^3}{12} = 3/33 \times 10^{-6}\ m^4$$

$$\Rightarrow \tan\phi = \frac{3/33\times10^{-6}}{0/533\times10^{-6}}\tan 60$$

$$\Rightarrow \phi = 5/27$$

یادآوری:
θ: زاویه M با محور Z ها
ϕ: زاویه تار خنثی با محور Z ها

$$\sigma_A = \frac{M_Y \cdot Z}{I_Y} - \frac{M_Z \cdot Y}{I_Z} = \frac{649/5\,(50\times10^{-3})}{I_Y} - \frac{375\times(20\times10^{-3})}{0/533\times10^{-6}} = -4/\ M$$

$$\sigma_C = \frac{M_Y \cdot Z}{I_Y} + \frac{M_Z \cdot Y}{I_Z} = \frac{649/5\,(50\times10^{-3})}{I_Y} + \frac{375\times20\times10^{-3}}{0/533\times10^{-6}} = 23/\ M$$

بارگذاری عرضی

وقتی یک تیر تحت اثر بارگذاری‌ها مختلف قرار دارد، در مقاطع مختلف آن نیروی برشی با تنش خمشی اعمال می‌شود.

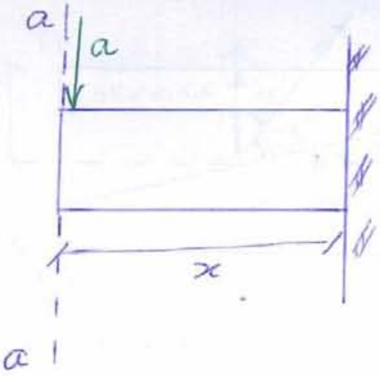
در فصل قبل تنش‌های ناشی از تنش خمشی M را مورد بررسی قرار دادیم و در این فصل هدف این است که تنش‌های ناشی از اعمال نیروی برشی بر مقطع وارد محاسبه شود و توزیع تنش برشی را در مقاطع مختلف محاسبه کنیم.

قرارداد انتخاب شده برای برش‌ها قرارداد استاتیکی می‌باشد.

مثال - اگر یک تیر طره مانند شکل در نظر گرفته شود مقدار برش و خمش در هر مقطع دلخواه (a-a) که به فاصله x از انتهای تیر واقع است برابر است با:

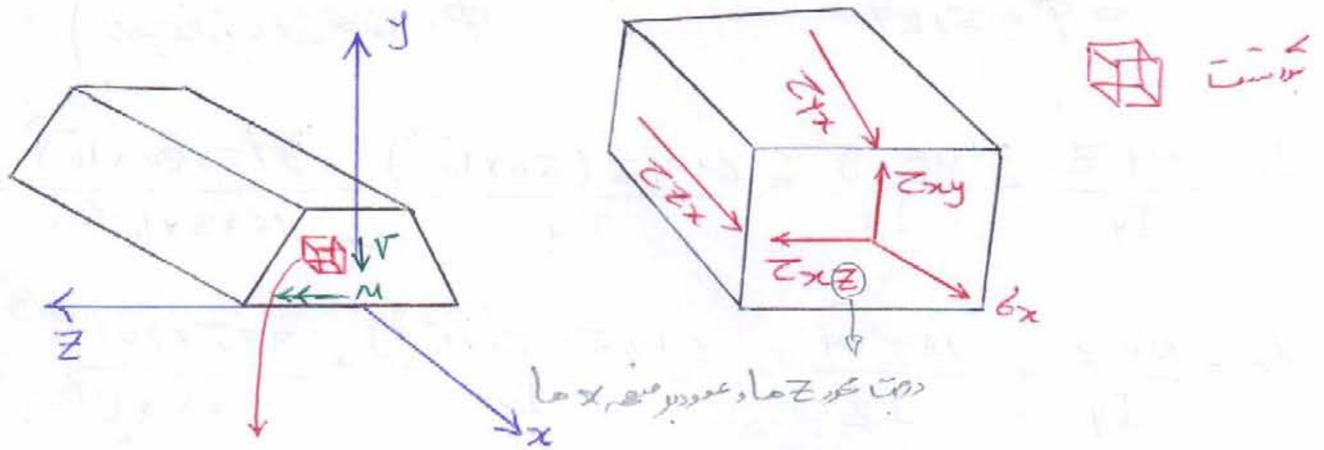
برش $V = P$

گشتاور خمشی $M = P \cdot x$



اگر مقطع تیر را مطابق شکل در نظر بگیریم و المانی دلخواه در این مقطع انتخاب کنیم در این المان 3 مؤلفه تنش می‌تواند وجود داشته باشد.

2 مؤلفه تنش برشی و یک مؤلفه تنش قائم



تنش‌ها باید شش معادله زیر را ارضا نمایند:

1- $\int \sigma_x \, dA = 0$

2- $\int \sigma_x \cdot y \, dA = 0$

3- $\int \sigma_x \cdot z \, dA = 0$

4- $\int \tau_{xy} \, dA = -V$

5- $\int \tau_{xz} \, dA = 0$

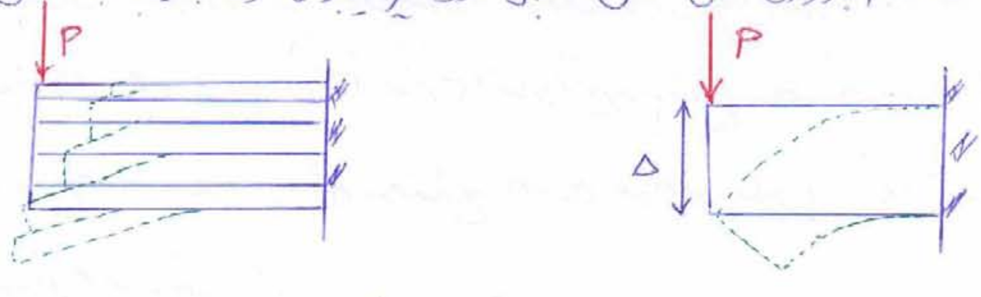
6- $\int \tau_{\cancel{z}xy} \cdot z \cdot dA - \int \tau_{yz} \cdot y \cdot dA =$

