ریاضی مهندسی پیشرفته

تهیه و تنظیم:

دکتر رفیع زاده

ریاضی مهندسی پیشرفته

حل معادلات دیفرانسیل
- ODE معمولی
- PDE جزئی

حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل جزئی

تحلیل عددی
معادلات جبری
curve fitting
انتگرال گیری
ODE
PDE

Refference:

① partial differential Eq.s for scientis & Engineers
Farslaw S.J
o

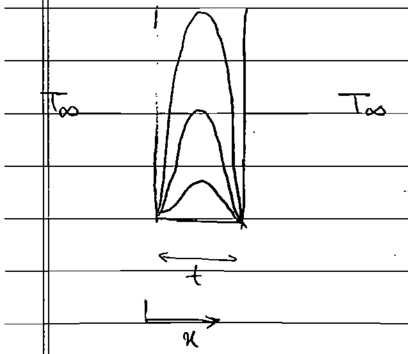
② Applied Numerical Analysis
Carnalan

partial Differential Eqs.

بیان پدیده‌ای فیزیکی در قالب معادلات ریاضی یکی از مهمترین مباحث در فرآیند مهندسی شیمی است. که به این امر فرمولاسیون می‌گویند. مدلسازی نیز گفته می‌شود

modiling { formulation
Solution

مثال) صفحه‌ای به ضخامت L در دمای اولیه T_i قرار دارد. این صفحه را در محیطی قرار می‌دهیم که دمای آن T_∞ می‌باشد. ضریب انتقال حرارت جابجایی بسیار زیاد بوده به گونه‌ای که دمای سطح این صفحه مساوی دمای محیط فرض می‌شود. معادله‌ای که توزیع دما درون این صفحه را بدست آورید.



③ Applied numerical methods
Gerald & —

④ رفیع‌زاده — کاربرد ریاضیات در مهندسی شیمی رفیع‌زاده

⑤ نیک‌آذر — " " "

⑥ نیک‌آذر + فراط — روش‌های عددی در مهندسی شیمی

⑦ Conduction heat transfer
Alpaci

⑧ Advaneed engireering mathemathics

میان ترم 20-25 %

پایان ترم 40-50 %

تکالیف و پروژه % 25 _ 40

برنامه کامپیوتری
pascal
C++
Fortran
C#
✓ matlab

① جمله انتقال انرژی توسط جریان جسم

$$\rho c\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \cancelto{0}{v_x\frac{\partial T}{\partial x}} + \cancelto{0}{v_y\frac{\partial T}{\partial y}} + \cancelto{0}{v_z\frac{\partial T}{\partial z}}\right) =$$

$$-\left[+\frac{\partial q_x}{\partial x} + \cancelto{0}{\frac{\partial q_y}{\partial y}} + \cancelto{0}{\frac{\partial q_z}{\partial z}}\right] -$$

$q_x = -k\frac{\partial T}{\partial x}$

Flux of heat transfer

$$T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) -$$

تولید انرژی ناشی از تراکم پذیری / $\nabla . v$ دیورژانس سرعت

صرفنظر می کنیم

تولید انرژی ناشی از تنش نرمال ←

$$\left[\tau_{xx}\cancelto{0}{\frac{\partial v_x}{\partial x}} + \tau_{yy}\cancelto{0}{\frac{\partial v_y}{\partial y}} + \cancelto{0}{\tau_{zz}\frac{\partial v_z}{\partial z}}\right]$$

$$-\left[\tau_{xy}\left(\cancelto{0}{\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}}\right) + \tau_{xz}\left(\cancelto{0}{\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}}\right) + \tau_{yz}\left(\cancelto{0}{\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}}\right)\right]$$

صرفنظر می کنیم

تولید انرژی ناشی از اصطکاک لایه های مختلف

$+\cancel{\dot{q}}$ تولید نداریم

① انتقال انرژی توسط جریان جسم : Convective term

$$\Rightarrow \rho c\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-k\frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

$$\rho c\frac{DT}{Dt} =$$

نکته :

گرادیان : $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k$

دیورژانس : $\nabla . = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$

۱- اسکالر به جهت بستگی ندارد

۲- بردار به یک جهت بستگی دارد $v = v_x i + v_y j + v_z k$

۳- تانسور به دو جهت بستگی دارد. $\tau_{xy} = -\mu\frac{\partial v_x}{\partial y}$

گرادیان مرتبه را یک عدد بالا می برد

دیورژانس مرتبه را یک عدد پایین می برد.

$q = q_x . i + q_y . j + q_z . k$ بردار است آیا

دیورژانس تبدیل می شود اسکالر

$$\frac{\partial q_x}{\partial x},\ \frac{\partial q_y}{\partial y},\ \frac{\partial q_z}{\partial z}$$

[illegible]

نمونه حل مسئله : معادله حاکم

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \underbrace{\boxed{\frac{k}{\rho c}}}_{\alpha}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

خواص فیزیکی و حرارتی را ثابت فرض می کنیم.

$t = 0 \quad T = T_i$

$x = 0 \quad T = T_\infty$

$x = L \quad T = T_\infty$

فرم عمومی معادلات دیفرانسیل جزئی در ریاضیات مهندسی:

برای حل مسئله باید ابتدا فرم عمومی معادله دیفرانسیل جزئی را توضیح بدهیم

$$\underbrace{f(x,y)}_{a}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \underbrace{g(x,y)}_{b}\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \underbrace{h(x,y)}_{c}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} =$$

$$R\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

علت اینکه می‌گوییم در ریاضیات مهندسی به خاطر این است که در مهندسی

هیچ‌گاه حجم مرتبه معادله دیفرانسیل بالاتر از مرتبه ۲ نمی‌شود. در حالیکه

در ریاضی می‌تواند مرتبه عمومی معادله دیفرانسیل بالاتر نیز برود.

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta < 0 \longrightarrow$ Elleptic بیضی

$\Delta = 0 \longrightarrow$ parabolic سهمی

$\Delta > 0 \longrightarrow$ hyperbolic هذلولی

حال در مسئله خودمان داریم $\frac{\partial T}{\partial t} \sim R$

مثال برای معادلات سهمی

$\rightarrow a = \alpha$

$b = 0 \Rightarrow \Delta = 0$ parabolic

$c = 0$

معادله

مثال دیفیوژن برای ۲ بیضی

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - kc = 0$$

$a = 1$

$b = 0 \quad \Delta = < 0$ Elleptic

$c = 1$

مثال برای معادلات هذلولی:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0$$

$a = 1, \; b = 0, \; C = -1 \rightarrow \Delta > 0$

سه نوع شرط مرزی داشتیم:

کلاسیک

1- $x = a \quad u - u_a$ حل Drichleh

2- $x = a \quad u' = u'_a \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0$ Newmann

شرط مرزی دوم

3- $x = a \quad u' = NU \quad \underbrace{-D\frac{\partial c}{\partial x} = kC}$ Rabin

شرط مرزی سوم

4- non-classic

فقط دو نوع شرط مرزی داریم کلاسیک و غیر کلاسیک

کلاسیک خودش به سه دسته تقسیم می‌شود.

بنابراین معادله مثال ما یک معادله از نوع کمی با شرط مرزی از نوع

drichleh دیریکله می‌باشد

برای حل تحلیلی معادله دیفرانسیل ۵ روش وجود دارد.

1- Seperation ← روش ضربی

2- laplace

3- Combination

4- انتگرال فوریه

5- variation Calculos / حساب وردشی)

برای حل عددی معادلات دیفرانسیل ۴ روش وجود دارد

1- finite differences

2- 〃 elements

3- 〃 volumes

4- 〃 boundary element

1- روش Seperation :

$T(t,x) = f(x) \cdot g(t)$

حاصلضرب دو

طبق این اصل تابع را به دو تابع جداگانه تبدیل می‌کنیم.

$$\frac{1}{\alpha g}\frac{dg}{dt} = \frac{1}{f}\frac{d^2f}{dx^2} = -\lambda^2$$

$$\begin{cases} g = C_1 e^{-\alpha\lambda^2 t} \\ f = C_2 \sin\lambda x + C_3 \cos\lambda x \end{cases}$$

حال برای حل شدن معادله باید برای شرایط مرزی تبدیل انجام دهیم :

$$\frac{\overset{\partial\theta}{\boxed{\partial T}}}{\partial t} = \alpha\frac{\overset{\partial^2\theta}{\boxed{\partial^2 T}}}{\partial x^2} \qquad \theta = T - T_\infty$$

$t=0 \qquad T=T_i \longrightarrow \theta=\theta_i = T_i - T_\infty$

$x=0 \qquad T=T_\infty \longrightarrow \theta=0 \longrightarrow f(0)=0$

$T=T_\infty \longrightarrow \theta=0 \longrightarrow f(L)=0$

$$\Rightarrow \theta(t,x) = f(x).\,g(t)$$

$$\frac{1}{\alpha g}\frac{dg}{dt} = \frac{1}{f}\frac{d^2 f}{dx^2} = -\lambda^2$$

$$\begin{cases} g = c_1 e^{-\alpha\lambda^2 t} \\ f = c_2 \cancel{\sin\lambda x} + c_3 \cos\lambda x \end{cases} \qquad \lambda_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} C_n.\, e^{-\alpha\lambda_n^2 t} \sin\frac{n\pi x}{L}$$

برای پیدا کردن C_n از خاصیت تعامد استفاده می‌کنیم.

$$\int_0^{\pi} \sin kx .\sin nx .\,dx \begin{cases} 0 & k \neq m \\ \pi/2 & k = m \end{cases}$$

$$\int_0^L \left(\theta_i = \sum C_n .\sin\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$\theta_i \underbrace{\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L}\,dx}_{\frac{L}{n\pi}(1-\cos n\pi)} = C_n \underbrace{\int_0^L \sin^2\frac{n\pi x}{L}\,dx}_{L/2}$$

$$C_n = \frac{2\theta_i}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T-T_\infty}{T_i-T_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(1-\cos n\pi)}{n\pi} e^{-\alpha\lambda_n^2 t} \sin\frac{n\pi x}{L}$$

برنامه مطلب MATLAB ورژن ۷ کافی است ولی [illegible] می‌شود.

دستور رسم در Matlab ← plot می‌باشد

حال معادله بالا را با Matlab رسم می‌کنیم.

برای نوشتن برنامه از قسمت Command window استفاده می‌کنیم.

می‌توانیم از M file که آیکون سمت چپ است استفاده کنیم.

```
x=[1, 2, 3]
y=2x+1
plot(x,y)↵
```

دستور clear تمام متغیرهای درون حافظه را پاک می‌کند.

همیشه این دستور را می‌دهیم.

```
clear

t=10 ; alfa =1e-6; L=0.1 ;
;x=[0 0.01   0.02   0.03  0.04 . . . .      0.1];
```

حتی ./ می‌گذاریم یعنی [illegible]

۸۹/۷/۲۲ جلسه سوم

وقتی تابعی بصورت سری نوشته شود مثل جواب مسئله قبل ، که سری فوریه استفاده شده است .

مثال ۲ :

$$f(x)\,y'' + g(x)\,y' + h(x)\,y = 0$$

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - p^2)\,y = 0 \qquad \text{Bessel's eq.}$$

$$y = C_1 J_p(x) + C_2 J_p(x)$$

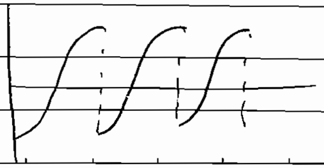
$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}}{(k+p)!\; p!}$$

$$y = \sum_{p=0}^{\infty} a_n x_n^{a+c}$$ تقریب زده شده است.

سری فوریه می گوید که هر تابع متناوب را به صورت ترکیب خطی از توابع متعامد نوشت (تقریب زد)

periodic function:

$$f(x+nT) = f(x)$$ دوره تناوب T



```
so      x = 0.05 ;
        S = 0
        for n=0 : 11 ;
          s=s+2*(1-Cos(n*pi))/n/pi*exp(-alfa*
                                    (n*pi/L)^2*t);
                ... sin
          end
           T=s
```

برای جلسه بعد همین برنامه را اجرا بدهیم.

انتهای کتاب فورتر هینی و انتهای کتاب کرل

نام سه کتاب راهنما را بنویسد دکتر فداکاری

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot dx = \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} a_0\, dx}_{a_0 2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \overset{0}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\cdot dx} + b_n \overset{0}{\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx}\right)$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot dx$$

برای بدست آوردن a_n :

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right) \times \cos nx\, dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\; f(x)\cdot dx = a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx}_{\pi}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\cdot f(x)\cdot dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\cdot f(x)\cdot dx = 0 + 0 + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\cdot dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx\; f(x)\cdot dx$$

---

orthogonal function:

$$\int_a^b w(x)\, \varphi_n(x)\, \varphi_m(x)\, dx = 0$$

weighting function

وقتی این انتگرال صفر شود که φ_m , φ_n توابع متعامد باشند.

$\left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\}$ trigonometric function

$\left.\begin{matrix}J_p(x)\\ Y_p(x)\end{matrix}\right\}$ Bessel's

$\left.\begin{matrix}P(x)\\ Q(x)\end{matrix}\right\}$ Legendre eqs.

بنابراین $f(x)$ را براساس زیر می‌توانیم بنویسیم:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

یا

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

فرض کنیم $T = 2\pi$ (دوره تناوب 2π داریم) ; $-\pi , \pi$

برای بدست آوردن a_0 از دو طرف انتگرال می‌گیریم:

حال دوباره مسئله را حل می‌کنیم،

$\Theta(x,t)=f(x)\cdot g(t)$

$\frac{1}{\alpha g}\frac{dg}{dt}=\frac{1}{f}\frac{df}{dx}=-\lambda^2 \longrightarrow$ از لحاظ ریاضی علامت منفی را به خاطر این انتخاب می‌کنیم که به سری فوریه برسیم و به توابع متعامد برسیم. تابع f باید به توابع متعامد برسد

$f=C_1\sin\lambda x+C_2\cos\lambda x$

شرط مرزی در $x=L$, $x=0$ مقدار داریم

$g=C_3 e^{-\alpha\cdot\lambda^2\cdot t}$

شرایط مرزی باید همگن (هموژن) باشد که در این حالت هموژن می‌شوند

1- $u=0$ drichlet

2- $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ Neumman

3- $\frac{\partial u}{\partial x}=Nu$ Rabin

با استفاده از شرط ۱

$\Rightarrow \frac{\partial\theta}{\partial x}=0 \Rightarrow \frac{df}{dx}=0 \Rightarrow C_1\lambda\cos\lambda x-C_2\lambda\sin\lambda x\Big|_{x=0}=0$

$\Rightarrow C_1\lambda=0 \Rightarrow C_1=0$

$\Rightarrow f=C_2\cos\lambda x$ (تابع ویژه یا eigen function)

که تابع ویژه در مختصات کارتزین عمدتاً (همیشه) $\cos$, $\sin$ هستند

اگر دوره تناوب به جای 2π از T استفاده کنیم از تغییر متغیر زیر

استفاده می‌کنیم و در روابط جایگذاری می‌کنیم: $t=\frac{T}{2\pi}x$ یا

$x=\frac{2\pi}{T}t$

اگر تابع $f(x)$ زوج باشد ← فقط (تابع) $\cos$ و a_0 می‌ماند

باطل

زیرا $\cos(-x)=\cos(x)$

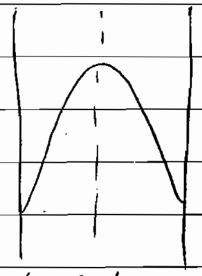
← $b_n=0$

اگر تابع $f(x)$ فرد باشد ← فقط $\sin$ ها باقی می‌ماند

$\sin(x)=-\sin(-x)$ ← $a_0=a_n=0$

اگر در پاسخ تابع شکل قبلی، نخواهیم $\sin$ در جواب باشد

به جای آن $\cos x$ داشته باشیم باید شرایط مرزی را عوض کنیم



$x=0$ $\frac{\partial T}{\partial x}=0$

$x=L/2$ $T=T_\infty$

~~$x=0$~~ $x=L/2$

↓

$x=0$

جدید

در مختصات استوانه‌ای تابع مشخصه عموماً بسل می‌شود.

در مختصات کروی با تغییر متغیر می‌تواند شد $\sin$ و $\cos$

و با تغییر متغیر دیگری تبدیل به بسل و یا لژاندر می‌شود

حال از شرط مرزی زیر استفاده می‌کنیم:

$$0 = C_2 \cos\lambda\frac{L}{2} \Rightarrow \cos\frac{\lambda L}{2} = 0$$

$$\frac{\lambda L}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

eigen value ← $\lambda_n = (2n+1)\frac{\pi}{L}$

پس:

$$\theta = \sum C_n e^{-\alpha\lambda_n^2 t} \cos\frac{(2n+1)\pi x}{L}$$

حال با استفاده از شرط اولیه (ضرب در eigen func می‌کنیم و انتگرال می‌گیریم)

$$\int_0^L \left(\theta_i = \sum C_n \cos\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right) \cos\frac{(2n+1)\pi x}{L}$$

$$\frac{\theta_i \int_0^L \cos\frac{(2n+1)\pi x}{L}}{\int_0^L \cos^2\frac{(2n+1)\pi x}{L}\,dx} = C_n$$

مثال: یک سیال تراکم ناپذیر با دمای T_0 وارد فضای بین دو صفحه موازی و طویل تزریق می‌شود. فاصله دو صفحه $2h$ است. دمای صفحه‌ها T_w می‌باشد. پروفیل سرعت plug می‌باشد. معادله حاکم تغییرات دما در این سیال را بدست آورید. فقط از گرمایش ویسکوز صرفنظر کنید. فرآیند steady state می‌باشد.

حل:

$$\rho c v_x \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial q_y}{\partial y} \qquad q = -k\frac{\partial T}{\partial y}$$

$$\rho c v \frac{\partial T}{\partial x} = k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

مثال: برای این [illegible] می‌توانند [illegible] x و y [illegible]

```
Ti = exp(-alfa*(n*L/pi).^2*t)
```

یعنی تک تک اعضای ماتریس را به توان ۲ برسان اگر نبود
آنگاه باید کل ماتریس را به توان ۲ می‌رساند که امکان‌پذیر
نبود و خطا می‌داد زیرا فقط ماتریس‌های مربعی را می‌توان به توان
رساند.

