بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضی پیشرفته (تبدیل انرژی)

سید روح الله کاظمی

منابع:

1. ریاضیات مهندسی پیشرفته (جلد اول و دوم)
کلارنس ری وایلی، لوئیس سی. برت، ترجمه: سیامک کاظمی، موسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف

2. Partial Differential Equations for Scientists and Engineer
Stanly J. Farlow

3. Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers
Tyn Myint-U, Lokenath Debnath, Fourth Edition

4. Methods of Applied Mathematics
Francis B. Hildebrand, 2nd Edition

5. Advanced Modern Engineering Mathematics
Glyn James, 3rd Edition

6. ریاضیات مهندسی پیشرفته
اروین کرویت سیگ، ترجمه: شیدفر، شاهرضایی، انتشارات دالفک

7. راهنمای حل مسایل ریاضیات مهندسی پیشرفته
اروین کرویت سیگ، مولف: ماهرخ مقصودی

سرفصلهای اصلی:

1. معادلات دیفرانسیل جزیی و تبدیلات انتگرالی و ...

2. توابع مختلط و باقیمانده و ...

3. ماتریسها و تانسورها

4. تئوری اختلالات جزیی و تئوری تغییرات

بخش اول: معادلات دیفرانسیل جزیی و ...

مقدمه

معادلات دیفرانسیل جزیی یا پاره ای (Partial Differential Equations) که به اختصار به آنها PDE گفته می شود، نقش مهمی در توصیف پدیده ها در زمینه های مختلف علوم مانند دینامیک سیالات، مکانیک، اپتیک، انتقال حرارت، مغناطیس و ... ایفا می کنند.

چند مطلب درباره معادلات PDE:

- بالاترین مشتق موجود در یک معادله PDE را مرتبه آن گویند.
- اگر در معادله ای متغیر وابسته یا مشتقهایش به توان نرسیده یا در هم ضرب نشده باشد، معادله «خطی» و در غیر این صورت «غیرخطی» است.
- ضرایب این معادلات می تواند ثابت یا متغیر باشد.

تقسیم بندی معادلات پاره ای

شکل کلی معادله PDE دو متغیره خطی درجه 2:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \qquad (1)$$

در معادله (1) اگر G برابر صفر باشد، معادله «همگن» و در غیر اینصورت «نا همگن» است.

یک تقسیم بندی برای معادلات پاره ای به شکل معادله (1) بر اساس علامت دلتا است:

1. سهموی: اگر $\Delta = B^2 - 4AC = 0$ مانند معادله PDE انتقال حرارت و نفوذ
2. هذلولوی: اگر $\Delta = B^2 - 4AC > 0$ مانند معادله PDE ارتعاش و حرکت موج
3. بیضوی: اگر $\Delta = B^2 - 4AC < 0$ مانند معادله PDE برای توصیف حالت پایدار

در حالتی که ضرایب متغیر باشند، وضعیت معادله میتواند از نقطه ای به نقطه دیگر تغییر کند.

معادلات سهموی

یک میله مسی که غیر از دو سر آن بقیه آن عایق است را در نظر میگیریم. آن را برای مدت طولانی در محیطی با دمای T_0 قرار میدهیم تا تمام میله با محیط هم دما شود. سپس یک سر آن را در دمای T_1 و سر دیگر را در دمای T_2 ثابت نگه میداریم. توصیف ریاضی این آزمایش به صورت معادلات PDE زیر خواهد بود. به این مجموعه معادلات initial boundary value problem (IBVP) گفته میشود. در عبارات زیر boundary conditions(BCs) بیانگر شرایط مرزی initial condition(IC) نشان دهنده شرایط اولیه مساله است.

$$\text{PDE}: \quad u_t = \alpha^2 u_{xx} \qquad 0 < x < l, 0 < t < \infty$$

$$\text{BCs}: \quad \begin{aligned} u(0,t) &= T_1 \qquad 0 < t < \infty \\ u(l,t) &= T_2 \end{aligned}$$

$$\text{IC}: \quad u(x,0) = T_0 \qquad 0 \le x \le l$$

بیانهای مختلف PDE و BC

معادله PDE قبل باید براساس علم انتقال حرارت و با توجیه مناسب ریاضی توسط دانشجو به دست بیاید. اگر از سطح جانبی میله هم انتقال حرارت وجود داشته باشد، یا در داخل میله منبع حرارت باشد و یا جنس میله یکنواخت نباشد، این معادله تغییر میکند که در ادامه به ترتیب آورده شده است:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta(u - u_0) \quad 0 < \beta$$

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + f(x,t)$$

$$u_t = \alpha^2 (x) u_{xx}$$

همچنین شرایط مرزی نیز میتواند متفاوت باشد. در ادامه شرایط مرزی مناسب برای حالتهای دما معین، دمای محیط معین و شار حرارتی معین آورده شده است. این شرایط برای مساله یک بعدی است و در آنها $g(t)$ یک تابع مشخص است. دانشجو باید بتواند این شرایط را توجیه کند.

$$u = g(t)$$

$$u_x + \lambda u = g(t)$$

$$u_x = g(t)$$

روش جدایی متغیرها

روش جدایی متغیرها برای حل معادلات پاره ای خطی و همگن (با ضرایب ثابت یا متغیر) با شرایط مرزی مذکور در ادامه به کار میرود. 4 ضریب به کار رفته مقادیر ثابت هستند.

$$\alpha\, u_x(0,t) + \beta\, u(0,t) = 0$$
$$\gamma\, u_x(l,t) + \delta\, u(l,t) = 0$$

حال این روش را با بررسی مثال زیر مطرح میکنیم:

$$\begin{array}{lll} \text{PDE}: & u_t = \alpha^2 u_{xx} & 0 < x < 1, 0 < t < \infty \\ \text{BCs}: & u(0,t) = 0 & 0 < t < \infty \\ & u(1,t) = 0 & \\ \text{IC}: & u(x,0) = \phi(x) & 0 \le x \le 1 \end{array}$$

جواب را به شکل مقابل گرفته و در PDE جاگذاری میکنیم:

$$u(x,t) = X(x)\,T(t) \qquad (2)$$

روش جدایی متغیرها

$$u(x,t)=X(x)T(t) \quad \Rightarrow \quad X(x)\dot{T}(t)=\alpha^2 X''(x)T(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{T}(t)}{\alpha^2 T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}$$

چون طرف چپ عبارت بالا فقط تابع t و طرف راست آن فقط تابع x است، پس عبارت بالا باید برابر یک عدد ثابت(k) باشد. در نتیجه PDE درجه 2 به دو ODE تبدیل میشود.

$$\frac{\dot{T}}{\alpha^2 T}=\frac{X''}{X}=k \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{T}-k\alpha^2 T=0 \\ X''-kX=0 \end{cases}$$

در عبارت بالا k نباید صفر یا مثبت باشد چرا؟ (از این پس هرجا به این صورت آورده شد، یعنی دانشجو باید علت را بررسی کند). بنابراین آن را برابر یک مقدار همیشه منفی میگیریم:

$$k=-\lambda^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{T}+\lambda^2\alpha^2 T=0 \\ X''+\lambda^2 X=0 \end{cases}$$

روش جدایی متغیرها (ادامه)

