« ارتعاشات مکانیکی »
(Mechanical Vibrations)

منابع و مراجع :

۱- کتاب ارتعاشات رائو ترجمه دکتر دروندی دانشگاه گیلان

۲- کتاب ارتعاشات استاریل ترجمه دکتر خدام

۳- کتاب ارتعاشات تامسون

۴- کتاب کمک درسی ارتعاشات سری شوم

فصل اول) سیستمهای یک درجه آزادی با ارتعاش آزاد

فصل دوم) سیستمهای یک درجه آزادی با ارتعاش اجباری

فصل سوم) سیستمهای یک درجه آزادی با ارتعاش میرا (damp vibration)

فصل چهارم) سیستمهای یک درجه آزادی با ارتعاش اجباری و میرا

تبدیل لاپلاس
انتگرال تلفیق

فصل پنجم) سیستمهای یک درجه آزادی تحت بارگذاری اختیاری (میرا و غیر میرا)

فصل ششم) سیستمهای دو درجه آزادی با ارتعاش آزاد و اجباری

گردآورنده و استاد حل تمرین :

مهندس جواد پیله وران

« فصل اوّل - ارتعاش ساده »

فرکانس : تعداد نوسان یک سیستم در یک ثانیه که واحد آن هرتز (HZ) می‌باشد. (f)

f : Ferequency $\rightarrow$ (فرکانس طبیعی)

فرکانس زاویه‌ای یا دایره‌ای : با ω نشان داده می‌شود. ($\frac{rad}{s}$)

$$\omega = 2\pi f$$

نوسان: به یک رفت و برگشت کامل یک نوسان گفته می‌شود که یک هرتز معادل یک نوسان می‌باشد.

زمان تناوب یا پریود : با T نشان داده می‌شود و عبارت است از زمان یک رفت و برگشت کامل و زمان یک سیکل کامل که برحسب ثانیه می‌باشد.

$T = \frac{1}{f}$ (s) $\qquad T =$ زمان رفت + زمان برگشت

$$f = \frac{1}{T} \Longrightarrow \boxed{f.T = 1}$$

۱ (حرکت یکنواخت مسیر دایره‌ای)

۲ (حرکت شتابدار رفت و برگشتی)

فرکانس طبیعی در اثر ارتعاش یک سیستم آزاد ایجاد می‌شود.

فرکانس زاویه‌ای طبیعی (ω_n)

فرکانس طبیعی (f_n)

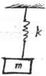
حرکت ارتعاشی: یعنی حرکت تکرار شونده ، حرکت رفت و برگشتی.

معادلات حرکت نوسانی :

$$\begin{cases} x = \underbrace{X}_{\text{دامنه حرکت}} \sin(\omega t + \varphi) = X \sin \omega t \cos \varphi + X \cos \omega t \sin \varphi \\ \text{یا} \\ x = A \sin \omega t + B \cos \omega t \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = X\cos\varphi \\ B = X\sin\varphi \end{cases} \qquad A^2+B^2=X^2 \longrightarrow \begin{cases} X=\sqrt{A^2+B^2} \\ \dfrac{B}{A}=\tan\varphi \end{cases}$$

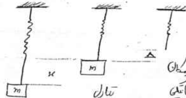
بررسی سیستم جرم و فنر :



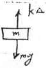
ناحیه در حال ارتعاش از حالت تعادل استاتیکی

x = تغییر مکان دینامیکی

Δ = تغییر مکان استاتیکی

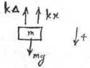


← تحلیل استاتیکی :



$$\Sigma F = 0 \longrightarrow mg - k\Delta = 0 \longrightarrow \Delta = \frac{mg}{k}$$ (تغییر مکان استاتیکی)

← تحلیل دینامیکی با در نظر گرفتن تحلیل استاتیکی :



$$\Sigma F = ma \longrightarrow mg - k\Delta - kx = ma$$

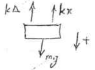
$$mg - k\Delta - kx = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$ معادله جرم و فنر

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

راه حل کوتاه : می‌توان از وزن جسم، به همراه نیروی ناشی از تعادل استاتیکی صرف نظر کرد و صرفاً نیروی ناشی از تغییر مکان دینامیکی را نوشت.

4



← تحلیل دینامیکی بدون در نظر گرفتن تحلیل استاتیکی :

$$\Sigma F = m\ddot{x} \quad \longrightarrow \quad -kx = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

← پاسخ برای حرکت نوسانی ساده :

$$x = X\sin(\omega t + \varphi)$$

ω فقط بستگی به k و m دارد.

ω در هیچ مسئله ای بستگی به شرایط اولیه حرکت ندارد مانند سرعت اولیه و تغییر مکان اولیه.

$$-X\omega^2\sin(\omega t + \varphi) + \frac{k}{m}X\sin(\omega t + \varphi) = 0$$

$$-\omega^2 + \frac{k}{m} = 0$$

X و φ بستگی به شرایط اولیه حرکت دارند.

فرکانس زاویه‌ای طبیعی برای سیستم جرم و فنر

$$\omega_n = \sqrt{k/m} \quad \frac{rad}{s}$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k/m} \quad (Hz)$$

نکته مهم : در حالت استاتیکی جرم تأثیر دارد و هیچ ارتعاشی وجود ندارد ولی در حالت دینامیکی جرم دیگر تأثیر ندارد و ارتعاشات شروع می‌شود.