~~clear~~

~~L=0.1~~

اگر در سطر اول function بنویسیم [illegible] که باید ورودی و
خروجی داشته باشیم.

```
plot(x,T,'r');
```
یعنی نمودار را قرمز کند

```
figure(1): plot
```

عمق $\frac{\theta}{\theta_i}$ را برحسب cos و با حساب sin,cos یعنی
مبدأ فرایند ۰ و π/2 باشد رسم کنیم و ببینیم

مقاله درباره‌ی بالا ترازی 2002 پیدا کنیم، (درست کنیم)
ببینیم

اگر مبدأ مختصات را در شکل اول به نقطه‌ای غیر از ابتدای صفحه
و وسط صفحه بگیریم ، تا) نه تنها [illegible] در این حالت
هم sin و هم Cos داریم.

$x = a \quad T = T_\infty$

$x = a+L \quad T = T_\infty$

```
clear
L=0.1; alfa=1e-6;
X=0.04;  t=5;

S=0;

for n=1:100
    S = 2*(1-Co(n*pi)/n/pi * exp(-alfa*landa^2*-
                                      * sin(n*pi*X/L)

end
S
```

جلسه سوم :

در حل معادلات دیفرانسیل به روش آن باید شرایط مرزی همگن باشد

این مطلب را اشتورم لیوویل اثبات کرد

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\cdot\frac{dy}{dx}\right]+\left[q(x)+\lambda\, w(x)\right]y=$$

پاسخهای این معادله با چه شرایط مرزی متعامد خواهد بود ؟

معادله بالا را بصورت زیر می‌نویسند :

$$\left[s(x)\,\varphi'(x)\right]'-q(x)\,\varphi(x)+\lambda^2 p(x)\,\varphi(x)=0$$

فرض می‌کنیم به ازای λ_n تابع $\varphi_n(x)$ است و اگر λ_m باشد تابع $\varphi_m(x)$ می‌باشد.

حال پاسخها را در معادله قرار می‌دهیم داریم :

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left[p(x)\dfrac{d\varphi_n}{dx}\right]+\left[q(x)+\lambda_n\cdot w(x)\right]\varphi_n(x)=0\\[2ex]\dfrac{d}{dx}\left[p(x)\cdot\dfrac{d\varphi_m}{dx}\right]+\left[q(x)+\lambda_m\cdot w(x)\right]\varphi_m(x)=0\end{cases}$$

انتگرال می‌گیریم

$$\begin{array}{l}\times\,\varphi_m(x)\\ \times\,\varphi_n(x)\end{array}\left\{\begin{array}{l}\int_a^b \varphi_m(x)\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\varphi_n}{dx}\right]dx+\int_a^b\varphi_m\left[q+\lambda_n w(x)\right]\varphi_n\,dx=0\\[2ex] \int_a^b \underbrace{\varphi_n}_{u}\,\underbrace{\frac{d}{dx}\left[p\frac{d\varphi_m}{dx}\right]dx}_{dv}+\int_a^b\varphi_n\left[q+\lambda_m w(x)\right]\varphi_m\,dx=0\end{array}\right.$$

$$u=\varphi_n\longrightarrow du=\frac{d\varphi_n}{dx}\,dx$$

$$dv=\frac{d}{dx}\left[p\frac{d\varphi_m}{dx}\right]dx\longrightarrow v=p\frac{d\varphi_m}{dx}$$

$$\left.\varphi_m\, p\,\frac{d\varphi_n}{dx}\right|_a^b-\int_a^b p\,\cancel{\frac{d\varphi_m}{dx}\cdot\frac{d\varphi_n}{dx}\,dx}+\int_a^b\varphi_m\left[q+\lambda_n w\right]\varphi_n\,dx=0$$

$$-$$

$$\left.\varphi_n\, p\,\frac{d\varphi_m}{dx}\right|_a^b-\int_a^b p\,\cancel{\frac{d\varphi_n}{dx}\,\frac{d\varphi_m}{dx}\,dx}+\int_a^b\varphi_n\left[q+\lambda_m w\right]\varphi_m\,dx=0$$

$$\left.\varphi_m\, p\frac{d\varphi_n}{dx}\right|_a^b-\left.\varphi_n\, p\,\frac{d\varphi_m}{dx}\right|_a^b+(\lambda_n-\lambda_m)\int_a^b w\,\varphi_n\,\varphi_m\,dx=0$$

اگر جملات اول و دوم صفر باشند آنگاه عبارت انتگرال صفر خواهد شد و توابع φ_n و φ_m متعامد گردند. حال باید بررسی کنیم

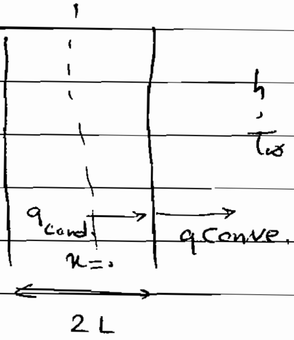
حل: معادله حاکم:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$t=0 \quad : \quad T = T_i$

$x=0 \quad : \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0$

$x=L \quad : \quad -k\frac{\partial T}{\partial x} = h(T-T_\infty)$



باید در جهت x جوابها متعامد باشد اگر نباشد باید ۲ روش را اعمال کنیم: ۱- تغییر متغیر و همگن کردن شرایط مرزی و دیگری اصل super position

$\theta = T - T_\infty \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$, $\theta(x,t) = f(x) \cdot g(t)$

$t=0 \longrightarrow \theta = T_i - T_\infty = \theta_i$

$x=0 \longrightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$

$x=l \longrightarrow -k\frac{\partial \theta}{\partial x} = h\theta$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha g}\frac{dg}{dt} = \frac{1}{f}\frac{d^2 f}{dx^2} = -\lambda^2 \Rightarrow \begin{cases} f = C_1 \sin\lambda x + C_2 \cos\lambda x \\ g = C_3 e^{-\alpha\lambda^2 t} \end{cases}$$

حال از شرط مرزی سوم λ بدست می‌آید:

ببینیم چه شرطی مسئله اول صفر هستند.

$x=a \quad , \quad x=b \qquad y=0 \qquad$ Drichlet

$x=a \quad , \quad x=b \qquad \frac{dy}{dx}=0 \qquad$ Neuman

$x=a \quad , \quad x=b \qquad \frac{dy}{dx}=Ny \qquad$ Rabin

$\Bigg\}$ homogenous B.C

معادله اشتروم - لیوویل می‌گوید که معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ باشد و تا درجه ۲ جوابهای متعامد می‌دهد. همین طور از مسئله اشتروم لیوویل تابع وزن λها بدست می‌آید.

در مثال قبل فرض می‌کنیم که صفحه‌ای به ضخامت 2L ، مبدا مختصات را وسط صفحه می‌گیریم. این صفحه در ابتدا در دمای T_i قرار داشته و در محیطی با دمای T_∞ و ضریب انتقال حرارت h قرار می‌دهیم. توزیع دمای را بدست آورید.

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot e^{-\alpha \cdot \lambda_n^2 \cdot t} \cdot \cos \lambda_n \cdot x$$

$$\theta_i = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \lambda_n x \xrightarrow[\text{و سپس از ۰ تا L}]{\text{ضرب} \times \cos\lambda_n x}$$

$$\int_0^L \theta_i \cdot \cos \lambda_n \cdot x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L C_n \cdot \cos \lambda_n x \; \cos \lambda_n x$$

$$C_n = \frac{\theta_i \int_0^L \cos \lambda_n \cdot x \; dx}{\int_0^L \cos^2 \cdot \lambda_n \cdot x \cdot dx} =$$

$$\text{صورت} = \frac{1}{\lambda_n} \sin \lambda_n \cdot x \Big|_0^L = \frac{1}{\lambda_n} \sin \lambda_n \cdot L$$

$$\text{مخرج} \int_0^L \frac{1 + \cos \lambda_n \cdot x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2\lambda_n} \sin \lambda_n x \right) \Big|_0^L$$

$$= \frac{1}{2} \left(L + \frac{1}{2\lambda_n} \sin 2 \cdot \lambda_n L \right)$$

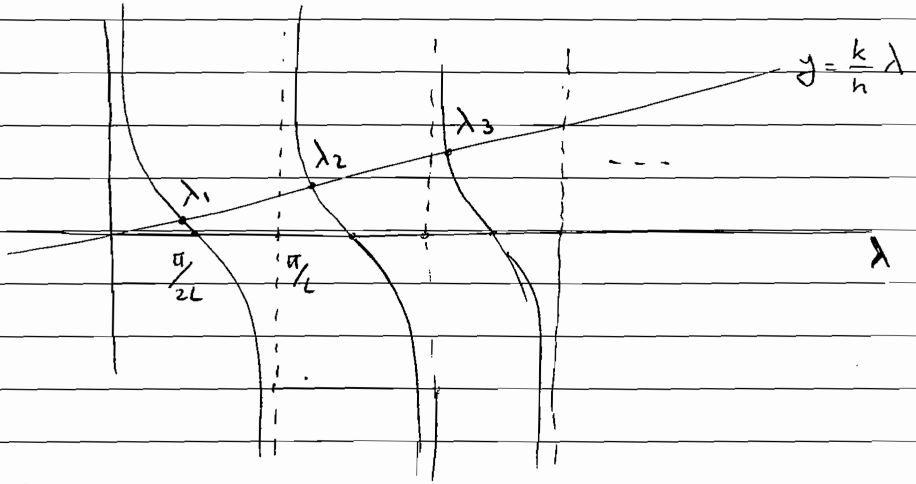
$$\Rightarrow \frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n} \cdot \frac{\sin \lambda_n \cdot L}{L + \frac{1}{2\lambda_n} \sin \lambda_n L} e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \cos \lambda_n \cdot x$$

$$-k \cancel{g} \frac{df}{dx} = h f \cancel{g}$$

$$(-k)(-\cancel{C_2}) \lambda \sin \lambda L = h (\cancel{C_2}) \cos \lambda L$$

$$\frac{k}{h} \lambda + (-\cot \lambda L) = 0$$

حال از طریق ترسیم جواب تقریبی λها را بدست می‌آوریم:



این بار می‌بینیم λ دیگر جواب صریح ندارد و یک سری عددی بی‌شمار

که باید آنها را بدست آوریم.

بنابراین

$$\left. \begin{aligned} f &= C_2 \cos \lambda_n \cdot x \\ g &= C_3 e^{-\alpha \lambda^2 t} \end{aligned} \right\} \xrightarrow[\text{را می‌نویسیم}]{\text{سری فوریه}}$$

مثال) معادله جبری روبرو را حل کنید $f(x) = x - e^{-x} = 0$

منطق کلی حل معادلات جبری ، حدس و خطا می باشد . چون حدس و خطا است باید بازه ای انتخاب کنیم که جواب در آن محدوده باشد حال این بازه باید شرایط زیر را داشته باشد.

① $f(a) \cdot f(b) < 0$

② پیوسته و مشتق پذیر باشد

③ دارای اکسترمم نباشد $\nexists x \in [a,b] \rightarrow f'(x) = 0$

با رسم می بینیم در فاصله $[0, 1]$ جواب وجود دارد.

(و جواب آن که $x = 0.5655$ می باشد)

(با دستور inline می توانیم با دستور یک خط تعریف کنیم.)

حال برای حل تشریحی یک x حدس میزنیم حال روشهای تحقیق

برای ارائه حدسهای جدید داریم.

1-iteration
2-newten
3-secant
4-fulse position
5-bisection

```
clear

k=5; h=10; L=0.1;
lan=0:0.01:10;

LHS=k*lan/h;
RHS=1/tan(lan*L);

figure(1); plot(lan,LHS,lan,RHS); grid

axis([0 200 0 20])
```

حال دستور plot می دهیم (آنلاین با دادن لیمیت) λ_1 ، λ_2 ، λ_3 بدست

جوابها:

$\lambda_1 = 8.603$

$\lambda_2 = 34.256$

$\lambda_3 = 64.374$

$\lambda_4 = 95.294$

$\lambda_5 = 126.453$

$\lambda_6 = 157.171$

$\lambda_7 = 189.024$

روش تکرار:

۱- در روش اول یعنی روش تکرار iteration داریم:

$$f(x)=0 \longrightarrow x=g(x) \longrightarrow x_{n+1}=g(x_n)$$

رابطه بازگشتی

$$x-e^{-x}=0 \longrightarrow x=e^{-x}$$

$$x=0.1 \longrightarrow x_1=e^{-0.1}=1.1$$

$x_2=0.33$, $x_3=0.71$, $x_4=0.49$

$x_5=0.61$, $x_6=0.54$, $x_7=0.58$, $x_8=0.56$

$x_9=0.57$, $x_{10}=0.56$, $x_{11}=0.568$, $x_{12}=0.566$

$x_{13}=0.5676$, $x_{14}=0.5668$, $x_{15}=0.5673$,

$x_{16}=0.5670$, $x_{17}=0.5672$, $x_{18}=0.5671$,

$x_{19}=0.5671$

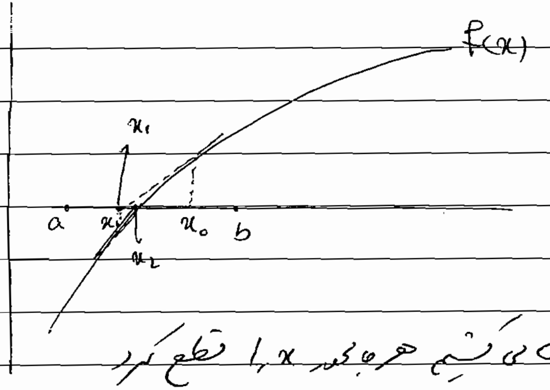
این جواب شد $x=0.5671$ می باشد، صحیح می باشد

و این جواب با جواب ترسیمی کمی فرق دارد که این عدد دقیق است

را طور را با جلسه قبل به خطای صفر می رسیم

در برنامه مطلب دقت ماشین 10^{-15} می باشد اگر خواستیم دقت کمتر کند 10^{-15} یعنی 10^{-16} باشد دیگر مطلب نمی تواند جواب بدهد. محاسبات تا ابد ادامه می یابد.

۲- روش نیوتن:



از نقطه x به مماس می کشیم هر جا محور x را قطع کرد

(x_1) عمود روی منحنی می رویم دوباره مماس می کشیم تا محور x را قطع کند

(x_2). این عمل را ادامه می دهیم تا خطای آن کمتر از مقدار error ما باشد

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0)}{x_0-x_1} \Rightarrow x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$ recursive

تابع بازگشتی

روش نیوتن دارای سرعت همگرایی بالاتری نسبت به روش تکرار می باشد.

جلسه چهارم:

algebric eq.

1- iteration
2- newton
3- fulse position
4- bisection (تنصیف)

$$f'(x) = \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}$$ روش bisection

بعنوان کمک

روش wegstian:

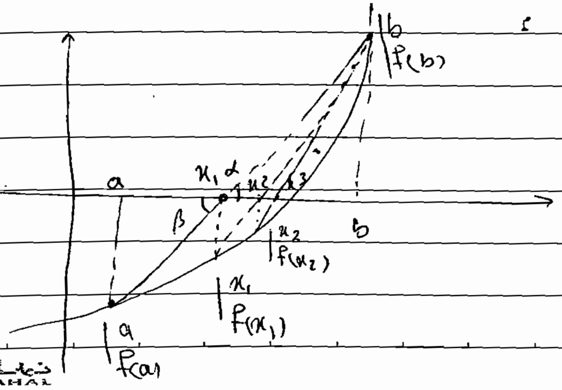
$x_1 = g(x_0)$

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}\, g(x_n) - x_n g(x_{n-1})}{x_{n-1} - g(x_{n-1}) - x_n + g(x_n)}$$

رابطه بازگشتی

recursive formula:

روش fulse position:



روش Secant:

این روش شبیه روش نیوتن می باشد با این تفاوت که $f'(x_n)$ را بطور خطی تقریب می زنند زیرا در بعضی مواقع بدست آوردن $f'(x_n)$ بسیار سخت می باشد.

هفته بعد مقاله را حتماً بیاوریم برای حداکثر ۱۰ الی ۱۵ سال گذشته باشد

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\delta . f(x_n)}{f(x_n+\delta) - f(x_n)}$$

روش false position دو نقطه a , b را به هم وصل می کنیم.

تا محور x را قطع کند حال دو نقطه $\left| \begin{matrix} x_1 \\ f(x_1) \end{matrix} \right.$, $\left| \begin{matrix} b \\ f(b) \end{matrix} \right.$ را به هم وصل می کنیم و این روش را ادامه می دهیم. برای بدست آمدن رابطه ریاضی

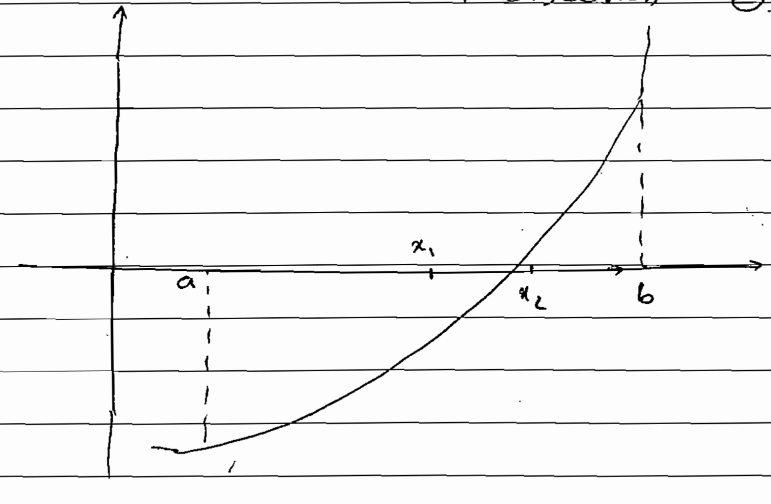
چون دو زاویه α , β برابر شد داریم:

$$\frac{-f(a)}{x_1 - a} = \frac{f(b)}{b - x_1}$$

رابطه بازگشتی:

$$\Rightarrow \quad x_{n+1} = \frac{x_n \cdot f(b) - b\, f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}$$

روش bisection:



وسط فاصله a , b را می نامیم x_1 . x_1 سمت چپ , b سمت راست محور را بریده است حال این فاصله را نصف می کنیم می شود x_2

حال x_2 سمت راست محور و x_1 سمت چپ محور است پس وسط x_1 , $\frac{x}{2}$
تنصیف دو نقطه
را بدست می آوریم و این عمل را ادامه می دهیم تا به جواب نزدیک برسیم

نتیجه است

$$x_1 = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{if} \quad f(x_1) \cdot f(b) < 0 \longrightarrow$$ یعنی یکی از جوابها سمت چپ و دیگری سمت راست محور است

$a = x_1$

$$\text{if} \quad f(x_1) \cdot f(b) > 0$$ یعنی هر دو نقطه در یک طرف محور است

$b = x_1$

$$x_{n+1} = \frac{a+b}{2}$$

$a = x_{n+1}$

یا

$b = x_{n+1}$

$g(x)$ شتاب نیروی وزن می‌باشد

اگر سیال نیوتنی نبود ترم گذرا را داشتیم

تغییرات سرعت در x نداریم

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.\rho v = 0$$

چون سیال پایا داریم پس عبارت بالا درست می‌باشد پس $\nabla.v = 0$

$$-\tau_{xx} = -\mu\left(2\frac{\partial \cancel{v_x}}{\partial x} - \frac{2}{3}\cancel{\nabla}.v\right)$$

$$-\tau_{xy} = -\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial \cancel{v_y}}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{xz} = -\mu\left(\frac{\partial \cancel{v_z}}{\partial x} + \frac{\partial \cancel{v_x}}{\partial z}\right)$$

$$\Rightarrow \rho\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\underbrace{\frac{\partial P}{\partial x}}_{\frac{\Delta P}{L}} + \mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \rightarrow \text{non\_homegenudiy}$$

$$\begin{cases} t=0 \rightarrow v_x = 0 \\ y=0 \rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \\ y=H \rightarrow v_x = 0 \end{cases}$$

برای حل مسائل غیرهموژن باید از روش‌های تغییر متغیر یا Superposition استفاده کرد.