- در روی محور I (صفحه تعادل) برش افقی برابر صفر می‌باشد. تنش عمودی σ_x در اثر نیروی خمشی M ایجاد می‌شود

و چنانچه نیروهای داخلی ناشی از σ_x محاسبه شود باید به لحاظ تعادل قطعه گشتاوری برابر M ایجاد کنند

- اما تنش‌های τ_x و τ_y ناشی از نیروی برشی اعمال شده بر مقطع می‌باشد. برای روشن شدن موضوع

در هنگام بارگذاری عرضی، تنش‌های برشی طولی نیز ایجاد می‌شود. با توجه به شکل زیر می‌توان مشاهده کرد:



همانگونه که در شکل دیده می‌شود اگر بار P در انتهای تیر کنسول اعمال شود، الوارها به راحتی روی هم می‌لغزند و تیر به صورت شکل تغییر شکل می‌دهد. که بیانگر این است که در اثر اعمال بار P بین سطوح الوارها تنش برشی ایجاد می‌شود که چون عاملی برای مقابله با آن نداریم به راحتی باعث ایجاد تغییر شکل شده است.

اگر این الوارها را توسط میخ‌هایی به هم متصل کنیم بعد از اعمال بار P اجازه هیچ‌گونه لغزشی در الوارها داده نمی‌شود. پس در این حالت کل تنش برشی ایجاد شده توسط میخ‌ها تحمل می‌شود.

بنابراین در اثر اعمال بار قائم دو نوع تنش برشی در مقطع ایجاد می‌شود یکی در راستای مماس بر مقطع و دیگری در امتداد طولی که به علت آنکه این دو تنش برشی روی دو سطح عمود بر هم اثر می‌کنند به لحاظ مقدار با هم مساوی اند.

تعیین برش روی یک صفحه افقی:

در اثر اعمال بار قائم تنش برشی مماس بر مقطع و تنش برشی در امتداد طول تولید می‌شود که مقدار این دو تنش با هم برابر است.

در این بخش هدف یافتن توزیع تنش برشی در امتداد قائم می‌باشد.

از آنجا که این مسئله یک مسئله نامعین استاتیکی می‌باشد، علاوه بر روابط تعادل رابطه سازگاری بین تغییر مکان‌ها نیز مورد نیاز می‌باشد. از طرف دیگر یافتن تغییر مکان‌های برشی در امتداد قائم کار مشکلی می‌باشد.

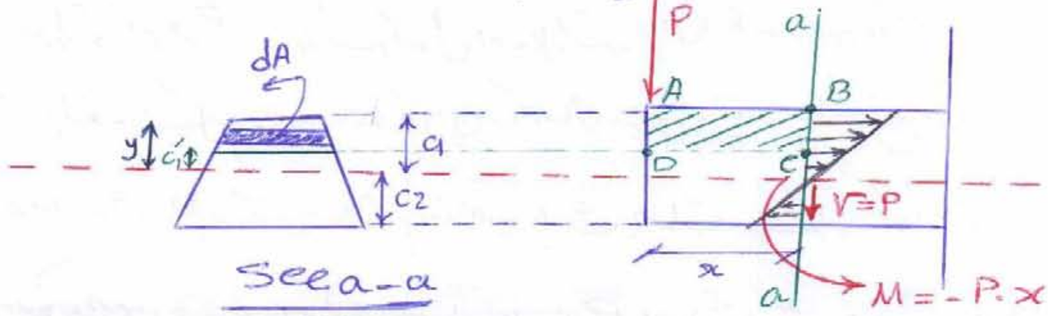
در اینجا به جای یافتن تنش برشی قائم، تنش برشی در امتداد طول محاسبه و از رابطه‌ی بدست آمده برای توزیع تنش برشی مماس بر مقطع استفاده می‌کنیم.

که البته این فرآیند با یک تقریب همراه می باشد که در محدوده ی کارهای مهندسی قابل قبول خواهد بود.

برای یافتن برش طولی قطعه ی A، B، C و D که بین انتهای تیر و مقطع a-a می باشند

با بررسی نیروهای وارد بر آن و با توجه به تنش های خمشی در مقطع a-a موجود و برابر با : $M=-P.x$

می باشد تنش ها به صورت زیر محاسبه خواهد شد.



$$\sigma_x = \frac{M.C}{I} = \frac{(-P.x)\,y}{I}$$

نیروهای وارد بر قطعه A و B و C و D به صورت زیر می باشد

(1) نیروهای افقی (H) که در اثر تنش برشی طولی ایجاد می شود، نیروی P که عملاً سهمی از P می باشد به

قطعه AD می رسد

و نیروی ناشی از توزیع تنش خمشی در ضلع BC

و برش داخلی V در مقطع BC خواهد بود

با نوشتن رابطه ی $\Sigma F_x = 0$ داریم :

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \int \sigma_x \cdot dA + H = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-P.x}{I}\int_{c_1}^{a} y\,dA + H = 0 \qquad Q = \underbrace{\bar{y}\cdot A}_{\text{گشتاور اول سطح}} = \int y\cdot dA$$

بنابراین برای جریان برشی داریم

$$q = \tau \cdot t = \frac{V \cdot Q}{I}$$

I   II

Q: گشتاور اول سطح بالای مقطعی که می‌خواهیم برش را در آن محاسبه کنیم

از رابطه I و II نتیجه می‌شود که:

$$\tau \cdot t = \frac{V \cdot Q}{I} \Rightarrow \underbrace{\tau}_{\text{برشی}} = \frac{V \cdot Q}{I \cdot t}$$

