* میانترم ترم پیش

۱) در یک مسابقه تیراندازی احتمال اینکه به هدف بزند (A) ، به هدف نزند ولی در مسابقه باقی بماند (B) ، به هدف نزند و از دور خارج شود (C) ـ اگر B رخ دهد اجازه دارد مسابقه را ادامه دهد و دوباره تیراندازی کند.

الف) فرض کنید $P(A)=p_1$ و $P(B)=p_2$ و $P(C)=p_3$ احتمال آن را بیابید دقیقاً ۳ تیر به هدف اصابت کند. ① با فرض اینکه اگر پیشامد A رخ دهد از مسابقه خارج شود.

ب) احتمال اینکه x تیر به هدف اصابت کند

X : تعداد برخورد تیر به هدف ؛

برای اینکه دقیقاً ۳ بار تیر به هدف بخورد
و با فرض ① می‌بایست دو بار ـ اول متوالی

$$P(X=3)=p_2p_2p_2p_1+p_2p_2p_3$$

اتفاق بیفتد که تیرانداز اجازه پرتاب مجدد را داشته باشد. یعنی باید B رخ دهد. اما در پرتاب سوم دو حالت می‌تواند رخ دهد: حالت اول این است که پرتاب سوم به هدف نخورد و تیرانداز از دور خارج شود یعنی C رخ دهد که احتمال آن p_3 است. حالت دوم: می‌تواند در پرتاب سوم تیر به هدف نخورد و مسابقه ادامه پیدا کند یعنی عملاً B رخ دهد که p_2 احتمال آن است اما اگر این حالت رخ دهد مسابقه ادامه پیدا می‌کند ولی باید در پرتاب چهارم تیر به هدف بخورد که احتمال آن برابر p_1.

$$\boxed{P(X=x)=(p_2)^{x}p_1+(p_2)^{x-1}p_3}$$

۲) ظرفی شامل سه مهره است که با شماره‌های ۱ تا ۳ شماره گذاری شده است. یک مهره به تصادف از ظرف بیرون می‌آوریم و به تعداد شماره روی آن سکه سالم را پرتاب می‌کنیم. اگر X تعداد شیرهای مشاهده شده باشد

الف) تابع احتمال آن را بیابید. ب) واریانس X را حساب کنید.

ج) تابع توزیع X را تعیین و شکل آن را رسم کنید.

$x = 0, 1, 2, 3$

A_i پیشامد اینکه شماره i از ظرف خارج شود.

$$P(X=0) = \sum_{i=1}^{3} P(X=0 \mid A_i = i)\underbrace{P(A_i)}_{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right) = \frac{7}{24}$$

$$P(X=1) = \sum_{i=1}^{3} P(X=1 \mid A_i = i) P(A_i) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}\right) = \frac{11}{24}$$

$$P(X=2) = \sum_{i=1}^{3} P(X=2 \mid A_i = i) P(A_i) = \frac{1}{3}\left(0+\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\right) = \frac{5}{24}$$

$$P(X=3) = \sum_{i=1}^{3} P(X=3 \mid A_i = i) P(A_i) = \frac{1}{3}\left(0+0+\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{24}$$

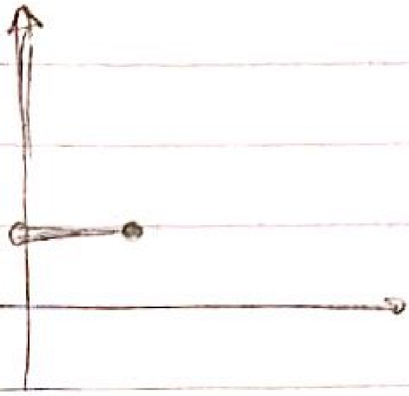
$$E(X) = 0\times\frac{7}{24} + 1\times\frac{11}{24} + 2\times\frac{5}{24} + 3\times\frac{1}{24} = 1$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$E(X^2) = 0^2\times\frac{7}{24} + 1^2\times\frac{11}{24} + 2^2\times\frac{5}{24} + 3^2\times\frac{1}{24} = \frac{40}{24}$$

$$Var(X) = \frac{10}{6} - 1^2 = \boxed{\frac{2}{3}}$$ ✓

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{7}{24} & 0\leq x<1 \\ \frac{18}{24} & 1\leq x<2 \\ \frac{23}{24} & 2\leq x<3 \\ 1 & x\geq 3 \end{cases}$$



۳) تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی X بصورت زیر داده شده است

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<-1 \\ \frac{x}{4}+\frac{1}{4} & -1\leq x<0 \\ \frac{1}{2} & 0\leq x<1 \\ \frac{x}{12}+\frac{7}{12} & 1\leq x<2 \\ 1 & x\geq 2 \end{cases}$$

الف) تابع چگالی $f_X(x)$ را بیابید.