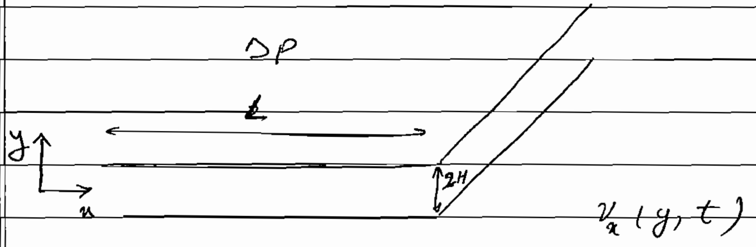
در "Super position" اگر بتوانیم یک معادله دیفرانسیل را به حاصل جمع چند معادله دیفرانسیل تبدیل کنیم. در این صورت حاصل جمع جواب آن چند معادله دیفرانسیل

این روش منجر به جواب می‌رسد منتها احتمالاً تعداد دفعات تکرار زیاد می‌باشد.

مثال) ~~حرکت سیال به صورت یک لایه نیوتنی درون یک کانال مستطیلی شکل با ابعاد عرض W و ارتفاع h وجود دارد.~~ جریان

مثال) یک سیال نیوتنی و سیلندر با μ در فضای بین دو صفحه بزرگ که فاصله $2h$ دارند ساکن است. در یک لحظه در فاصله L افقی ΔP اعمال می‌شود. توزیع سرعت را در این سیال را بدست آورید.

جواب:



به خاطر ΔP فقط در جهت x حرکت دارد.

معادله مومنتم در جهت x:

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + \cancel{v_x}\frac{\partial \cancel{v_x}}{\partial x} + \cancel{v_y}\frac{\partial v_x}{\partial y} + \cancel{v_z}\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} - \left(\partial\cancel{\tau_{xx}} + \partial\tau_{xy} + \partial\cancel{\tau_{xz}}\right) + \cancel{g(x)}\ (\text{body force})$$

جواب معادله اول خواهد بود روش Superpos- یک شرط b / اساسی

دارد و شروط به آنکه معادله خطی باشد . برای پیدا کردن

در معادله از برهم‌نهی شده استفاده می کنیم معادله را به دو بخش steady state و

unsteady state تقسیم می کنیم

$$v_x(t,y) = S(y) + V(t,y) \quad (A)$$

برای [illegible] $S(y) \rightarrow 0 = \frac{\Delta P}{L} + \mu \frac{d^2 S}{dy^2}$ ①

② $y=0 \quad \frac{dS}{dy}=0$

③ $y=H \quad S=0$

① $\xrightarrow[\text{انتگرال}]{\text{مشتق}} \frac{dS}{dy} = -\frac{\Delta P}{\mu L} y + C_1 \xrightarrow{\text{انتگرال}}$

$$S = -\frac{\Delta P}{2\mu L} y^2 + C_1 y + C_2$$

$C_1 = 0$ از شرط ②

$C_2 = \frac{\Delta P}{2\mu L} H^2$ از شرط ③

(steady state جواب) $S(y) = \frac{\Delta P}{2\mu L}(H^2 - y^2)$

با جایگذاری کردن جواب در un steady state از معادله A

نسبت به t مشتق می گیریم

دو بار مشتق می گیریم ، نسبت به y مشتق دوم می گیریم

$$A \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial t} = 0 + \frac{\partial V}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \rho \frac{\partial V}{\partial t} = \overset{0}{\boxed{\frac{\Delta P}{L} + \mu \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}}} + \mu \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

$$t=0 \qquad S+V=0 \Rightarrow V = -S(y)$$

$$\Rightarrow V_x(t,y) = \frac{\Delta P}{2\mu L}\{H^2 - y^2\} +$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n . e^{-\nu \lambda_n^2 . t} \; \cos\frac{(2n+1)\pi y}{2H}$$

مثال) یک صفحه به ضخامت 2L دارای تولید حرارت با شدت q $(\frac{W}{m^2})$ می باشد و در محیطی با دمای T_∞ و ضریب انتقال حرارت جابجایی h قرار دارد. توزیع دما در این صفحه را بدست آورید.

هفته بعد حل شود به عنوان حل تمرین آورده شود.

سؤال matlab این هفته را به دکتر اعلمی برنامه بنویسند

در مطلب دستور fsolve داریم با این دستور دستگاه

معادلات غیر خطی را حل می کنیم.

```
fsolve('x - exp(-x)', 0.1)
  optimization terminated: first-order
  -
ans     0.5671
```

$y = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

$y = H \qquad v = 0$

$$U(t,y) = g(t) . f(y)$$

$$g = C_1 e^{-\nu\lambda^2 t}$$

$$f = C_2 \sin\lambda y + C_3 \cos\lambda y$$

$$\lambda H = (2n+1)\pi/2 \Rightarrow \lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2H}$$

$$U(t,y) = \sum C_n . e^{-\nu\lambda_n^2 . t} \; \cos\frac{(2n+1)\pi y}{2H}$$

$$\int_0^H \left(-\frac{\Delta P}{2\mu L}(H^2 - y^2) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n . \cos\frac{(2n+1)\pi y}{2H} \right) \times \cos\frac{(2n+1)\pi y}{2H}$$

طرفین در $\cos\frac{(2n+1)\pi y}{2H}$ ضرب، سپس انتگرال می گیریم

$$\Rightarrow C_n = \frac{-\int_0^H \frac{\Delta P}{2\mu L}(H^2 - y^2)\cos\frac{(2n+1)\pi y}{2H} . dy}{\int_0^H \cos^2\frac{(2n+1)\pi y}{2H} . dy}$$

Carslaw

Conduction heat transfer

Crank

diffusion problem

کتابهای خوبی است

زمینه مسئله در جعبه متن

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \, e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x$$

سری فوریه :

$$f(x) = a_0 + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) . dx = \int_{-\pi}^{+\pi} a_0 \, dx + 0 + 0$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) . dx$$

در cos ضرب، انتگرال می‌گیریم تا a_n بدست آید. π

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) . \cos x . dx = 0 + \boxed{a_n \int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 nx . dx} + 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) . \cos nx . dx$$

جلسه پنجم ۸۹,۸,۱۳

مثال دو جلسه قبل :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

$t = 0 \quad : \quad \theta = \theta_i$

$x = 0 \qquad \frac{\partial \theta}{\partial x} =$

$x = 1 \qquad -k \frac{\partial \theta}{\partial x} - h\theta$

$$f = \frac{k}{h} \lambda - \cot \lambda l = 0$$

برنامه 14 مربوط به حل عددی روش نیوتن معادله بالا می‌باشد

تا انجام دهیم.

برنامه 15 حل معادله با دستور fsolve می‌باشد.

fsolve ('اسم برنامه' , مقدار اولیه)

برنامه 16 کاری می‌کند که برای مثلاً ۳۰ بار مقادیر λ را بدست

آمد.

برنامه ۱۷ همین معادله قبل را حل کرده است.

ابتدای برنامه برای یک x و t خاص معادله را باید حل کنیم.

برنامه 19 برنامه 18 را رسم می‌کند.

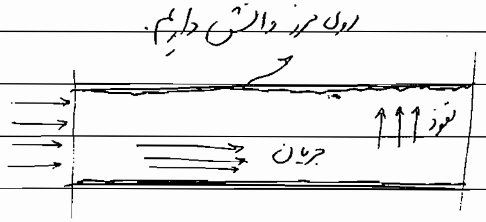
دستور hold باعث می‌شود منحنی‌ها قبلی روی صفحه plot باقی بماند.

مثال) یک مایع با پروفیل سرعت plug وارد یک راکتور لوله‌ای می‌شود. غلظت یک واکنش دهنده در ورودی C_i است. جداره داخلی راکتور آغشته به یک کاتالیست می‌باشد و روی آن یک واکنش درجه اول انجام می‌گیرد.

الف - معادله‌ای که توزیع غلظت در حالت پایدار را بدست آورید. از نفوذ محوری صرفنظر کنید.

ب - توزیع غلظت را بدست آورید.

حل:



$$\theta_i = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \cos\lambda_n \cdot x$$

در طرفین ضرب در $\cos\lambda_n x$ کرده و از ۰ تا L انتگرال می‌گیریم:

$$C_n = \frac{\theta_i \int_0^L \cos\lambda_n x \cdot dx}{\int_0^L \cos^2\lambda_n \cdot x \cdot dx}$$

$$\text{صورت}: \frac{1}{\lambda_n} \sin\lambda_n \cdot x \Big|_0^L = \frac{1}{\lambda_n} \sin\lambda_n \cdot L$$

$$\text{مخرج}: \int_0^L \frac{1+\cos 2\lambda_n x}{2} dx = \frac{1}{2} \Big| x + \frac{1}{2\lambda_n} \sin 2\lambda_n x \Big|_0^L$$

$$= \frac{1}{2}\left(L + \frac{1}{2\lambda_n} \sin 2 \cdot \lambda_n \cdot l \right)$$

$$C_n = \frac{2\theta_i \sin\lambda_n \cdot L}{\lambda_n \left(L + \frac{1}{2\lambda_n} \sin 2\lambda_n L \right)}$$

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin\lambda_n \cdot L}{\lambda_n \left(L + \frac{1}{2\lambda_n} \sin 2\lambda_n \cdot L \right)} e^{-\alpha\lambda_n^2 t} \cdot \cos\lambda_n$$

معادله همان شکلی بدست می‌آید تا اینجا یکی

بصورت اجزایی که بیان از سرعت شعاعی

در حالت حرکت دائم

$$\cancelto{0}{\frac{\partial c}{\partial t}} + \left(\cancelto{0}{v_r}\frac{\partial c}{\partial r} + \frac{\cancelto{0}{v_\theta}}{r}\frac{\partial c}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial c}{\partial z}\right) =$$

$$D\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial c}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cancelto{0}{\frac{\partial^2 c}{\partial \theta^2}} + \cancelto{0}{\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}}\right) + \cancelto{0}{R}$$

واکنش نداریم

تقارن

نفوذ نداریم (کم است)

$z=0 \quad : c=c_i$

$r=0 \quad : \frac{\partial c}{\partial r} =$

$r=R \quad : -D\frac{\partial c}{\partial r} = kc$

$$v_z\frac{\partial c}{\partial z} = \frac{D}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial c}{\partial r}\right)$$

در حالتی که مشتق دو متغیره داریم باید از تفکیک استفاده کنیم.

$C(r,z) = f(r)\cdot g(z)$

$$\frac{\partial c}{\partial z} = f\frac{dg}{dz} \qquad \Rightarrow \quad v_z f\frac{dg}{dz} = \frac{D}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot g\cdot\frac{df}{dr}\right)$$

$$\frac{\partial c}{\partial r} = g\frac{df}{dr}$$

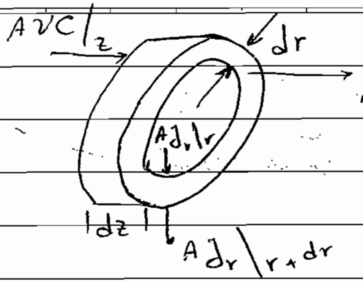
متغیر

$$\Rightarrow \frac{v_z}{Dg}\frac{dg}{dz} = \frac{1}{rf}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\boxed{f}}{dr}\right) = -\lambda^2$$

اگر ⊕ بود

شعاعی

معادله بسل [illegible]



بصورت روبرو المان می‌گیریم

$C(z,r)$

این المان داخل مایع می‌باشد.

$$\underset{\text{جمع}}{0} = \underset{\substack{\downarrow\\ 2\pi r\cdot dr}}{A}VC|_z - AVc|_{z+dz} + \underset{\substack{\downarrow\\ 2\pi r dz}}{A}J_r|_r - AJ_r|_{r+dr}$$

طرفین را بر $2\pi r\,dr\,dz$ تقسیم می‌کنیم.

$$0 = -v\frac{dc}{dz} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rJ_r)$$

داریم: $J = -D\frac{\partial c}{\partial r}$

$$\Rightarrow v\frac{\partial c}{\partial z} = \frac{D}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial c}{\partial r}\right)$$

معادله بالا صحیح می‌باشد در حالت steady state می‌باشد.

نکته: معادلات با ضرایب متغیر جواب عکسی ندارد یعنی نمی‌توانیم جواب آنها را بصورت عکسی بدست آوریم.

بنابراین جواب آنها را با سری توان تقریب می‌زنیم.

بنابراین برای معادله $f(x)y''+g(x)y'+h(x)y=0$ داریم

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

در ریاضیات مهندسی معمولاً معادله با ضریب متغیر بصورت زیر می‌باشد که

به معادله فروبنیوس مشهور است. (معروفترین حالت معادله فروبنیوس معادله بسل می‌باشد)

فروبنیوس $x^2y''+x\,p(x)\,y'+Q(x)y=0$

$$\begin{cases} p(x)=P_0+P_1x+P_2x^2+\cdots \\ Q(x)=Q_0+Q_1x+Q_2x^2+\cdots \end{cases}$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+c}$$

مثال: معادله بسل معمولی در دو حالتی که p عدد غیرصحیح و عدد صحیح باشد با روش سری توان حل کرده، توابع بسل نوع اول و نوع دوم را بدست آورید (حل شود. ثابت غیرصحیح دیگر به هر دو دیگر نمی‌باشد، ثابت صحیح دیگری تأثیر می‌باشد)

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right)=-\lambda^2 r f$$

$$r\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{df}{dr}+\lambda^2 r f=0$$ معادله بسل می‌باشد (اصلاح یافته)

بسل معمولی: $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-p^2)y=0$

بسل اصلاح یافته: $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-(x^2+p^2)y=0$

چون معادله بسل یک معادله با ضرایب متغیر می‌باشد پس با سری توان حل می‌شود.

نکته: برای حل معادله با ضرایب ثابت داریم:

$$y''+3y'+2y=0 \longrightarrow \underset{D}{\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}}}+3\frac{dy}{dx}+2y=0 \longrightarrow$$

$$y(D^2+3D+2)=0 \Rightarrow$$

$$(D+1)(D+2)=0$$

$$\begin{matrix} D=-1 \\ D=-2 \end{matrix} \Rightarrow y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$$

نکته:

mcloren: $e^{ax}=1+ax+\frac{(ax)^2}{2!}+\cdots\frac{(ax)^n}{n!}+\cdots$

teilor: $e^{-ax}=1-ax+\frac{(-ax)^2}{2!}+\cdots+\frac{(-ax)^n}{n!}+\cdots$

$$=\sum^{\infty}\frac{(-ax)^n}{n!}$$

حال در ذیل حل شده: $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-p^2)y=0$ می‌شود:

$$p\neq n \Rightarrow y=C_1 J_p(x)+C_2 J_{-p}(x)$$

$$J_p(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}}{k!\,(k+p)!}$$

$p=n$

$$y=C_1 J_n(x)+C_2 Y_n(x)$$

modified Bessel:

$$p\neq n \Rightarrow y=C_1 I_p(x)+C_2 I_{-p}(x)$$

$$p=n \Rightarrow y=C_1 I_n(x)+C_2 k_n(x)$$

کتاب خوب برای معادلات دیفرانسیل:

Advanced Eng. Mattematics
(kreysing)

توابع بسل نوع سوم و چهارم را توابع henkel function نیز می‌گویند

مطلب توابع بسل را دارد به عناوین Bessel j , Bessel i

Bessel y , Bessel k

```
>> Bessel j (0, 0.1) ↵
```

بسل نوع اول و دوم نوسانی از نوع نقصانی می‌باشد.
همه توابع بسل نوع دوم در صفر ∞ - می‌باشد.

بسل نوع سوم غیرنوسانی می‌باشد
〃 〃 چهارم 〃 〃 〃 〃 و در صفر ∞ + می‌باشد

```
axis([0 20 -5 5]);
```

این دستور محور x را بین 0 و 20 و y را بین -5 و 5 رسم می‌کند.

از روی شکلی که در برنامه 23 رسم کردیم می‌بینیم که توابع بسل متعامد

نوسانی می‌باشد. تمام این‌ها حل شده نیست باید معادله بسل متعامد باشد

تا بتوانیم از خاصیت تعامد استفاده کنیم.

مشابه حل شده قبل،

$$r\times r^2\frac{d^2f}{dr^2}+r\frac{df}{dr}+\lambda^2 r^2 f=0$$

$p=0$, $x=\lambda r$ $\rightarrow$

math 24 بعد از رسم می‌بینیم دو نمودار در ۱۶ نقطه با هم برخورد کرده‌اند.