← ممان اینرسی نسبت به محور عمود بر امتداد برشی

← ضخامت در مقطعی که می‌خواهیم تنش برشی را بدست آوریم

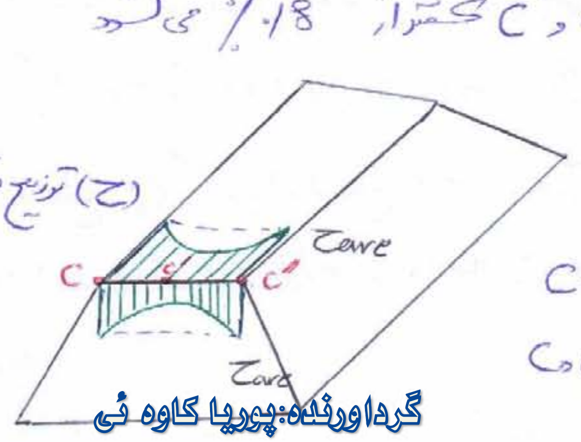
تقریبی که در بالا به آن اشاره شد: اگر مقطع ابزار را در نظر بگیریم در سطح نشان داده شده بخواهیم تنش برشی را محاسبه کنیم، همانطور که در شکل اشاره شده در این مقطع یک تنش برشی در طول و نیز در امتداد عرض مقطع وجود دارد.

اگر در این مقطع با تئوری الاستیسیته بطور دقیق توزیع تنش برشی را نمایش دهیم شکل آن سهمی خواهد شد در صورتی که با فرمول بدست آمده برای تمام نقاط روی تراز نشان داده شده تنش برشی یکسان می‌باشد که این موضوع بیانگر این است که فرمول در امتداد مقطع با فاصله مشخص از تار خنثی مقدار میانگین تنش برشی بدست می‌دهد که دارای تقریب می‌باشد.

نکته: اگر در تیر مستطیلی عرض کوچکتر یا مساوی $\frac{1}{6}$ ارتفاع مقطع باشد دو نقطه C و C' به هم خیلی نزدیک می‌شوند و در محاسبات دقیق نیز به یک توزیع تقریباً یکنواخت می‌رسیم که در این حالت اختلاف میان تنش برشی در نقاط C و C' کمتر از 0.8% می‌شود.

فرمول مهندسی فوق که مقدار میانگین تنش برشی را می‌دهد.

(ح) توزیع دقیق تنش برشی



$C \rightarrow \tau_{min}$

$C'C \rightarrow \tau_{max}$

توزیع تنش برشی ناشی از بارگذاری عرضی در مقطع یک تیر مستطیل شکل

منظور از بارگذاری عرضی ، بارگذاری می باشد که در امتداد طول یک عضو و عمود بر آن صورت می گیرد به عبارت دیگر بارگذاری ایجاد گشتاور خمشی و نیروی برشی در مقاطع مختلف می نماید.

اگر در مقطعی از یک تیر که دارای شکل مربع - مستطیل می باشد در اثر بارگذاری عرضی نیروی برشی V ایجاد شده باشد می خواهیم با استفاده از فرمول بدست آمده برای توزیع تنش برشی را در امتداد مقطع محاسبه کنیم :

$$\tau_{ave} = \frac{3}{2} \cdot \frac{V}{A} \left(\frac{c^2 - y^2}{c^2} \right)$$

بنابراین در مقاطع مستطیل شکل با توجه به فرمول فوق :

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{V}{A}$$

هرچند که در نقاط مشخص شده کمی بیشتر از این مقطع تنش داریم

بین تنش برشی میانگین نسبت به عمق ، بصورت سهمی تغییر می کند .

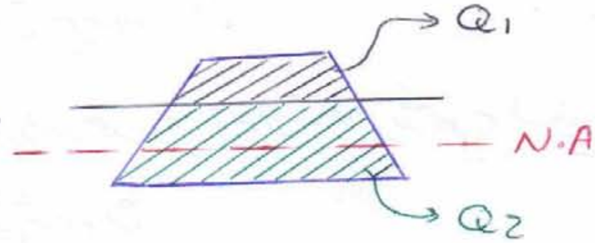
نکته : همیشه در مقطع مربع مستطیل تنش برشی MAX روی محور خنثی رخ می دهد

مقدار تنش برشی در لبه ی ها مقطع به علت وجود سطح آزاد برابر صفر می باشد

یک دلیل دیگر برای آنکه تنش برشی در مقطع مربع مستطیل روی محور خنثی MAX می شود این است که مقدار Q در این مقطع حداکثر خواهد بود ، اما این قانون کلی نیست مثلاً در مقاطع مثلثی یا لوزی شکل تنش برشی MAX روی محور خنثی نمی باشد

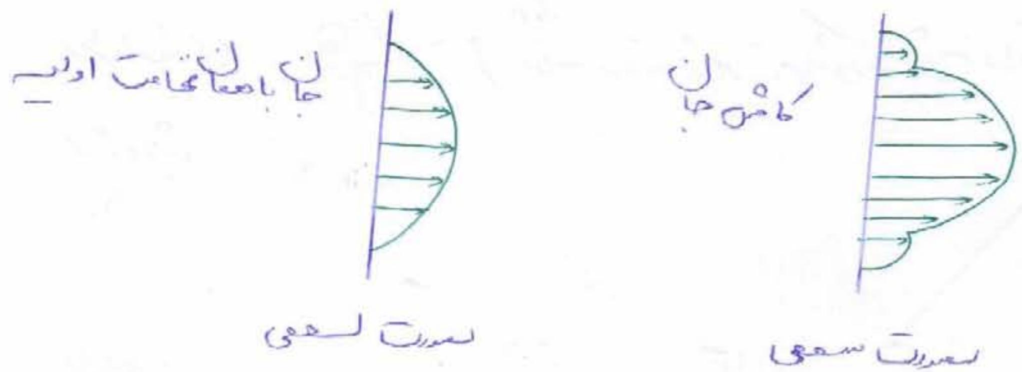
نکته : در یک مقطع Q (گشتاور اول سطح) بالای محور آن مقطع با گشتاور اول سطح (Q) پایین مقطع از لحاظ عددی مساوی ولی مخالف العلامت می باشند

