

هندسه دیفرانسیل کاربردی

قابل استفاده دانشجویان رشته عمران نقشه برداری

دکتر مهدی نجفی خواه

عضو هیأت علمی دانشگاه علم و صنعت ایران

تابستان ۱۳۸۰

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرست مندرجات

۱۱	نظریهٔ منحنیها	۱
۱۱	۱.۱ خم و منحنی	
۲۰	۲.۱ منحنیهای جبری	
۲۸	۳.۱ پارامتر طبیعی	
۲۹	۴.۱ منحنیهای جبری	
۳۴	۵.۱ کنج فرنه	
۴۱	۶.۱ نمایش موضعی منحنیها	
۴۴	۷.۱ محاسبات مستقیم	
۴۷	۸.۱ هندسهٔ فراگیر منحنیها	
۴۷	۱.۸.۱ قضیهٔ بنیادی هندسهٔ فراگیر منحنیهای مسطحه	
۴۷	۲.۸.۱ نتیجه	
۴۷	۳.۸.۱ قضیهٔ بنیادی هندسهٔ فراگیر منحنیهای مسطحه	

۴۸	نتیجه	۴.۸.۱
۴۸	مثال	۵.۸.۱
۵۰	مثال	۶.۸.۱
۵۱	گسترده و گسترنده	۹.۱
۵۲	تعریف	۱.۹.۱
۵۲	قضیه	۲.۹.۱
۵۳	قضیه	۳.۹.۱
۵۴	قضیه	۴.۹.۱
۵۴	تمرین	۵.۹.۱
۵۵	نظریهٔ رویه‌ها	۲
۵۵	تعاریف اولیه	۱.۲
۵۵	تعریف نقشه یا چارت	۱.۱.۲
۵۶	تعریف رویه - سطح	۲.۱.۲
۵۶	تعریف نقطه منظم	۳.۱.۲
۵۷	تعریف اطلس	۴.۱.۲
۵۷	مثال	۵.۱.۲
۵۹	تمرین	۶.۱.۲
۵۹	مثال	۷.۱.۲
۶۰	مثال	۸.۱.۲
۶۱	مثال	۹.۱.۲
۶۲	هندسهٔ یک رویه	۱۰.۱.۲
۶۲	قضیه	۱۱.۱.۲
۶۳	مثال	۱۲.۱.۲
۶۴	کمیت هندسی	۱۳.۱.۲
۶۴	مثال	۱۴.۱.۲

۶۴	اولین فرم اساسی	۲.۲
۶۴	دیفرانسیل طول قوس منحنی واقع بر رویه	۱.۲.۲
۶۶	تعریف: ضرایب اولین فرم اساسی	۲.۲.۲
۶۶	تعریف: اولین فرم اساسی	۳.۲.۲
۶۶	یادداشت	۴.۲.۲
۶۶	مثال: تیوب	۵.۲.۲
۶۸	کاربردهای اولین فرم اساسی	۳.۲
۶۸	فضا و صفحه مماس در نقطه‌ای از یک رویه	۱.۳.۲
۷۰	هندسه تحلیلی در هر نقطه از رویه	۲.۳.۲
۷۱	مثال	۳.۳.۲
۷۱	مثال	۴.۳.۲
۷۳	طول قوس یک منحنی واقع بر یک رویه	۵.۳.۲
۷۳	مثال	۶.۳.۲
۷۴	مثال	۷.۳.۲
۷۵	محاسبه مساحت ناحیه‌ای از یک رویه	۸.۳.۲
۷۶	مثال	۹.۳.۲
۷۷	محاسبه زاویه بیت دو منحنی واقع بر یک رویه	۱۰.۳.۲
۷۸	مثال	۱۱.۳.۲
۷۸	دومین فرم اساسی	۴.۲
۸۰	مثال: نمودار توابع	۱.۴.۲
۸۲	مثال: رویه‌های دورانی	۲.۴.۲
۸۴	انواع نقاط واقع بر یک رویه	۵.۲
۸۶	یادداشت:	۱.۵.۲
۸۶	مثال	۲.۵.۲
۸۷	مثال	۳.۵.۲
۸۷	مثال: زین میمون	۴.۵.۲

۸۷	نگاشت کروی - گاوسی	۶.۲
۸۸	مثال	۱.۶.۲
۸۸	تعریف: انحناء گاوسی	۲.۶.۲
۸۹	قضیه	۷.۲
۸۹	مثال	۱.۷.۲
۸۹	مثال: رویه‌های خطدار	۲.۷.۲
۹۱	مثال	۳.۷.۲
۹۲	یادداشت:	۴.۷.۲
۹۲	انحنای قائم و ژئودزیک	۸.۲
۹۳	تعبیر هندسی	۱.۸.۲
۹۳	قضیه	۲.۸.۲
۹۴	نکته	۳.۸.۲
۹۴	مثال	۴.۸.۲
۹۶	تمرین	۵.۸.۲
۹۷	قضیه	۶.۸.۲
۹۷	انحنای متوسط	۹.۲
۹۷	قضیه	۱.۹.۲
۹۷	تمرین	۲.۹.۲
۹۷	نکته	۳.۹.۲
۹۸	قضیه	۴.۹.۲
۹۸	قضیه	۵.۹.۲
۹۸	منحنی‌های ژئودزی	۶.۹.۲
۹۹	قضیه	۷.۹.۲
۹۹	قضیه	۸.۹.۲
۱۰۰	قضیه	۹.۹.۲

۱۰۰	مثال	۱۰.۹.۲
۱۰۲	مثال: نمونه‌ای از مثال قبل	۱۱.۹.۲
۱۰۴	قضیه	۱۲.۹.۲
۱۰۴	مثال: کره	۱۳.۹.۲
۱۰۶	مثال: مخروط	۱۴.۹.۲
۱۰۶	هندسه ذاتی یک رویه	۱۰.۲
۱۰۷	مثال: هندسه ذاتی استوانه	۱.۱۰.۲
۱۰۷	مثال: هندسه ذاتی کره	۲.۱۰.۲
۱۰۷	قضیهٔ گاوس-بونه	۱۱.۲
۱۰۷	قضیهٔ گاوس-بونه	۱.۱۱.۲
۱۰۸	مثال: مثلثهای ژئودزیک بر سطح یک کره	۲.۱۱.۲
۱۰۸	تعمیم قضیهٔ گاوسی-بونه	۱۲.۲
۱۰۸	تعریف	۱.۱۲.۲
۱۰۹	تعریف	۲.۱۲.۲
۱۰۹	قضیه اولر-پوانکاره	۳.۱۲.۲
۱۰۹	مثال	۴.۱۲.۲
۱۱۰	مثال	۵.۱۲.۲
۱۱۰	مثال	۶.۱۲.۲
۱۱۰	تعمیم قضیه گاوسی بونه	۷.۱۲.۲
۱۱۱	مثال	۸.۱۲.۲
۱۱۱	مثال	۹.۱۲.۲

مقدمه

به یقین ریاضیات زبان علوم دقیقه (نظیر فیزیک) و چه بسا علوم غیر دقیق (نظیر جامعه شناسی) است. تجربه بشر نشان می‌دهد که میزان دقت و اثربخشی هر علم و سا فنی رابطه‌ای مستقیم با میزان بکارگیری ریاضیات در آن علم و یا فن دارد. برای درک این موضوع کافی است مهندسی الکترونیک و زبان‌شناسی را مقایسه کنید. خود ریاضیات از قسمتهای مختلفی تشکیل می‌گردد که هر یک دارای مباحث کما بیش مستقلی است. از بین همه آنها شاخه‌ای جذاب و بسیار کاربردی بنام «هندسه» وجود دارد که قدمتی چند هزار ساله دارد. شاید اصطلاح «مهندس» در زبان فارسی گویای این باور باشد که متخصصان فنون قدیمی، قبل از هر چیزی هندسه می‌دانستند.

هندسه مانند سایر علوم دارای تعریف جامع بخصوصی نیست. شاید بهترین تعریف برای آن این جمله باشد که «هندسه یعنی آن چه که هندسه دانان به آن می‌پردازند!» به بیان دیگر، «آن چه که در کتب و مقالات هندسه می‌توان یافت. در حد این کتاب می‌توان اذعان نمود که «هندسه علم مطالعه اشکال صرف نظر از تبدیلات هندسی (همچون دوران، انتقال، انعکاس و ...) است.»

هندسه نیز دارای بخشهای مختلفی است که هر یک دارای خواستگاه مخصوص به خود می‌باشد. نوع ابزارهای مورد استفاده در حل این مسایل، باعث ایجاد شاخه‌های مختلف هندسه گردیده است. قبلاً با هندسه تحلیلی آشنا شده‌اید، می‌توان گفت که «هندسه تحلیلی علم مطالعه مسایل هندسی بکمک جبر خطی است.» یکی از عمده‌ترین شاخه‌های هندسه، هندسه تحلیلی است که آنرا به صورت «علم مسایل هندسی بکمک حساب دیفرانسیل» می‌توان تعریف نمود.

اشیاء یک بعدی در صفحه و یا فضا (مانند دایره و یا سهمی) را که دارای شرایط بخصوصی باشند، منحنی می‌نامیم. به همین ترتیب، اشیاء دو بعدی در فضا (نظیر سطح خارجی یک کره و یا سطح یک استوانه) را که دارای شرایط بخصوصی باشند، رویه می‌نامیم. موضوع این کتاب، هندسه دیفرانسیل منحنیها و سطوح است. این نوع بخصوص از هندسه دیفرانسیل را هندسه دیفرانسیل کلاسیک می‌نامند. هندسه دیفرانسیل کلاسیک از دو بخش کلی تشکیل می‌گردد:

(۱) هندسه دیفرانسیل موضعی^۱: که به مطالعهٔ خواص موضعی اشکال هندسی می‌پردازد؛ و

(۲) هندسه دیفرانسیل فراگیر^۲: که بر خواص فراگیر (یعنی، کلی) اشیای هندسی مطالعه می‌کند.

این کتاب از سه بخش کلی تشکیل می‌گردد، مقدمه، هندسهٔ منحنیها و هندسهٔ سطوح. روشن است بدون توجه به مبادی نظری مباحث مورد بررسی در این کتاب، مطالعهٔ آن ممکن نیست. بنابراین، لازم است که این مقدمات را به صورت کامل مطرح نموده و بررسی کرد. بر همین اساس فصل اول این کتاب به بیان این مباحث اختصاص دارد.

این کتاب حاصل سالها تدریس درس «هندسه دیفرانسیل» برای دورهٔ کارشناسی ریاضی و نیز «کارشناسی عمران - نقشه کشی» است که به مرور جمع آوری و تلخیص شده و به شکل کنونی در آمده است. در اینجا لازم است که از زحمات سرکار خانم فرزانهٔ حیدری فعال که زحمت تایپ این اثر را بر عهده داشته‌اند قدردانی کنم. همچنین، اگر مساعدت‌های خانواده‌ام نبود، تألیف این کتاب مقدور نمی‌شد. لذا، بجا است که از همراهی و صبر ایشان تشکر کنم.

از خوانندهٔ محترم تقاضی می‌شود که هر گونه پیشنهاد و یا انتقادی را کتباً به آدرس «ایران - تهران - نارمک - دانشگاه علم و صنعت ایران - دانشکدهٔ ریاضی - مهدی نجفی خواه» و یا به آدرس اینترنتی m_nadjafikhah@iust.ac.ir در میان بگذارد.

مهدی نجفی خواه

تابستان ۱۳۸۰

فصل ۱

نظریهٔ منحنیها

۱.۱ خم و منحنی

موجودات یک بعدی در فضا را منحنی می‌نامیم. روشن است که این تعریف قابلیت ورود به ریاضیات را ندارد! پس لازم است که تعریفی دقیق‌تری مطرح کنیم که بتوان آنها را به شکل مؤثری مطالعه نمود. برای این منظور، به مفهوم خم نیاز داریم.

۱.۱.۱ خم یا پارامتر. خم یا پارامتر، تابعی است مانند: $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ که دارای پنج ویژگی به شرح زیر است:

(۱) دامنهٔ $\mathbf{r}(t)$ بر بازه‌ای بسته باشد، مثلاً $D_{\mathbf{r}} = [a; b]$.

(۲) دامنهٔ $\mathbf{r}(t)$ بر بازهٔ بستهٔ a, b پیوسته باشد: به بیان دیگر اگر

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

در این صورت توابع $x(t)$ ، $y(t)$ و $z(t)$ بر بازهٔ بستهٔ $(a; b)$ پیوسته باشند.

(۳) \mathbf{r} بر بازهٔ باز $(a; b)$ مشتق‌پذیر باشد یعنی توابع $x(t)$ ، $y(t)$ و $z(t)$ بر بازهٔ $(a; b)$ مشتق‌پذیر باشند.

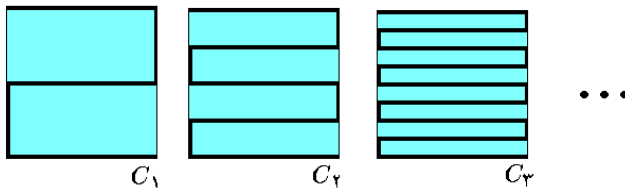
(۴) $\mathbf{r}'(t)$ بر بازهٔ باز $(a; b)$ مخالف صفر باشد. به بیان دیگر:

$$\forall t \in (a; b) \quad \mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \neq \mathbf{0}$$

یعنی، از بین توابع $x'(t)$ ، $y'(t)$ و $z'(t)$ حداقل یکی مخالف صفر باشد:

$$\begin{cases} a < t, s < b \\ \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(s) \end{cases} \Rightarrow t = s$$

۲.۱.۱ منحنی یا قوس. زیر مجموعه $C \subset \mathbb{R}^3$ از فضای \mathbb{R}^3 را در صورت منحنی^۱ یا قوس^۲ گوئیم هر گاه برابر اجتماع برد یک یا چند خم باشد. به بیان دیگر مجموعه C را در صورتی منحنی گوئیم که هر نقطه از آن درون برد لااقل یک خم قرار داشته باشد.



شکل ۱.۱: منحنی فضا پرکن: منحنی C_∞ حاصل از دنباله منحنیهای C_n

۳.۱.۱ یادداشت.. ممکن است یک منحنی مفروض به شیوه‌های مختلف برابر برد یک یا چند خم باشد.

اجتماع دو منحنی یک منحنی است.

به دلیل وجود شرط مشتقپذیری خم در همه نقاط بجز نقاط انتهایی $\mathbf{r}(a)$ و $\mathbf{r}(b)$ ، نقطه $\mathbf{r}(t)$ بر همه نقاط واقع بر بردش بشکل هموار^۳ تغییر می‌کند.

توجه کنید که اگر شرط سوم یعنی مشتقپذیری در تعریف خم حذف شود، اشکال شگفته عجیب نیز مجاز می‌شوند، نظیر منحنی فضا پرکن مشروح در شکل ۱.۱.

curve^۱
arc^۲
Smooth^۳، یعنی دیفرانسیلپذیر

به دلیل وجود شرط چهارم، همواره می‌توان خط مماس بر هر نقطه از منحنی مذکور که در شرط چهارم صدق کند تعریف کرد.

چنانچه تعریف بالا را بپذیریم منحنی‌های فضا هر کس پیش نخواهند آمد:

۴.۱.۱ تغییر پارامتر. فرض کنید

$$r_1 : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$r_2 : [c; d] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

خم باشند. منظور از تغییر پارامتر از r_1 به r_2 تابعی است مانند $h : [a; b] \rightarrow [c; d]$ طوری که

(۱) h معکوسپذیر باشد؛

(۲) h بر بازه بسته $(a; b)$ پیوسته باشد و بر بازه باز $(a; b)$ مشتقپذیر باشد؛

(۳) $r_2(h(t)) = r_1(t)$ باشد؛

۵.۱.۱ نقطه منظم و تکین. نقطه $X_0 \in C$ از منحنی C را در صورتی نقطه

منظم^۴ گوئیم که خمی مانند $r : [a; b] \Rightarrow \mathbb{R}^3$ و عددی مانند $t \in (a; b)$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که $r(t) = X_0$. نقطه‌ای که چنین نباشد را یک نقطه تکین^۵ نامیده می‌شود.

۶.۱.۱ مثال: پاره خط. فرض کنیم A و B دو نقطه متمایز باشند در این صورت

پاره خط^۶ واصل میان این دو یک منحنی است. زیرا اگر فرض کنیم

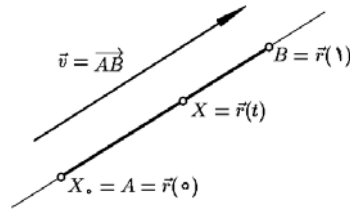
$$r(t) = (1 - t)A + tB ; 0 \leq t \leq 1$$

در این صورت $r(t)$ یک خم است و برد آن برابر پاره خط AB می‌باشد. به شکل ۲.۱ توجه شود.

^۴ Regular point

^۵ Singular point

^۶ Segment



شکل ۲.۱: پاره

برای اثبات این امر، لازم است که شرایط پنجگانه خم بودن را تحقیق کنیم: شرط اول بدیهی است، زیرا دامنه آن بازه بسته $[0; 1]$ است. با توجه به اینکه مولفه‌های $r(t)$ چند جمله‌ایهای مرتبه اول بر حسب t هستند، بنابراین شرط دوم و سوم نیز برقرار است. در مورد شرط چهارم، ملاحظه می‌کنیم که

$$r'(t) = -A + B$$

پس شرط $r'(t) = 0$ به این معنی است که $A = B$ ، که با فرض متمایز بودن این نقاط در تضاد است. شرط پنجم نیز برقرار است، زیرا

$$\begin{aligned} \begin{cases} 0 < t, s < 1 \\ r(t) = r(s) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 0 < t, s < 1 \\ (\lambda - t)A + tB = (\lambda - s)A + sB \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} 0 < t, s < 1 \\ (s - \lambda)A = (s - t)B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = t \\ s \neq t \Rightarrow A = B \end{cases} \end{aligned}$$

اکنون اثبات می‌کنیم که برد تابع $r(t)$ همان پاره خط AB است. برای این منظور توجه می‌کنیم معادله برداری خطی که از نقطه A با بردار هادی $v = AB$ می‌گذرد، برابر است با

$$r(t) = X_0 + tv = A + t(B - A) = (\lambda - t)A + tB$$

توجه شود که در این منحنی، نقاط A و B نقاط تکینند و سایر نقاط منظمند.

۷.۱.۱ مثال: مثلث. مثلث یک منحنی است. زیرا اجتماع سه پاره خط است و هر پاره خط برابر برد یک خم است. رئوس مثلث نقاط تکین و دیگر نقاط، نقاط منظمند.

۸.۱.۱ مثال: مجموعه‌های مخطط. هر شکلی که از اجتماع چند پاره خط تشکیل شود یک منحنی است.

۹.۱.۱ مثال: بیضی. فرض کنید X_0 یک نقطه و \mathbf{u} و \mathbf{v} دو بردار یک‌دیگر متعامد دلخواهند (یعنی به طول یک هستند و ضرب داخلی‌شان نیز صفر باشد) فرض کنید a و b اعداد مثبتند. اکنون تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{r}(t) = X_0 + (a \cos t)\mathbf{u} + (b \sin t)\mathbf{v}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

در این صورت $\mathbf{r}(t)$ یک منحنی است زیرا: اولاً، دامنه $\mathbf{r}(t)$ بازه بسته $[0; 2\pi]$ است. در ثانی چون مؤلفه‌های $\mathbf{r}(t)$ مثلثاتی هستند، شرایط ۲ و ۳ بدیهی‌اند. شرط چهارم نیز برقرار است زیرا اگر

$$\begin{cases} \mathbf{r}'(t) = -(a \sin t)\mathbf{u} + (b \cos t)\mathbf{v} = \mathbf{0} \\ 0 < t < 2\pi \end{cases}$$

و طرفین را در \mathbf{u} ضرب داخلی کنیم، خواهیم داشت

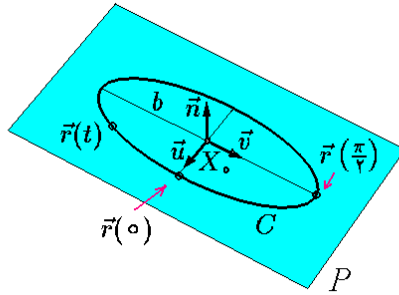
$$-(a \sin t)\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + (b \cos t)\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \Rightarrow -a \sin t = 0 \Rightarrow \sin t = 0$$

به همین ترتیب اگر طرفین را در \mathbf{v} ضرب کنیم، عبارت $\cos t = 0$ نتیجه می‌شود. بنابراین

$$\begin{cases} 0 < t, s < 2\pi \\ \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < t, s < 2\pi \\ \mathbf{X}_0 + (a \cos t)\mathbf{u} + (b \sin t)\mathbf{v} = \mathbf{X}_0 + (a \cos s)\mathbf{u} + (b \sin s)\mathbf{v} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < s, t < 2\pi \\ a(\cos t - \cos s)\mathbf{u} + b(\sin t - \sin s)\mathbf{v} = \mathbf{0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < t, s < 2\pi \\ \cos t = \cos s \\ \sin t = \sin s \end{cases} \Rightarrow t = s$$



شکل ۱.۱: بیضی

برد این خم را بیضی به مرکز X_0 و نیم قطرهای a و b و محورهای u و v می‌نامیم. به شکل ۱.۱ توجه شود.

برای تجسم این منحنی باید صفحه‌ای را در نظر بگیریم که از نقطه X_0 با بردار قائم $u \times v$ می‌گذرد. در این صفحه بیضی به معادله $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ را ترسیم می‌کنیم. اگر $u = i$ و $v = j$ و $X_0 = O$ (مبدأ) باشد، به بیضی استاندارد $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ در صفحه می‌رسیم. توجه شود که حرکت $r(t)$ بر بردش با دست راست سازگار است. به این معنی که اگر شصت دست راست را به سمت $u \times v$ قرار دهیم، آنگاه جهت دوران $r(t)$ (افزایش t) با جهت بسته شدن انگشتان دست مطابقت دارد.

۱۰.۱.۱ مثال. بیضی نشان داده شده در شکل ۱.۱ را پارامتره می‌کنیم.

برای این منظور، توجه می‌کنیم که $X_0 = (1, 1, 2)$ و صفحه‌ای که منحنی بر آن واقع است، همان صفحه $x = y$ است.

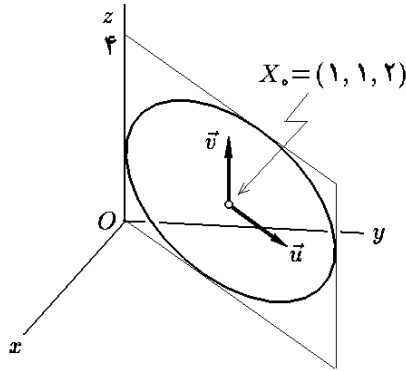
u = بردار هادی خط $x = y$ در xy - صفحه

$$\Rightarrow u = (1, 1, 0) \text{ بردار یکه} \Rightarrow u = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$$

v = بردار هادی z - محور $\Rightarrow (0, 0, 1)$

$$a = \sqrt{2}, \quad b = 2$$

$$r(t) = (1, 1, 2) + (\sqrt{2} \cos t) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2}{2}, 0 \right) + (2 \sin t) (0, 0, 1)$$



شکل ۲.۱: منحنی پارامتره نشده

$$= (1 + \cos t, 1 + \cos t, 2 \sin t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

توجه شود که همه نقاط بیضی منظمند.