مثال: پاسخ زمانی برای سیستم با شرایط اولیه زیر بیابید. معادله حرکت را بدست آورید.

$$\begin{cases} t = 0 \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

$$\ddot{x} + k/m\, x = 0$$

$$x = X\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\begin{cases} X_0 = X\sin\varphi \\ 0 = X\omega\cos\varphi \end{cases} \qquad \cos\varphi = 0 \longrightarrow \varphi = \pi/2$$

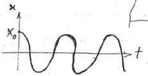
$$\boxed{X = X_0}$$

$$x = X_0\sin(\omega t + \pi/2)$$

$$\boxed{x = X_0\sin\left(\sqrt{k/m}\,t + \pi/2\right)}$$

معادله حرکت

x فاصله از نقطه تعادل استاتیکی



مثال: معادله حرکت را با شرایط اولیه زیر بدست آورید. (سیستم جرم و فنر ساده)

$$\begin{cases} x(0)=0 \\ \dot{x}(0)=v_0 \end{cases}$$

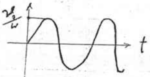
$$x = X\sin(\omega t+\varphi)$$

$$\begin{cases} 0 = X\sin\varphi \\ v_0 = X\omega\cos\varphi \end{cases}$$

$$\sin\varphi = 0 \longrightarrow \varphi = 0 \longrightarrow \boxed{X = \frac{v_0}{\omega}}$$

$$x = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

$$\boxed{x = \frac{v_0}{\omega}\sin\sqrt{k/m}\cdot t}$$ معادله حرکت



تمرین: معادله حرکت را بیابید. (سیستم جرم و فنر ساده)

$$\begin{cases} x(0)=x_0 \\ \dot{x}(0)=v_0 \end{cases}$$

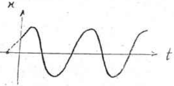
$$\ddot{x} + k/m\, x = 0$$

$$\begin{cases} x = X\sin(\omega t+\varphi) \\ \text{یا} \\ x = A\sin\omega t + B\cos\omega t \end{cases}$$

$$x_0 = A\sin(0) + B\cos(0) \longrightarrow \boxed{x_0 = B}$$

$$\dot{x} = A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t$$

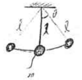
$$v_0 = A\omega \longrightarrow A = \frac{v_0}{\omega} = \frac{v_0}{\sqrt{k/m}}$$



$$x = \frac{v_0}{\sqrt{k/m}}\sin\sqrt{k/m}\,t + x_0\cos\sqrt{k/m}\,t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X = \sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{\frac{v_0^2}{k/m}+x_0^2} = \frac{v_0}{\sqrt{k/m}\cos\left(tg^{-1}\frac{x_0\sqrt{k/m}}{v_0}\right)} \\ \frac{B}{A} = tg\,\varphi \rightarrow \varphi = tg^{-1}\frac{B}{A} = tg^{-1}\frac{x_0\sqrt{k/m}}{v_0} \end{cases}$$

آونگ ساده :



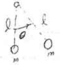
تعریف پاندول ساده :

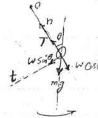
۱ـ سیم بدون جرم است .

۲ـ جرم متمرکز است . (فاصله مرکز جرم از نقطه نوسان برابر طول سیم است .)

ولی اگر جرم m دارای شعاع باشد دیگر متمرکز نیست چون تا $l+R$ ... [illegible]

* ساده ترین نوع حرکت است که دارای ارتعاش دورانی می باشد .





چون حرکت دورانی است $\longleftarrow \quad \sum M_o = I_o \cdot \alpha$

$$I = \int dm \cdot r^2$$

$$-W\sin\theta \cdot l = ml^2\ddot{\theta}$$

$\sin\theta \simeq \theta \longrightarrow$ اگر θ زاویه کوچکی باشد تا 10° قابل قبول است .

$$-mg\,\theta \cdot l = ml^2\ddot{\theta}$$

$\Rightarrow -g\theta = l\ddot{\theta} \longrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0}$ معادله دیفرانسیل یک بعدی برای آونگ ساده

روش دوم :

$$\sum F_t = ma$$

$-mg\sin\theta = ml\ddot{\theta}$ ← زیرا ارتعاش در جهت مماس بر دایره دوران است .

$$-g\theta = l\ddot{\theta}$$

$$\begin{cases} \omega_n = \sqrt{g/l} & rad/s \\ f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{g/l} & Hz \end{cases}$$

<u>تذکر :</u> ω ها در معادله بدست می آید و از این لحاظ دارای اهمیت است ولی f در واقع قابل اندازه گیری و محاسبه است و مهم می باشد .

تمرین: در مورد سیستم پاندول ساده به ازای سه حالت زیر معادلات حرکت را حل و رسم کنید.

1) $\begin{cases} \theta(0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) = 0 \end{cases}$

در تمام تمرینها داریم: $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \rightarrow \omega_n = \sqrt{g/l}$

$\theta = \Theta \sin(\omega t + \varphi)$

2) $\begin{cases} \theta(0) = 0 \\ \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 \end{cases}$

حل 1):

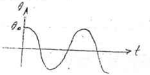
$\theta_0 = \Theta \sin\varphi$

$\dot{\theta} = \Theta\, \omega \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow 0 = \Theta\, \omega \cos\varphi$

$\Theta = \theta_0$ $\qquad \cos\varphi = 0 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

3) $\begin{cases} \theta(0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 \end{cases}$

$\theta = \theta_0 \sin\left(\sqrt{g/l}\; t + \frac{\pi}{2}\right)$

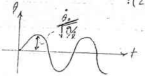


حل 2):

$0 = \Theta \sin\varphi \rightarrow \sin\varphi = 0 \rightarrow \varphi = 0$

$\dot{\theta}_0 = \Theta\, \omega \cos\varphi \rightarrow \Theta = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega} = \frac{\dot{\theta}_0}{\sqrt{g/l}}$

$\theta = \frac{\dot{\theta}_0}{\sqrt{g/l}} \sin\left(\sqrt{g/l}\; t\right)$



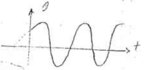
حل 3):

$\theta_0 = \Theta \sin\varphi \;,\; \dot{\theta}_0 = \Theta\, \omega \cos\varphi \rightarrow \Theta = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega \cos\varphi}$

$\theta_0 = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega \cos\varphi} \sin\varphi = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega} tg\,\varphi \rightarrow tg\,\varphi = \frac{\theta_0\, \omega}{\dot{\theta}_0} \rightarrow \varphi = tg^{-1} \frac{\theta_0 \sqrt{g/l}}{\dot{\theta}_0}$