ب) احتمالات $P(x=1)$ ، $P(X\geq 0)$ را بدست آورید.

ج) امید ریاضی $E(X)$ را بیابید.

$$P(X=-1) = P(X\leq -1) - P(X<-1) = P(X\leq -1) - \lim_{n\to+\infty} P(X\leq -1-\tfrac{1}{n})$$

$$= F(-1) - \lim_{n\to+\infty} F(-1-\tfrac{1}{n}) = 0 - 0 = 0$$

$$P(X=0) = P(X\leq 0) - P(X<0) = F(0) - F(\text{[illegible]}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(X=1) = F(1) - \lim_{n\to\infty} F(1-\tfrac{1}{n}) = \frac{1}{12} + \frac{7}{12} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P(X=2) = F(2) - \lim_{n\to\infty} F(2-\tfrac{1}{n}) = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{12} + \frac{7}{12} = \frac{1}{4}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x=-1 \\ \frac{1}{2} & -1<x<0 \\ \frac{1}{4} & x=0 \\ 0 & 0<x<1 \\ \frac{1}{4} & x=1 \\ \frac{1}{12} & 1<x<2 \\ \frac{1}{2} & x=2 \end{cases}$$

$$P(X \geq 0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{2}$$

$$P(\tfrac{1}{2}) = F(\tfrac{1}{2}) - \lim_{n\to\infty} P(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{n}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$E(X) = -1\times 0 + \int_{-1}^{0} \frac{x}{2}\,dx + 0\times\frac{1}{4} + 0 + 1\times\frac{1}{4} + \int_{1}^{2}\frac{x}{12}\,dx + 2\times\frac{1}{2} \checkmark$$

۲- در شهری در مجموع سه هزار خودرو وجود دارد که بنا به اطلاعات ثبت شده از این تعداد خودرو برای ۶۰۰ خودرو در ماه گذشته برگه جریمه صادر شده است. اگر یک نمونه تصادفی ۵ تایی خودرو انتخاب شود با تقریب احتمال اینکه حداقل یکی از آنها جریمه شده باشد را بدست آورید.

از توزیع پواسون برای تقریب زدن توزیع دوجمله‌ای استفاده می‌شود اگر
از توزیع دوجمله‌ای به پواسون
n بزرگ و p کوچک باشد در این حالت می‌توان $\lambda = np$ را تقریب زد.

روش اول

(محدوده در پواسون $n>10$ و $p<0.1$)

X: تعداد جریمه‌ها ؛ روش دقیق

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{\binom{2400}{5}}{\binom{3000}{5}}$$

روش ۲

$$p = \frac{1}{5} \quad q = \frac{4}{5} \quad P(X\geq 1) = 1 - \binom{5}{0}\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(\frac{4}{5}\right)^5 \quad n=5 \quad p=\frac{1}{5} \quad \lambda=1$$

$$\Rightarrow P(X\geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - e^{-1} = 1 - 0.368$$

$$= 0.632$$

۵- جعبه‌ای شامل ۶ مهره سفید و سه مهره سیاه است. یک مهره تصادفی و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم اگر سفید باشد دو مهره و اگر سیاه باشد یک مهره دیگر به طور تصادفی و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم، در آخر مشخص شد تمام مهره (یا مهره‌های) خارج شده در انتها سیاه هستند چقدر احتمال دارد که مهره خارج شده در مرحله اول سیاه بوده باشد؟

| ۶ سفید |
| ۳ سیاه |

A_i : پیشامد اینکه مهره خارج شده در مرحله i ام سیاه باشد.