سطحی که می خواهیم برش را ایجاد کنیم



$\tau_{\text{در پایین مشکی}} = \tau_{\text{مرز بالای سبز}} \Rightarrow \frac{\cancel{V}\cdot Q_1}{\cancel{I}\cdot \cancel{t}} = \frac{\cancel{V}\cdot Q_2}{\cancel{I}\,\cancel{t}} \Rightarrow \boxed{Q_1 = Q_2}$

در پروفیل I شکل درصورتی که ضخامت جان را کاهش دهیم تنش برشی افزایش می یابد: ($t \downarrow \Rightarrow \tau \uparrow$)



⊛ قرارداد رسم جریان برش در مقاطع جدار نازک

اگر تیر I شکل بصورت روبرو مفروض باشد هنگامی که تحت برش V واقع شود

اگر مقطعی از بال این تیر را در نظر بگیریم طبق موارد فوق یک تنش برشی طولی وجود دارد و یک تنش برشی معادل که ما مقدار تنش برشی طولی را محاسبه کردیم و آن را از تنش برشی معادل قرار داریم.

مقدار جریان برش در مقطع a—a از رابطه $q = \frac{VQ}{I}$ محاسبه می شود که در آن V نیروی برشی، I ممان اینرسی مقطع و Q انتگرال سطحی می باشد که خارج از مقطع a—a واقع می شود

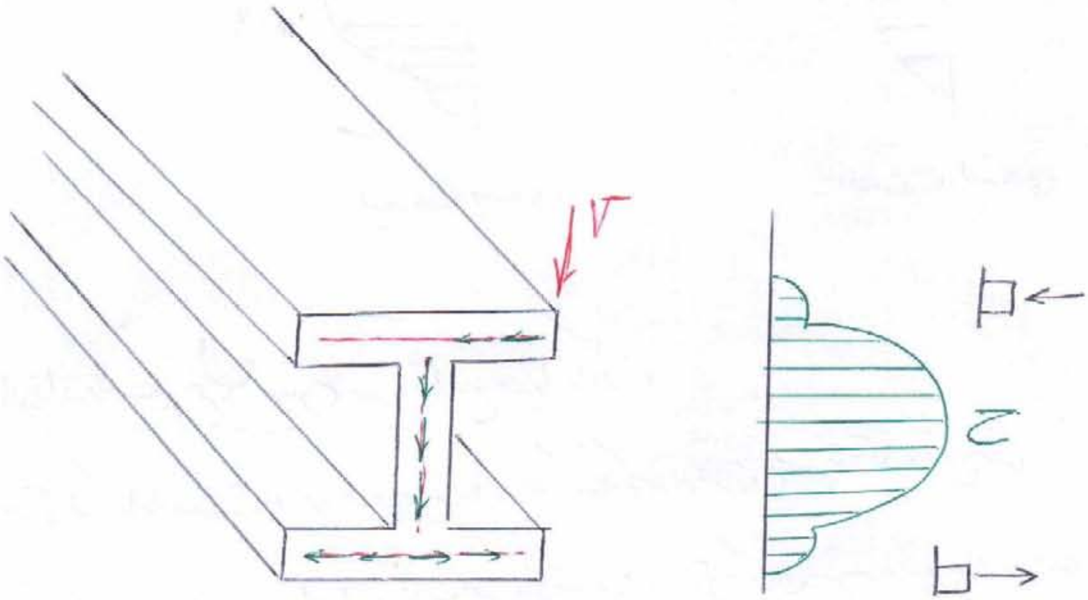
* جهت این جریان برش اگر عمود بر انتهای طولی رسم شود و این کار برای تمام مقاطع انجام شود شکلی حاصل می شود که عملاً نحوه توزیع نیروی برشی را در مقطع نمایش می دهد و به آن دیاگرام جریان برش گفته می شود.

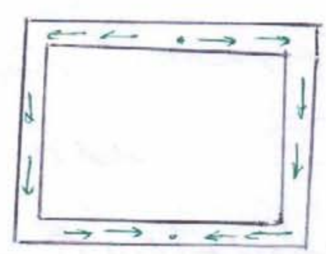
قرارداد رسم جریان برش بصورت زیر خواسته می شود

سطوحی که بالای محور خنثی قرار دارند جهت جریان برش برروی این سطوح طوری می باشد که جریان برش عمود بر مقطع و بصورت کششی می باشد.

برای خطوطی که پایین محور خنثی قرار دارند جریان برش بگونه ای دارد می شود که عمود بر مقطع ایجاد شده و در جهت وارد کردن فشار بر آن می باشد

توجه: رسم جریان برش در مقاطع نازک صادق می باشد که نیروی برشی در صفحه تقارن وارد شود زیرا رابطه ی $q = \frac{VQ}{I}$ برای حالتی اثبات می شود که برش در امتداد محور تقارن مقطع اعمال شده باشد.





محاسبه‌ی تنش برشی در بارگذاری عرضی در مقاطع مرکب (با دو یا چند مصالح مختلف)

اگر به‌طور مثال مقطع از دو ماده با ضریب الاستیک E_1 و E_2 تشکیل شده باشد و تحت برش V قرار گرفته باشد عیناً مثل بحث خمش عادی اگر به عنوان مبنا قرار داده و مقطع معادل را با توجه به $n = \frac{E_2}{E_1}$ معادل می‌کنیم (محاسبه می‌کنیم) پس محل محور خنثی که از مرکز سطح می‌گذرد با توجه به مقطع معادل شده محاسبه می‌شود.

در هر مقطع که خواستیم تنش برشی را محاسبه کنیم Q (گشتاور اول سطح) مورد لزوم را از روی مقطع معادل محاسبه می‌کنیم و داریم:

$$\tau = \frac{V Q_e}{I_e t}$$

تنش ناشی از بارگذاری‌های مرکب:

اگر جسمی در حالت کلی تحت بارهای مختلفی قرار داشته باشد، اگر مقطعی از جسم انتخاب شود در این مقطع ممکن است نیروی محوری، نیروی برشی، گشتاور خمشی و گشتاور پیچشی ایجاد شود.

به عبارتی می‌توان تمام مؤلفه‌های تنش را با هم داشته باشند.