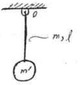
$$\theta = \frac{\dot{\theta}_0}{\sqrt{g/l}\, \cos\left(tg^{-1} \frac{\theta_0 \sqrt{g/l}}{\dot{\theta}_0}\right)} \sin\left(\sqrt{g/l}\; t + tg^{-1} \frac{\theta_0 \sqrt{g/l}}{\dot{\theta}_0}\right)$$

$$\theta = \sqrt{\frac{\dot{\theta}_0^2}{g/l} + \theta_0^2}\; \sin\left(\sqrt{g/l}\; t + tg^{-1} \frac{\theta_0 \sqrt{g/l}}{\dot{\theta}_0}\right)$$



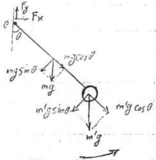
نکته: $\frac{1}{\cos\varphi} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\varphi}} = \sqrt{\sec^2\varphi} = \sqrt{1 + tg^2\varphi}$

آونگ مرکب :



پاندول مرکب

چون سیم دارای جرم است و جرم متمرکز است پاندول مرکب می‌باشد.



$$\sum M_o = I_o \alpha = I_o \ddot{\theta}$$

$$-(m'g \sin\theta) l - (mg \sin\theta) \frac{l}{2} = \left(m' l^2 + \frac{1}{3} m l^2\right)\ddot{\theta}$$

$$\sin\theta \simeq \theta$$

$$-m'g\theta - mg\frac{\theta}{2} = \left(m'l + \frac{ml}{3}\right)\ddot{\theta}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\,\frac{m' + m/2}{m' + m/3}\,\theta = 0}$$

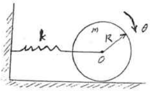
معادلهٔ دیفرانسیل حرکت برای آونگ مرکب

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}\,\frac{m' + m/2}{m' + m/3}} \Rightarrow f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}\,\frac{m' + m/2}{m' + m/3}}$$

اگر $m = 0 \Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$ آونگ ساده

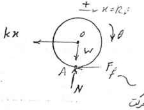
اگر $m' = 0 \Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{3}{2}\frac{g}{l}\theta = 0$ آونگ بدون جرم آویزان
معادل میله با جرم m
که آونگ مرکب نام دارد.

استوانه (دیسک دوار) که دارای حرکت غلتشی خالص بدون لغزش است:



جسم { حرکت انتقالی / حرکت دورانی

← راه حل اول: $x = R\theta \rightarrow \ddot{x} = R\ddot{\theta}$



$$\begin{cases} \Sigma F = m\ddot{x} \\ -kx - F_f = mR\ddot{\theta} \quad (*) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Sigma M_o = I_o \ddot{\theta} \\ +F_f \cdot R = \frac{1}{2} m R^2 \ddot{\theta} \end{cases}$$

$F_f \neq \mu N$

اصطکاک کولمب حرکت لغزشی

$$(*) \rightarrow -kR\theta - \frac{1}{2} mR\ddot{\theta} = Rm\ddot{\theta}$$

$$-kR\theta = \frac{3}{2} mR\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{3}\frac{k}{m}\theta = 0$$

معادله دیفرانسیل حرکت

$$\ddot{\theta} + w_n^2 \theta = 0 \quad \rightarrow \quad f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2}{3}\frac{k}{m}} \ (Hz)$$

← راه حل دوم (بهترین راه حل در مسائل دارای غلتش):

$$\Sigma M_A = I_A \cdot \ddot{\theta} \qquad (\text{نقطه A مرکز آنی دوران})$$

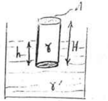
$$-kx \cdot R = \left(\frac{1}{2} mR^2 + mR^2\right)\ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad -kx = \frac{3}{2} mR\left(\frac{\ddot{x}}{R}\right)$$

$$\ddot{x} + \frac{2k}{3m} x = 0 \quad \Rightarrow \quad w_n = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{k}{m}} \ \left(\frac{rad}{s}\right)$$

نکته: سیستمی که دارای کوپل باشد (گشتاور) جهت نیروی اصطکاک هم جهت با جهت حرکت است در غیر اینصورت جهت نیروی اصطکاک مخالف با جهت حرکت است.

مسئله هیدرواستاتیکی (سیالات):

← تحلیل استاتیکی:

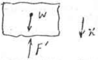


$$\Sigma F = 0 \longrightarrow W - F = 0$$

$$W = F \longrightarrow AH\gamma = hA\gamma'$$

$$h = H\frac{\gamma}{\gamma'}$$

← تحلیل دینامیکی:



$$\Sigma F = m\ddot{x}$$

$$W - F' = m\ddot{x}$$

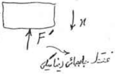
$$H \cdot A \cdot \gamma - (h + x)A\gamma' = \underbrace{m}_{w/g}\ddot{x}$$

$$H \cdot A\gamma - hA\gamma' - xA\gamma' = \frac{\gamma \cdot A \cdot H}{g}\ddot{x}$$

$$-x\gamma' = \frac{\gamma H}{g}\ddot{x} \longrightarrow \ddot{x} + \frac{\gamma'}{\gamma}\frac{g}{H}x = 0$$

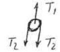
$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{H}\frac{\gamma'}{\gamma}} \quad , \quad f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{H}\frac{\gamma'}{\gamma}}$$

← راه حل کوتاه: (تحلیل دینامیکی بدون درنظر گرفتن تحلیل استاتیکی)



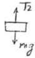
$$\Sigma F = m\ddot{x} \longrightarrow -xA\gamma' = m\ddot{x} \longrightarrow \ddot{x} + \frac{\gamma'}{\gamma}\frac{g}{H}x = 0$$

مثال ۱ قرقره بدون جرم فرض می‌شود فرکانس طبیعی را بدست آورید



تحلیل استاتیکی :

$$\Sigma F = 0 \longrightarrow T_1 = 2T_2$$

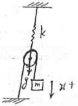


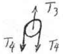
$$\Sigma F = 0 \longrightarrow T_2 = mg$$

$$2mg = T_1 = k\Delta_{\text{فنر}}$$

تغییر طول استاتیکی فنر $\Delta = \dfrac{2mg}{k}$

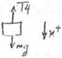
تحلیل دینامیکی :





$$\Sigma F = ma \quad \overset{\text{جرم قرقره}}{\begin{cases} m = 0 \\ a \neq 0 \end{cases}}$$

$$2T_4 = T_3$$



$$mg - T_4 = m\ddot{x}$$

$$mg - \frac{T_3}{2} = m\ddot{x}$$

$$mg - \frac{1}{2}\left(ky + k\,\frac{2mg}{k}\right) = m\ddot{x}$$

اگر جسم به اندازه x پایین بیاید فنر به اندازه $x/2$ پایین می‌آید $\Longrightarrow$ $y = x/2$

$$-\frac{1}{4}kx = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{4m}x = 0$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{4m}} = \frac{1}{4\pi}\sqrt{k/m}$$