$$P(A_1|A_2) = \frac{P(A_2|A_1)P(A_1)}{P(A_2)} = \frac{P(A_2|A_1)P(A_1)}{P(A_2|A_1)P(A_1) + P(A_2|A_1')P(A_1')}$$

$$= \frac{\frac{\binom{2}{1}}{\binom{8}{1}} \cdot \frac{\binom{3}{1}}{\binom{9}{1}}}{\frac{2}{8} \times \frac{3}{9} + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} \cdot \frac{\binom{6}{1}}{\binom{9}{1}}} = \frac{7}{13}$$

۹۶/۱/۲۸ میانترم

۱- ۱۰ کیسه کاملا یکسان که به ترتیب از ۱ تا ۱۰ شماره گذاری شده است در کیسه i ام، i مهره قرمز و ۱۰-i مهره آبی وجود دارد $(1 \le i \le 10)$ یکی از این کیسه‌ها را انتخاب کرده و یک مهره از آن بیرون می‌آوریم مطلوبست:

الف) احتمال اینکه مهره خارج شده قرمز باشد.

ب) اگر مهره خارج شده قرمز باشد احتمال آنکه از کیسه پنجم انتخاب شود را بیابید.

A: ~~احتمال~~ پیشامد خارج شدن مهره

B_i: پیشامد کیسه iام انتخاب شود.

$$P(A)=\sum_{i=1}^{10} P(A|B_i)P(B_i)=\sum_{i=1}^{10}\frac{i}{3i}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{3}\ \checkmark$$

$$P(B_0|A)=\frac{P(A|B_0)P(B_0)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{10}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{10}\ \checkmark$$

۲ـ A و B به صورت متناوب به سمت هدفی شلیک می‌کنند، A با احتمال $\frac{1}{2}$ و B با احتمال $\frac{3}{4}$ هدف را مورد اصابت قرار می‌دهد. مطلوب است احتمال آنکه B زودتر از A هدف را بزند (درصورتی‌که A اول شروع کند.)

B: پیشامد زودتر زدن B

$$P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+\dots$$

$$=\frac{3}{8}\left(1+\frac{1}{8}+\frac{1}{64}+\dots\right)=\frac{3}{8}\times\frac{1}{1-\frac{1}{8}}=\frac{3}{7}$$

[روش اول]

B_i: در مرتبه iام شخص B برنده شود. ..... واضحه دقیقاً مثل روش قبل

بصورت $\sum$

۳ـ تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X بصورت زیر است .... [یادم نمیاد آزمونش :)]

$$f_X(x)=\begin{cases} ax & 0\le x<1 \\ b(2-x) & 1\le x<2 \\ 0 & x\ge 2\end{cases}$$

الف) با فرض اینکه $E(X)=1$، a و b را بیابید.

ب) تابع توزیع تجمعی X را بیابید.

Scanned by CamScanner

نکته ۱: اگر تعداد اتفاق‌ها در واحد زمان از توزیع پواسون با پارامتر λ پیروی کند تعداد اتفاق‌ها در t واحد زمانی از توزیع پواسون با پارامتر λt پیروی می‌کند.

نکته ۲: هر اتفاق از این توزیع با احتمال p_e از نوع e باشد در اینصورت از توزیع پواسون با پارامتر λp_e پیروی می‌کند.

مثال: فرض کنید شرکتی صاحب یک سیستم تولیدی است به دلیل شوک‌های خارجی وارد شده به سیستم، سیستم تولیدی در طول زمان دو نوع از کار افتادگی را تجربه می‌کند. از کار افتادگی نوع یک به دلیل شوک نوع A و از کار افتادگی نوع ۲ به دلیل شوک نوع B. به دنبال شوک سیستم از کار افتاده بلافاصله تعمیر شده و فرایند تولید ادامه می‌یابد. فرض کنید احتمال وقوع شوک نوع A و شوک نوع B به ترتیب برابر با $P(A)=p$ و $P(B)=q$ باشد، اگر تعداد از کار افتادگی‌های سیستم در فاصله زمانی $[0,t]$ X_t از توزیع پواسون با پارامتر λt پیروی کند و متغیر تصادفی Y_t بیانگر تعداد از کار افتادگی‌های سیستم در فاصله زمانی صفر و t