λ_n ها را با رسم بدست می‌آوریم:

حال f و g بدست آمده است بنابراین از اصل ضرب استفاده کرده

$$C(r,z) = f(r) \cdot g(z)$$

$$C = \sum C_n \, e^{-\frac{D}{V_z}\lambda_n^2 z} \, J_0(\lambda_n r)$$

$$\Rightarrow C_i = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \, J_0(\lambda_n r)$$

طرفین را $r J_0(\lambda_n r)$ ضرب می‌کنیم و انتگرال می‌گیریم:

علت اینکه ما را $\textcircled{r} J_0(\lambda_n r)$ ضرب می‌کنیم این است که به دلیل اشتروم لیوویل صادق باشد:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right) = -\lambda^2 r f$$

اشتروم لیوویل:

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + \left(q(x) + \lambda\, w(x)\right) y = 0$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right) + \left(0 + \lambda^2\, r\right] f = 0$$

بنابراین تابع وزنی $r = w(x)$ می‌باشد

$$\begin{cases} f = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 Y_0(\lambda r) \\ g = C_3 \, e^{-\frac{D}{V_z}\lambda^2 z} \end{cases}$$

$$r = 0 \longrightarrow \frac{df}{dr} = \longrightarrow f = \text{محدود} \longrightarrow C_2 = 0$$

چون f محدود است بنابراین تا ضریب $Y_0(\lambda r)$ صفر باشد زیرا $Y_0(\lambda r)$

بی‌نهایت می‌شود (تابع بسل نوع ۲ در صفر بی‌نهایت می‌شود)

$$r = R \qquad -D\frac{df}{dr} = kf$$

از صفحه ۵۶-۲ و ۵۹-۲ کتاب دکتر رفیع زاده

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-p} J_p(\alpha x)\right) = -\alpha\, x^{-p} J_{p+1}(\alpha x)$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dr} = -C_1 \lambda J_1(\lambda r) \Rightarrow D\lambda J_1(\lambda R) = k J_0(\lambda R) \rightarrow ①$$

بدست می‌آید: $\lambda n =$

برای حل معادله ① از داده‌های زیر استفاده می‌کنیم:

$R = 5 \text{ cm}$, $k = 0.5$, $D = 10^{-3} \, (m^2/sec)$, $V_z = 0.2 \; m/sec$

$C_i = 1$

اگر $Re > 2100$ بود، V_z را کم کنیم تا جریان laminar شود.

$$C_i \int_0^R r J_0(\lambda_n r)\, dr = C_n \int_0^R r J_0^2(\lambda_n r)\, dr \quad ①$$

از هندبوکها برای بدست آوردن انتگرالها استفاده می کنیم که در جزوه
دکتر میر آمده است (صفحه ۹۱)

داریم: $\int x J_0(x)\, dx = x J_1(x)$

انتگرال سمت چپ:

$$\frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^R (\lambda_n r) J_0(\lambda_n r)\, d(\lambda_n r) = \frac{1}{\lambda_n^2} \Big| \lambda_n r J_1(\lambda_n r) \Big|_0^R$$

$$= \frac{R}{\lambda_n} J_1(\lambda_n R)$$

انتگرال سمت راست:

داریم: $\int_0^R x J_k^2(\lambda x)\, dx = \frac{1}{2} R^2 \left[J_k^2(\lambda R) - J_{k-1}(\lambda R) J_{k-1}(\lambda R) \right]$

$\Rightarrow$ طرف راست انتگرال ①: $\frac{1}{2} R^2 \left[J_0^2(\lambda_n R) - \underbrace{\boxed{J_{-1}(\lambda_n R)}}_{-J_1(\lambda_n R)} J_1(\lambda_n R) \right]$

(غلظت) $C = \sum C_n e^{-\frac{D}{v_z} \lambda_n^2 z} J_0(\lambda_n r)$

$$C_n = \frac{\frac{C_i R}{\lambda_n} J_1(\lambda_n R)}{\frac{1}{2} R^2 \left[J_0^2(\lambda_n R) + J_1^2(\lambda_n R) \right]}$$

حال غلظت را در z های مختلف رسم کنیم (خودتان)

معادلات فصل 9 کتاب farlaw خوانده شود.

فصل 7 شماره ① و ③ کتاب farlaw حل شود.

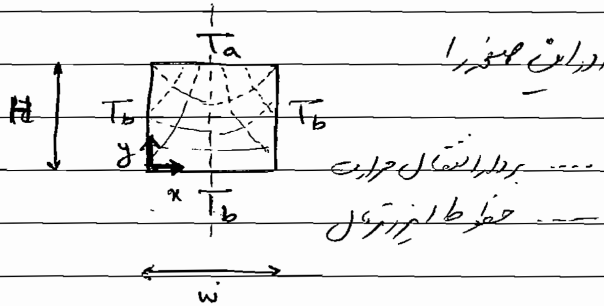
جلسه ششم ۸۹/۸/۲۴

تا امروز تمام مثالها از نوع تحلیلی بود. حال از این به بعد تعدادی از بین بعضی را حل می کنیم.

یک مکعب مستطیل که یک ضلع آن حاوی تی است را در نظر می گیریم

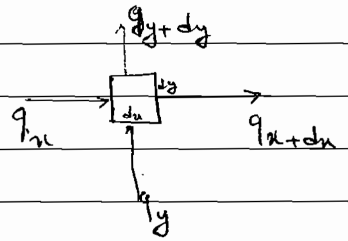
بنا براین تقارن حرارتی حول در جهتی که حاوی تی است نداریم.

توزیع دو بعدی حرارت (T) را در این مکعب را بدست آوریم.



$T_a > T_b$

یک المان در نظر می گیریم:



بعد از نوشتن موازنه انرژی داریم:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

BVP
$$\begin{cases} x = 0 & ; \quad T = T_b \\ x = w & : \quad T = T_b \end{cases}$$

نکته: پروفیل سرعت در یک مقطع کانال

$$\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} \quad \frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

BVP
$$\begin{cases} y = 0 & : \quad T = T_b \\ y = H & : \quad T = T_a \end{cases}$$

باید شرایط مرزی را همگن کنیم:

$$\theta = T - T_b \Rightarrow \partial^2 \theta = \partial^2 T \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 & \theta = 0 \\ x = w & \theta = 0 \\ y = 0 & \theta = 0 \\ y = H & \theta = T_a - T_b = \theta_a \end{cases}$$

$\longrightarrow$ چون θ ها در این جهت صفر شده باید در این جهت از تفکیک استفاده کنیم.

$$\Rightarrow \theta(x, y) = f(x) \cdot g(y) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} = g \dfrac{d^2 f}{dx^2} \\ \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = f \dfrac{d^2 g}{dy^2} \end{cases}$$

داریم:

$\sinh a = \frac{e^{a} - e^{-a}}{2}$

$\cosh a = \frac{e^{a} + e^{-a}}{2}$

$\sin a = \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2}$

$\cos a = \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}$

$e^{ia} = \cos a + i \sin a$

$i = \sqrt{-1}$

$e^{a} = \cosh a + \sinh a$

با توجه به شرط مرزی در $x = 0$ داریم:

$0 = C_3 + C_4$

$C_4 = -C_3$

$g = C_3 \underbrace{(e^{-\lambda y} - e^{-\lambda y})}_{2 \sinh \lambda y}$

می‌بینیم که استفاده از هر کدام از روابط برای g فرقی نمی‌کند

در کتاب‌ها به حالت Sinh و Cosh می‌رسیم و اگر از حالت اول نیز

استفاده کنیم کماکان به آن می‌رسیم:

$g = C_3 \sinh\lambda y + C_4 \cosh \lambda y \Rightarrow$

$g \frac{d^2 f}{dx^2} + f \frac{d^2 g}{dy^2} = 0 \longrightarrow \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2} = -\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} = +\lambda^2$

چون باید در جهت x متناوب باشد بنابراین $f(x)$ تابع باید تابعی از

نوع sin یا cos در بیاید بنابراین تابع $\frac{1}{f}\frac{d^2 f}{dx^2}$ را برابر

$+\lambda^2$ قرار می‌دهیم. همیشه علامت λ^2 باید مخالف علامت $\frac{1}{f}\frac{d^2 f}{dx^2}$

باشد

$\frac{d^2 g}{dy^2} - \lambda^2 g = 0 \longrightarrow g = C_3 e^{\lambda y} + C_4 e^{-\lambda y}$

$D^2 - \lambda^2 = 0$

$D = \pm \lambda \qquad g = C_3 \sinh \lambda y + C_4 \cosh \lambda y$

حال ببینیم از کدام g استفاده کنیم؟ (مهم نیست)

$x = 0 \longrightarrow \theta = 0 \longrightarrow f(0) = 0$

$x = w \quad \theta = 0 \longrightarrow f(w) = 0$

$y = 0 \longrightarrow \theta = 0 \longrightarrow g(0) = 0$

$f = C_1 \sin\lambda x + C_2 \cos \lambda x$

$0 = C_1 \times 0 + C_2 \times 1 \longrightarrow C_2 = 0$

eigen value

$\theta = C_1 \sin\lambda W \longrightarrow \lambda W = n\pi \longrightarrow \lambda_n = \frac{n\pi}{}$

$$\Rightarrow C_n = \frac{2\theta_a(1-\cos n\pi)}{n\pi \sinh\frac{n\pi H}{w}}$$

$$\Rightarrow \frac{\theta}{\theta_a} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\pi}{n}\frac{\sinh\frac{n\pi y}{w}}{\sinh\frac{n\pi H}{w}}\sin\frac{n\pi x}{w}$$

مجبوریم n ها را فرد در نظر بگیریم:

$$\frac{\theta}{\theta_a} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\frac{\sinh\frac{(2n+1)\pi y}{w}}{\sinh\frac{(2n+1)\pi H}{w}}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{w}$$

حال معادله را رسم می کنیم: (math 25)

محیط استفاده شده MATLAB 7.7.0 (R2008b) می باشد.

برای تغییر font در مطلب Edit ⟶ preference ⟶ font

برای نوشتن m file از نوار بالا سمت چپ، new ، open را انتخاب می کنیم.

بعد از اینکه برنامه را نوشتیم و ذخیره کردیم آن را تبدیل به function می کنیم و سپس در x و y های مختلف آن را اجرا می کنیم.

$$0 = C_3 \times 0 + C_4 \times 1$$

$$\Rightarrow C_4 = 0$$

$$\Rightarrow \theta = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot \sinh\frac{n\pi y}{w}\ \sin\frac{n\pi x}{w} \quad ①$$

این C_3 , C_4 با C_3 , C_4 قبلی فرق دارد

$$g = c_3 e^{+\lambda y} + C_4 e^{-\lambda y}$$

$$= C_3(\cosh\lambda y + \sinh\lambda y) + C_4(\cosh\lambda y - \sinh\lambda y)$$

$$= \underbrace{(C_3+C_4)}_{\substack{C_4 \\ \text{جدید}}}\cosh\lambda y + \underbrace{(C_3-C_4)}_{\substack{C_3 \\ \text{جدید}}}\sinh\lambda y$$

حال از خاصیت تعامد استفاده می کنیم و طرفین ① را $\times \sin\frac{n\pi x}{w}$ می کنیم و انتگرال می گیریم،

$$\int_0^w\left(\frac{\theta}{a} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sinh\frac{n\pi H}{w}\cdot\sin\frac{n\pi x}{w}\right)\times \sin\frac{n\pi x}{w}\,.dx$$

$$\Rightarrow \underbrace{\theta_a\int_0^w \sin\frac{n\pi x}{w}\,dx}_{\frac{w}{n\pi}(1-\cos n\pi)} = C_n \sinh\frac{n\pi H}{w}\underbrace{\int_0^w \sin^2\frac{n\pi x}{w}\,.dx}_{w/2}$$

در برنامه هرجا NaN (نات نامبر) دارد یعنی تعریف نشده

است مثل $\frac{0}{0}$ یا همچنین چیزی ($\frac{\infty}{\infty}$)

ایراد این برنامه math25 این است که دما T_2

وقتی K بزرگ می‌شود به سمت $\frac{\infty}{\infty}$ می‌رود یعنی حساب در خروجی

T_2 خیلی بزرگ می‌شود که NaN می‌دهد. باید رفع ابهام شود

عددهایی که ما می‌بینیم باید K حداکثر ۱۰ عضو داشته

باشد

سپس خط آن را رسم می‌کنیم:

plot3 خط را به صورت سه بعدی رسم می‌کند

surf سطح سه بعدی را رسم می‌کند
(از help طریقه استفاده از آن را می‌بینیم)

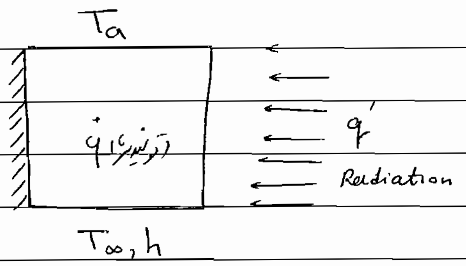
مثل ~~حل~~ math 28 صفحه ۱۱ تا ۴۹ تحت شرایطی

ترسیم می‌کند می‌بینیم

دستور Contour شکل را به صورت نیم‌رخ منحنی خطوط
نشان می‌دهد. (figure2 در برنامه math28.)

دستور mesh

مثال) همین شکل قبلی با فرض اینکه دما چهار طرف متفاوت باشد. ~~[illegible]~~ و تولید حرارت هم داشته باشیم. (شکل زیر)



حل:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{q}{k}=0$$

$x=0 \qquad \frac{\partial T}{\partial x}=0$

$x=W \qquad -k\frac{\partial T}{\partial x}=q'$

$y=0 \qquad -k\frac{\partial T}{\partial y}=h(T-T_\infty)$

$y=H \qquad T=T_a$

را حالا مرزهای گسسته شده را به چهار حالت تقسیم می‌کنیم

۸۹,۹,۲۳ جلسه هفتم

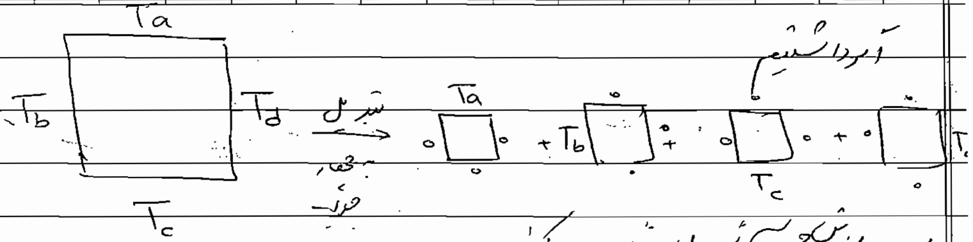
Laplace Transform.

$f(t) =$

$$F(s) = \int_0^\infty f(t).e^{-st}.dt = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
t^α	$\frac{t(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$

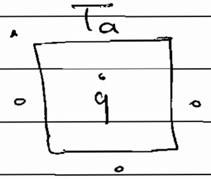
تبدیل لاپلاس در کتاب خود دکتر و کتاب دکتر نیک آذر و کتاب



پس از روش جمع آثار استفاده می کنیم

برای مثال خودمان هم همین کار را می کنیم.

برای اینکه q را هم روی سیستم بیاوریم؛ ابتدا شکل زیر را در نظر می گیریم



$$\frac{\delta^2 T}{\partial x^2} + \frac{\delta^2 T}{\delta y^2} + \frac{\dot q}{k} = 0$$

این مسئله که گفته از Super position استفاده می شود.

m file ها را ایمیل بزنیم

spiegel که pdf آن را داریم آمده است.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^nf}{dt^n}\right\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

بزرگترین فرق تبدیل لاپلاس این است که معادله دیفرانسیل را تبدیل به معادله جبری در حوزه s می کند

بزرگترین عیب آن این است که تمام شرایط مرزی آن باید در نقطه (0) داده شود. بنابراین تبدیل لاپلاس عموماً (فقط) برای حل معادلات دیفرانسیل اولیه (initial value problem) کاربرد دارد زیرا باید تمام شرایط مرزی در صفر را داشته باشیم. این مسائل عموماً در کنترل بحث می شود.

مثال)

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 3\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 2y = \sin t$$

$t=0 \quad y=0 \quad y'=0 \quad y''=0$

حل: ابتدا حل لاپلاس می گیریم؛

$$s^3Y(s) - s^2\cancel{y(0)} - s\cancel{y'(0)} - \cancel{y''(0)} + 3s^2Y(s) - 3s\cancel{y(0)} -$$

$$3\cancel{y'(0)} + 4sY(s) - 4\cancel{y(0)} + 2Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow (s^3+3s^2+4s+2)Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s^3+3s^2+4s+2)(s^2+1)}$$

معمولاً Y(s)، از تقسیم چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای می باشد که از روش partial fractioning استفاده می کنیم. آنگاه از عکس لاپلاس

یعنی فرمول زیر را استفاده می کنیم، $f(t) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} F(s).e^{-st}.ds$

که معمولاً این روش دوم اصلاً کاربرد ندارد

$$s^3+3s^2+4s+2 = (s+1)(s^2+2s+2)$$

$$Y(s) = \frac{1}{\underbrace{(s^3+3s^2+4s+2)}_{(s+1)(s^2+2s+2)}\underbrace{(s^2+1)}_{\pm j}} =$$

$-1 \pm j$

$$= \frac{C_1}{s+1} + \frac{C_2 s + C_3}{s^2+2s+2} + \frac{C_4}{s+j} + \frac{C_5}{s-j}$$

طبق partial fraction درجه صورت باید یکی کمتر از مخرج باشد.