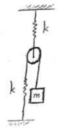
تحلیل دینامیکی بدون در نظر گرفتن تحلیل استاتیکی

$$\Sigma F = m\ddot{x}$$

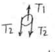
$$-T_4 = m\ddot{x} \Rightarrow -\frac{T_3}{2} = m\ddot{x}$$

$$-\frac{ky}{2} = m\ddot{x} \Rightarrow -\frac{kx}{4} = m\ddot{x}$$

مثال: قرقره بدون جرم فرض می‌شود. فرکانس طبیعی را بدست آورید.



← تحلیل استاتیکی:

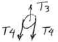


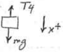
$$\Sigma F = 0 \rightarrow T_1 = 2T_2$$

$$\Sigma F = 0 \rightarrow T_2 = mg$$

$$2mg = T_1 = k\Delta_{\text{فنر}} \rightarrow \Delta_{\text{فنر}} = \frac{2mg}{k}$$

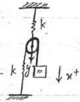
← تحلیل دینامیکی:





$$\Sigma F = ma \quad \begin{cases} m = 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \text{برای قرقره}$$

$$2T_4 = T_3$$



$$\begin{cases} x & \text{حرکت جرم} \\ y & \text{حرکت قرقره بالایی} \end{cases}$$

$$4mg - T_4 = m\ddot{x} \rightarrow mg - \frac{T_3}{2} = m\ddot{x}$$

$$\cancel{mg} - \frac{1}{2}\left(ky + \cancel{k\frac{2mg}{k}}\right) = m\ddot{x}$$

تأثیر این قید نقطه در تغییر مکان نیرو ست و در نیرو تأثیری ندارد.

$$\boxed{-\tfrac{1}{2}ky = m\ddot{x}} \quad (*)$$

جسم را نگه داشته قرقره را پائین می‌آوریم.

قرقره ثابت جسم را پائین می‌آوریم.

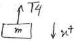
$$T_4 = mg + k(x - 2y) \quad , \quad T_3 = ky + k\frac{2mg}{k}$$

$$2T_4 = T_3 \Longrightarrow \cancel{2mg} + 2k(x-2y) = ky + \cancel{2mg}$$

$$2x = 5y$$

$$(*) \Longrightarrow -\frac{1}{2}k\left(\frac{2x}{5}\right) = m\ddot{x} \Longrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{5m}x = 0$$

← تحلیل دینامیکی بدون در نظر گرفتن تحلیل استاتیکی:



$$\Sigma F = ma$$

$$-T_4 = m\ddot{x} \rightarrow -\frac{T_3}{2} = m\ddot{x}$$

$$T_4 = k(x - 2y) \; , \; T_3 = ky \xrightarrow{T_3 = 2T_4} 2x = 5y$$

کاربرد روش انرژی در مسائل یک درجه آزادی با ارتعاش آزاد :

اگر به سیستم انرژی داده نشود یا از آن انرژی گرفته نشود. (اگر به سیستم بار خارجی وارد نشود انرژی به آن داده نمی‌شود یا سیستم میرا نباشد که انرژی را از طریق اصطکاک از دست ندهد.) $\Longleftarrow$

$$\underset{\text{پتانسیل}}{E_p} + \underset{\text{جنبشی}}{E_c} = E_m = cte \quad \text{(انرژی مکانیکی)}$$

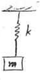
$$\underset{\text{پتانسیل}}{V} + \underset{\text{جنبشی}}{U} = cte$$

$$d(V+U) = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(V+U) = 0 & \text{روش اول} \\ V_{max} = U_{max} & \text{روش دوم} \end{cases}$$

هرجا انرژی پتانسیل حداکثر است انرژی جنبشی صفر است.
هرجا انرژی جنبشی حداکثر است انرژی پتانسیل صفر است.

مثال: در سیستم جرم و فنر ساده به روش انرژی فرکانس طبیعی را بدست آورید.



روش اول)

$$U = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$$

از لحظه تعادل استاتیکی به بعد انرژی‌ها را در نظر می‌گیریم. (قسمت‌های استاتیکی حذف می‌شوند.)

$$V = \frac{1}{2} kx^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2\right) = 0$$

$$m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0 \longrightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{k/m}$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k/m}$$

(روش دوم)

$$x = X \sin(wt + \varphi)$$

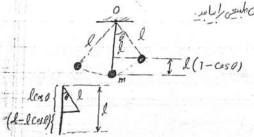
$$\sin(\,) = 1 \longrightarrow V_{max} = \frac{1}{2} k X^2$$

$$\dot{x} = X w \cos(wt + \varphi)$$

$$\cos(\,) = 1 \longrightarrow U_{max} = \frac{1}{2} m X^2 w^2 \implies \frac{1}{2} k X^2 = \frac{1}{2} m X^2 w^2$$

$$w^2 = k/m$$

مثال : در سیستم آونگ ساده به روش انرژی فرکانس طبیعی را بیابید.



