جزوه ریاضیات مهندسی پیشرفته

ارشد مهندسی مکانیک- طراحی کاربردی

نویسنده : **امین آزادی**

استاد مربوطه : دکتر فرامرز طلعتی

دانشگاه تبریز

پاییز ۹۱

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
۲۸	۲۹	۳۰	۳۱			

جلسه اول - ریاضیات مهندسی پیشرفته (91,7/2)

Differential Equations and the calculus of variations - Ler Elsgolts

I) Calculus of Variations

(Elsgolts) (5-6)p

II) Linear PDE for Scientists & Engineers sharif (Mousavi)

(Tyn Myint u . L Debnath) (11-12)p

III) Vectors & Tensor Analysis

Hay (2-3) p

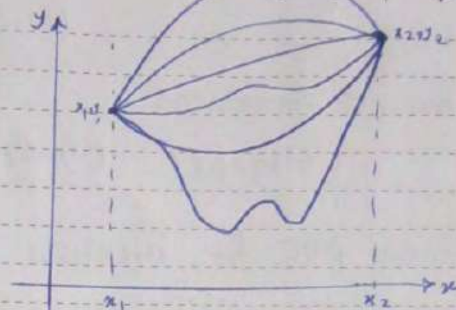
1. تحویل H.W

2- حضور و غیاب

3. موبایل!

4- امتحانات میان ترم

مساحت محصور $A=\int_{x_1}^{x_2} y(x)\,dx$



مساحت محصور شده بین کدام منحنی و کوریه؟ ماکزیمم اکسترمم است؟ مقدار این وابسته به $y(x)$ است.

★ توابع functional :

$$\begin{cases} y(x_1)=y_1 \\ y(x_2)=y_2 \end{cases}$$ برای تمام منحنی ها

عبارتی برای $F(x,y,y')$ تا مقدار $A[y(x)]$ ماکزیمم (اکسترمم شود)

a) در منحنی به طول l که از دو نقطه a و b عبور می کند. l چقدر باشد تا مساحت زیر منحنی اکسترمم شود (کمترین فاصله)

$l \longrightarrow A\uparrow$

★ منحنی های ژئودزی

★ b) کمترین زمان

معادله منحنی چه باید باشد تا ذره m در کمترین زمان ممکن به انتهای مسیر برسد (بدون اصطکاک در حالت سکون و حرکت وزن خود)

Brachisto chrone

Brachistos chronos

کوتاه‌ترین زمان

★ تفاوت ریاضیاتی که تاکنون خوانده‌ایم و ریاضیاتی که خواهیم خواند

$$\begin{cases} x \to x+\Delta x \\ z \to z+\Delta z \end{cases} \to$$ تابع پیوسته است

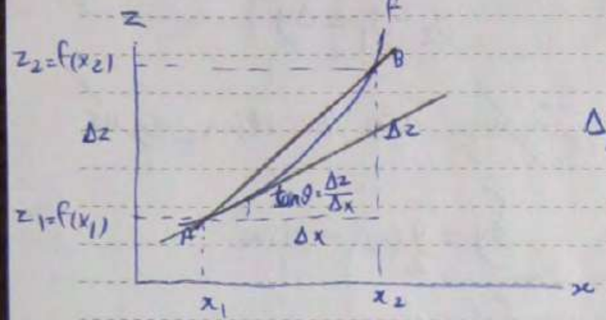
$$f(x)=\frac{1}{x}$$

$$x \to 0$$

$x=0.01 \to f=100$

$x=0.02 \to f=50$

تفاوت زیاد ← در نزدیکی صفر پیوسته نیست



$$\Delta f = f(x_2)-f(x_1)=f(x_1+\Delta x)-f(x_1)$$

$$=A(x)\,\Delta x + B(x,\Delta x)\,\Delta x$$

$$\to \lim_{x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=A(x)=f'(x)$$ [تعریف مشتق تابع $f(x)$]

مثال $f(x)=x^2+4x-5 \to f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2+4(x+\Delta x)-5$

$$=x^2+2x\Delta x+\Delta x^2+4x+4\Delta x-5$$

$$f(x+\Delta x)-f(x)=2x\Delta x+4\Delta x+(\Delta x)^2=\Delta x(\underbrace{2x+4}_{A}+\underbrace{\Delta x}_{B})$$

A ← به صورت خطی به x وابسته است

B ← به صورت غیر خطی به x وابسته است

← حل مسئله بالا به روش جدید:

$f'(x)=0 \to x=x_0$ (مقدار f اکسترمم می‌گردد)

(x_0 نقطهٔ اکسترمم تابع $f(x)$)

اگر α عدد حقیقی باشد:

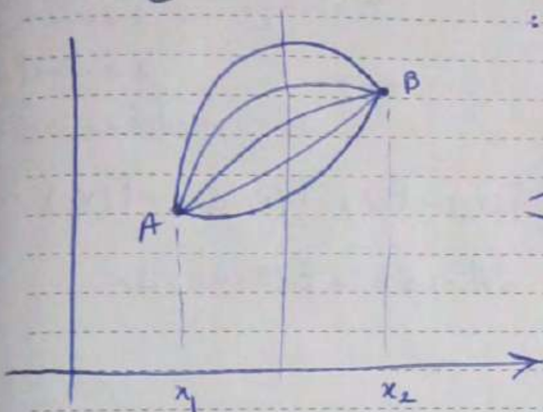
$$\boxed{\frac{d}{d\alpha}\left[f(x+\alpha\Delta x)\right]\Big|_{\alpha=0}=f'(x+\alpha\Delta x)\Big|_{\alpha=0}}$$

← مقدار x_0 که اکسترمم کننده است بدست می‌آید

اختلاف دو تابع $y_2 - y_1$

$\underset{\text{تغییر تابع}}{\Delta f} = \Delta z = f(x_2) - f(x_1)$, $\Delta x = x_2 - x_1$ تغییرات تابع (Variation)

حال اگر برای منحنی های صفحهٔ قبل بخواهیم بحث کنیم :



$$y_2 - y_1 = \delta y$$

عملگر در این Variation دقیقاً شبیه عملگر مشتق است

$$\delta y = y_2(x) - y_1(x)$$ اختلاف منحنی

$$\delta y' = y_2'(x) - y_1'(x)$$ اختلاف شیب ها

$$= \frac{d}{dx}\Big[\underbrace{y_2(x) - y_1(x)}_{\delta y}\Big]$$ به خاطر خطی بودن عمل مشتق (مشتق Variation)

$$\boxed{\delta y^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n}(\delta y)}$$

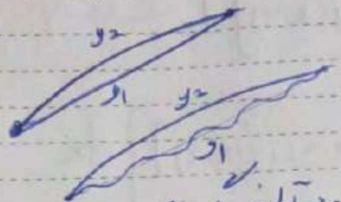
: $\delta(y^2) = 2y\,\delta y$

* $\delta(F_1 \pm F_2) = \delta F_1 \pm \delta F_2$
* $\delta(F_1 F_2) = F_2\,\delta F_1 + F_1\,\delta F_2$
* $\delta\left(\frac{F_1}{F_2}\right) = \frac{F_2\,\delta F_1 - F_1\,\delta F_2}{F_2^{\,2}}$

* تعریف: گوییم دو تابع از مرتبهٔ صفر به هم نزدیکند اگر $|\delta y| = |y_2 - y_1| < \varepsilon$

گوییم تابع به صورت مرتبهٔ اول به هم نزدیکند اگر $|\delta y'| = |y_2' - y_1'| < \varepsilon$

* در نقاط ابتدایی مقادیر برابرند اما مشتق‌ها نابرابرند



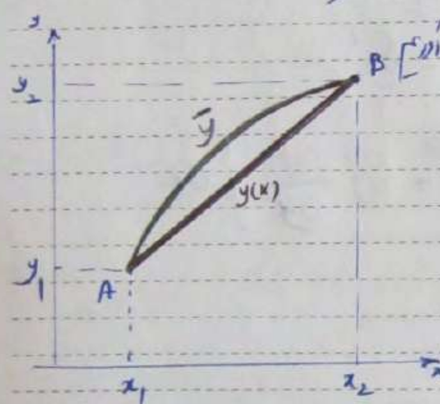
اگر این مطلب را به مشتق رتبهٔ k ام تعمیم دهیم آنگاه می‌توانیم بگوییم:

$$|\delta y^{(n)}| = |y_2^{(n)} - y_1^{(n)}| < \varepsilon$$

$n = 0, 1, 2, \dots, k$ ،

آنگاه گوییم دو منحنی از رتبهٔ k به هم نزدیک هستند.

* می‌خواهیم مقدار کمینه یا بیشینه این انتگرال [$I[y(x)]$ را به دست آوریم]



$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx$$

$$\begin{cases} y(x_1) = y_1 \\ y(x_2) = y_2 \end{cases}$$

می‌خواهیم F را به گونه‌ای تعیین کنیم تا مقدار انتگرال اکسترمم شود

$\delta y = \bar{y} - y$

$y(x,\alpha) = y(x) + \alpha\,\delta y$ تعریف

به ازای αهای متفاوت، منحنی‌های متفاوتی خواهیم داشت با این شرط که همگی از نقاط A و B عبور می‌کنند.

اگر از y جدید استفاده کنیم، I وابسته به α خواهد بود:

$$\boxed{I[y(x,\alpha)] = \int_{x_1}^{x_2} F[x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha)]\,dx}$$

شرط اکسترمم بودن I $\longrightarrow \left.\dfrac{\partial I}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} = 0 = \frac{\partial}{\partial \alpha}\int_{x_1}^{x_2} F\left[x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha)\right] dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left\{ f\left[x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha)\right]\right\} dx$$

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} = 0 = \int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\right\} dx$$

(y و y′ وابسته به x و α هستند.)

$$y(x,\alpha) = y(x) + \alpha\,\delta y \qquad \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial y}{\partial \alpha} = \delta y\\[2mm] \dfrac{\partial y'}{\partial \alpha} = \delta y'\end{array}\right.$$

$$y'(x,\alpha) = y'(x) + \alpha\,\delta y'$$

$$\rightarrow \frac{\partial I}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} = 0 = \int_{x_1}^{x_2}\left\{\delta y\frac{\partial F}{\partial y} + \delta y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right\} dx$$

$$\star\left\{\begin{array}{l}\delta y\big|_{x_1} = 0\\ \delta y\big|_{x_2} = 0\end{array}\right.$$

با انتگرال گیری جزء به جزء مشتق را از روی $\delta y'$ برمی‌داریم

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y'}\underbrace{\delta y'}_{\frac{d}{dx}(\delta y)}dx = \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2}\delta y\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)dx$$

$$\xrightarrow[\text{در اصل}]{\text{جایگذاری}} \frac{\partial I}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} = 0 = \int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right\}\delta y\,dx$$

$$\boxed{\rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0}$$ معادله اویلر-لاگرانژ

معادله اویلر-لاگرانژ به شکل بازشده

$$\boxed{F_y - F_{y'x} - y' F_{y'y} - y'' F_{y'y'} = 0}$$

به شکل زیر

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - y' \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} - y'' \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = 0$$

① $F = F(x)$ یعنی: با یک مسئله تغییراتی مواجه نیستیم (یعنی یک متغیر بیشتر نداریم)

② $F = F(y) \rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ ممکن است جواب داشته باشد (در حالات استثنایی)

$\rightarrow I = \int_0^1 y^2 \, dx$ اگر $y(0) = 0$

③ $F = F(y')$ $\frac{\partial F}{\partial y}$ $F_{y'x}$ $F_{y'y}$ $F_{y'y'}$ $\rightarrow \boxed{y'' = 0} \rightarrow y = ax + b$

★ برای منحنی واصل بین دو نقطه:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + y'^2} \, dx$$

$$\Rightarrow L[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} \, dx =$$

④ $F = M(x,y) + y' N(x,y)$ F به صورت خطی به y' وابسته است

معادله لاگرانژ $\rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \rightarrow M_y + y' N_y - \frac{d}{dx}(N) = 0$

[illegible]

$$\rightarrow M_y + y' N_y - (N_x + y' N_y) = 0$$

$$\rightarrow M_y - N_x = 0 \rightarrow \boxed{M_y = N_x}$$

یعنی: جواب مستقل از مسیر است و مسئله تغییراتی نداریم

(5) $F = F(x, y') \longrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \rightarrow \frac{\partial F}{\partial y'} = c_1$

معادله در حالت کلی جواب ندارد ولی باید حل شود و دنبال جواب بگردیم

(6) $F = F(y, y')$ $\quad F_{y_x} = 0$

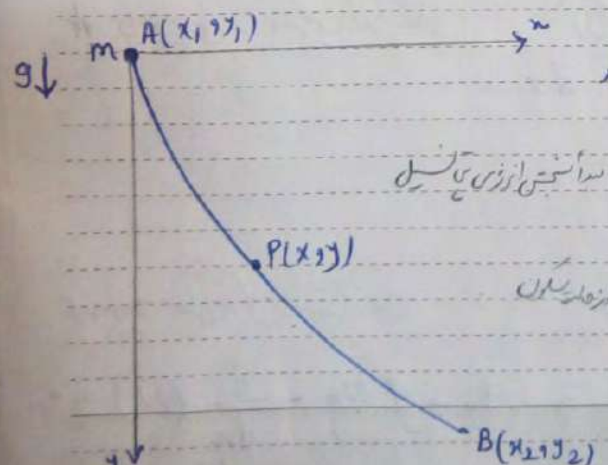
$$\longrightarrow F_y - y' F_{y'y} - y'' F_{y'y'} = 0$$

اگر $\frac{d}{dx}\left(F - y' F_{y'}\right) = \cancel{F_x} + y' F_y + \cancel{y'' F_{y'}} - \cancel{y'' F_{y'}} - y'\left(\cancel{F_{y'x}} + y' F_{y'y} + y'' F_{y'y'}\right)$

$$= \underset{\text{با}}{y'}\left(F_y - y' F_{y'y} - y'' F_{y'y'}\right) = 0$$

$y' \neq 0$ اگر $\longrightarrow$ $\boxed{F - y' F_{y'} = C}$ اتحاد برت-رامی

حل مسئله کمترین زمان:



(x)y را طوری پیدا کنید که زمان رسیدن ذره به نقطه B مینیمم باشد

* قانون بقای انرژی
* P هر نقطه دلخواه

$$E_A = E_P$$ مبدأ سنجش انرژی پتانسیل

$$\cancel{KE_A} + \cancel{PE_A} = KE_P + PE_P$$

از حال سکون

$$0 = \frac{1}{2} m v^2 - m g y$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

$$\rightarrow v = \sqrt{2gy} = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{dt}\, dx$$

حرکت در روی مسیر

$$\to dt = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx \;\to\; \int_0^T dt = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx$$

$$\to T[y(x)]$$

جلسه دوم - ۹۱/۷/۴

تمرین های از فصل ۶ کتاب

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\,dx \qquad F \to F(y, y') \to$$ اتحاد بلترامی

$$F - y'F_{y'} = c \;\to\; \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} - y'\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = c$$

$$\to \frac{1+y'^2-y'^2}{y\sqrt{1+y'^2}} = c_1 \;\to\; \frac{1}{c_1^2y^2} = 1+y'^2 \;\to\; \frac{1}{c_1^2y^2} - 1 = y'^2$$

$$\to \frac{\sqrt{1-c_1^2y^2}}{c_1 y} = \frac{dy}{dx} \;\to\; \frac{c_1 y\,dy}{\sqrt{1-c_1^2y^2}} = dx$$

$$c_1 y = \sin\theta \to c_1\,dy = \cos\theta\,d\theta \;\longrightarrow\; \frac{\sin\theta \times \frac{1}{c_1}\cos\theta\,d\theta}{\cos\theta} = dx$$

$$\to -\frac{1}{c_1}\cos\theta = x + c_2 \;\to\; \cos\theta = c_3 - c_1 x$$

$$\xrightarrow{\theta\ \text{حذف}} (c_3 - c_1x)^2 + c_1^2y^2 = 1$$ (معادله دایره)

c_1 ، c_3 از شرایط مرزی بدست می آیند.

$$\begin{cases} y(x_1) = y_1 \\ y(x_2) = y_2 \end{cases}$$

حل مسأله تمرین زمان به صورت کامل ←

$$T[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx$$

$\rightarrow F(y, y') \rightarrow$ مستقل از x $\rightarrow$ اتحاد بلترامی

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} - y' \times \frac{y'}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}} = c_1 \rightarrow \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = c_2$$

$$\rightarrow \frac{1+y'^2-y'^2}{\sqrt{(y)(1+y'^2)}} = c_2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{c_2^2 y}} = \sqrt{1+y'^2} \rightarrow \frac{1}{c_2^2 y} = 1+y'^2$$

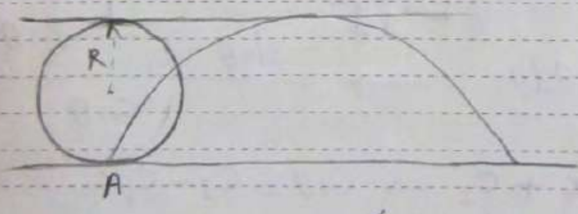
$$\rightarrow \frac{1-c_2^2 y}{c_2^2 y} = y'^2 \rightarrow \frac{\sqrt{1-c_2^2 y}}{\sqrt{c_2^2 y}} = \frac{dy}{dx} \rightarrow \sqrt{\frac{c_2^2 y}{1-c_2^2 y}}\, dy = dx$$

$$c_2^2 y = \sin^2\theta \rightarrow c_2^2\, dy = 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta \Rightarrow \frac{1}{c_2^2}\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}} \times 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta = dx$$

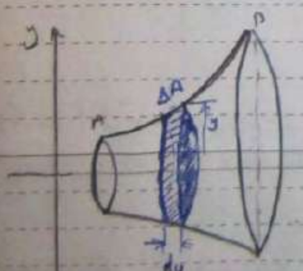
$$\rightarrow \frac{2}{c_2^2}\sin^2\theta\, d\theta = dx \rightarrow \frac{1}{c_2^2}(1-\cos 2\theta)\, d\theta = dx$$

$$\rightarrow \left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) = c_2^2 x + c_3$$

(منحنی: سیکلوئید)



● معادله منحنی چه باید باشد تا سطح حاصل از دوران کمینه باشد.



$$\Delta A = 2\pi y \cdot \Delta S$$

$$\rightarrow A[y(x)] = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\, dx$$

$\rightarrow F(y, y') \rightarrow$ اتحاد بلترامی $\quad F - y' F_{y'} = c_1$

$$\to \cancel{2\pi} y\sqrt{1+y'^2} - y'\left(\frac{\cancel{2\pi} y y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = \overset{C_2}{C_1}$$

$$\frac{y(1+y'^2) - yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C_2 \longrightarrow \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = C_2 \to \frac{y^2}{C_2^2} - 1 = y'^2$$

$$\to \frac{\sqrt{y^2-C_2^2}}{C_2} = y' = \frac{dy}{dx} \to \frac{C_2\,dy}{\sqrt{y^2-C_2^2}} = dx \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} \begin{cases} y = C_2\cosh\theta \\ dy = C_2\sinh\theta\,d\theta \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{در رابطه}]{\text{جانشینی}} \frac{C_2^2\sinh\theta\,d\theta}{C_2\sinh\theta} = dx \longrightarrow \theta = \frac{x}{C_2} + C_3$$

منحنی زنجیری

$$\longrightarrow \cosh^{-1}\left(\frac{y}{C_2}\right) = \frac{x}{C_2} + C_3 \longrightarrow \frac{y}{C_2} = \cosh\left(\frac{x}{C_2} + C_3\right)$$

$$\boxed{y = C_2\cosh\left(\frac{x}{C_2} + C_3\right)}$$

* اصل فرما: نور در یک محیط مسیر خود را طوری انتخاب می‌کند که کمترین زمان ممکن را صرف کند

مسئله 12 از فصل 6 :

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{(y^2 + 2xyy')}\,dx \qquad \begin{cases} y(x_1) = A \\ y(x_2) = B \end{cases}$$

چون به طور خطی به y' وابسته است

مستقل از مسیر خواهد بود

و مسئله تغییراتی نخواهیم داشت

$$\to 2y + 2xy' - \underbrace{\frac{d}{dx}(2xy)}_{2y+2xy'} = 0 \to 0=0$$

$$I[y(x)] = \int_0^1 (xy + y^2 - 2y^2y')\,dx \qquad \begin{cases} y(0) = 1 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

چون به صورت خطی به y' وابسته است

$$x + 2y - 4yy' - \underbrace{\frac{d}{dx}(-2y')}_{-4yy'} = 0 \longrightarrow x + 2y = 0 \longrightarrow \boxed{y = \frac{-x}{2}}$$

شرایط را ارضا نمی‌کند و مسئله تغییراتی نداریم پس بی معنی است.