حال طبق روش heaviside برای بدست آوردن C_1 طرفین

معادله را در مخرج آن ضرب می‌کنیم، یعنی در $S+1$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{1}{(s^2+2s+2)(s+j)(s-j)} = C_1 + \frac{C_2 s + C_3}{s^2+2s+2}(s+1) + \frac{C_4}{s+j}(s+1) + \frac{C_5}{s-j}(s+1)$$

حال $S+1=0 \leftarrow S=-1$ با جایگذاری معادله بالا را

با $S=-1$ حل می‌کنیم:

$$\frac{1}{(1)\underbrace{(-1+j)(-1-j)}_{2}} = C_1 + 0 + 0 + 0 \Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{1}{2}}$$

حال برای بدست آوردن C_4 طرفین را در $S+j$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)(s-j)} = C_4 + 0 + 0 + 0$$

حال $S+j=0 \leftarrow s=-j$

$$\frac{1}{(-j+1)(-1-2j+2)(-2j)} = C_4 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(-2-2j)(1-2j)} = \frac{1}{-2+4j-2j-4} = \boxed{\frac{1}{-6+2j} = C_4}$$

حال برای بدست آمدن C_5 طرفین در $S-j$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)(s+j)} = C_5 + 0 + 0 + 0$$

حال $S-j=0 \leftarrow s=j \leftarrow$

$$C_5 = \frac{1}{(j+1)(-1+2j+2)(2j)} = \frac{1}{(-2+2j)(1+2j)} =$$

$$\frac{1}{-2-4j+2j-4} = \boxed{\frac{1}{-6-2j} = C_5}$$

حال برای بدست آوردن C_2 و C_3 با همین روش قبلی می‌توانیم حل کنیم. امّا اینجا برای اطلاع از روش‌های دیگر استفاده می‌کنیم. از روش عددگذاری استفاده می‌کنیم. از عددی غیر از ریشه مخرج به جای s می‌گذاریم داریم:

$$s=0 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{C_3}{2} + \underbrace{\frac{1}{-6+2j} \cdot \frac{1}{j}}_{\frac{1}{-6j-2}} + \underbrace{\frac{1}{-6-2j} \cdot \frac{1}{-j}}_{\frac{1}{6j-2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{C_3}{2} - \frac{1}{10} \Rightarrow \boxed{C_3 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}}$$

برای بدست آوردن C_1 و C_4 و C_5 نیز می‌توانستیم از روش عددگذاری استفاده کنیم:

حال برای بدست آوردن C_2، $s=1$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{1}{(2)(5)(2)} = \frac{1}{4} + \frac{C_2+1/5}{5} + \frac{1}{-6+2j} \cdot \frac{1}{1+j} + \frac{1}{-6-2j} \cdot \frac{1}{1-j}$$

$$= \frac{1}{-6-6j+2j-2} + \frac{1}{-6+6j-2j-2} + \frac{1}{4} + \frac{C_2+1/5}{5}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{C_2+1/5}{5} + \frac{1}{-8-4j} + \frac{1}{-8+4j}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{C_2+1/5}{5} + \frac{\overbrace{-8+4j-8-4j}^{-16}}{\underbrace{64+16}_{80}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{20} = \frac{1}{4} + \frac{C_2+1/5}{5} - \Rightarrow \boxed{C_2 = -1/5}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \quad \text{[illegible]} \quad +$$

$$\frac{1}{-6+2j}e^{-jt} + \frac{1}{-6-2j}e^{+jt}$$

از روابط ریاضی داریم: (روابط اویلر):

$$\begin{cases} e^{\theta j} = \cos\theta + j\sin\theta \\ e^{-\theta j} = \cos\theta - j\sin\theta \end{cases}$$

با جاگذاری در ترم سوم و چهارم سمت راست معادله y(t) داریم:

$$\frac{1}{-6+2j} e^{-jt} = \frac{1}{-6+2j}(\cos t - j\sin t)$$

$$+$$

$$\frac{1}{-6-2j} e^{jt} = \frac{1}{-6-2j}(\cos t + j\sin t)$$

$$= \cos t\left(\frac{1}{-6+2j} + \frac{1}{-6-2j}\right) + j\left(\frac{-1}{-6+2j} + \frac{1}{-6-2j}\right)\sin t$$

$$= \frac{-6-2j-6+2j}{36+4}\cos t + j\,\frac{6+2j-6+2j}{36+4}\sin t$$

$$= \frac{-3}{10}\cos t - \frac{1}{10}\sin t$$

آخر سر اگر درست باشد نباید در پایان یک موهومی باقی مانده باشد.

حال جمله دوم سمت راست معادله y(t) را بدست آوریم:

بعد از ساده سازی جمله دوم می شود: $\frac{1}{5}\frac{-s+1}{s^2+2s+2}$

از قبل می دانیم (قضیه انتقال)

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = F(s+a) \\ \Rightarrow \\ \mathcal{L}\{f(t-t_0)\} = e^{-t_0 s}F(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{e^{-at}\sin\omega t\} = \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2} \\ \mathcal{L}\{e^{-at}\cos\omega t\} = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2} \end{cases}$$

$$\frac{-s+1}{s^2+2s+2} = \frac{-s+1}{s^2+2s+1+1} = \frac{-s+1-1+1}{(s+1)^2+1}$$

$$= \frac{-(s+1)+2}{(s+1)^2+1} = -\frac{s+1}{(s+1)^2+1} + 2\,\frac{1}{(s+1)^2+1}$$

$\Rightarrow$ جمله دوم y(t) می شود

$$\frac{1}{5}\left(-e^{-t}\cos t + 2e^{t}\sin t\right)$$

$$\Rightarrow y(t)=\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{5}(-e^{-t}\cos t+2e^{-t}\sin t)-\frac{3}{10}\cos t$$

$$-\frac{1}{10}\sin t$$

مثال)

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad T(x,t)$$

$t=0 \qquad T=T_i$

$x=0 \qquad T=0$

$x=l \qquad T=0$

می‌دانیم اگر تابع ما تابع دو متغیره بود داریم ; $f(x,t)$

نسبت به t لاپلاس می‌گیریم :

$$\mathcal{L}_t\{f(x,t)\}=\int_0^\infty f(t,x)\,e^{-st}\cdot dt=F(s,x)$$

اگر بخواهیم از x لاپلاس بگیریم داریم ;

$$\mathcal{L}_x\{f(x,t)\}=\int_0^\infty f(t,x)\,e^{-px}\,dx=F(t,p)$$

در این مثال چون فقط در جهت t ، مقدار اولیه داریم ، مجازیم فقط در جهت t لاپلاس بگیریم . در جهت x می‌بینیم هم در صفر هم در l مقدار داریم . اگر در مسئله هم در جهت t ، هم در جهت x مقدار اولیه داشتیم می‌توانستیم در هر دو جهت لاپلاس استفاده کنیم .

$$\mathcal{L}_t\left\{\frac{\partial f}{\partial t}\right\}=sF(s,x)-f(t=0,x)$$

$$\mathcal{L}_x\left\{\frac{\partial f}{\partial t}\right\}=\int_0^\infty\frac{\partial f}{\partial t}\,e^{-px}\,dx=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty f\cdot e^{-px}\cdot dx$$

$$=\frac{\partial F(t,p)}{\partial t}$$

با استفاده از قضیه leibnitz داریم ;

$$\frac{d}{dx}\int_{\varphi(\alpha)}^{\phi(\alpha)}F(x,\alpha)\,d\alpha=\int_\varphi^\phi\frac{\partial F}{\partial x}\,d\alpha+$$

$$F(\phi,\alpha)\frac{d\phi}{dx}-F(\varphi,\alpha)\frac{d\varphi}{dx}$$

در مثال بالا جملات دوم و سوم صفر می‌شود :

حال داریم:

$$\mathcal{L}_x\left\{\frac{\partial f}{\partial x}\right\} = pF(t,p) - f(t,x=0)$$

$$\mathcal{L}_t\left\{\frac{\partial f}{\partial x}\right\} = \frac{\partial F(s,x)}{\partial x}$$

همیشه می‌بینیم لاپلاس گیری در جهت مشتق می‌باشد یا نه. اگر در جهت مشتق بود که از فرمول معمول لاپلاس استفاده می‌کنیم ولی اگر در جهت مشتق نبود از فرمول دوم استفاده می‌کنیم (مهمترین مسئله در حل سئوال با تبدیل)

حال در مسئله قبل در جهت t لاپلاس می‌گیریم:

$$\mathcal{L}_t\left\{\frac{\partial T}{\partial t}\right\} = \alpha\,\mathcal{L}_t\left\{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right\} \Rightarrow$$

$$sT(s,x) - \underbrace{T(t=0,x)}_{T_i} = \alpha\frac{d^2T(s,x)}{dx^2}$$

$$\frac{d^2T(s,x)}{dx^2} - \frac{s}{\alpha}T(s,x) = -\frac{T_i}{\alpha} \qquad ①$$

حال مسئله تبدیل به یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه 2 شده است که شرایط مرزی ناهمگن دارد. بنابراین باید شرایط مرزی را باید همگن کنیم.

چون مقدار ثابت معادله $-\frac{T_i}{\alpha}$ می‌باشد بنابراین جواب خاص معادله می‌شود:

$$\left.\begin{array}{l} T_p = C_1 \\ \frac{d^2T_p}{dx^2} = 0 \end{array}\right\}\quad 0 - \frac{s}{\alpha}C_1 = -\frac{T_i}{\alpha} \Rightarrow C_1 = \frac{T_i}{s}$$

$$T = T_h + T_p$$

اگر در جهت x نیز مشتق مقدار اولیه بود می‌توانستیم از معادله ① دوباره در جهت x تبدیل لاپلاس بگیریم ولی چون در جهت x نیست بنابراین نمی‌توانیم.

$$\frac{d^2T_h}{dx^2} - \frac{s}{\alpha}T_h = 0$$

$$D^2 - \frac{s}{\alpha} = 0 \Rightarrow D = \pm\sqrt{\frac{s}{\alpha}}$$

$$T_h = C_2 e^{\sqrt{\frac{s}{\alpha}}x} + C_3 e^{-\sqrt{\frac{s}{\alpha}}x}$$

$$T_h = C_2 \sinh\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\,x + C_3\cosh\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\,x$$

هرکدام را بنویسید فرقی نمی‌کند ولی با توجه به شرط مرزی که داده [illegible] دومی بهتر شد.

با شرط مرزی که T است ولی اینجا T_h است لذا باید ابتدا $T_h + T_p$ کنیم بعد شرایط مرزی را اعمال کرده و C_2 و C_3 را بدست آوریم:

$$\Rightarrow T = T_p + T_h = \frac{T_i}{s} + C_2 \sinh\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\,x + C_3 \cosh\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\,x$$

حال چون داریم:

$$x = 0 : T = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{T_i}{s} + 0 + C_3 = 0 \Rightarrow C_3 = -\frac{T_i}{s}$$

$$x = L : T = 0 = \frac{T_i}{s} + C_2 \sinh\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\,L - \frac{T_i}{s}\cosh\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\,L$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{T_i}{s}\,\frac{\cosh\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\,L}{\sinh\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\,L} - \frac{T_i}{s\,\sinh\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\,L}$$

$$\Rightarrow T(s,x) = \frac{T_i}{s} + \overbrace{\frac{T_i}{s}\,\frac{\cosh\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\,L}{\sinh\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\,L}\,\sinh\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\,x}^{\text{جمله سوم}}$$

$$-\frac{T_i}{s}\,\frac{\sinh\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\,x}{\sinh\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\,L} \quad \underbrace{\frac{T_i}{s}\cosh\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\,x}_{\text{جمله چهارم}}$$

حال با استفاده از تبدیل لاپلاسی که صفحه بعد کتاب هند ذکر داریم:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{x}{a} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\,e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{a^2}}\,\sin\frac{n\pi x}{2a}\right\} = \frac{\sinh x\sqrt{s}}{s\,\sinh a\sqrt{s}}$$

بنابراین:

$$T(t,x) = T_i +$$

$$-T_i\left[\frac{x}{L} + \frac{2}{\pi}\sum\frac{(-1)^n}{n}\,e^{-\frac{\alpha n^2\pi^2 t}{L^2}}\,\sin\frac{n\pi x}{2L}\right] +$$

جمله دوم و جمله چهارم در جدول تبدیل نداریم بنابراین جمله چهارم

را با تبدیل اویلر می‌نویسیم:

$$\frac{e^{\sqrt{\frac{s}{\alpha}}x} - e^{-\sqrt{\frac{s}{\alpha}}x}}{s} = \frac{e^{\sqrt{\frac{s}{\alpha}}x}}{s} - \frac{e^{\sqrt{\frac{s}{\alpha}}x}}{s}$$

داریم:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x$$

می‌بینیم که معکوس لاپلاس گیری بسیار سخت است حال دوباره برمی‌گردیم

و شرایط مرزی را عوض می‌کنیم و دوباره شروع می‌کنیم:

$$\theta = T - T_i$$

$$t = 0 \quad T = T_i \longrightarrow \theta = T - T_i = 0$$

$$x = 0 \quad T = 0 \longrightarrow \theta = -T_i$$

$$x = L \quad T = 0 \longrightarrow \theta = -T_i$$

حال تغییر مبدا می دهیم یعنی :

$$x=0 \qquad \frac{\partial T}{\partial x}=0 \longrightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x}=0$$

$$x=L/2 \longrightarrow \theta=-T_i$$

بنابراین $\frac{\partial \theta}{\partial t}=\alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$ شرایط در جهت

t لاپلاس می گیریم :

$$\mathcal{L}_t\left\{\frac{\partial \theta}{\partial t}\right\}=\alpha \mathcal{L}_t\left\{\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\right\}$$

$$S\theta(S,x)-\overset{0}{\cancel{\theta(t=0,x)}}=\alpha \frac{d^2\theta(S,x)}{dx^2}$$

$$\frac{d^2\theta(S,x)}{dx^2}-\frac{S}{\alpha}\theta(S,x)=0$$

$$\Rightarrow \theta(S,x)=C_1 \sinh\sqrt{\frac{S}{\alpha}}\,x+C_2 \cosh\sqrt{\frac{S}{\alpha}}\,x$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}=C_1\sqrt{\frac{S}{\alpha}}\cosh\sqrt{\frac{S}{\alpha}}\,x+C_2\sqrt{\frac{S}{\alpha}}\sinh\sqrt{\frac{S}{\alpha}}\,x$$

$$0=C_1\sqrt{\frac{S}{\alpha}}\times 1+C_2\sqrt{\frac{S}{\alpha}}\times 0 \Rightarrow \boxed{C_1=0}$$

$$\theta(s,x) = C_2 \; \mathrm{Cosh}\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\; x$$

حال در شرط مرزی داریم:

$$\theta(t, x = L/2) = -T_i$$

باید لاپلاس بگیریم تا بتوانیم در معادله بالا بگذاریم تا C_2 بدست آید:

$$\theta(s, L/2) = \frac{-T_i}{s}$$

$$\Rightarrow \; C_2 = \frac{-2\,T_i}{s\;\mathrm{Cosh}\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\; l} \quad \Rightarrow$$

$$\theta(s,x) = \frac{-2\,T_i\;\mathrm{Cosh}\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\;x}{s\;\mathrm{Cosh}\sqrt{\frac{s}{\alpha}\;L/2}\;\;a}$$

حال از جدول کتاب اکثر داریم:

$$L\left\{1 + \frac{4}{\pi}\sum \frac{(-1)^n}{2n-1}\; e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 t}{4a^2}}\;\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\right\}$$

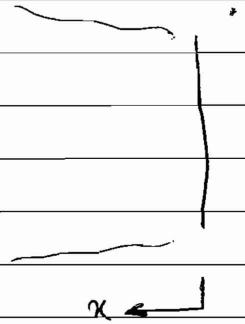
$$= \frac{\mathrm{Cosh}\, x\sqrt{s}}{s\,\mathrm{Cosh}\, a\sqrt{s}}$$

۸۹/۱۰/۲

جلسه هشتم

مثال : یک صفحه نیمه بی نهایت در نظر میگیریم (از یک طرف بی نهایت) این صفحه در ابتدا در دمای T_i قرار داشته است و سطح آن در یک لحظه T_s قرار داده می شود،

الف) توزیع دمای گذرا در این صفحه را بدست آورید. ب) شدت انتقال حرارت برای این صفحه نیمه بی نهایت را حساب کنید.



$t=0 \qquad T=T_i$

$x=0 \qquad T=T_s$

$x\to\infty \qquad T=T_i$

به خاطر شرط سوم $T=T_i$ ، $x\to\infty$ نمی توانیم از روش separation استفاده کنیم زیرا در جواب ضریب C_n از انتگرال $\int_0^L$ بدست می آید چون انتگرال تبدیل به $\int_0^\infty$ می شود و امکان محاسبه از دست می رود

اما روش دیگری بنام انتگرال فوریه وجود دارد. حل روش

حل این معادله با انتگرال فوریه بررسی می کنیم:

در این حالت دو روش وجود دارد

۱- ترکیب متغیرها : Combination of variable

بنابراین

$$T=T_i = -2T_i\left[1+\frac{4}{\pi}\sum\frac{(-1)^n}{2n-1}e^{-\frac{\alpha(2n-1)^2\pi^2 t}{L^2}}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right]$$

این روش یک روش ابتکاری است که ترکیبی از متغیرهای x و t را پیدا می‌کنیم

که معادله را به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌کند.

۲- لاپلاس Laplace:

در این روش کاری می‌کنیم که $T=T_i$ تبدیل به صفر شود و

همچنین بی‌بعد می‌کنیم.

فواید بی‌بعد کردن: ۱- اعدادی بی‌بعد که در آن پدیده را استخراج می‌کنیم.

۲- منحنی عمومی برای آن پدیده را رسم می‌کنیم

حال در انتقال ممنتم که نظیر حرارتی است داریم:

$$\xrightarrow{\quad V \quad}$$

سیال به حرکت در می‌آید و در جاهای بی‌نهایت ساکن می‌ماند

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad \left| \begin{array}{ll} t=0 & v=0 \\ x=0 & v=V \\ x=\infty & v=0 \end{array} \right.$$

حال به انتقال حرارت برمی‌گردیم:

با تغییر متغیر: $\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$ $\qquad \theta = \frac{T-T_i}{T_s-T_i}$

$t=0 \quad \theta=0 \nearrow$ IVP

$x=0 \quad \theta=1 \quad \Rightarrow \theta(S,0)=\frac{1}{S}$

$x\to\infty \quad \theta=0 \quad \Rightarrow \theta(S,\infty)=$

در جهت t لاپلاس می‌گیریم چون IVP

$$L\{\theta(t,x)\} = \theta(s,x)$$

$$S\,\theta(s,x) - \overset{0}{\cancel{\theta(t=0,x)}} = \alpha \frac{d^2\theta(s,x)}{dx^2}$$

$$\frac{d^2\theta(s,x)}{dx^2} - \frac{S}{\alpha}\theta(s,x) = 0$$

$$D^2 - \frac{S}{\alpha} = 0 \Rightarrow D = \pm\sqrt{\frac{S}{\alpha}}$$

نکته: چون شرط بی‌نهایت داریم بنابراین جواب به صورت exp نوشته

می‌شود. اگر محدود بود به صورت Sinh , Cosh نوشته می‌شد:

$$\theta(S,x) = C_1 e^{\sqrt{\frac{S}{\alpha}}x} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{S}{\alpha}}x}$$

شرط مرزی $\theta(S,\infty)=0 \rightarrow C_1=0$

شرط مرزی $\theta(S,0)=\frac{1}{S} \rightarrow \frac{1}{S}=C_2$

$$\Rightarrow \theta(S,x) = \frac{1}{S} e^{-\sqrt{\frac{S}{\alpha}}x}$$

با توجه به صفحه ۲۶۸ کتاب دکتر رفیع‌زاده داریم (ردیف 38):

$$L\left\{\operatorname{erfc}\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right\} = \frac{e^{-\alpha\sqrt{S}}}{S} \Rightarrow$$

$$\theta = \frac{T-T_i}{T_s-T_i} = \operatorname{erfc}\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = 1-\operatorname{erf}\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}$$

نکته:

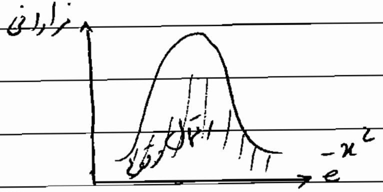
$$\operatorname{erf} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\wedge} e^{-\beta^2}\, d\beta$$

$$\operatorname{erfc} = 1-\operatorname{erf}$$

تعمیم تابع خطا

تابع خطا یک سمبل آماری است. حال چرا می‌گویند تابع خطا:

در واقع سطح زیر نمودار احتمال وقوع را می‌دهد. در واقع تابع خطا



یک عدد بین ۰ تا 1 است.