(روش اول)

$$U = \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

$$V = mgl(1 - \cos\theta)$$

بسط تیلور $\Rightarrow 1 - \cos\theta = 1 - \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) = \frac{\theta^2}{2}$

$$V = mgl\frac{\theta^2}{2}$$

$$\frac{d(U+V)}{dt} = 0 \implies \cancel{m}l^{\cancel{2}}\cancel{\dot{\theta}}\ddot{\theta} + \cancel{m}g\cancel{l}\theta\cancel{\dot{\theta}} = 0$$

$$l\ddot{\theta} + g\theta = 0 \longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{g/l}$$

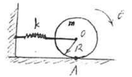
(روش دوم)

$$\theta = \Theta \sin(wt + \varphi)$$

$$\dot{\theta} = \Theta w \cos(wt + \varphi)$$

$$V_{max} = \frac{mgl}{2}\Theta^2$$

$$U_{max} = \frac{1}{2} m l^2 \Theta^2 w^2 \implies w_n = \sqrt{g/l}$$



مثال : دیسک دارای غلتش خالص بدون لغزش.

$$x = R\theta$$

$$V = \frac{1}{2} k x^2$$

حرکت { انتقالی / دورانی

$$U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}^2$$

$$U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m R^2 \cdot \frac{\dot{x}^2}{R^2}$$

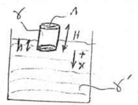
باید حفظ شود $\boxed{U = \frac{3}{4} m \dot{x}^2}$

نقطه A مرکز آنی دوران $\Rightarrow U = \frac{1}{2} I_A \cdot \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} m R^2 \cdot \frac{\dot{x}^2}{R^2} = \frac{3}{4} m \dot{x}^2$

$$\frac{d}{dt}(V + U) = 0 \implies k x \dot{x} + \frac{3}{2} m \dot{x} \ddot{x} = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{2k}{3m} x = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{k}{m}}$$

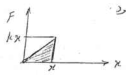


مثال : هیدرواستاتیک

انرژی پتانسیل $V = \int_0^x F \cdot dx = \frac{1}{2} k x^2$

قدر $F = kx$

F نیروی داخلی است که سبب ایجاد نوسان شود.



$$V=\int_0^x F\cdot dx=\int_0^x xA\gamma' dx=A\gamma'\frac{x^2}{2}$$

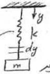
$$U=\frac{1}{2}m\dot{x}^2=\frac{A\cdot\gamma H}{2g}\dot{x}^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{A\gamma H}{2g}\dot{x}^2+\frac{1}{2}A\gamma' x^2\right)=0$$

$$\frac{A\gamma H}{g}\dot{x}\ddot{x}+A\gamma' x\dot{x}=0 \Rightarrow \ddot{x}+\frac{\gamma'\cdot g}{\gamma\cdot H}x=0$$

$$w_n=\sqrt{\frac{\gamma' g}{\gamma H}}$$

<u>مثال</u>: در سیستم جرم و فنر که فنر نیز دارای جرم است فرکانس طبیعی را بیابید.



m' و ρ داشته طول فنر

الف) روش انرژی

$$V=\frac{1}{2}kx^2$$

بی نمی کند فنر
تغییر داشته باشد یا خیر

$$U=U_{mass}+U_{spring}$$

$$U_{mass}=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

با فرض خطی بودن
تغییرات سرعت فنر

$$dU_S=\frac{1}{2}dm'\left[\left(\frac{y}{l}\right)\dot{x}\right]^2 \qquad dm'=\rho dy$$

$$dU_S=\frac{1}{2}\rho dy\cdot\frac{y^2}{l^2}\dot{x}^2 \longrightarrow U_S=\frac{1}{2}\frac{\rho\dot{x}^2}{l^2}\int_0^l y^2dy$$

$$U_S=\frac{1}{2}\rho\frac{\dot{x}^2}{l^2}\cdot\frac{l^3}{3}=\frac{1}{6}\rho l\dot{x}^2 \xRightarrow{\rho l=m'} \boxed{U_S=\frac{m'\dot{x}^2}{6}}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} d'V = \frac{1}{2} kx^2 \\ d'U = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{6} m'\dot{x}^2 \end{cases}$$

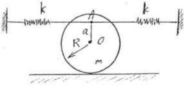
$$\frac{d}{dt}(U+V) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \cancel{2}\times\frac{1}{\cancel{2}} m\cancel{\dot{x}}\ddot{x} + 2\times\frac{1}{6} m'\cancel{\dot{x}}\ddot{x} + \cancel{2}\times\frac{1}{\cancel{2}} kx\cancel{\dot{x}} = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m+\frac{m'}{3}}\, x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m+\frac{m'}{3}}} \quad , \quad f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m+\frac{m'}{3}}}$$

به $\frac{m'}{3}$ جرم معادل یا جرم مؤثر می‌گویند.

ب) روش نیوتن

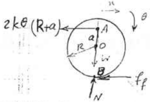
تمرین: مطلوبست تعیین معادله حرکت و فرکانس طبیعی به روش نیوتن و به روش انرژی.



۱) سیستم مقابل غلتش بدون لغزش دارد.

الف) روش نیوتن:

$$\sum M_o = I_o \ddot{\theta}$$



$$(*)\quad f_f \cdot R - 2k(R+a)\theta \times a = \frac{1}{2} m R^2 \ddot{\theta}$$

$$\sum F = m\ddot{x}$$

$$\boxed{x = R\theta}$$

$$-f_f - 2k(R+a)\theta = mR\ddot{\theta}$$

$$f_f = -\left(2k(R+a)\theta + mR\ddot{\theta}\right)$$

با جاگذاری در رابطه (*) $\Rightarrow -\left(2kR(R+a)\theta + mR^2\ddot{\theta} + 2k(R+a)a\theta\right) = \frac{mR^2}{2}\ddot{\theta}$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{2k(R+a)^2}{\frac{3}{2}mR^2}\theta = 0 \quad \Rightarrow f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4}{3}\frac{k}{m}\left(\frac{R+a}{R}\right)^2}$$

با مرکز آنی دوران $\sum M_B = I_B \ddot{\theta} \Rightarrow -2k(R+a)^2\theta = \left(\frac{1}{2}mR^2 + mR^2\right)\ddot{\theta}$

$$\ddot{\theta} + \frac{2k(R+a)^2}{\frac{3}{2}mR^2}\theta = 0$$

ب) روش انرژی:

انرژی پتانسیل $V = \overset{\text{دو فنر}}{(2)} \times \frac{1}{2} k (R+a)^2 \theta^2$

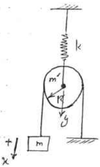
$$\boxed{x = R\theta}$$

انرژی جنبشی $U = \frac{1}{2} m \dot{x}_o^2 + \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m R^2\right)\dot{\theta}^2$

$$\frac{d(U+V)}{dt} = 0 \Rightarrow mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + 2k(R+a)^2\theta\dot{\theta} = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{4k(R+a)^2}{3mR^2}\theta = 0$$