۱۱.۱.۱ مثال: تعمیم. هر مجموعه‌ای که برابر اجتماع چند پاره خط و چند قطعه بیضی باشد منحنی است.

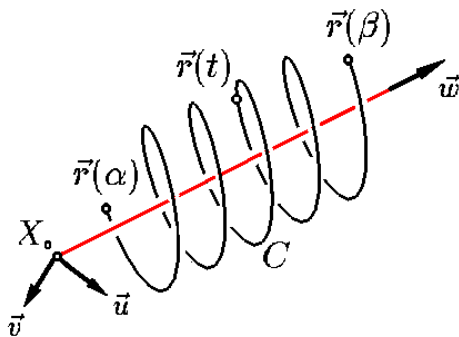
۱۲.۱.۱ مثال: مارپیچ. فرض کنید X_0 یک نقطه باشد، u و v دو بردار یکه متعامد، w برداری یکه و غیر موازی با $u \times v$ و a, b, c اعداد مثبت باشند. در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \mathbf{r}(t) = \mathbf{X}_0 + (a \cos t)\mathbf{u} + (b \sin t)\mathbf{v} + ct\mathbf{w} \\ \alpha \leq t \leq \beta \end{cases}$$

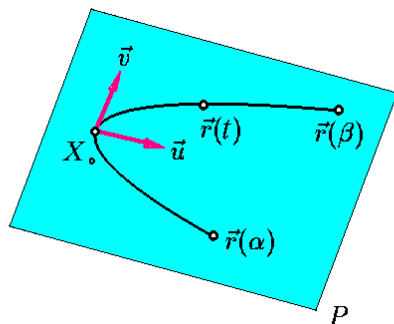
اولاً نشان دهید که مارپیچ یک خم است که سایه آن در امتداد بردار w برابر یک بیضی است و بعلاوه در هر دور چرخش به گرد محور تقارنش به اندازه $2c\pi$ بالا می‌آید. به شکل ۱.۱ توجه شود.

۱۳.۱.۱ مثال: سهمی. فرض کنید X_0 یک نقطه و u و v دو بردار یکه متعامدند و a عدد مثبت دلخواه است. در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \mathbf{r}(t) = \mathbf{X}_0 + t\mathbf{u} + at^2\mathbf{v} \\ \alpha \leq t \leq \beta \end{cases}$$



شکل ۳.۱: مارپیچ



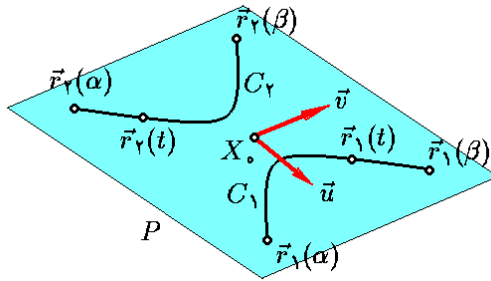
شکل ۴.۱: مارپیچ

در واقع این منحنی سهمی به معادله $y = ax^2$ در صفحه P می‌باشد که این صفحه صفحه‌ای است که از نقطه X_0 با بردار قائم $u \times v$ می‌گذرد. به شکل ۱.۱ توجه شود.

۱۴.۱.۱ مثال: هذلولی. این منحنی دو تکه است و بنابراین با دو خم توضیح داده می‌شود. برای تعریف فرض کنید X_0 یک نقطه، u و v دو بردار یکه متعامد و a و b دو عدد دلخواه مثبت باشند در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$C = C_1 \cup C_2$$

$$C_1 : \begin{cases} \mathbf{r}_1(t) = \mathbf{X}_0 + (a \cos ht)\mathbf{u} + (b \sin ht)\mathbf{v} \\ \alpha \leq t \leq \beta \end{cases}$$



شکل ۵.۱: ماریچ

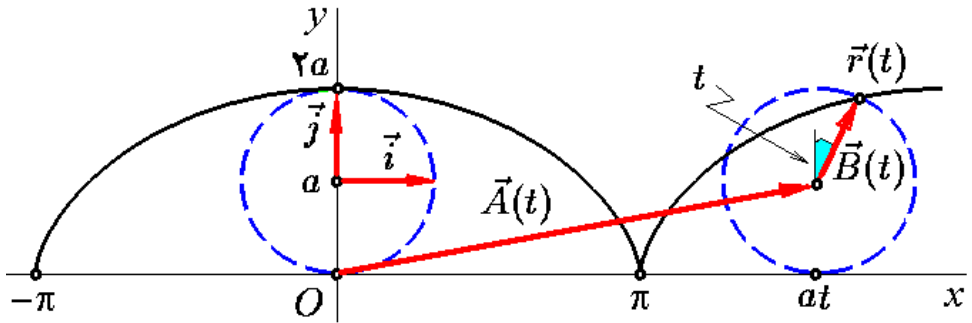
$$C_2 : \begin{cases} \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{X}_0 + (a \cos ht)\mathbf{U} + (b \sin ht)\mathbf{V} \\ \alpha \leq t \leq \beta \end{cases}$$

همه نقاط هدلولی منظمند. به شکل ۱.۱ توجه شود.

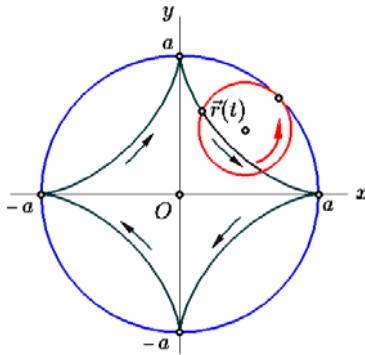
۱۵.۱.۱ مثال: سیکلوئید - دایره گون. فرض کنید دایره‌ای (چرخ) بر روی یک سطح دوران می‌کند. نقطه‌ای از لبه آن در نظر گرفته می‌شود و مسیر حرکت آن را C یک منحنی است و به آن سیکلوئید گفته می‌شود. برای سهولت در بحث فرض می‌کنیم دایره مذکور به شعاع a و به مرکز $(0, a)$ و نقطه شروع مبدا باشد و محور مورد نظر محور x ها باشد. به شکل ۱.۱ توجه شود.

سیکلوئید در نقطه تماس با محور x ها تکین است ولی در بقیه نقاط منظم است. در این صورت مشاهده می‌گردد که x پیموده شده برابر at است و y پیموده شده برابر a است.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (at, a) \\ \mathbf{B} &= (0, a) + (a \cos t)(-\mathbf{j}) + (a \sin t)(-\mathbf{i}) \\ &= (-a \cos t, a - a \sin t, 0) \\ \mathbf{r}(t) &= \mathbf{A} + \mathbf{B} = (at - a \cos t, a - a \sin t, 0) \end{aligned}$$



شکل ۶.۱: سیکلوئید



شکل ۷.۱: آستروئید

۱۶.۱.۱ مثال: آستروئید - ستاره‌گون. دایره‌ای به شعاع b را درون دایره‌ای به شعاع a می‌غلطانیم. در صورتی که $b < a$ باشد ضابطه این منحنی را بیابید. به شکل ۱.۱ توجه شود.

۲.۱ منحنیهای جبری

یکی از رایجترین روشهای تولید منحنیها، چه در صفحه و چه در فضا، معرفی آنها به کمک یک یا چند معادله می‌باشد. اما، باید شرایط بخصوصی بر این معادلات برقرار باشد که محتوای اصلی قضیهٔ تایع ضمنی هستند. این قضیه را در دو حالت مسطحه و

فضایی مطرح می‌کنیم.

۱.۲.۱ قضیهٔ تابع ضمنی در صفحه. فرض کنیم $z = f(x, y)$ تابعی است مشتقپذیر و d عددی در برد آن می‌باشد. فرض کنیم

$$C = f^{-1}\{d\} : f(x, y) = d$$

تصویر وارون d توسط f باشد. فرض کنیم $X_0 = (x_0, y_0) \in C$. در این صورت

الف اگر $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ ، آنگاه بازهٔ $[a; b]$ و تابع $y = \varphi(x)$ چنان یافت می‌شوند که

$$۱) \quad x_0 \in [a; b],$$

$$۲) \quad a \leq x \leq b \Rightarrow f(x, \varphi(x)) = 0$$

به قسمت الف از شکل ۲.۱ توجه شود.

ب اگر $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ ، آنگاه بازهٔ $[a; b]$ و تابع $x = \varphi(y)$ چنان یافت می‌شوند که

$$۱) \quad y_0 \in [a; b],$$

$$۲) \quad a \leq y \leq b \Rightarrow f(\varphi(y), y) = 0$$

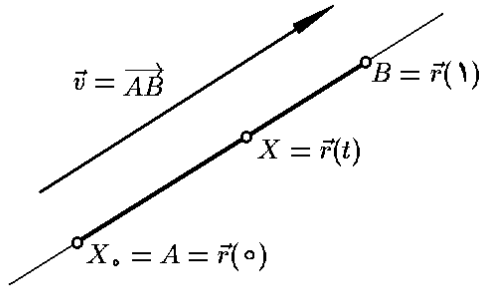
به قسمت ب از شکل ۲.۱ توجه شود.

۲.۲.۱ منحنی جبری مسطحه. منحنی C را در صورتی جبری مسطحه^۷ گوئیم

که به شکل آمده در قضیهٔ تابع ضمنی مشروح در بالا باشد. یعنی تابع $z = f(x, y)$ و عدد d در برد f چنان وجود داشته باشند که به ازای هر $X = (x, y) \in C$ ای $f'(x, y) \neq 0$ به بیان دیگر

$$f(x, y) = d \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x,y)} \neq 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x,y)} \neq 0 \end{cases} \quad (۱)$$

چنانچه $C : f(x, y) = d$ ، به کمک قضیهٔ تابع ضمنی می‌توان از پارامترهای به شکل زیر استفاده نمود:



شکل ۱.۱: قضیه تابع ضمنی در صفحه

الف) اگر $X_0 = (x_0, y_0) \in C$ و $\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{X_0} \neq 0$ ، آنگاه از پارامتر

$$\mathbf{r}(t) = (t, \varphi(t)) \quad ; \quad t \in [a; b]$$

استفاده می‌کنیم، که $y = \varphi(x)$ و $[a; b]$ مانند در قسمت الف از قضیه تابع ضمنی هستند.

ب) اگر $X_0 = (x_0, y_0) \in C$ و $\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{X_0} \neq 0$ ، آنگاه از پارامتر

$$\mathbf{r}(t) = (\varphi(t), t) \quad ; \quad t \in [a; b]$$

استفاده می‌کنیم، که $x = \varphi(y)$ و $[a; b]$ مانند در قسمت ب از قضیه تابع ضمنی هستند.

به این ترتیب می‌توان C را پارامتره نمود.

۳.۲.۱ یادداشت. فرض کنید $z = f(x, y)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد. عدد d از برد f را در صورتی یک مقدار منظم^۱ گوئیم که در شرط ۱ صدق کند. ثابت می‌شود که تقریباً همه مقادیر یک تابع دیفرانسیل‌پذیر، منظمند.

^۱Regular value

۴.۲.۱ مثال. فرض کنیم $f(x, y) = x^2 + y^2$. در این صورت همه $d \geq 0$ ها مقادیر منظم f هستند. فرض کنیم $d = (a)^2 \neq 0$. در این صورت

$$C : f(x, y) = d \Rightarrow C : x^2 + y^2 = a^2$$

یک منحنی جبری است. پارامترهای نظیر به آن عبارتند از

$$\varphi_1(x) = \sqrt{a^2 - x^2}; -a \leq x \leq a$$

$$\varphi_2(x) = \sqrt{a^2 - x^2}; -a \leq x \leq a$$

و یا

$$\varphi_3(y) = \sqrt{a^2 - y^2}; -a \leq y \leq a$$

$$\varphi_4(y) = \sqrt{a^2 - y^2}; -a \leq y \leq a$$

۵.۲.۱ مثال. فرض کنیم $f(x, y) = x^2 - y^2$. در این صورت همه $d \neq 0$ ها مقادیر منظم f هستند. فرض کنیم $d = (a)^2 \neq 0$. در این صورت

$$C : f(x, y) = d \Rightarrow C : x^2 - y^2 = a^2$$

یک منحنی جبری است. پارامترهای نظیر به آن عبارتند از

$$\varphi_1(x) = \sqrt{x^2 - a^2}; \alpha \leq x \leq \beta$$

$$\varphi_2(x) = \sqrt{x^2 - a^2}; \alpha \leq x \leq \beta$$

و یا

$$\varphi_3(y) = \sqrt{a^2 + y^2}; \alpha \leq y \leq \beta$$

$$\varphi_4(y) = \sqrt{a^2 + y^2}; \alpha \leq y \leq \beta$$

که α و β اعداد ثابتی هستند.

۶.۲.۱ قضیه تابع ضمنی در فضا. فرض کنیم $u = f(x, y, z)$ و $v = g(x, y, z)$ دو تابع مشتقپذیرند، d عددی در برد f و e عددی در برد g می‌باشند. فرض کنیم

$$C = f^{-1}\{d\} \cap g^{-1}\{e\} : f(x, y, z) = d, g(x, y, z) = e$$

مقطع تصویر وارون d توسط f و تصویر وارون e توسط g باشد. فرض کنیم $X_0 = (x_0, y_0, z_0) \in C$ و $f'(X_0) \times g'(X_0) \neq 0$. در این صورت لااقل یکی از سه حالت زیر رخ خواهد داد:

(الف) اگر $\frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)}(X_0) \neq 0$ ، آنگاه بازه $[a; b]$ و توابع $y = \varphi(x)$ و $z = \psi(x)$ چنان یافت می‌شوند که

$$۱) x_0 \in [a; b],$$

$$۲) a \leq x \leq b \Rightarrow f(x, \varphi(x), \psi(x)) = d$$

به شکل ۲.۱ توجه شود.

(ب) اگر $\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, z)}(X_0) \neq 0$ ، آنگاه بازه $[a; b]$ و توابع $x = \varphi(y)$ و $z = \psi(y)$ چنان یافت می‌شوند که

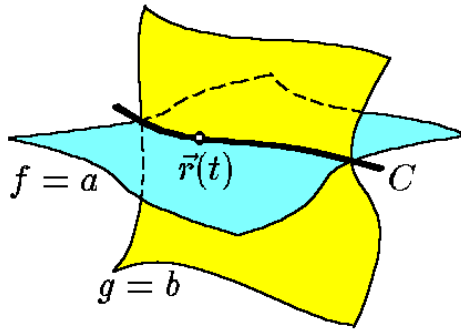
$$۱) y_0 \in [a; b],$$

$$۲) a \leq y \leq b \Rightarrow f(\varphi(y), y, \psi(y)) = d$$

(ج) اگر $\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}(X_0) \neq 0$ ، آنگاه بازه $[a; b]$ و توابع $yx\varphi(z)$ و $y = \psi(z)$ چنان یافت می‌شوند که

$$۱) z_0 \in [a; b],$$

$$۲) a \leq z \leq b \Rightarrow f(\varphi(z), \psi(z), z) = d$$



شکل ۹.۱: قضیه تابع ضمنی در فضا

۷.۲.۱ منحنی جبری فضایی. منحنی C را در صورتی جبری فضایی^۹ گوئیم که به شکل آمده در قضیه تابع ضمنی مشروح در بالا باشد. یعنی توابع $u = f(x, y, z)$ و $v = g(x, y, z)$ و عدد d در برد f و عدد e در برد g چنان وجود داشته باشند که به ازای هر $X_0 \in C$ ای $f'(X_0) \times g'(X_0) \neq 0$. به بیان دیگر

$$\begin{cases} f(x, y, z) = d \\ g(x, y, z) = e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left. \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)} \right|_{X_0} \neq 0 \\ \left. \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, z)} \right|_{X_0} \neq 0 \\ \left. \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} \right|_{X_0} \neq 0 \end{cases} \quad (2)$$

چنانچه $f = d, g = e$ ، به کمک قضیه تابع ضمنی می توان از پارامترهای به شکل زیر استفاده نمود:

الف) اگر $X_0 \in C$ و $\left. \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)} \right|_{X_0} \neq 0$ ، آنگاه از پارامتر

$$\mathbf{r}(t) = (t, \varphi(t), \psi(t)) ; t \in [a, b]$$

استفاده می کنیم، که $z = \psi(x), y = \varphi(x)$ مانند در قسمت الف از قضیه تابع ضمنی هستند.

ب) اگر $X_0 \in C$ و $\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, z)} \Big|_{X_0} \neq 0$ ، آنگاه از پارامتر

$$r(t) = (\varphi(t), t, \psi(t)) \quad ; \quad t \in [a; b]$$

استفاده می‌کنیم، که $x = \varphi(y)$ ، $z = \psi(y)$ و $[a; b]$ مانند در قسمت ب از قضیه تابع ضمنی هستند.

ج) اگر $X_0 \in C$ و $\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} \Big|_{X_0} \neq 0$ ، آنگاه از پارامتر

$$r(t) = (\varphi(t), \psi(t), t) \quad ; \quad t \in [a; b]$$

استفاده می‌کنیم، که $x = \varphi(z)$ ، $x = \psi(z)$ و $[a; b]$ مانند در قسمت ج از قضیه تابع ضمنی هستند.

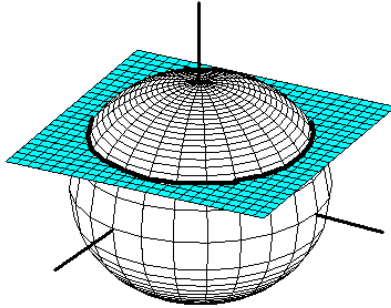
به این ترتیب می‌توان C را پارامتره نمود.

۸.۲.۱ یادداشت. فرض کنید $u = f(x, y, z)$ و $v = g(x, y, z)$ توابعی مشتقپذیر باشند. زوج مرتب (d, e) را که d در برد f و e در برد g است را در صورتی یک زوج منظم^۱ گوئیم که در شرط ۲ صدق کند. ثابت می‌شود که تقریباً همه زوجهای $(d, e) \in R_f \times R_g$ از حاصلضرب دکارتی برد توابع دیفرانسیلپذیر f و g ، منظمند.

۹.۲.۱ مثال. فرض کنیم $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ، $g(x, y, z) = z$ ، $f = d$ ، $g = e$ و $X_0 \in C$ در این صورت

$$f' \times g' \Big|_{X_0} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2x_0 & 2y_0 & 2z_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2y_0, 2x_0, 0)$$

که تنها وقتی صفر است که $x_0 \neq 0$ یا $y_0 \neq 0$ ، اما در بیستی $f(X_0) = d$ و $g(X_0) = e$. بنابراین $z_0 = e$ و $x_0^2 + y_0^2 = d - e^2$. در نتیجه، وقتی و تنها وقتی زوج



شکل ۱.۱: برخورد کره و صفحه

(d, e) منظم است که $0 < d - e^2$. یعنی، باید $d > 0$ و $-d < e < d$. این بدان معنی است که صفحه $P : g(x, y, z) = e$ و کره $S : f(x, y, z) = d$ باید یکدیگر را در یک دایره کامل قطع کنند، نه به شکل مماسی و نه به شکل تهی! به شکل ۲.۱ توجه شود.

در چنین حالتی می توان با حذف یک متغیر بین معادلات $f(x, y, z) = d$ و $g(x, y, z) = e$ و سپس یافتن یکی از آنها بر حسب دیگری، از بین x, y و z دو تا را بر حسب سومی توضیح داد. مثلاً، اگر از $x + y + z = e$ نتیجه می گیریم که $z = e - x - y$. با قرار دادن این تساوی در شرط $x^2 + y^2 + z^2 = d$ نتیجه می شود که

$$x^2 + y^2 + (e - x - y)^2 = d \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e - x \pm \sqrt{-3x^2 + 2ex + 2d - e^2} \right)$$

در نتیجه، مثلاً می توان نوشت

$$C_1 : \begin{cases} y = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e - x + \sqrt{-3x^2 + 2ex + 2d - e^2} \right) \\ z = \psi(x) = e - x - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e - x + \sqrt{-3x^2 + 2ex + 2d - e^2} \right) \end{cases}$$

$$: \begin{cases} \mathbf{r}(t) = \left(t, \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e - t + \sqrt{-3t^2 + 2et + 2d - e^2} \right), e - t - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e - t + \sqrt{-3t^2 + 2et + 2d - e^2} \right) \right) \\ 0 \leq -3x^2 + 2ex + 2d - e^2 \end{cases}$$

فصل ۱. نظریه منحنیها

توجه شود که این کار را تنها وقتی می‌توان انجام داد که $-\sqrt{3d} \leq e \leq \sqrt{3d}$ و C_1 تنها قطعه‌ای از منحنی C است که در آن $-3x^2 + 2ex + 2d - e^2 \geq 0$.

۱۰.۲.۱ مثال. فرض کنیم $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ ، $g(x, y, z) = x^2 + z^2$ ، $C : f = d, g = e$ و $X_0 = (x_0, y_0, z_0) \in C$ در این صورت،

$$f' \times g' \Big|_{X_0} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2x_0 & 2y_0 & 0 \\ 2x_0 & 0 & 2z_0 \end{vmatrix} = (4y_0z_0, -4x_0z_0, -4x_0y_0)$$

که وقتی و تنها وقتی مخالف صفر است که از بین x_0 ، y_0 و z_0 لااقل دو تا مخالف صفر باشند. از طرفی شرط $X_0 \in C$ به معنی $x_0^2 + y_0^2 = d$ و $x_0^2 + z_0^2 = e$ است. چون x_0 بین هر دو مشترک است، بنابراین، نتیجه می‌گیریم که وقتی و تنها وقتی (d, e) یک زوج منظم است که d و e هر دو مثبت باشند.

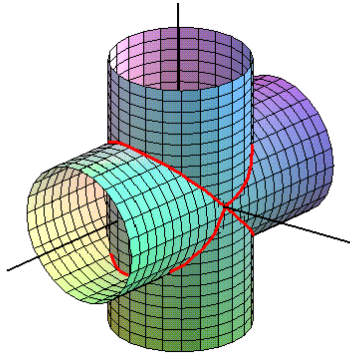
می‌سیونب میناوتی متروصن یا رد، دنتبته e و d مینکض رف

$$C_1 : \begin{cases} y = \sqrt{d - x^2} \\ z = -\sqrt{e - x^2} \\ |x| \leq \min\{d, e\} \end{cases}$$

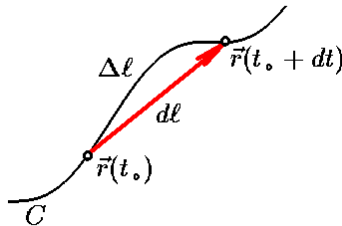
توجه شود که C_1 تنها بخشی از منحنی C است. یعنی، آن قسمتی که $z \leq 0$ و $0 \leq y, |x| \leq \min\{d, e\}$ باشد. به شکل ۲.۱ توجه شود.