جوب معادلات قبل را از «معادلات دیفرانسیل» به دست آورده و در رابطه (2) جاگذاری میکنیم:

$$\begin{cases} T(t) = A_1\, e^{-\lambda^2 \alpha^2 t} \\ X(x) = A_2 \sin(\lambda x) + B_2 \cos(\lambda x) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u(x,t) = e^{-\lambda^2 \alpha^2 t}[A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x)]$$

به این ترتیب شکل کلی جواب به دست می آید اما مقادیر A، B و λ هنوز تعیین نشده اند. حال جواب بالا را در شرایط مرزی قرار میدهیم:

$$u(0,t) = 0 \;\Rightarrow\; B = 0$$

$$u(1,t) = 0 \;\Rightarrow\; A e^{-\lambda^2 \alpha^2} \sin\lambda = 0 \;\Rightarrow\; \sin\lambda = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots, \pm n\pi \quad n = 1,2,3,\ldots$$

$$\Rightarrow\; u_n(x,t) = A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \sin(n\pi x) \;\Rightarrow\; u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \sin(n\pi x)$$

روش جدایی متغیرها (ادامه)

حال عبارت به دست آمده را در شرط اولیه قرار میدهیم:

$$u(x,0)=\phi(x) \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x)=\phi(x) \;\Rightarrow\; \phi(x)=A_1\sin(\pi x)+A_2\sin(2\pi x)+\ldots$$

حال طرفین عبارت بالا را در $\sin m\pi x$ ضرب کرده و از حاصل روی 0 تا 1 انتگرال میگیریم:

$$\int_0^1 \phi(x)\sin(m\pi x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 A_n \sin(n\pi x)\sin(m\pi x)\,dx \quad (3)$$

حال از رابطه زیر برای محاسبه طرف راست رابطه بالا استفاده میکنیم:

$$\int_0^1 \sin(n\pi x)\sin(m\pi x)\,dx=\begin{cases}0 & m=n\\ 1 & m\neq n\end{cases} \quad (4)$$

روش جدایی متغیرها (ادامه)

در نتیجه میتوان ضرایب را به شکل زیر تعیین نمود:

$$(3),(4) \;\Rightarrow\; \int_0^1 \phi(x)\sin(m\pi\, x)\,dx = A_m \int_0^1 \sin^2(m\pi\, x)\,dx = \frac{A_m}{2}$$

$$A_n = 2\int_0^1 \phi(x)\sin(n\pi\, x)\,dx$$

بنابراین جواب نهایی به صورت زیر بیان میشود:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(2\int_0^1 \phi(\xi)\sin(n\pi\,\xi)\,d\xi\right)e^{-(n\pi\alpha)^2 t}\sin(n\pi\, x)$$

همانگونه که ملاحظه میشود با گذشت زمان طولانی دمای کل میله به سمت صفر میرود که این با توجه به شرایط مرزی مورد انتظار بود. همچنین با توجه به وجود ترم نمایی در رابطه بالا میتوان گفت که جملات اول میتوانند اثر بیشتری از جملات بعد داشته باشند و در مواردی در کاربردهای مهندسی میتوان به چند جمله اولیه اکتفا کرد.

شرایط مرزی غیرهمگن

اگر شرایط مرزی همگن نباشد باید در صورت امکان آنها را به نحوی به همگن تبدیل کنیم. اگر پس از این تغییر PDE هم همگن شد، میتوان آن را با روش جدایی متغیر حل کرد. در غیر اینصورت میتوان از سایر روشها مانند تبدیل انتگرالی استفاده کرد. مساله مقابل را در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
&u_t = \alpha^2 u_{xx} && 0 < x < L, 0 < t < \infty \\
&u(0,t) = k_1 && 0 < t < \infty \\
&u(L,t) = k_2 && \\
&u(x,0) = \phi(x) && 0 \le x \le L
\end{aligned}
$$

میدانیم که جواب این مساله در بینهایت به شکل یک توزیع خطی بین k_1 و k_2 خواهد شد. بنابراین جواب u را به صورت مجموع یک جواب پایدار و یک جواب گذرا در نظر میگیریم:

$$u(x,t) = \text{steady state} + \text{transient} = \left[\mathrm{k}_1 + \frac{x}{L}(\mathrm{k}_2 - \mathrm{k}_1) \right] + U(x,t)$$

شرایط مرزی غیرهمگن

با اعمال این تغییر و جاگذاری در معادله اصلی، PDE جدید به صورت زیر به دست می آید که دارای شرایط مرزی همگن است:

$$U_t = \alpha^2 U_{xx} \qquad 0 < x < L, 0 < t < \infty$$

$$U(0,t) = 0 \qquad 0 < t < \infty$$

$$U(L,t) = 0$$

$$U(x,0) = \phi(x) - [\mathrm{k}_1 + \frac{x}{L}(\mathrm{k}_2 - \mathrm{k}_1)] = \bar{\phi}(x) \qquad 0 \le x \le L$$

که جواب آن به شکل زیر خواهد بود: (چرا؟)

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(2\int_0^1 \bar{\phi}(\xi)\sin\left(n\pi \xi / L\right) d\xi\right) e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \sin\left(n\pi x / L\right)$$

به طور کلی شرایط مقابل با تبدیل زیر به همگن تبدیل میشود:

$$u(0,t) = g_1(t)$$

$$u(L,t) = g_2(t)$$

$$u(x,t) = [g_1(t) + \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}}(g_2(t) - g_1(t))] + U(x,t)$$

شرایط مرزی غیرهمگن

حالPDE مقابل را در نظر بگیرید:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \qquad 0 < x < L, 0 < t < \infty$$
$$u(0,t) = g_1(t) \quad 0 < t < \infty$$
$$u_x(L,t) + h u(L,t) = g_2(t)$$
$$u(x,0) = \phi(x) \quad 0 \le x \le L$$

برای تبدیل شرایط مرزی ناهمگن به همگن از تبدیل زیر استفاده میکنیم:

$$u(x,t) = A(t)[1-\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}}] + B(t)[\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}}] + U(x,t)$$

که در آن قسمت پایدار برابر است با:

$$S(x,t) = A(t)[1-\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}}] + B(t)[\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}}]$$

برای اینکه شرایط مرزی برای U، همگن شود باید روابط (5) حاکم باشد که از آن میتوان توابع A و B را به دست آورد:

$$\begin{cases} S(0,t) = g_1(t) \\ S_x(L,t) + hS(L,t) = g_2(t) \end{cases} \quad (5) \Rightarrow \begin{cases} A(t) = g_1(t) \\ B(t) = \dfrac{g_1(t) + Lg_2(t)}{1 + Lh} \end{cases}$$

شرایط مرزی غیرهمگن

$$u(x,t) = g_1(t)[1-\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}}] + \frac{g_1(t)+g_2(t)}{1+Lh}[\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}}] + U(x,t) \qquad (6)$$

در نتیجه با تبدیل (6)، PDE اولیه به PDE زیر تبدیل میشود که برخلاف مورد قبل، خود معادله آن همگن نبوده و باید برای حل آن به جای روش جدایی متغیرها از روشی مانند تبدیل انتگرالی استفاده کرد که در آینده مورد بررسی قرار میگیرد.

$$U_t = \alpha^2 U_{xx} - S_t \qquad 0 < x < L, 0 < t < \infty$$

$$U(0,t) = 0 \qquad 0 < t < \infty$$

$$U_x(L,t) + hU(L,t) = 0$$

$$U(x,0) = \phi(x) - S(x,0) \qquad 0 \le x \le L$$

تبدیل مساله به یک مساله ساده تر

در مواردی میتوان با استفاده از ترفندهایی یک PDE مشکل را به یک PDE آسانتر تبدیل کرد. در دو مثال بعد این مطلب نشان داده شده است.