با مرکز آنی $U_B = \frac{1}{2} I_B \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2 + mR^2\right)\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} m R^2 \dot{\theta}^2$



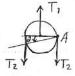
(روش اول) VV

$$\sum F = m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad -T_2 = m\ddot{x}$$

از وزن قرقره و نیروی mg در یک سر طناب بدلیل تأثیر در عدم تعادل قند

صرف نظر می‌شود

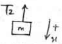
$$\sum M_A = I_A \ddot{\theta}$$



$$T_2 \cdot 2R - T_1 \cdot R = \left(\frac{m'R^2}{2} + m'R^2\right)\ddot{\theta}$$

$$-m\ddot{x} \cdot 2R - T_1 \cdot R = \frac{3}{2} m'R^2 \ddot{\theta}$$

$$\boxed{x = 2R\sin\theta = 2R\theta} \qquad \boxed{T_1 = kR\theta}$$



$$-m(2R\ddot{\theta}) \cdot 2R - kR^2\theta = \frac{3}{2} m'R^2 \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta}\left(\frac{3}{2}m'R^2 + 4R^2 m\right) + kR^2\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{4m + \frac{3}{2}m'}\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{4m + \frac{3}{2}m'}}$$

(روش دوم) $\boxed{y = \frac{x}{2}}$

پتانسیل $V = \frac{1}{2}k(y^2) = \frac{1}{2}k\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}kx^2$

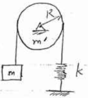
جنبشی $U_o = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m'\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I_o\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m'\left(\frac{\dot{x}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}m'R^2\dot{\theta}^2$

$$U_o = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{8}m'\dot{x}^2 + \frac{1}{4}m'R^2\left(\frac{\dot{x}}{2R}\right)^2 = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{3}{16}m'\dot{x}^2$$

مرکز دوران $U_A = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_A\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}m'R^2\right)\left(\frac{\dot{x}}{2R}\right)^2 = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{3}{16}m'\dot{x}^2$

$$\frac{d(V+U)}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}kx\dot{x} + m\dot{x}\ddot{x} + \frac{3}{8}m'\dot{x}\ddot{x} = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{4m + \frac{3}{2}m'}x = 0 \quad \Rightarrow \quad f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{4m + \frac{3}{2}m'}}$$



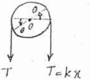
از نیروهای $m'g$ و mg بدلیل تأثیر در عدم تعادل فنر صرف نظر می‌شود.

روش اول):

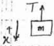
$$\sum M_O = I_O \ddot{\theta}$$

$$T \cdot R - kx \cdot R = \frac{1}{2} m' R^2 \ddot{\theta} \quad (*)$$

$$\boxed{x = R\sin\theta = R\theta}$$



$$\sum F = m\ddot{x} \Rightarrow -T = m\ddot{x} \rightarrow \boxed{T = -mR\ddot{\theta}}$$



در رابطه (*) $\quad -mR^2\ddot{\theta} - kR^2\theta = \frac{m'R^2}{2}\ddot{\theta}$

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{\frac{m'}{2}+m}\theta = 0 \Rightarrow f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\frac{m'}{2}+m}}$$

روش دوم):

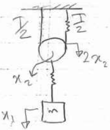
$$V = \int_0^x kx\,dx = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kR^2\theta^2$$

$$U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}m'R^2\dot{\theta}^2$$

$$\frac{d(U+V)}{dt} = 0 \Rightarrow kR^2\theta\dot{\theta} + mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{1}{2}m'R^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{\frac{m'}{2}+m}\theta = 0$$

مثال:



$$-T = m\ddot{x}_1$$

$$\rightarrow -kx_{1\,\text{فنر}} = m\ddot{x}_1 \qquad x_{1\,\text{فنر}} = (x_1 - x_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -k(x_1 - x_2) = m\ddot{x}_1 \\ \frac{T}{2} = 2k(2x_2) = 8kx_2 \end{cases} \Rightarrow -k(x_1 - x_2) = 8kx_2$$

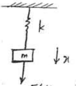
$$\Rightarrow x_2 = \frac{x_1}{9}$$

$$\rightarrow -k\left(x_1 - \frac{x_1}{9}\right) = m\ddot{x}_1 \Rightarrow \ddot{x}_1 + \frac{8k}{9m}x_1 = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{8}{9}\frac{k}{m}}$$

« فصل دوم - ارتعاش اجباری غیر میرا »

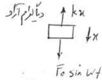
(Forced un damped vibration)

فرض می‌شود بار اجباری یک بار هارمونیک ساده (سینوسی) باشد.



$F(t) = F_0 \sin \omega t$

بار هارمونیک
یا بار تحریک
(Exciting load)



دامنه نیروی تحریک
فرکانس تحریک

از معادله بعد :

$$\sum F = m\ddot{x}$$

$$-kx + F_0 \sin \omega t = m\ddot{x}$$

معادله دیفرانسیل حرکت $\quad \ddot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$

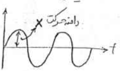
(پاسخ حرکت) $\quad x = \underbrace{A\cos \omega_n t + B \sin \omega_n t}_{\text{پاسخ گذرا}} + \underbrace{\frac{F_0}{m(\omega_n^2 - \omega^2)} \sin \omega t}_{\text{پاسخ دائمی یا یکنواخت}}$

نکته: پاسخ گذرا (پاسخی است که بدلیل میرایی سیستم به مرور زمان از بین می‌رود) از بین رفته باشد و فقط پاسخ یکنواخت باقی می‌ماند.

$$x = \frac{F_0}{m(\omega_n^2 - \omega^2)} \sin \omega t \implies \boxed{\frac{F_0}{m(\omega_n^2 - \omega^2)} = X}$$

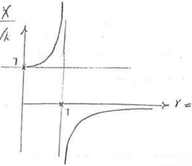
دامنه حرکت یکنواخت

$$X = \frac{F_0}{\underbrace{m \cdot \omega_n^2}_{m \cdot \frac{k}{m}} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)} = \frac{F_0}{k\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)} = \frac{F_0/k}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$



$$\implies \frac{X}{F_0/k} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \xrightarrow{\frac{\omega}{\omega_n} = r} \boxed{\frac{X}{F_0/k} = \frac{1}{1 - r^2}}$$

تذکر: w_n همیشه ثابت بوده و w متغیر می‌باشد.