۳.۱ پارامتر طبیعی

۱.۳.۱ طول قوس. فرض کنید $a \leq t \leq b$ ؛ $C : \mathbf{r}(t)$ یک منحنی باشد؛ دو نقطه $\mathbf{r}(t)$ و $\mathbf{r}(t + dt)$ را بر منحنی در نظر گرفته اولی را به دومی متصل می‌کنیم. بردار



شکل ۱۱.۱: برخورد دو استوانهٔ مستدیر



شکل ۲۱.۱: دیفرانسیل طول قوس

حاصل را $d\mathbf{r}$ می‌نماییم (دیفرانسیل تغییر مکان). روشن است که اگر dt بحد کافی کوچک باشد می‌توان بجای $\Delta \mathbf{r}$ از $d\mathbf{r}$ استفاده کرد. بنابراین دیفرانسیل طول قوس برابر است با $d\mathbf{r}$ (به شکل ۳.۱ توجه شود).

$$ds = \|d\mathbf{r}\| = \|\mathbf{r}'(t)dt\| = \|\mathbf{r}'(t)\|dt$$

۴.۱ منحنیهای جبری

و به کمک حساب دیفرانسیل و انتگرال نتیجه می‌گیریم که

$$\ell_C = \int_a^b ds = \int_a^b \|r'(t)\| dt$$

طبیعی است که اگر منحنی بیش از یک قطعه داشته باشد می توان طول هر یک از قطعات را جداگانه حساب نمود و آنگاه طول قطعات را با هم جمع نمود.

۱.۴.۱ مثال. فرض کنیم

$$C : \mathbf{r}(t) = (1 + 4 \cos t, 2 - 3t, 4 \sin t) ; -\pi \leq t \leq 5\pi$$

در این صورت

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= (-4 \sin t, -3, 4 \cos t) \\ \|\mathbf{r}'(t)\| &= \sqrt{16 \sin^2 t + 9 + 16 \cos^2 t} = \sqrt{25} = 5 \\ ds &= \|\mathbf{r}'(t)\| dt = 5 dt \\ \ell_C &= \int_{-\pi}^{5\pi} 5 dt = 5t \Big|_{-\pi}^{5\pi} = 30\pi \end{aligned}$$

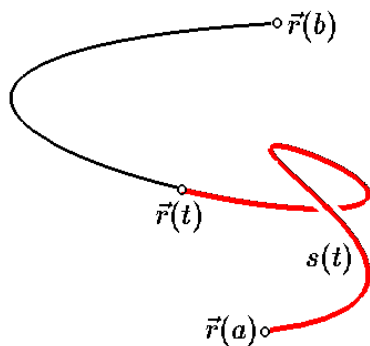
۲.۴.۱ پارامتر طبیعی. اگر $C : \mathbf{r}(t) ; a \leq t \leq b$ در اختیار باشد می توان طول منحنی را از لحظه تحت تا لحظه t محاسبه کرد. به این ترتیب تابع طول قوس بشرح زیر حاصل می شود:

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(t)\| dt$$

این تابع معکوسپذیر است، زیرا $\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}''(t)\| > 0$ و هر تابع اکیداً صعودی خود به خود معکوسپذیر است پس عکس آن را نیز می توان نتیجه گرفت. فرض کنید $t = \varphi(s)$ که $0 \leq s \leq \ell_C$ معکوس آن باشد. اکنون پارامتر طبیعی را بشکل زیر تعریف می کنیم:

$$\mathbf{r}_n(s) = \mathbf{r}(\varphi(s)) ; 0 \leq s \leq \ell_C$$

که اندیس n نشانگر طبیعی بودن پارامتر است. به شکل ۴.۱ توجه شود.



شکل ۳.۱.۱: پارامتر طبیعی

چنانچه منحنی چند تکه باشد هر تکه را جداگانه بشکل طبیعی در می آوریم و سپس با انتقال دادن متغیر s توابع حاصل را به یکدیگر متصل می کنیم.

مثال ۳.۴.۱. فرض کنیم

$$C : \mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt) ; \quad 0 \leq t \leq 2n\pi$$

مارپیچ با n دور باشد. به شکل ۴.۱ توجه شود. در این صورت

$$ds = \|(-a \sin t, a \cos t, b)\| dt = \sqrt{a^2 + b^2} dt$$

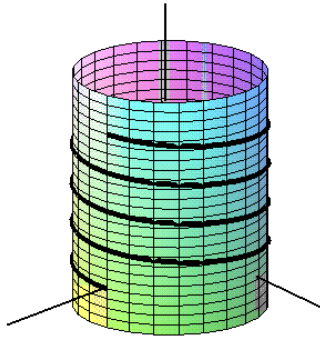
$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} dt = t\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\ell_C = s(2n\pi) = 2n\pi\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} ; \quad 0 \leq s \leq 2n\pi\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_n(s) &= \mathbf{r}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \\ &= \left(a \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), a \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \end{aligned}$$

مثال ۴.۴.۱. فرض کنید که بخواهیم منحنی نشان داده شده در شکل ۴.۱ را به



شکل ۴۱.۱:

صورت طبیعی پارامتره کنیم. در این صورت، منحنی اول پاره خط است، بنابراین

$$C_1 = (0, 2)(2, 0)$$

$$C_1 : \mathbf{r}_1(t) = (1-t)(0, -2) + t(2, 0) = (2t, 2t-2) ; 0 \leq t \leq 1$$

$$ds_1 = \|(2, 2)\| dt = 2\sqrt{2} dt$$

$$s_1(t) = \int_0^t 2\sqrt{2} dt = 2\sqrt{2}t$$

$$\ell_1 = s(1) = 2\sqrt{2}$$

$$t_1(s) = \sqrt{\frac{2}{2}}s ; 0 \leq s \leq 2\sqrt{2}$$

$$\mathbf{r}_{1,n}(s) = \mathbf{r}_1\left(\sqrt{\frac{2}{2}}s\right) = \left(\sqrt{\frac{2}{2}}s, \sqrt{\frac{2}{2}}s - 2\right) \quad (I)$$

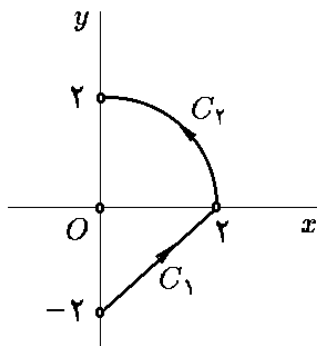
و منحنی دوم یک ربع دایره است، بنابراین

$$C_2 = \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

$$C_2 : \mathbf{r}_2(t) = (2 \cos t, 2 \sin t) ; 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$ds_2 = \|(-2 \sin t, 2 \cos t)\| dt = 2 dt$$

$$s_2(t) = \int_0^t 2 dt = 2t$$



شکل ۵.۱.۱: نمونه‌ای از یک پارامتر طبیعی

$$l_2 = s_2 \left(\frac{\pi}{2} \right) = \pi$$

$$t_2(s) = \frac{s}{2} ; 0 \leq s \leq \pi$$

$$r_{2,n}(s) = r_2 \left(\frac{s}{2} \right) = \left(2 \cos \left(\frac{s}{2} \right), 2 \sin \left(\frac{s}{2} \right) \right) \quad (II)$$

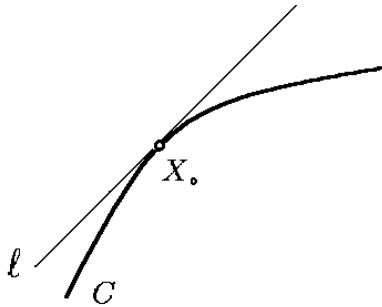
اکنون با توجه به (I) و (II) داریم

$$r_n(s) = \begin{cases} r_{1,n}(s) & 0 \leq s \leq 2\sqrt{2} \\ r_{2,n}(s - 2\sqrt{2}) & 2\sqrt{2} \leq s \leq \pi + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}s, \frac{\sqrt{2}}{2}s - 2 \right) & 0 \leq s \leq 2\sqrt{2} \\ \left(2 \cos \left(\frac{s}{2} - \sqrt{2} \right), 2 \sin \left(\frac{s}{2} - \sqrt{2} \right) \right) & 2\sqrt{2} \leq s \leq 2\sqrt{2} + \pi \end{cases}$$

۵.۴.۱ قضیه. چنانچه منحنی C بشکل طبیعی پارامتره شود آنگاه نقاط غیر منظم (بحرانی) ظاهری پارامتره طبیعی همان نقاط بحرانی منحنی C می‌باشند.

توضیح اینکه اگر $r(t)$ یک پارامتر (خم) باشد در نقاطی که $r'(t) = 0$ و یا وجود ندارد، منحنی ظاهراً بحرانی است اما ممکن است با تغییر پارامتر این نقطه ظاهراً بحرانی بیک نقطه عادی و منظم تبدیل شود همچنین این امکان وجود دارد که نقطه مورد نظر نسبت به هر پارامتری بحرانی باشد.



شکل ۱.۱: خط مماس

۵.۱ کنج فرنه

۱.۵.۱ خط مماس. سؤالی به ذهن می‌رسد و آن اینکه آیا می‌توان منحنی مفروض C در نقطهٔ X_0 را با یک خط راست به بهترین شکل ممکن تقریب زد؟ به بیانی دیگر، خطی را می‌خواهیم که از میان سایر خطوط گذرنده از آن نقطه X_0 دارای کمترین فاصله ممکن با خط مورد نظر باشد.

پاسخ مسئله در بسط تیلور مرتبه اول تابع برداری $\mathbf{r}(t)$ وجود دارد که در اینجا $\mathbf{r}(t)$ خم توضیح دهنده منحنی C در حوالی نقطهٔ X_0 است.

به بیان دیگر، اگر $X_0 = \mathbf{r}(t_0)$ باشد آنگاه ℓ خطی با تکیه‌گاه $\mathbf{r}(t_0)$ و هادی $\mathbf{r}'(t_0)$ است. به این ترتیب معادله خط مورد نظر بشکل زیر قابل بیان است:

$$\ell : X = \mathbf{r}(t_0) + t\mathbf{r}'(t_0) ; t \in \mathbb{R}$$

خط ℓ را خط مماس بر منحنی C در نقطه X_0 می‌نامیم. چنانچه بردار هادی این خط را یک‌ه‌کنیم، بردار حاصل را بردار یک‌ه مماس را نتیجه می‌دهید. به شکل ۵.۱ توجه شود.

۲.۵.۱ بردار یک‌ه مماس. بردار یک‌ه مماس^{۱۱} را به صورت

$$\mathbf{T}(t_0) = \frac{\mathbf{r}'(t_0)}{\|\mathbf{r}'(t_0)\|} = \mathbf{r}'_n(s_0)$$

Tangent - Unit tangent vector^{۱۱}

تعریف می‌کنیم. در حالت طبیعی بردار سرعت برابر بردار مماس یکه متحرک (خم) می‌شود.

۳.۵.۱ مثال. فرض کنیم

$$\mathbf{r}(t) = (t \sin t, e^{-t}, \cos t + t) ; -1 \leq t \leq 2$$

$$X_0 = (0, 1, 1) = \mathbf{r}(0)$$

$$\mathbf{r}'(0) = (\sin t + t \cos t, -e^{-t}, \sin t + 1) |_{t=0} = (0, -1, 1)$$

$$\ell : X = (0, 1, 1) + t(0, -1, 1) ; t \in \mathbb{R}$$

$$: \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

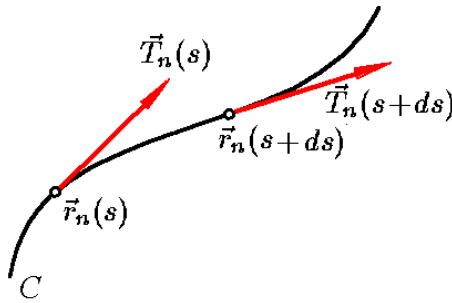
$$: \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

نتیجه شرط لازم و کافی برای آنکه یک منحنی قطعه‌ای از یک خط صاف باشد آن است که بردار یکه مماس آن در همه نقاط ثابت باشد. (یعنی شتابش صفر شود). فرض کنید منحنی C بشکل طبیعی پارامتره شده است. سپس نقطه $\mathbf{r}_n(s)$ را در نظر گرفته و متغیر آن را بشکل دیفرانسیلی تغییر می‌دهیم و بدین ترتیب، بردار \mathbf{T} (بردار یکه مماس تغییر خواهد کرد). تغییرات این بردار از ناحیه طول نسبت چون یکه است بلکه به جهت تغییر در راست است.

به همین دلیل می‌توان میزان تغییرات این بردار را ملاکی برای محاسبه میزان انحنا منحنی در نظر گرفت (به شکل ۵.۱ توجه شود). لذا تعریف می‌کنیم:

$$\vec{\kappa}_n(s) = \frac{d\mathbf{T}_n}{ds} = \mathbf{r}_n''(s)$$

$$\kappa_n(s) = \|\vec{\kappa}_n(s)\| = \|\mathbf{r}_n''(s)\|$$



شکل ۱.۱: تعریف انحناء

۴.۵.۱ مثال. با مفروضات مثال ۱ فرض می‌کنیم $m = \sqrt{a^2 + b^2}$. در این صورت:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_n(s) &= \left(a \cos\left(\frac{s}{m}\right), b \sin\left(\frac{s}{m}\right), \frac{bs}{m} \right) \\ \mathbf{T}_n(s) &= \mathbf{r}'_n(s) \\ &= \left(\frac{-a}{m} \sin\left(\frac{s}{m}\right), \frac{b}{m} \cos\left(\frac{s}{m}\right), \frac{b}{m} \right) \\ \vec{\kappa}(s) &= \mathbf{r}''_n(s) \\ &= \left(\frac{-a}{m^2} \cos\left(\frac{s}{m}\right), \left(\frac{-b}{m^2}\right) \sin\left(\frac{s}{m}\right), 0 \right) \\ \kappa_n(s) &= \|\vec{\kappa}_n(s)\| = \frac{l}{m} \end{aligned}$$

۵.۵.۱ مثال. با مفروضات مثال ۲ داریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_n &= \mathbf{r}'(s) \\ &= \begin{cases} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) & 0 < s < 2\sqrt{2} \\ \left(-\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2}, \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2} \right) & 2\sqrt{2} < s < 2\sqrt{2} + \pi \end{cases} \end{aligned}$$

$$\vec{\kappa}_n(s) = \mathbf{r}_n(s)$$

$$= \begin{cases} 0 & 0 < s < 2 \\ -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\right), -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\right) & 2\sqrt{2} < s < 2\sqrt{2} + \pi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \kappa_n(s) &= \|\vec{\kappa}_n(s)\| \\ &= \begin{cases} 0 & 0 < s < 2\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 2\sqrt{2} < s < 2\sqrt{2} + \pi \end{cases} \end{aligned}$$

۶.۵.۱ برداریکه قائم. با فرض اینکه پارامتر مورد نظر طبیعی است بنابراین فرض داریم:

$$\|\mathbf{r}'_n(s)\|^2 = \|\mathbf{T}_n(s)\|^2 = 1 \Rightarrow \mathbf{r}_n(s) \cdot \mathbf{r}_n(s) = 1$$

اکنون از طرفین نسبت به s مشتق می‌گیریم:

$$2\mathbf{r}'_n(s) \cdot \mathbf{r}''_n(s) = 0 \Rightarrow \mathbf{T}_n(s) \cdot \vec{\kappa}_n(s) = 0$$

بنابراین، همواره بردار انحناء بر منحنی عمود است. بهمین دلیل تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{N}_n(s) = \frac{\mathbf{r}''_n(s)}{\|\mathbf{r}''_n(s)\|}$$

و به آن بردار را برداریکه قائم^{۱۲} بر منحنی گفته می‌شود. این بردار بدلیل آنکه موازی و هم راستای بردار انحناء است، به سمت مرکز انحنای منحنی هدف دارد. فرض کنیم

$$\begin{cases} \mathbf{D}_n(s) = \mathbf{r}_n(s) + R_n(s)\mathbf{N}_n(s) \\ R_n(s) = \frac{1}{\kappa_n(s)} \end{cases}$$

در این صورت، نقطه $\mathbf{D}_n(s)$ را مرکز انحناء^{۱۳} و عدد $R_n(s)$ را شعاع انحناء^{۱۴} منحنی می‌نامیم.

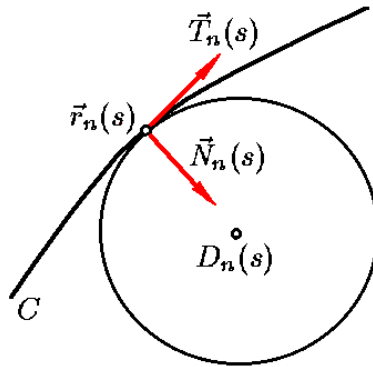
ه‌اگر \mathbf{r}_n دینمانی می‌نحینه \mathbf{r}_n س‌ا‌م‌ه‌ه‌ر‌ی‌ا‌د ار $R_n(s)$ ع‌ا‌ع‌ش و $\mathbf{D}_n(s)$ ز‌ک‌ر‌ه‌ه‌ه‌ر‌ی‌ا‌د

^{۱۲} Normal - Unit normal vector

^{۱۳} Center of curvature

^{۱۴} Radi of curvature

^{۱۵} Tangent cycle



شکل ۱.۱.۸: دایره بوسان

رأرقش بسامه ؤرپاد ریدى منحنه هاگذاآء دشابء هرپاد كى زاى تمسقء و ءدوبء ءحطسه ى منحنه ءوشء ءجوء ۱.۵.ل كشه بء. ءشاد ءهاوخء.

تمرین برای مثالهای ۱ و ۲ D_n ، R_n و N_n را محاسبه کنید.

۷.۵.۱ برداریکه قائم دوم. چنانچه منحنى درفضاى سه بعدى باشد با محاسبه ضرب خارجى برداریکه مماس و برداریکه قائم اصلى، مى توان بردار قائم جدیدى بنام برداریکه قائم دوم^{۱۶} را تعريف نمود:

$$B_n(s) = T_n(s) \times N_n(s)$$

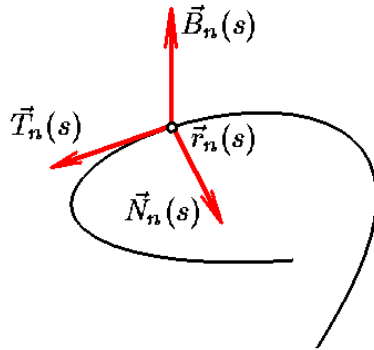
اصطلاحاً سه تایی مرتب زیر را کنج فرنه^{۱۷} منحنى مى نامیم:

$$\langle T_n, N_n, B_n \rangle$$

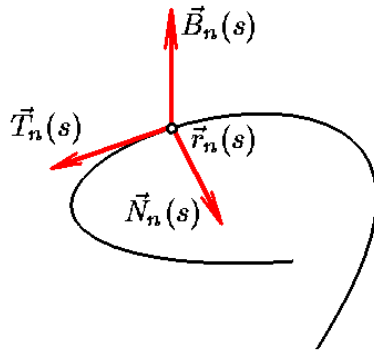
به شكل ۵.۱ توجه شود.

۸.۵.۱ صفحه مماس. از بین بردن همهء صفحات گذرنده از یک نقطه واقع بر یک منحنى مفروض صفحه اى وجود دارد كه داراى حداكثرتماس با منحنى مورد نظر مى باشد. این صفحه را صفحهء مماس بر منحنى مى نامیم.

^{۱۶} Binormal - Unit second normal vector
^{۱۷} Frenet's frame



شکل ۹.۱.۱: کنج فرنه



شکل ۹.۲.۱: صفحه مماس

روکذمه محفصه ن وچ د شابی م $B_n(t_0)$ ل امرند و $r_n(t_0)$ هاگ هیکتی ازاد محفصه ن یا
ت سا ل ماشا ر $N_n(t_0)$ و $T_n(t_0)$ ی اهرادری س پت سا ی نخنه رد س امه

محفصه ت سا عقاو ن اریدی نخنه هکیات روصه ن یا رد د شابی محطسه ی نخنه هچنانچ
دنکذریبیغت س امه محفصه رگا (ت سا ح یحصه ب لمطه ن یا س کع . دوپ دهاوخ س امه
دوشه جوت ۱.۵ ل کشه ب .) ت سا محطسه ی نخنه

۹.۵.۱ تاب . میزان تغییرات صفحه مماس بر منحنی نسبت به طول قوس را تاب
می نامیم و به بیان دقیقتر تاب عبارت است از میزان تغییرات بردار قاپم دوم بر حسب

طول قوس.

$$\mathbf{T}_n(s) = \|\mathbf{B}'_n(s)\|$$

۱۰.۵.۱ فرمولهای فرنه. هدف از تعیین این فرمولها، تعیین میزان تغییرات کنج فرنه نسبت به خودش می باشد. در ادامه خواهیم دید با داشتن این روابط می توان منحنی را باز سازی کرد. چون کنج فرنه از سه بردار مستقل تشکیل می شود بنابراین می توان نوشت:

$$\begin{cases} \mathbf{T}'_n = a_{11}\mathbf{T}_n + a_{12}\mathbf{N}_n + a_{13}\mathbf{B}_n \\ \mathbf{N}'_n = a_{21}\mathbf{T}_n + a_{22}\mathbf{N}_n + a_{23}\mathbf{B}_n \\ \mathbf{B}'_n = a_{31}\mathbf{T}_n + a_{32}\mathbf{N}_n + a_{33}\mathbf{B}_n \end{cases}$$

اکنون لازم است تا ضرایب a_{ij} را بدست آورد.

$$\mathbf{T}_n \cdot \mathbf{T}_n = \|\mathbf{T}_n\|^2 = 1 \Rightarrow \mathbf{T}_n \cdot \mathbf{T}'_n = 0 \Rightarrow a_{11} = 0$$

$$\mathbf{N}_n \cdot \mathbf{N}_n = \|\mathbf{N}_n\|^2 = 1 \Rightarrow \mathbf{N}_n \cdot \mathbf{N}'_n = 0 \Rightarrow a_{22} = 0$$

$$\mathbf{B}_n \cdot \mathbf{B}_n = \|\mathbf{B}_n\|^2 = 1 \Rightarrow \mathbf{B}_n \cdot \mathbf{B}'_n = 0 \Rightarrow a_{33} = 0$$

$$\mathbf{T}_n \cdot \mathbf{N}_n = 0 \Rightarrow \mathbf{T}'_n \cdot \mathbf{N}_n + \mathbf{T}_n \cdot \mathbf{N}'_n = 0 \Rightarrow a_{12} = -a_{21}$$

$$\mathbf{T}_n \cdot \mathbf{B}_n = 0 \Rightarrow \mathbf{T}'_n \cdot \mathbf{B}_n + \mathbf{T}_n \cdot \mathbf{B}'_n = 0 \Rightarrow a_{13} = -a_{31}$$

$$\mathbf{N}_n \cdot \mathbf{B}_n = 0 \Rightarrow \mathbf{N}'_n \cdot \mathbf{B}_n + \mathbf{N}_n \cdot \mathbf{B}'_n = 0 \Rightarrow a_{23} = -a_{32}$$

بنابراین ماتریس ضرایب مورد نظر $[a_{ij}]$ پادمتقارن است. یعنی اینکه، تراندهش برابر منهی خود ماتریس است. به بیان شهودیتتر، عناصر قطر اصلی آن صفرند و عناصر