H.W : اگر شرط مرزی را به جای $x=0$، شدت انتقال حرارت ثابت باشد

$$x=0 \qquad -k\frac{dT}{dx} = \frac{q''}{A}$$

معادله را بار دیگر حل کنید (جواب آخر در کتاب holman می‌باشد)

فرمول لایبنیتس :

$$\frac{d}{dx}\int_{\phi(\alpha)}^{\varphi(\alpha)} f(\alpha, x)\, dx = \int_{\phi(\alpha)}^{\varphi(\alpha)} \frac{dF}{d\alpha}.dx + F(\varphi,\alpha)\frac{d\varphi}{d\alpha} - F(\phi,\alpha)\frac{d\phi}{d\alpha}$$ *

$$q = -kA\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0} = -k.A.(T_s-T_i)\frac{\partial}{\partial x}\left(-\operatorname{erf}\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$

$$= kA(T_s-T_i)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}} e^{-\beta^2}.\, d\beta$$

از فرمول *

$$= kA(T_s-T_i)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(0 + e^{-x^2/4\alpha t}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) - 0\right)\Big|_{x=0}$$

$$= \frac{kA(T_s-T_i)}{\sqrt{\pi}} \times \frac{1}{2\sqrt{\alpha t}}$$

روش Combination of Variable :

$$\eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}$$

با تغییر متغیر به معادله دیفرانسیل خطی تبدیل می‌شود:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad , \eta = a\alpha^b x^c t^d$$

a, b, c, d پارامترهایی هستند که باید تعیین شوند و با قرار دادن در معادله دیفرانسیل ظاهر می‌شوند.

$$a = 1/2 \ , \ b = -1/2 \ , \ c = 1 \ , \ t = -1/2$$

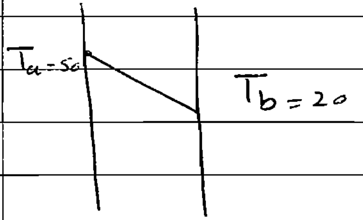
H.W = با انتگرال گیری q را از معادله دیفرانسیل حرارت داده , a , b , c را محاسبه کنید.

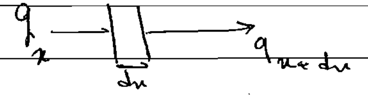
حل عددی: numerical Solution:

finite differences:

۱ بعدی:

مثال: یک صفحه به ضخامت L که یک طرف آن دما Ta است و طرف دیگر Tb می باشد در حالت S.S در نظر می گیریم. توزیع دما این صفحه را بدست می آوریم.





$L=0.1$

$k = cte$ ⟶ جواب خطی است

می دانیم برای نوشتن معادله انرژی بدست آوردیم:

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)=0$$

k را از معادله انرژی بیرون نمی آوریم زیرا که شاید می خواهیم آن را متغیر در نظر بگیریم: داریم:

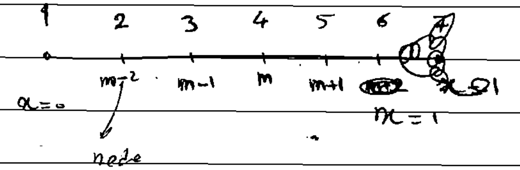
$x=0$ $T-T_a$
$x-L$ $T-T_b$

مرحله اول: ابتدا فضای مسئله را به تعدادی زیر فضا تقسیم می کنیم. نقاط مابین این زیرفضاها، گره یا node نامیده می شود.

مرحله دوم: مشتق های موجود در معادله دیفرانسیل را با تفاضل های محدود تقریب می زنیم.

مرحله سوم: تقریب های مشتق را در معادله دیفرانسیل قرار می دهیم تا معادله تفاضلی بدست آید. معادله تفاضلی را برای تک تک گره ها نوشته تا یک دستگاه معادلات جبری بدست آید.

مرحله چهارم: حل دستگاه بدست آمده، دماهای گره ها یعنی همان حل عددی می باشند.



برای یک بعدی، no. of. division $nd+1=\overset{\text{گره ها}}{n}$

$5+1=6$

حال سوال مطرح است تعداد تقسیمات مناسب چند تا است و چگونه محاسبه می‌شود؟ (فکر کنید)

از $\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)$ ، k را بیرون می‌آوریم $\longleftarrow \frac{d^2T}{dx^2}=0$

$T=T_a-\frac{T_a-T_b}{L}x \longleftarrow$ حل تحلیلی $\rightarrow T=C_1x+C_2$

حل عددی: یعنی مقدار تابع را در نقاطی بدست آوریم، سری نقاط منفصل می‌شود.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dT}{dx}\right)$$

$\frac{\Delta T}{\Delta x}=\frac{T_{m+1}-T_m}{\Delta x}$ تقریب forward (پیشرو)

$\frac{\nabla T}{\Delta x}=\frac{T_m-T_{m-1}}{\Delta x}$ (پسرو): Backward

$\frac{\delta T}{\partial x}=\frac{T_{m+1}-T_{m-1}}{2\Delta x}$ (مرکزی): Central

حال داریم:

$$\frac{d}{dx}\left(\overset{P}{\frac{dT}{dx}}\right)\Bigg|_m=\overset{\text{پیشرو}}{\frac{P_{m+1}-P_m}{\Delta x}}=\frac{\frac{dT}{dx}\Big|_{m+1}-\frac{dT}{dx}\Big|_m}{\Delta x}$$

پسرو $$=\frac{\frac{T_{m+1}-T_m}{\Delta x}-\frac{T_m-T_{m-1}}{\Delta x}}{\Delta x}=\frac{T_{m+1}-2T_m+T_{m-1}}{\Delta x^2}$$

چون قبلا Forward تقریب زدیم مرحله بعد backward تقریب می‌زنیم تا خطا کمتر شود.

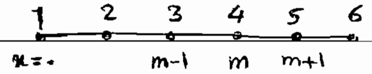
حال در معادله دیفرانسیل قرار می‌دهیم:

$$\frac{d^2T}{dx^2}=0 \Rightarrow T_{m+1}-2T_m+T_{m-1}=0$$

(برای گره mام)

(difference Eq.)

برای گره‌های روی مرز از شرط مرزی استفاده می‌کنیم:



m-1 $T_1=T_a$

m-2 $T_3-2T_2+T_1=0$

m=3 $T_4-2T_3+T_2=0$

m=4 $T_5-2T_4+T_3=0$

m=5 $T_6-2T_5+T_4=0$

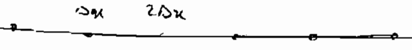
m=6 $T_6=T_b$

با حل دستگاه معادلات حل عددی بدست می‌آید.

روش‌های حل:

1- Gouse elimination } حذف گوس
2- کرامر } تحلیلی
3- ماتریس معکوس
4- Gouse jordan
5- Gouse sidel } حدس و خطا (iteration)
6- Relaxatin
7- newton-rafson
8- false position
9- bisection

k گره m+1 با k گره m تفاوت دارد



$$\Delta x = \frac{L}{nd}$$

طول گره m $\quad x_m = (m-1)\Delta x$

$$k_m = k_0\left(1 + \alpha(m-1)\Delta x\right)$$

$$\frac{k_0(1+\alpha m\Delta x)\dfrac{T_{m+1}-T_m}{\Delta x} + k_0(1+\alpha(m-1)\Delta x)\dfrac{T_m - T_{m-1}}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$= \frac{k_0\overset{A_{m,m+1}}{\boxed{1+\alpha m\Delta x}}\,T_{m+1} - \overset{A_{m,m}}{\boxed{2+\alpha(2m-1)\Delta x}}\,T_m + \overset{A_{m,m-1}}{\boxed{1+\alpha(m-1)\Delta x}}\,T_{m-1}}{\Delta x^2}$$

$$= \underset{b_m}{\boxed{0}}$$

$$\Rightarrow \underset{A_{m,m+1}}{\underset{\downarrow}{①}}T_{m+1} - \underset{A_{m,m}}{\underset{\downarrow}{②}}T_m + \underset{A_{m,m-1}}{\underset{\downarrow}{①}}T_{m-1} = 0$$

$$\begin{cases} m=1 & T_1 = T_a \\ 2 \le m \le 5 & \text{diff. eq.} \\ m = 6 & T_6 = T_b \end{cases}$$

حال از روش ماتریس معکوس:

$$\begin{array}{ccc} A & T & b \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} T_a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_b \end{bmatrix} \end{array}$$

$$AT = b$$

$T = A^{-1}.b$ با ضرب

اگر k را تابع مکان بگیریم: $\quad k = k_0(1+\alpha x)$

$\alpha = 30$ در نظر بگیریم تا مشخص است k چه جوری شود

حل جبری: $\dfrac{d}{dx}\left[k_0(1+\alpha x)\dfrac{dT}{dx}\right] = 0$

$$k_0(1+\alpha x)\frac{d^2T}{dx^2} + k_0\alpha\,\frac{dT}{dx} = 0$$

اگر از ابتدا به صورت زیر بنویسیم بهتر است:

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)\Big|_m = \frac{k\,{}^{dT}\!/_{dx}\big|_{m+1} - k\,{}^{dT}\!/_{dx}\big|_m}{\Delta x}$$

$$-k\frac{T_{n-1}-T_n}{\Delta x} = h(T_n\ T_\infty) \quad ①$$

$$m=n \quad \underbrace{①}_{A_{n,n-1}} T_{n-1} \underbrace{-\left(1+\frac{h\Delta x}{k}\right)}_{A_{n,n}} T_n = \underbrace{\frac{h\cdot\Delta x}{k}\ T_\infty}_{b_n}$$

② اگر تولید حرارت هم داشته باشیم

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right) + \dot q = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)\Big|_m = \underbrace{-\dot q \times \Delta x^2}_{b_m} \longrightarrow \dot q_x\, \Delta x^2 = b_m$$

در مخرج بود حذف شد

صفر

③ عایق باشد

$$\frac{dT}{dx}\Big|_{x=0} = 0 \qquad \frac{T_1-T_2}{\Delta x} = 0 \longrightarrow \underbrace{①}_{A_{1,1}} T_1 \underbrace{⊖}_{A_{1,2}} T_2 = \underbrace{⓪}_{b_1}$$

Radiation ④

$$-k\frac{dT}{dx}\Big|_{x=0} = \frac{q''}{A}$$

$$\frac{T_1-T_2}{\Delta x} = -\frac{q'}{Ak}$$

$$T_1 - T_2 = \underbrace{-\frac{q\cdot\Delta x}{Ak}}_{b_1}$$

در math 31 حالت ① ← گره آخر Convection

k_0 را تعریف می‌کنیم. h, Tinf را تعریف می‌کنیم

با math 29 حل می‌کنیم

A را ماتریس صفر می‌کنیم، اعضای غیرصفر را به آن اضافه می‌کنیم چون صفر زیادی دارد.

می‌توان بعد از حلقه A , B را نوشته، ماتریس را ببینیم : inv(A) ماتریس معکوس

و شکل را رسم می‌کنیم

برنامه 30 برنامه با k متغیر را رسم می‌کنیم.

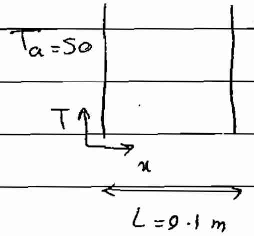
چون k ↗ ← ΔT که می‌بینیم نقش دارد

شدت انتقال حرارت ← $\frac{q''}{A}$

اگر در برنامه 29 بخواهیم $\frac{q}{A}$ = را حساب کنیم

$$q_A = k*(\ T(1) - T(2))/dx$$

حال شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم:



$$x=L \qquad -k\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{ⓝ} = h(T - T_\infty)$$

در گره آخر چون x=1

اگر شرط مرزی نوع اول نباشد، خود شرط مرزی را ساده می‌کنیم

جلسه نهم:

مثال:

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)=0$$

$x=0 \quad , \quad T=T_a$

$x=L \quad , \quad T=T_b$

$k=k_0(1+\beta T)$

مثل مثال جلسه قبل است با این تفاوت که k تابع دما می شد.

حل:

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)\Big|_m=\frac{\left|k\frac{dT}{dx}\right|_{m+1}-\left|k\frac{dT}{dx}\right|_m}{\Delta x}$$

داریم: $k_m=k_0(1+\beta T_m)$

$$\frac{k_0(1+\beta T_{m+1})\frac{dT}{dx}\Big|_{m+1}-k_0(1+\beta T_m)\frac{dT}{dx}\Big|_m}{\Delta x}$$

$$\frac{\cancel{k_0}(1+\beta T_{m+1})\frac{T_{m+1}-T_m}{\cancel{\Delta x}}-\cancel{k_0}(1+\beta T_m)\frac{T_m-T_{m-1}}{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}}=0$$

$$\Rightarrow (1+\beta T_{m+1})T_{m+1}-(2+\beta T_{m+1}+\beta T_m)T_m+(1+\beta T_m)T_{m-}=0$$

در math 32، b_m را تعریف می کنیم و q را نیز تعریف می کنیم.

در math 33 سمت چپ را اعمال می کنیم.

برنامه Radiation را هم خودتان انجام دهید.

اگر $m=1 \rightarrow T=T_a$

$2 \leqslant m \leqslant n-1$

$m=n \rightarrow T_n=T_b$

روش حل معادلات جبری غیرخطی ، حدس و خطا است

روش‌های زیر برای حل معادله جبری غیرخطی وجود دارد.

1- Newton-Rafson

2- bisection

3- iteration
- Guass-jordan
- Guass-Seidel
- relaxation: under, over

در بین روش‌های بالا ، روش اول از همه بهتر است و مبنای همه آنها حدس و خطا می‌باشد.

روش نیوتن رافسون :

$$f(x)=0 \Rightarrow x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$f(x) \xrightarrow{x_0} \text{بسط تیلور}$$

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots$$

دو جمله اول را نگه می‌داریم و بقیه را صفر فرض می‌کنیم. چون که دو جمله اول شیب خط می‌باشد.

$$\text{if} \quad x=r \Rightarrow f(r)=0=f(x_0)+f'(x_0)(r-x_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{r=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$$

بنابراین الگوریتم از بسط تیلور قابل حل می‌باشد.

حال توابع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f_1(x_1,x_2)=x_1^2+x_1x_2-2=0$$

$$f_2(x_1,x_2)=2x_1x_2+x_1x_2^2-3=0$$

می‌دانیم $x_1=1$ و $x_2=1$ ، جواب معادلات می‌باشند.

if $x_1 = r$ $\Rightarrow$

$x_2 = S$

$$f_1(r,s)=0=f_1(x_{10},x_{20})+\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_{\substack{x_{10}\\x_{20}}}\overbrace{(r-x_{10})}^{\Delta x_1}+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Big|_{\substack{x_{10}\\x_{20}}}\overbrace{(S-x_{20})}^{\Delta x_2}$$

$$f_2(r,s)=0=f_2(x_{10},x_{20})+\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\Big|_{\substack{x_{10}\\x_{20}}}(r-x_{10})+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\Big|_{\substack{x_{10}\\x_{20}}}(S-x_{20})$$

در دو معادله بالا، $f_1(x_{10},x_{20})$ و $f_2(x_{10},x_{20})$ را به طرف دیگر منتقل می‌کنیم،

حال دو معادله بالا را به صورت ماتریسی می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_{\substack{x_{10}\\x_{20}}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \quad \text{jacobian} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-f_1\Big|_{\substack{x_{10}\\x_{20}}}\\ -f_2\end{bmatrix}$$

$x_{11} = x_{10} + \Delta x_1$

$x_{21} = x_{20} + \Delta x_2$

حال می‌خواهیم ببینیم با روش نیوتن رافسون قابل حل می‌باشد یا نه:

$f_1(x_1,x_2)=0$

$f_2(x_1,x_2)=0$

$$f_1(x_1,x_2)=f_1(x_{10},x_{20})+\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_{\substack{x_{10}\\x_{20}}}(x_1-x_{10})+$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Big|_{\substack{x_{10}\\x_{20}}}(x_2-x_{20})+\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}\Big|_{\substack{x_{10}\\x_{20}}}(x_1-x_{10})^2+$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2\partial x_1}\Big|_{\substack{x_{10}\\x_{20}}}\cancel{(x_1-x_{10})(x_2-x_{20})}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\Big|_{\substack{x_{10}\\x_{20}}}\cancel{(x_2-x_{20})^2}+$$

حال برای تابع دوم نیز می‌نویسیم:

$$f_2(x_1,x_2)=f_2(x_{10},x_{20})+\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\Big|_{\substack{x_{10}\\x_{20}}}(x_1-x_{10})+$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\Big|_{\substack{x_{20}\\x_{10}}}(x_2-x_{20})$$

jacobian : یعنی ماتریسی که اعضای آن مشتق‌های تابع باشد.

حال می‌خواهیم ببینیم با استفاده از ماتریس بالا دو معادله $f_1(x_1, x_2)$ و $f_2(x_1, x_2)$ را حل کنیم. حال فرمول برگشتی دو معادله بالا را می‌نویسیم:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 & x_1 \\ 2x_2 + x_2^2 & 2x_1 + 2x_1 x_2 \end{bmatrix}}_{J} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -x_1^2 - x_1 x_2 + 2 \\ -2x_1 x_2 - x_1 x_2^2 + 3 \end{bmatrix}}_{F}$$

حال برای x_{10} و x_{20} دو عدد حدس می‌زنیم.