$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} y'(1+x^3y')\,dx \rightarrow$ مستقل از y است

$F_y = 0 \rightarrow \frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0 \rightarrow F_{y'} = C_1 \rightarrow 1+2x^3y' = C_1$

$\rightarrow 2x^3y' = C_1 - 1 = C_2 \rightarrow x^3y' = C_3 \rightarrow y' = \frac{C_3}{x^3} \rightarrow \boxed{y(x) = C_5 + \frac{C_4}{x^2}}$

$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} (xy' + y'^2)\,dx$

مانند قبلی $\rightarrow x + 2y' = C_1 \rightarrow y' = C_2 - \frac{x}{2} \rightarrow \boxed{y = C_2x - \frac{x^2}{4} + C_3}$

$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} (y'^2 + 2yy' - 16y^2)\,dx \rightarrow F(y, y') \rightarrow$ اتحاد بلترامی

$\rightarrow y'^2 + \cancel{2yy'} - 16y^2 - y'(2y' + \cancel{2y}) = C_1 \rightarrow -16y^2 - y'^2 = C_1$

$y'^2 + 16y^2 = C_2 \rightarrow 2y'y'' + 32yy' = 0 \xrightarrow{y' \neq 0} y'' + 16y = 0$

$\rightarrow \boxed{y(x) = A_1 \sin 4x + A_2 \cos 4x}$

$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1+y^2}{y'^2}\,dx \rightarrow$ اتحاد بلترامی

$\frac{1+y^2}{y'^2} - y'\left(\frac{-2(1+y'^2)}{y'^3}\right) = C_1 \rightarrow \frac{1+y^2+2+2y^2}{y'^2} = C_1 \rightarrow \frac{3(1+y^2)}{y'^2} = C_1$

$\rightarrow \frac{1+y^2}{y'^2} = C_2 \rightarrow \sqrt{\frac{1}{C_2}(1+y^2)} = y' = \frac{dy}{dx}$

$\rightarrow \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{C_2}}\,dx = C_3\,dx$ $\quad \left\{ y = \sinh\theta \rightarrow dy = \cosh\theta\,d\theta \right.$

$\rightarrow \frac{\cosh\theta\,d\theta}{\sqrt{\cosh^2\theta}} = C_3\,dx \rightarrow \theta = C_3x + C_4$

$\boxed{\rightarrow y = \sinh(C_3x + C_4)}$

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
۲۸	۲۹	۳۰	۳۱			

افزایش مرتبه مشتقات ظاهر شده در $I[y(x)]$:

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})\, dx$$

~~شرط~~ باید تمامی مشتقات تا مرتبه $n-1$ در نقاط x_1 و x_2 برابر باشند اما در $y^{(n)}$ لزوماً نباید برابر باشند،

$$y^{(k)}(x_1) = A \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$y^{(k)}(x_2) = B \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

حل:

$$y(x,\alpha) = y(x) + \alpha\, \delta y \quad , \quad y^{(k)}(x,\alpha) = y^{(k)}(x) + \alpha\, \delta y^{(k)} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

مشتق

برای مرتبه دوم می‌نویسیم:

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', y'')\, dx \qquad y(x_1) = A \quad , y'(x_1) = C$$

$$y(x_2) = B \quad , y'(x_2) = D$$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} I[y(x,\alpha)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha), y''(x,\alpha))\, dx$$

شرط اکسترمم بودن: $\left.\frac{dI}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0 \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \overbrace{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}^{\delta y} + \frac{\partial F}{\partial y'} \overbrace{\frac{\partial y'}{\partial \alpha}}^{\delta y'} + \frac{\partial F}{\partial y''} \overbrace{\frac{\partial y''}{\partial \alpha}}^{\delta y''} \right] dx$

علامت مشتق را از روی δyها برمی‌داریم: $-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$ قبلاً داشتیم

$$* \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y''}\, \delta y''\, dx \qquad * \ \delta y'' = \frac{d^2}{dx^2}(\delta y) = \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}(\delta y)\right]$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y''}}_{u} \underbrace{\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}(\delta y)\right] dx}_{dv} = \underbrace{\delta y' \left.\frac{\partial F}{\partial y''}\right|_{x_1}^{x_2}}_{\text{صفر است}} - \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\frac{d}{dx}(\delta y)}_{dv} \overbrace{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)}^{u} dx$$

$$= -\left\{ \delta y \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \delta y\, \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) dx \right\}$$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} \boxed{= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) \right] \delta y\, dx}$$

تعمیم n: $\rightarrow$ $$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}\right) = 0}$$

مثال: شکل ۹ فصل ۶

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} (16y^2 - y''^2 + x^2)\,dx$$

(1) $$F_y - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) = 0 \rightarrow 32y + 0 + \frac{d^2}{dx^2}(-2y'') = 0$$

(2) $$32y - 2y^{(4)} = 0 \rightarrow y^{(4)} - 16y = 0$$

$$\rightarrow y(x) = A_1 \sin 2x + A_2 \cos 2x + A_3 e^{2x} + A_4 e^{-2x}$$

تمرین

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} (2xy + y'''^2)\,dx$$

$$\rightarrow 2x - \frac{d^3}{dx^3}(2y''') = 0 \rightarrow y^{(6)} = x \quad \Rightarrow y = \frac{x^7}{7!}$$

• جلسه بعد $$I[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', y_3', \dots, y_n')\,dx$$

ج سوم - ۹۱/۷/۱۹

$$I(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n')\,dx$$

$$\begin{cases} y_k(x_1) = A \\ y_k(x) = B \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

از خاصیت جمع آثار استفاده می‌کنند [با ثابت نگه داشتن همه، تغییر کردن یکی و ادامه برای همه) تا به ... برسد

یک y تغییر $$\frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_k'}\right) = 0 \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

اگر مشتقات مرتبه بالاتر ظاهر شوند نیز به همین صورت عمل خواهد شد.

مشتق مراتب بالاتر $\longrightarrow \dfrac{\partial F}{\partial y_k} + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \dfrac{d^j}{dx^j}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y_k^{(j)}}\right) = 0$

* مثال ۱۱ کتاب :

$$I[y(x), z(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \left[2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2\right] dx$$

* $\dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \rightarrow 2z - 4y - 2y'' = 0 \longrightarrow z - 2y - y'' = 0$ (1)

* $\dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial z'}\right) = 0 \rightarrow 2y + 2z'' = 0 \longrightarrow y + z'' = 0$ (2)

$y = -z'' \xrightarrow[\text{در (1)}]{\text{با جایگذاری}} z - 2(-z'') - (-z^{(4)}) = 0 \rightarrow z^{(4)} + 2z'' + z = 0$

$z = e^{mx}$ معادله مشخصه $m^4 + 2m^2 + 1 = 0 \rightarrow (m^2+1)^2 = 0 \rightarrow m = \pm i$ تکراری

$\longrightarrow z(x) = (c_1 + c_2 x)\sin x + (c_3 + c_4 x)\cos x$

$\longrightarrow y = -z''$

$$I[x(t), y(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left(2xy + \dot{y}^2 + (-\dot{x}^2)\right) dt \quad *$$

$\dfrac{\partial F}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \rightarrow 2y - \dfrac{d}{dt}(-2\dot{x}) = 0 \rightarrow y + \ddot{x} = 0$ (1) y را ثابت و x متغیر

$\dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right) = 0 \rightarrow 2x - \dfrac{d}{dt}(2\dot{y}) = 0 \rightarrow x - \ddot{y} = 0$ (2) x ثابت و y متغیر

$(2) \rightarrow x = \ddot{y} \xrightarrow{(1)} y + y^{(4)} = 0$ معادله مشخصه $m^4 + 1 = 0 \rightarrow m^4 = -1 = e^{\pi i}$

$m_0 = e^{\pi i/4}, \; m_1 = e^{3\pi i/4}, \; m_2 = e^{5\pi i/4}, \; m_3 = e^{7\pi i/4} \longrightarrow m_k = e^{\frac{(\pi + 2k\pi)i}{4}}; \quad k = 0, 1, 2, 3$

$$y = \sum_{k=0}^{3} c_k e^{m_k t}, \qquad x = \ddot{y}$$

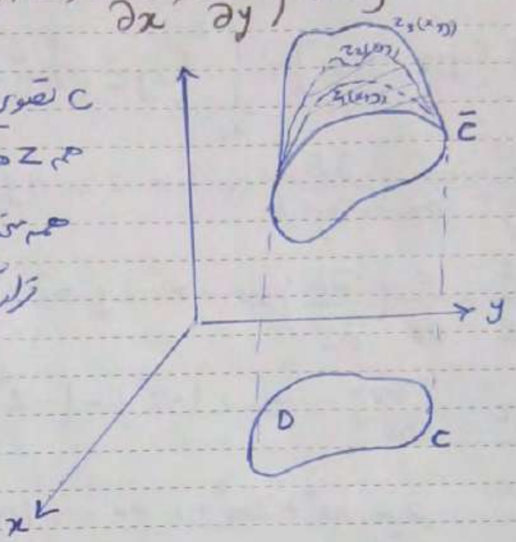
* حالتی که y وابسته به بیش از یک متغیر باشد.

$$I[z(x,y)] = \iint_D F\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right) dxdy$$

c تصویر $\bar{c}$ در صفحه xy می باشد.

همه zها در منحنی $\bar{c}$ مشترک هستند.

همه منحنی ها باید در استوانه سطح مقطع، مقطع زده شده قرار بگیرند.



همانند قبل $\delta z = \bar{z}(x,y) - z(x,y)$

$z(x,y,\alpha) = z(x,y) + \alpha\,\delta z$

در صفحه xy ← $\delta z = 0$
ارتفاع نداریم

$$\frac{\partial z(x,y,\alpha)}{\partial x} = z_x + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha\,\delta z) = z_x + \alpha\frac{\partial}{\partial x}(\delta z)$$

$$\frac{\partial z(x,y,\alpha)}{\partial y} = z_y + \alpha\frac{\partial}{\partial y}(\delta z)$$

حال از جای گذاری در رابطه اصلی داریم:

$$I[z(y,x,\alpha)] = \iint_D F\left(x,y,z(x,y,\alpha),\underbrace{\frac{\partial z(x,y,\alpha)}{\partial x}}_{\frac{\partial}{\partial x}(\delta z)},\frac{\partial z(x,y,\alpha)}{\partial y}\right) dxdy$$

شرط اکسترمم شدن

$$\left.\frac{\partial I}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0 = \iint_D \left\{ \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \alpha} + \overbrace{\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}\cdot\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)} + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}\cdot\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}_{\frac{\partial}{\partial y}(\delta z)} \right\} dxdy$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = p \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = q \end{cases}$$

$$\rightarrow \left.\frac{\partial I}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0 = \iint_D \left\{ \frac{\partial F}{\partial z}\delta z + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial}{\partial x}(\delta z) + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial}{\partial y}(\delta z) \right\} dx\,dy$$

$$\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\delta z) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial F}{\partial p}\delta z\right] - \delta z\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(\delta z) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial F}{\partial q}\delta z\right] - \delta z\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)$$

از جانشانی در رابطه اصلی

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial I}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0 = \iint_D \left\{ \left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)\right]\delta z + \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\delta z\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\delta z\right)\right]}_{J_1} \right\} dx\,dy$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_C M\,dx + N\,dy$$

قضیهٔ گرین از ریاضی ۲

چون روی C، $\delta z = 0$ است:

$$J_1 = \int_C \frac{\partial F}{\partial p}\delta z\,dy + \frac{\partial F}{\partial q}\delta z\,dx = 0$$

$$\rightarrow \left.\frac{\partial I}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0 = \iint_D \left\{ \left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)\right] \delta z\,dx\,dy \right.$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right) = 0}$$

معادله اویلر- لاگرانژ برای تابع دو متغیره $z(x,y)$

• مثال:

$$I[z(x,y)] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2z f(x,y)\right] dx\,dy$$

$$\rightarrow -2f(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial z}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(2\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + f(x,y) = 0$$ (معادله پواسون)

شرایط اعمال شده روی Functional ضعیف‌تر از شرایط اعمال شده روی معادله دیفرانسیل است

بیان ضعیف مسئله (Weak Formulation)

* اگر مسئله تغییراتی داشته باشیم می‌توانیم معادله دیفرانسیل را بدست آوریم. در حالت عکس ملزوم اعمال شرایط خاص هستیم × [مشتق مرتبه زوج را می‌توانیم]

مساحت سطح جانبی یک رویه $S = \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx\, dy$ → H3L.pdf (Page 166)

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \;,\; \frac{\partial F}{\partial p} = \frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \;,\; \frac{\partial F}{\partial q} = \frac{z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$$

جانشانی در معادله $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right) = 0$$

$$I[z(x,y)] = \iint_D F(x, y, z, \overset{p}{\uparrow}{z_x}, \overset{q}{\uparrow}{z_y}, \overset{r}{\uparrow}{z_{xx}}, \overset{s}{\uparrow}{z_{yy}}, \overset{t}{\uparrow}{z_{xy}})\, dx\, dy$$ ★

$$z(x,y,\alpha) = z(x,y) + \alpha\,\delta z$$

$$Z_{xx} = z_{xx} + \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\delta z)$$

$$\frac{\partial F}{\partial (z_{xx})} \cdot \underbrace{\frac{\partial (z_{xx})}{\partial \alpha}}_{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\delta z)\right]}$$ اعمال عکس را روی δz که می‌خواهیم داریم

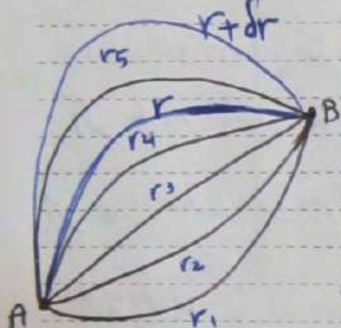
$$\frac{\partial F}{\partial (z_{xx})} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\delta z) = \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\delta z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial r} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\delta z)\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\delta z)$$

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
۲۸	۲۹	۳۰	۳۱			

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left\{ \delta z \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)\right\} - \delta z \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)$$
$$+ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right) = 0$$

این معادلات سبب بدست آوردن معادلات حرکت سیستم می‌شوند در صورتی x, y, z روابط فیزیکی حاکم بر حرکت ذره باشند.
(روابط همیلتون)



★ متحرکی در لحظه t_1 از A و از روی یکی از مسیرها حرکت کرده در لحظه t_2 به نقطه B می‌رسد.

$$\begin{cases} \delta r|_{t_1} = 0 \\ \delta r|_{t_2} = 0 \end{cases}$$

قانون دوم نیوتن در حرکت $f = m\ddot{r} \longrightarrow f - m\ddot{r} = 0$ (اصل دالامبر)

$$\rightarrow (\vec{f} - m\ddot{\vec{r}})\,\delta\vec{r} \doteq 0 \quad \rightarrow \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} (\vec{f} - m\ddot{\vec{r}})\,\delta\vec{r}\,dt = 0}_{\text{شکل خام اصل همیلتون}}$$

$$\star\ \vec{f}\cdot\delta\vec{r} = \delta W \qquad \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \left[f\,\delta r - m\ddot{r}\cdot\delta r \right] dt = 0$$

اگر $\delta r \ll 1$ مسیرهای r در حالت جزئی مماس بر هم خواهند شد.

$$\int \ddot{r}\,\delta r\,dt \qquad \begin{cases} \ddot{r}\,dt = du \\ \delta r = v \end{cases}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \ddot{r}\,\delta r\,dt = \dot{r}\,\delta r\Big|_{t_1}^{t_2} - \underbrace{\int \dot{r}\,\underbrace{\frac{d}{dt}(\delta r)}_{\delta \dot{r}}\,dt}_{\frac{1}{2}\delta(\dot{r}^2)}$$

$$\rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \left[f\,\delta r + m\,\tfrac{1}{2}\left(\delta \dot{r}^2\right) \right] dt = 0$$

$$\rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \left[F\cdot dr + \delta T \right] dt = 0$$

اصل همیلتون

از میان مسیرهای مختلف از A به B آن مسیری دارای کمترین زمان است که این انتگرال به ازای آن مسیر تغییراتش صفر شود.

اگر f ناشی از پتانسیل باشد،

$$f = \nabla \underset{\text{پتانسیل نیرو}}{\phi}$$

اگر در جهات مختلف مشتق زده شود:

مشتق کلی در راستای r → $\nabla \vec{\phi} \cdot \delta \vec{r} = \delta \phi$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V)\,dt = 0 \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \delta(\underbrace{T - V}_{L})\,dt = 0$$

ϕ پتانسیل نیرو
$-\phi$ انرژی پتانسیل

L لاگرانژین (تفاوت انرژی جنبشی و پتانسیل)

(f باید در سیستم پایستار باشد) ← تفاوت با اصل همیلتون

$$\boxed{\delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = 0}$$

* مثال: سیستم جرم و فنر در غیاب اصطکاک،

$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad , \quad V = \frac{1}{2} k x^2$

لاگرانژین → $L = \frac{1}{2}(m\dot{x}^2 - kx^2)$

معادله اویلر-لاگرانژ → $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$

$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$

$$\rightarrow -kx - \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0 \rightarrow kx + m\ddot{x} = 0$$ برای یک سیستم

★ کافی است انرژی های جنبشی و پتانسیل را بتوانیم بدست آوریم.

جلسه چهارم 91/7/11

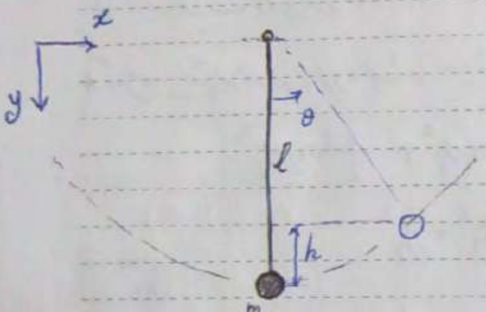
خلاصه روابط جلسه قبل

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt \qquad L = \underset{(KE)}{T} - \underset{(PE)}{V}$$

تابع مختصات + مشتق مختصات نسبت به زمان ← T

تابع مختصات ← V

• سیستم زیر را در نظر بگیریم (نخ بدون جرم - نقطه O لولا شده)



قید دستگاه x, y : $x^2 + y^2 = l^2$

n : درجه آزادی: حداقل تعداد متغیرهای لازم برای توصیف یک سیستم

θ : متغیر مستقل

$\downarrow$

q متغیرهای تعمیم یافته (ممکن است دارای بعد طول یا سرعت باشند)

اگر سیستم به مقدار θ منحرف شود:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad , \quad v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$$

$$\begin{aligned} x &= l\sin\theta \\ y &= l\cos\theta \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x} &= l\cos\theta\cdot\dot{\theta} \\ \dot{y} &= -l\sin\theta\,\dot{\theta} \end{aligned} \longrightarrow v^2 = l^2\dot{\theta}^2$$

$$\rightarrow T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$V = mgl(1 - \cos\theta)$$ مبدأ سنجش: نقطه تعادل استاتیکی ذره

$$\rightarrow L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta)$$

$$\rightarrow \delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt = 0 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = 0$$

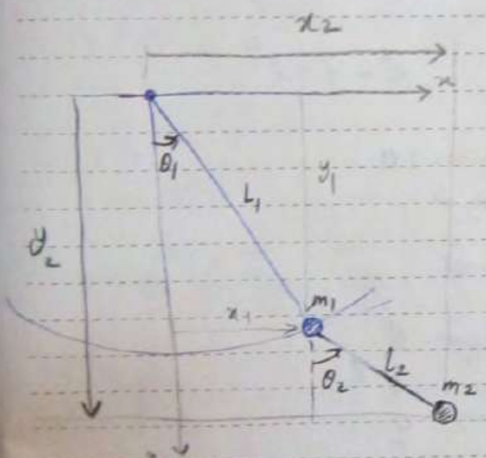
$$\Rightarrow -Lmg\sin\theta - \frac{d}{dt}\left(mL^2\dot\theta\right) = 0 \rightarrow l\ddot\theta + g\sin\theta = 0$$

معادله حرکت سیستم (یک معادله غیرخطی) : $\rightarrow \boxed{\ddot\theta + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$

$\theta \leq 6^\circ \rightarrow \sin\theta \simeq \theta \xrightarrow{\text{خطی شدن معادله دیفرانسیل}} \ddot\theta + \frac{g}{l}\theta = 0$

* اگر به جای نخ میله ای به جرم m' داشتیم ، باز هم تفاوتی نمی کرد و بایستی مقدار T و V مربوط به میله را نیز در معادلات وارد نمود .

* اگر سیستم به صورت زیر باشد :



$$T = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

$$v_1^2 = \dot x_1^2 + \dot y_1^2 \qquad \begin{cases} x_1 = l_1\sin\theta_1 \\ y_1 = l_1\cos\theta_1 \end{cases}$$

$$\rightarrow v_1^2 = l_1^2\dot\theta_1^2$$

$$\rightarrow v_2^2 = \dot x_2^2 + \dot y_2^2 \qquad \begin{cases} x_2 = \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + L_2\sin\theta_2 = L_1\sin\theta_1 + L_2\sin\theta_2 \\ \dot x_2 = L_1\cos\theta_1\dot\theta_1 + L_2\cos\theta_2\dot\theta_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = y_1 + L_2\cos\theta_2 = L_1\cos\theta_1 + L_2\cos\theta_2 \\ \dot y_2 = -L_1\sin\theta_1\dot\theta_1 - L_2\sin\theta_2\dot\theta_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow v_2^2 = L_1^2\dot\theta_1^2 + L_2^2\dot\theta_2^2 + 2L_1L_2\underbrace{\left(\cos\theta_1\dot\theta_1 + \cos\theta_2\dot\theta_2 + \sin\theta_1\dot\theta_1 + \sin\theta_2\dot\theta_2\right)}_{\dot\theta_1(\sin\theta_1+\cos\theta_2)+\dot\theta_2(\sin\theta_2+\cos\theta_1)}$$

غلط $\leftarrow$

$$+ 2L_1L_2\dot\theta_1\dot\theta_2\left[\cos(\theta_1-\theta_2)\right]$$

$V_1 = -m_1 g y_1$

$V_2 = -m_2 g y_2$

$L = T - V = 0$

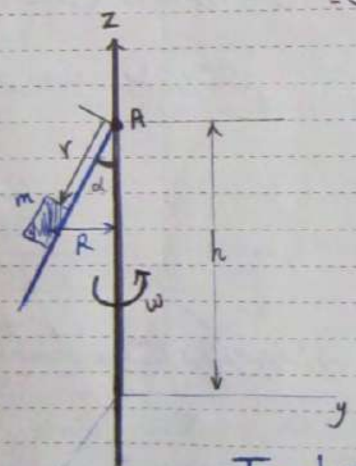
$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \theta_1} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot\theta_1}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \theta_2} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot\theta_2}\right) = 0 \end{cases}$$

مثال: میله‌ای در حالت قائم که میله‌ای تحت زاویه α به آن جوش شده است.

ذره‌ای به جرم m بدون اصطکاک روی بازو ایستاده است

میله قائم تحت سرعت زاویه‌ای ω در حال چرخش است.

معادله حاکم بر حرکت ذره را بدست آورید.



$R = r\sin\alpha$

$x = R\cos\theta = r\sin\alpha \cdot \cos\omega t$

$y = R\sin\theta = r\sin\alpha \cdot \sin\omega t$

$z = h - r\cos\alpha$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2)$$

$\dot x = \dot r \sin\alpha\cos\omega t - r\omega\sin\alpha\sin\omega t$

$\dot y = \dot r\sin\alpha\sin\omega t + r\omega\sin\alpha\cos\omega t$

$\dot z = -\dot r\cos\alpha$

r , ωt نسبت به زمان متغیر، α ثابت.

$$\to T = \frac{1}{2}m\left\{\dot r^2\sin^2\alpha + r^2\omega^2\sin^2\alpha + \dot r^2\cos^2\alpha\right\} = \frac{1}{2}m\left\{\dot r^2 + r^2\omega^2\sin^2\alpha\right\}$$

$V = mgz = mg(h - r\cos\alpha)$ نسبت به صفحه xy

$V_\omega = R\omega$ $\qquad V_r = \dot r$

$\to T = \frac{1}{2}mR^2\omega^2 + \frac{1}{2}m\dot r^2$

۲: تمام متغیر مسئله

$$L = T - V = \frac{1}{2} m\{\dot{r}^2 + r^2 \omega^2 \sin^2\alpha\} - mg(h - r\cos\alpha)$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = 0 \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial r} = mr\omega^2 \sin^2\alpha + mg\cos\alpha \\[2mm] \dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \end{cases}$$

$$\rightarrow mr\omega^2\sin^2\alpha + mg\cos\alpha - m\ddot{r} = 0 \longrightarrow \boxed{\ddot{r} - r\omega^2\sin^2\alpha = g\cos\alpha}$$

$$\rightarrow r(t) = A_1 e^{(\omega\sin\alpha)t} + A_2 e^{-(\omega\sin\alpha)t} - \frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}$$

A_1, A_2 از شرایط اولیه بدست می‌آیند.

در این مسئله α ثابت بود. حال اگر α متغیر باشد.

* در ریاضیات قبل داشتیم

$$f(x,y,z) = 0 \xrightarrow[\text{قید}]{\text{اکسترمم شود}} \phi(x,y,z) = 0$$

قید اضافه می‌کنیم $\longrightarrow$ $h = f + \lambda\phi$

ضریب لاگرانژ

f یک تابع یک به یک و پیوسته در نظر گرفته می‌شود.