بالای قطر نیز برابر منهی عناصر نظیر در پائین قطر اصلی هستند. به این ترتیب تنها سه ضرایب $a_{۱۲}$ ، $a_{۱۳}$ و $a_{۲۳}$ را باید مشخص کنیم. از طرفی، چون

$$\mathbf{T}'_n = (\mathbf{r}_n)' = \mathbf{r}''_n = \vec{\kappa}_n = \kappa_n \mathbf{N}_n$$

بنابراین $a_{۱۲} = \kappa_n$ و $a_{۱۳} = 0$. بعلاوه، داریم

$$\mathbf{B}'_n = a_{۳۲} \Rightarrow \tau_n = \|\mathbf{B}'_n\| = |a_{۳۲}|$$

بنابراین $a_{۳۲} = \pm \tau_n$. در اینجا یک آزادی عمل وجود دارد، و می‌توانیم مثبت یا منفی را به دلخواه انتخاب کنیم. معمول این است که منفی انتخاب شود. پس در مجموع می‌توان به جمع‌بندی زیر رسید:

۱۱.۵.۱ قضیه. در مورد مشتقات کنج فرنه نسبت به پارامتر طول قوس داریم

$$\begin{cases} \mathbf{T}'_n = \kappa_n \mathbf{N}_n \\ \mathbf{N}'_n = -\kappa_n \mathbf{T}_n + \tau_n \mathbf{B}_n \\ \mathbf{B}'_n = -\tau_n \mathbf{N}_n \end{cases}$$

۶.۱ نمایش موضعی منحنیها

برای این منظور فرض می‌کنیم نقطه مورد نظر ما $X_0 = \mathbf{r}_n(0) \in C$ باشد. اکنون بسط تیلور تابع $\mathbf{r}_n(s)$ را در حوالی نقطه صفر $s = 0$ می‌نویسیم:

$$\mathbf{r}_n(s) = \mathbf{r}_n(0) + s\mathbf{r}'_n(0) + \frac{s^2}{2}\mathbf{r}''_n(0) + \frac{s^3}{6}\mathbf{r}'''_n(0) + O(3)$$

پس لازم است که مشتقات مرتبه اول تا سوم $\mathbf{r}_n(0)$ را بر حسب کنج فرنه محاسبه کنیم:

$$\mathbf{r}_n(0) = \mathbf{X}_0$$

$$\mathbf{r}'_n(0) = \mathbf{T}'_n(0)$$

$$\mathbf{r}''_n(0) = \kappa_n(0)\mathbf{N}_n(0)$$

$$\mathbf{r}'''_n(0) = -\kappa_n(0)\mathbf{N}_n(0) - \kappa_n'(0)\mathbf{T}_n(0) + \kappa_n(0)\tau_n(0)\mathbf{B}_n(0)$$

بنابراین، با قرار دادن در بسط تیلور نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_n(s) = & \mathbf{X}_o + s\mathbf{T}'_n(o) + \frac{s^2}{2} (\kappa_n(o)\mathbf{N}_n(o)) \\ & + \frac{s^3}{6} \left(-\kappa_n''(o)\mathbf{T}_n(o) + \kappa_n'(o)\mathbf{N}_n(o) + \kappa_n(o)\tau_n(o)\mathbf{B}_n(o) \right) + O(4) \end{aligned}$$

پس اگر فرض کنیم

$$\mathbf{r}_n(s) = x(s)\mathbf{T}_n(o) + y(s)\mathbf{N}_n(o) + z(s)\mathbf{B}_n(o)$$

در این صورت، با توجه به بسط بالا داریم

$$۱) \quad x(t) = s + O(1)$$

$$۲) \quad y(t) = \frac{s^2}{2}\kappa_n(o) + O(2)$$

$$۳) \quad z(t) = \frac{s^3}{6}\kappa_n(o)\tau_n(o) + O(3)$$

اکنون برای تجسم وضعیت منحنی نسبت به کنج فرنه، تصویر این منحنی را در صفحات ساخته شده توسط کنج فرنه را می‌یابیم. برای این منظور، سعی می‌کنیم پارامتر طول قوس s را بین هر دو انتخاب از سه معادلهٔ $x(s)$ ، $y(s)$ و $z(s)$ حذف کنیم:

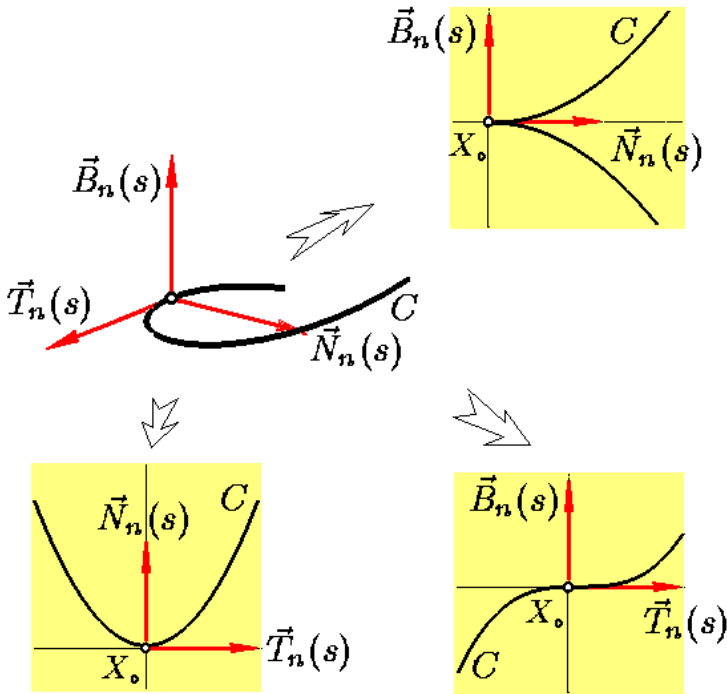
۱.۶.۱ تصویر بر صفحهٔ شامل $\mathbf{T}_n(o)$ و $\mathbf{N}_n(o)$. با توجه به اینکه

$$\begin{cases} x \approx s \\ y \approx \frac{\kappa_n(o)}{2}s^2 \end{cases}$$

نتیجه می‌گیریم $y \approx \frac{\kappa_n(o)}{2}x^2$ که یک سهمی است. به شکل ۱۲.۱ - الف توجه شود.

۲.۶.۱ تصویر بر صفحهٔ شامل $\mathbf{T}_n(o)$ و $\mathbf{B}_n(o)$. با توجه به اینکه

$$\begin{cases} x \approx s \\ z \approx \frac{\kappa_n(o)\tau_n(o)}{6}s^3 \end{cases}$$



شکل ۱۲.۱: نمایش موضعی منحنیها

نتیجه می‌گیریم $z \approx \frac{\kappa_n(\circ)\tau_n(\circ)}{6}x^3$ ، که یک منحنی درجه سوم است. به شکل ۱۲.۱ - ب توجه شود.

۳.۶.۱ تصویر بر صفحه شامل $N_n(\circ)$ و $B_n(\circ)$. با توجه به اینکه

$$\begin{cases} y \approx \frac{\kappa_n(\circ)}{2}s^2 \\ z \approx \frac{\kappa_n(\circ)\tau_n(\circ)}{6}s^3 \end{cases}$$

نتیجه می‌گیریم که اگر $\tau_n(\circ) \neq 0$ ، آنگاه $z^2 \approx \frac{9\kappa_n(\circ)}{2\tau_n^2(\circ)}y^3$ که یک منحنی مکعبی است. به شکل ۱۲.۱ - ج توجه شود.

مطالب بالا را در قضیه زیر می‌توان خلاصه نمود:

۴.۶.۱ قضیهٔ بنیادی هندسهٔ موضعی منحنیها. فرض کنیم منحنی C به صورت طبیعی پارامتره شده است و $X_0 = r(0)$ نقطه‌ای منظم و دلخواه از C است. فرض کنیم منحنی را در حوالی نقطهٔ X_0 و نسبت به کنج فرنهٔ در X_0 به صورت

$$\mathbf{r}_n(s) = x(s)\mathbf{T}_n(0) + y(s)\mathbf{N}_n(0) + z(s)\mathbf{B}_n(0)$$

نوشته‌ایم. در این صورت

$$y \approx \frac{\kappa_n(0)}{2} x^2 \quad z \approx \frac{\kappa_n(0)\tau_n(0)}{6} x^3 \quad y^3 \approx \frac{9\kappa_n(0)}{2\tau_n^2(0)} z^2$$

۷.۱ محاسبات مستقیم

هدف از این بخش محاسبهٔ مستقیم مؤلفه‌های فرنه است. قبل از آن لازم است که خود فرمولهای فرنه را برای یک پارامتر دلخواه بیان کنیم

۱.۷.۱ قضیهٔ تعمیم یافتهٔ فرنه. در مورد مشتقات کنج فرنه نسبت به پارامتر دلخواه

داریم

$$\begin{cases} \mathbf{T}'(t) = v(t)\kappa(t)\mathbf{N}(t) \\ \mathbf{N}'(t) = -v(t)\kappa(t)\mathbf{T}(t) + v(t)\tau(t)\mathbf{B}(t) \\ \mathbf{B}'(t) = -v(t)\tau(t)\mathbf{N}(t) \end{cases}$$

که در اینجا $v(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| = \frac{ds}{dt}$

اثبات: توجه داریم که

$$\begin{aligned} \mathbf{T}'(t) &= \frac{d}{dt}\mathbf{T}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{T}_n(s) \\ &= \frac{ds}{dt} \times \frac{d}{ds}\mathbf{T}_n(s) = v(t) \times \mathbf{T}'_n(s) \end{aligned}$$

$$= v(t) (\kappa_n(s) \mathbf{N}_n(s)) = v(t) \kappa(t) \mathbf{N}(t)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}'(t) &= \frac{d}{dt} \mathbf{N}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{N}_n(s) \\ &= \frac{ds}{dt} \times \frac{d}{ds} \mathbf{N}_n(s) = v(t) \times \mathbf{N}'_n(s) \\ &= v(t) (-\kappa_n(s) \mathbf{T}_n(s) + \tau_n(s) \mathbf{B}_n(s)) \\ &= -v(t) \kappa(t) \mathbf{T}(t) + v(t) \tau(t) \mathbf{B}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}'(t) &= \frac{d}{dt} \mathbf{B}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{B}_n(s) \\ &= \frac{ds}{dt} \times \frac{d}{ds} \mathbf{B}_n(s) = v(t) \times \mathbf{B}'_n(s) \\ &= v(t) (-\tau_n(s) \mathbf{N}_n(s)) = -v(t) \tau(t) \mathbf{N}(t) \end{aligned}$$

و به این ترتیب برهان تمام است. □

۲.۷.۱ قضیه. چنانچه منحنی C توسط $\mathbf{r}(t)$ پارامتره شده باشد آنگاه

$$\begin{aligned} ۱) \quad \mathbf{T}(t) &= \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} & ۲) \quad \mathbf{N}(t) &= \mathbf{B} \times \mathbf{T} \\ ۳) \quad \mathbf{B}(t) &= \frac{\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|} & ۴) \quad \kappa(t) &= \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3} \\ ۵) \quad \tau(t) &= \frac{(\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)) \cdot \mathbf{r}'''(t)}{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|^2} \end{aligned}$$

اثبات: با توجه به اینکه $v(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|$ داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= \mathbf{T}_n(s) = \frac{d}{ds} \mathbf{r}_n(s) = \frac{dt}{ds} \times \frac{d}{dt} \mathbf{r}_n(s) \\ &= v(t) \frac{1}{v(t)} \times \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \end{aligned}$$

و فرمول (۱) اثبات شد. یک نتیجه خاص از آن عبارت است از $\mathbf{r}' = v\mathbf{T}$. بنابراین

$$\mathbf{r}'' = (v\mathbf{T})' = v'\mathbf{T} + v\mathbf{T}' = v'\mathbf{T} + \kappa v^2 \mathbf{N}$$

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = (v\mathbf{T}) \times (v'\mathbf{T} + \kappa v^2 \mathbf{N}) = \kappa v^3 \mathbf{B}$$

بنابراین

$$\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\| = \|\kappa v^3 \mathbf{B}\| = |\kappa|v^3$$

و در نتیجه فرمول (۴) اثبات گردید. با قرار دادن این مقدار در عبارت بالا، فرمول (۳) نیز نتیجه می‌گردد. بعلاوه

$$\begin{aligned} \mathbf{r}''' &= (\mathbf{r}'')' = (v'\mathbf{T} + \kappa v^2 \mathbf{N})' \\ &= v''\mathbf{T} + v'\mathbf{T}' + \kappa'v^2 \mathbf{N} + 2\kappa v v' \mathbf{N} + \kappa v^2 \mathbf{N}' \\ &= v''\mathbf{T} + v'(v\kappa \mathbf{N}) + \kappa'v^2 \mathbf{N} + 2\kappa v v' \mathbf{N} + \kappa v^2 (-v\kappa \mathbf{T} + v\tau \mathbf{B}) \end{aligned}$$

$$(\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)) \cdot \mathbf{r}'''(t) = \kappa^2 v^6 \tau = \|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\| \tau$$

و به این ترتیب فرمول (۶) اثبات گردید. فرمول (۲) بدیهی است. □

۳.۷.۱ نتیجه. در مورد منحنی مسطحهٔ $C : \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) ; t \in I$ داریم

$$۱) \mathbf{T}(t) = \frac{(x'(t), y'(t))}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \quad ۲) \mathbf{N}(t) = \operatorname{sgn}(\kappa(t)) \frac{(-y'(t), x'(t))}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}$$

$$۳) \kappa(t) = \frac{x''(t)y'(t) - y''(t)x'(t)}{(\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2})^3}$$

۴.۷.۱ مثال.

۵.۷.۱ تمرین. کنج فوره، تاب و انحناء منحنی زیر را در نقطهٔ $X_0 = \mathbf{r}(1)$ بیابید

$$\mathbf{r}(t) = (t^3 - t, 2t^2, t^4 - t) ; -1 \leq t \leq 3$$

۱.۱ هندسهٔ فراگیر منحنی‌ها

اگر کنج فرنهٔ یک منحنی مسطحهٔ مفروض C داده شده باشد و نیز اگر انحناء این منحنی در همهٔ لحظات آن مشخص باشد در این صورت می‌توان منحنی C را به صورت منحصر بفردی یافت. یک نتیجهٔ این مطلب آن است که اگر انحناء یک منحنی مسطح داده شده باشد، آن منحنی (صرف نظر از یک تبدیل اقلیدسی) مشخص است. در مورد منحنیهای غیر مسطح لازم است که علاوه بر کنج فرنه و انحناء، تاب نیز داده شود. کوتاه سخن اینکه

۱.۱.۱ قضیهٔ بنیادی هندسهٔ فراگیر منحنیهای مسطحه

فرض کنید $f(t)$ تابعی بر بازهٔ $I \subseteq \mathbb{R}$ بوده و $\langle X_0, \vec{u}, \vec{v} \rangle$ یک کنج آفین باشد و $t_0 \in I$ عددی دلخواه است. در این صورت، یک و تنها یک منحنی مسطحه $\vec{r}(t)$ با دامنهٔ I وجود دارد که

$$\forall t \in I \quad \kappa(t) = f(t) \qquad \vec{r}(t_0) = X_0$$

$$\vec{T}(t_0) = \vec{u} \qquad \vec{N}(t_0) = \vec{v}$$

۲.۱.۱ نتیجه

اگر دو منحنی مسطحه طوری متناظر باشند که در نقاط متناظر دارای انحناء برابرند، در این صورت آن دو منحنی قابل انطباقند.

۳.۱.۱ قضیهٔ بنیادی هندسهٔ فراگیر منحنیهای مسطحه

فرض کنید $f(t) \leq 0$ و $g(t)$ توابعی بر بازهٔ $I \subseteq \mathbb{R}$ هستند و $\langle X_0, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ یک کنج آفین باشد و $t_0 \in I$ عددی دلخواه است. در این صورت، یک و تنها یک منحنی $\vec{r}(t)$ با دامنهٔ I وجود دارد که

$$\forall t \in I \quad \kappa(t) = f(t) \qquad \forall t \in I \quad \tau(t) = g(t)$$

$$\vec{r}(t_0) = X_0$$

$$\vec{T}(t_0) = \vec{u}$$

$$\vec{N}(t_0) = \vec{v}$$

$$\vec{B}(t_0) = \vec{w}$$

۴.۸.۱ نتیجه

اگر دو منحنی طوری متناظر باشند که در نقاط متناظر دارای انحناء و تاب برابرند، در این صورت آن دو منحنی قابل انطباقند.

۵.۸.۱ مثال

تمام منحنی‌هایی را بیابید که انحنای آنها برابر عدد مفروض a و تاب آنها برابر عدد ثابت b باشد.

روش اول: به کمک فرمولهای فرنه، بسط تیلور تابع را می‌یابیم. برای این منظور توجه می‌کنیم که

$$\begin{cases} \vec{T}'_n = \vec{r}''_n & \vec{T}'_n = a\vec{N}_n \\ \vec{N}'_n = -a\vec{T}_n + b\vec{B}_n & \vec{B}'_n = -b\vec{N}_n \end{cases}$$

بنابراین

$$\vec{r}_n(0) = X_0$$

$$\vec{r}'_n(0) = \vec{T}_n(0)$$

$$\vec{r}''_n(0) = (\vec{r}'_n(s))' \Big|_{s=0} = \vec{T}'_n(0) = a\vec{N}_n(0)$$

$$\begin{aligned} \vec{r}'''_n(0) &= (\vec{r}''_n(s))' \Big|_{s=0} = (-a^2\vec{T}_n(s) + ab\vec{B}_n(s))' \Big|_{s=0} \\ &= -a^2\vec{T}'_n(0) + ab\vec{B}'_n(0) = -a^2\vec{N}_n(0) - ab^2\vec{N}_n(0) \\ &= -a(a^2 + b^2)\vec{N}_n(0) \end{aligned}$$

در نتیجه، به کمک بسط تیلور داریم

$$\vec{r}_n(s) = X_0 + s\vec{T}_n(0) + \frac{s^2}{2}a\vec{N}_n(0) + \frac{s^3}{6}\{-a^2\vec{T}_n(0) + ab\vec{B}_n(0)\}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{s^4}{24}a(a^2 + b^2)\vec{N}_n(\circ) + O(4) \\
 = & X_\circ + \left(s - \frac{a^2}{6}s^3\right)\vec{T}_n(\circ) + \left(\frac{a^2}{2}s^2 - \frac{a}{24}(a^2 + b^2)s^4\right)\vec{N}_n \\
 & + \left(\frac{ab}{6}s^3\right)\vec{B}_n(\circ) + O(4)
 \end{aligned}$$

روش دوم: فرض کنیم

$$\begin{cases}
 \vec{T}_n(s) = (T_1(s), T_2(s), T_3(s)) \\
 \vec{N}_n(s) = (N_1(s), N_2(s), N_3(s)) \\
 \vec{B}_n(s) = (B_1(s), B_2(s), B_3(s))
 \end{cases}$$

بنابراین، با توجه به فرمولهای فرنه به ازای $i = 1, 2, 3$ می‌توان نوشت

$$\begin{pmatrix} T_i \\ N_i \\ B_i \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \circ & a & \circ \\ -a & \circ & b \\ \circ & -b & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_i \\ N_i \\ B_i \end{pmatrix}$$

بعلاوه می‌توانیم فرض کنیم که $\vec{T}_n(\circ) = \vec{i}$ ، $\vec{N}_n(\circ) = \vec{j}$ و $\vec{B}_n(\circ) = \vec{k}$. بنابراین به ازای $i = 1, 2, 3$ بترتیب داریم

$$\begin{cases}
 T_1(s) = \frac{b^2}{m^2} + \frac{a^2}{m^2} \cos(ms) \\
 N_1(s) = \frac{-a}{m} \sin(ms) \\
 B_1(s) = \frac{ab}{m^2} - \frac{ab}{m^2} \cos(ms)
 \end{cases}
 \begin{cases}
 T_2(s) = \frac{a}{m} \sin(ms) \\
 N_2(s) = \cos(ms) \\
 B_2(s) = -\frac{b}{m} \sin(ms)
 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_{\gamma}(s) = \frac{a^2}{m^2} + \frac{b^2}{m^2} \cos(ms) \\ N_{\gamma}(s) = \frac{b}{m} \sin(ms) \\ B_{\gamma}(s) = \frac{ab}{m^2} - \frac{ab}{m^2} \cos(ms) \end{cases}$$

از طرفی $\vec{r}'_n(s) = \vec{T}_n(s) = (T_1(s), T_2(s), T_3(s))$ بنابراین

$$\begin{aligned} \vec{r}_n(s) &= \int \vec{T}_n(s) ds \\ &= \left(\frac{b^2}{m^2} s + \frac{a^2}{m^2} \sin(ms), -\frac{a}{m^2} \cos(ms), \frac{a^2}{m^2} s + \frac{b^2}{m^2} \sin(ms) \right) + \vec{r}_n(0) \end{aligned}$$

که اگر فرض شود $(\vec{r}_n(0) = (0, 0, 0))$ در این صورت

$$\begin{aligned} \vec{r}_n(s) &= \left(\frac{b^2}{m^2} s + \frac{a^2}{m^2} \sin(ms), -\frac{a}{m^2} \cos(ms), \frac{a^2}{m^2} s + \frac{b^2}{m^2} \sin(ms) \right) \\ &= \cos(ms) \left(0, -\frac{a}{m^2}, 0 \right) + \sin(ms) \left(\frac{a^2}{m^2}, 0, \frac{b^2}{m^2} \right) + s \left(\frac{b^2}{m^2}, 0, \frac{a^2}{m^2} \right) \end{aligned}$$

که معادله یک مارپیچ تعمیم یافته در فضا است.

نتیجه‌ای که می‌توان اعلام داشت این است که «منحنی با انحنا و تاب ثابت،

مارپیچ تعمیم یافته است».

۶.۸.۱ مثال

منحنی C را طوری بیابید که تاب آن صفر و انحنایش برابر S باشد.

روشن است که منحنی مذکور مسطحه می‌باشد. می‌توانیم فرض کنیم که منحنی

در xy -صفحه قرار دارد و بعلاوه $\vec{i}, \vec{T}_n(0) = \vec{i}, \vec{T}'_n(0) = \vec{j}, \vec{N}_n(0) = 0$ و $\vec{r}_n(0) = 0$. بنابراین، در این حالت فرمولهای فرنه عبارتند از

$$\begin{cases} \vec{r}'_n(s) = \vec{T}_n(s) & \vec{r}_n(0) = \vec{0} \\ \vec{T}'_n(s) = s\vec{N}_n(s) & \vec{T}_n(0) = \vec{i} \\ \vec{N}'_n(s) = -s\vec{T}_n(s) & \vec{N}_n(0) = \vec{j} \end{cases}$$

حال اگر فرض کنیم $\vec{T}_n(s) = (T_1(s), T_2(s))$ و $\vec{N}_n(s) = (N_1(s), N_2(s))$ در این صورت دو دستگاه به شرح زیر برای T_i ها و N_i ها داریم

$$\begin{cases} T_1(s) = sN_1(s) & T_1(0) = 1 \\ N_1(s) = -sT_1(s) & N_1(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_2(s) = sN_2(s) & T_2(0) = 0 \\ N_2(s) = -sT_2(s) & N_2(0) = 1 \end{cases}$$

بنابراین

$$\begin{cases} T_1(s) = \cos\left(\frac{s^2}{2}\right) & T_2(s) = \sin\left(\frac{s^2}{2}\right) \\ N_1(s) = -\sin\left(\frac{s^2}{2}\right) & N_2(s) = \cos\left(\frac{s^2}{2}\right) \end{cases}$$

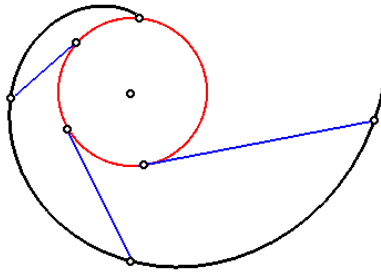
از طرفی $\vec{r}'_n(0) = (0, 0, 0)$ و $\vec{r}'_n(s) = \vec{T}_n(s) = (T_1(s), T_2(s), 0)$ در نتیجه

$$\vec{r}_n(s) = \left(\int_0^s \cos\left(\frac{s^2}{2}\right) ds, \int_0^s \sin\left(\frac{s^2}{2}\right) ds, 0 \right)$$

این منحنی و همه منحنیهایی که با یک تبدیل اقلیدسی از روی این منحنی حاصل می‌شوند، پاسخ مسأله داده شده هستند، و بالعکس.