$$\begin{aligned} &u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta u && 0 < x < 1, 0 < t < \infty \\ &u(0,t) = 0 && 0 < t < \infty \\ &u(1,t) = 0 && \\ &u(x,0) = \phi(x) && 0 \le x \le 1 \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن تابع w به صورت رابطه زیر و جایگزین کردن در PDE بالا، همانگونه که نشان داده شده است میتوان به PDE آسانتر و آشنای پایین رسید.

$$u(x,t) = e^{-\beta t} w(x,t) \Rightarrow \begin{cases} u_t = -\beta e^{-\beta t} w + e^{-\beta t} w_t \\ u_x = e^{-\beta t} w_x \\ u_{xx} = e^{-\beta t} w_{xx} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_t = \alpha^2 w_{xx} & 0 < x < 1, 0 < t < \infty \\ w(0,t) = 0 & 0 < t < \infty \\ w(1,t) = 0 & \\ w(x,0) = \phi(x) & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

تبدیل مساله به یک مساله ساده تر

به همین ترتیب میتوان با استفاده از تبدیل زیر معادله (7) را به معادله (8) تبدیل نمود. (چرا؟)

$$u(x,t) = e^{\nu(x-\nu t/2)/2\alpha^2} w(x,t)$$

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - \nu u_x \qquad (7) \qquad \Rightarrow \qquad w_t = \alpha^2 w_{xx} \quad (8)$$

توابع متعامد

در این قسمت بحث توابع متعامد، در قالب بررسی یک مثال مطرح میشود. همان مثال میله مسی که پیش از این بررسی شد را در نظر بگیرید با این تفاوت که این بار اگرچه دمای یک سر آن روی صفر ثابت نگهداشته شده، ولی سمت را ست آن به صورت آزادانه در محیطی با دمای صفر قرار دارد. توزیع دمای اولیه نیز با تابع ϕ معرفی شده است. بیان معادلات به صورت زیر خواهد بود:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \qquad 0 < x < L, 0 < t < \infty$$
$$u(0,t) = 0 \qquad 0 < t < \infty$$
$$u_x(L,t) + h u(L,t) = 0$$
$$u(x,0) = \phi(x) \quad 0 \le x \le L$$

با استفاده از روش جدایی متغیرها و طی کردن همان روند قبلی خواهیم داشت:

$$u(x,t) = X(x)T(t) \;\Rightarrow\; \frac{\dot{T}(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2$$

توابع متعامد

$$\begin{cases} \dot{T} + \lambda^2 \alpha^2 T = 0 \\ X'' + \lambda^2 X = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T(t) = A_1 e^{-\lambda^2 \alpha^2 t} \\ X(x) = A_2 \sin(\lambda x) + B_2 \cos(\lambda x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = e^{-\lambda^2 \alpha^2 t}[A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x)]$$

حال مانند قبل، جواب بالا را در شرایط مرزی قرار میدهیم:

$$u(0,t) = 0 \Rightarrow B = 0$$

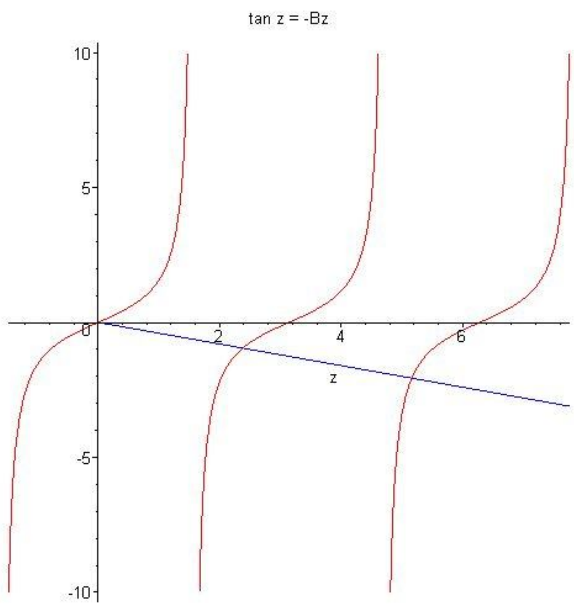
$$u_x(L,t) = -hu(L,t) \Rightarrow \lambda A e^{-\lambda^2 \alpha^2 t} \cos \lambda L = -h A e^{-\lambda^2 \alpha^2 t} \sin \lambda L$$

$$\Rightarrow \lambda \cos \lambda L = -h \sin \lambda L \Rightarrow \tan \lambda L = -\frac{\lambda}{h}$$

با فرض $z = \lambda L$، λ ها برابرند با نقاط تقاطع منحنی $\tan z$ با $-\beta z$ تقسیم بر L، مقدار نیز برابر است با $1/(Lh)$(شکل در صفحه بعد). حال میتوان نوشت:

$$u_n(x,t) = e^{-(\lambda_n \alpha)^2 t} \sin(\lambda_n x) \Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(\lambda_n \alpha)^2 t} \sin(\lambda_n x)$$

توابع متعامد



حال عبارت به دست آمده را در شرط اولیه قرار میدهیم:

$$u(x,0)=\phi(x) \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\lambda_n x)=\phi(x)$$

پس مانند مثال قبل، برای اینکه شرایط اولیه برآورده شود، باید بتوانیم یک تابع دلخواه $(\phi(x))$ را به صورت یک سری نامتناهی از توابع معلوم، که به وسیله یک معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی تعیین میشوند، بسط دهیم. در این حالت برخلاف مثال قبل سری مطلوب، یک سری فوریه نیست. فعلا حل مثال را متوقف کرده و مباحثی مورد نیاز برای تعیین ضرایب را مطرح میکنیم.

توابع متعامد

در مثال قبل انتگرال حاصلضرب هر دو عضو متفاوت انتخابی از مجموعه $\{\sin n\pi x\}$ صفر میشد. این خاصیت باعث شد که بتوانیم ضرایب را به دست بیاوریم. مجموعه های دیگری نیز این خاصیت را دارند که شرایط آنها در تعریف بعد مطرح شده است.

تعریف 1: اگر دنباله ای از توابع حقیقی، $\{\phi_n(x)\}$ n=1, 2, 3, ... روی بازه ای چون (a,b)، متناهی یا نامتناهی، تعریف شده و دارای ویژگی زیر باشند، گفته میشود که این توابع روی آن بازه «متعامد» هستند.

$$\int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)\,dx \begin{cases} =0 & m \neq n \\ \neq 0 & m = n \end{cases}$$

تعریف 2: اگر توابع متعلق به یک مجموعه متعامد، به ازای هر n دارای ویژگی زیر باشند، گفته میشود که این توابع روی بازه (a,b)، «متعامد واحد» هستند.

$$\int_a^b {\phi_n}^2(x)\,dx = 1$$

توابع متعامد

هر مجموعه از توابع متعامد را میتوان به یک مجموعه متعامد واحد تبدیل کرد. اگر برای مجموعه متعامد $\{\phi_n(x)\}$ رابطه (1) برقرار باشد آنگاه توابع رابطه (2) متعامد واحد هستند.

$$\int_a^b \phi_n{}^2(x)\,dx = k_n \qquad (1) \qquad\qquad \frac{\phi_1(x)}{\sqrt{k_1}},\frac{\phi_2(x)}{\sqrt{k_2}},\frac{\phi_3(x)}{\sqrt{k_3}},\ldots \qquad (2)$$

تعریف 3: اگر دنباله ای از توابع حقیقی، $\{\phi_n(x)\}$روی بازه ای چون (a,b)، متناهی یا نامتناهی، تعریف شده و دارای ویژگی زیر باشند، گفته میشود که این توابع نسبت به تابع وزنی $p(x)$ روی آن بازه «متعامد» هستند.

$$\int_a^b p(x)\,\phi_m(x)\phi_n(x)\,dx \begin{cases} = 0 & m \neq n \\ \neq 0 & m = n \end{cases}$$

هر مجموعه از توابع متعامد نسبت به تابع وزنی $p(x)$ را میتوان به یک مجموعه متعامد عادی (تعریف 1) تبدیل کرد. برای این منظور کافی است هر عضو مجموعه را در جذر $p(x)$ ضرب کنیم (با این فرض که روی بازه تعامد $p(x)>0$).