* ابتدا از حالت دو بعدی $f(x,y) = 0$

قید $\phi(x,y) = 0$ ، $y = g(x)$

$$\frac{df}{dx} = f_x + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dg}{dx} = 0 \quad ① \qquad dg = dy$$

از روابط زیر

$$\begin{cases} f[x, g(x)] = 0 \\ \phi[x, g(x)] = 0 \end{cases}$$

$$\frac{d\phi}{dx} = \phi_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\cdot\frac{dg}{dx} = 0 \quad ②$$

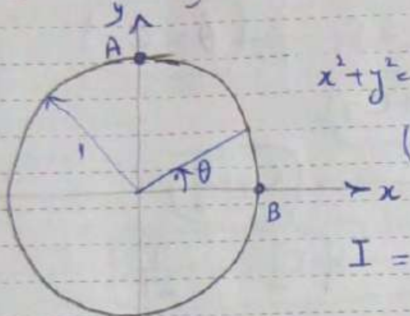
$$② \ \frac{dg}{dx} = -\frac{\phi_x}{\phi_y} \xrightarrow{\text{در ① می‌گذاریم}} f_x + f_y\left(-\frac{\phi_x}{\phi_y}\right) = 0$$

$$\rightarrow f_x + \left(-\frac{f_y}{\phi_y}\right)\phi_x = 0$$

$$\underbrace{-\frac{f_y}{\phi_y}}_{\lambda} \longrightarrow f_x + \lambda\phi_x = 0 = h_x$$

(تابعی از x یا تابعی از y و خود همین ثابت) λ

• مثال: ذره‌ای به جرم m روی دایرهٔ واحد از نقطهٔ $A(0,1)$ تا نقطهٔ $B(1,0)$ در مدت زمان T طوری حرکت می‌کند که انتگرال انرژی جنبشی آن کمینه است. معادلات حرکت را تعیین کنید.



ذره مقید به حرکت روی دایره است: قید مسئله $x^2+y^2=1$

$$(KE)\,T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$$

$$I=\int_0^T \underbrace{\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}_{F(x,y,\dot{y},\dot{x},t)}\,dt$$

$$I^*=\int_0^T \underbrace{\left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\lambda(x^2+y^2-1)\right]}_{F^*}dt$$

معادلهٔ اویلر لاگرانژ برای F^* جدید

$$\frac{\partial F^*}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}}\right)=0 \qquad 2\lambda x-\frac{d}{dt}(m\dot{x})=0$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial y}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{y}}\right)=0 \longrightarrow 2\lambda y-\frac{d}{dt}(m\dot{y})=0$$

$$\begin{cases} 2\frac{\lambda}{m}x-\ddot{x}=0 \\ 2\frac{\lambda}{m}y-\ddot{y}=0 \end{cases} \longrightarrow \frac{\ddot{x}}{x}=\frac{\ddot{y}}{y}=2\frac{\lambda}{m}$$

$x=R\cos\theta \longrightarrow \dot{x}=-R\sin\theta\,\dot{\theta}$

$y=R\sin\theta \longrightarrow \dot{y}=R\cos\theta\,\dot{\theta}$

$$\frac{\ddot{x}}{x}=\frac{\ddot{y}}{y}\longrightarrow \ddot{x}y-x\ddot{y}=0 \qquad =\frac{d}{dt}(\dot{x}y-x\dot{y})=0$$

$\ddot{x}y \rightarrow \frac{d}{dt}(\dot{x}y)-\dot{x}\dot{y}$

$x\ddot{y} \rightarrow \frac{d}{dt}(x\dot{y})-\dot{x}\dot{y}$

$\rightarrow \dot{x}y - x\dot{y} = C_1 \rightarrow (-R\sin\theta\,\dot{\theta})(R\sin\theta) - (R\cos\theta)(+R\cos\theta\,\dot{\theta}) = C_1$

$$= -R^2\sin^2\theta\,\dot{\theta} - R^2\cos^2\theta\,\dot{\theta} = C_1$$

$$\rightarrow R^2(-1)\dot{\theta} = C_1 \longrightarrow \boxed{\dot{\theta} = C_2}$$

$$\rightarrow \boxed{\theta = C_2 t + C_3}$$

$A(0,1) \rightarrow \frac{\pi}{2} = 0 + C_3 \longrightarrow \boxed{C_3 = \frac{\pi}{2}}$

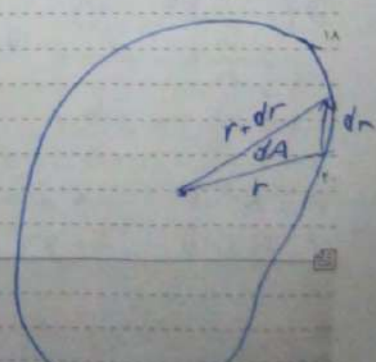
$T \rightarrow B(1,0) \rightarrow 0 = C_2 T + \frac{\pi}{2} \longrightarrow \boxed{C_2 = -\frac{\pi}{2T}}$

$$\longrightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{t}{T}\right)} \qquad \rightarrow x, y \text{ را}$$

معادله * برای بدست آورد

* منحنی بسته ساده به طول L که می‌توانیم شکل‌های مختلفی ایجاد کنیم - به ازای چه منحنی (با طول ثابت L) معادله‌ای را بدست آوریم که مساحت محصور شده توسط آن حداکثر باشد.

قید: $L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx$



$d\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{r} \times d\vec{r}$

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$d\vec{r} = \vec{i}\,dx + \vec{j}\,dy$

$\rightarrow d\vec{A} = \frac{1}{2}(x\vec{i} + y\vec{j}) \times (\vec{i}\,dx + \vec{j}\,dy)$

$= \frac{1}{2}(x\,dy\,\vec{k} - y\,dx\,\vec{k})$

$= \frac{1}{2}(x\dot{y} - y)\,dx\,\vec{k}$

$$\longrightarrow A = \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} (xy' - y)\, dx \qquad L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\, dx$$

$$\rightarrow I^* = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{1}{2}(xy'-y) + \lambda\sqrt{1+y'^2} \right] dx = 0$$

□ جلسه پنجم - 91/7/16

معادله اویلر لاگرانژ برای I^*

$$\longrightarrow \frac{\partial F^*}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F^*}{\partial y'}\right) = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2} + \frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = -1 \longrightarrow \frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}} = c_1 - x \rightarrow \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y'} = \frac{\lambda}{c_1 - x}$$

$$\rightarrow \frac{1+y'^2}{y'^2} = \left(\frac{\lambda}{c_1-x}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{y'^2} = \left(\frac{\lambda}{c_1-x}\right)^2 - 1 \rightarrow y'^2 = \frac{1}{\left(\frac{\lambda}{c_1-x}\right)^2 - 1}$$

$$\rightarrow y'^2 = \frac{(c_1-x)^2}{\lambda^2 - (c_1-x)^2} \rightarrow y' = \frac{(c_1-x)}{\sqrt{\lambda^2 - (c_1-x)^2}} = \frac{dy}{dx}$$

$$\rightarrow (y+c_2)^2 = \lambda^2 - (c_1-x)^2 \longrightarrow \boxed{(x-c_1)^2 + (y+c_2)^2 = \lambda^2}$$

معادله یک دایره

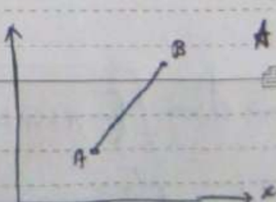
رابطه λ با محیط:

$L = 2\pi\lambda$

محیط دایره

$$\rightarrow \boxed{\lambda = \frac{L}{2\pi}}$$

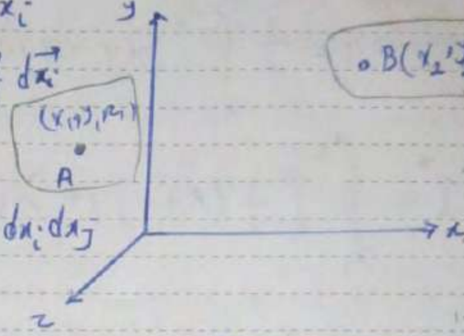
(ژئودزی را در حالت سه بعدی حل می‌کنیم!)



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \rightarrow \vec{r} = \vec{e}_i x_i$$

$$d\vec{r} = \vec{i}\,dx + \vec{j}\,dy + \vec{k}\,dz \qquad d\vec{r} = \vec{e}_i\, dx_i$$

$B(x_2, y_2, z_2)$



$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r}$$

$$= (\vec{e}_i\, dx_i) \cdot (\vec{e}_j\, dx_j) = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j\, dx_i\, dx_j$$

$$= \delta_{ij}\, dx_i\, dx_j = dx_i\, dx_i$$

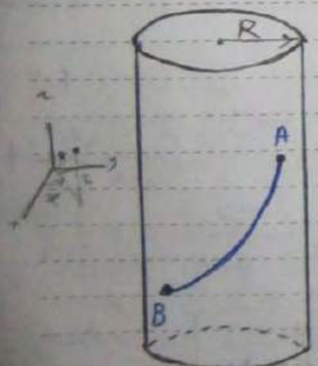
$$= \sum_{k=1}^{3} (dx_k)^2 \quad \rightarrow ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

ممکن است x, y و z تابعی از پارامتری مانند t باشند:

$$\rightarrow ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$$

فرض کنید دو نقطه روی استوانه‌ای به شعاع R داریم،

کوتاه‌ترین فاصله روی استوانه بین نقاط A و B؟



استفاده از ارتباط بین دستگاه استوانه‌ای و مختصات:

مختصات استوانه‌ای
$$\begin{cases} x = R\cos\phi & \rightarrow dx = \cos\phi\, dR - R\sin\phi\, d\phi \\ y = R\sin\phi & \rightarrow dy = \sin\phi\, dR + R\cos\phi\, d\phi \\ z = z & \rightarrow dz = dz \end{cases}$$

R ثابت
$$\rightarrow dx = -R\sin\phi\, d\phi \quad \rightarrow \dot{x} = -R\sin\phi\, \dot{\phi}$$
$$dy = R\cos\phi\, d\phi \quad \rightarrow \dot{y} = R\cos\phi\, \dot{\phi}$$
$$dz = dz \quad \rightarrow \dot{z} = \dot{z}$$

$$\rightarrow ds = \sqrt{[-R\sin\phi\, \dot{\phi}]^2 + (R\cos\phi\, \dot{\phi})^2 + \dot{z}^2}\, dt = \sqrt{R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2}\, dt$$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2}\, dt \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{z}}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \phi} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{\phi}}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \dot z} = c_1 & \longrightarrow \dfrac{\dot z}{\sqrt{R^2\dot\phi^2+\dot z^2}} = c_1 \longrightarrow \dfrac{\dot z}{c_1} = \sqrt{} \\ \dfrac{\partial F}{\partial \dot\phi} = c_2 & \longrightarrow \dfrac{R^2\dot\phi}{\sqrt{R^2\dot\phi^2+\dot z^2}} = c_2 \longrightarrow \dfrac{R^2\dot\phi}{c_2} = \sqrt{} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \frac{\dot z}{c_1} = \frac{R^2\dot\phi}{c_2} \longrightarrow \frac{\dot z}{\dot\phi} = \frac{R^2 c_1}{c_2} = c_3 \longrightarrow \boxed{z = c_3\phi + c_4}$$

$^*F$

$$ds = \sqrt{\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2}\,dt$$

■ صفحه ای را در فضا در نظر می گیریم:

فرض کنید این صفحه با کره ای به شعاع a (R) قطع شده است

صفحه و کره به چه صورت همدیگر را قطع کنند تا کمان حاصل شده دارای بیشترین طول باشد؟

بایستی صفحه از مرکز کره بگذرد.

معادله قید در حالت کلی $G(x,y,z)=0$

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\left[\sqrt{\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2} + \lambda G\right]}_{F^*} dt$$

برای حالت کلی

$$\frac{\partial F^*}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot x}\right) = 0 \longrightarrow \lambda G_x - \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot x}{F_*}\right) = 0 \longrightarrow \lambda = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot x}{F}\right)}{G_x}$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot y}\right) = 0 \longrightarrow \lambda G_y - \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot y}{F}\right) = 0 \longrightarrow \lambda = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot y}{F}\right)}{G_y}$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial z} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot z}\right) = 0 \longrightarrow \lambda G_z - \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot z}{F}\right) = 0 \longrightarrow \lambda = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot z}{F}\right)}{G_z}$$

حال برای این شکل

$$G:\ x^2+y^2+z^2-R^2=0 \longrightarrow \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot x}{F}\right)}{2x} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot y}{F}\right)}{2y} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot x}{F}\right)}{2z} = \lambda$$

$$\longrightarrow \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{F}\right)}{x} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{F}\right)}{y} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{z}}{F}\right)}{z} = 2\lambda$$

$$\rightarrow \underset{(\mathrm{I})}{\frac{\ddot{x}F - \dot{x}\dot{F}}{xF^2}} = \underset{(\mathrm{II})}{\frac{\ddot{y}F - \dot{y}\dot{F}}{yF^2}} = \frac{\ddot{z}F - \dot{z}\dot{F}}{zF^2} = 2\lambda$$

$$\xrightarrow{\mathrm{I},\mathrm{II}} \frac{\ddot{x}F - \dot{x}\dot{F}}{xF^2} = \frac{\ddot{y}F - \dot{y}\dot{F}}{yF^2} \longrightarrow y(\ddot{x}F - \dot{x}\dot{F}) = x(\ddot{y}F - \dot{y}\dot{F})$$

$$\longrightarrow F(y\ddot{x} - x\ddot{y}) = \dot{F}(y\dot{x} - x\dot{y}) \rightarrow \frac{\dot{F}}{F} = \frac{y\ddot{x} - x\ddot{y}}{y\dot{x} - x\dot{y}} \quad (1)$$

$$\mathrm{I},\mathrm{III} \rightarrow z(\ddot{y}F - \dot{y}\dot{F}) = y(\ddot{z}F - \dot{z}\dot{F})$$

$$\rightarrow F(z\ddot{y} - y\ddot{z}) = \dot{F}(z\dot{y} - y\dot{z}) \longrightarrow \frac{\dot{F}}{F} = \frac{z\ddot{y} - y\ddot{z}}{z\dot{y} - y\dot{z}} \quad (2)$$

$$(1),(2) \longrightarrow \frac{y\ddot{x} - x\ddot{y}}{y\dot{x} - x\dot{y}} = \frac{z\ddot{y} - y\ddot{z}}{z\dot{y} - y\dot{z}}$$

$$d(y\dot{x} - x\dot{y}) = y\ddot{x} - x\ddot{y}$$

$$d(z\dot{y} - y\dot{z}) = z\ddot{y} - y\ddot{z}$$

$$\rightarrow \frac{d(y\dot{x} - x\dot{y})}{y\dot{x} - x\dot{y}} = \frac{d(z\dot{y} - y\dot{z})}{z\dot{y} - y\dot{z}} \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} y\dot{x} - x\dot{y} = c_1(z\dot{y} - y\dot{z})$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب کردن}} y(\dot{x} + c_1\dot{z}) = \dot{y}(x + c_1 z) \rightarrow \frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{x} + c_1\dot{z}}{x + c_1 z}$$

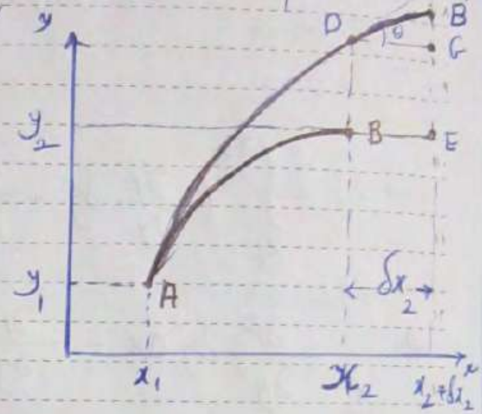
$$\xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} y = c_2(x + c_1 z) \longrightarrow \boxed{y = c_2 x + c_3 z}$$

معادله صفحه ای که از مبدأ مختصات
می گذرد و [illegible]
دایره عظیمه بدست می آید

• بررسی Functional هایی که در آنها نقاط ابتدایی (یکی - یا هر دو) تغییر (متحرک) باشند.

اینجا فرض می‌کنیم نقطه سمت چپ $\overline{A}$ ثابت و نقطه سمت راست $\overline{B}$ متحرک باشد.

اگر نقطه B به اندازه δx_2 تغییر مکان داشته باشد



از نقطه A منحنی های بسیاری می‌توانیم بگذرانیم که انتهای آزاد داشته باشند (قلم منحنی ← اصطلاحاً)

$B(x_2, y_2)$

$D\left(x_2, y_2 + \delta y\big|^{x_2}\right)$

$E\left(x_2 + \delta x_2, y_2\right)$

$B'\left(x_2 + \delta x_2, y_2 + \delta y_2\right)$

$y_2 \longrightarrow y$

قبلاً داشتیم

$$I_1 = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx \longrightarrow I_2 = \int_{x_1}^{x_2+\delta x_2} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')\,dx$$

$$\to \delta I = \int_{x_1}^{x_2+\delta x_2} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')\,dx - \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')\,dx + \int_{x_2}^{x_2+\delta x_2} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')\,dx - \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx$$

$$\Rightarrow \delta I = \int_{x_1}^{x_2} \Big[\underbrace{F(x, y+\delta y, y'+\delta y')}_{\cancel{F} + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'} - \cancel{F(x, y, y')}\Big]dx + \int_{x_2}^{x_2+\delta x_2} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')\,dx$$

$$\rightarrow \delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' \right) dx + \underbrace{\int_{x_2}^{x_2+\delta x_2} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')\, dx}$$

با استفاده از قضیه مقدار میانگین ⇐ $F(x,y,y')\Big|_{x_2} \int_{x_2}^{x_2+\delta x_2} dx$ ← مقدار روی خط که در حالت حدی خط به صفر میل می‌کند مساحت سطح

$$\rightarrow \delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' \right) dx + F(x,y,y')\Big|_{x_2} \delta x_2$$

* نقل مشتق از روی $\delta y'$ که برداشته شود پس داریم:

$$* \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' dx = \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \delta y \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) dx$$

$$\rightarrow \delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \right] \delta y\, dx + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y \Big|_{x_1}^{x_2} + F(x,y,y')\Big|_{x_2} \times \delta x_2$$

$$\rightarrow \delta I = F(x,y,y')\Big|^{x_2} \delta x_2 + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y \Big|^{x_2} - \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y \Big|_{x_1}$$

← همه منحنی‌ها در x_1 به هم می‌رسند

$$* \delta y\Big|^{x_2} = BD = EG \qquad * \delta y\Big|^{x_2+\delta x_2} = EB'$$

← با توجه به شکل

$$= EB' - GB'$$

$$tg\theta = \frac{GB'}{\delta x_2}, \quad GB' = y'(x_2)\cdot \delta x_2$$

← در حالت حدی

$$\rightarrow \delta y\Big|^{x_2} = \delta y\Big|^{x_2+\delta x_2} - y'(x_2)\,\delta x_2$$

حاب ش کی در رابطه δI

$$\delta I = F(x,y,y')\Big|^{x_2}\delta x_2 + \frac{\partial F}{\partial y'}\left\{\delta y\Big|^{x_2+\delta x_2} - y'\delta x_2\right\}$$

$$= \left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|^{x_2}\right)\delta x_2 + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|^{x_2+\delta x_2} = 0$$

ضرایب δx و δy بایستی صفر باشند:

$$\left.\begin{aligned} &\rightarrow \left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\Big|^{x_2} = 0 \qquad (\delta x \neq 0) \\ &\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|^{x_2} = 0 \qquad (\delta y \neq 0) \end{aligned}\right\} B$$

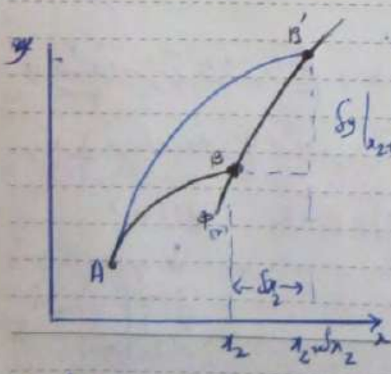
در حالت کلی حرکت نقطه

اگر نقاط روی سمتی قائم حرکت کنند $\delta x = 0$ ← $\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|^{x_2} = 0\right)$ ↔ شرط مرزی طبیعی

اگر انتهای سمتی خارجی خط افقی حرکت کنند $\delta y = 0$ ← $\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|^{x_2} = 0\right)$

شرط ثابت بودن - ... حالت خاص

اگر نقطه ابتدایی و انتهایی روی منحنی های Φ حرکت کنند



$$\delta y\Big|_{x_2+\delta x_2} = \Phi(x_2+\delta x_2) - \Phi(x_2)$$

$$= \Phi'(x_2)\,\delta x_2 \quad \text{بسط تیلور}$$

$$\delta I \rightarrow 0 = \left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\Big|^{x_2}\delta x_2 + \frac{\partial F}{\partial y'}\left(\Phi'(x_2)\,\delta x_2\right)$$

تنها حالت ممکن

$$\boxed{\left[F + (\Phi' - y')F_{y'}\right]\delta x_2 = 0} \quad \text{شرط تقاطع}$$

$\updownarrow \begin{matrix}\delta x = 0 \\ \delta y \neq 0\end{matrix}$ $\quad \longleftrightarrow \begin{matrix}\delta y = 0 \\ \delta x \neq 0\end{matrix}$

جلسه ششم - 91/7/18

$x_2 : F + (\Phi' - y')F_{y'} = 0$ اشرط تقاطع ۱

$x_1 : F + (\Psi' - y')F_{y'} = 0$

اگر ابتدا و انتها روی Ψ حرکت کند

مثال:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\sqrt{1+y'^2}\,dx \qquad f(x,y) \neq 0$$

اعمال شرایط $\longrightarrow x_2 :\ f\sqrt{1+y'^2} + (\Phi' - y') f \dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0 \quad (1)$

$x_1 :\ f\sqrt{1+y'^2} + (\Psi' - y') f \dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0 \quad (2)$

$$(1) \longrightarrow \frac{f(1+y'^2) + y' f(\Phi' - y')}{\sqrt{1+y'^2}} = 0 \ ,\ f \neq 0 \rightarrow \frac{1+y'^2 + y'(\Phi' - y')}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$$

$$\longrightarrow 1 + \Phi' y' = 0 \longrightarrow \boxed{\Phi' y' = -1}$$

y' شیب خط اکسترمم و
Φ' ... ... Φ $\Big\}$ $\longrightarrow$ حاصل ضرب $= -1 \longrightarrow$ دو شیب بر هم عمودند

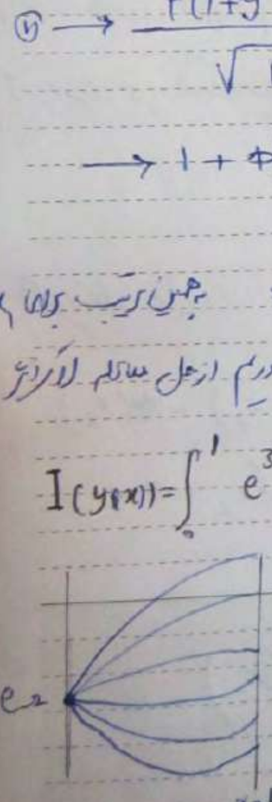
به همین ترتیب برای x_1 : $\boxed{\Psi' y' = -1}$

اگر مسئله تغییراتی داشته باشیم و Φ و Ψ را داشته باشند و با بخواهیم معادله را بدست بیاوریم از حل معادله لاگرانژ روابط مربوطه Φ و Ψ مشخص می‌شوند.