۹.۱ گسترده و گسترده

منظور از قائم در یک نقطه از یک منحنی مفروض، خط قائمی است که از آن نقطه می‌گذرد و بر منحنی مذکور عمود است. هر منحنی در هر نقطه‌اش دارای بینهایت قائم است. هر یک از این خطوط در صفحه قائم بر منحنی در آن نقطه قرار دارند. به بیان دقیقتر، اگر $\vec{r}(t)$ نقطه‌ای از منحنی مفروض $\vec{r}(t); t \in I$ باشد، آنگاه هر قائم بر C خطی است که از $\vec{r}(t)$ گذشته و هادی آن به شکل $a\vec{N}(t) + b\vec{B}(t)$ می‌باشد.



شکل ۲۲.۱: گسترده و گسترده

به شکل ۲.۹.۱ توجه شود. منظور از یک خانواده از خطوط قائم بر C ، تایعی است برداری مانند

$$H : \vec{h}(t) = \vec{r}(t) + a(t)\vec{N}(t) + b(t)\vec{B}(t)$$

۱.۹.۱ تعریف

منحنی D را در صورتی یک گسترده منحنی مفروض C گوئیم که خانواده H حاصل از مماسهای آن یک خانواده از خطوط قائم بر C باشد. اگر D گسترده C باشد، C را یک گسترده D می‌نامیم.

۲.۹.۱ قضیه

در صورتی که $\vec{r}_n(s)$; $s \in I$ یک منحنی با پارامتر طبیعی و دارای گسترده باشد، در این صورت هر گسترده از آن به شکل زیر است

$$\vec{h}(s) = \vec{r}_n(s) + \frac{1}{\kappa_n(s)}\vec{N}_n(s) + \frac{1}{\kappa_n(s)} \cot \left(\int \tau_n(s) ds + E \right) \vec{B}_n(s)$$

که E ثابتی دلخواه است. گسترده‌های مختلف با انتخاب E مشخص می‌شوند.

اثبات: فرض کنیم

$$H : \vec{h}(s) = \vec{r}_n(s) + a(s)\vec{N}_n(s) + b(s)\vec{B}_n(s)$$

گسترده‌ای از منحنی مفروض $\vec{r}_n(s)$ است. در این صورت مماس بر H در نقطه $\vec{h}(s)$ برابر است با

$$\begin{aligned} \vec{h}'(s) &= \vec{r}'_n(s) + a'(s)\vec{N}_n(s) + a(s)\vec{N}'_n(s) + b'(s)\vec{B}_n(s) + b(s)\vec{B}'_n(s) \\ &= (1 - a(s)\kappa_n(s))\vec{T}_n(s) + (a'(s) - b(s)\tau_n(s))\vec{N}_n(s) \\ &\quad + (a(s)\tau_n(s) + b'(s))\vec{B}_n(s) \end{aligned}$$

اما بایستی این بردار مماس به منحنی C در نقطه $\vec{r}_n(s)$ عمود باشد، یعنی بایستی به موازات بردار $a(s)\vec{N}_n(s) + b(s)\vec{B}_n(s)$ باشد. بنابراین، باید $\vec{h}'(s) \times (a(s)\vec{N}_n(s) + b(s)\vec{B}_n(s)) = \vec{0}$ و در نتیجه

$$\begin{cases} a(s) = \frac{1}{\kappa_n(s)} \\ b(s)(a'(s) - b(s)\tau_n(s)) - a(s)(a(s)\tau_n(s) + b'(s)) = 0 \end{cases}$$

بنابراین، بایستی

$$\frac{d}{dt} \operatorname{arccot} \left(\frac{b(s)}{a(s)} \right) = \tau_n(s)$$

که پس از انتگرالگیری نسبت به s به حکم مورد نظر می‌رسیم. □

۳.۹.۱ قضیه

در صورتی که $s \in I$; $\vec{r}_n(s)$; C یک منحنی با پارامتر طبیعی و دارای گسترده باشد، در این صورت هر گسترده از آن به شکل زیر است

$$\vec{h}(s) = \vec{r}_n(s) + (s - s_0)\vec{T}_n(s)$$

که $s_0 \in I$ دلخواه است. گسترده‌های مختلف با انتخاب s_0 مشخص می‌شوند.

اثبات: فرض کنیم $\vec{r}_n(s)$ یک گسترندهٔ منحنی $\vec{h}(s)$ باشد. پس بایستی یه ازای هر s ای $\vec{h}(s)$ بر مماس در نقطهٔ $\vec{r}(s)$ عمود باشد. در نتیجه بایستی تابع $\ell(s)$ ای یافت گردد، به گونه‌ای که

$$\vec{h}(s) = \vec{r}_n(s) + \ell(s)\vec{T}_n(s)$$

مماس بر این منحنی عبارت است از

$$\begin{aligned}\vec{h}'(s) &= \vec{r}_n'(s) + \ell'(s)\vec{T}_n(s) + \ell(s)\vec{T}_n'(s) \\ &= \vec{T}_n(s) + \ell'(s)\vec{T}_n(s) + \ell(s)\kappa(s)\vec{N}_n(s)\end{aligned}$$

که می‌بایستی بر $\vec{T}_n(s)$ عمود باشد. بنابراین باید $\ell'(s) + 1 = 0$ و در نتیجه باید s_0 ای باشد که $\ell(s) = s_0 - s$ و برهان تمام است. \square

۴.۹.۱ قضیه

گستردهٔ گستردهٔ یک منحنی، با خود منحنی قابل انطباق است. گستردهٔ گستردهٔ یک منحنی، با خود منحنی قابل انطباق است.

۵.۹.۱ تمرین

گسترده منحنی زیر را پیدا کنید و نشان دهید که حاصل نیز یک مارپیچ است:

$$\vec{r}(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 4t) ; \quad -2\pi \leq t \leq 2\pi$$

فصل ۲

نظریهٔ رویه‌ها

اشیاء دو بعدی در فضا را رویه می‌نامند. در هندسه دیفرانسیل هر رویه‌ای را نمی‌توان مطالعه کرد. مگر آنکه دارای شرایط بخصوص باشد. تعویض که خواهیم آورد مفروضاتی را بر رویه اعمال می‌کند که به کمک آن می‌توان ادامه آن را مطرح کرد.

۱.۲ تعاریف اولیه

۱.۱.۲ تعریف نقشه یا چارت

منظور از یک نقشه^۱ یا چارت^۲ تابعی است مانند

$$\vec{r}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

طوری که پنج خاصیت زیر را داشته باشد:

۱ - دامنهٔ \vec{r} بسته و کراندار (فشرده) باشد. به این معنی که نقاط مرزی خود را در بر دارد و فاصله نقاط آن را از عددی مشخص بیشتر نمی‌شود. مانند یک قرص بسته.

Map - Mapping^۱
Chart^۲

۲- تابع \vec{r} بر دامنه‌اش D پیوسته باشد. به این معنی که توابع دو متغیره $x(u, v)$ ، $y(u, v)$ و $z(u, v)$ بر مجموعهٔ D به معنای ریاضی II پیوسته باشند.

۳- \vec{r} بر $\text{Int}(D)$ مشتق پذیر باشد. توضیح اینکه $\text{Int}(D)$ (تمام D بجز لبه آن) و مشتق پذیری r به معنای مشتق پذیری \vec{r} به معنای مشتق پذیری توابع دو متغیره x ، y و z (بر حسب u و v) می‌باشد.

۴- \vec{r} بر $\text{Int}(D)$ منظم باشد. به این معنی که به ازای هر u و v در $\text{Int}(D)$:

$$\begin{cases} \vec{r}_u = (x_u, y_u, z_u) \\ \vec{r}_v = (x_v, y_v, z_v) \end{cases} \Rightarrow \vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \mathbf{0}$$

۵- \vec{r} بر $\text{Int}(D)$ یک به یک باشد. به این معنی که

$$\begin{cases} \vec{r}(u, v) = \vec{r}(s, t) \\ (u, v), (s, t) \in \text{Int}(D) \end{cases} \Rightarrow \Rightarrow u = s, v = t$$

۲.۱.۲ تعریف رویه - سطح

زیرمجموعه $S \subseteq \mathbb{R}^3$ از قضا را در صورتی رویه یا سطح^۳ گوئیم که برابر اجتماع برد یک یا چند نقشه باشد. تعداد این نقشه‌ها بایستی متناهی باشد. به شکل ۱.۲ توجه شود.

۳.۱.۲ تعریف نقطه منظم

فرض کنید S یک رویه است و X یک نقطه از آن است. در صورتی می‌گوئیم X یک نقطه منظم یا عادی^۴ است که نقشه‌ای مانند \vec{r} برای رویهٔ S و زوج مرتبی مانند

Surface^۳
Regular point^۴

شکل ۱.۲: رویه و نقشه

\vec{r} برای رویه S و زوج مرتبی مانند (u_0, v_0) طوری بتوان یافت که اولاً در درون D واقع باشند و در ثانی $X_0 = \vec{r}(u_0, v_0)$. نقطه‌ای که منظم نباشد را تکین^۵ نامیده می‌شود اینگونه نقاط از دایره بحث ما خارجند.

۴.۱.۲ تعریف اطلس

فرض کنید S یک رویه است. مجموعه نقشه‌هایی که اجتماع برد آنها برابر S باشد را یک اطلس^۶ برای S می‌نامند. عمل یافتن اطلس برای یک رویه را پارامتره کردن^۷ یا نقشه کشی^۸ S می‌نامند.

۵.۱.۲ مثال

فرض کنیم S سهمی گون بیضوی

$$S : z = x^2 + y^2, z \leq 4$$

باشد. به شکل ۲.۲ توجه شود. در این صورت S یک رویه است. زیرا آن را به صورت زیر می‌توان پارامتره نمود:

^۵ Singular point

^۶ Atlas

^۷ Parametrization

^۸ Surving

شکل ۲.۲: سهمی گون

$$\vec{r}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2); \quad D : u^2 + v^2 \leq 4$$

شرط اول تأمین است چون دامنهٔ یک قرص بسته به مرکز در مبدا و شعاع ۲ است. شرط دوم و سوم نیز برقرارند، زیرا در اینجا توابع x ، y و z بر حسب u و v چند جمله‌ای هستند. بعلاوه، چون همواره مؤلفهٔ سوم ضرب خارجی

$$\begin{aligned} \vec{r}_u \times \vec{r}_v &= (1, 0, 2u) \times (0, 1, 2v) \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = (-2u, -2v, 1) \end{aligned}$$

مخالف صفر است، بنابراین شرط چهارم نیز برقرار است. در مورد شرط پنجم نیز مشاهده می‌گردد که

$$\begin{cases} \vec{r}(u, v) = \vec{r}(s, t) \\ (u, v), (s, t) \in \text{Int}(D) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (u, v, u^2 + v^2) = (s, t, s^2 + t^2) \\ u^2 + v^2, s^2 + t^2 \leq 4 \end{cases} \Rightarrow u = s, v = t$$

شکل ۳.۲: کره و تغییر پارامتر

۶.۱.۲ تمرین

نشان دهید که تابع زیر نقشه‌ای برای رویه پیشین تعریف می‌کند:

$$\vec{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2)$$

$$D : 0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 2\pi$$

۷.۱.۲ مثال

کره $S : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ را به کمک دو نقشه زیر می‌توان پارامتره نمود:

$$\vec{r}_1(u, v) = \left(u, v, \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \right)$$

$$\vec{r}_2(u, v) = \left(u, v, -\sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \right)$$

$$D_1 = D_2 : u^2 + v^2 \leq R^2$$

نشان دهید \vec{r}_1 و \vec{r}_2 نقشه هستند، و بعلاوه $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2\}$ یک اطلس برای کره S است. به شکل ۳.۲ توجه شود.

۸.۱.۲ مثال

کرهٔ S از مثال قبل را توسط مختصات کروی نیز پارامتره نمود:

$$\vec{r}(u, v) = (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u)$$

$$D : -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq 2\pi$$

در این صورت، چون D یک مستطیل است، بنابراین بسته و کراندار می‌باشد و شرط اول برقرار است. شرایط دوم و سوم بدیهی‌اند، زیرا توابع x ، y و z بر حسب u و v مثلثاتیند و بنابراین پیوسته و مشتق‌پذیر می‌باشند. بعلاوه

$$\vec{r}_u = R(-\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$$

$$\vec{r}_v = R(\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0)$$

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = R^2 \cos^2 u (-\cos v, \sin v, \sin u)$$

این بردار همواره مخالف صفر است زیرا $\cos v$ و $\sin v$ همزمان نمی‌توانند صفر شوند.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r}(u, v) = \vec{r}(s, t) \\ (u, v), (s, t) \in \text{Int}(D) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} R \cos u \cos v = R \cos s \cos t & (I) \\ R \cos u \sin v = R \cos s \sin t & (II) \\ R \sin u = R \sin s & (III) \\ -\frac{\pi}{2} \leq u, s \leq \frac{\pi}{2} & (IV) \\ 0 \leq v, t \leq 2\pi & (IV) \end{array} \right.$$

از (I) و (II) نتیجه می‌گردد که $\cos^2 u = \cos^2 s$ یا $\cos u = \pm \cos s$. نظریه فرض (IV)، نتیجه می‌گیریم که $u = s$. اکنون با قرار دادن $u = s$ در (I) و (II) و حذف $\cos u \neq 0$ نتیجه می‌گیریم که

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos v = \cos t \\ \sin v = \sin t \end{array} \right.$$

بنابراین $v = t + 2k\pi$ که $k \in \mathbb{Z}$. اکنون از شرط (V) استفاده نموده و نتیجه می‌گیریم $v = t$ که

شکل ۴.۲: مکعب

مثال ۹.۱.۲

فرض کنید Ω مکعب واحد باشد و S سطح خارجی آن و S را پارامتره کنید. این رویه از ۶ قطعه مربع شکل تشکیل می‌شود: $S = S_1 \cup \dots \cup S_6$ که

$$S_1 : z = 1 ; 0 \leq x, y \leq 1 \quad S_2 : z = 0 ; 0 \leq x, y \leq 1$$

$$S_3 : y = 1 ; 0 \leq x, z \leq 1 \quad S_4 : y = 0 ; 0 \leq x, z \leq 1$$

$$S_5 : x = 1 ; 0 \leq y, z \leq 1 \quad S_6 : x = 0 ; 0 \leq y, z \leq 1$$

به شکل ۴.۲ توجه شود. پس، لازم است که هریک از آنها را جداگانه پارامتره می‌کنیم. این شش رویه را به صورت زیر می‌توان پارامتره نمود:

$$\vec{r}_1(u, v) = (u, v, 1) ; (u, v) \in D \quad \vec{r}_2(u, v) = (y, v, 0) ; (u, v) \in D$$

$$\vec{r}_3(u, v) = (u, 1, v) ; (u, v) \in D \quad \vec{r}_4(u, v) = (u, 0, v) ; (u, v) \in D$$

$$\vec{r}_5(u, v) = (1, u, v) ; (u, v) \in D \quad \vec{r}_6(u, v) = (0, u, v) ; (u, v) \in D$$

که در همه آنها

$$D : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$$

به این ترتیب، $A := \{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4, \vec{r}_5, \vec{r}_6\}$ تشکیل یک اطلس برای S می‌دهد.

۱۰.۱.۲ هندسهٔ یک رویه

منظور از یک تغییر پارامتر (یا مختصات)^۹ تابعی است مانند

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

طوری که بر دامنه‌اش D پیوسته، بر درون دامنه‌اش $\text{Int}(D)$ مشتقپذیر و معکوسپذیر باشد و بعلاوه

$$J := \det h' \neq 0 \quad \text{بر } \text{Int}(D)$$

به بیان دیگر اگر $h(u, v) = (x, y)$ باشد، باید

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall (u, v) \in \text{Int}(D)$$

۱۱.۱.۲ قضیه

اگر $\vec{r} : D \rightarrow S$ نقشه‌ای برای رویهٔ S با دامنهٔ D بوده و $h : D' \rightarrow D$ یک تغییر پارامتر باشد، در این صورت

$$\vec{r} \circ h : D' \rightarrow S$$

نیز یک نقشه است. بعلاوه اگر $\vec{r} : D \rightarrow S$ و $\vec{s} : D' \rightarrow S$ نقشه‌هایی برای S باشند و بعلاوه \vec{r} و \vec{s} همپوش^{۱۰} باشند (یعنی، $(\vec{r}(D) \cap \vec{s}(D')) \neq \emptyset$) در این صورت

$$\vec{s}^{-1} \circ \vec{r} : \vec{r}^{-1}(\vec{r}(D) \cap \vec{s}(D')) \rightarrow \vec{s}^{-1}(\vec{r}(D) \cap \vec{s}(D'))$$

یک تغییر مختصات است. به شکل ۵.۲ توجه شود.

Change of parameter or coordinates^۹
Overlap^{۱۰}

شکل ۵.۲: تغییر مختصات

مثال ۱۲.۱.۲

فرض کنیم

$$S : z = x^2 + y^2 ; z \leq 4$$

و دو نقشه از آن به شرح زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \vec{r}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2) \\ D : 1 \leq u^2 + v^2 \leq 4 \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{s}(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u} \cos \bar{v}, \bar{u} \sin \bar{v}, \bar{u}^2) \\ D' : 0 \leq \bar{u} \leq 2, 0 \leq \bar{v} \leq 2\pi \end{cases}$$

در اینجا

$$\vec{r}(D) \cap \vec{s}(D') : z = x^2 + y^2, 1 \leq z \leq 4$$

$$(s^{-1} \circ \vec{r})(u, v) = s^{-1}(u, v, u^2 + v^2) = (\sqrt{u^2 + v^2}, \arctan(\frac{u}{v}))$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} & \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \\ \frac{1}{v} & \frac{-u}{v^2} \\ \frac{1 + (\frac{u}{v})^2}{1 + (\frac{u}{v})^2} & \frac{1 + (\frac{u}{v})^2}{1 + (\frac{u}{v})^2} \end{vmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

که چون $(0, 0)$ در D قرار ندارد، بنابراین در همه جا $J \neq 0$ و $h := s^{-1} \circ \vec{r}$ یک تغییر نقشه است.

۱۳.۱.۲ کمیت هندسی

کمیت Q راجع به رویهٔ مفروض S را در صورتی هندسی^{۱۱} گوئیم که بستگی به انتخاب نقشه نداشته باشد. به بیان دیگر، اگر Q را به کمک نقشه \vec{r} بدست آورده باشیم و تغییر پارامتر دلخواه h را بر آن اعمال کنیم و سپس Q را نسبت به نقشه جدید محاسبه کنیم، در این صورت مقدار Q تغییر نکند.

۱۴.۱.۲ مثال

مساحت رویه، طول یک منحنی واقع بر آن و ... از مفاهیم هندسی هستند، در حالی که بردارهای \vec{r}_u و \vec{r}_v کمیت‌های غیر هندسی هستند.

نکته مفاهیم غیر هندسی کم اهمیت تر از مفاهیم هندسی نیستند. زیرا معمولاً برای رسیدن به کمیت‌های هندسی لازم است تا از مفاهیم و یا ابزارهای هندسی استفاده کنیم. هدف نهایی ما از بحث، مطالعه کمیت‌های هندسی رویه‌ها به کمک ریاضیات عمومی و معادلات دیفرانسیل است.

۲.۲ اولین فرم اساسی

دو شیء هندسی مهم برای هر نقشه از هر رویه می‌توان تعریف کرد که هر کدام شامل سه تابع است. هر یک از این اشیاء را فرم اساسی می‌نامند. خواهیم دید که همه اطلاعات یک رویه را می‌توان از فرمهای اساسی آن استخراج کرد.

۱.۲.۲ دیفرانسیل طول قوس منحنی واقع بر رویه

فرض کنید S یک رویه، $D \rightarrow S: \vec{r}$ نقشه‌ای برای S و $X_0 = \vec{r}(u_0, v_0)$ نقطه‌ای منظم از S است. فرض کنید du و dv اعداد کوچکی اند که همچنان $(u_0 + du, v_0 + dv)$ به $\text{Int}(D)$ تعلق دارد. $\vec{r}(u_0 + du, v_0 + dv)$ را به صورت نقطهٔ حاصل از یک حرکت

^{۱۱} a geometric quantity

شکل ۶.۲: اولین فرم اساسی

بسیار کوچک در موقعیت $X_0 = \vec{r}(u_0, v_0)$ می‌توان قلمداد نمود. این حرکت منبعث از حرکت بسیار کوچکی است که در D از (u_0, v_0) به $(u_0 + du, v_0 + dv)$ صورت پذیرفته است. می‌خواهیم طول منحنی کوچک حاصل از این حرکت بر سطح S را محاسبه کنیم. به شکل ۶.۲ توجه شود. طول این منحنی تقریباً برابر است با طول بردار بینهایت کوچک

$$d\vec{r} := \vec{r}(u_0 + du, v_0 + dv) - \vec{r}(u_0, v_0)$$

به این ترتیب مشاهده می‌گردد که

$$\begin{aligned} ds^2 &= \|\vec{r}\|^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} \\ &= \left(\vec{r}(u_0 + du, v_0 + dv) - \vec{r}(u_0, v_0) \right) \\ &\quad \cdot \left(\vec{r}(u_0 + du, v_0 + dv) - \vec{r}(u_0, v_0) \right) \end{aligned}$$

اکنون از بسط تیلور مرتبیه اول تابع $\vec{r}(u, v)$ در همسایگی نقطه (u_0, v_0) استفاده می‌کنیم، بنابراین

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(\vec{r}_u(u_0, v_0)du + \vec{r}_v(u_0, v_0)dv + O(1) \right) \\ &\quad \cdot \left(\vec{r}_u(u_0, v_0)du + \vec{r}_v(u_0, v_0)dv + O(1) \right) \\ &= \left(\vec{r}_u(u_0, v_0) \cdot \vec{r}_u(u_0, v_0) \right) du^2 + 2 \left(\vec{r}_u(u_0, v_0) \cdot \vec{r}_v(u_0, v_0) \right) dudv \\ &\quad + \left(\vec{r}_v(u_0, v_0) \cdot \vec{r}_v(u_0, v_0) \right) dv^2 + O(1) \end{aligned}$$

۲.۲.۲ تعریف: ضرایب اولین فرم اساسی

به هر نقشهٔ $\vec{r}: D \rightarrow S$ چهار تابع به شرح زیر نسبت می‌دهیم

$$g_{11} := \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u \quad g_{12} = g_{21} := \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v$$

$$g_{22} := \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v \quad g := g_{11}g_{22} - g_{12}^2$$

همهٔ این توابع بر $\text{Int}(D)$ تعریف می‌گردند. g_{ij} ها را ضرایب اولین فرم اساسی نظیر به \vec{r} و g را دترمینان اولین فرم اساسی نظیر به \vec{r} می‌نامیم.