قضیه استورم - لیوویل

توابع متعامد، در بسیاری از مسایل محض و کاربردی مطرح میشوند. وجود این توابع در مسایلی نظیر مسایلی که ما با آن مواجه هستیم، به وسیله قضیه مهم استورم- لیوویل، تضمین میشود.

قضیه استورم- لیوویل: معادله دیفرانسیل (3) مفروض است:

$$\frac{d[r(x)y']}{dx}+[q(x)+\lambda\, p(x)]y=0 \qquad (3)$$

در این معادله، $r(x)$ و $p(x)$ روی بازه بسته $[a,b]$ پیوسته اند و $q(x)$ دسته کم روی (a,b) پیوسته است. فرض کنید λ_1، λ_2، λ_3، ... مقادیر متمایزی از پارامتر λ هستند که به ازای آنها جوابهای غیربدیهی برای این معادله وجود دارد که مشتقات اول پیوسته ای دارند و در شرایط مرزی (4) زیر صدق میکنند که در آن a_1، a_2، b_1، b_2 ضرایب ثوابت دلخواهی هستند به طوری که a_1، a_2 با هم و b_1، b_2 نیز با هم صفر نیستند. اگر y_1، y_2، y_3، ... جوابهایی غیربدیهی متناظر با این مقادیر λ باشند، آنگاه توابع $\{y_n(x)\}$ دستگاهی تشکیل میدهند که نسبت به تابع وزنی $p(x)$ روی بازه (a,b) متعامد هستند.

$$\begin{cases} a_1 y(a)-a_2 y'(a)=0 \\ b_1 y(b)-b_2 y'(b)=0 \end{cases} \qquad (4)$$

ادامه حل مثال

وقتی حل مثال را برای شرح نظریه مورد نیاز برای حل متوقف کردیم به رابطه (5)رسیده بودیم که در آن جوابهایی برای رابطه (6) هستند.

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0 \\ X(0) = 0 \\ X'(L) + h\,X(L) = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\lambda_n x) = \phi(x) \qquad (5)$$

مشاهده میشود که این معادله و شرایط مرزی آن در قضیه استورم- لیوویل صدق میکند. اگر به جای λ بنویسیم λ^2 داریم:

$$r(x) = 1 \qquad q(x) = 0 \qquad p(x) = 1 \qquad a = 0 \quad b = L$$

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 0 \quad b_1 = h \quad b_2 = -1$$

بنابراین طبق قضیه، توابع متعلق به مجموعه $\{\sin \lambda_n x\}$ نسبت به تابع وزنی $p(x)$ روی بازه $(0,L)$ متعامد هستند. حال برای تعیین ضرایب در رابطه (5)، طرفین این رابطه را در $\sin \lambda_n x$ ضرب کرده و جمله به جمله از صفر تا L انتگرال میگیریم.

ادامه حل مثال

به علت تعامد مجموعه $\{\sin \lambda_n x\}$، همه انتگرال‌های سمت چپ صفر میشوند به جزانتگرالی که عبارت زیر آن شامل $\sin^2 \lambda_n x$ است. بنابراین:

$$A_n = \frac{\int_0^L \phi(x)\sin(\lambda_n x)\,dx}{\int_0^L \sin^2(\lambda_n x)\,dx}$$

با محاسبه عبارت مخرج و یادآوری رابطه (7) خواهیم داشت:

$$\tan z_n = -\beta z_n \quad (7)$$

$$\int_0^L \sin^2(\lambda_n x)\,dx = \frac{L}{2} - \frac{1}{4\lambda_n}\sin 2\lambda_n L = \frac{L}{2} - \frac{1}{4\lambda_n}[-\beta(2\lambda_n L)]\cos 2\lambda_n L$$

$$= \frac{L}{2} + \frac{\beta L}{2}\cos 2\lambda_n L = \frac{L}{2}(1+\beta\cos 2z_n)$$

ادامه حل مثال

در نتیجه جواب نهایی برای ضرایب به شکل زیر به دست می آید و حل کامل میشود:

$$A_n = \frac{2}{L(1+\beta\cos 2z_n)}\int_0^L \phi(x)\sin(\lambda_n x)\,dx$$

****

توابع متعامد فقط در معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم مطرح نیستند. قضیه مهم بعدی دستگاههای مرتبه چهارم را در بر میگیرد که تیر مرتعش از جمله آنها است.

قضیه: برای معادلات دیفرانسیل مرتبه چهارم

قضیه : معادله دیفرانسیل (8) مفروض است:

$$\frac{d^2[r(x)y'']}{dx^2}+[q(x)+\lambda\, p(x)]\,y=0 \qquad (8)$$

در این معادله، $r(x)$ و $p(x)$ روی بازه بسته $[a,b]$ پیوسته اند و $q'(x)$ دسته کم روی (a,b) پیوسته است. فرض کنید λ_1، λ_2، λ_3، ... مقادیر متمایزی از پارامتر λ هستند که به ازای آنها جوابهای غیربدیهی برای این معادله وجود دارد که مشتقات مرتبه سوم پیوسته ای دارند و در شرایط مرزی (9) زیر صدق میکنند که در آن دو ضریب هر معادله با هم صفر نیستند. اگر y_1، y_2، y_3، ... جوابهایی غیربدیهی متناظر با این مقادیر λ باشند، آنگاه توابع $\{y_n(x)\}$ دستگاهی تشکیل میدهند که نسبت به تابع وزنی $p(x)$ روی بازه (a,b) متعامد هستند.

$$\begin{cases} a_1 y(a)-\alpha_1 (r\,y'')'\big|_{x=a}=0 & a_2 y(a)-\alpha_2 (r\,y'')'\big|_{x=a}=0 \\ b_1 y(b)-\beta_1 (r\,y'')'\big|_{x=b}=0 & a_2 y(b)-\beta_2 (r\,y'')'\big|_{x=b}=0 \end{cases} \qquad (9)$$

بررسی یک مساله از مرتبه چهارم

یک تیر به طول L با تغییر مکان اولیه و سرعت اولیه زیر شروع به ارتعاش میکند. تغییر مکان هر نقطه از تیر را برای هر لحظه بعد برای دو حالت زیر بیابید.

$$u(x,0) = f(x) \qquad (10)$$

$$u_t(x,0) = g(x) \qquad (11)$$

الف) یک تیر یکسر درگیر

ب) یک تیر simply support

حل: در نظر گرفتن مبدا در انتهای ثابت تیر، یکنواختی مقطع عرضی تیر و نبود بار خارجی، معادله دیفرانسیل جابجایی عرضی تیر به شکل زیر میشود: (چرا؟)

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0 \qquad (12)$$

معادله دیفرانسیل و شرایط اولیه برای دو حالت الف و ب یکسان است ولی شرایط مرزی به شکل صفحه بعد خواهد بود.