بر اساس اصل جمع آثار می‌خواهیم توان تنش‌های ناشی از هر یک از نیروها را طی را به‌طور جداگانه پیدا کرده و سپس با توجه به جهت تنش‌ها، تنش‌های هم نام را با هم جمع یا کم نمود.

این امر باید ۳ شرط زیر قابل اجرا می‌باشد:

① تغییرات تنش‌ها از تنش حد تناسب مصالح بیشتر نشود

② مقطعی که در نظر می‌گیریم به محل اعمال بار نزدیک نباشد (به واسطه‌ی بحث تمرکز تنش)

③ تغییر شکل‌های ناشی از یک مؤلفه‌ی تنش در محاسبه مؤلفه‌ی دیگر تنش بی تأثیر باشد

جریان برشی $q = \frac{VQ}{I}$

براساس فرمول $\tau = \frac{VQ}{It}$ ، τ_{ave} را می دهد در یک مقطع مستطیلی تحت اثر برش قائم V ، این تنش برشی توزیع تنش برشی در مقطع عرضی تیر مستطیلی سهمی شکل می باشد و تنش برشی در محل محور خنثی MAX می باشد و مقدار آن 1.5 برابر تنش برشی متوسط می باشد

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\left(\frac{V}{A}\right)$$

نکته: در مقاطعی که پهنا ثابت می باشد (مثل مقاطع مستطیلی شکل) برای حداکثر شدن تنش برشی باید ممان استاتیک حداکثر شود.

و در محل محور خنثی خواهد بود که ممان استاتیک حداکثر می باشد
ممان اینرسی

در مقاطعی که پهنا تغییر می کند بسته به نوع مقطع می تواند محل تنش برشی حداکثر منطبق بر محور خنثی باشد یا نباشد

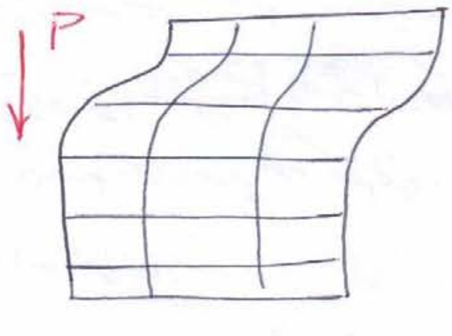
مثلاً در مقاطع دایروی و بیضوی محل تنش برشی حداکثر روی اقطار مقطع (که محور خنثی نیز می باشند) می باشد.

اما در مقاطع مثلثی یا لوزی شکل محل تنش برشی حداکثر بر محور خنثی مقطع منطبق نمی باشد

تذکر:

در تیرهای ساخته شده از دو یا چند مصالح مختلف می توان از رابطه $\tau = \frac{VQ}{It}$ استفاده کرد به طوری که I و Q براساس مقطع تبدیل شده اما t از پهنای واقعی (تبدیل نشده) محاسبه می شود.

تغییر شکل برشی ناشی از تنش های برشی بدون در نظر گرفتن تنش ها قائم به صورت زیر می باشد:



تغییر شکل برشی به وجود آمده در تمام المان هایی که از محور خنثی به یک فاصله می باشند یکسان خواهد بود در نتیجه صفحه ها به علت الزام یک سری سازگاری ها، تفاوت هایی وجود خواهد داشت

تنها می‌توان برای تعیین تنش‌ها و جریان برشی استفاده کرد:

۱- در جاهای متقارن نسبت به صفحه تقارن جریان برشی یکسان می‌باشد

اگر محور خنثی (N.A) نیز محور تقارن باشد نقاط متقارن نسبت به این خط دارای جریان‌های برشی مخالف العلامت می‌باشند پس بر محور خنثی جریان برشی صفر می‌باشد

توجه: برای به وجود نیامدن پیچش حول محور طولی عضو تحت بار عرضی باید بار در صفحه تقارن باشد.

برای هر مقطع نقطه‌ای وجود دارد که اگر نیروی برشی (بار عرضی) به آنجا اعمال شود این پیچش به وجود نخواهد آمد پس در مقاطعی که صفحه‌ی تقارن ندارند نیز می‌توان بدون به وجود آمدن پیچش بارگذاری عرضی نمود این نقطه را اصطلاحاً مرکز برش نامند.

برای بدست آوردن محل مرکز برش باید جریان برشی در مقطع را بدست آورده و سپس گشتاور ناشی از بار خارجی را مساوی گشتاور ناشی از برش در مقطع قرار دهیم به طوری که هیچ گشتاوری در مقطع در مجموع وجود نداشته باشد

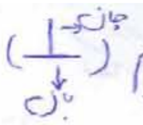
مرکز برش:

در بارگذاری نامتقارن اعضای جدار نازک برای اینکه عضو تحت اثر برش V بدون پیچش خم شود باید نیروی برشی در نقطه‌ای وارد شود که **مرکز برش** گفته می‌شود

در واقع مرکز برش نقطه‌ای می‌باشد که گشتاورهای پیچشی حاصل از تنش‌های برشی توزیع شده در مقطع (ناشی از V) حول آن نقطه همدیگر را خنثی می‌کنند.