۳.۲.۲ تعریف: اولین فرم اساسی

به هر نقشه $\vec{r}: D \rightarrow S$ یک فرم دوخطی متقارن به شرح زیر نظیر می‌کنیم:

$$I := g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2$$

این فرم را اولین فرم اساسی نظیر به \vec{r} می‌نامیم.

۴.۲.۲ یادداشت

نظر به بحث بالا، اولین فرم اساسی را به عنوان وسیله‌ای برای محاسبهٔ طول منحنی‌های بینهایت کوچک بر یک رویه می‌توان تلقی نمود.

۵.۲.۲ مثال: تیوب

به شکل ۷.۲ توجه شود.

$$\vec{r}_u = (-a \sin u \cos v, -a \cos u \sin v, a \cos u)$$

$$\vec{r}_v = (-(a \cos u + b) \sin v, (a \cos u + b) \cos v, 0)$$

$$g_{11} = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u = a^2$$

شکل ۷.۲: تیوپ

$$g_{12} = g_{21} = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 0$$

$$g_{22} = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v = (a \cos u + b)^2$$

در نتیجه

$$I = a^2 du^2 + (a \cos u + b)^2 dv^2$$

مثال: نمودار یک تابع دو متغیره فرض کنیم $z = f(x, y)$ تابعی دو متغیره است و $D \subseteq D_f$ در اسن صورت نمودار این تابع را به صورت

$$S : z = f(x, y), (x, y) \in D$$

تعریف می‌کنیم. اگر D بسته و کراندار باشد و f بر D پیوسته و بر $\text{Int}(D)$ مشتقپذیر باشد، در این صورت S یک رویه است. برای نشان دادن این مطلب از نقشه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\vec{r}(u, v) = (u, v, f(u, v)) ; (u, v) \in D$$

شکل ۸.۲: نموداریک تابع دو متغیره

اولین فرم اساسی این رویه را به شکل زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\vec{r}_u &= \left(1, 0, \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) \right) & \vec{r}_v &= \left(0, 1, \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) \right) \\ g_{11} &= 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 & g_{12} = g_{21} &= \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) \\ g_{22} &= 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)^2 & g &= 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)^2\end{aligned}$$

بنابراین

$$I = \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 \right) du^2 + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) dudv + \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)^2 \right) dv^2$$

به شکل ۸.۲ توجه شود.

۳.۲ کاربردهای اولین فرم اساسی

۱.۳.۲ فضا و صفحهٔ مماس در نقطه‌ای از یک رویه

اگر S یک رویه، \vec{r} نقشه‌ای برای آن و $X_0 = \vec{r}(u_0, v_0)$ نقطه‌ای منظم از رویه باشد، در این صورت هر بردار مماس^{۱۲} بر رویه در نقطه X_0 را به صورت ترکیبی خطی از دو

^{۱۲}Tangent vector

شکل ۹.۲: صفحه و فضای مماس

بردار \vec{r}_u و \vec{r}_v می‌توان نوشت. مجموعه چنین بردارهایی را فضای مماس بر رویه در نقطه X_0 ^{۱۳} نامیده و با نماد $T_{X_0}S$ نشان می‌دهیم.

$$T_{X_0}S := \{ a\vec{r}_u(u_0, v_0) + b\vec{r}_v(u_0, v_0) \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

به بیان دیگر اگر $\vec{m}(u_0, v_0)$ بردار یکه قائم بر S در نقطه X_0 باشد:

$$\vec{m}(u_0, v_0) := \frac{\vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0)}{\|\vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0)\|}$$

در این صورت، فضای مماس بر S در نقطه X_0 مجموعه بردارهای عمود بر $\vec{m}(u_0, v_0)$ یعنی،

$$T_{X_0}S = \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{v} \cdot \vec{m}(u_0, v_0) = 0 \}$$

صفحه‌ای که از نقطه X_0 با بردار قائم $\vec{m}(u_0, v_0)$ می‌گذرد را صفحه مماس بر S در نقطه X_0 ^{۱۴} نامیده و با نماد $\mathcal{P}_{X_0}S$ نشان می‌دهیم. به شکل ۹.۲ توجه شود. از نظر هندسی این صفحه با فضای مماس موازی است، اما از نقاط مختلف می‌گذرد.

Tangent space of S at X_0 .^{۱۳}

Tangent plane of S at X_0 .^{۱۴}

۲.۳.۲ هندسه تحلیلی در هر نقطه از رویه

در هندسهٔ تحلیلی مسطحه مشاهده می‌گردد که با داشتن تنها ضرب داخلی (یعنی، $((a, b) \cdot (c, d) = ab + cd$) می‌توان تمام نظریه را بنا نمود.

در هر نقطه از هر رویه می‌توان یک ضرب داخلی تعریف نمود. برای این منظور کافی است که نقاط هندسه جدید را $P_{X_0}S$ و بردارهای آن را $T_{X_0}S$ در نظر گرفت. اکنون لازم است که یک ضرب داخلی داشته باشیم، لذا تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} & (a\vec{r}_u(u_0, v_0) + b\vec{r}_v(u_0, v_0)) \cdot_{X_0} (c\vec{r}_u(u_0, v_0) + d\vec{r}_v(u_0, v_0)) := \\ & = I_{X_0} (a\vec{r}_u(u_0, v_0) + b\vec{r}_v(u_0, v_0)), (c\vec{r}_u(u_0, v_0) + d\vec{r}_v(u_0, v_0)) \\ & = g_{11}(u_0, v_0)ac + g_{12}(u_0, v_0)(ab + dc) + g_{22}(u_0, v_0)bd \end{aligned}$$

\cdot_{X_0} را ضرب داخلی در نقطهٔ X_0 نسبت به نقشهٔ \vec{r} می‌نامیم. به کمک این ضرب داخلی، طول بردارهای مماس بر S را می‌توان محاسبه نمود. به بیان دقیقتر اگر $\vec{V} \in T_{X_0}S$ ، در این صورت طول \vec{V} برابر است با

$$\|\vec{V}\|_{X_0} := \sqrt{\vec{V} \cdot_{X_0} \vec{V}}$$

بعلاوه، زاویهٔ بین دو بردار مماس بر S را تعریف نمود. به بیان دقیقتر اگر $\vec{V}, \vec{W} \in T_{X_0}S$ ، در این صورت زاویهٔ بین \vec{V} و \vec{W} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\angle_{X_0}(\vec{V}, \vec{W}) := \arccos \frac{\vec{V} \cdot_{X_0} \vec{W}}{\|\vec{v}\|_{X_0} \|\vec{w}\|_{X_0}}$$

فاصلهٔ بین دو نقطه از صفحهٔ مماس بر S را می‌توان محاسبه نمود. به بیان دقیقتر اگر $A, B \in P_{X_0}S$ ، در این صورت فاصلهٔ بین A و B را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$d_{X_0}(A, B) := \|\vec{AB}\|_{X_0}$$

سایر مفاهیم، نظیر خط، مثلث، بینیت و . . . را کاملاً شبیه به هندسهٔ اقلیدسی دو بعدی می‌توان تعریف نمود.

مثال ۳.۳.۲

فرض کنیم $z = 0$: صفحه xOy است و از نقشه $\vec{r} = (u, v, 0)$ استفاده کنیم. در این صورت اولین فرم اساسی S عبارت است از $I = dx^2 + dy^2$. بعلاوه اگر $X_0 = \vec{r}(0, 0) = (0, 0, 0)$ آنگاه

$$\vec{r}_u(0, 0) = \vec{i}$$

$$\vec{r}_v(0, 0) = \vec{j}$$

$$T_{X_0} S = \{ a\vec{i} + b\vec{j} \mid a, b \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}^2 \quad \mathcal{P}_{X_0} S = X_0 + T_{X_0} S = \mathbb{R}^2$$

$$(a\vec{r}_u(0, 0) + b\vec{r}_v(0, 0)) \cdot_{X_0} (c\vec{r}_u(0, 0) + d\vec{r}_v(0, 0)) = ac + bd$$

$$\|a\vec{r}_u(0, 0) + b\vec{r}_v(0, 0)\| = \sqrt{ac + bd}$$

$$\angle_{X_0} (a\vec{r}_u(0, 0) + b\vec{r}_v(0, 0), (c\vec{r}_u(0, 0) + d\vec{r}_v(0, 0)))$$

$$= \arccos \left(\frac{ac + bd}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2}} \right)$$

که همان هندسه تحلیلی دو بعدی کلاسیک می باشد.

مثال ۴.۳.۲

فرض کنیم $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$: S . این کره را به صورت زیر پارامتره می کنیم:

$$\begin{cases} \vec{r}(u, v) = (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u) \\ D : -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq 2\pi \end{cases}$$

در این صورت

$$\vec{r}_u = (-R \sin u \cos v, -R \sin u \sin v, R \cos u)$$

$$\vec{r}_v = (-R \cos u \sin v, R \cos u \cos v, 0)$$

$$g_{11} = R^2$$

$$g_{22} = R^2 \cos^2 u$$

$$g_{12} = g_{21} = 0$$

$$g = R^2 \cos^2 u$$

$$I = R^2 du^2 + R^2 \cos^2 u dv^2$$

شکل ۱.۲: فضای مناسب در یک نقطه از یک کره

حال هندسهٔ تحلیلی S در نقطهٔ $X_\circ = \vec{r}\left(\circ, \frac{\pi}{4}\right)$ را تشریح می‌کنیم. به شکل ۱.۲ توجه شود. ابتدا توجه می‌کنیم که

$$\vec{r}_u\left(\circ, \frac{\pi}{4}\right) = (\circ, \circ, R) \qquad \vec{r}_v\left(\circ, \frac{\pi}{4}\right) = (-R, \circ, \circ)$$

$$\vec{m}\left(\circ, \frac{\pi}{4}\right) = (\circ, -1, \circ)$$

بنابراین

$$T_{X_\circ}S = \left\{ a\vec{r}_u\left(\circ, \frac{\pi}{4}\right) + b\vec{r}_v\left(\circ, \frac{\pi}{4}\right) \right\} = \left\{ (-bR, \circ, aR) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{P}_{X_\circ}S = X_\circ + T_{X_\circ}S = \left\{ (-bR, R, aR) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} : y = R \text{ صفحه}$$

$$\begin{aligned} \left(a\vec{r}_u\left(\circ, \frac{\pi}{4}\right) + b\vec{r}_v\left(\circ, \frac{\pi}{4}\right) \right) \cdot_{X_\circ} \left(c\vec{r}_u\left(\circ, \frac{\pi}{4}\right) + d\vec{r}_v\left(\circ, \frac{\pi}{4}\right) \right) &= \\ &= R^\top ac + R^\top bd \end{aligned}$$

$$\left\| a\vec{r}_u\left(\circ, \frac{\pi}{4}\right) + b\vec{r}_v\left(\circ, \frac{\pi}{4}\right) \right\|_{X_\circ} = R\sqrt{a^\top + b^\top}$$

$$\begin{aligned} \angle \left(\left(a\vec{r}_u\left(\circ, \frac{\pi}{4}\right) + b\vec{r}_v\left(\circ, \frac{\pi}{4}\right) \right) + \left(c\vec{r}_u\left(\circ, \frac{\pi}{4}\right) + d\vec{r}_v\left(\circ, \frac{\pi}{4}\right) \right) \right) &= \\ &= \cos^{-1} \left(\frac{ac + bd}{\sqrt{a^\top + b^\top} \cdot \sqrt{c^\top + d^\top}} \right) \end{aligned}$$

شکل ۱۱.۲: طول قوس یک منحنی واقع بر یک منحنی

۵.۳.۲ طول قوس یک منحنی واقع بر یک رویه

فرض کنید C با مشخصات زیر یک منحنی واقع بر رویه S با نقشه \vec{r} باشد. در این صورت توابع $u(t)$ و $v(t)$ را به گونه‌ای می‌توان یافت که

$$C : \vec{h}(t) = \vec{r}(u(t), v(t)) ; a \leq t \leq b$$

اکنون، طول منحنی C را به روش زیر می‌توان محاسبه نمود:

$$\begin{aligned} \ell_C &= \int_a^b \left\| \vec{h}'(t) \right\|_{\vec{h}(t)} dt \\ &= \int_a^b \left\{ g_{11}(u(t), v(t)) (u'(t))^2 + 2g_{12}(u(t), v(t)) u'(t)v'(t) \right. \\ &\quad \left. + g_{22}(u(t), v(t)) (v'(t))^2 \right\}^{1/2} dt \end{aligned}$$

به شکل ۱۱.۲ توجه شود.

۶.۳.۲ مثال

فرض کنید S تیوب همراه با نقشه \vec{r} است و

$$C : \vec{h}(t) = \vec{r}(t, nt) ; 0 \leq t \leq 2\pi$$

شکل ۲۱.۲: منحنی برنیوپ

یک منحنی بر S است که $n \in \mathbb{N}$. این منحنی یک گرهٔ فضایی است! در این صورت

$$\begin{aligned} \ell_C &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1)^2 + 2(\circ)(1)(n) + (a \cos u + b)^2(n)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + (a \cos u + b)^2 n^2} dt \end{aligned}$$

این مسئله بدلیل پیچیدگی از این روش غیر قابل حل است. به شکل ۲۱.۲ توجه شود.

مثال ۷.۳.۲

فرض کنیم

$$S : z = \sqrt{x^2 + y^2} ; z \leq 2 \quad C : S \cap \{z = 1\}$$

در این صورت S را به شکل زیر می‌توان پارامتره نمود:

$$\begin{cases} \vec{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u) \\ D : 0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 2\pi \end{cases}$$

که در این صورت اولین فرم اساسی آن

$$I = (1 + u^2) du^2 + u^2 dv^2$$

شکل ۳۱.۲: منحنی بر مخروط

می شود. اما، به این ترتیب، منحنی C را به صورت

$$C : \vec{h}(t) = \vec{r}(1, t) ; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

می توان نوشت. در نتیجه طول آن برابر است با

$$\ell_C = \int_0^{2\pi} \sqrt{(0)^2 + 2(0)(0) + (1)^2} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

به شکل ۳۱.۲ توجه شود.

۸.۳.۲ محاسبه مساحت ناحیه‌ای از یک رویه

فرض کنید S رویه و \vec{r} نقشه‌ای برای آن است، همچنین فرض کنید Σ قسمتی از رویه است که تماماً در برد \vec{r} قرار می‌گیرد. فرض کنیم تصویر معکوس Σ در D توسط نقشه \vec{r} برابر مجموعه U می‌باشد: $U = \vec{r}^{-1}(\Sigma)$. در این صورت، مساحت Σ به شکل زیر قابل محاسبه است:

$$\text{Area}(\Sigma) := \int \int_U \sqrt{g} du dv$$

که $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$ دترمینان اولین فرم اساسی S نسبت به نقشه \vec{r} می‌باشد. به شکل ۳۱.۲ توجه شود.

شکل ۴۱.۲: ناحیه بریک رویه

مثال ۹.۳.۲

فرض کنید S قسمتی سهمی گون بیضوی $z = xy$ باشد که توسط استوانهٔ $x^2 + y^2 = 9$ جدا شده است. همچنین فرض کنید Σ قسمتی از رویهٔ S باشد که در یک هشتم اول واقع شده است. می‌خواهیم مساحت Σ را بیابیم. برای این منظور لازم است که ابتدا رویه را پارامتره کنیم. توجه داریم که در اینجا

$$S : z = xy ; x^2 + y^2 \leq 9$$

$$\Sigma : z = xy ; x^2 + y^2 \leq 9 , 0 \leq x , 0 \leq y$$

فرض کنیم

$$\vec{r}(u, v) = (u, v, uv) ; D : u^2 + v^2 \leq 9$$

در این صورت

$$\Sigma = \vec{r}(U) ; U : u^2 + v^2 \leq 9 , 0 \leq u , 0 \leq v$$

و بعلاوه $I = (1 + u^2)du^2 + 2uvdudv + (1 + v^2)dv^2$ در نتیجه

$$\begin{aligned} \text{Area}(\Sigma) &= \iint_U \sqrt{g} dudv = \iint_U \sqrt{(1 + u^2)(1 + v^2) - (uv)^2} dudv \\ &= \iint_U \sqrt{1 + u^2 + v^2} dudv \stackrel{(1)}{=} \int \int_{U'} \sqrt{1 + r^2} r dr d\theta \end{aligned}$$

شکل ۵۱.۲: سهمی گون هذلولوی

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^3 r \sqrt{1+r^2} \right] d\theta = [\theta]_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{3} (1+r^2)^{3/2} \right] \\ &= \left(\frac{\pi}{2} \right) (10\sqrt{10} - 1) = \frac{\pi}{6} (10\sqrt{10} - 1) \end{aligned}$$

به شکل ۵۱.۲ توجه شود.

۱۰.۳.۲ محاسبه زاویه بیت دو منحنی واقع بر یک رویه

برای محاسبه زاویه بیت دو منحنی واقع بر یک رویه کافی است زاویه بین بردارهای مماس بر آن دو منحنی را در نقطه مورد نظر محاسبه کنیم.

چنانچه \vec{r} نقشه‌ای با دامنه D برای رویه S باشد، با تصویر نمودن خطوط $u = u_0$ و $v = v_0$ به کمک \vec{r} بر سطح S ، می‌توان به یک شبکه بر قسمتی از S که برابر برد \vec{r} است دست یافت. چنانچه $g_{12} = 0$ ، خانواده حاصل از $u = u_0$ ها بر خانواده حاصل از $v = v_0$ ها عمود خواهند بود. چنین نقشه‌هایی را متعامد می‌نامند. ثابت می‌شود که در هر همسایگی از هر نقطه از یک رویه مفروض، در برد لااقل یک نقشه متعامد قرار دارد. به شکل ۶۱.۲ توجه شود.

شکل ۶۱.۲: شبکهٔ متعامد بر یک رویه

۱۱.۳.۲ مثال

فرض کنیم S صفحهٔ xOy است و

$$\vec{r}(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv) ; |u| + |v| \leq 1$$

در این صورت

$$\vec{r}_u = (2u, 2v, 0)$$

$$\vec{r}_v = (-2v, 2u, 0)$$

$$I = 4(u^2 + v^2)(du^2 + dv^2)$$

خطوط $u = u_0$ و $v = v_0$ را در شکل ۷۱.۲ ترسیم نمود.

۴.۲ دومین فرم اساسی

فرض کنید S یک رویه است و \vec{r} نقشه‌ای از آن و (X_0, v_0) نقطه‌ای منظم از S است. (منظم بودن نقطهٔ X_0 بسیار مهم است.)

فرض کنید صفحه مماس بر S در نقطهٔ X_0 را ترسیم نموده‌ایم و فاصلهٔ نقطهٔ

$$X_1 = \vec{r}(u_0 + d_u, v_0 + d_v)$$

شکل ۷۱.۲: نمونه‌ای از یک شبکه متعامد در صفحه

شکل ۸۱.۲: دومین فرم اساسی

را تا این صفحه محاسبه نمودهایم (h). به شکل ۸۱.۲ توجه شود. دو برابر این فاصله را دومین فرم اساسی رویهٔ S نسبت به نقشه \vec{r} در نقطه X_0 می‌نامیم.

$$\begin{aligned}
 II &:= \int h \\
 &= \int \frac{(X - X_0) \cdot \vec{m}(u_0, v_0)}{\|\vec{m}(u_0, v_0)\|} \\
 &\stackrel{(1)}{=} \int (\vec{r}(u_0 + du, v_0 + dv) - \vec{r}(u_0, v_0)) \cdot \vec{m}(u_0, v_0) \\
 &= \int \left(\vec{r}_u(u_0, v_0)du + \vec{r}_v(u_0, v_0)dv + \frac{1}{2}\vec{r}_{uv}(u_0, v_0)du^2 \right. \\
 &\quad \left. + \vec{r}_{uv}(u_0, v_0)dudv + \frac{1}{2}\vec{r}_{vv}(u_0, v_0)dv^2 + O(2) \right) \cdot \vec{m}(u_0, v_0) \\
 &= \left(\vec{r}_{uu}(u_0, v_0) \cdot \vec{m}(u_0, v_0) \right) du^2 + 2 \left(\vec{r}_u v(u_0, v_0) \cdot \vec{m}(u_0, v_0) \right) dudv \\
 &\quad + 2 \left(\vec{r}_v v(u_0, v_0) \cdot \vec{m}(u_0, v_0) \right) dv^2 + O(2)
 \end{aligned}$$

در نتیجه، اگر تعریف کنیم

$$\begin{aligned}
 b_{11} &:= \vec{r}_{uu} \cdot \vec{m} & b_{12} = b_{21} &:= \vec{r}_{uv} \cdot \vec{m} \\
 b_{22} &:= \vec{r}_{vv} \cdot \vec{m} & b &:= b_{11}b_{22} - b_{12}^2
 \end{aligned}$$

در این صورت

$$II := b_{11}du^2 + 2b_{12}dudv + b_{22}dv^2$$

II را دومین فرم اساسی^{۱۵} رویهٔ S متناظر به نقشهٔ \vec{r} می‌نامیم. b_{ij} ها را ضرایب و b را دترمینان دومین فرم اساسی می‌نامیم.