بررسی یک مساله از مرتبه چهارم

در حالت (الف) با توجه صفر بودن تغییر مکان و شیب در انتهای ثابت و نیز صفر بودن گشتاور و برش در انتهای آزاد، شرایط مرزی به صورت روابط (13) در می آید:

$$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u_t(0,t)=0 \\ u_{xx}(L,t)=0 \\ u_{xxx}(L,t)=0 \end{cases} \qquad (13)$$

در حالت (ب) شرایط مرزی به صورت روابط (14) در می آید: (چرا؟)

$$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(L,t)=0 \\ u_{xx}(0,t)=0 \\ u_{xx}(L,t)=0 \end{cases} \qquad (14)$$

برای حل از روش جدایی متغیرها به شرح صفحه بعد استفاده میکنیم. دانشجو باید بتواند جواب معادلات دیفرانسیلی که در صفحه بعد آمده و علت ضرورت مثبت بودن k را توجیه نماید.

بررسی یک مساله از مرتبه چهارم

$$u(x,t) = X(x)T(t) \;\Rightarrow\; \alpha^2 \frac{X^{iv}(x)}{X(x)} = -\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = k = \lambda^2$$

$$\begin{cases} \ddot{T} + \lambda^2 \; T = 0 \\ X^{iv} - \dfrac{\lambda^2}{a^2} X = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T(t) = A\sin(\lambda t) + B\cos(\lambda t) \\ X(x) = C\sin(\sqrt{\dfrac{\lambda}{a}}\, x) + D\cos(\sqrt{\dfrac{\lambda}{a}}\, x) + \\ \qquad E\sinh(\sqrt{\dfrac{\lambda}{a}}\, x) + F\cosh(\sqrt{\dfrac{\lambda}{a}}\, x) \end{cases}$$

حال باید با استفاده از شرایط مرزی و اولیه و نیز رجوع به قضیه قبل، ضرایب معادلات بالا تعیین شوند که این کار به عهده دانشجو گذاشته میشود. دو حالت الف و ب به ترتیب در منابع 1 و 3 بررسی شده اند.

معادله موج

در بحثهای قبل استفاده از روش جدایی متغیرها برای حل برخی از معادلات سهموی نشان داده شد. این روش برای حل برخی از معادلات بیضوی و هذلولوی نیز قابل استفاده است. در این جلسه ابتدا معادله موج که یک معادله هذلولوی است مطرح شده و علاوه بر روش « جدایی متغیرها»، از حل « دالامبر» نیز برای بررسی این معادله استفاده میشود.

ابتدا معادلات زیر را که توصیف کننده ارتعاش عرضی یک طناب با طول متناهی است در نظر بگیرید:

$$\text{PDE} \quad u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} \qquad 0 < x < L, 0 < t < \infty$$

$$\text{BCS} \quad \begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty$$

$$\text{ICs} \quad \begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases} \qquad 0 \le x \le L$$

حل معادله موج: روش تفکیک متغیرها

برای حل این مساله نیز میتوان از روش تفکیک متغیرها استفاده کرد. مطابق روند طی شده در مثالهای قبل داریم (چرا؟):

$$\begin{cases} \ddot{T}+\lambda^2\alpha^2 T=0 \\ X''+\lambda^2 X=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T(t)=A\sin(\alpha\lambda t)+B\cos(\alpha\lambda t) \\ X(x)=C\sin(\lambda x)+D\cos(\lambda x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x,t)=[A\sin(\alpha\lambda t)+B\cos(\alpha\lambda t)][C\sin(\lambda x)+D\cos(\lambda x)]$$

حال مانند قبل، جواب بالا را در شرایط مرزی قرار میدهیم:

$$u(0,t)=0 \Rightarrow D=0$$

$$u(L,t)=0 \Rightarrow \sin\lambda L=0 \Rightarrow \lambda_n L=\frac{n\pi}{L} \quad n=0,1,2,\ldots$$

$$u_n(x,t)=[a_n\sin(\frac{n\pi\alpha t}{L})+b_n\cos(\frac{n\pi\alpha t}{L})]\sin(\frac{n\pi x}{L}) \qquad (1)$$

$$\Rightarrow u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\sin(\frac{n\pi\alpha t}{L})+b_n\cos(\frac{n\pi\alpha t}{L})]\sin(\frac{n\pi x}{L}) \qquad (2)$$

حل معادله موج: روش تفکیک متغیرها

حال عبارت به دست آمده را در شرط اولیه قرار میدهیم:

$$u(x,0)=f(x)\ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)=f(x)$$

$$u_t(x,0)=g(x)\ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\frac{n\pi\alpha}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)=g(x)$$

با استفاده از خاصیت تعامد خواهیم داشت:

$$a_n=\frac{2}{n\pi\alpha}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \qquad b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

از جاگذاری ضرایب بالا، در رابطه (2) جواب نهایی به دست می آید. اما روش حل دیگری برای معادله موج وجود دارد که حل « دالامبر» نام دارد و در ادامه مورد بررسی قرار میگیرد.

حل معادله موج: حل « دالامبر»

معادلات زیر را که توصیف کننده ارتعاش عرضی یک طناب با طول نامتناهی است در نظر بگیرید:

$$\text{PDE} \quad u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} \qquad -\infty < x < \infty, 0 < t < \infty$$

$$\text{ICs} \quad \begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases} \qquad -\infty < x < \infty$$

تغییر متغیر زیر را درنظر گرفته و با جاگذاری آنها در رابطه اصلی خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \xi = x + ct \\ \eta = x - ct \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_x = u_\xi + u_\eta \\ u_t = c(u_\xi - u_\eta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{x\eta} \\ u_{tt} = c^2(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{x\eta}) \end{cases} \Rightarrow u_{\xi\eta} = 0$$

حال انتگرالگیری میکنیم:

$$u_{\xi\eta} = 0 \Rightarrow u_\eta = \phi(\eta) \Rightarrow u = \phi(\eta) + \psi(\xi) \Rightarrow u(x,t) = \phi(x - ct) + \psi(x + ct)$$

حل معادله موج: حل « دالامبر»

ملاحظه میشود که هر دو موجی که با سرعت مخالف حرکت میکنند، اگر با هم جمع شوند جواب معادله خواهند بود.