$$I(y(x)) = \int_0^1 e^{3x}(y'^2 - 2y^2)\,dx \qquad y(0) = e - 2 \qquad y(1) = ?$$

$$\downarrow$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=1} = 0$$



اولر-لاگرانژ $\dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$

$$-4ye^{3x} - \frac{d}{dx}(2y'e^{3x}) = 0$$

نقطه سمت راست روی خط قائم حرکت می‌کند. پس داریم
$\longrightarrow \left.\partial F / \partial y'\right|_{x=1} \longrightarrow 0$

$$\rightarrow (-4y-2y''-6y')e^{3x}=0 \longrightarrow y''+3y'+2y=0$$

$$\longrightarrow y(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$$

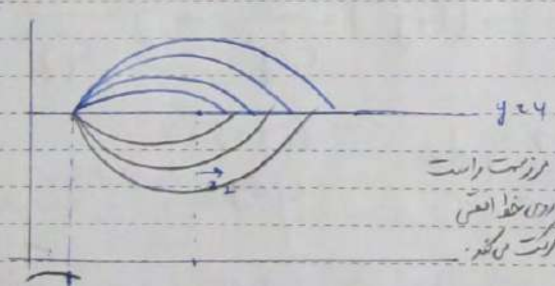
$$y(0)=e-2 \longrightarrow e-2=c_1+c_2 \quad (\mathrm{I})$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=1}=0 \longrightarrow 2y'e^{3}=0 \longrightarrow y'(1)=0$$

$$y'(x)=-c_1e^{-x}-2c_2e^{-2x} \qquad y'(1)=0 \rightarrow -c_1e^{-1}-2c_2e^{-2}=0 \quad (\mathrm{II})$$

$$(\mathrm{I}),\mathrm{II} \longrightarrow \begin{cases} c_1=-2 \\ c_2=e \end{cases}$$

$$I(y(x))=\int_1^{x_2}\left(2y+\frac{y'^2}{2}\right)dx \qquad \begin{cases} y(1)=4 \\ y(x_2)=4 \quad , x_2>4 \end{cases}$$



اویلر لاگرانژ : $2-\frac{d}{dx}(y')=0$

مرز سمت راست روی خط افقی حرکت می‌کند.

$$\longrightarrow y''=2$$

$$y'=2x+c_1$$

$$y=x^2+c_1x+c_2$$

$$y(1)=4 \rightarrow 4=1+c_1+c_2 \rightarrow \underline{c_1+c_2=3} \quad (\mathrm{I}) \qquad (x>4)$$

$$\left.(F-y'F_{y'})\right|_{x=x_2}=0 \rightarrow 2y+\frac{y'^2}{2}-y'^2=0 \rightarrow 2y-\frac{1}{2}y'^2=0 \rightarrow 4y-y'^2=0$$

$(x_2>4)$

$$\xrightarrow{\text{جای گذاری } y} 4(x_2^2+c_1x_2+c_2)-(2x_2+c_1)^2=0 \quad (\mathrm{II})$$

$$y(x_2)=4 \longrightarrow 4=x_2^2+c_1x_2+c_2 \quad (\mathrm{III})$$

$$\rightarrow y=x^2-6x+9 \Rightarrow \boxed{y=(x-3)^2}$$

$$\begin{cases} x_2=5 \\ c_1=-6 \\ c_2=9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=1 \\ c_1=2 \\ c_2=1 \end{cases}$$

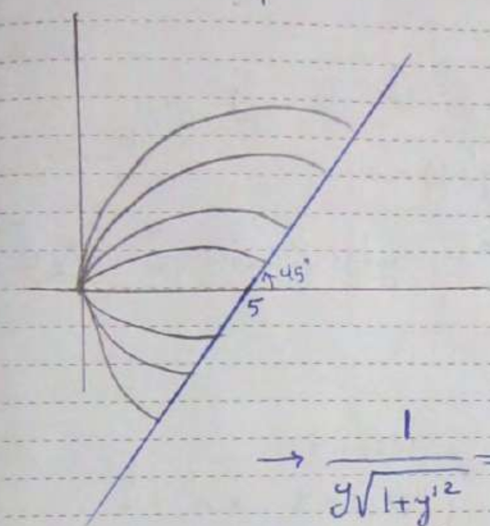
غ ق ق

$x_2>4$

مسائلی به فرم $\int F(x,y)\sqrt{1+y'^2}\,dx$ ← $y + \frac{1}{y}y' = 0$

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\,dx \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = \quad \rightarrow \Phi(x) = x-5$$

$$y(0) = 0$$



$$-y'F_{y'} + F = c_1$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} - y' \times \frac{y'}{y\sqrt{1+y'^2}} = c_1$$

$$\frac{1+y'^2 - y'^2}{y\sqrt{1+y'^2}} = c_1$$

$$\rightarrow \frac{1}{y\sqrt{1+y'^2}} = c_1 \rightarrow y\sqrt{1+y'^2} = \frac{1}{c_1}$$

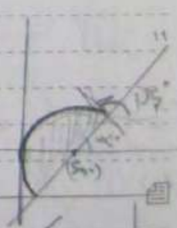
$$\rightarrow y^2(1+y'^2) = \frac{1}{c_1^2} \rightarrow (1+y'^2) = \frac{1}{c_1^2y^2} \rightarrow y'^2 = \frac{1}{c_1^2y^2} - 1$$

$$\rightarrow y' = \sqrt{\frac{1-c_1^2y^2}{c_1^2y^2}} \qquad \frac{c_1 y\,dy}{\sqrt{1-c_1^2y^2}} = dx \qquad \begin{cases} c_1 y = \sin\theta \\ c_1 dy = \cos\theta\, d\theta \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{\cos\theta\, d\theta \cdot \frac{1}{c_1}\sin\theta}{\cos\theta} = dx \rightarrow -\frac{1}{c_1}\cos\theta = x + c_2$$

$$\rightarrow \cos\theta = c_3 - c_1 x \rightarrow c_1^2y^2 + (c_3 - c_1x)^2 = 1$$

$$y(0) = 0 \rightarrow 0 + c_3^2 = 1 \rightarrow \underline{c_3 = \pm 1}$$



$$c_1^2y^2 + (\pm 1 - c_1 x)^2 = 1 \longrightarrow$$ مرکز دایره روی محور xها قرار خواهد گرفت

⟵ مرکز دایره خواهد بود (5,0)

$$\Phi' y' = -1 \qquad \Phi' = 1 \rightarrow y' = -1$$

شرط تعامد

با توجه به شرط تعامد در نقطه برخورد تبع دایره‌ای که بتواند این شرط را برآورد، همه دایره‌ای است که مرکزش (5,0) باشد

تحلیل کمترین طول منحنی که یک نقطه اش (۰،۰) باشد

در منحنی (خط) $\Phi = 15-5x$ عمود باشد.

$$I[y(x)] = \int_0^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\, dx \qquad y(0)=0$$

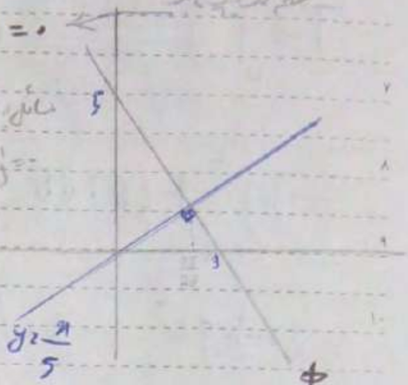
$$\Phi(x) = 15-5x$$

$$\rightarrow y = c_1 x + c_2 \xrightarrow{(0,0)} y = c_1 x$$

$$\Phi' y' = -1 \rightarrow -5c_1 = -1 \rightarrow c_1 = \frac{1}{5}$$

$$\rightarrow \boxed{y = \frac{x}{5}}$$

$$\frac{x}{5} = 15-5x \rightarrow \frac{26}{5}x = 15 \rightarrow \boxed{x = \frac{75}{26}} \rightarrow x_2 = \frac{75}{26}$$

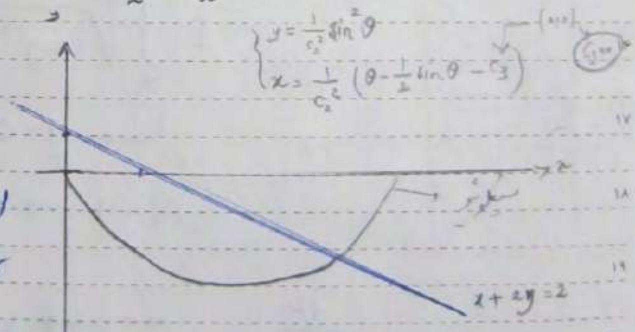


ذره‌ای از حالت سکون و از مبدأ مختصات روی منحنی حداقل زمان شروع به حرکت کرده و تا خط $x+2y=2$ طی مسیر می‌کند. معادله منحنی حرکت و زمان حرکت را تعیین کنید. سپس مدت زمان حرکت را با زمان سقوط آزاد ذره مقایسه کنید.

$$y = k^2 \sin^2\theta \qquad \text{شروع از مبدأ}$$

$$x = k^2\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)$$

از شرط تقاطع در حل تلاقی می‌توانیم شیب مماس بر منحنی حداقل زمان را تعیین کنیم



$$\Phi' y' = -1 \rightarrow \Phi' = -\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}y' = -1 \rightarrow y' = 2$$

از فرض $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \Big/ \frac{dx}{d\theta}$ → زاویه‌ی برخورد دو منحنی بدست می‌آید → $\theta = 26.56^\circ$ rad

(استفاده در فرض داده‌ای که هنوز منحنی مشخص نیست)

$\{x(\theta), y(\theta)\} \rightarrow k^2$

$x(\theta)+2y(\theta)=2$

$$\begin{cases} x(\theta) \\ y(\theta) \end{cases} \xrightarrow{\Phi} x(\theta) + 2y(\theta) = 2 \rightarrow k^2 =$$

$$T=\int_0^{x_2}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx$$

$y(\theta)$, $x(\theta) \rightarrow T(\theta$ برحسب $)$

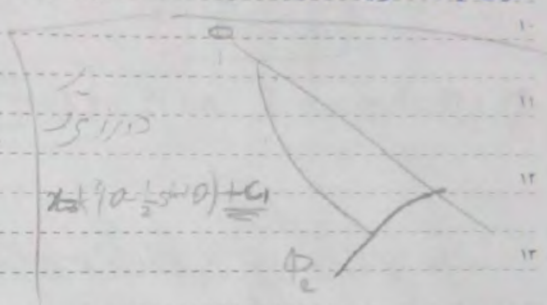
$$T=\int_{t_1}^{t_2}F(\theta)\,d\theta=\frac{2K}{\sqrt{g}}(\overset{\overset{2.68}{\downarrow}}{\theta_2}-\overset{\overset{(0)}{\downarrow}}{\theta_1})$$

مدت زمان حرکت از نقطه ① تا ②

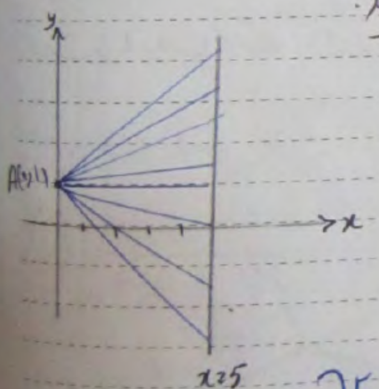
مدت زمان سقوط آزاد :

$$y=\frac{1}{2}gt^2 \rightarrow t=\sqrt{\frac{2y}{g}}$$

$$\begin{cases} T=0.4378\ s \\ t=0.4515\ s \end{cases} \rightarrow t>T$$



مثال : کوتاه‌ترین مسیری که نقطه A را به خط $x=5$ وصل کند بدست آورید.



$$I=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

(همانند مثال مربوط ۱)

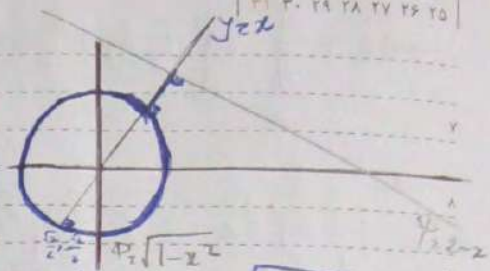
$$\hookrightarrow y=c_1x+c_2$$

$$A(0,1)\rightarrow c_2=1\rightarrow y=c_1x+1$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=5}=0\rightarrow\left.\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right|_{x=5}=0\rightarrow y'=0\rightarrow \boxed{c_1=0}$$

$$\rightarrow \boxed{y=1}$$

معادله منحنی را بدست آورید که منحنی های φ و ψ را به هم وصل کند و دارای کمترین طول باشد.



$$I = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\, dx$$

$$y = C_1 x + C_2 \qquad \begin{cases} \varphi' y' = -1 & \rightarrow \text{و باید از مرکز دایره بگذرد} \rightarrow \boxed{C_2 = 0} \\ \psi' y' = -1 & \psi' = -1 \rightarrow y' = 1 \rightarrow \boxed{C_1 = 1} \end{cases}$$

$$\varphi \qquad \psi \qquad \rightarrow \boxed{y = x}$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt2}{2} \\ \frac{\sqrt2}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases}$$

y را با φ و ψ تلاقی می‌دهیم و نقاط برخورد را بدست می‌آوریم

جلسه هفتم 91/7/23

$$I\left[y(x), z(x)\right] = \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,z,y',z')\, dx$$

$F(x,y,z,y',z')$ با مرزهای متحرک

حل هر کدام دو ثابت انتگرال‌گیری لازم دارد

در حالت مرز ثابت x_1 و x_2 داده می‌شود

قبلا گفتیم
$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(x_1) \\ z(x_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} y(x_2) \\ z(x_2) \end{cases}$$

ابتدا فرض می‌کنیم مرز سمت چپ متحرک باشد:

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2+\delta x_2} F(x, y+\delta y, z+\delta z, y'+\delta y', z'+\delta z')\, dx - \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,z,y',z')\, dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ F(x, y+\delta y, z+\delta z, y'+\delta y', z'+\delta z') - F(x,y,z,y',z') \right\} dx + \int_{x_2}^{x_2+\delta x_2} F(x, y+\delta y, z+\delta z, y'+\delta y', z \ldots$$

اگر F پیوسته باشد: $\delta x \rightarrow 0 \quad \begin{cases} \delta y \\ \delta z \\ \delta y' \\ \delta z' \end{cases} \Longrightarrow 0$

$$F(x,y,z,y',z')\Big|_{x_2} \delta x_2$$

حل اول الف شکل ب

$$\rightarrow \delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left[F_y \delta y + F_z \delta z + F_{y'} \delta y' + F_{z'} \delta z' \right] dx + F(x,y,z,y',z')\Big|_{x_2} \delta x_2$$

حال بایستی علامت مشتق را از روی $\delta y'$ و $\delta z'$ برداریم

$$* \int_{x_1}^{x_2} F_{y'} \delta y' \, dx = F_{y'} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \delta y \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) dx$$

$$* \int_{x_1}^{x_2} F_{z'} \delta z' \, dx = F_{z'} \delta z \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \delta z \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) dx$$

جای گذاری

$$\rightarrow \delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left[\overbrace{\left\{ F_y - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \right\}}^{\text{اویلر لاگرانژ} \; = 0} \delta y + \overbrace{\left\{ F_z - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) \right\}}^{\text{اویلر لاگرانژ} \; = 0} \delta z \right] dx$$

$$+ F_{y'} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} + F_{z'} \delta z \Big|_{x_1}^{x_2} + F(x,y,z,y',z')\Big|_{x_2} \delta x_2$$

$$\begin{cases} \delta y \big|^{x_2} = \delta y_2 - y'(x_2)\, \delta x_2 \\ \delta z \big|_{x_2} = \delta z_2 - z'(x_2)\, \delta x_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \delta I = F\Big|^{x_2} \delta x_2 + F_{y'} \left\{ \delta y_2 - y'(x_2)\, \delta x_2 \right\} + F_{z'} \left\{ \delta z_2 - z'(x_2)\, \delta x_2 \right\} = 0$$

$$= \left(F - y' F_{y'} - z' F_{z'}\right)\Big|^{x_2} \delta x_2 + F_{y'} \delta y_2 + F_{z'} \delta z_2 = 0$$

$$\left.\begin{matrix} \delta x_2 \\ \delta y_2 \\ \delta z_2 \end{matrix}\right\}$$ کمیت های مستقل از هم مخالف صفر هستند پس بایستی داشته باشیم

$$\left(F - y'F_{y'} - z'F_{z'}\right)\Big|^{x_2} = 0$$

$$\begin{cases} F_{y'} = 0 \\ F_{z'} = 0 \end{cases}$$ شرط‌های مرز طبیعی

حالتی را در نظر بگیریم که x_2 روی $\begin{cases} y = \phi(x) \\ z = \psi(x) \end{cases}$ حرکت کند

$$\to \left[\underbrace{F + (\phi' - y')F_{y'} + (\psi' - z')F_{z'}}_{=0}\right]\delta x = 0$$

شرط تقاطع

حالت دوم $x_2 \to z = \phi(x, y)$

$$\delta z = \frac{\partial \phi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \phi}{\partial y}\delta y$$

پس از جانشانی $\to \left(F - y'F_{y'} - z'F_{z'}\right)\Big|_{x_2}\delta x_2 + F_{y'}\delta y_2 + F_{z'}\left\{\phi_x \delta x + \phi_y \delta y\right\} = 0$

$$\to \left[\underbrace{F + (\phi_x - z')F_{z'} - y'F_{y'}}_{=0}\right]\delta x + \underbrace{\left(F_{y'} + \phi_y F_{z'}\right)}_{=0}\delta y = 0$$

اگر $\begin{cases} F_{y'} = 0 \\ F_{z'} = 0 \end{cases}$

$$I=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\,dx \quad \begin{cases} y(x_1)=A \\ y(x_2)=B \end{cases} \longrightarrow \frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$$

معادله دیفرانسیل مرتبه دو $\longrightarrow$ C_2, C_1

اگر معادله دیفرانسیل داده شود می‌توان شکل تغییراتی آن را بدست آورد؟ (مسئله برعکس شود)

① Sturm – Liouville

در اینجا گونه خاصی از معادلات را بررسی می‌کنیم:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[P(x)y'\right]+\left[q(x)+\lambda r(x)\right]y=0}$$ (معادله اشتورم – لیوویل)

P, q, r توابع حقیقی هستند، در این بازه $P\neq 0$ و همچنین P و r کمیت‌های مثبت هستند

$a\leqslant x\leqslant b$

$r(x)$ تابع وزنی، λ حقیقی.

معادله کمی شبیه معادله اویلر – لاگرانژ می‌باشد.

طرفین معادله را در y ضرب کرده و از طرفین در بازه a تا b انتگرال‌گیری می‌کنیم:

$$\int_a^b y\left\{\frac{d}{dx}(Py')+(q+\lambda r)y\right\}dx=0$$

$$\rightarrow \lambda\int_a^b ry^2\,dx=-\int_a^b\left[qy^2-y\frac{d}{dx}(Py')\right]dx \quad ②$$

معادله دیفرانسیل
① خطی و همگن $\leftarrow$ اگر y جوابی از معادله① باشد حاصلضرب C در y هم جواب معادله است

می‌خواهیم C را طوری تعیین کنیم که $\int_a^b ry^2\,dx=1$ (نرمالیزه کردن)

$$\int_a^b ry^2\,dx=1 \quad ③$$

$$\lambda=\frac{-\int_a^b\left[qy^2-\dots\right]}{\int_a^b ry^2}$$

منابع قسمت بالا
مسئله تغییراتی

$$(\star)\quad I = -\int_a^b \Big[q y^2 - \underbrace{y}_{v}\,\overbrace{\frac{d}{dx}(p y')}^{du}\Big]dx = \int_a^b \left(-q y^2 - p y'^2\right)dx + p y' y\Big|_a^b$$

$$① \begin{cases} y(a)=0 \\ y(b)=0 \end{cases} \qquad ② \begin{cases} y'(a)=0 \\ y'(b)=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow I = \int_a^b \underbrace{\left(q y^2 + p y'^2\right)}_{F} dx \;\rightarrow\; \text{Functional} \text{ شبیه یک}$$

$$J = \int_a^b r y^2\, dx = 1 \quad \text{همراه قید}$$

$$\rightarrow F^* = F + \lambda J$$

حالا اگر شرایط ① و ② (مرزی) طبق حالت گفته شده نباشد چه باید پیش کرد؟ ③ شروط مرزی عمومی

(ها معلوم) (ها نامعلوم)

شرط سوم ③

$$a_1 p(a) y'(a) + a_2 y(a) = 0$$

$$b_1 p(b) y'(b) + b_2 y(b) = 0 \longrightarrow a_1 b_1 \neq 0$$

$$\xrightarrow{\div a_1,\ \div b_1} \quad p(a) y'(a) + \overbrace{\frac{a_2}{a_1}}^{h} y(a) = 0$$

$$p(b) y'(b) + \underbrace{\frac{b_2}{b_1}}_{k} y(b) = 0$$

$$(\star) \rightarrow I = -\int_a^b \left(q y^2 + p y'^2\right)dx + \overbrace{p(b) y'(b)}^{-k y(b)} y(b) - \overbrace{p(a) y'(a)}^{-h y(a)} y(a)$$

$$= -\left\{\int_a^b \left(q y^2 + p y'^2\right)dx + k y^2(b) - h y^2(a)\right\}$$

می‌خواهیم ترم دوم و سوم را داخل انتگرال ببریم ← $g(x)$ را اینطور تعریف می‌کنیم

$$\begin{cases} g(a) = h \\ g(b) = k \end{cases}$$

$$= -\left\{ \int_a^b qy^2 + py'^2 + \frac{d}{dx}\left[g(x)y^2\right] \right\} dx$$

شرط $y'(c_1)=0$ یعنی شیب خط مماس بر منحنی در c_1 برابر صفر ولی مقدار تابع هر مقدار دلخواهی داشته باشد. یعنی در c_1 نقطه متحرک داریم. (مرز متحرک)

$$\Longrightarrow \left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=a,b} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 2py' + 2gy \Big|_{x=a,b} = 0$$

$$\rightarrow py' + gy\Big|_{x=a} = 0 \xrightarrow{③} g(a) = \frac{a_2}{a_1}$$

$$\rightarrow py' + gy\Big|_{x=b} = 0 \longrightarrow g(b) = \frac{b_2}{b_1}$$

اگر معادله داده شده در حالت کلی باشد (به صورت اشتورم لیوویل نباشد):

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = \phi$$

بایستی معادله را به شکل ① [اشتورم لیوویل] بازسازی کنیم

$$\rightarrow y'' + \frac{a_1}{a_0}y' + \frac{a_2}{a_0}y = W \qquad \left[py'' + p'y' + (q(x) + \lambda r(x))y = 0\right)$$

$$p\left(y'' + \frac{a_1}{a_0}y' + \frac{a_2}{a_0}y\right) = p.W \rightarrow py'' + p\frac{a_1}{a_0}y' + p\frac{a_2}{a_0}y = Wp$$

$$p\frac{a_1}{a_0} = p' \longrightarrow \frac{p'}{p} = \frac{a_1}{a_0} \rightarrow \boxed{P = e^{\int \frac{a_1}{a_0}dx}}$$