۱.۴.۲ مثال: نمودار توابع

فرض کنیم S نمودار تابع $z = f(x, y)$ بر دامنهٔ D باشد:

$$S : z = f(x, y) ; (x, y) \in D$$

در این صورت، مطابق معمول فرض می‌کنیم

$$\begin{cases} \vec{r}(u, v) = (u, v, f(u, v)) \\ (u, v) \in D \end{cases}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} \vec{r}_u &= (\mathbf{1}, \circ, f_u) & \vec{r}_v &= (\circ, \mathbf{1}, f_v) \\ \vec{r}_{uu} &= (\circ, \circ, f_{uu}) & \vec{r}_{vv} &= \vec{r}_{vv} = (\circ, \circ, f_{vv}) \end{aligned}$$

$$\vec{r}_{uv} = (\circ, \circ, f_{uv})$$

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \mathbf{1} & \circ & f_u \\ \circ & \mathbf{1} & f_v \end{vmatrix} = (-f_u, -f_v, \mathbf{1})$$

$$\vec{m} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1} + f_u^2 + f_v^2}} (-f_u, f_v, \mathbf{1})$$

$$g_{11} = \mathbf{1} + f_u^2 \quad g_{12} = g_{21} = f_u f_v$$

$$g_{22} = \mathbf{1} + f_v^2 \quad g = \mathbf{1} + f_u^2 + f_v^2$$

در نتیجه اولین فرم اساسی عبارت است از

$$I = (\mathbf{1} + f_u^2) du^2 + 2f_u f_v dudv + (\mathbf{1} + f_v^2) dv^2$$

بعلاوه

$$b_{11} = \vec{r}_{uu} \cdot \vec{m} = \frac{f_{uu}}{\sqrt{g}} \quad b_{12} = b_{21} = \vec{r}_{uv} \cdot \vec{m} = \frac{f_{uv}}{\sqrt{g}}$$

$$b_{22} = \vec{r}_{vv} \cdot \vec{m} = \frac{f_{vv}}{g} \quad b = \frac{f_{uu}f_{vv} - f_{uv}^2}{g}$$

در نتیجه دومین فرم اساسی عبارت است از

$$II = \frac{\mathbf{1}}{g} (f_{uu} du^2 + 2f_{uv} dudv + f_{vv} dv^2)$$

شکل ۹۱.۲: رویهٔ دورانی

۲.۴.۲ مثال: رویه‌های دورانی

فرض کنید نمودار تابع $y = f(x)$ بر بازهٔ $a \leq x \leq b$ را حول محور x ها دوران داده‌ایم و رویه حاصل را S نامیده‌ایم. اولین و دومین فرم اساسی این رویه را بدست می‌آوریم. این مثال در حالت خاص شامل کره، تیوب و ... می‌شود. به شکل ۲.۴.۲ توجه شود. ابتدا باید رویهٔ داده شده را پارامتره کنیم. برای این منظور توجه می‌کنیم که با دوران فاصلهٔ نقطه تا محور x ها تغییر نمی‌کند. پس اگر فاصلهٔ نقطه تا صفحهٔ yz را v بنامیم و زاویهٔ دوران حول محور x ها را u بنامیم، در این صورت

$$S : \begin{cases} x = v \\ \sqrt{y^2 + z^2} = f(v) \\ \tan\left(\frac{z}{y}\right) = u \end{cases} : \begin{cases} x = v \\ y = f(v) \sin u \\ z = f(v) \cos u \end{cases}$$

در نتیجه، تعریف می‌کنیم

$$S : \begin{cases} \vec{r}(u, v) = (v, f(v) \sin u, f(v) \cos u) \\ D : 0 \leq u \leq 2\pi, a \leq v \leq b \end{cases}$$

در این صورت

$$\vec{r}_u = (0, f(v) \cos u, -f(v) \sin u)$$

$$\begin{aligned}\vec{r}_u &= (\lambda, f'(v) \sin u, f'(v) \cos u) \\ g_{11} &= (f(v))^2 \quad g_{12} = g_{21} = f(v)f'(v) \\ g_{22} &= \lambda + (f'(v))^2 \quad g = f^2(v) (\lambda + (f'(v))^2)\end{aligned}$$

در نتیجه

$$I = (f(v))^2 du^2 + 2f(v)f'(v)dudv + (\lambda + (f'(v))^2) dv^2$$

بعلاوه

$$\begin{aligned}\vec{r}_{uu} &= (0, -f(v) \sin u, -f(v) \cos u) \\ \vec{r}_{uv} &= (0, f'(v) \cos u, -f'(v) \sin u) \\ \vec{r}_{vv} &= (0, f''(v) \sin u, f''(v) \cos u) \\ \vec{r}_u \times \vec{r}_v &= (f(v)f'(v), -f(v) \sin u, -f(v) \cos u) \\ \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| &= \sqrt{g} = |f(v)| \sqrt{\lambda + (f'(v))^2} \\ \vec{n} &= \frac{1}{\sqrt{g}} (f(v)f'(v), -f(v) \sin u, -f(v) \cos u) \\ b_{11} &= \frac{1}{\sqrt{g}} (f(v))^2 \quad b_{12} = b_{21} = 0 \\ b_{22} &= -\frac{1}{\sqrt{g}} (f(v)f''(v)) \quad b = \frac{1}{g} (f(v))^2 f'(v)\end{aligned}$$

در نتیجه

$$II = \operatorname{sgn}(f(v)) (f(v)du^2 - f''(v)dv^2)$$

شکل ۲.۲: نقطهٔ بیضوی

۵.۲ انواع نقاط واقع بر یک رویه

نقاط منظم واقع بر یک رویه را به کمک دومین فرم اساسی به ۴ دسته می‌توان تقسیم نمود: الف) نقاط بیضوی^{۱۶} ب) نقاط هذلولوی^{۱۷} ج) نقاط سهموی^{۱۸} د) نقاط تکین^{۱۹} به بیان دقیقتر،

الف) نقاط بیضوی: نقاطی هستند که در آنها $b > 0$. این گونه نقاط شبیه به نقاط واقع بر یک کره هستند. به شکل ۵.۲ توجه شود.

ب) نقاط هذلولوی: نقاطی هستند که در آنها $b < 0$. این گونه نقاط شبیه به نقاط زینی هستند (مثلاً، نقطهٔ $(0, 0, 0)$ بر رویهٔ $(S : z = xy)$. به شکل ۵.۲ توجه شود.

ج) نقاط سهموی: نقاطی هستند که در آنها $b = 0$ ولی لااقل یکی از ضرایب دومین فرم اساسی مخالف صفرند. این گونه نقاط شبیه به نقاط واقع بر یک استوانه هستند (مثلاً، نقطهٔ $(1, 0, 0)$ بر رویهٔ $(S : x^2 + y^2 = 1)$. به شکل ۵.۲ توجه شود.

 Eliptic poits^{۱۶}
Hyperbolic poits^{۱۷}Parabolic poits^{۱۸}Singular poits^{۱۹}

شکل ۱۲.۲: نقطهٔ هذلولوی

شکل ۲۲.۲: نقطهٔ سهموی

شکل ۲.۲.۳: زین میمون

(د) نقاط تکین نقاطی هستند که در آنها همهٔ ضرایب دومین فرم اساسی صفرند. این گونه نقاط شبیه به نقطهٔ زین میمون هستند (به شکل ۲.۵.۲ توجه شود).

۱.۵.۲ یادداشت:

آقای جان میلنر اثبات^{۲۰} می‌کند که صرف نظر از یک مجموعهٔ با مساحت صفر، همهٔ نقاط واقع بر یک رویه منظمند (یعنی، از نوع الف، ب و یا ج هستند). شاخه‌ای از هندسه دیفرانسیل نوین بنام نظریهٔ تکینگیها^{۲۱} و یا نظریهٔ فاجعه^{۲۲} به مطالعهٔ این گونه نقاط اختصاص دارد. یکی از قضایای این نظریه اذعان می‌دارد که اگر نقطه‌ای از یک رویه تکین باشد، در این صورت با کمی تغییر در رویه می‌توان آن نقطه را به یک نقطهٔ معمولی تبدیل نمود. از این پس همهٔ بحث ما در خصوص نقاط معمولی است.

۲.۵.۲ مثال

سه‌می‌گون بیضوی $z = x^2 + y^2$; $z \leq 4$ را در نظر می‌گیریم. قبلاً دیده‌ایم که

$$II = \frac{2}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}} (du^2 + dv^2) \quad b = \frac{4}{1 + 4u^2 + 4v^2}$$

^{۲۰} John Milnor

^{۲۱} Singularity theory

^{۲۲} Catastroph theory

در نتیجه، تمام نقاط S از نوع بیضوی هستند ($b > 0$).

۳.۵.۲ مثال

سه‌می‌گون هذلولوی $z = xy; |x| + |y| \leq 4$ را در نظر می‌گیریم. قبلاً دیده‌ایم که

$$II = \frac{2dudv}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \quad b = \frac{-1}{1+u^2+v^2}$$

در نتیجه، تمام نقاط S از نوع هذلولوی هستند ($b < 0$).

۴.۵.۲ مثال: زین میمون

رویۀ $z = x(x^2 - 3y^2); x^2 + y^2 \leq 4$ را در نظر می‌گیریم. قبلاً دیده‌ایم که

$$II = \frac{1}{\sqrt{1+9(u^2+v^2)^2}} (64du^2 - 12dudv - 6dv^2)$$

$$b = \frac{-36}{1+9(u^2+v^2)^2} (u^2+v^2)$$

در نتیجه، تمام نقاط S بجز $X_0 = (0, 0, 0)$ از نوع هذلولوی هستند و X نیز یک نقطهٔ تکین می‌باشد. این نقطه را نقطهٔ زین میمونی می‌نامند. به شکل ۵.۲ توجه شود.

۶.۲ نگاشت کروی - گاوسی

مطابق تعریف اگر S یک رویه و X نقطه‌ای منظم از آن باشد و U مجموعه‌ای شامل X در این صورت، مساحت U را می‌توان بر حسب لبه و جهت لبه آن دارای علامت کرد. به این معنی که اگر جهت لبه با بردار قائم حاضر در نقطهٔ X مطابقت داشته باشد مساحت را مثبت و در غیر این صورت مساحت را منفی تعریف می‌کنیم. به شکل ۴۲.۲ توجه شود.

شکل ۴۲.۲: علامت مساحت یک ناحیه

شکل ۵۲.۲: ناحیهٔ جهتدار

۱.۶.۲ مثال

فرض کنیم $x^2 + y^2 + z^2 = 1$: کرهٔ واحد است و U نیمکرهٔ بالایی آن $x^2 + y^2 + z^2 = 1, 0 \leq z$: U با جهت سازگار با بردار \vec{k} باشد و $-U$ همان مجموعه اما با جهت سازگار با بردار $-\vec{k}$ باشد. به شکل ۵۲.۲ توجه شود. در این صورت مساحت U برابر $\frac{2}{3}\pi$ برابر $(1)^2 \times \frac{4}{3}\pi \times \frac{1}{4}$ و مساحت $-U$ برابر $-\frac{2}{3}\pi$ می‌باشد.

۲.۶.۲ تعریف: انحناء گاوسی

فرض کنیم S یک رویه و \vec{r} نقشه‌ای برای آن باشد. در این صورت نگاشتی که $X = \vec{r}(u, v)$ را به $\vec{m}(u, v)$ نظیر می‌کند، نگاشت گاوسی نظیر به نقشهٔ \vec{r} می‌نامیم:

$$G : S \rightarrow Sp$$

توضیح اینکه Sp کره‌ای به شعاع ۱ و مرکز مبدا است. چون $\vec{m}(u, v)$ برداری به طول یک است، مقدار این نگاشت به Sp تعلق دارد. به شکل ۶۲.۲ توجه شود. فرض کنیم $X_0 = \vec{r}(u_0, v_0)$ نقطه‌ای منظم از رویهٔ S است. در این صورت، انحنای گاوسی^{۲۳} رویهٔ S در نقطهٔ X_0 را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$K(X_0) = K(u_0, v_0) := \lim_{U \rightarrow X_0} \frac{\text{Area}(G(U))}{\text{Area}(U)}$$

Gaussian curvature^{۲۳}

شکل ۶۲.۲: انحناء گاوسی

۷.۲ قضیه

انحنای گاوسی یک کمیت هندسی است و برابر با دترمینان دومین فرم اساسی تقسیم به دترمینان اولین فرم اساسی می‌باشد:

$$K = \frac{b}{g}$$

۱.۷.۲ مثال

فرض کنیم $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ کره‌ای به شعاع R است و توسط مختصات کروی پارامتره شده است:

$$\begin{cases} \vec{r}(\varphi, \theta) = (R \cos \varphi \cos \theta, R \cos \varphi \sin \theta, R \sin \varphi) \\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

در این صورت

$$\begin{aligned} I &= R^2 d\varphi^2 + R^2 \cos^2 \varphi d\theta^2, \quad g = R^4 \cos^2 \varphi \\ II &= R d\varphi^2 + R \cos \varphi d\theta^2, \quad b = R^2 \cos^2 \varphi \end{aligned}$$

$$.K = \frac{1}{R^2} \text{ بنابراین}$$

۲.۷.۲ مثال: رویه‌های خطدار

فرض کنید $\vec{h}(t)$ و $\vec{\ell}(t)$ که $a \leq t \leq b$ دو منحنی همواره مشتق‌پذیر در فضا باشند. مجموعه‌ای به شرح زیر تعریف می‌کنیم:

$$S : \begin{cases} \vec{r}(u, v) = v\vec{h}(u) + (1-v)\vec{\ell}(u) \\ D : a \leq u \leq b; \quad 0 \leq v \leq 1 \end{cases}$$

شکل ۷۲.۲: رویهٔ خطدار

بدین ترتیب مجموعه‌ای حاصل می‌گردد که از بهم متصل کردن نقاط $\vec{h}(t)$ و $\vec{\ell}(t)$ به ازای مقادیر مختلف t حاصل می‌شود. به شکل ۷۲.۲ توجه شود. در این صورت

$$\begin{aligned}\vec{r}_u &= v\vec{h}'(u) + (\lambda + v)\vec{\ell}'(u) \\ \vec{r}_v &= \vec{h}'(u) - \vec{\ell}'(u) \\ \vec{r}_u \times \vec{r}_v &= \left(v\vec{h}'(u) + (\lambda - v)\vec{\ell}'(u) \right) \times \left(\vec{h}'(u) - \vec{\ell}'(u) \right) \\ \vec{m} &= \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}\end{aligned}$$

مجموعهٔ S در صورتی رویه است که در عبارت $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ هر دو مولفهٔ مخالف صفر و غیر موازی باشند.

$$\begin{aligned}g_{11} &= \|v\vec{h}'(u) + (\lambda - v)\vec{\ell}'(u)\|^2 \\ g_{12} &= \left(v\vec{h}'(u) + (\lambda - v)\vec{\ell}'(u) \right) \cdot \left(\vec{h}'(u) - \vec{\ell}'(u) \right) \\ g_{22} &= \|\vec{h}'(u) - \vec{\ell}'(u)\|^2 \\ g &= \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|^2 \\ \vec{r}_{uu} &= v\vec{h}''(u) + (\lambda - v)\vec{\ell}''(u) \\ \vec{r}_{uv} &= \vec{h}''(u) - \vec{\ell}''(u) \\ \vec{r}_{vv} &= \circ \\ b_{11} &= \frac{\lambda}{\sqrt{g}} \left[v\vec{h}'' + (\lambda - v)\vec{\ell}''; v\vec{h}' + (\lambda - v)\vec{\ell}'; \vec{h} - \vec{\ell} \right] \\ b_{12} &= b_{21} = \frac{\lambda}{\sqrt{g}} \left[\vec{h}'' - \vec{\ell}''; v\vec{h}' + (\lambda - v)\vec{\ell}'; \vec{h} - \vec{\ell} \right] \\ b_{22} &= \circ \\ b &= -\frac{\lambda}{g} \left[\vec{h}'' - \vec{\ell}''; v\vec{h}' + (\lambda - v)\vec{\ell}'; \vec{h} - \vec{\ell} \right]^2\end{aligned}$$

شکل ۸۲.۲: هذلولی‌گون یکپارچه

بنابراین

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{b}{g} = -\frac{1}{g^2} [\vec{h}' - \vec{\ell}'; v\vec{h}' + (\lambda - v)\vec{\ell}'; \vec{h} - \vec{\ell}]^2 \\
 &= \frac{-[\vec{h} - \vec{\ell}; \vec{h}'; \vec{\ell}']^2}{\| (v\vec{h}' + (\lambda - v)\vec{\ell}') \times (\vec{h} - \vec{\ell}) \|^2}
 \end{aligned}$$

مثال ۳.۷.۲

چنانچه \vec{h} و $\vec{\ell}$ را دایره بگیریم، مثلاً

$$\vec{h}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} ; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\vec{\ell}(t) = \sin t \vec{i} + \cos t \vec{j} + \vec{k} ; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

در این صورت

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{\begin{vmatrix} \cos t - \sin t & \sin t - \cos t & -1 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ \cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -v \sin u + (\lambda - v) \cos u & \cos u - (\lambda - v) \sin u & 0 \\ \cos t - \sin t & \sin t - \cos t & -1 \end{vmatrix}} \\
 &= \frac{- (\sin^2 u - \cos^2 u)^2}{[(v^2 + (\lambda - v))^2 + (-4v)(\lambda - v) \sin u + \lambda - 2 \sin u \cos u]^2}
 \end{aligned}$$

به شکل ۸۲.۲ توجه شود.

شکل ۹۲.۲: انحنا قائم و ژئودزی

۴.۷.۲ یادداشت:

انحنای رویه‌های خطدار همواره نامشبتند.

۸.۲ انحنا قائم و ژئودزیک

فرض کنید S یک رویه با نقشهٔ \vec{r} باشد و $X_0 = \vec{r}(u_0, v_0)$ یک نقطهٔ منظم از رویهٔ S باشد.

فرض کنید $\vec{h}(s) = \vec{r}(u(s), v(s))$ یک منحنی هموار با پارامتر طول قوس واقع بر رویهٔ S باشد طوری که $X_0 = \vec{h}(0)$ در این صورت $\vec{h}'(0)$ (بردار سرعت) (بردار یکه مماس بر برد \vec{h}) بر رویهٔ S مماس است اما هیچ دلیلی وجود ندارد که $\vec{h}''(0)$ مماس باشد.

$$\vec{h}''(0) = (\text{بردار انحنای } \vec{h} \text{ در } s = 0)$$

لذا این بردار را می‌توان به دو مؤلفه تقسیم نمود:

الف) مؤلفهٔ قائم بر سطح: که اصطلاحاً آن را انحنا قائم رویهٔ S در نقطهٔ X_0 و راستای $\vec{h}'(0)$ می‌گوئیم.

ب) مؤلفهٔ مماس: (یعنی، تصویر بر صفحهٔ مماس) که انحنا ژئودزیک S در X_0 و در راستای $\vec{h}'(0)$ نامیده می‌شود.

دو انحنا حاصل را به ترتیب با نماد \vec{k}_{normal} و $\vec{k}_{geodesic}$ نشان می‌دهند (به شکل ۹۲.۲ توجه شود). در نتیجه

$$\vec{h}'' = \vec{k}_n + \vec{k}_g$$

شکل ۳.۲: تعبیر هندسی انحناى قائم

در تعریف بالا مشاهده می‌شود که خود منحنی \vec{h} اهمیت ندارد بلکه $\vec{h}(\circ)$ اهمیت دارد؛ ضمناً، خود این بردار نیز اهمیت ندارد بلکه راستای آن اهمیت دارد. (یعنی، اگر $\vec{h}'(\circ)$ به $-\vec{h}'(\circ)$ تغییر کند تغییری در انحناى قائم ایجاد نمی‌کند). توجه داریم که \vec{k}_n در راستای \vec{m} است و \vec{k}_g در فضای مماس قرار دارد.

۱.۸.۲ تعبیر هندسی

اگر از نقطه X به موازات بردار \vec{m} و v صفحه‌ای عبور دهیم و فصل مشترک این صفحه با رویه S را منحنی c بنامیم سپس بردار انحناى این منحنی را در نقطه X بدست آوریم به انحناى قائم رویه S در نقطه X در راستای بردار v خواهیم رسید. روشن است که با ثابت بودن نقطه X و انتخاب مناسب v می‌توان به مقادیر مختلفی از انحناى قائم رسید. به شکل ۳.۲ توجه شود.

به این ترتیب در این مورد دو راستا می‌توان یافت که در آن راستاها اندازه انحناى قائم حداکثر یا حداقل است. این راستاها را راستاهای اصلی و مقادیر نظیر به آنها را انحناى اصلی رویه S در نقطه X می‌نامیم.

۲.۸.۲ قضیه

فرض کنید S یک رویه با نقشه \vec{r} باشد و X مساوی با $\vec{r}(u_\circ, v_\circ)$ نقطه‌ای منظم از آن باشد.

در این صورت، شرط لازم و کافی برای اینکه v یک بردار اصلی نظیر به مقدار اصلی k باشد آنست که v بردار ویژه نظیر به مقدار ویژه k از ماتریس L باشد.

$$\vec{v} = a\vec{r}_u(u_\circ, v_\circ) + b\vec{r}_v(u_\circ, v_\circ)$$

$$L = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

به بیان دیگر، بایستی اولاً

$$\det \left\{ k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right\} = 0.$$

و در ثانی

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

۳.۸.۲ نکته

از فرمول اول مقادیر ویژه و با فرمول دوم بردارهای ویژه پیدا میشوند.

۴.۸.۲ مثال

در صورتی که $z = x^2 + y^2$; $z \leq 4$ و $X_0 = (1, 1, 2)$ مقادیر اصلی در راستاهای اصلی رویهٔ S را در نقطهٔ X_0 می‌یابیم. برای این منظور، توجه می‌کنیم که می‌توان فرض نمود

$$\begin{cases} \vec{r}(u, v) = (u \cos u, u \sin u, u^2) \\ D : 0 \leq u \leq 2; 0 \leq v \leq 2\pi \end{cases}$$

بنابراین $X_0 = \vec{r} \left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ بعلاوه

$$\vec{r}_u = (\cos u, \sin u, 2u)$$

$$\vec{r}_v = (-u \sin u, u \cos u, 0)$$

$$\vec{r}_{uu} = (0, 0, 2)$$

$$\vec{r}_{uv} = (-\sin u, \cos u, 0)$$

$$\vec{r}_{vv} = (-u \cos u, -u \sin u, 0)$$

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (-2u^2 \cos v, -2u^2 \sin v, u)$$

$$\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| = u\sqrt{4u^2 + 1}$$

$$\vec{m} = \frac{1}{\gamma} (-2u \cos u, -2u \sin u, 1)$$

که در اینجا $\gamma = \sqrt{4u^2 + 1}$ در این صورت، خواهیم داشت

$$g_{11} = \gamma^2; \quad g_{12} = g_{21} = 0; \quad g_{22} = u^2$$

$$b_{11} = \frac{2}{\gamma}; \quad b_{12} = b_{21} = 0; \quad b_{22} = \frac{4u}{\gamma}$$

$$L = (g_{ij})^{-1} (b_{ij}) = \begin{pmatrix} \gamma^2 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{2}{u\gamma} & 0 \\ 0 & \frac{2u}{\gamma} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{u^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\gamma} & 0 \\ 0 & \frac{2u}{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{u(\gamma^2)^{3/2}} & 0 \\ 0 & \frac{4}{u\gamma} \end{pmatrix}$$

در نتیجه

$$\det(kI_2 - L) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} k - \frac{2}{u(\gamma^2)^{3/2}} & 0 \\ 0 & k - \frac{4}{u \cdot \gamma} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_{\min} = \frac{2}{u(\gamma^2)^{3/2}} \\ k_{\max} = \frac{4}{u\gamma} \end{cases}$$

حال بردارهای اصلی $u_{\max} = a\vec{r}_u(u_0, v_0) + b\vec{r}_v(u_0, v_0)$ متناظر به k_{\max} را می‌یابیم:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{u\gamma^3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{u\gamma^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{4}{u\gamma} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

شکل ۱۳.۲: راستاهای اصلی در نقطهٔ X_0 .

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2a}{u\gamma^3} = \frac{4a}{u\gamma} \\ \frac{4b}{u\gamma} = \frac{4b}{u\gamma} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2a \\ b = b \end{cases}$$

بنابراین $u_{\max} = b\vec{r}_u(u_0, v_0)$. بعلاوه در مورد بردار اصلی $u_{\min} = a\vec{r}_u(u_0, v_0) + b\vec{r}_u(u_0, v_0)$ متناظر به k_{\min} داریم

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{u\gamma^3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{4\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{2}{u\gamma^3} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2a}{u\gamma^3} = \frac{2a}{u\gamma^3} \\ \frac{4b}{u\gamma} = \frac{2b}{u\gamma^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = a \\ b = 0 \end{cases}$$

در نتیجه $u_{\min} = a\vec{r}_u(u_0, v_0)$

در مورد نقطهٔ بخصوص X_0 داریم:

$$k_{\max} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$k_{\min} = \frac{2\sqrt{2}}{27}$$

$$u_{\max} = (-1, 1, 0)$$

$$u_{\min} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2} \right)$$

به شکل ۱۳.۲ توجه شود.