حال با اعمال شرایط اولیه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi(x)+\psi(x)=f(x) \\ -c\phi'(x)+c\psi'(x)=g(x) \end{cases} \Rightarrow -c\phi(x)+c\psi(x)=\int_{x_0}^{x} g(\xi)\,d\xi+K$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi(x)=\dfrac{1}{2}f(x)-\dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x_0}^{x} g(\xi)\,d\xi \\ \psi(x)=\dfrac{1}{2}f(x)+\dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x_0}^{x} g(\xi)\,d\xi \end{cases}$$

در نتیجه جواب نهایی به صورت زیر خواهد بود:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x-ct)+f(x+ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\,d\xi$$

جوابهای سری معادلات خطی مرتبه دوم

در حل معادلات دیفرانسیل جزیی به روش جدایی متغیرها، اغلب به معادله های دیفرانسیل معمولی با ضرایب متغیر میرسیم که نمیتوان آنها را برحسب توابع آشنا حل کرد. در بسیاری از این موارد میتوان جوابها را به شکل سریهای نامتناهی تعیین کرد. دانشجو باید با این روش در درس معادلات دیفرانسیل آشنا شده باشد. در اینجا اشاره ای گذرا به برخی مفاهیم مربوط خواهد شد و روش در غالب یک مساله یادآوری میگردد. سپس با توجه به مطالب مطرح شده، به معرفی معادلات مشهور « بسل» و « لژاندر» پرداخته خواهد شد. برای بررسی روش سریها، آشنایی با چند تعریف و قضیه ضروری است که در ادامه آورده شده است:

تعریف 1: یک تابع را در یک نقطه تحلیلی گویند اگر و تنها اگر سری تیلوری در آن نقطه داشته باشد که در یک همسایگی از آن نقطه معرف تابع باشد.

به عنوان نمونه، توابع چند جمله ای در همه جا و توابع گویا در همه جا به جز ریشه های مخرج تحلیلی هستند.

نقاط تکین

تعریف 2: در معادله $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ اگر توابع P و Q هردو در $x = x_0$ تحلیلی باشند، آنگاه x_0 را یک نقطه « معمولی» معادله می نامند.

اگر حداقل یکی از توابع P و Q هردو در $x = x_0$ تحلیلی نباشند، ولی توابع زیر در $x = x_0$ تحلیلی باشند، آنگاه x_0 را یک نقطه « تکین عادی» معادله می نامند.

اگر حداقل یکی از توابع زیر در $x = x_0$ تحلیلی نباشند، آنگاه x_0 را یک نقطه « تکین غیرعادی» معادله می نامند.

$$(x-x_0)P(x), \quad (x-x_0)^2 Q(x)$$

مثلا در معادله زیر، $x = 0$ نقطه تکین عادی، $x = 1$ نقطه تکین غیرعادی و سایر نقاط، نقاط معمولی هستند (چرا؟).

$$y'' + \frac{2}{x} y' + \frac{3}{x(x-1)^3} y = 0$$

باید توجه داشت که نقاط تکین میتوانند مختلط نیز باشند.

چند قضیه درباره سریها در معادلات دیفرانسیل

قضیه 1: در یک نقطه معمولی $x = x_0$ در معادله دیفرانسیل $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ هرجواب تحلیلی است یعنی میتوان آن را به وسیله یک سری به شکل زیر نشان داد. به علاوه شعاع همگرایی هر یک از جوابها کمتر از فاصله بین x_0 و نزدیکترین نقطه تکین معادله نیست.

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots$$

قضیه 2: در یک نقطه تکین عادی $x = x_0$ در معادله دیفرانسیل $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ حداقل یک جواب با عبارتی به شکل زیر وجود دارد و این سری در محدوده مذکور همگراست که در آن R کوچکتر از فاصله بین x_0 و نزدیکترین نقطه تکین معادله نیست.

$$y = |x - x_0|^r [a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots] \quad 0 < |x - x_0| < R$$

قضیه 3: در یک نقطه تکین غیرعادی $x = x_0$ در معادله دیفرانسیل $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ در حالت کلی جوابی وجود ندارد که بسط آن فقط شامل توانهای x-x_0 باشد.

معادله مشخصه

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad (3)$$

حال فرض کنید $x = 0$ یک نقطه تکین عادی در معادله (3) است. یعنی $xP(x)$ و $x^2Q(x)$ در مبدا تحلیلی هستند و بنابراین میتوان آنها را به شکل زیر نوشت:

$$xP(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots$$

$$x^2 Q(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots$$

حال معادله (3) را در x^2 ضرب کرده و روابط بالا را جاگذاری میکنیم:

$$x^2 y'' + x(p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots)y' + (q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots)y = 0 \quad (4)$$

حال با توجه به قضیه 2 جواب را به کل رابطه (5) میگیریم:

$$y = x^r (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) \qquad a_0 \neq 0 \qquad (5)$$

حال رابطه (5) را در رابطه (4) جاگذاری میکنیم:

معادله مشخصه

$$x^2[a_0r(r-1)x^{r-2}+a_1(r+1)rx^{r-1}+a_2(r+2)(r+1)x^r+\dots]$$
$$+x(p_0+p_1x+p_2x^2+\dots)[a_0rx^{r-1}+a_1(r+1)x^r+a_2(r+2)x^{r+1}+\dots]$$
$$+(q_0+q_1x+q_2x^2+\dots)(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\dots)=0$$

اگر جمله های شامل هریک از توانهای را با هم جمع کنیم، داریم::

$$\begin{aligned}&a_0[r(r-1)+p_0r+q_0]x^r\\&+\{a_1[(r+1)r+p_0(r+1)+q_0]+a_0[p_1r+q_1]\}x^{r+1}\\&+\{a_2[(r+2)(r+1)+p_0(r+2)+q_0]+a_1[p_1(r+1)+q_1]+a_0[p_2r+q_2]\}x^{r+2}+\dots=0\end{aligned}\tag{6}$$

رابطه (6) اتحاد است اگر و تنها اگر ضریب هر توان صفر باشد، در نتیجه:

$$\begin{aligned}&a_0[r(r-1)+p_0r+q_0]=0\\&a_1[(r+1)r+p_0(r+1)+q_0]+a_0[p_1r+q_1]=0\\&a_2[(r+2)(r+1)+p_0(r+2)+q_0]+a_1[p_1(r+1)+q_1]+a_0[p_2r+q_2]=0\end{aligned}\tag{7}$$

………………………………

معادله مشخصه

چون $a_0 \neq 0$، از اولین رابطه از مجموعه روابط (7)، رابطه (8) نتیجه میشود که به آن معادله مشخصه معادله دیفرانسیل نسبت به نقطه بسط میگویند.

$$r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = 0 \qquad (8)$$

به ریشه های رابطه (8) نیز نماهای نقطه تکین عادی مورد نظر میگویند. اگر این ریشه ها متمایز باشند و اختلاف آنها نیز به اندازه یک عدد صحیح نباشد، به ازای هر یک از این مقادیر، یک سری جواب به شکل رابطه (5) برای معادله (3) وجود دارد. همچنین ضرایب موجود در بسطها را میتوان یکی پس از دیگری از معادلات (7) به دست آورد.

در شرایطی که نتوان دو سری جواب به دست آورد (مثلا ریشه های مضاعف)، میتوان به این صورت عمل کرد که جواب به صورت (9) گرفته شود که در آن y_1 سری جواب اول است. حال را به نحوی $\phi(x)$ را تعیین میکنیم که در معادله دیفرانسیل مورد بررسی، صدق کند.

$$y = \phi(x)\, y_1(x) \qquad (9)$$

معادله بسل

یکی از مهمترین معادله های دیفرانسیل با ضرایب متغیر، معادله (10) است:

$$x^2 y'' + xy' + (\lambda^2 x^2 - \upsilon^2) y = 0 \qquad (10)$$

که معادله بسل مرتبه υ با یک پارامتر λ نامیده میشود. این معادله در مسایل بسیاری از جمله تقریبا در همه کاربردهایی که بامعادله های دیفرانسیل جزیی سر و کار دارند، مانند معادله موج و معادله گرما، در نواحی با تقارن دایره ای مطرح میشود.