تا 15 آبان فرصت داریم
برای امتحان — استاد راد

اگر برعکس ببینیم از اعمال معادله اویلر لاگرانژ به دست آمده است داریم: $\longrightarrow \dfrac{d}{dx}(py') + q(x)y - w(x) = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = q(x)y - w(x) \longrightarrow F = \frac{1}{2}qy^2 - wy + u(x,y')$$

$$-\frac{\partial F}{\partial y'} = py' \longrightarrow F = -\frac{p}{2}y'^2 + v(x,y)$$

$$\left(-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right) = \frac{d}{dx}(py')$$

$$F = \frac{q}{2}y^2 - \frac{p}{2}y'^2 - wy$$

F بدست می‌آید $\leftarrow$

جلسه هشتم 91/7/25

تبدیل معادلات دیفرانسیل به مسائل تغییراتی

$$y'' - y = 0 \qquad \begin{cases} y(0) = \sinh(1) \\ y(-1) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}(y')$$

$$\frac{d}{dx}(py') + (q + \lambda r)y = 0 \qquad \begin{cases} p = 1 \\ q = -1 \\ r = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow I = \int_{-1}^{0} (y'^2 + y^2)\,dx \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{-1} = 0 \ ,\ y(0) = \sinh(1)$$

شرط مرزی طبیعی خواهیم داشت.

$$x^2y'' + 2xy' + 3y = 1 \qquad \begin{matrix} y(a) = k_1 \\ y(b) = k_2 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx}(x^2y') + 3y = 1 \qquad \begin{matrix} p(x) = x^2 \\ q(x) = 3 \\ r(x) = 0 \\ w(x) = 1 \end{matrix}$$

$$\rightarrow I = -\int_a^b \left[\left(\frac{x^2}{2}y'^2\right) - \frac{3}{2}y^2 + y\right]dx \longrightarrow \begin{matrix} y(a) = k_1 \\ y(b) = k_2 \end{matrix}$$

$$y'' - 2y' + 2y = 0 \qquad \begin{cases} y(0)=1 \\ y(2)=0 \end{cases}$$

$$p = e^{\int -2dx} = e^{-2x}$$

$$e^{-2x} y'' - 2e^{-2x} y' + 2e^{-2x} y = 0 \longrightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{-2x} y'\right) + 2e^{-2x} y = 0$$

$$\begin{cases} P(x) = e^{-2x} \\ r(x) = 0 \\ Q(x) = 2e^{-2x} \end{cases}$$

$$F = \frac{1}{2} q y^2 - wy + \left(-\frac{p}{2} y'^2\right)$$

$$\longrightarrow I = \int_0^2 \left(\frac{1}{2} e^{-2x} y'^2 - e^{-2x} y^2\right) dx \qquad \begin{matrix} y(0)=1 \\ y(2)=0 \end{matrix}$$

$$\underbrace{x^3 y'' + 3x^2 y'}_{} + y = x \qquad \begin{matrix} y(1)=1 \\ y'(2)=0 \end{matrix} \longrightarrow \text{مرز آزاد}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^3 y'\right) + y = x$$

$$p(x) = x^3$$
$$q(x) = 1$$
$$r(x) = 0$$
$$w(x) = x$$

$$\longrightarrow I = \int_1^2 \left(\frac{x^3}{2} y'^2 - \frac{1}{2} y^2 + xy\right) dx \qquad y(1)=1, \quad \left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=2} = 0$$

V. IR

مجوی عیش خوش از دور باژگون سپهر که صاف این سر خم جمله دُردی آمیز است

سپهر بر شده پرویزنیست خون افشان که ریزه‌اش سر کسری و تاج پرویز است

فصل ۴ کتاب «Myint»

«معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی» «PDE»

* طبقه‌بندی
* نوشتن معادلات
* روش‌های حل معادلات

مطالعه یک پدیده فیزیکی $\xrightarrow{\text{زبان ریاضی}}$ معادله ریاضی

$L(u) = f$ شکل فشرده
- یک عملگر ریاضی
- کمیت مورد نظر

$L:$ { عملگر دیفرانسیلی ← تمرکز روی این قسمت / یا / عملگر انتگرالی (الگوی تغییرات نمونه‌های ریزتر) }

* عملگر دیفرانسیلی - بسته به تعداد پارامترهای مؤثر (متغیر مستقل)
  - تعداد پارامترها $= 1$ ← عملگر به صورت مشتق معمولی ↓ معادلات دیفرانسیل معمولی
  - تعداد پارامترها > 1 ↓ عملگر به صورت مشتق جزئی ↓ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

متغیرها در این درس:
- مستقل: $(x, y, z, t, \phi, \psi, \ldots)$
- وابسته: $(U, V, W, \Phi, \Psi, \ldots)$

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی از مرتبه ۲:

$$AU_{xx} + BU_{xy} + CU_{yy} + DU_x + EU_y + FU = G$$

همگن ← اگر $G = 0$
ناهمگن ← $G \neq 0$

• اگر ضرایب A تا F مقادیر ثابت یا توابعی از x, y باشند
معادله دیفرانسیل را خطی می‌نامند

دیدگاه بررسی:
۱- فیزیکی — { مسائل وابسته به زمان (زمانمند) Marching P (Forwarding P) / مسائل مستقل از زمان [مسائل تعادل - مسائل قضاوت (داوری)] Equilibrium P, Jurry P }
۲- ریاضی

۳ ریاضی ← ۱- هذلولوی Hyperbolic } ← زمانمند

۲- سهموی Parabolic

۳- بیضوی Elliptic ← مستقل از زمان

با توجه به مشابهت به قطاع مخروطی

مقاطع مخروطی * $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$

حل { دوران مختصات ← صفرکردن علامت b یا a ← دکارتی ثابت می ماند

مقادیر ویژه

← برای PDE ها هم از این روش استفاده می کنیم فقط با این تفاوت که در این جا ممکن است انحنای منحنی ها تغییر کند.

فرض: دنبال دستگاه مختصاتی با متر ϕ یا ψ هستیم که متغیرهای x و y را انتقال دهد

$$(x,y) \xrightarrow[T^{-1}]{T} (\phi,\psi) \quad - \quad J\ (\text{تبدیل})\ \text{«شرط»} = \frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \phi_x & \psi_x \\ \phi_y & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0$$

$$= \phi_x\psi_y - \psi_x\phi_y \neq 0$$

ϕ و ψ را توابع ثابت و مشتق پذیر از x و y فرض می کنیم (و برعکس)

$$\begin{cases} x = x(\phi,\psi) \\ y = y(\phi,\psi) \end{cases} \quad \text{و برعکس} \quad \begin{cases} \phi = \phi(x,y) \\ \psi = \psi(x,y) \end{cases}$$

* در فضای ϕ و ψ معادله به شکل جدید در می آید.

انتقال مشتق ها از x و y به ϕ و ψ

$$\boxed{\begin{aligned} u_x &= u_\phi \phi_x + u_\psi \psi_x \\ u_y &= u_\phi \phi_y + u_\psi \psi_y \end{aligned}}$$

$$U_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(U_x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(U_\phi \phi_x + U_\psi \psi_x\right)$$

$$= U_\phi \phi_{xx} + U_\psi \psi_{xx} + \phi_x\left(U_{\phi\phi}\phi_x + U_{\phi\psi}\psi_x\right) + \psi_x\left(U_{\psi\phi}\phi_x + U_{\psi\psi}\psi_x\right)$$

$$\rightarrow \boxed{U_{xx} = U_{\phi\phi}\phi_x^2 + U_{\psi\psi}\psi_x^2 + 2U_{\phi\psi}\phi_x\psi_x + U_\phi\phi_{xx} + U_\psi\psi_{xx}}$$

$$\rightarrow \boxed{U_{yy} = U_{\phi\phi}\phi_y^2 + U_{\psi\psi}\psi_y^2 + 2U_{\phi\psi}\phi_y\psi_y + U_\phi\phi_{yy} + U_\psi\psi_{yy}}$$

$$U_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(U_x) = \frac{\partial}{\partial y}\left(U_\phi\phi_x + U_\psi\psi_x\right)$$

$$= U_\phi\phi_{xy} + U_\psi\psi_{xy} + \phi_x\left(U_{\phi\phi}\phi_y + U_{\phi\psi}\psi_y\right) + \psi_x\left(U_{\phi\psi}\phi_y + U_{\psi\psi}\psi_y\right)$$

$$\rightarrow \boxed{U_{xy} = U_{\phi\phi}\phi_x\phi_y + U_{\psi\psi}\psi_x\psi_y + U_{\phi\psi}(\phi_x\psi_y + \phi_y\psi_x) + U_\phi\phi_{xy} + U_\psi\psi_{xy}}$$

پس از جاگذاری $\longrightarrow$ در معادله اصلی

$$A^* U_{\phi\phi} + B^* U_{\phi\psi} + C^* U_{\psi\psi} + D^* U_\phi + E^* U_\psi + F^* U = G^*$$

$$A^* = A\phi_x^2 + C\phi_y^2 + \overset{B?}{D}\phi_x\phi_y$$

$$C^* = A\psi_y^2 + C\psi_y^2 + D\psi_x\psi_y$$

$$B^* = 2A\phi_x\psi_x + 2C\phi_y\psi_y + B(\phi_x\psi_y + \psi_x\phi_y)$$

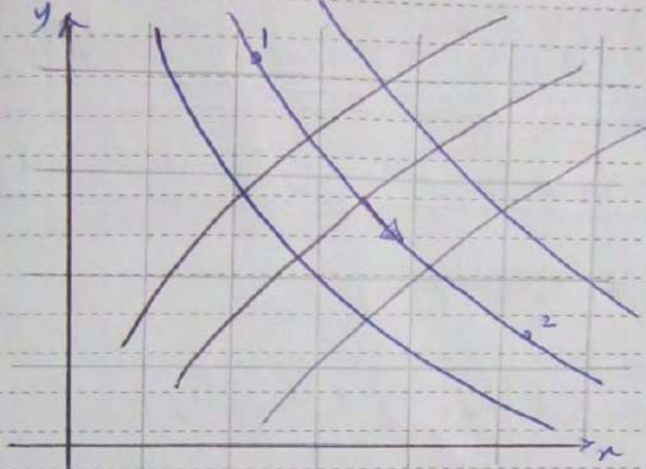
$$D^* = A\phi_{xx} + C\phi_{yy} + B\phi_{xy} + D\phi_x + E\phi_y$$

$$E^* = A\phi_{xx} + C\phi_{yy} + B\phi_{xy} + D\phi_x + E\phi_y$$

$$E = A\psi_{xx} + C\psi_{yy} + B\psi_{xy} + E\psi_y + D\psi_x$$

$$B^{*2} - 4A^*C^* = J^2 \underline{(B^2 - 4AC)}$$ تحول >0

← در این تبدیلات مختصات نوع معادلات عوض نمی‌شود و با تبدیل یک به یک سازگار خواهد بود



$dx=0$ روی خطوط ثابت
$dy=0$

ψ (ثابت)

ϕ (ثابت)

روی یکی از منحنی ها: اگر از نقطه 1 ← 2 حرکت کنیم $d\phi=0$

$$\phi(x,y)=C_1 \rightarrow d\phi=0 \rightarrow \phi_x dx + \phi_y dy = 0$$

$$\psi(x,y)=C_2 \rightarrow d\psi=0 \rightarrow \psi_x dx + \psi_y dy = 0$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\phi_x}{\phi_y} \quad \text{یا} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\psi_x}{\psi_y}$$

منحنی های ϕ و ψ را طوری انتخاب می‌کنیم که A^* و C^* برابر صفر گردند

$$A^*=0 \rightarrow A\left(\frac{\phi_x}{\phi_y}\right)^2 + B\left(\frac{\phi_x}{\phi_y}\right) + C = 0$$

$$C^*=0 \rightarrow A\left(\frac{\psi_x}{\psi_y}\right)^2 + B\left(\frac{\psi_x}{\psi_y}\right) + C = 0$$

شبیه هم

معادلات مشخصه ← از حل این معادلات، منحنی های ϕ و ψ ثابت بدست می‌آیند

!! منحنی های مشخصه !!

$\frac{dy}{dx}$ حالت نی $\longrightarrow A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + B\left(-\frac{dy}{dx}\right) + C = 0$

$\longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2-4AC}}{2A}$

حل معادلات مشخصه ← $\begin{cases}\phi(x,y) = c_1 \\ \psi(x,y) = c_2\end{cases}$

$A^*, C^* = 0 \longrightarrow E^* U_{\phi\psi} + D^* U_\phi + E^* U_\psi + F^* U = G^*$

$E^* \neq 0 \longrightarrow \boxed{U_{\phi\psi} = H_1(\phi, \psi, U, U_\phi, U_\psi)}$ شکل کانونی اول معادلات هذلولوی

تعریف دو تغییر جدید $\begin{cases}\alpha = \phi + \psi \\ \beta = \phi - \psi\end{cases} \longrightarrow \boxed{U_{\alpha\alpha} - U_{\beta\beta} = H_2(\alpha, \beta, U, U_\alpha, U_\beta)}$ شکل کانونی دوم معادلات هذلولوی

* معادله موج را در نظر می‌گیریم:

$c^2 U_{xx} - U_{tt} = 0 \qquad \begin{cases} A = -1 \\ B = 0 \\ C = c^2 \end{cases}$

$\longrightarrow B^2 - 4AC = 0 - 4(-1)c^2 = 4c^2 > 0$

$\frac{dx}{dt} = \frac{0 \pm \sqrt{4c^2}}{-2} = \mp c$

$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -c \rightarrow x = -ct + k_1 \Rightarrow \phi \\ \frac{dx}{dt} = c \rightarrow x = ct + k_2 \Rightarrow \psi \end{cases}$

$U_x = U_\phi \phi_x + U_\psi \psi_x = U_\phi + U_\psi$

$U_{xx} = U_{\phi\phi} + U_{\psi\psi} + 2U_{\phi\psi}$

$U_t = U_\phi \phi_t + U_\psi \psi_t = c(U_\phi - U_\psi)$

$U_{tt} = c^2 U_{\phi\phi} + c^2 U_{\psi\psi} + (-2c^2 U_{\phi\psi})$

جای گذاری در معادله اولیه $\longrightarrow$ $c^2\left(\cancel{U_{\phi\phi}}+\cancel{U_{\psi\psi}}+2U_{\phi\psi}\right)-\cancel{c^2U_{\phi\phi}}-\cancel{c^2U_{\psi\psi}}+2c^2U_{\phi\psi}=0$

$$\longrightarrow 4c^2U_{\phi\psi}=0 \longrightarrow \boxed{U_{\phi\psi}=0}$$ شکل کانونی اول معادله

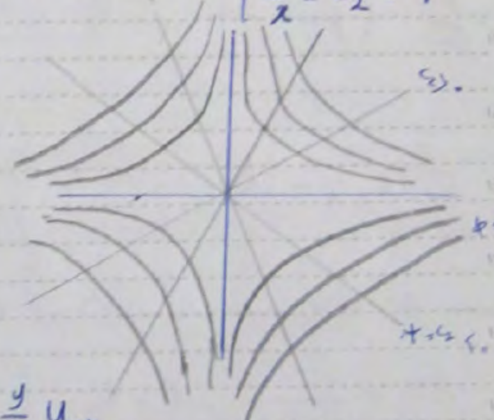
حل کنیم

$$x^2U_{xx}-y^2U_{yy}-U_x-1-2y^2=0 \qquad x\neq 0,\ y\neq 0$$

$$\begin{cases} A=x^2 \\ B=0 \\ C=-y^2 \end{cases} \qquad B^2-4AC=0-4x^2(-y^2)>0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{0\pm 2xy}{2x^2}=\pm\frac{y}{x}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x} \longrightarrow \dfrac{dy}{y}=\dfrac{dx}{x} \\[2mm] \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x} \longrightarrow \dfrac{dy}{y}=\dfrac{-dx}{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} xy=c_1=\phi \\[2mm] \dfrac{y}{x}=c_2=\psi \end{cases}$$



$$U_x=U_\phi\phi_x+U_\psi\psi_x=yU_\phi-\frac{y}{x^2}U_\psi$$

$$U_{xx}=U_{\phi\phi}\phi_x^2+U_{\psi\psi}\psi_x^2+U_\phi\phi_{xx}+U_\psi\psi_{xx}+2U_{\phi\psi}\phi_x\psi_x$$

$$=y^2U_{\phi\phi}+\frac{y^2}{x^4}U_{\psi\psi}+(0)U_\phi+\frac{2y}{x^3}U_\psi+2(-y)\left(\frac{y}{x^2}\right)U_{\phi\psi}$$

$$U_{yy}=U_{\phi\phi}\phi_y^2+U_{\psi\psi}\psi_y^2+U_\phi\phi_{yy}+U_\psi\psi_{yy}+2U_{\phi\psi}\phi_y\psi_y$$

$$=x^2U_{\phi\phi}+\frac{1}{x^2}U_{\psi\psi}+(0)U_\phi+(0)U_\psi+2(x)\left(\frac{1}{x}\right)U_{\phi\psi}$$

های مرتبه دو ساده شده

$$\cancel{x^2y^2u_{\phi\phi}} + \cancel{\frac{y^2}{x^2}u_{\psi\psi}} + \frac{2y}{x}u_\psi - 2y^2u_{\phi\psi} - \cancel{x^2y^2u_{\phi\phi}} - \cancel{\frac{y^2}{x^2}u_{\psi\psi}}$$

$$-4y^2u_{\phi\psi} - yu_\phi + u_\psi\left(\frac{2y}{x}+\frac{y}{x^2}\right) - 1 - 2y^2 = 0$$

$$-2y^2u_{\phi\psi}$$
$$-yu_\phi + \frac{y}{x^2}u_\psi$$
$$-1-2y^2=0$$

باید y و x های ظاهر شده را حذف کنیم

$$\begin{cases} xy=\phi \\ \frac{y}{x}=\psi \end{cases} \rightarrow y=\sqrt{\phi\psi}$$

$$\rightarrow x=\frac{y}{\psi}=\frac{\sqrt{\phi\psi}}{\psi}=\sqrt{\frac{\phi}{\psi}}$$

$$\longrightarrow -4\phi\psi u_{\phi\psi} - \sqrt{\frac{\phi}{\psi}}u_\phi + u_\psi\left(2\psi+\psi\sqrt{\frac{\psi}{\phi}}\right) - 1 - 2\phi\psi = 0$$

طرفین طرفین را بر ضریب بالاترین مرتبه مشتق تقسیم کنیم آن گاه فرم کانونی اول معادله بدست می آید

$$\rightarrow \boxed{u_{\phi\psi} = H_1(\phi,\psi,u,u_\phi,u_\psi)}$$

$$4y^2u_{xx} + 9xyu_{xy} + 5x^2u_{yy} = 0 \qquad \begin{cases} A=4y^2 \\ B=9xy \\ C=5x^2 \end{cases}$$

$$B^2-4AC = 81x^2y^2 - 4(4y^2)(5x^2) = x^2y^2$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{+9xy \pm xy}{8y^2} \longrightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{10xy}{8y^2} = \frac{5x}{4y} \\ \frac{dy}{dx} = \frac{8xy}{8y^2} = \frac{x}{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4y\,dy = 5x\,dx \rightarrow 2y^2 = \frac{5}{2}x^2 + k_1 \\ y\,dy = x\,dx \rightarrow \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + k_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 - \frac{5}{4}x^2 = C_1 = \phi \\ y^2 - x^2 - C_2 = \psi \end{cases}$$

$\phi_x = -\frac{5}{2}x$ $\quad \phi_y = 2y$

$\psi_x = -2x$ $\quad \psi_y = 2y$

$$* \; U_{xx} = U_{\phi\phi}\phi_x^2 + U_{\psi\psi}\psi_x^2 + U_\phi \phi_{xx} + U_\psi \psi_{xx} + 2U_{\phi\psi}\phi_x\psi_x$$

$$= \frac{25}{4}x^2 U_{\phi\phi} + 4x^2 U_{\psi\psi} - \frac{5}{2}U_\phi - 2U_\psi + 10x^2 U_{\phi\psi}$$

$$* \; U_{yy} = U_{\phi\phi}\phi_y^2 + U_{\psi\psi}\psi_y^2 + U_\phi \phi_{yy} + U_\psi \psi_{yy} + 2U_{\phi\psi}\phi_y\psi_y$$

$$4y^2 U_{\phi\phi} + 4y^2 U_{\psi\psi} + 2U_\phi + 2U_\psi + 8y^2 U_{\phi\psi}$$

$$* \; U_{xy} = U_{\phi\phi}\phi_x\phi_y + U_{\psi\psi}\psi_x\psi_y + U_\phi\phi_{xy} + U_\psi\psi_{xy} + U_{\phi\psi}(\phi_x\psi_y + \psi_x\phi_y)$$

$$= -5xyU_{\phi\phi} - 4xyU_{\psi\psi} + 0 + 0 + (-5xy - 4xy)U_{\phi\psi}$$

$$\rightarrow \; \cancel{25x^2y^2U_{\phi\phi}} + 16x^2y^2U_{\psi\psi} - 10y^2U_\phi - 8y^2U_\psi + \cancel{40x^2y^2U_{\phi\psi}}$$

$$\cancel{-45x^2y^2U_{\phi\phi}} - 36x^2y^2U_{\psi\psi} - 81x^2y^2U_{\phi\psi}$$

$$\cancel{+20x^2y^2U_{\phi\phi}} + 20x^2y^2U_{\phi\psi} + 10x^2U_\phi + 10x^2U_\psi \cancel{+40x^2y^2U_{\phi\psi}} = 0$$

$$\Rightarrow -x^2y^2U_{\phi\psi} + 10U_\phi(x^2 - y^2) + U_\psi(10x^2 - 8y^2) = 0$$

ب) ★ $\Delta = B^2 - 4AC = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{B}{2A} \longrightarrow \phi \text{ یا } \psi$$

$$\Delta = 0 \rightarrow B^2 = 4AC \rightarrow 2\sqrt{AC} = B \quad , \quad \frac{B}{A} = \frac{2\sqrt{AC}}{A} = 2\sqrt{\frac{C}{A}}$$

$$A^* = A\phi_x^2 + C\phi_y^2 + 2B\phi_x\phi_y$$

$$B^* = A\phi_x\psi_x + C\phi_y\psi_y + B(\phi_x\psi_y + \psi_x\phi_y)$$

می‌توانیم منحنی های ϕ و ψ را طوری انتخاب کنیم که A^* برابر صفر شود.

$$A^* = 0 \rightarrow A\phi_x^2 + C\phi_y^2 + B\phi_x\phi_y = 0$$

$$(\sqrt{A}\phi_x)^2 + (\sqrt{C}\phi_y)^2 + \sqrt{AC}\,\phi_x\phi_y = 0 \rightarrow (\sqrt{A}\phi_x + \sqrt{C}\phi_y)^2 = 0$$

$$\rightarrow \sqrt{A}\phi_x + \sqrt{C}\phi_y = 0$$

$$\sqrt{A}\psi_x + \sqrt{C}\psi_y = 0$$ به همین ترتیب برای C^* داریم.