$x_{10} = 2$, $x_{20} = 0$

حال مقادیر x_{10} و x_{20} را در ماتریس بالایی می‌گذاریم:

$$\Delta x = J^{-1} . F$$

حال Δx_1 ، Δx_2 را بدست می‌آوریم حدس جدید می‌شود

$$(x_{10} = 2) + \Delta x_1 = x_{11}$$

$$(x_{20} = 0) + \Delta x_2 = x_{21}$$

حال این عمل را ادامه می‌دهیم. اگر Δxها بزرگتر شد، جواب واگرا است و حدس اولیه غلط است باید دوباره حدس اولیه بزنیم، ادامه دهیم. اگر Δx کوچک می‌شد درست است، ادامه می‌دهیم تا Δx کم آنقدر کوچک شود که قابل قبول باشد.

مطلب ۳٤:

حال برنامه مطلب برای حل دستگاه ماتریس ژاکوبین را می‌نویسیم تا ببینیم حدس‌های ما به جواب می‌رساند یا نه.

شرط این شد error تعریف می‌کنیم که میانگین Δx_1 ، Δx_2 را می‌گذاریم.

معادلات غیرخطی می‌توانند بیش از یک جواب داشته باشند مثلاً در برنامه مطلب ۲٤ اگر x [2000; 1000] بگذاریم جواب‌های دیگر را ارائه که می‌شود

$x_1 = 3$, —

$x_2 = -2$, —

حال اگر n معادله، n مجهول داشته باشیم:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

معادله برگشتی آنها بر اساس نیوتن - رافسون می شود:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_1 \\ \vdots \\ F_i = \\ \vdots \\ -f_n \end{bmatrix} - f_i$$

حال برگردیم به مثال اول جلسه:

$$m = 1 \qquad T_1 = T_a \Rightarrow f_1 = T_1 - T_a = 0$$

$$2 \leq m \leq n-1 \qquad f_m = (1+\beta T_{m+1})T_{m+1} - (2+\beta T_{m+1} + \beta T$$

$$+ (1+\beta T_m) T_{m-1} = 0$$

$$J_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial T_1} = 1$$

$$J_{1j} = 0 \qquad F_1 = -T_1 + T_a$$

$$j \neq 1$$

$$J_{m,m-1} = \frac{\partial f_m}{\partial T_{m-1}} = 1 + \beta T_m, \quad J_{m,m} = \frac{\partial f_m}{\partial T_m} =$$

$$-(2+\beta T_{m+1} + 2\beta T_m) + \beta T_{m-1}$$

$$J_{m,m+1} = \frac{\partial f_m}{\partial T_{m+1}} = (1+2\beta T_{m+1}) - \beta T_m$$

$$F_m = -f_m$$

$$J_{in} = 0 \qquad J_{n,n} = 1 \qquad F_n = -T_n + T_b$$

$$i \neq n$$

حال با مطلب 35 ، برنامه برای حل این معادله می نویسیم:

گرفتاری روش تکرار، مشکل همگرایی آن است.

برای تشکیل معادلات روش تکرار را انجام می‌دهیم:

f_1 $m=1$ $\quad T_1 = T_a \Rightarrow f_1 = T_1 - T_a = 0$

$2 \leqslant m \leqslant n-1$ $\quad f_m = (1+\beta T_{m+1})T_{m+1} - (2+\beta T_{m+1} + \beta T_m)T_m + (1+\beta T_m)T_{m-1} = 0$

$m=n$ $\quad T_n = T_b \Rightarrow f_n = T_n - T_b = 0$

حال داریم:

$f_1 = T$[illegible]$- T_a = 0$

2 $f_2 = (1+\beta T_3)T_3 - (2+\beta T_3 + \beta T_2)T_2 + (1+\beta T_2)T_1 = 0$

3 $f_3 = (1+\beta T_4)T_4 - (2+\beta T_4 + \beta T_3)T_3 + (1+\beta T_3)T_2 = 0$

4 $f_4 = (1+\beta T_5)T_5 - (2+\beta T_5 + \beta T_4)T_4 + (1+\beta T_4)T_3 = 0$

$f_5 = T_5 - T_b = 0$

حال از روی $T_2 \leftarrow f_2$ را بدست می‌آوریم

〃 〃 $T_3 \leftarrow f_3$ ——

〃 〃 $T \leftarrow f$ ——

nd : number of division

عامل غیرخطی بودن را حذف می‌کنیم و معادله را حل می‌کنیم و جواب‌های آن را به عنوان حدس اولیه معادله غیرخطی در نظر می‌گیریم:

در این شکل k عامل غیرخطی شدن می‌باشد. حال در اینجا ابتدا مقدار ثابت یعنی $35 = \frac{20+50}{2}$ ، k را برابر کرده و در معادله قرار می‌دهیم تا خطی شود

~~Gausserjourdan.~~

روش تکرار:

فرض کنیم یک معادله منفرد داریم:

$f(x) = 0 \Rightarrow x_{n+1} = g(x_n)$

حال برای چند معادله چند مجهول داریم:

$f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \Rightarrow x_1 = g_1(x_1, \dots, x_n)$

$\vdots$

$f_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \Rightarrow x_n = g_n(x_1, \dots, x_n)$

$T_2 = 42.8$

$T_3 = 35$

$T_4 = 27.5$

در Gouse-gourdan تا زمانیکه سری جدید حدس بدست نیامده

از حدس اولیه استفاده می کنیم ولی در Gouse-sidel

به محض اینکه حدسی بدست آمد آنرا در جواب بعدی می گذاریم.

در Gouse-gourdan ، تعداد دفعاتی که سعی انجام می شود

بیشتر است ولی پایداری بیشتر است. در Gouse-siddel تعداد

دفعات کمتر است ولی پایداری کمتر می شود.

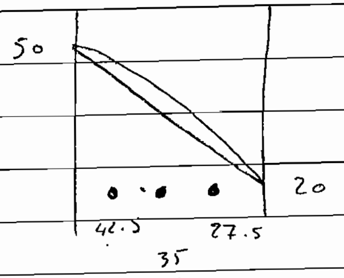
$$T_2 = \frac{(1+\beta T_3)T_3 + (1+\beta T_2)T_1}{(2+\beta T_3+\beta T_2)}$$

$$T_3 = \frac{(1+\beta T_4)T_4 + (1+\beta T_3)T_2}{2+\beta T_4+\beta T_3}$$

$$T_4 = \frac{(1+\beta T_5)T_5 + (1+\beta T_4)T_3}{2+\beta T_5+\beta T_4}$$

در این روش باید در حدس اولیه دقت کنیم چون اگر پرت باشد

به جواب نمی رسیم و جواب واگرا می شود.



$T_2 = 42.5$

$T_3 = 35$

$T_4 = 27.5$

اگر فرض کنیم $\beta = 0.1$ ، $T_1 = 50$ ، $T_2 = 42.5$ ،

$T_3 = 35$ مقدار T_2 را بدست می آوریم (از فرمول اول صفحه)

relaxation:

$f_1(x_1, \dots, x_n) = 0$

$f_2(x_1, \dots, x_n) = 0$

$\vdots$

$f_n(x_1, \dots, x_n) = 0$

قرار شد x_1 از معادله اول، x_2 از معادله دوم، ... x_n از معادله n ام بدست آوریم. بنابراین معادله اول به x_1، معادله دوم به x_2 و ... معادله n ام به x_n مربوطه اضافه می کنیم.

$x_1 = x_1 + \boxed{f_1(x_1, \dots\ x_n)}$ residue $\times \omega_1$

$\vdots$

$x_n = x_n + f(x_1, \dots\ x_n) \quad \times \omega_n$

در روش relaxation هر بار [illegible] Residue را در یک عددی ضرب می کنیم. باعث اثر روی معادله می شود ولی ترجیحاً جواب را بهبود می دهد. اگر $\omega_m > 1.0$ باشد می گوئیم over relaxation

و اگر $\omega_m < 1.0$ باشد می گوئیم under relaxation.

اگر از under relaxtion استفاده کنیم سرعت همگرایی را کاهش می دهد ولی حل پایدارتری کند

اگر از over ___ استفاده کنیم سرعت همگرایی را بیشتر و پایداری کمتر می شود.

مثالهای قبلی را از طریق relaxtion حل کنیم.

$$m=n \qquad f_n=\Big(1+\beta T_n+\underbrace{\frac{h\Delta x}{k_0}}_{Bi}\Big)T_n-(1+\beta T_n)T_{n-1}-\frac{h\cdot\Delta x\cdot T_\infty}{k_0}$$

هرگاه شرط مرزی نوع سوم بود با استفاده از تفاضل finite difference،

برای گره مربوطه finite differnce را می‌نویسیم و برای مرز استفاده می‌کنیم.

$$J_{nj}=0 \qquad J_{n,n-1}=\frac{\partial f_n}{\partial T_{n-1}}=-(1+\beta T_n)$$

$$j\neq n-1,n \qquad J_{n,n}=\frac{\partial f_n}{\partial T_n}=\Big(1+2\beta T_n+\frac{h\Delta x}{k_0}\Big)-\beta T_{n-1}$$

$$F_n=-f_n$$

حال مطلب 36 را می‌نویسیم بجای انرژی mat35 شرایط

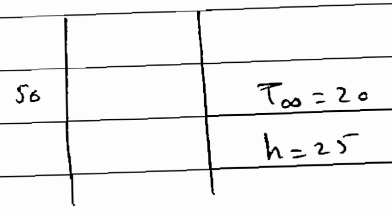
مرزی را عوض می‌کنیم.

هرچه h بزرگتر شود Bi بزرگتر می‌شود و منحنی را بیشتر به نقطه

وسط نزدیک می‌شود.

مثال) مثال قبلی با این تفاوت که T سطح به جای اینکه ۲۰°C باشد

با محیط با دمای 20°C و ضریب انتقال حرارت h=25 در ارتباط باشد.



حل:

$$x=L \quad : \quad -k\frac{dT}{dx}=h(T-T_\infty)$$

$$m=n \Rightarrow -k\frac{T_n-T_{n-1}}{\Delta x}=h(T_n-T_\infty)$$

$$-k_0(1+\beta T_n)\frac{T_n-T_{n-1}}{\Delta x}=h(T_n-T_\infty)$$

$$(1+\beta T_n)T_n-(1+\beta T_n)T_{n-1}=\frac{-h\Delta x}{k_0}(T_n-T_\infty)$$

$$\Big(1+\beta T_n+\frac{h\cdot\Delta x}{k_0}\Big)T_n-(1+\beta T_n)T_{n-1}-\frac{h\cdot\Delta x\cdot T_\infty}{k_0}$$

$$m=1 \qquad T_1=T_a \longrightarrow f_1=T_1-T_a$$

$$\Rightarrow$$

$$2\leqslant m\leqslant n-1 \qquad f_m=(1+\beta T_{m+1})T_m-(2+\beta T_{m+1}+\beta T_m$$

$$+(1+\beta T_m)T_{m-1}=0$$

حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی :

دو دسته هستند :

۱- سهمی ~~hyper~~ parabolic

۲- بیضوی Elliptic

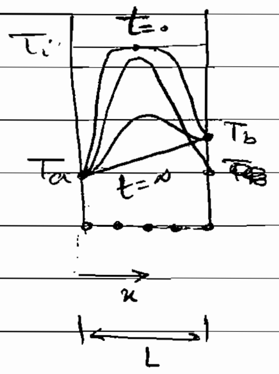
مثال)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

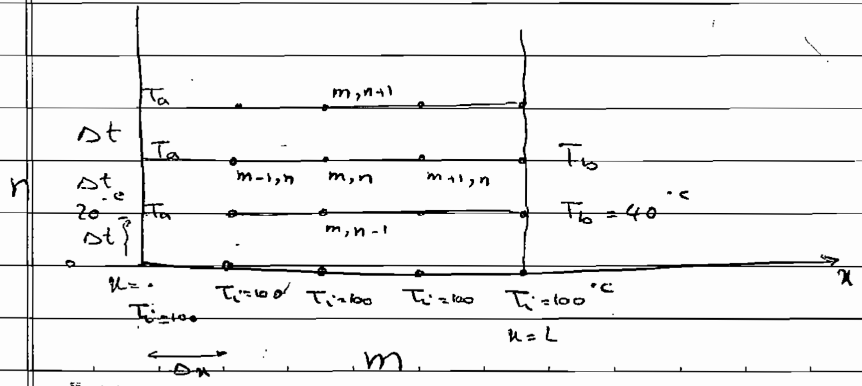
$t = 0 \qquad T = T_i - 100$

$x = 0 \qquad T = T_a = 20$

$x = L \qquad T = T_b = 40$



دما در هر گره با گذشت زمان عوض می‌شود



تعداد گره‌ها : M

حال داریم (برای گره m,n از تقریب forward استفاده می‌کنیم) :

$$\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{m,n} = \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta t}$$

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{m,n} = \frac{T_{m+1,n} - 2T_{m,n} + T_{m-1,n}}{\Delta x^2}$$

حال با جاگذاری در معادله دیفرانسیل :

$$\frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta t} = \alpha \frac{T_{m+1,n} - 2T_{m,n} + T_{m-1,n}}{\Delta x^2}$$

$$T_{m,n+1} - T_{m,n} = \underbrace{\left(\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}\right)}_{\lambda} \left(T_{m+1,n} - 2T_{m,n} + T_{m-1,n}\right)$$

$$\boxed{T_{m,n+1} = \lambda T_{m+1,n} + (1-2\lambda) T_{m,n} + \lambda T_{m-1,n}}$$

حال دماها هر نقطه را بوسیله فرمول بالا محاسبه می‌کنیم. و همین (marching)

طور بالا می‌رویم تا به حالت steady state برسیم که چون n معادله n مجهول

نداریم این روش‌ها به explicite یا صریح مشهور است.

نکته: $$\text{error} = \frac{\sum |\Delta x_i|}{n}$$

norm ماتریس: کمیتی اسکالر که به یک ماتریس نسبت داده می‌شود و بیانی از اندازه آن ماتریس است.

ماتریس سطری
ماتریس ستونی } بردار $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$$\|x\|_1 = \sum |x_i|$$

نرم اول

$$\|x\|_2 = \|x\|_e = \sqrt{\sum x_i^2}$$

نرم دوم - نرم اقلیدسی (euclidian)

$$\|x\|_\infty = \max x_i$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_1 = \max \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$$

$\|A\| = \max$

$$\|A\|_2 = \max \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

$$\|A\|_e = \sqrt{\sum_i \sum_j x_{ij}^2}$$

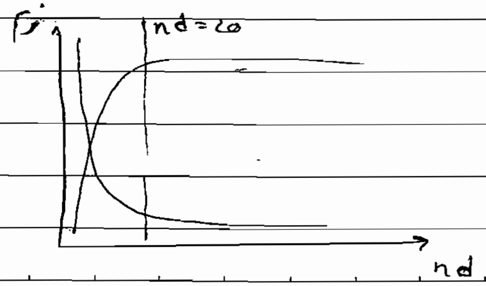
حال می‌خواهیم ببینیم تعداد تقسیمات مناسب چند تا است.

nd = 5
n = 6

$$T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ L/5 \\ 2L/5 \\ 3L/5 \\ 4L/5 \\ L \end{matrix}$$

nd = 10
n = 11

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \\ T_9 \\ T_{10} \\ T_{11} \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ L/10 \\ 2L/10 \\ 3L/10 \\ 4L/10 \\ 5L/10 \\ 6L/10 \\ 7L/10 \\ 8L/10 \\ 9L/10 \\ 10L/10 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} T_1 \\ T_3 \\ T_5 \\ T_7 \\ T_9 \\ T_{11} \end{bmatrix}$$



آنالیز اندازه گام یا آنالیز
تعداد گام

یک محاسبات عددی بدون آنالیز اندازهٔ گام زیر شک منطقی است

نکته: معادلات خطی حتماً جواب مشخص دارند

مع غیرخطی جواب قطعی ندارد. و باید از Validation

یعنی مقایسه با حالت واقعی انجام شود تا ببینیم جواب درست است یا نه.

با mat37 معادله بالا را حل می‌کنیم. می‌خواهیم آنالیز اندازهٔ گام را حساب کنیم.

تعداد تقسیمات	دمای ~~(N4)~~ (NT)
n=5	222.5251
n=10	221.2223
n=20	220.6717
40	220.4191
80	220.2981
160	220.2388
320	220.2095

با تعداد تقسیمات 10، حال باید جواب‌های تک درمیان را جمع کنیم

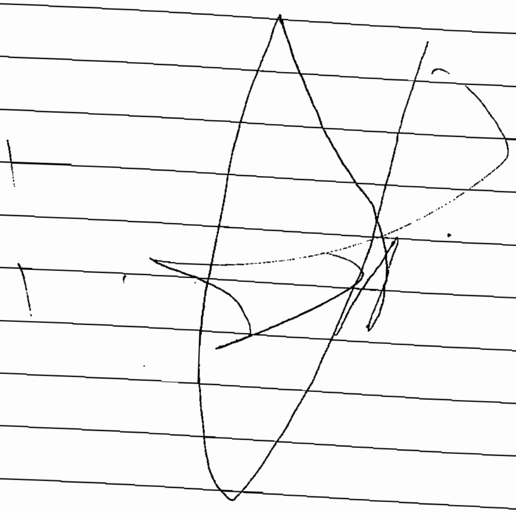
با تعداد تقسیمات 20، حال باید جواب‌های چهارتا درمیان را با هم جمع کنیم

حال در math37، TT را برحسب nd رسم می‌کنیم

می‌بینیم در ناحیه زیر جواب‌ها تحت تأثیر تعداد تقسیمات نیستند.

در برنامه 38 بدون نشان دادن جدول قبل را رسم کردیم

اگر اندازه گام‌ها کمتر شود زیاد هم و یا نرم‌افزار انسیس استفاده کنیم در جواب تفاوتی ندارد.



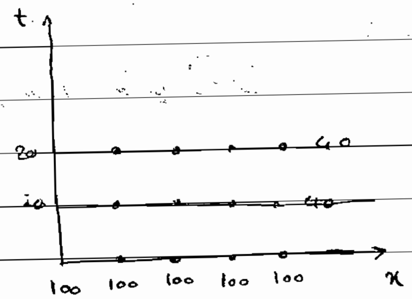
جلسه دهم: ۸۹,۱۰,۱۰

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$t = 0 \quad T = T_i = 100$

$x = 0 \quad T = T_a = 20$

$x = l = 0.1 \quad T = T_b = 40$



$$T_{m,n+1} = \lambda T_{m+1,n} + (1-2\lambda) T_{m,n} + \lambda T_{m-1,n}$$

حال برنامه مطلب 42 را می‌نویسیم

دستور ones(N,4) یک ماتریس درست می‌کند که همه اعضای
با N ستون
آن یک است.