توجه: به مرکز برش، مرکز پیچش هم گفته می‌شود زیرا اگر نیروی برشی در مرکز برش اثر کند مقطع به پیچش نمی‌افتد و پیچش مقطع صفر خواهد بود

- جریان‌های برشی در محل اتصال اجزای مقطع جدار نازک دارای خاصیت **پیوستگی** می‌باشند به این معنا که جریان برش ورودی با جریان برش خروجی مساوی می‌باشد

مثلاً اگر المان محل تلاقی جان و بال را در یک مسیر تحت اثر برش به موازات جان در نظر بگیریم


با توجه به تعادل مثلث داریم :

$$(\text{جریان برشی})\quad \overset{\text{web}}{q_w} = \overset{\text{flange}}{q_f} + q_f = 2q_f$$

$$q_w = 2q_f \Rightarrow \tau_w \times t_w = 2\tau_f \times t_f$$

جریان برشی ناشی از پیچش حتماً یک مسیر بسته هم جهت با گشتاور پیچشی اعمال شده را طی می‌کند. (ولی) جریان برشی ناشی از برش یک جریان بسته نمی‌باشد

برای مقاطعی که تنها از اعضای افقی و عمودی تشکیل شده‌اند می‌توان فاصله مرکز برش تا یک محور مشخص را از رابطه ی :

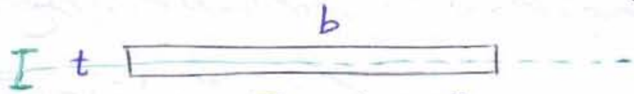
$$e = \frac{\sum I_i \bar{x}_i}{\sum I_i}$$

بطوری که I_i ممان اینرسی المان شماره i ام نسبت به تار خنثی کل مقطع می‌باشد و $\bar{x}_i$ فاصله‌ی مرکز سطح المان شماره i تا مبدأ محور مورد نظر می‌باشد.

← در محاسبه ممان اینرسی (I) در مقاطع جدار نازک به واسطه‌ی ناچیز بودن ضخامت نسبت به ابعاد دیگر برای محاسبه ممان اینرسی بخش‌های موازی با محور خنثی فقط ترم Ad^2 وجود دارد و ترم $\frac{1}{12}bh^3$ حذف می‌شود

اگر از تار خنثی فاصله داشت

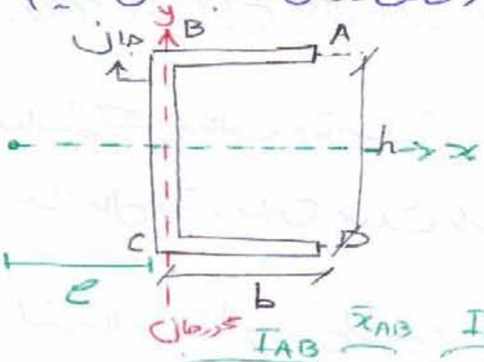
مثال-



$$I_y = \frac{1}{12}bt^3$$

← چون هر چیز کوچک به توان 3 برسد کوچک می‌شود بنابراین I_y نیز ناچیز است

مثال – در مقطع ناودانی زیر فاصله‌ی مرکز برش تا جان ناودانی را محاسبه نمید؟ (ضخامت ناودانی را ثابت فرض کنید)



حل:

$$e = \frac{\sum I_i \bar{x}_i}{\sum I_i}$$

$$= \frac{I_{AB} \times \bar{x}_{AB} + I_{BC} \times \bar{x}_{BC} + I_{CD} \times \bar{x}_{CD}}{I_{AB} + I_{BC} + I_{CD}}$$

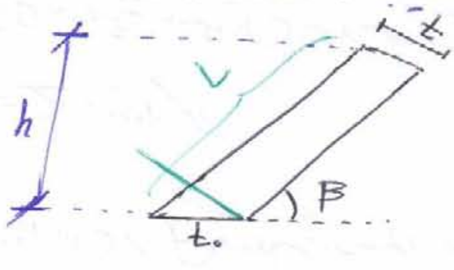
$$e = \frac{\underbrace{(bt)\left(\frac{h}{2}\right)^2}_{I_{AB}} \times \underbrace{\frac{b}{2}}_{\bar{x}_{AB}} + \underbrace{\frac{th^3}{12}}_{I_{BC}} \times 0 + \underbrace{(bt)\left(\frac{h}{2}\right)^2}_{I_{CD}} \times \frac{b}{2}}{(bt)\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{th^3}{12} + (bt)\left(\frac{h}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{b^2 t h^2}{4}}{\frac{b t h^2}{2} + \frac{t h^3}{12}} = \frac{b}{2 + \frac{h}{3b}}$$

نکته: در اعضا جدار نازک که محاسبات مربوط به پخش تنش برشی باید به دو مورد زیر توجه داشت:

1- مساحت مقطعات شیب دار از حاصل ضرب طول قائم (h) در ضخامت آن بدست می آید

2- در محاسبه ممان اینرسی و Q از ضخامت واقعی عضو شیب دار استفاده می شود



$$t_0 = \frac{t}{\sin\beta}$$

$$A = h t_0$$

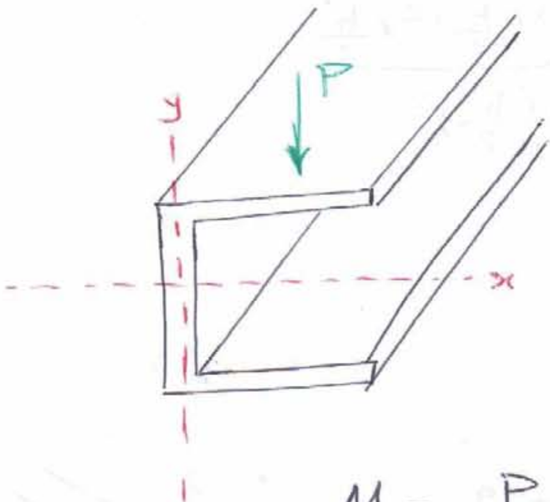
$$Q = A\bar{y} = (h \cdot t_0)\left(\frac{h}{2}\right)$$

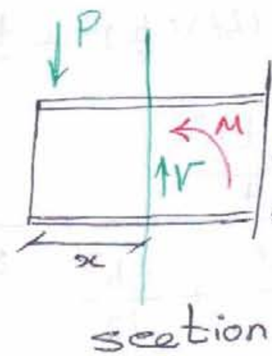
$$I = \frac{1}{3} t \cdot h^3$$

بارگذاری نامتقارن جدار نازک و محاسبه مرکز برش :

همانطور که در مطالب قبل اشاره شد ، برش ایجاد شده در اثر بارگذاری عرضی در صفحه تقارن قائم عضو اعمال می شود در این صورت رابطه‌ی : $\tau = \frac{VQ}{It}$ برقرار است .