برای B^* داریم: (خودش خودکار صفر می‌شود)

$$B^* = A\left[\phi_x\psi_x + \frac{C}{A}\phi_y\psi_y + \frac{B}{A}(\phi_x\psi_y + \psi_x\phi_y)\right]$$

$$= (\sqrt{A})^2\left[\phi_x\psi_x + \left(\sqrt{\frac{C}{A}}\right)^2\phi_y\psi_y + 2\sqrt{\frac{C}{A}}(\phi_x\psi_y + \psi_x\phi_y)\right] = 0$$

$$= (\sqrt{A})^2\phi_x\psi_x + (\sqrt{C})^2\phi_y\psi_y + 2\sqrt{AC}(\phi_x\psi_y + \psi_x\phi_y) = 0$$

$$(\sqrt{A}\phi_x + \sqrt{C}\phi_y)(\sqrt{A}\psi_x + \sqrt{C}\psi_y) = (0)(\sqrt{A}\psi_x + \sqrt{C}\psi_y) = 0$$

شکل کانونی معادلات سهموی

$$\xrightarrow{C} \boxed{u_{\psi\psi} = H_2(\phi, \psi, u, u_\phi, u_\psi)}$$

برای معادلات هذلولوی دو شکل داشتیم اما برای معادلات سهموی و بیضوی فقط یک فرم داریم

★ مثال:

$$x^2y^2 u_{xx} + 2xy\, u_{xy} + u_y = 0 \qquad \begin{cases} A = x^2y^2 \\ B = 2xy \\ C = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \Delta = B^2 - 4AC = 4x^2y^2 - 4x^2y^2 = 0$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{2x^2y^2} = \frac{1}{xy} \rightarrow y\,dy = \frac{dx}{x} \rightarrow y^2/2 = \ln x + c_1$$

$$\rightarrow \frac{y^2}{2} = \ln x + \ln k_1 = \ln k_1 x \rightarrow k_1 x = e^{\frac{y^2}{2}} \rightarrow \boxed{k_1 = \frac{1}{x} e^{\frac{y^2}{2}} = \phi}$$

حتی ψ اختیاری خواهد بود با این شرط که ژاکوبین تبدیل مخالف صفر باشد.

فرض $\boxed{\psi = x}$

$$J = \begin{vmatrix} \phi_x & \phi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{x^2} e^{\frac{y^2}{2}} & \frac{y}{x} e^{\frac{y^2}{2}} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \checkmark$$

$$* \; u_{xx} = u_{\phi\phi}\phi_x^2 + u_{\psi\psi}\psi_x^2 + u_\phi \phi_{xx} + u_\psi \psi_{xx} + 2u_{\phi\psi}\phi_x\psi_x$$

$$= \frac{1}{x^2} e^{y^2} u_{\phi\phi} + u_{\psi\psi} + \frac{2}{x^3} e^{y^2/2} u_\phi + 0 + \left(-\frac{2}{x^2} e^{\frac{y^2}{2}}\right) u_{\phi\psi}$$

$$* \; u_{yy} = u_{\phi\phi}\phi_y^2 + u_{\psi\psi}\psi_y^2 + u_\phi \phi_{yy} + u_\psi \psi_{yy} + 2u_{\phi\psi}\phi_y\psi_y$$

$$\frac{y^2}{x^2} e^{y^2} u_{\phi\phi} + 0 + \left(\frac{1}{x} e^{y^2/2} + \frac{y^2}{x} e^{y^2/2}\right) u_\phi + 0 + 0$$

$$u_{xy} = u_{\phi\phi}\phi_x\phi_y + u_{\psi\psi}\psi_x\psi_y + u_{\phi\psi}(\phi_x\psi_y + \phi_y\psi_x) + u_\phi \phi_{xy} + u_\psi \psi_{xy}$$

$$= -\frac{1}{x^3} e^{y^2} u_{\phi\phi} + 0 + \frac{-y}{x^2} e^{y^2/2} u_\phi + 0 + \frac{y}{x} e^{y^2/2} u_{\phi\psi}$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{y^2}{x^2} e^{y^2} U_{\phi\phi}} + x^2y^2 U_{\psi\psi} + \cancel{\frac{2y^2}{x} e^{y^2/2} U_\phi} \cancel{- 2y^2 e^{y^2/2} U_{\phi\psi}}$$

$$\cancel{+ \frac{-2y^2}{x^2} e^{y^2} U_{\phi\phi}} \cancel{+ \frac{-2y^2}{x} e^{y^2/2} U_\phi} \cancel{+ 2y^2 e^{y^2/2} U_{\phi\psi}}$$

$$\cancel{+ \frac{y^2}{x^2} e^{y^2} U_{\phi\phi}} + \left(\frac{1}{x} e^{y^2/2} + \frac{y^2}{x} e^{\frac{y^2}{2}}\right) U_\phi = 0$$

$$x^2y^2 U_{\psi\psi} + \left(\frac{1}{x} e^{\frac{y^2}{2}} + \frac{y^2}{x} e^{y^2/2}\right) U_\phi = 0$$

(3) $\Delta = B^2 - 4AC < 0$ برای معادلات مشخصه جواب حقیقی نخواهیم داشت

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{B \pm \sqrt{-(4AC - B^2)}}{2A} = \frac{B \pm \sqrt{i^2(4AC - B^2)}}{2A} = \frac{B \pm i\sqrt{4AC - B^2}}{2A}$$

$$\begin{cases} \phi = \alpha + i\beta \\ \psi = \alpha - i\beta \end{cases}$$

α و β توابع حقیقی از متغیرهای حقیقی x و y هستند

ممکن است ، $U_{\phi\psi} = H(\quad)$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}(\phi + \psi) \\ \beta = \frac{1}{2i}(\phi - \psi) \end{cases} \rightarrow \boxed{U_{\alpha\alpha} + U_{\beta\beta} = H_5(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta)}$$

$$U_{xx} + yU_{yy} + 4yU_x + \frac{1}{2}U_y = 0 \quad ,$$ (برای y همواره)

$$\Delta = B^2 - 4AC = 0 - 4y \xrightarrow{y>0} \Delta < 0$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{0 \pm \sqrt{-4y}}{2} = \frac{\pm 2i\sqrt{y}}{2} = \pm i\sqrt{y}$$

$$\longrightarrow \frac{dy}{\sqrt{y}} = \pm i\, dx \;\rightarrow 2\sqrt{y} = ix + c_1$$

$$2\sqrt{y} = -ix + c_2$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{y} - ix = c_1 = \varphi \\ 2\sqrt{y} + ix = c_2 = \psi \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \alpha = 2\sqrt{y} \\ \beta = x \end{array}}$$

$$U_{xx} = \cancel{U_{\alpha\alpha}\,\alpha_x^2} + U_{\beta\beta}\,\beta_x^2 + \cancel{U_\alpha\,\alpha_{xx}} + \cancel{U_\beta\,\beta_{xx}} + \cancel{2U_{\alpha\beta}\,\alpha_x\beta_x}$$

$$= U_{\beta\beta}$$

$$U_{yy} = U_{\alpha\alpha}\,\alpha_y^2 + \cancel{U_{\beta\beta}\,\beta_y^2} + U_\alpha\,\alpha_{yy} + \cancel{U_\beta\,\beta_{yy}} + \cancel{2U_{\alpha\beta}\,\alpha_y\beta_y}$$

$$= \frac{1}{y} U_{\alpha\alpha} - \frac{1}{2} y^{-\frac{3}{2}}\, U_\alpha$$

$$U_x = \cancel{U_\alpha \alpha_x} + U_\beta \beta_x = U_\beta$$

$$U_y = U_\alpha \alpha_y + \cancel{U_\beta \beta_y} = \frac{1}{\sqrt{y}} U_\alpha$$

جایگذاری: $U_{\beta\beta} + U_{\alpha\alpha} - \cancel{\frac{1}{2\sqrt{y}} U_\alpha} + 4y\,U_\beta + \cancel{\frac{1}{2\sqrt{y}} U_\alpha} = 0$

$$\Rightarrow U_{\beta\beta} + U_{\alpha\alpha} = -4y\,U_\beta$$

$$\longrightarrow U_{\beta\beta} + U_{\alpha\alpha} = \frac{-4\alpha^2}{4} U_\beta \rightarrow \boxed{U_{\beta\beta} + U_{\alpha\alpha} = -\alpha^2 U_\beta}$$

شبیه معادلهٔ لاپلاس

جلسه دهم ۹۱/۶/۲۸

توسعه معادلات
- پتانسیل
- گرما
- موج

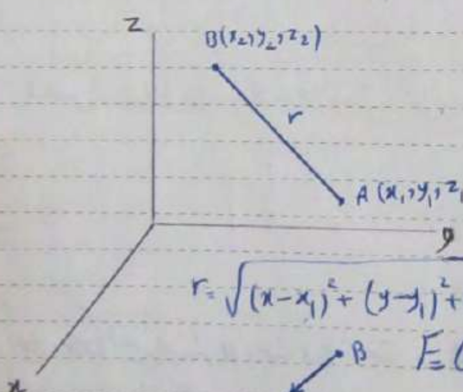
ابتدا معادله حاکم بر مسائل را با توجه به قوانین فیزیک به دست می‌آوریم.

$L(u) = f$

عملگر انتگرالی — عملگر دیفرانسیلی

عملگر دیفرانسیلی:
- تعداد متغیرهای مستقل $= 1 \leftarrow \frac{d}{dx}$ (مشتق معمولی)
- $\quad " \quad " \quad " \quad > 1 \leftarrow \frac{\partial}{\partial x_i}$ (مشتق جزئی)

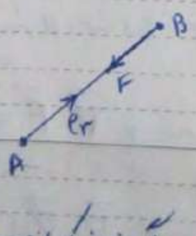
- x, y, t, r, θ, ϕ — I.V (متغیرهای مستقل)
- u, v, w, Φ, Ψ — D.V (متغیرهای وابسته)



$$r = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}$$

معادله پتانسیل:

اگر در نقاط A و B دو ذره مادی داشته باشیم طبق قانون جاذبه نیوتن نیروی وارده بر هر ذره از طرف ذره دیگر برابر است با:



$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

(به شکل برداری) $\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{e}_r$

اگر زمین یکی از جرم‌ها باشد

$$\begin{cases} m_1 = M \\ m_2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \vec{F} = G\frac{M}{r^2} = \vec{g}$$

$$\longrightarrow F = \frac{GMm_2}{r^2} = \frac{k}{r^2} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{k}{r}\right)$$

$\frac{k}{r} = u \rightarrow$ تابع پتانسیل

اگر از u در جهات مختلف مشتق گرفته شود باید مولفه های نیرو را در آن جهات بدست آورد.

$$\vec{F}_r = -\frac{\partial u}{\partial r}$$

فرض کنید نقطه A ثابت و نقطه B را به موازات محور xها حرکت دهیم.

$F\updownarrow \leftarrow r\updownarrow$ ، اگر بخواهیم این تغییرات را برای تابع u حساب کنیم داریم

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial r}}_{-F_r}\cdot\underbrace{\frac{(x-x_1)}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}}_{\cos\alpha} = -F_r\cos\alpha$$

α زاویه ای که $\vec{r}$ با جهت مثبت محور x می سازد (تصویر $\vec{r}$ روی محور x)

$$\longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -F_x$$

با همین استدلال اگر B به موازات محورهای y و z نیز حرکت کند داریم،

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = -F_y \\ \frac{\partial u}{\partial z} = -F_z \end{cases}$$

حال فرض کنید نقطه A ثابت و r ثابت و B در هر جهت دلخواه حرکت کند ← تغییر نیرو صفر خواهد بود

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0 \qquad \longrightarrow \underbrace{\vec{\nabla}}_{\text{دیورژانس}}\cdot\vec{F} = 0$$

$$\rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}u = \nabla^2 u = 0$$

لاپلاسین

معادله پتانسیل $\boxed{\nabla^2 u = 0}$

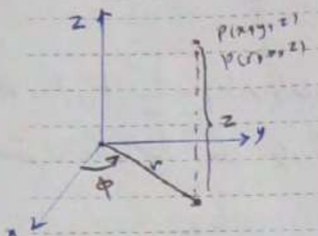
دل دو

ج	پ	چ	س	د	ی	ش
۳	۲	۱				
۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴
۱۷	۱۶	۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱
۲۴	۲۳	۲۲	۲۱	۲۰	۱۹	۱۸
۳۱	۳۰	۲۹	۲۸	۲۷	۲۶	۲۵

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

در مختصات های استوانه ای و کروی داریم:

استوانه ای
$$\boxed{\nabla^2 u = \frac{\partial u^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0}$$

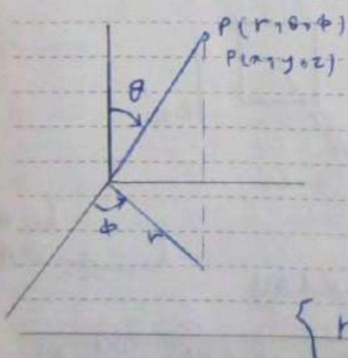


$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$$

$-\infty < x,y,z < +\infty$

حدود تغییرات x,y,z
$$\begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ x > 0 \\ a < x < b \end{cases} \qquad \begin{cases} r > 0 \\ a < r < b \\ 0 < \phi < 2\pi \end{cases}$$

کروی
$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} = 0}$$



$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \phi = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \\ \theta = \cos^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r > 0 \\ a < r < b \quad \text{کره توخالی} \\ 0 < \theta < \pi \\ 0 < \phi < 2\pi \end{cases}$$

ϕ زاویه محیطی

θ زاویه سمت

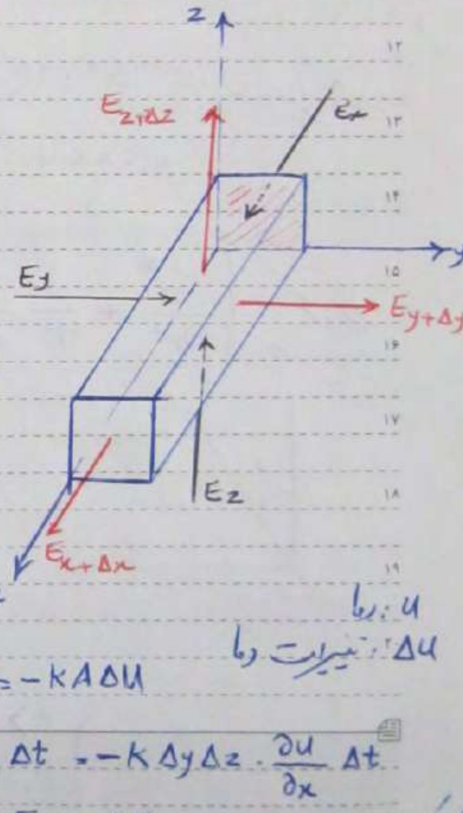
(لاپلاس) در دستگاه xy : $u_{xx}+u_{yy}=0$

$B^2-4AC<0 \longrightarrow$ معادلات بیضوی

$u_{xx}+u_{yy}=f(x,y) \longrightarrow$ معادلهٔ پواسون

* المان حجمی از یک جسم جامد به ابعاد Δx ، Δy و Δz که در یک نقطه از فضا ثابت است را در نظر می‌گیریم. فرض کنید دمای اولیهٔ این جسم صفر باشد. (دما به عنوان انرژی ذخیره شده گرمایی در نظر گرفته می‌شود.)

فرض کنید از سه جهت x و y و z انرژی به این سیستم وارد شود (ذخیره شدن انرژی در سیستم) و مقداری از انرژی هم بیرون می‌آید. اگر قانون بقای انرژی را برای این سیستم بنویسیم داریم:



$$\sum E_{in} - \sum E_{out} + E_g = \Delta E$$

$$\Delta E = m \cdot c \cdot \Delta u$$

u: دما

Δu: تغییرات دما

$$E_g = g \; \Delta V \; \Delta t$$

g: آهنگ تولید انرژی $\frac{W}{m^3}$ ، ΔV: حجم ، Δt: زمان

بردار

قانون فوریه $Q = -kA\Delta u$

$$E_x = Q_x \Delta t = -k \Delta y \Delta z \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \Delta t$$

$$E_{x+\Delta x} = E_x + \Delta E_x$$ (ادامهٔ پیوسته)

$$E_{in} = E_x + E_y + E_z$$

$$E_{x+\Delta x} = E_x + \frac{\partial}{\partial x}(E_x)\Delta x$$ (بسط تیلور ←)

برای $E_{y+\Delta y}$ و $E_{z+\Delta z}$ هم به همین صورت عمل می‌کنیم. با جایگذاری در معادله اصلی داریم:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(E_x)\Delta x-\frac{\partial}{\partial y}(E_y)\Delta y-\frac{\partial}{\partial z}(E_z)\Delta z+g\,\Delta V\,\Delta t=\rho c\,\Delta V.\Delta u$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[-k\,\Delta y\,\Delta z\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\Delta t\right]\Delta x-\frac{\partial}{\partial y}\left(-k\,\Delta x\,\Delta z\,\frac{\partial u}{\partial y}\,\Delta t\right)$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(-k\,\Delta x\,\Delta y\,\frac{\partial u}{\partial z}\,\Delta t\right)+g\,\Delta V\,\Delta t=\rho c\,\Delta V.\Delta u$$

با فاکتورگیری از $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$ و Δt داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{\Delta V.\Delta t}+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Delta V.\Delta t+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\Delta V.\Delta t+g\,\Delta V\,\Delta t=\rho c\,\Delta V.\Delta u$$

$$\rightarrow\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)+g=\frac{\rho c\,\Delta u}{\Delta t}=\rho c\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta t}=\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\Rightarrow\boxed{\vec{\nabla}\cdot(k\nabla\vec{u})+g=\rho c\frac{\partial u}{\partial t}}$$ معادله گرما

k: رسانش گرمایی می‌تواند تابع مکان، زمان و یا دما باشد

اگر جسم همگن و دارای خواص ترموفیزیکی ثابت باشد داریم:

معادله فوریه-بیو $$\nabla^2 u+\frac{g}{k}=\frac{\rho c}{k}\frac{\partial u}{\partial t}$$

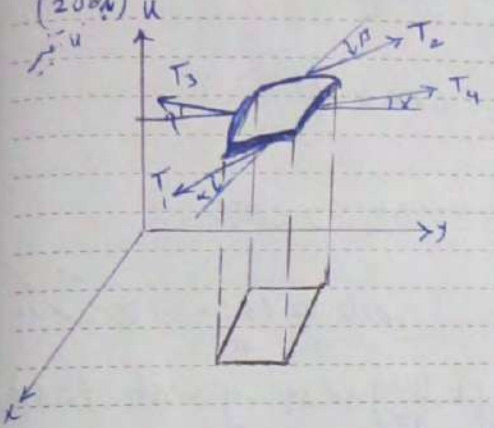
$g=0\rightarrow$ معادله فوریه : $\frac{k}{\rho c}=\alpha : c^2 = a^2$

u مستقل از زمان و $g\neq$ $\rightarrow$ معادله پواسون

u مستقل از زمان و $g=0$ $\longrightarrow$ معادله لاپلاس

$$\boxed{c^2 \nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial t}}$$

معادله موج:



u: تغییر مکان

غشاء به ابعاد Δx و Δy که تصویر آن در صفحه xy
یک مربع مستطیل می‌شود. در دو جهت x و y
به آن نیروی کشش t وارد می‌شود. بنابراین
در ابتدا کاملاً به صورت صاف و تخت قرار دارد

اگر F برآیند نیروهای خارجی وارد بر واحد سطح وارد شود (نیروی وزن هم لحاظ شده است)

$$F = F\left(x, y, t, u, \frac{\partial u}{\partial t}\right) \Delta x \Delta y$$

ρ: چگالی سطحی $\left(\frac{kg}{m^2}\right)$

T: نیروی کشش سطحی به ازای واحد طول $\left(\frac{N}{m}\right)$ و همواره مماس بر محور طولی

α و β و η و γ زوایایی که نیروها با جهت افق می‌سازند

★ از قانون دوم نیوتون در حرکت برای بدست آوردن معادله حاکم بر سیستم استفاده می‌کنیم

حرکت فقط در راستای عمود بر صفحه غشاء تغییر مکان خواهد داد.

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \begin{cases} f_H = m a_H \longrightarrow a_H = 0 \Rightarrow \sum f_H = 0 \\ f_V = m a_V \end{cases}$$

H: افق
V: قائم

$$\sum f_H = 0 \rightarrow \begin{cases} \sum f_x = 0 \\ \sum f_y = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \sum f_x = 0 &\rightarrow T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta = T_x \\ \sum f_y = 0 &\rightarrow T_3 \cos\eta = T_4 \cos\gamma = T_y \end{aligned}\right\}$$

→ تا غشاء در جهت x حرکت نکند

$T_x = T_y$ → تا در جهت x و y حرکت نکند

$$\rightarrow T_x = T_y = T$$

$$* \sum f_v = m a_v \longrightarrow \Delta y \left(T_1 \sin\alpha - T_2 \sin\beta\right) + \left(T_4 \sin\gamma - T_3 \sin\eta\right) \Delta x + F \Delta x \Delta y = \rho \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

طرفین رابطه را بر T تقسیم می‌کنیم.

$$\Delta y (\quad \alpha - \quad \beta) + \Delta x (\quad \gamma - \quad \eta) + \frac{F}{T} \Delta x \Delta y = \frac{\rho}{T} \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\Delta y \left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x} \right) + \Delta y \left(\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y+\Delta y} - \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y} \right) \Delta x + \frac{F}{T} \Delta x \Delta y = \frac{\rho}{T} \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{\Delta x \Delta y}} \underbrace{\frac{1}{\Delta x} \left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x} \right)} + \frac{1}{\Delta y} \left(\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y+\Delta y} - \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y} \right) + \frac{F}{T} = \frac{\rho}{T} u_{tt}$$

از طرفین رابطه وقتی $\begin{cases} \Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \end{cases}$ ⟸

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{F}{T} = \frac{\rho}{T} u_{tt}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{F}{T} = \frac{\rho}{T} u_{tt}}$$

معادله موج در حالت دو بعدی

$$\rightarrow c^2\nabla^2 u + \frac{F}{T} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

طبقه بندی

$$\begin{cases} A=1 \\ B=0 \\ C=1 \end{cases} \longrightarrow B^2-4AC<0$$

شرح $\left\{ \begin{array}{l} t \leftarrow \text{نقش اپ کاری گرفت} \\ x \\ y \end{array} \right.$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{F}{T} - \frac{\rho}{T} u_{tt} = 0$$

$C \quad A$

معادلات هذلولوی

جلسه یازدهم 91/8/7

ch3 (13-14-21)
Ch4 All Problems } تا آخر آبان
Ch5 Ch6 قبلاً خوانده‌ایم

ch7: Separation of Varsutions
ch8: Special function + Green's Function

* گفتیم نوع معادله با تغییر دستگاه مختصات تغییر نمی‌کند:

$$A^* u_{\phi\phi} + B^* u_{\phi\psi} + C^* u_{\psi\psi} + D^* u_\phi + E^* u_\psi + F^* u = G^*$$

فرض کنیم معادله تبدیل یافته در دستگاه جدید را باز به دستگاه اول برگردانده‌ایم و ضریب B و ○ را صفر کرده‌ایم:

$$Au_{xx} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

در ابتدا حالت همگن را بررسی می‌کنیم: $(G=0)$

$A=C$: بیضوی (elliptic)

$A=-C$ هذلولوی (hyperbolic)

$A=0$ یا $C=0$ سهموی (Parabolic)

* اگر معادله همگن و خطی باشد روش جداسازی متغیرها برای حل مسئله به کار می‌رود (روش‌های پیچیده دیگر و اثبات ریاضی ندارد)

فرض $U(x,y) = \Phi(x)\Psi(y)$

مشتقات را محاسبه می‌کنیم

$$\Rightarrow A\Phi''\Psi + C\Phi\Psi'' + D\Phi'\Psi + E\Phi\Psi' + F\Phi\Psi = 0$$

اگر ضرایب A تا F مقادیر ثابتی باشند با تقسیم بر $\Phi\Psi$ می‌توانیم معادله را به راحتی حل کنیم

اما در حالت کلی ضرایب توابعی از x و y هستند. پس داریم:

فرض $\mu(x,y)$ $\neq 0$ و مشتق پذیر تا حداقل از مرتبه دو

$$\frac{\text{معادله بالا}}{\mu} \rightarrow \cancel{\left[A_1(x) + B_1(y)\right]\Phi''\Psi}$$

$$\left[A_1(x)\Phi'' + A_2(x)\Phi' + A_3(x)\Phi\right]\Psi$$

$$+\left[B_1(y)\Psi'' + B_2(y)\Psi' + B_3(y)\Psi\right]\Phi = 0$$

اگر طرفین این معادله را بر حاصلضرب $\Phi\Psi$ تقسیم کنیم:

$$\rightarrow \underbrace{\left[A_1(x)\Phi'' + A_2(x)\Phi' + A_3(x)\Phi\right]\frac{1}{\Phi}}_{\text{وابسته به } x} + \overbrace{\left[B_1(y)\Psi'' + B_2(y)\Psi' + B_3(y)\Psi\right]\frac{1}{\Psi}}^{\text{وابسته به } y} = 0$$

ضرایب A_1 تا A_3 فقط وابسته به x و Φ هم وابسته به x

" B_1 تا B_3 " " " و Ψ " " " y

$$\rightarrow \left[A_1(x)\Phi'' + A_2(x)\Phi' + A_3(x)\Phi\right]\frac{1}{\Phi} = -\left[B_1(y)\Psi'' + B_2(y)\Psi' + B_3(y)\Psi\right]\frac{1}{\Psi} = \lambda$$

$$\begin{cases} A_1\Phi'' + A_2\Phi' + A_3\Phi - \lambda\Phi = 0 \\ B_1\Psi'' + B_2\Psi' + B_3\Psi + \lambda\Psi = 0 \end{cases}$$

هر دو معادله شکل ظاهری شبیه بهم دارند. اگر یکی را بررسی کنیم دیگری هم بررسی شده است.