دستور floor، عدد را گرد می‌کند به عدد صحیح کوچکتر

روش صریح می‌تواند غیر پایدار باشد. برای اینکه نشه باید

$\lambda < 0.5$ باشد تا پایدار باشد.

حال در شکل، مشتق‌ها را براساس تغییرات n می‌نویسیم. مقادیر در لحظه n ام در اختیار است.

$$\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{m,n+1} \quad \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta t}$$

با به backward می‌نویسیم زیرا $T_{m,n+2}$ را نداریم.

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{m,n+1} = \frac{T_{m+1,n+1} - 2T_{m,n+1} + T_{m-1,n+1}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta t} = \alpha \frac{T_{m+1,n+1} - 2T_{m,n+1} + T_{m-1,n+1}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\alpha \cdot \Delta t}{\Delta x^2} = \lambda$$

$$\lambda T_{m+1,n+1} - (1+2\lambda) T_{m,n+1} + \lambda T_{m-1,n+1} = -T_{m,n}$$

$m = 1 \quad T_1 = T_a$

$m = 2 \quad \lambda T_3 - (1+2\lambda) T_2 + \lambda T_1 = -T_{2,n}$

$m = 3 \quad \lambda T_4 - (1+2\lambda) T_3 + \lambda T_2 = -T_{3,n}$

$m = 4 \quad \lambda T_5 - (1+2\lambda) T_4 + \lambda T_3 = -T_{4,n}$

$m = 5 \quad T_5 = T_b$

Applied numerical method

Carnalan 1969

کتاب بسیار خوبی است.

حال معادله ① را ساده می‌کنیم:

$$T_{m,n+1} - T_{m,n} = a\lambda T_{m+1,n} - a2\lambda T_{m,n} + a\lambda T_{m-1,n} +$$

$$(1-a)\lambda T_{m+1,n+1} - 2(1-a)\lambda T_{m,n+1} + (1-a)\lambda T_{m-1,n+1}$$

~~implicite~~

$$-(1-a)\lambda T_{m+1,n+1} + (1+2(1-a)\lambda)T_{m,n+1} - (1-a)\lambda T_{m-1,n-1}$$

$$= a\lambda T_{m+1,n} + (1-2a\lambda)T_{m,n} + a\lambda T_{m-1,n}$$

~~روش [illegible]~~

حال برنامه مطلب 43 را برای حالت implicit می‌نویسیم.

یعنی $a = 0$

با همین برنامه می‌بینیم Δt را هرچه خواستیم بزرگ بدهیم جواب

پایدار است.

برای معادلات دیفرانسیل جزئی خطی روش implicite پایداری

مطلق دارد. و می‌توانیم Δt را هرچه خواهیم بزرگ بگیریم.

روش کرنک نیکلسون:

در روش کرنک نیکلسون داریم:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

①

$$\frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta t} = \alpha \underset{\overset{\downarrow}{a}}{\frac{1}{2}} \left[\frac{T_{m+1,n} - 2T_{m,n} + T_{m-1,n}}{\Delta x^2} + \underset{(1-a)}{\underset{\swarrow}{\frac{T_{m+1,n+1} - 2T_{m,n+1} + T_{m-1,n+1}}{\Delta x^2}}} \right]$$

اگر جای $\frac{1}{2}$ ، a بگذاریم و در ضریب دوم $(1-a)$ بگذاریم

آنگاه

$a = 0 \longrightarrow$ implicite

$a = 0.5 \longrightarrow$ Cranck nicolson

$a = 1 \longrightarrow$ explicite

حال با mat ~~lab~~ معادله پارابولا را با Crank-nicolson حل می‌کنیم.

در برنامه اگر a = 1 باشد روش expilicite بوده
" " a = 0 " " implicite "
" " a = 0.5 " " cranck nicolsen "

اگر a کمتر implicite / ازش پیدا کند با پایداری ~~مشروط~~ مشروط
پیدا می‌کند

مثال 1)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$t = 0 \qquad T = T_i = 100$

$x = 0 \qquad T = T_a = 20$

$x - l = 0.1 \qquad T = T_b = 40$

$$\alpha = \frac{k}{\rho c} = \frac{\boxed{k_0}(1+\beta T)}{\boxed{\rho c}} \qquad \alpha_0 = 10^{-5}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

چون α خودش تابعی از دما شد بنابراین درون مشتق قرار می‌گیرد.

$$\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{m,n+1} = \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta t}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x}\right)\right|_{m,n+1} = \frac{\left|\alpha \frac{\partial T}{\partial x}\right|_{m+1,n+1} - \left|\alpha \frac{\partial T}{\partial x}\right|_{m,n+1}}{\Delta x}$$

$$= \frac{\alpha_{m+1} \frac{T_{m+1,n+1} - T_{m,n+1}}{\Delta x} - \alpha_m \frac{T_{m,n+1} - T_{m-1,n+1}}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$= \frac{\alpha_0 (1+\beta T_{m+1,n+1}) T_{m+1,n+1} - \alpha_0 (2+\beta T_{m+1,n+1} + \beta T_{m,n+1}) T_{m,n+1} + \alpha_0 (1+\beta T_{m,n+1}) T_{m-1,n+1}}{\Delta x^2}$$

حال از معادله ی قرار داد $\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right| = \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x}\right|$ داریم:

$$\lambda = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$$ داریم

$P_{m,n+1}$

$$= \lambda(1+\beta T_{m+1,n+1}) T_{m+1,n+1} - [1 + \lambda(2 + \beta T_{m+1,n+1} + \beta T_{m,n+1})] T_{m,n+1} + \lambda(1+\beta T_{m,n+1}) T_{m-1,n+1} = -T_{m,n}$$

جلسه یازدهم   ۸۹/۱۰/۱۴

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\alpha}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T}{\partial r}\right) \quad ①$$

$t = 0 \quad T = T_i$

$r = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0$

$r = R \quad -k \frac{\partial T}{\partial r} = k\left(T - T_\infty\right)$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{m,n+1} = \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta t}$$

$$\left.\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right|_{m,n+1} = \frac{1}{r}\,\frac{\left.r\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{m+1,n+1} - \left.r\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{m,n+1}}{\Delta r}$$

$$= \frac{1}{(m-1)\cancel{\Delta r}}\,\frac{m\cancel{\Delta r}\,\frac{T_{m+1,n+1} - T_{m,n+1}}{\Delta r} - (m-1)\cancel{\Delta r}\,\frac{T_{m,n+1} - T_{m-1,n+1}}{\Delta r}}{\Delta r}$$

$$= \frac{1}{(m-1)\Delta r^2}\left(mT_{m+1,n+1} - (2m-1)T_{m,n+1} + (m-1)T_{m-1,n+1}\right)$$

$m = 1 \quad f_1 = T_1 - T_a = 0 \qquad J_{11} = 1, \quad J_{1i} = 0, \quad F_1 =$

$m = 2 \quad J_{m,m-1} = \frac{\partial f_m}{\partial T_{m-1}} = \lambda\left(1 + \beta T_{m,n+1}\right)$

$2 \leqslant m \leqslant N-1 \quad J_{m,m} = \frac{\partial f_m}{\partial T_m} = -\left[1 + \lambda\left(2 + \beta T_{m+1,n+1} + 2\beta T_{m,n+1}\right)\right] +$

$\lambda \beta T_{m-1,n+1}$

$J_{m,m+1} = \frac{\partial f_m}{\partial T_{m+1}} = \lambda\left(1 + 2\beta T_{m+1,n+1}\right) - \lambda\beta T_{m,n+1}$

$m = N \quad f_N = T_N - T_b = 0 \qquad J_{N,N} = 1$

$F_N = -T_N + T_b$

حال با mat 46 برنامه بالا را می‌نویسیم. (از برنامه 44 استفاده شده است)

$$m = 1 \qquad \overset{A}{①} \, T_1 \, \overset{A_2}{⊖} \, T_2 = \overset{b_1}{⓪}$$

$$2 \leq m \leq N-1 \qquad \overset{A_{m,m+1}}{\boxed{\frac{m\lambda}{m-1}}} T_{m+1,n+1} - \overset{A_{m,m}}{\boxed{\left(1 + \frac{2m-1}{m-1}\lambda\right)}} T_{m,n+1} - \underset{A_{m,m-1}}{\boxed{\lambda}} T_{m-1,n+1} = \underset{b_1}{\boxed{-T_{m,n}}}$$

$$m = N \qquad \underset{A_{N,N-1}}{\boxed{-1}} T_{N-1} + \underbrace{\left(1 + \frac{h\Delta r}{k}\right)}_{A_{N,N}} T_N = \underset{b_N}{\boxed{\frac{h\Delta r}{k} T_\infty}}$$

حال برنامه این مسئله با استفاده از mat 44 در برنامه می‌نویسیم
mat

مثال: نتیجه موازنه انرژی برای یک واکنش گرمازا در یک کاتالیست به
شکل صفحه منجر به معادلات زیر شده است

$$M_1 \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \phi^2 c \, e^{(\gamma - \gamma/t)} \qquad ①$$

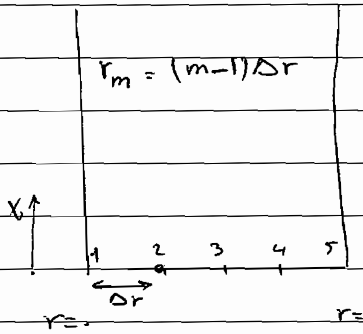
$$M_2 \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \phi^2 \beta c \, e^{(\gamma - \gamma/T)} \qquad ②$$

$M_1 = 199$, $M_2 = 176$, $\gamma = 20$, $\phi^2 = 0.25$, $\beta = 0.6$

①

$$\Rightarrow T_{m,n+1} - T_{m,n} = \underset{\lambda}{\boxed{\frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2}}} \left[\frac{m}{m-1} T_{m+1,n+1} - \frac{2m-1}{m-1} T_{m,n+1} + T_{m-1,n+1} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{m\lambda}{m-1} T_{m+1,n+1} - \left(1 + \frac{2m-1}{m-1}\lambda\right) T_{m,n+1} + \lambda T_{m-1,n+1} = -$$



$$r = R \qquad -k \frac{\partial T}{\partial r} = h(T - T_\infty)$$
$$= N$$

$$-k \frac{T_N - T_{N-1}}{\Delta r} = h(T_N - T_\infty)$$

$$-T_{N-1} + \left(1 + \frac{h\Delta r}{k}\right) T_N = \frac{h \cdot \Delta r}{k} T_\infty$$

$$① \Rightarrow \frac{C_{m,n+1} - C_{m,n}}{\Delta t} = \frac{1}{M_1} \frac{C_{m+1,n} - 2C_{m,n} + C_{m-1,n}}{\Delta x^2} \quad \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$- \frac{\Phi^2}{M_1} C_{m,n} e^{\left(\gamma - \frac{\gamma}{T_{m,n}}\right)} \quad ③$$

طرفین در Δt ضرب می‌شوند

$$② \Rightarrow \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta t} = \frac{1}{M_2} \frac{T_{m+1,n} - 2T_{m,n} + T_{m-1,n}}{\Delta x^2} \quad \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$- \frac{\Phi^2 \beta}{M_2} C_{m,n} e^{\left(\gamma - \frac{\gamma}{T_{m,n}}\right)} \quad ④$$

طرفین در Δt ضرب می‌شوند

$$③ \Rightarrow C_{m,n+1} = \frac{\lambda}{M_1} C_{m+1,n} + \left(1 - \frac{2\lambda}{M_1}\right) C_{m,n} + \frac{\lambda}{M_1} C_{m-1,n}$$

$$- \frac{\Phi^2 \Delta t}{M_1} C_{m,n} e^{\left(\gamma - \frac{\gamma}{T_{m,n}}\right)}$$

$$④ \; T_{m,n+1} = \frac{\lambda}{M_2} T_{m+1,n} + \left(1 - \frac{2\lambda}{M_2}\right) T_{m,n} + \frac{\lambda}{M_2} T_{m-1,n}$$

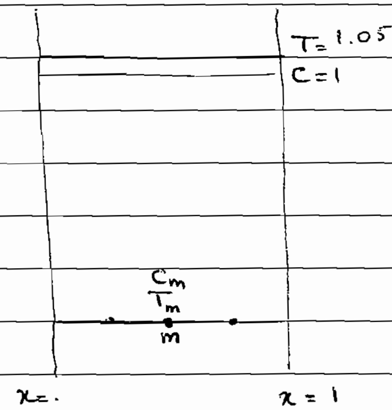
$$\frac{\Phi^2 \beta \Delta t}{M_2} C(m,n) e^{\left(\gamma - \frac{\gamma}{T_{m,n}}\right)}$$

$t = ٠ \qquad C = 1 \qquad T = 1.05$

$x = ٠ \qquad \frac{\partial C}{\partial x} = ٠ \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = ٠$

$x = 1 \qquad C = 1 \qquad T = 1$

حل:



چون معادلات غیر خطی هستند

با روش explicite حل می‌کنیم:

مشتقات معادله را در یک نقطه تقریب می‌زنیم

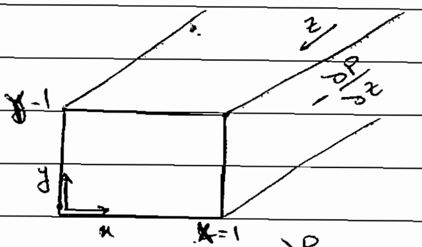
$$\left.\frac{\partial C}{\partial t}\right|_{m,n} = \frac{C_{m,n+1} - C_{m,n}}{\Delta t}$$

$$\left.\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right|_{m,n} = \frac{C_{m+1,n} - 2C_{m,n} + C_{m-1,n}}{\Delta x^2}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{m,n} = \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta t}$$

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{m,n} = \frac{T_{m+1,n} - 2T_{m,n} + T_{m-1,n}}{\Delta\ ^2}$$

مثال: یک سیال نیوتنی درون یک کانال تحت اختلاف فشار جریان دارد سطح مقطع کانال مستطیل شکل است. پروفایل سرعت را بدست آورده رسم نمائید. برای آنکه نیازی به مقادیر عددی نباشد معادلات را بی بعد کنید؟



این شکل [illegible] می‌باشد

فرض می‌کنیم،

μ و laminar، fullydevolop

فرض می‌کنیم مستطیل مربع است.

چون در جهت z، اختلاف فشار داریم $-\frac{\partial P}{\partial z}$ می‌باشد

بنابراین سرعت در جهت x و y می‌باشد $v_z(x,y)$

$$\mu \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} - \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

روی کلیه مرزها سرعت صفر است.

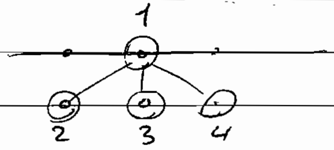
حال بی بعد می‌کنیم:

$$x^* = \frac{x}{X}$$

$$y^* = \frac{y}{X \doteq Y}$$

حال در معادله قرار می‌دهیم:

حال با برنامه math2 برنامه این برنامه را می‌نویسیم (mat48)



در روش explicate تا نقطه ① توسط نقاط 2 و 3 و 4 محاسبه می‌گردد.

همین مسئله را با crank nikolson و emplicit انجام دهیم

Floor: یعنی جزء صحیح

(به عنوان تمرین)

$$\left.\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\right|_{m,n} = \frac{\omega_{m+1,n} - 2\omega_{m,n} + \omega_{m-1,n}}{\Delta x^2} \quad ①$$

$$\left.\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right|_{m,n} = \frac{\omega_{m,n+1} - 2\omega_{m,n} + \omega_{m,n-1}}{\Delta y^2}$$

$$①+② \quad \omega_{m+1,n} + \omega_{m-1,n} + \omega_{m,n+1} + \omega_{m,n-1} - 4\omega_{\boxed{m,n}} + \Delta x^2 = 0 \quad ③$$

با در نظر گرفتن ۲۵ گره را مجهول فرض می‌کنیم. بنابراین برای حل معادلات

آن از ماتریس ضرایب زیر باید استفاده کنیم

$$\begin{bmatrix} & A_{25\times 25} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_{25} \end{bmatrix}_{25\times1} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}_{25\times1}$$

حل معادله ③ را برحسب شماره i می‌نویسیم:

$$\overset{A_{i,i+N_y}}{①\omega_{i+N_y}} + \overset{A_{i,i-N_y}}{①\omega_{i-N_y}} + \underset{A_{i,i+1}}{①\omega_{i+1}} + \overset{A_{i,i+1}}{①\omega_{i-1}} - \underset{A_{i,i}}{④\omega_i} = \underbrace{-\Delta x^2}_{b_i}$$

$$\mu \frac{\partial^2 V_z}{X^2 \partial x^{*2}} + \mu \frac{\partial^2 V_z}{X^2 \partial y^{*2}} + \left(-\frac{\partial P}{\partial z}\right) = 0$$

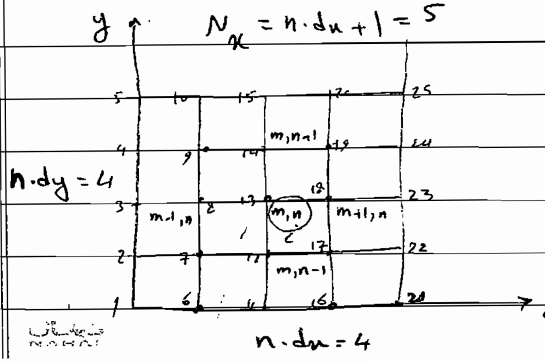
$$\frac{\mu}{X^2\left(-\frac{\partial P}{\partial z}\right)} \frac{\partial^2 V_z}{\underset{\text{بی‌بعد}}{\partial x^{*2}}} + \frac{\mu}{X^2\left(-\frac{\partial P}{\partial z}\right)} \frac{\partial^2 V_z}{\underset{\text{بی‌بعد}}{\partial y^{*2}}} + \underset{\text{بی‌بعد}}{1} = 0$$

بنابراین این فاکتور
برای بی‌بعدی باشد

$$\omega = \frac{V_z}{\dfrac{X^2\left(-\frac{\partial P}{\partial z}\right)}{\mu}}$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^{*2}} + 1 = 0$$

$N_x = n \cdot dx + 1 = 5$



$N_y = n \cdot dy + 1 = 5$

حال با mat 49 رشته را می‌نویسیم :

$$\begin{array}{ccc} \text{Red} & \text{Green} & \text{bloe} \\ R & G & b \\ \nearrow & \nearrow & \nearrow \\ \end{array}$$

edge color : [0 0 0]

درکل اگر هرکدام از اعداد RGB را تغییر دهیم رنگ نمودار تغییر می‌کند.