مثلاً به شکل در مقطع ناودانی شکل زیر





$$M = -P \cdot x$$
$$V = -P$$

در اثر اعمال بار P در مقطع ناودانی ، مقطع ناودانی شکل هم خم می شود و هم می پیچد و چون مقطع جدار نازک است از برش نسبت نیروی پیچشی تنش دوران به وجود می آید برای محاسبه تنش ناشی از بارگذاری عرضی نمی توان از رابطه $\tau = \frac{VQ}{It}$ استفاده کرد .

برای این که استفاده از این فرمول ممکن شود مطرح می شود که آیا در این مقطع می توان نقطه ای را پیدا کرد که اگر بار P از آن یا در آن امتداد اعمال شود پیچش نخورد ؟

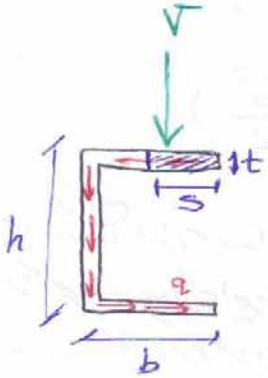
پس اصطلاحاً این نقطه را که مرکز برش می نویسیم ، برش از آن بگذرد پیچش در مقطع ایجاد نمی شود .

در این راستا فرضیات زیر را می پذیریم :

۱- عضو باید رفتار الاستیک داشته باشد یعنی تابع قانون هوک صادق است

۲- مقطع جدار نازک باشد یعنی ضخامتش در برابر ابعادش قابل صرف نظر کردن باشد (در مقاطع جدار نازک

معمولاً ابعاد و شکل را ملاک محاسبات قرار می‌دهند)



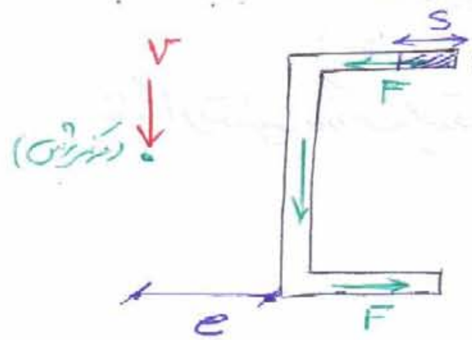
۳) برای محاسبه مرکز برش مراحل زیر طی می‌شود:

- ابتدا با برش حاصل شکل توزیع جریان برش در مقطع رسم می‌شود
- با توجه به مثالی که در قبل حل شد (e محاسبه می‌شود)

توجه:

مرکز برش وابسته به ضخامت نیست ولی در جواب نهایی t نباید وجود داشته باشد

برای محاسبه نیروی ایجاد شده در جهت المانی به طول S را در آن انتخاب می‌کنیم و حتماً باید این المان در ابتدای قطعه مورد نظر انتخاب شود. بنابراین مقدار نیروی ایجاد شده در المان S برابر است با:



$$V \cdot e = F \cdot h$$

$$dF = q \cdot ds \longrightarrow F = \int q \cdot ds$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{V(\overbrace{s \cdot t}^{A} \cdot (\frac{h}{2}))}{I}$$

بنابراین داریم:

$$F = \int_0^b \frac{V \cdot t (\frac{h}{2})}{I} \cdot s \, ds$$

$$F = \frac{V t h}{2I} \left(\frac{b^2}{2} \right)$$

پس از محاسبه نیروی داخلی برابر باشد محل مرکز برش، برش اعمال شده بر مقطع را باید در نقطه‌ای قرار دهیم که پیچش هم جهت و هم مقدار پیچش ناشی از نیروهای داخلی ایجاد کند

نکته: مرکز برش جزء مشخصات هندسی هر مقطع می‌باشد و به جنس مصالح و یا بار وارده هیچ گونه ارتباطی ندارد

$$V \cdot e = F \cdot h \Rightarrow V \cdot e = \frac{V \cdot t \cdot h}{2I}\left(\frac{b^2}{2}\right) \cdot h$$

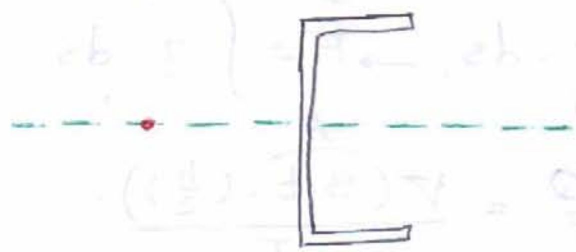
$$\rightarrow e = \frac{t h^2}{2I}\left(\frac{b^2}{2}\right)$$

- در محاسبه ممان اینرسی مقاطع جدار نازک آن قطعاتی که موازی محور خنثی هستند فقط ترم Ad^2 وجود دارد.
- برای محاسبه ممان اینرسی در مقاطع غیرجدار نازک اگر یکی از اضلاع منطبق بر محور خنثی باشد برای محاسبه ممان اینرسی حول آن $\frac{1}{12}$ تبدیل به $\frac{1}{3}$ می شود.

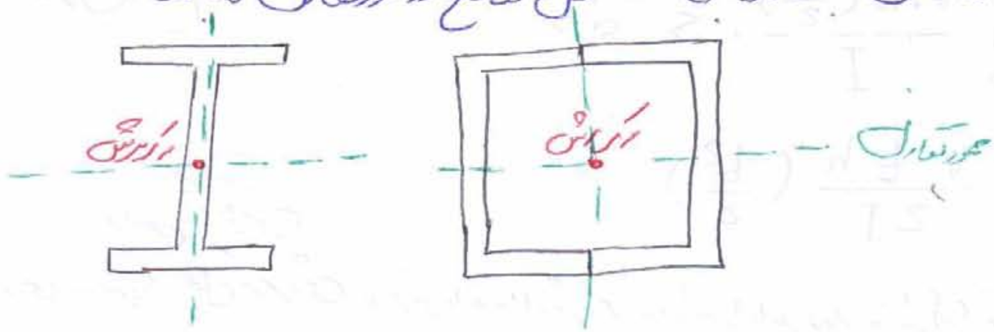
نکات محل مرکز برش

1- مقاطعی که از اتصال دو قطعه مستطیل شکل بهم ساخته شده اند مرکز برششان در محل برخورد دو مستطیل می باشد