$\left\{ \begin{array}{l} r=0 \\ w=0 \end{array} \right.$ سیستم خاموش

بار F_0 به شکل استاتیکی به سیستم وارد می‌شود.

بنابراین:

$X = \frac{F_0}{k}$ یا $\frac{X}{\frac{F_0}{k}} = 1$

رزونانس یا تشدید $\left\{ \begin{array}{l} r \to 1 \\ w \to w_n \\ X \to \infty \end{array} \right.$

وقتی $r \to 1$ میل می‌کند فرکانس نیروی محرک برابر یکی از فرکانس‌های طبیعی سیستم منطبق می‌شود و حالت تشدید یا رزونانس اتفاق می‌افتد و نوسانی با دامنهٔ بزرگ خطرناکی ممکن است اتفاق افتد. مانند شکست سازه‌های تطبیر پل‌ها و ساختمان‌ها.

$\left\{ \begin{array}{l} r \to \infty \\ w \to \infty \\ X \to 0 \end{array} \right.$

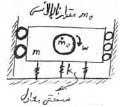
ناگهانی بودن بار وارده بر سیستم باعث ناپایداری سیستم می‌شود.

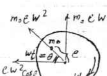
به علت سرعت تغییر جهت بارهارمونیک فرصت انتقال حرکت وجود ندارد.

ارتعاش اجباری $\left\{ \begin{array}{l} F_0 \text{ تابعی از } w \text{ نیست. } (I) \\ F_0 \text{ تابعی از } w \text{ است. } (II) \end{array} \right.$ ← سیستم‌های دوار غیربالانس (لرزش ماشینهای تطبیر موتور، یخچال، لباسشویی و خودرو)

تذکر: اگر سیستم بالانس باشد ارتعاش ندارد و اگر بخواهد ارتعاش داشته باشد باید از نوع (II) باشد.

ارتعاش اجباری مدل ساده نوع دوم:

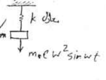




e خروج از مرکز $\qquad \theta = wt$

$F = m_0 e w^2 \sin wt$ بار تحریک

F_0 دامنه بار تحریک



از تحلیل مسئله نوع I :

$$X = \frac{F_0}{m(w_n^2 - w^2)} = \frac{m_0 e w^2}{m(w_n^2 - w^2)}$$

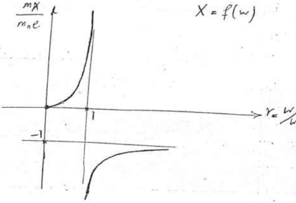
$$X = \frac{m_0 e w^2}{m w_n^2 \left(1 - \frac{w^2}{w_n^2}\right)} = \frac{m_0 e \left(\frac{w}{w_n}\right)^2}{m\left(1 - \frac{w^2}{w_n^2}\right)} = \frac{m_0 e r^2}{m(1 - r^2)}$$

جرم کل

$$\boxed{\frac{mX}{m_0 e} = \frac{r^2}{1 - r^2}}$$

جرم نابالا

$X = f(w)$



$$\begin{cases} r = 0 \\ w = 0 \\ \text{سیستم ساکن} \\ X = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r \to 1 \\ w \to w_n \quad \text{رزونانس (تشدید)} \\ X \to \infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} r \to \infty \\ w \to \infty \\ \frac{mX}{m_0 e} \to -1 \\ X \to \frac{-m_0 e}{m} \end{cases}$$

* فنداسیون سنگین باعث بالا رفتن m و اگر جنس آن از نوعی باشد که جاذبه ارتعاش باشد ارتعاشات را کاهش می دهد.

این تکیه گاه می تواند فنداسیون زیر ماشین باشد.

تعیین نسبت انتقال در ارتعاشات اجباری :

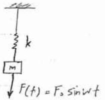
(Transmissio Ratio) $T.R_0$

$$T.R_0 = \frac{F_{TR}}{F_0}$$

$$T.R_0 = \frac{\text{حداکثر بار وارد بر تکیه‌گاه یا زمین}}{\text{حداکثر بار وارد بر جسم}}$$

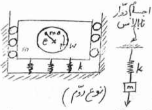
$T.R_0$ تابعی از زمان نیست.

(نوع اول)



$F(t) = F_0 \sin wt$

$$m\ddot{x} + kx = F(t)$$



(نوع دوم)

$F = m_0 e w^2 \sin wt$

اگر $T.R_0 > 1$ $\Rightarrow$ حداکثر بار وارد بر تکیه‌گاه بیش از حداکثر بار وارد بر جسم یا بیش از بار تحریک است.

اگر $T.R_0 < 1$ $\Rightarrow$ حداکثر بار وارد بر تکیه‌گاه کمتر از حداکثر بار تحریک است.

F تکیه‌گاه $= kx$ معادل ، حداکثر بار تکیه‌گاه $F_{max} = kX$ ، حداکثر بار تحریک F_{TR}

$$T.R_0 = \frac{kX}{F_0}$$

هیچگاه تابعی از زمان نیست

$\Rightarrow$ مستقل از ω ، F_0

(نوع I) $T.R_0 = \dfrac{X}{F_0/k} = \dfrac{1}{1-r^2}$

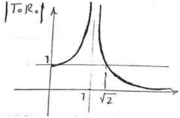
(نوع II) $T.R_0 = \dfrac{kX}{F_0}$ ، F_0 تابعی از ω ، $m_0 e w^2$

$\dfrac{MX}{m_0 e} = \dfrac{r^2}{1-r^2}$ از قبل داریم

$r = \dfrac{w}{w_n}$, $\dfrac{k}{M} = w_n^2$

$$\Rightarrow \frac{k\, m_0 e r^2}{M(1-r^2)\, m_0 e w^2} = \frac{1}{1-r^2}$$

$$\boxed{(\text{نوع } I \text{ ، نوع } II) \Rightarrow |T.R_0| = \left|\frac{1}{1-r^2}\right| = \frac{1}{|1-r^2|} = \frac{kX}{F_0}}$$



$r = \frac{\omega}{\omega_n}$

از نظر طراحی منطقه امن نیستیم
$$\begin{cases} 0 < \omega < \sqrt{2}\,\omega_n \\ 0 < r < \sqrt{2} \\ |T_oR_o| > 1 \end{cases}$$

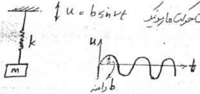
$$\begin{cases} r > \sqrt{2} \ , \ \omega > \sqrt{2}\,\omega_n \\ |T_oR_o| < 1 \end{cases}$$

در این حالت نیروی وارد شده $r = \sqrt{2}$ با نیروی تکیه‌گاه کاملاً برابر است.