۵.۸.۲ تمرین

فرض کنیم

$$S : x^2 + x^2 + z^2 = R^2 ; X_0 = (0, 0, R)$$

در این صورت، انحناهای اصلی و بردارهای اصلی رویهٔ S در نقطهٔ X_0 را بیابید.

۶.۸.۲ قضيه

در هر نقطه منظم از یک رویه مفروض، تساوی $K = k_{\min}k_{\max}$ برقرار است.

۹.۲ انحناى متوسط

در صورتی که X یک نقطه منظم رویه S باشد انحناى متوسط^{۲۴} آن رویه در نقطه X را به صورت متوسط انحناى اصلی تعريف می‌کنیم: $H = \frac{1}{2} (k_{\max} + k_{\min})$.

۱.۹.۲ قضيه

با داشتن فرمهای اساسی یک رویه، انحناء متوسط را به صورت زیر می‌توان محاسبه نمود:

$$H = \frac{1}{2g} (g_{22}b_{11} - 2g_{12}b_{12} + g_{11}b_{22})$$

۲.۹.۲ تمرین

در دو مثال قبلی H و K را پیدا کنید.

۳.۹.۲ نکته

انحنای متوسط می‌تواند متغیر باشد هر رویه را به کمک انحناى گاوسی و انحناى متوسط می‌توان کاملاً مشخص نمود. رویه S را در صورتی مینیمال گوئیم که انحناى متوسط آن در هر نقطه آن صفر باشد.

mean curvature^{۲۴}

۴.۹.۲ قضیه

فرض کنید C یک منحنی بسته در فضا باشد. از بین همهٔ رویه‌هایی که لبه آنها برابر C است تنها رویه مینیمال است که دارای حداقل مساحت است. (به چنین رویه‌هایی، رویه‌های کف صابونی نیز نامیده می‌شوند).

۵.۹.۲ قضیه

اگر $\vec{u} = a\vec{r}_u + b\vec{r}_v$ یک بردار مماس به رویهٔ S باشد در این صورت بردار انحنای اصلی آن در راستای بردار \vec{u} برابر است با

$$\begin{aligned}\vec{\kappa}_n &= \frac{II(\vec{u})}{I(\vec{u})}\vec{m} \\ &= \frac{b_{11}a^2 + 2b_{12}ab + b_{22}b^2}{g_{11}a^2 + 2g_{12}ab + g_{22}b^2}\vec{m}\end{aligned}$$

۶.۹.۲ منحنی‌های ژئودزی

بنابه تعریف منحنی C واقع بر رویهٔ S را در صورتی ژئودزی گوئیم که انحنای ژئودزی آن در همهٔ نقاط صفر باشد.

$$\begin{aligned}\vec{\kappa} &= \vec{r}'' = (\vec{r}')' = (\vec{r}'(u(s), v(s)))' \\ &= (u'\vec{r}_u + v'\vec{r}_v)' \\ &= u''\vec{r}_u + u'(\vec{r}_u)' + v''\vec{r}_v + v'(\vec{r}_v)' \\ &= u''\vec{r}_u + u'(u'\vec{r}_{uu} + v'\vec{r}_{uv}) + v''\vec{r}_v + v'(u'\vec{r}_{uv} + v'\vec{r}_{vv})' \\ &= u''\vec{r}_u + v''\vec{r}_v + (u')^2\vec{r}_{uu} + 2(u'v')\vec{r}_{uv} + (v')^2\vec{r}_{vv}\end{aligned}$$

در ادامه فرض می‌کنیم:

$$\begin{cases} \vec{r}_{uu} = \Gamma_{11}^1 \vec{r}_u + \Gamma_{11}^2 \vec{r}_v + b_{11} \vec{m} \\ \vec{r}_{uv} = \Gamma_{12}^1 \vec{r}_u + \Gamma_{12}^2 \vec{r}_v + b_{12} \vec{m} \\ \vec{r}_{vv} = \Gamma_{22}^1 \vec{r}_u + \Gamma_{22}^2 \vec{r}_v + b_{22} \vec{m} \end{cases}$$

Γ_{jk}^i ها را ضرایب کریستوفر می‌نامند. به این ترتیب، داریم

$$\begin{aligned} \vec{\kappa} = & \left\{ u'' + \Gamma_{11}^1 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 (v')^2 \right\} \vec{r}_u \\ & + \left\{ v'' + \Gamma_{11}^2 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 (v')^2 \right\} \vec{r}_v \\ & + \left\{ b_{11} (u')^2 + 2b_{12} u'v' + b_{22} (v')^2 \right\} \vec{m} \end{aligned}$$

۷.۹.۲ قضیه

شرط لازم و کافی برای اینکه منحنی $\vec{h}(s) = \vec{r}(u(s), v(s))$ یک منحنی ژئودزی باشد آن است که:

$$\begin{cases} u'' + \Gamma_{11}^1 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 (v')^2 = 0 \\ v'' + \Gamma_{11}^2 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 (v')^2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

این معادلات را معادلات ژئودزیک نقشه \vec{r} می‌نامیم.

به کمک قضیه بنیادی وجود و یکتایی جوابهای معادلات دیفرانسیل، اثبات می‌گردد که

۸.۹.۲ قضیه

فرض کنیم S یک رویه، X نقطه‌ای منظم از S و \vec{v} بردار یکه مماس بر S در X باشد. در این صورت یک و تنها منحنی ژئودزی $\vec{h}(s)$ بر S وجود دارد به گونه‌ای الف)

منحنی $\vec{h}(\circ) = X$ ، $\vec{h}'(\circ) = \vec{v}$ (ب) و $\vec{h}'(\circ) = \vec{v}$ (ج) دامنهٔ \vec{h} حد اکثر است.

منحنی ژئودزی صادق در شرایط این قضیه را منحنی ژئودزی ماکسیمال گذرنده از نقطهٔ X و با برداری هادی \vec{v} می‌گوئیم.

از قضیه زیر برای ساده‌تر پیدا کردن ضرایب کریستفراستفاده می‌شود:

۹.۹.۲ قضیه

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \\ \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \vec{r}_{uu} \cdot \vec{r}_u & \vec{r}_{uv} \cdot \vec{r}_u & \vec{r}_{vv} \cdot \vec{r}_u \\ \vec{r}_{uu} \cdot \vec{r}_v & \vec{r}_{uv} \cdot \vec{r}_v & \vec{r}_{vv} \cdot \vec{r}_v \end{bmatrix}$$

۱۰.۹.۲ مثال

فرض کنید S رویهٔ حاصل از دوران نمودار تابع $x = f(z)$ حول محور z ها باشد:

$$S : \begin{cases} \vec{r}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, u) \\ D : a \leq u \leq b, \circ \leq v \leq 2\pi \end{cases}$$

در این صورت

$$\vec{r}_u = (f'(u) \cos v, f'(u) \sin v, 1)$$

$$\vec{r}_v = (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, 0)$$

$$g_{11} = 1 + (f'(u))^2$$

$$g_{12} = g_{21} = 0$$

$$g_{22} = (f(u))^2$$

بنابراین

$$I = \left(1 + (f'(u))^2\right) du^2 + (f(u))^2 dv^2$$

بعلاوه

$$\begin{aligned} \vec{r}_u \times \vec{r}_v &= (-f(u) \cos v, -f(u) \sin v, f(u)f'(u)) \\ \vec{m} &= \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(u))^2}} (-\cos v, -\sin v, f'(u)) \\ \vec{r}_{uu} &= (f''(u) \cos v, f''(u) \sin v, 0) \\ \vec{r}_{uv} &= (-f'(u) \sin v, f'(u) \cos v, 0) \\ \vec{r}_{vv} &= (-f(u) \cos v, -f(u) \sin v, 0) \\ b_{11} &= \frac{-f''(u)}{\sqrt{1 + (f'(u))^2}} \\ b_{12} &= b_{21} = 0 \\ b_{22} &= \frac{f(u)}{\sqrt{1 + (f'(u))^2}} \end{aligned}$$

بنابراین

$$II = \frac{f(u)}{\sqrt{1 + (f'(u))^2}} (-f''(u)du^2 + f(u)dv^2)$$

اکنون از قضیه استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 + (f')^2 & 0 \\ 0 & f^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f'f'' & 0 & -ff' \\ 0 & ff' & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{1 + (f')^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{f^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f'f'' & 0 & -ff' \\ 0 & ff' & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{f'f'}{r} \mathbf{1} + (f')^2 & \circ & \frac{-ff'}{r} \mathbf{1} + (f')^2 \\ \circ & \frac{f}{r} & \circ \end{bmatrix}$$

و معادلات ژئودزی نظیر عبارتند از

$$\begin{cases} \left(\mathbf{1} + (f'(u))^2 \right) u'' + f(u)f''(u) (u')^2 - f(u)f'(u) (v')^2 = \circ \\ f(u)v'' + 2f'(u)u'v' = \circ \end{cases}$$

۱۱.۹.۲ مثال: نمونه‌ای از مثال قبل

فرض کنیم $-3 \leq z \leq 3$; $x^2 + y^2 = 4$; S : این استوانه را به شکل

$$\vec{r}(u, v) = (\cos v, \sin v, u) \quad ; \quad D : -3 \leq u \leq 3, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

پارامتره می‌کنیم، بنابراین یک رویهٔ دورانی است. به این ترتیب معادلات ژئودزی استوانه عبارتند از

$$\begin{cases} u''(s) = \circ \\ v''(s) = \circ \end{cases}$$

با حل این دو معادلهٔ دیفرانسیل داریم

$$\begin{cases} u(s) = As + B \\ v(s) = Cs + D \end{cases}$$

بنابراین، ژئودزیهای استوانه عبارتند از

$$\begin{aligned} \vec{h}(s) &= \vec{r}(u(s), v(s)) \\ &= (\cos(As + B), \sin(As + B), Cs + D) \end{aligned}$$

شکل ۲۳.۲: خطوط ژئودزى استوانه

چنانچه فرض شود $\vec{h}(0) = \vec{r}(u_0, v_0)$ و $\vec{h}'(0) = a\vec{r}_u(u_0, v_0) + b\vec{r}_v(u_0, v_0)$ ، آنگاه داریم

$$A = a, B = u_0, C = b, D = v_0.$$

در نتیجه

$$\vec{h}(s) = (\cos(as + u_0), \sin(as + u_0), bs + v_0)$$

که به یکی از سه حالت زیر می باشد:

الف) اگر $\vec{v} = \vec{r}_u(u_0, v_0)$ ، یعنی $a = 1$ و $b = 0$ در این صورت $\vec{h}(s)$ یک دایره افقی بر سطح S است. به شکل؟؟ توجه شود.

ب) اگر $\vec{v} = \vec{r}_v(u_0, v_0)$ ، یعنی $a = 0$ و $b = 1$ در این صورت $\vec{h}(s)$ یک خط موازی محور z ها بر سطح S است. به شکل؟؟ توجه شود.

ج) اگر a و b مخالف صفر باشند، در این صورت $\vec{h}(s)$ یک مارپیچ در راستای محور z ها و واقع بر سطح S می باشد. به شکل؟؟ توجه شود.

از قضیه زیر برای یافتن ژئودزیهای رویه‌ای که به شکل ضمنی تعریف شده است، می توان استفاده نمود. به شکل ۱۱.۹.۲ توجه شود.

۱۲.۹.۲ قضیه

فرض کنیم $S : f(x, y, z) = d$ رویه و $\vec{h}(s) = (x(s), y(s), z(s))$ یک منحنی ژئودزی با پارامتر طبیعی بر S می‌باشد. در این صورت

$$\begin{cases} f(x, y, z) = d \\ \frac{x''}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{y''}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{z''}{\frac{\partial f}{\partial z}} \\ (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = 1 \end{cases}$$

۱۳.۹.۲ مثال: کره

به کمک قضیهٔ بالا، ژئودزیهای کره $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ را می‌یابیم. در این صورت، اگر $\vec{h}(s) = (x(s), y(s), z(s))$ یک منحنی ژئودزی با پارامتر طبیعی بر S باشد، آنگاه

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 & (۱) \\ \frac{x''}{2x} = \frac{y''}{2y} = \frac{z''}{2z} & (۲) \\ (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = 1 & (۳) \end{cases}$$

با مشتقگیری از معادلهٔ (۱) نسبت به s نتیجه می‌شود که

$$2xx' + 2yy' + 2zz' = 0 \Rightarrow xx' + yy' + zz' = 0$$

چنانچه مجدداً مشتق بگیریم، نتیجه می‌شود

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 + xx'' + yy'' + zz'' = 0$$

و به کمک (۳) داریم

$$xx'' + yy'' + zz'' = -1 \quad (۴)$$

شکل ۳۳.۲: خطوط ژئودزى کره

حال فرض کنیم که مقدار مشترک در کسرهای (۲) برابر $\ell(s)$ باشد، در نتیجه از (۲) و (۴) به تساوی زیر می‌رسیم:

$$x\ell(s)x + y\ell(s)y + z\ell(s)z = -1 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \ell(s) = -1$$

بنابراین،

$$\begin{cases} x'' = -x \\ y'' = -y \\ z'' = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a_1 \cos s + b_1 \sin s \\ y = a_2 \cos s + b_2 \sin s \\ z = a_3 \cos s + b_3 \sin s \end{cases}$$

و در مجموع داریم

$$\vec{h}(s) = (\cos s) (a_1, a_2, a_3) + (\sin s) (b_1, b_2, b_3) \quad ; \quad 0 \leq s \leq 2\pi$$

که دایرهٔ عظیمهٔ حاصل از برخورد صفحهٔ گذرنده از مبدأ و بردار نرمال $(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3)$ با کرهٔ S می‌باشد.

چنانچه فرض کنیم که ژئودزى از نقطهٔ $X_0 = (1, 0, 0)$ آغاز شده و بردار هادی آن $\vec{v} = \vec{j}$ است. یعنی،

$$\begin{cases} x(0) = 1 & y(0) = 0 & z(0) = 0 \\ x'(0) = 0 & y'(0) = 1 & z'(0) = 0 \end{cases}$$

در این صورت به دایرهٔ $\vec{h}(s) = (\cos s, \sin s, 0)$ می‌رسیم. به شکل ۱۳.۹.۲ توجه شود.

۱۴.۹.۲ مثال: مخروط

فرض کنیم $z^2 = x^2 + y^2$ مخروط بوده و $\vec{h}(s) = (x(s), y(s), z(s))$ یک ژئودزی بر آن است. در این صورت بایستی

$$\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 & (۱) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x''}{2x} = \frac{y''}{2y} = \frac{z''}{-2z} & (۲) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = 1 & (۳) \end{cases}$$

چنانچه از طرفین (۱) نسبت به s دو بار مشتق بگیریم، نتیجه می‌گردد

$$2zz' = 2xx' + 2yy' \Rightarrow zz'' + (z')^2 = xx'' + (x')^2 + yy'' + (y')^2$$

و با استفاده از (۳) نتیجه می‌گیریم

$$zz'' + 2(z')^2 = 1 + xx'' + yy'' \quad (۴)$$

چنانچه مقدار مشترک کسرهای (۲) را $\ell(s)$ بگیریم، آنگاه

$$x'' = x\ell(s), \quad y'' = y\ell(s), \quad z'' = -z\ell(s) \quad (۵)$$

حال اگر این مقادیر را در (۴) قرار دهیم، نتیجه خواهد شد

$$-z^2\ell(s) + 2(z')^2 = 1 + x^2\ell(s) + y^2\ell(s) \stackrel{(۱)}{\Rightarrow} \ell(s) = \frac{2(z')^2 - 1}{2z^2}$$

با قرار دادن مقدار $\ell(s)$ در (۵) نتیجه می‌گیریم

$$z'' = -\frac{2(z')^2 - 1}{2z} \Rightarrow 2zz'' + 2(z')^2 = 1$$

که با حل این معادله به جواب $2z^2 = (s+a)^2 + b$ می‌رسیم.

۱۰.۲ هندسه ذاتی یک رویه

فرض کنید S یک رویه است و ژئودزیهای آن را یافته‌ایم. فرض کنید نقاط S را «نقطه» و ژئودزیهای آن را «خط» بنامیم. به این ترتیب، هندسه‌ای جدید که خاص رویه S می‌باشد ساخته می‌شود.

شکل ۴۳.۲: اصل توازی در هندسه ذاتی استوانه

شکل ۵۳.۲: اصل توازی در هندسه ذاتی کره

۱.۱۰.۲ مثال: هندسه ذاتی استوانه

استوانه را در نظر بگیرید. در این رویه بخصوص، ژئودزیاها عبارتند از دایر افقی، خطوط عمود و مایچهها.

در این هندسه می توان قضایایی را مطرح و اثبات نمود. بعنوان مثال در این هندسه از یک نقطه خارج از یک خط بی نهایت خط موازی با خط اول می توان عبور داد. به شکل ۱.۱۰.۲ توجه شود. بنابراین صحیح است که گفته شود «هندسه ذاتی استوانه اقلیدسی نیست».

۲.۱۰.۲ مثال: هندسه ذاتی کره

با توجه به اینکه ژئودزی های کره همان دایر عظیمه آن می باشند، بنابراین در این هندسه هر دو خط متقاطعند! بعلاوه، در این هندسه مجموع زوایای داخلی یک مثلث همواره بیش از π (و حداکثر برابر $\frac{3\pi}{2}$) می باشد. به شکل ۲.۱۰.۲ توجه شود.

۱۱.۲ قضیه گاوس-بونه

با قضیه ای بسیار جالب بنام قضیه گاوس-بونه شروع می کنیم. قبل از آن به تعدادی تعریف نیاز داریم.

۱.۱۱.۲ قضیه گاوس-بونه

فرض کنید S رویه ای معلوم و U ناحیه ای همبند (یعنی، یکپارچه) واقع بر S است که از مرز C از تعدادی منحنی تشکیل شده است. فرض کنید C بصورت استاندارد جهتدار شده باشد (یعنی، همواره \vec{m} سمت چپ متحرک واقع بر C دیده شود)، به

شکل ۶۳.۲: قضیهٔ گاوس بونه

شکل ۱.۱۱.۲ توجه شود. در این صورت، رابطه زیر برقرار است:

$$\int \int_U K d\sigma + \oint \kappa_g ds + \sum_{i=1}^n \alpha_i = 2\pi$$

که در اینجا K انحنای گاوسی، κ_g انحنای ژئودزی و α_i ها زوایای چرخش در C هستند.

۲.۱۱.۲ مثال: مثلثهای ژئودزیک بر سطح یک کره

فرض کنید $U = \Delta(ABD)$ مثلثی بر سطح کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ باشد که از قطعات دایره عظیمه ساخته شده است، طوری که زوایای داخلی آن به ترتیب a و b و c هستند. در این صورت $K = \frac{1}{R^2}$ ، $\kappa_g = 0$ ، $\alpha_1 = \pi - a$ ، $\alpha_2 = \pi - b$ و $\alpha_3 = \pi - c$. بنابراین، از قضیهٔ گاوس بونه نتیجه می‌گیریم

$$\int \int_U \frac{1}{R^2} d\sigma + \oint 0 ds + (\pi - a) + (\pi - b) + (\pi - c) = 2\pi$$

یا

$$\text{Area}(\Delta(ABD)) = a + b + c - \pi$$

۱۲.۲ تعمیم قضیهٔ گاوسی — بونه

قبل از بیان تعمیم این قضیه، به تعریف زیر نیاز داریم.

۱.۱۲.۲ تعریف

منظور از یک مثلثبندی برای رویهٔ S تقسیم نقاط آن رویه به مثلثهای منحنی الحظ به گونه‌ای که دو مثلث از این تقسیم یا اشتراک نداشته باشند و یا تنها در یک یا چند رأس

شکل ۷۳.۲: در یک مثلثبندی حالت (الف) یا (ب) پذیرفته می‌شود ولی (ج) یا (د) خیر

شکل ۸۳.۲: دو مثلثبندی برای مربع واحد

اشتراک داشته باشند و یا اینکه در امتداد یک یا چند ضلع کامل مشترک باشند. به شکل ۱.۱۲.۲ توجه شود.

۲.۱۲.۲ تعریف

فرض کنید رویه S مثلثبندی شده باشد. در این صورت، مشخصه اولر پوانکاره S را به صورت $\chi_S := f - e + v$ تعریف می‌کنیم، که f تعداد وجوه، e تعداد یالها و v تعداد رئوس در مثلثبندی می‌باشد.

۳.۱۲.۲ قضیه اولر-پوانکاره

مشخصه اولر پوانکاره هر رویه مفروض به انتخاب مثلثبندی بستگی ندارد.

۴.۱۲.۲ مثال

برای تفهیم بهتر قضیه اولر پوانکاره، مربع واحد $0 \leq x, y \leq 1$ را به دو صورت مثلثبندی نموده و ملاحظه می‌کنیم که در هر دو مورد χ_S یکی می‌شود. اگر مطابق شکل ۴.۱۲.۲ - الف عمل کنیم، در این صورت خواهیم داشت:

$$f = 6, e = 12, v = 7, \chi_S = 6 - 12 + 7 = 1$$

و اگر مطابق شکل ۴.۱۲.۲ - ب عمل کنیم، در این صورت خواهیم داشت:

$$f = 2, e = 5, v = 4, \chi_S = 2 - 5 + 4 = 1$$

شکل ۹۳.۲: مثلثبندی کره

شکل ۹۴.۲: مثلثبندی تیوپ

مثال ۵.۱۲.۲

کره را به صورتی که در شکل ۵.۱۲.۲ نشان داده شده است می‌توان از بهم متصل نمودن دو نیم دایرهٔ لاستیکی تهیه نمود. اگر آن را به صورت در شکل ۵.۱۲.۲ مثلثبندی کنیم، آنگاه ملاحظه خواهیم نمود که

$$f = 8, \quad e = 12, \quad v = 6$$

و بنابراین مشخصهٔ اولر پوانکارهٔ کره برابر است با $\chi_S = 8 - 12 + 6 = 2$.

مثال ۶.۱۲.۲

تیوپ را به صورتی که در شکل ۶.۱۲.۲ نشان داده شده است می‌توان از بهم متصل نمودن لبه‌های یک مستطیل لاستیکی تهیه نمود. اگر آن را به صورت در شکل ۶.۱۲.۲ مثلثبندی کنیم، آنگاه ملاحظه خواهیم نمود که

$$f = 2, \quad e = 3, \quad v = 1$$

و بنابراین مشخصهٔ اولر پوانکارهٔ تیوپ برابر است با $\chi_S = 2 - 3 + 1 = 0$.

۷.۱۲.۲ تعمیم قضیه گاووسی بونه

برای هر رویهٔ مفروض S داریم

$$\int \int_{(S)} K d\sigma = 2\pi\chi_S$$

مثال ۸.۱۲.۲

در مورد تیوب

$$\int \int_{(S)} K d\sigma = 2\pi \times \circ = \circ$$

مثال ۹.۱۲.۲

در مورد استوانه

$$\int \int_{(S)} \circ d\sigma = 2\pi \chi_S \Rightarrow \chi_S = \circ$$