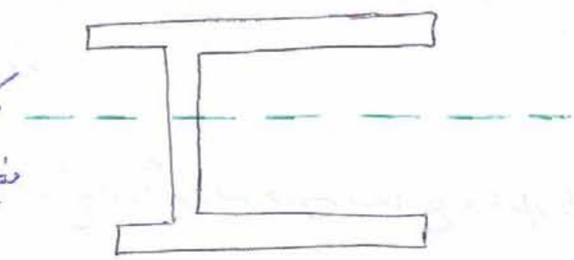
2- اگر مقطعی دارای یک محور تقارن باشد، مرکز برش نقطه ای روی آن محور تقارن می باشد



3- اگر مقطعی دارای دو محور تقارن باشد مرکز برش همان محل تقاطع دو محور تقارن می باشد.



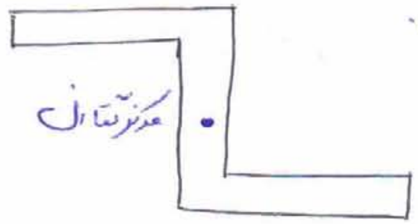
مثال:

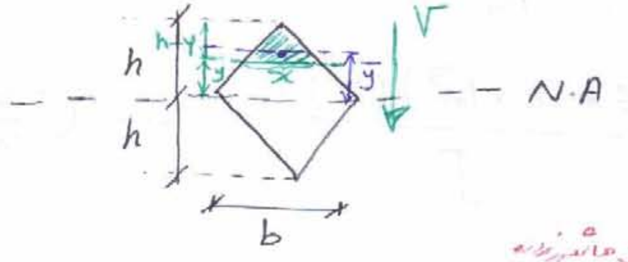


مرکز برش به مرکز سطح نزدیکتر می شود

منفی e نشانه کوچکتری دارد.

اگر جسمی دارای مرکز تقارن باشد، مرکز برشش همان مرکز تقارن است.





مثال - الف - تعیین مرکز برش؟

تعیین k در رابطه $\tau_{max} = k\left(\frac{V}{A}\right)$

$\bar{y}$ فاصله از مرکز سطح

مساحت مثلث هاشور خورده

$$\tau = \frac{V\cdot Q}{It} \Rightarrow^{*} \tau = V\cdot \frac{\left[\left(\frac{x(h-y)}{2}\right)\cdot\left(\frac{h-y}{3}+y\right)\right]}{2\left(\frac{bh^3}{12}\right)\cdot x} = \frac{V}{bh^3}(h-y)(h+2y)$$

از طریق تشابه داریم $\Rightarrow \frac{x}{b} = \frac{h-y}{h} \Rightarrow x = \frac{b(h-y)}{h}$

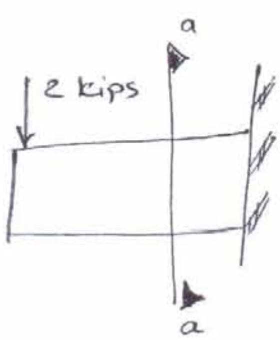
برای محاسبه τ_{max} بایستی $\Rightarrow (\tau \text{ مشتق } = 0) \Rightarrow \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \Rightarrow$

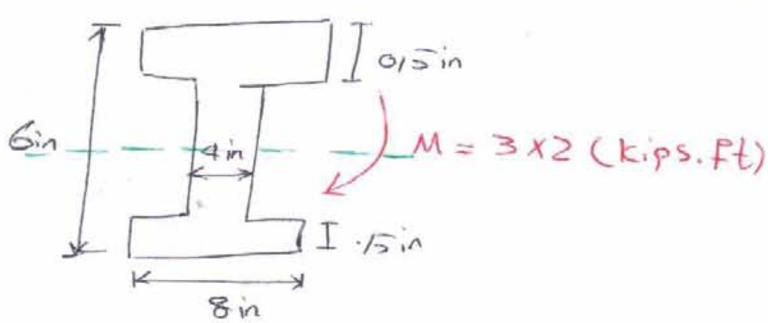
$$A\cdot\left[-h-2y+2h-2y\right]=0 \qquad \boxed{y = h/4}$$

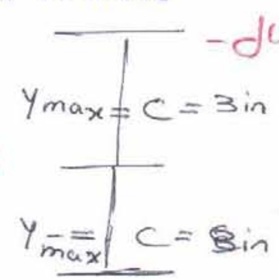
* با جایگذاری $y=\frac{h}{4}$ در رابطه * $\Rightarrow \tau_{max} = \frac{V}{bh^3}\left(\frac{3h}{4}\right)\left(\frac{3h}{2}\right)$

$$= \frac{9Vh^2}{8bh^3} = \frac{9}{8}\frac{V}{A} \Rightarrow k = \frac{9}{8}$$

مثال - σ_{max} و τ_{max} ؟







حل:

$$V = -P = -2 \text{ kips}$$

$$M = -P \cdot x = -6 \, (\text{kips-ft})$$

$$I = \frac{8(6)^3}{12} - \overset{\text{تعداد}}{2} \times \left(\frac{2 \times 5^3}{12} \right) = \dots \, (\text{in}^4)$$

$$\sigma_{max} = \frac{MC}{I} = \frac{(6 \times 12 \times 10^3)(3)}{I} = \dots \left(\frac{\text{Psi}}{\text{in}^2}\right)$$

$$\tau_{max} = \frac{(2 \times 10^3)\, Q}{I \cdot 4 \text{ inch}}$$

I محاسبه کردیم

$$Q = \underbrace{(8 \times 0/5)}_{\text{مساحت مستطیل بالا}} \times \overset{\bar{y}}{2.75} + \underbrace{(2.5 \times 4)}_{\text{مساحت مستطیل پایین}} \times 1.25$$

فاصله مرکز سطح مستطیل بالا تا تار خنثی