می‌خواهیم این معادلات را شبیه به معادلات اویلر-لاگرانژ بنویسیم: $\frac{d}{dx}(py')+(q+\lambda r)y=0$

$$\rightarrow \frac{1}{A_1(x)}\, e^{\int \frac{A_2(x)}{A_1(x)}dx}$$

معادله اول را در عبارت روبرو ضرب می‌کنیم

$$\rightarrow \underbrace{\phi'' e^{\int \frac{A_2}{A_1}dx} + \frac{A_2}{A_1}\phi' e^{\int \frac{A_2}{A_1}dx}} + \Big(\underbrace{\frac{A_3}{A_1} e^{\int \frac{A_2}{A_1}dx}}_{q} - \underbrace{\frac{\lambda}{A_1} e^{\int \frac{A_2}{A_1}dx}}_{r}\Big)\phi = 0$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx}\Big(\underbrace{e^{\int \frac{A_2}{A_1}dx}}_{p\ (\text{تابع})}\phi'\Big) + \Big(\frac{A_3}{A_1} e^{\int \frac{A_2}{A_1}dx} - \lambda\Big(\frac{1}{A_1} e^{\int \frac{A_2}{A_1}dx}\Big)\Big)\phi = 0$$

λ کمیتی مستقل از متغیرهای x و y است:

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[p(x)y'\right] + \left[q(x) + \lambda r(x)\right]y = 0 \qquad I,\ a<x<b$$

شرایط مرزی
$$\begin{cases} a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0 \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

ثابت‌های a_1 و a_2 و b_1 و b_2 به طور همزمان صفر نمی‌شوند

توابع p و q و r تماماً کمیت‌های حقیقی هستند

مسئله اشتورم لیوویل منظم $\Rightarrow$ $p>0$ و
- در بازه I تابع r پیوسته و مشتق‌پذیر و $r>0$
- q " " + یکبار مشتق‌پذیر
- p " " + مشتق‌پذیر حداقل تا مرتبه دو

بدنبال λ ای هستیم که معادله بالا (با اضافه شدن شرایط گفته شده) جواب غیر بدیهی داشته باشد

λ : مقدار ویژه — Eigenvalue

y : تابع ویژه — Eigenfunction

$p(a)=p(b)$
$y(a)=y(b)$
و مشتقات برابر $y'(a)=y'(b)$
} اگر این حالت برقرار باشد ← می‌گوییم مسئله اشتورم لیوویل تناوبی است

(1)

★ خواص مقدار ویژه:

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\dots<\lambda_n<\dots$

$\lim_{n\to\infty}\lambda_n =$ متوقف نمی‌شود

(این λ ها در ارتعاشات همان فرکانس‌ها هستند)

این مقدار ویژه کمترین مقداری است که λ می‌تواند داشته باشد (در مسائل تغییراتی λ ، I را min می‌کند)

λ_1 : فرکانس (هارمونیک) اول

(2) if $\underbrace{\lambda_i, \lambda_j}_{\text{مقادیر مجزا}} \xrightarrow{(i\neq j)} \phi_i, \phi_j$ $\qquad \int_a^b r\,\phi_i\,\phi_j\,dx = 0 \quad i\neq j$

r: تابع وزنی

«تعامد نسبت به تابع وزنی r»

$$i=j \rightarrow \int_a^b r\,\phi_i^2(x)\,dx = N \quad (N: \text{Norm})$$

در حالت کلی $\Longrightarrow \int_a^b r\,\phi_i\,\phi_j\,dx = N\,\delta_{ij}$

$$\rightarrow \frac{1}{N}\int_a^b r\,\phi_i\,\phi_j\,dx = \delta_{ij}$$

این ϕ و ψ از لحاظ ثابت جداسازی متفاوت است

یا $\int_a^b r\left(\frac{\phi_i}{\sqrt{N}}\right)\left(\frac{\phi_j}{\sqrt{N}}\right)dx = \delta_{ij}$

(متعامد) Orthogonal : ϕ

(متعامد یکه) Orthonormal : ψ ←

تفاوت در این توابع ψ ($N=1$)

$$\int_a^b r\,\psi_i\,\psi_j\,dx = \delta_{ij}$$

(3) هر تابع دلخواه را که در شرایط خاصی صدق می‌کند را می‌توانیم برحسب این توابع ویژه مبسط دهیم

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k(x)$$

$$c_k=\frac{\int_a^b r\,\phi_k\,\phi_m\,dx}{\int_a^b r\,\phi_k^2\,dx}$$

← در ارتباط با λ است

(مخرج) ← نرم ۱

(4) $\lambda \to$ Real — λ ها همگی حقیقی هستند

(5) اگر ϕ_i و ϕ_j در بازه (c,d) صفر مشترک داشته باشند

به این معنی است که ϕ_i و ϕ_j وابسته خطی هستند ← ($\phi_i=k\phi_j$)

(6) اگر در بازه I، ϕ_i دو تا صفر داشته باشد، بین دو صفر ϕ_i حتماً یک صفر برای ϕ_j وجود دارد و برعکس.

(حالات 2 و 3 و 4 بررسی می‌شوند!)

تعریف عملگر اشتورم لیوویل

$$L=\frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\right)+q$$

$$\to L[y]+\lambda r(x)y=0$$

★ برای اثبات خاصیت (2) از رابطه بالا استفاده می‌کنیم

$$L[\phi_i]+\lambda_i r\phi_i=0 \quad \times\phi_j \quad \mathrm{I} \qquad \to \mathrm{I}-\mathrm{II}=?$$

$$L[\phi_j]+\lambda_j r\phi_j=0 \quad \times\phi_j \quad \mathrm{II}$$

$$\rightarrow \phi_j L[\phi_i] - \phi_i L[\phi_j] + (\lambda_i - \lambda_j) r \phi_i \phi_j = 0$$

$$\begin{cases} L[\phi_i] = \dfrac{d}{dx}[p\phi_i'] + q\phi_i \\ \phi_j L[\phi_i] = \phi_j \dfrac{d}{dx}[p\phi_i'] + q\phi_i\phi_j \end{cases}$$

به همین ترتیب $\phi_i L[\phi_j] = \phi_i \dfrac{d}{dx}[p\phi_j'] + q\phi_i\phi_j$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} = \phi_j \frac{d}{dx}[p\phi_i'] - \phi_i \frac{d}{dx}[p\phi_j']$$

در معادله اصلی ★

$$\phi_j \frac{d}{dx}[p\phi_i'] = \frac{d}{dx}[p\phi_i'\phi_j] - p\phi_i'\phi_j'$$

$$\phi_i \frac{d}{dx}[p\phi_j'] = \frac{d}{dx}[p\phi_j'\phi_i] - p\phi_j'\phi_i'$$

$$= \frac{d}{dx}[p\phi_i'\phi_j - p\phi_j'\phi_i] + (\lambda_i - \lambda_j) r\phi_i\phi_j = 0$$

$$\frac{d}{dx}[p(\phi_i'\phi_j - \phi_j'\phi_i)] + (\lambda_i - \lambda_j) r\phi_i\phi_j = 0$$

$$\frac{d}{dx}[p(\phi_i'\phi_j - \phi_j'\phi_i)] = (\lambda_j - \lambda_i) r\phi_i\phi_j$$

با استفاده از ... !

در بازه a تا b نسبت به x انتگرال میگیریم:

$$\rightarrow p[\phi_i'\phi_j - \phi_j'\phi_i]\Big|_a^b = \overbrace{(\lambda_j - \lambda_i)}\int_a^b r\phi_i\phi_j\,dx - \int_a^b r\phi_i\phi_j\,dx = 0$$

شرط مرزی نوع اول ① $\phi(a) = 0 \quad \phi(b) = 0 \quad \rightarrow \quad \phi_i(a) = \phi_j(a) = 0, \quad \phi_i(b) = \phi_j(b) = 0$

$\rightarrow \ldots = 0$

$a_2 = \ldots$
$b_2 = \ldots$
$a_1 = \ldots$
$b_1 = \ldots$

شرط مرزی نوع دوم

$$\phi'(a)=0 \qquad \phi'(b)=0$$

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ b_2 = 1 \end{cases} \qquad b_1 = 0 \qquad a_2 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{0 = 0}}$$

$$\to a_1 \phi_i(a) + a_2 \phi_i'(a) = 0 \quad 1$$

$$b_1 \phi_i(b) + b_2 \phi_i'(b) = 0 \quad 2$$

$$a_1 \phi_j(a) + a_2 \phi_j'(a) = 0 \quad 3$$

$$b_1 \phi_j(b) + b_2 \phi_j'(b) = 0 \quad 4$$

$$\begin{matrix} 1\times\phi_j(a) \\ 2\times\phi_i(a) \end{matrix} \begin{cases} a_1 \phi_i(a)\phi_j(a) + a_2 \phi_i'(a)\phi_j(a) = 0 \\ b_1 \phi_i(b)\phi_i(a) + b_2 \phi_i'(b)\phi_i(a) = 0 \end{cases} \to \phi_i'\phi_j - \phi_j'\phi_i \Big|_a = 0$$

$$\begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \Big\{ \qquad \to \phi_i'\phi_j - \phi_j'\phi_i \Big|^b = 0$$

$$\to \int r \phi_i \phi_j \, dx = 0$$

α بررسی خاصیت لزوم :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k(x)$$

$$\to r f(x) \phi_m(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k r \phi_k \phi_m$$

$$\int_a^b r f(x) \phi_m(x) \, dx = \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} c_k r \phi_m \phi_k \, dx$$

$m=k$ → نابرصفر
$m\neq k$ → صفر

$$\rightarrow \int_a^b r f(x)\,\phi_m(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \int_a^b r\,\phi_k\,\phi_m\,dx$$

$$= \begin{cases} 0 & k\neq m \\ N & k=m \end{cases}$$

$$\rightarrow \int_a^b r f(x)\,\phi_m\,dx = C_m N \qquad (C_m = C_k)$$

$$\rightarrow C_k = \frac{1}{N}\int_a^b r f\,\phi_k\,dx$$

(۴) بررسی خاصیت چهارم:

اگر جواب مختلط داشته باشیم مزدوج آن هم جواب خواهد بود

$\lambda = \alpha + i\beta$

$\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$

توابع ویژه مختلط →
$$\begin{cases} \phi = u + iv \\ \bar{\phi} = u - iv \end{cases}$$

$$\rightarrow (\lambda - \bar{\lambda})\int_a^b r\,\phi\,\bar{\phi}\,dx = 0$$

$$\rightarrow 2i\beta \int_a^b r\,(u^2+v^2)\,dx = 0$$

u,v توابع حقیقی ، $r>0$

$$\rightarrow \boxed{\beta = 0} \rightarrow$$ λ یک کمیت حقیقی است

بررسی معادله موج یک بعدی

$$c^2 u_{xx} = u_{tt} \qquad 0<x<L,\; t>0$$

$$\begin{cases} u(0,t)=0 & 0\le x\le L \\ u(L,t)=0 & 0\le x\le L \end{cases} \qquad u(x,0)=f(x) \quad t\geq 0 \qquad u_t(x,0)=g(x) \quad t\geq 0$$

$$u(x,t) = \Phi(x)\Psi(t) \longrightarrow c^2\Phi''\Psi = \Phi\Psi''$$

$$\rightarrow \frac{\Phi''}{\Phi} = \frac{\Psi''}{c^2\Psi} = \lambda \longrightarrow \begin{cases} \Phi'' - \lambda\Phi = 0 \\ \Phi(0)=0 \\ \Phi(L)=0 \end{cases}$$

مقایسه با مسئله اشتورم لیوویل

$$\begin{cases} p=1 \\ q=0 \\ r=1 \\ \lambda=? \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1=1 \\ a_2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1=1 \\ b_2=0 \end{cases}$$

• اگر $\lambda>0$ در نظر گرفته شود:

$$\rightarrow \Phi(x) = A_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + A_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

$$\Phi(0)=0 \longrightarrow A_1 + A_2 = 0$$

$$\Phi(L)=0 \longrightarrow A_1 e^{\sqrt{\lambda}L} + A_2 e^{-\sqrt{\lambda}L} = 0$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}L} & e^{-\sqrt{\lambda}L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

شرط جواب $|\;| =$ ~~صفر~~ صفر باشد $\leftarrow$ $A_1 = A_2 = 0$ $\leftarrow$ مقدار ویژه‌ای نمی‌دهد

اما این‌جا $|\;| \neq 0$

• اگر $\lambda=0$ در نظر گرفته شود

$$\lambda=0 \longrightarrow \Phi(x) = A_1 + A_2 x$$

$$\Phi(0)=0 \longrightarrow A_1=0$$
$$\Phi(L)=0 \longrightarrow A_2=0 \longrightarrow$$ $\lambda=0$ در شرایط مسئله صدق نمی‌کند

• اگر $\lambda>0$ در نظر گرفته شود:

$$\longrightarrow \Phi(x) = A_1 \sin\sqrt{\lambda}\, x + A_2 \cos\sqrt{\lambda}\, x \qquad \lambda>0$$

$$\Phi(0)=0 \longrightarrow A_2=0$$
$$\Phi(L)=0 \longrightarrow A_1 \sin\sqrt{\lambda}\, L=0 \quad \begin{cases} A_1=0 \longrightarrow \text{جواب بدیهی } \times \\ \text{یا} \\ \sin\sqrt{\lambda}\, L=0 \quad \checkmark \end{cases}$$

مقادیر خاصی از λ وجود دارد که $\sin\sqrt{\lambda}\, L=0$

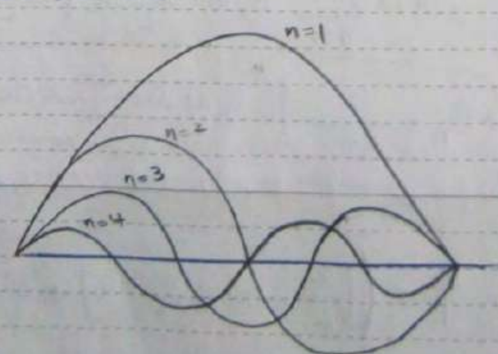
$$\longrightarrow \sin\sqrt{\lambda}\, L = \sin n\pi \longrightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L} \qquad (n=1,\dots,\infty)$$

$$\longrightarrow \boxed{\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \longrightarrow$$ تابع ویژه $\boxed{\Phi(x) = \sin\frac{n\pi}{L} x}$

λ_n ترتیب می‌شود:
$\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\dots<\lambda_n<\dots$

★ خواص تابع ویژه بدست آمده

به جز در نقاط ابتدایی و انتهایی
هر تابع ویژه Φ_n
تعداد $n-1$ صفر دارد



بین دو صفر متوالی Φ_n
یک صفر از Φ_{n-1} وجود دارد

n	تعداد صفر (Φ)
1	0
2	1
3	2
4	3

به ازای هر n برای u یک جواب داریم

$$\longrightarrow U_n(x,t) = \sin\frac{n\pi}{L}x\left(k_1\sin\frac{cn\pi}{L}t + k_2\cos\frac{cn\pi}{L}t\right)$$

$$T'' - c^2\lambda T = 0 \nearrow$$

معادله دیفرانسیل خطی و همگن است پس ترکیب خطی جواب های بدست آمده نیز جواب معادله خواهد بود.

$$\longrightarrow U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{L}x\left(A_n\cos\frac{cn\pi}{L}t + B_n\sin\frac{cn\pi}{L}t\right)$$

جلسه دوازدهم: 91/8/9

$c^2 u_{xx} = u_{tt}$

از صفحه قبل

$u(0,t) = 0$, $u_1 = 0$

$u(L,t) = 0$, $u_2 = 0$

$u(x,0) = f(x)$

$u_t(x,0) = g(x)$

$$\longrightarrow U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{L}x\left(A_n\cos\frac{cn\pi}{L}t + B_n\sin\frac{cn\pi}{L}t\right)$$

$$u(x,0)=f(x) \longrightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$\longrightarrow \int_0^L f(x)\,\phi_m(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^L \phi_m(x)\,\phi_n(x)\,dx = N\,\delta_{mn}$$

$$\longrightarrow \boxed{A_n = \frac{\int_0^L r\,f(x)\,\phi_n(x)\,dx}{\int_0^L r\,\phi_n^2(x)\,dx} = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx}$$

$$u_t(x,0) = g(x) \longrightarrow g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{L}x\left(\frac{cn\pi}{L}\right)$$

$$\longrightarrow \boxed{B_n = \frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx}$$

اگر f و g توابعی باشند و بتوان انتگرال ها را محاسبه کرد با جاگذاری در u(x,t) می توان جواب را بدست آورد

$$\longrightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{L}x\left(\left[\frac{2}{L}\int_0^L f(s)\sin\frac{n\pi}{L}s\,ds\right]\cos\frac{cn\pi}{L}t + \left[\frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(s)\sin\frac{n\pi}{L}s\,ds\right]\sin\frac{cn\pi}{L}t\right)$$

تابع جادویی: Magic Function

تابع تأثیر (تابع گرین)

معلول

$G(x,t \mid s,0)$

توضیح حالت اعمال انتگرال وجع

$$\int_0^L f(s)\Big[\underbrace{\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{L}x\,\sin\frac{n\pi}{L}s\,\cos\frac{cn\pi}{L}t}_{G(x,t \mid s,0)}\Big]ds$$

تحریک اولیه ↓ عوامل علت

$$+\int_0^L g(s)\Big[\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{cn\pi}\sin\frac{n\pi}{L}x\,\sin\frac{n\pi}{L}s\,\sin\frac{cn\pi}{L}t}_{G_1(x,t \mid s,0)}\Big]ds$$

S Source Point

نقطه منبع

$G(x,t \mid s,\tau) \quad t<\tau \rightarrow G=0$ (اصل علیت)

$[t>\tau]$

$$\rightarrow u(x,t)=\int_0^L f(s)\,G(x,t \mid s,0)\,ds+\int_0^L g(s)\,G_1(x,t \mid s,0)\,ds$$

← معادله دیفرانسیل به معادله انتگرال تبدیل شد.

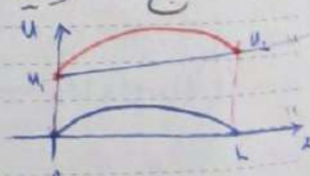
اگر معادله ناهمگن باشد شرایط حالت گرین اضافی به معادله انتگرالی اخیر اضافه خواهند شد.