با جانشانی (11) رابطه (10) به (12) تبدیل میشود که **« معادله بسل مرتبه υ»** نامیده میشود. $\quad t = \lambda x \quad (11)$

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + (t^2 - \upsilon^2) y = 0 \qquad (12)$$

با مقایسه با رابطه (10)، ملاحظه میشود که:

$$Q(t) = \frac{t^2 - v^2}{t^2}, \qquad P(t) = \frac{1}{t}$$

پس مبدا یک نقطه تکین عادی معادله است (چرا؟) و همه مقادیر دیگر t نقاط معمولی هستند.

معادله بسل

معادله مشخصه حول مبدا که به دنبال جوابهایی به شکل سری حول آن هستیم عبارت است از: $r^2 - \upsilon^2 = 0$

بنابراین براساس مطالب پیشین جوابی به صورت (13) متناظر با $(\upsilon >= 0)$ $r=\upsilon$ در نظر میگیریم. ریشه منفی بعد بررسی خواهد شد.

$$y_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{\nu+k} \qquad (13)$$

با جانشانی (13) در (12) و در ادامه چند عملیات داریم:

$$t^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\nu+k)(\nu+k-1) t^{\nu+k-2} + t \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\nu+k) t^{\nu+k-1} + (t^2 - \nu^2) \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{\nu+k} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k [(\nu+k)(\nu+k-1) + (\nu+k) - \nu^2] t^{\nu+k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{\nu+k+2} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (2\nu+k) t^{\nu+k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{\nu+k+2} = 0$$

معادله بسل

رابطه آخر صفحه قبل را با جدا کردنن جمله اول از بخش اول و نیز تغییر اندیس دادن بخش دوم میتوان نوشت:

$$\left[a_1(2\nu+1)t^{\nu+1}+\sum_{k=2}^{\infty}a_k k(2\nu+k)t^{\nu+k}\right]+\sum_{k=2}^{\infty}a_{k-2}t^{\nu+k}=0$$

$$\Rightarrow a_1(2\nu+1)t^{\nu+1}+\sum_{k=2}^{\infty}[k(2\nu+k)a_k+a_{k-2}]t^{\nu+k}=0$$

رابطه بالا وقتی همیشه برقرار است که ضرایب همه توانهای t صفر شوند. پس:

$$a_1(2\nu+1)=0 \qquad (14)$$

$$k(2\nu+k)a_k+a_{k-2}=0 \Rightarrow a_k=-\frac{a_{k-2}}{k(2\nu+k)} \quad k=2,3,... \qquad (15)$$

از رابطه (14) و شرط نامنفی بودن υ نتیجه میشود: $a_0=0$

معادله بسل

سپس از (15) نتیجه میشود: $a_3 = a_5 = \dots = a_{2m+1} = \dots 0$

$$a_2 = -\frac{a_0}{2(2\nu+2)} = -\frac{a_0}{2^2.1!(\nu+1)}$$

همچنین از (15) نتیجه میشود:

$$a_4 = -\frac{a_2}{4(2\nu+4)} = -\frac{a_2}{2^2.2(\nu+2)} = \frac{a_0}{2^4.2!(\nu+2)(\nu+1)}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{6(2\nu+6)} = -\frac{a_4}{2^2.3(\nu+3)} = -\frac{a_0}{2^6.3!(\nu+3)(\nu+2)(\nu+1)}$$

و به طور کلی:

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m!(\nu+m)(\nu+m-1)\dots(\nu+2)(\nu+1)} \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

چون عبارت بالا ضریب $t^{\upsilon+2m}$ است، آن را به شکل زیر مینویسیم:

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{\nu+2m} m!(\nu+m)(\nu+m-1)\dots(\nu+2)(\nu+1)}(2^\nu a_0)$$

معادله بسل

همچنین با توجه به شکل عبارت مربوط به پرانتزهای ضرب در هم شده در مخرج که یادآور فاکتوریل هستند، صورت و مخرج را در شکل تعمیم یافته فاکتوریل یعنی تابع گاما ضرب میکنیم و سپس با توجه به خاصیت این تابع که در رابطه (16) نشان داده شده، عبارت (17) را برای ضرایب به دست می آوریم:

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{\nu+2m} m!(\nu+m)(\nu+m-1)...(\nu+2)(\nu+1)\Gamma(\nu+1)}(2^{\nu}\Gamma(\nu+1)a_0)$$

$$(\nu+1)\Gamma(\nu+1) = \Gamma(\nu+2) \qquad (3-16)$$

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{\nu+2m} m!\Gamma(\nu+m+1)}(2^{\nu}\Gamma(\nu+1)a_0) \qquad (3-17)$$

حال a_0 را که اختیاری است به شکل زیر میگیریم تا (18) به دست آید:

$$a_0 = \frac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}$$

تابع بسل

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{\nu+2m} m!\Gamma(\nu+m+1)} \quad m = 0,1,2,... \qquad (3-18)$$

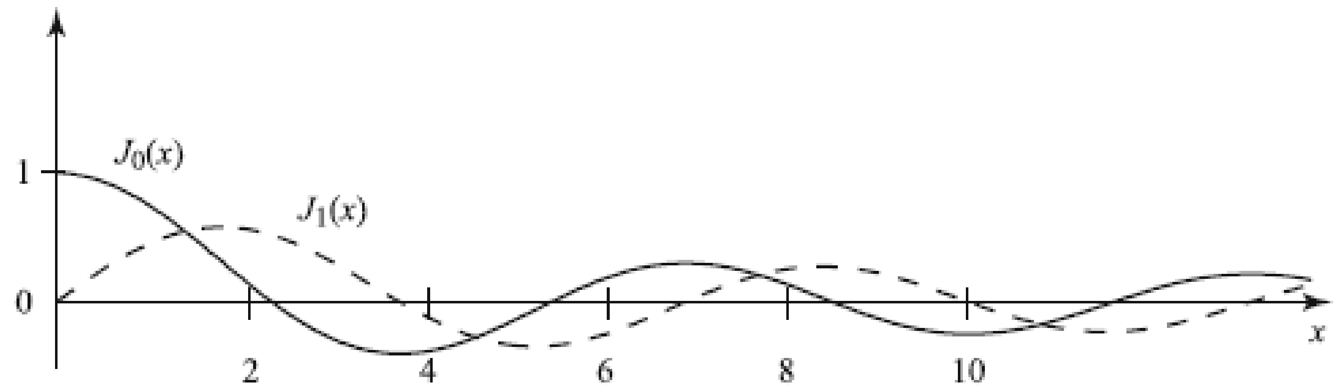
حال با جانشانی در (13)، به ازای هر $\upsilon >= 0$ یک جواب y_υ به دست می آوریم که به آن **« تابع بسل نوع اول از مرتبه υ»** گفته میشود و با J_υ نشان داده میشود (رابطه (19) یا (20)):

$$J_\nu(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{\nu+2m}}{2^{\nu+2m} m!\Gamma(\nu+m+1)} \qquad (3-19)$$

$$J_\nu(t) = t^\nu \left[\frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} - \frac{t^2}{2^{\nu+2}\Gamma(\nu+2)} + \frac{t^4}{2^{\nu+4}\Gamma(\nu+3)} - ... \right] \qquad (3-20)$$

چون (19) جز مبدا هیچ نقطه تکین متناهی ندارد، طبق قضیه مطروحه، نتیجه میشود که سری (19) به ازای هر t نامنفی همگراست. برای همگرایی به ازای همه مقادیر باید در (19)، t با قدرمطلق آن جایگزین شود. در شکل صفحه بعد توابع بسل نوع اول از مرتبه صفر و مرتبه 1، رسم شده اند.