• معادله موج با شرایط مرزی ناهمگن

$c^2 u_{xx}=u_{tt}$

$u(0,t)=u_1 \qquad u(x,0)=f(x)$

$u(L,t)=u_2 \qquad u_t(x,0)=g(x)$



که مستقل از زمان داده شده‌اند

فرض $\boxed{u(x,t)=W(x,t)+V(x)}$

جواب سمت همگن ← $W(x,t)$ ، جواب خصوصی ← $V(x)$

$c^2W_{xx}+c^2V''=W_{tt}$

$$\rightarrow c^2\left(W_{xx}+V''\right)=W_{tt} \rightarrow V''=0 \rightarrow V=a+bx$$

تغییر شکل در این صورت ...

$$\rightarrow \begin{cases} u_1=a \\ u_2=u_1+bL \rightarrow b=\dfrac{u_2-u_1}{L}\end{cases} \rightarrow \boxed{V(x)=u_1+\frac{u_2-u_1}{L}x}$$

اگر مختصات را در راستای این خط راست قرار دهیم تغییر مکان های اولیه صفر خواهد بود

$$\rightarrow W = U - V$$

$$W(0,t) = U(0,t) - V(0) = U_1 - U_1 = 0$$

$$W(L,t) = U(L,t) - V(L) = U_2 - U_2 = 0$$

$$W(x,0) = U(x,0) - V(x) = f(x) - V(x) = f_1(x)$$

به جای $f(x)$ در معادله انتگرال
رست آمده قرار داده می‌شود

$$W_t(x,0) = U_t(x,0) = g(x)$$

$$c^2 U_{xx} + q(x) = U_{tt}$$

$$U(x,t) = W(x,t) + V(x)$$

جانشانی $\rightarrow c^2(W_{xx} + V'') + q(x) = W_{tt}$ (جواب $W = 0$)

اگر این شرط برقرار شود $\rightarrow c^2 V'' + q(x) = 0$

$$\rightarrow V(x) = \underbrace{\frac{1}{c^2}\iint -q(x)(dx)^2}_{H(x)} + a + bx$$

$$\begin{cases} U(0,t) = U_1 \rightarrow \checkmark \\ U(L,t) = U_2 \rightarrow \checkmark \end{cases} \rightarrow V(x) = \checkmark$$

و بقیه مراحل مانند روند حالت قبل خواهد بود.

$$c^2 U_{xx} + q(x,t) = U_{tt} \qquad \begin{cases} U(0,t) = 0 \\ U(L,t) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} U(x,0) = f(x) \\ U_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

نیروی محرک خارجی اعمال شده ع

بسط U برحسب تابع ویژه

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\,\phi_n(x)$$

$$q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\,\phi_n(x)$$

$$\begin{cases} a_n(t) = \frac{1}{N}\int_0^L U(x,t)\,\phi_n(x)\,dx \\ b_n(t) = \frac{1}{N}\int_0^L q(x,t)\,\phi_n(x)\,dx \end{cases}$$

اگر ϕ و u شرط مرزی، که در آن صدق می‌کنند یکسان و همگن باشند می‌توان از [illegible] نسبت به x مشتق گرفت:

$$c^2\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\,\phi_n'(x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\,\phi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(t)\,\phi_n(x)$$

$$\longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left[c^2 a_n(t)\,\phi''(x) - a_n''(t)\,\phi_n + b_n(t)\,\phi_n(x)\right] = 0$$

برای ϕ داشتیم $\quad \phi'' + \lambda_n^2\phi = 0 \quad \longrightarrow \phi'' = -\lambda_n^2\phi \quad$ جایگذاری در معادله بالا

$$\begin{cases}\phi(0) = 0\\ \phi(L) = 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left[c^2 a_n(t)\left(-\lambda_n^2\phi\right) - a_n''(t)\,\phi_n + b_n(t)\,\phi_n(x)\right] = 0$$

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left[+a_n''(t) + c^2\lambda_n^2 a_n(t) - b_n\right]\phi_n = 0$$

بایستی کمیت داخل کروشه صفر شود:

$$a_n''(t) + c^2\lambda_n^2 a_n(t) = b_n(t)$$

$$a_n(t) = \underset{\text{همگن}}{a_n(t)_h} + \underset{\text{خصوصی}}{a_n(t)_p} \quad \Bigg\}\quad a_n(t)_h = A_1\underbrace{\sin c\lambda_n t}_{a_1(t)} + A_2\underbrace{\cos c\lambda_n t}_{a_2(t)}$$

که از روش تغییر پارامترها استفاده می‌کنیم

$$a_n(t)_p = v_1 a_1(t) + v_2 a_2(t) \quad \longrightarrow \underset{\text{رونسکین}}{W} = \begin{vmatrix}\sin c\lambda_n t & \cos c\lambda_n t\\ c\lambda_n\cos c\lambda_n t & -c\lambda_n\sin c\lambda_n t\end{vmatrix} = -c\lambda_n$$

$$v_1' = \frac{1}{W}\begin{vmatrix}0 & \cos c\lambda_n t\\ b_n(t) & -c\lambda_n\sin c\lambda_n t\end{vmatrix} \quad v_1 = -\frac{1}{c\lambda_n}\int_0^t -b_n(t)\cos c\lambda_n\tau\, d\tau$$

$$v_2' = \frac{1}{W}\begin{vmatrix}\sin c\lambda_n t & 0\\ c\lambda_n\cos c\lambda_n t & b_t\end{vmatrix} \rightarrow v_2(t) = -\frac{1}{c\lambda_n}\int_0^t b_n(\tau)\sin c\lambda_n\tau\, d\tau$$

$$\rightarrow a_n(t)_p = \frac{1}{c\lambda_n}\int_0^t b_n(\tau)\cos c\lambda_n\tau \; \sin c\lambda_n t \; d\tau$$

$$- \frac{1}{c\lambda_n}\int_0^t b_n(\tau)\sin c\lambda_n\tau \; \cos c\lambda_n t \; d\tau$$

$$\rightarrow a_n(t) = A_1 \sin c\lambda_n t + A_2 \cos c\lambda_n t + \frac{1}{c\lambda_n}\int_0^t b_n(\tau)\sin c\lambda_n(t-\tau)\,d\tau$$

5)

$$\rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\,\phi_n(x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_1 \sin c\lambda_n t + A_2\cos c\lambda_n t + \frac{1}{c\lambda_n}\int_0^t b_n(\tau)\sin c\lambda_n(t-\tau)\,d\tau\right\}\phi_n(x)$$

$$u(x,0)=f(x) \rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_2\,\phi_n(x)$$ (یعنی: بسط f برحسب ϕ ← $A = A_n$)

$$\longrightarrow A_2 = \frac{1}{N}\int_0^L f(x)\,\phi_n(x)\,dx$$

$$u_t(x,0)=g(x) \longrightarrow A_1 = \frac{1}{N}\int_0^L g(x)\,\phi_n(x)\,dx$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{Nc n\pi}\int_0^L g(s)\phi_n(s)\,ds \cdot \sin c\lambda_n t + \frac{1}{N}\int_0^L f(s)\phi_n(s)\,ds \cdot \cos c\lambda_n t\right.$$

$$\left. + \frac{1}{c\lambda_n}\int_0^t \frac{1}{N}\int_0^L q(s,\tau)\phi_n(s)\,ds \, \sin c\lambda_n(t-\tau)\,d\tau \right\}\phi_n(x)$$

$$u = \int_0^L f(s)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{N}\phi_n(s)\phi_n(x)\cos c\lambda_n t\right]ds + \int_0^L g(s)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{N\cdot cn\pi}\phi_n(s)\phi_n(x)\sin c\lambda_n t\right]ds$$

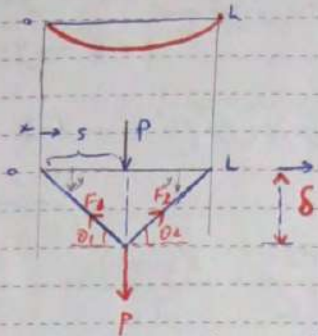
$$+ \int_0^t d\tau\int_0^L q(s,\tau)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{N\cdot c\lambda_n}\phi_n(s)\phi_n(x)\sin c\lambda_n(t-\tau)\right]ds$$

شکل زیر شکل جواب نهایی برای $u(x,t)$

• آشنایی با مفهوم تابع گرین (G) : (الاستاتیک و دینامیک)

در نخ مرتعش $f \ll T$

اگر $f \not\ll T$



منحنی تغییر مکان پیوسته است اما مشتق پذیر نخواهد بود

(δ: تغییر مکان در نقطه اعمال نیرو)

از تعادل استاتیکی

$$\begin{cases} \text{افقی}: & F_1 \cos\theta_1 = F_2 \cos\theta_2 \\ \text{عمودی}: & F_2 \sin\theta_2 + F_1 \sin\theta_1 - P = 0 \end{cases} \qquad (F_1 = F_2 = T)$$

$$\longrightarrow \operatorname{tg}\theta_2 + \operatorname{tg}\theta_1 = \frac{P}{T} \quad (\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} \operatorname{tg}\theta_2 = \dfrac{\delta}{L-s} \\ \operatorname{tg}\theta_1 = \dfrac{\delta}{s} \end{cases}$$

$$c^2 u_{xx} + \frac{f(x,t)}{\rho} = \cancel{u_{tt}}$$ (چون تابع در حال حرکت نیست)

به جز در $x=s$ نیروی خارجی ندارد

$$\longrightarrow u'' = 0 \qquad x \neq s \qquad u = u(x) \longleftarrow$$

$$(\mathrm{I}) \longrightarrow \frac{\delta}{L-s} + \frac{\delta}{s} = \frac{P}{T} \longrightarrow \delta s + \delta(L-s) = \frac{P}{T} s(L-s)$$

$$\longrightarrow \boxed{\delta = \frac{Ps(L-s)}{TL}} \qquad \begin{array}{l} s=0 \longrightarrow \delta = 0 \\ s=L \longrightarrow \delta = 0 \end{array}$$

برای بدست آوردن تغییر مکان دیگر نقاط با استفاده از δ داریم:

$$\frac{y}{x} = \frac{\delta}{s} \longrightarrow y = \frac{x\delta}{s} \longrightarrow y_{(x,s)} = \frac{Px(L-s)}{TL} \qquad x < s$$

$$\frac{y}{L-x} = \frac{\delta}{L-s} \longrightarrow y = \frac{L-x}{L-s}\delta \longrightarrow y(x,s) = \frac{Ps(L-x)}{TL} \qquad s < x < L$$

تغییر مکان ایجاد شده در نقطه x بر اثر اعمال نیروی در s = تغییر مکان ایجاد شده در نقطه s بر اثر تغییر مکان در نقطه x

ج	پ	چ	س	د	ی	ش
۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸
۲۱	۲۰	۱۹	۱۸	۱۷	۱۶	۱۵
۲۸	۲۷	۲۶	۲۵	۲۴	۲۳	۲۲
					۳۰	۲۹

تابع گرین

اگر $P=1$ ← $y(x,t) = g(x,s)$

شرط مرزی همگن مسئله را ارضا می‌کند ← $\begin{cases} x=0 \to g=0 \\ x=L \to g=0 \end{cases}$

$x=s$ ← تابع گرین از هر دو رابطه بدست می‌آید ⇐ تابع گرین در $x=s$ پیوسته است

اگر مشتق از جواب را محاسبه کنیم :

مشتق سمت راست $\lim_{x\to s^+} y(x,s)$ − مشتق سمت چپ $\lim_{x\to s^-} g(x,s)$ $= \frac{-Ps}{TL} - \frac{P(L-s)}{TL} = -\frac{PL}{TL} = -\frac{P}{T}$

← مشتق دوم برای این کمیت تعریف نمی‌شود . در $x=s$

$\longrightarrow g''(x,s) = 0 \qquad (x \neq s)$

$\longrightarrow g''(x,s) = -\delta(x-s)$

← به خاطر تعریف مسئله

تابع گرین : پاسخ هر سیستم به ورودی واحد متمرکز می‌باشد

جلسه سیزدهم : 91/8/1

$y(x,s)$: تغییر مکان در نقطه x در اثر اعمال بار در نقطه s ی :

$$y(x,s) = \begin{cases} \frac{Px(L-s)}{TL} & x<s \\ \frac{Ps(L-x)}{TL} & x>s \end{cases}$$

در $x=s$ تابع g پیوسته است

$(P=1)$ تابع گرین متقارن $\longrightarrow y(x,s) = y(s,x) \to \frac{Px(L-s)}{TL} , \frac{Ps(L-x)}{TL}$ ←

تابع گرین در شرط مرزی همگن مسئله صدق می‌کند

اگر $P=1$ → $\lim_{x\to s^+} y - \lim_{x\to s^-} y = -\frac{1}{T}$

$$Ty'' = -\delta(x-s) \xrightarrow{\text{انتگرال}} \underbrace{\int^{L} Ty''\,dx}_{\text{در تمام نقاط به جز در نزدیکی } x=s \text{ صفر است}} = -\underbrace{\int^{L} \delta(x-s)\,dx}_{=1}$$

$$\rightarrow Ty'\Big|_{s^-}^{s^+} = -1 \rightarrow$$ « همان رابطه صفحه قبل »

مثال: $y'' + k^2 y = 0 \quad k \neq \frac{n\pi}{L} \quad 0 < x < L \qquad y(0)=0,\ y(L)=0$

اگر $k = \frac{n\pi}{L} \leftarrow y = \sin\frac{n\pi}{L}$

برای $\frac{n\pi}{L}$ مقادیر ویژه داریم.

$y \Rightarrow f(\sin kx, \cos kx)$

$$y(x,s) = \begin{cases} A_1 \sin kx + A_2 \cos kx & x<s \\ B_1 \sin kx + B_2 \cos kx & x>s \end{cases}$$

$$y(0,s) = 0 \longrightarrow \boxed{A_2 = 0}$$

$$y(L,s) = 0 \longrightarrow B_1 \sin kL + B_2 \cos kL = 0 \rightarrow B_2 = -B_1 \operatorname{tg} kL$$

$$\rightarrow y(x,s) = \begin{cases} A_1 \sin kx & x<s \\ B_1(\sin kx - \operatorname{tg} kL \cos kx) = \dfrac{B_1 \sin(kL-kx)}{\cos kL} = C_1 \sin k(L-x) \end{cases}$$

در $x=s$ باید باهم برابر باشند $\leftarrow A_1 \sin ks = C_1 \sin k(L-s)$

$$\longrightarrow A_1 = C_1 \cdot \frac{\sin k(L-s)}{\sin ks}$$

$$\rightarrow y(x,s) = \begin{cases} C_1 \dfrac{\sin k(L-s)}{\sin ks} \sin kx & x<s \\ C_1 \sin k(L-x) & x>s \end{cases}$$

تعامل مشتق‌ها : $-kC_1 \cos k(L-s) - kC_1 \dfrac{\sin k(L-s)}{\sin ks} = -1$

$$\longrightarrow \frac{\sin ks \cos k(L-s) - }{\sin ks} =$$

$$\longrightarrow C_1 = \frac{\sin ks}{k \sin kL}$$

جایگذاری C_1 در رابطه :

$$\to y(x,s) = \begin{cases} \dfrac{\sin k(L-s)}{k \sin kL} \sin kx & x<s \\[2ex] \dfrac{\sin k(L-x) \sin ks}{k \sin kL} & x>s \end{cases}$$

اگر جای x و s عوض شود، تغییری نمی‌کند متقارن است

$$\xrightarrow{\text{جواب معادله}} y(x) = \int_0^x \frac{\sin k(L-x) \sin ks}{k \sin kL}\, ds + \int_x^L \frac{\sin k(L-s)}{k \sin kL} \sin kx \, ds$$

$x>s$ ، انتگرال نسبت به x

$$\longrightarrow \boxed{y(x) = \frac{1}{k^2 \sin kL}\left[\sin k(L-x) + \sin kx - \sin kL\right]}$$

اگر $x=0 \to y=0$ ✓

$x=L \to y=0$ ✓

اگر بخواهیم جواب برحسب s باشد (جای حد انتگرال با رونقطه مشاهده را عوض می‌کنیم)

$$y(x) = \int_s^L \frac{\sin k(L-x) \sin kx}{k \sin kL}\, dx + \int_0^s \frac{\sin k(L-s)}{k \sin kL}\, dx$$

اگر $y'' + k^2 y = f$

$$\to y(x) = \int \underset{\downarrow}{f}_{f(s)} \_\_\_\_\_ \, ds + \int \underset{\downarrow}{f}_{f(s)} \_\_\_\_\_ \, ds$$

$f(x)$ dx $f(x)$ dx

اگر

$\times G \quad y'' + k^2 y = f$

تابع گرین در رابطه معادله صدق می‌کند:

$\times y \quad G'' + k^2 G = -\delta(x-s)$

از هم کم می‌کنیم $\longrightarrow$

$$Gy'' + \cancel{k^2Gy} - yG'' - \cancel{k^2Gy} = Gf + y\delta(x-s)$$

می‌توانیم از طرفین معادله نسبت به متغیرهای x یا s (به دلخواه) انتگرال بگیریم

$$\underbrace{\int_0^L (Gy'' - yG'')\,ds}_{\text{جزء به جزء}} = \int_0^L Gf\,ds + \underbrace{\int_0^L y\,\delta(x-s)\,ds}_{y(x)}$$

$$Gy'\Big|_0^L - \int_0^L G'y'\,ds + \int_0^L y'G'\,ds = \int_0^L Gf\,ds + y$$

با شرط مرزی

$$\longrightarrow y = -\int_0^L Gf\,ds$$

اگر شرایط مرزی به صورت بالا نباشد (ناهمگن باشد، معادله هم ناهمگن است):

$$\begin{cases} y(0) = y_1 \\ y(L) = y_2 \end{cases}$$

یک راه ساده‌تر برای تعیین تابع گرین (G):

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \longrightarrow G(x,s) = ? \qquad I:[a,b]$$

y_1 جواب عمومی معادله که شرط مرزی سمت چپ را ارضا می‌کند.

$y_1(x) : \longleftarrow y(a)$

y_2 〃 〃 〃 〃 راست 〃 〃

$y_2(x) : \longleftarrow y(b)$

$$\longrightarrow G(x,s) = \begin{cases} C_1(s)\,y_1(x) & x < s \\ C_2(s)\,y_2(x) & x > s \end{cases}$$

★ از پیوستگی تابع گرین داریم:

$$G(x, s^+) = G(x, s^-)$$

$$\longrightarrow c_2(s)\, y_2(s) = c_1(s)\, y_1(s)$$

$$\longrightarrow c_2(s)\, y_2(s) - c_1(s)\, y_1(s) = 0$$

شرط پرش ★

$$\star\; G'_x(s^+, s) - G'_x(s^-, s) = -1 \longrightarrow$$ ضریب بالاترین رتبه مشتق

$$\longrightarrow c_2(s)\, y'_2(s) - c_1(s)\, y'_1(s) = -1$$

$$\longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} y_2(s) & -y_1(s) \\ y'_2(s) & -y'_1(s) \end{bmatrix}}_{-y_2 y'_1 + y_1 y'_2 = w} \begin{bmatrix} c_2(s) \\ c_1(s) \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$\hookrightarrow c_2(s) = \frac{1}{w} \begin{vmatrix} 0 & -y_1(s) \\ -1 & -y'_1(s) \end{vmatrix} = -\frac{y_1(s)}{w}$$

$$c_1(s) = \frac{1}{w} \begin{vmatrix} y_2(s) & 0 \\ y'_2(s) & -1 \end{vmatrix} = -\frac{y_2(s)}{w}$$

$$\rightarrow G(x,s) = \begin{cases} -\dfrac{y_2(s)\, y_1(x)}{w} & x < s \\[2ex] -\dfrac{y_1(s)\, y_2(x)}{w} & x > s \end{cases}$$

$$\rightarrow y(x) = \int_a^b G(x,s)\, f(s)\, ds$$

ch7 : همه مسائل جز $\frac{13,14}{9,10}$ 19,20 36,37 تا 15 آذر

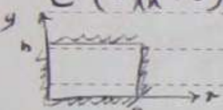
$$\to y(x) = \int_a^x -f(s)\frac{y_1(s)y_2(x)}{W}\,ds + \int_x^b -f(s)\frac{y_2(s)y_1(x)}{W}\,ds$$

برای مثال قبلی داشتیم:

$$\begin{cases} y_1(x) = \sin kx \\ y_2(x) = \sin k(L-x) \end{cases}$$

$$\longrightarrow W = \begin{vmatrix} \sin kx & \sin k(L-x) \\ k\cos kx & -k\cos k(L-x) \end{vmatrix} = -k\sin kL$$

$$c^2(u_{xx}+u_{yy}) = u_{tt} \qquad 0<x<a,\ 0<y<b \qquad t>0$$



معادله موج دو بعدی

غشا به شکل مستطیل تغییر مکان روی محیط صفر است

حال این غشا روی محیط دایره‌ای شکل قرار می‌دهیم. روی محیط تغییر مکان صفر است

معادله را برای حالت یک بعدی که تغییر مکان وابسته به شعاع باشد.

$$c^2\left(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r\right) = u_{tt}$$

$u(x,y,t) \longrightarrow u(r,t)$ ← در واقع مختصات جدید داریم:

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \phi = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

در حالت تقارن $u_\phi = 0$

$$u_x = u_r r_x + \cancel{u_\phi \phi_x} \Rightarrow \frac{x}{r}u_r$$

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(u_x) = \frac{\partial}{\partial x}(u_r)\frac{x}{r} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)u_x$$

$$\frac{r-\frac{x^2}{r}}{r^2} = \frac{r^2-x^2}{r^3}$$

$$= u_{rr}\left(\frac{x}{r}\right)^2 + u_r\left[\frac{r-xr_x}{r^2}\right]$$

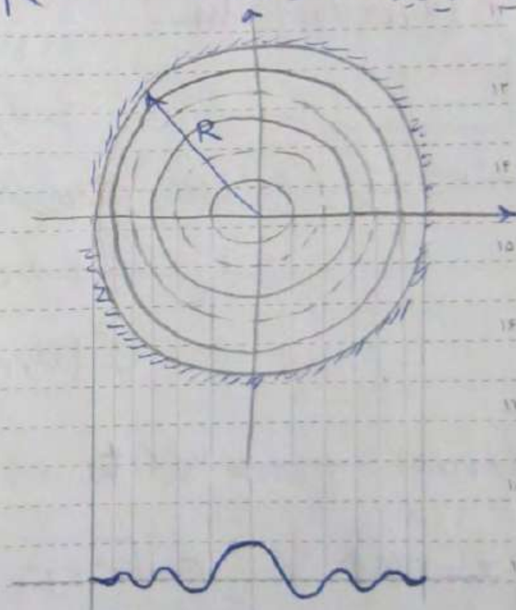
مانند بالا $\longrightarrow$ $u_{yy} = \left(\frac{y}{r}\right)^2 u_{rr} + \left(\frac{r^2-y^2}{r^3}\right) u_r$

$$u_{xx}+u_{yy} = u_{rr}\underbrace{\left(\frac{x^2+y^2}{r^2}\right)}_{1} + u_r\underbrace{\left(\frac{r^2-x^2+r^2-y^2}{r^3}\right)}_{1/r}$$

$$A \longrightarrow \boxed{u_{rr} + \frac{1}{r}u_r = \frac{1}{c^2}u_{tt}} \qquad \begin{cases} 0<r<R \\ t>0 \end{cases}$$

شرط مرزی
$$\begin{cases} u(R,t)=0 \\ \frac{\partial u}{\partial r}(0,t)=0 \quad \text{یا} \quad \lim_{r\to 0}|u(r,t)|<\infty \end{cases}$$

شرط با کمترین تغییرات در مرکز اتفاق می‌افتد



شرط اولیه
$$\begin{cases} u(r,0)=f(r) \\ u_t(r,0)=g(r) \end{cases}$$

* با جداسازی متغیرها شروع می‌کنیم،

روش

$$u(r,t) = \phi(r)\psi(t)$$

$$\to \phi''\psi + \frac{1}{r}\phi'\psi = \frac{1}{c^2}\phi\psi''$$

$$\to \frac{\phi''}{\phi} + \frac{1}{r}\frac{\phi'}{\phi} = \frac{\psi''}{c^2\psi} = \lambda$$

$$\begin{cases} \psi'' - \lambda c^2\psi = 0 \\ \phi'' + \frac{1}{r}\phi' - \lambda\phi = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} r^2\phi'' + r\phi' - \lambda r^2\phi = 0 \quad (*) \\ \phi(0)<\infty \quad \text{یا} \quad \phi'(0)=0 \\ \phi(R)=0 \end{cases}$$

$(*) \to \frac{d}{dr}(r\phi') - \lambda r \phi = 0$ (مسئله اشتورم لیوویل نامنظم)

$(**)$ (حالت خاص) از $x^2y'' + xy' + (\beta^2 x^2 - \nu^2)y = 0$

جلسه چهاردهم 91/8/16

معادله (معادلات بسل) $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (\nu > -\frac{1}{2})$

$y'' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{a(x)} y' + \underbrace{\left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)}_{b(x)} y = 0$ ← شکل استاندارد معادله درجه دو بسل

$x=0$ نقطه تکین منظم این معادله است

$\begin{cases} a(x) & x=0 \\ b(x) & x=0 \end{cases}$ $(x=0)$ R.S.P

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} (x-0)\,a(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0} (x-0)^2\, b(x) = -\nu^2 \end{cases}$

روش فروبنیوس: $(x-x_0)^r \sum a_k (x-x_0)^k$: جواب

برای این معادله $x_0 = 0$

جواب فرض $y = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r}$

جایگذاری در معادله $\to$ $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1) a_k x^{k+r} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} (k+r) a_k x^{k+r}$

$+ \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r+2} - \nu^2 \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r} = 0$

$k \longrightarrow k-2$

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1) a_k x^{k+r} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} (k+r) a_k x^{k+r} + \left(\sum\limits_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{k+r} \right) - \nu^2 \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r}$