تابع بسل



این نمودارها نشان دهنده این مهم هستند که به ازای هر υ، معادله $J_\upsilon = 0$ بینهایت ریشه دارد. بررسی حالت منفی ریشه معادله مشخصه در ادامه انجام خواهد شد.

توابع بسل

حالت مثبت ریشه معادله مشخصه در قسمت قبل بررسی شد. حال به بررسی حالت منفی ریشه معادله مشخصه میپردازیم ($r = -\upsilon < 0$). چون υ فقط به شکل مجذور در معادله بسل وارد شده است، نتیجه میگیریم که سری (3-19) پس از تعویض υ با $-\upsilon$ در معادله بسل صدق خواهد کرد، به این شرط که توابع گامایی که در مخرج هست تعریف شوند. این امر وقتی υ یک عدد صحیح نباشد صادق است. پس وقتی υ یک عدد صحیح نیست، تابع (4-1) یک جواب خصوصی دیگر معادله بسل مرتبه υ است.

$$J_{-\nu}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{-\nu+2m}}{2^{-\nu+2m} m! \Gamma(-\nu+m+1)} \qquad (4-1)$$

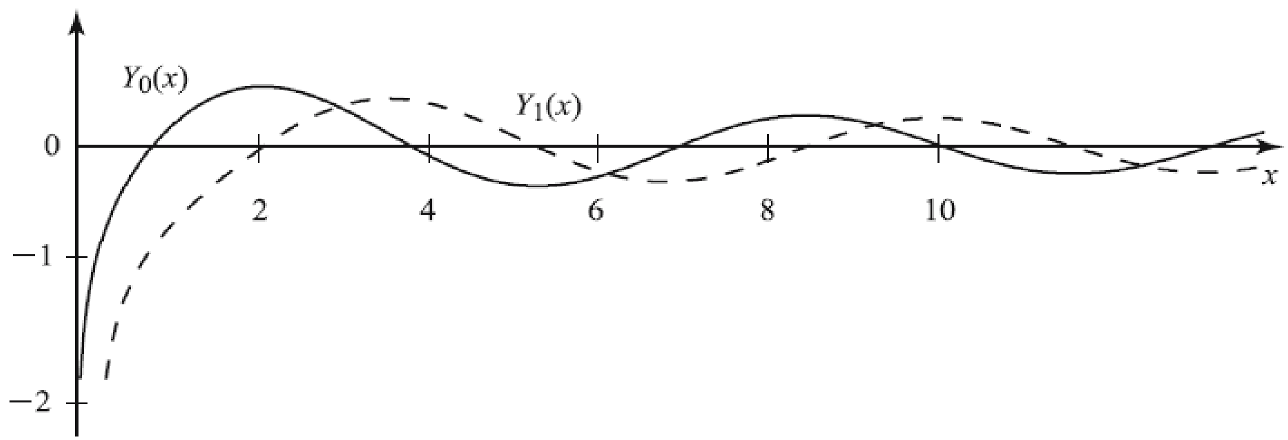
تابع (4-1) برخلاف (3-19)، چون دارای توانهای منفی t هم هست، در مبدا نامتناهی است، پس وقتی υ یک عدد صحیح نیست، این دو تابع دو جواب مستقل خطی از معادله بسل هستند. پس با توجه به قضیه ای که در معادلات دیفرانسیل ثابت میشود، جواب کاملی از معادله بسل وقتی که υیک عدد صحیح نیست، عبارت است از:

$$y(t) = c_1 J_\nu(t) + c_2 J_{-\nu}(t) \qquad (4-2)$$

تابع بسل نوع دوم

چون υ به صورت متقارن در (4-2) وارد شده، دیگر به شرط نامنفی بودن υ نیازی نیست. برای بسیاری مقاصد بهتر است به جای $J_{-\upsilon}$، ترکیب خطی (4-3) را به عنوان دومین جواب مستقل برای معادله بسل در نظر بگیریم. به تابع (4-3)، **« تابع نیومن»** یا **« تابع بسل نوع دوم از مرتبه υ»** گفته میشود. با استفاده از این تابع میتوانیم جواب کاملی از معادله بسل را به شکل دیگری یعنی (4-4) برای υهای غیرصحیح بنویسیم.

$$Y_\nu(t)=\frac{\cos\nu\pi\, J_\nu(t)-J_{-\nu}(t)}{\sin\nu\pi} \quad (4-3) \qquad y_\nu(t)=c_1 J_\nu(t)+c_2 Y_\nu(t) \quad (4-4)$$



توابع بسل نوع سوم

در بعضی از کاربردها مناسب است شکلی از جواب عمومی معادله بسل را که با شکل اخیر هم متفاوت است و مبتنی است بر دو جواب خصوصی (4-5):

$$\begin{cases} H_\nu^{\ 1}(t) = J_\nu(t) + i\,Y_\nu(t) \\ H_\nu^{\ 2}(t) = J_\nu(t) - i\,Y_\nu(t) \end{cases} \qquad (4-5)$$

این جوابها به **« توابع هانکل»** یا **« توابع بسل نوع سوم از مرتبه υ»** موسوم هستند و میتوان جواب کاملی از معادله بسل را برحسب آنها به صورت (4-6) نوشت:

$$y(t) = c_1 H_\nu^{\ 1}(t) + c_2 H_\nu^{\ 2}(t) \qquad (4-6)$$

وقتی که υیک عدد صحیح است، توابع J_υ و $J_{-\upsilon}$با هم متناسب هستند و در نتیجه دو تابع مستقل نیستند، بنابراین (4-2) دیگر جواب کاملی از معادله بسل نیست. در این حالت از راههای مختلف دیگری میتوان جواب کاملی پیدا کرد. در قضیه صفحه بعد، جوابهای معادله بسل مرتبه υ، به ازای همه مقادیر υ خلاصه شده است.

جوابهای کاملی برای معادله بسل

قضیه: به ازای همه مقادیر υ، جواب کاملی از معادله بسل مرتبه υبا یک پارامتر λ،

$$x^2 y'' + xy' + (\lambda^2 x^2 - \nu^2) y = 0$$

را به هر یک از دو صورت زیر

$$y(x) = c_1 J_\nu(\lambda x) + c_2 Y_\nu(\lambda x) \qquad , \qquad y(x) = c_1 H_\nu{}^1(\lambda x) + c_2 H_\nu{}^2(\lambda x)$$

میتوان نوشت. اگر υعدد صحیح نباشد، جواب کامل را میتوان به شکل زیر هم نوشت:

$$y(x) = c_1 J_\nu(\lambda x) + c_2 J_{-\nu}(\lambda x)$$

توابع J_υ و $J_{-\upsilon}$ و Y_υ بینهایت ریشه حقیقی دارند. اگر υ نامنفی باشد، J_υ به ازای همه مقادیر x متناهی است ولی $J_{-\upsilon}$ و Y_υ در همسایگی مبدا بیکران هستند. وقتی x حقیقی باشد $H_\upsilon{}^1$ و $H_\upsilon{}^2$ توابعی با مقادیر مختلط هستند.