$r = 1$ نقطه تشدید یا رزونانس است.

دور شدن از رزونانس $\omega \cong 1.4\,\omega_n = 1.4\sqrt{\frac{k}{m}}$

ارتعاش اجباری جسم در اثر حرکت هارمونیک تکیه‌گاه :



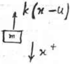
$u = b\sin\omega t$

* دیگر به جسم بار تحریک وارد نمی‌شود و تکیه‌گاه تحت حرکت هارمونیک قرار دارد.

u : حرکت هارمونیک

b : دامنه حرکت هارمونیک

حال حرکت ارتعاشی جسم را تحلیل کنید :



$$-k(x-u) = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + kx = ku$$

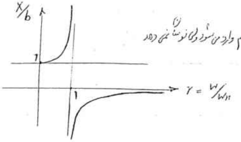
$$\boxed{m\ddot{x} + kx = kb\sin\omega t}$$

چون $F_o = kb$ و تابعی از ما نیست از نوع (I) است.

حل یکنواخت یا دائمی معادله دیفرانسیل فوق مانند حل انجام شده برای سیستم نوع (I) است :

$m\ddot{x} + kx = F_o\sin\omega t \quad , \quad X = \dfrac{F_o}{m(\omega_n^2 - \omega^2)}$ دامنه پاسخ یکنواخت $\quad x = X\sin\omega t$

در مسئله فوق $\Longrightarrow \quad X = \dfrac{k\cdot b}{m\omega_n^2(1-r^2)} = \dfrac{b}{1-r^2} \Longrightarrow \boxed{\dfrac{X}{b} = \dfrac{1}{1-r^2}}$



$$\begin{cases} r = 0 \quad \text{یا} \quad \omega = 0 \\ X = b \end{cases}$$

بار به جسم وارد می‌شود ولی نوسان نمی‌دهد

تغییر مکان جسم و تکیه‌گاه باهم برابر است.

$$\begin{cases} r \to 1 \quad \text{یا} \quad \omega \to \omega_n \\ X \to \infty \end{cases}$$

حالت تشدید یا رزونانس

$$\begin{cases} r \to \infty \quad \text{یا} \quad \omega \to \infty \\ X \to 0 \end{cases}$$

ارتعاش جسم به صفر می‌رسد

اگر در این مسئله بخواهیم دامنه تغییر طول فنر را نیز تحلیل کنیم داریم:

تغییر طول فنر $z = x - u$

$Z =$ دامنه تغییر طول فنر

$$\boxed{\begin{aligned} x &= z + u \\ \ddot{x} &= \ddot{z} + \ddot{u} \end{aligned}}$$

$$m\ddot{x} + kx = ku$$

$$m\ddot{x} + kx = k(x - z)$$

$$m(\ddot{u} + \ddot{z}) + \cancel{kx} = \cancel{kx} - kz$$

$$\ddot{u} = -b\omega^2 \sin \omega t$$

$$m\ddot{z} + kz = -m\ddot{u}$$

معادله دیفرانسیل تغییر طول فنر

$$m\ddot{z} + kz = mb\omega^2 \sin \omega t$$

سیستم اجباری ارتعاش نوع II

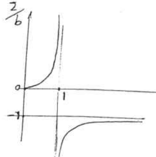
$$m\ddot{x} + kx = m_0 e \omega^2 \sin \omega t$$

$$\left[\frac{mX}{m_0 e} = \frac{r^2}{1 - r^2} \right]$$

$$\frac{mZ}{mb} = \frac{r^2}{1 - r^2}$$

دامنهٔ تغییر طول فنر

$$\boxed{\frac{Z}{b} = \frac{r^2}{1 - r^2}}$$



$r = 0$ یا $w = 0$

زمانی که تکیه‌گاه تغییر مکان می‌کند

$Z = 0$ ولی نوسان ندارد فنر هم تغییر مکان ندارد

$r \to 1$ یا $w = w_n$

$Z \to \infty$ حالت تشدید یا رزونانس

دامنه حرکت و دامنه تغییر جسم بی‌نهایت است.

$r \to \infty$ یا $w \to \infty$

$Z \to -b$

تغییر طول فنر مخالف تغییر مکان فنر است.

---

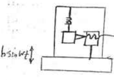
* شرط ساختن ارتعاش سنج یا شتاب سنج :

$$w_n = \sqrt{k/m}$$

$w_n \gg$ خیلی بزرگ $\longrightarrow$ $k \uparrow\uparrow$ فنر خیلی سخت، $m \downarrow\downarrow$ جرم کوچک $\Longrightarrow r = \frac{w}{w_n} \downarrow\downarrow$

$w_n \ll$ خیلی کوچک $\longrightarrow$ $k \downarrow\downarrow$ فنر نرم، $m \uparrow\uparrow$ جرم بزرگ $\Longrightarrow r = \frac{w}{w_n} \uparrow\uparrow$

$$\uparrow\uparrow r = \frac{w}{w_n} \Rightarrow \frac{Z}{b} = \frac{r^2}{1-r^2} \to -1 \Rightarrow \boxed{Z \simeq -b}$$



$Z \simeq -b$

دامنه موج ثبت شده تقریباً برابر است با دامنه ارتعاش تحریک

ارتعاش سنج

که در r بزرگ رخ می‌دهد

این حالت نمی‌تواند واقعی باشد چون باید دمپر را نیز محاسبه کرد.

حالت دوم:

k فنر سفت

m جرم سبک $\Rightarrow w_n \gg \Rightarrow r \downarrow\downarrow$

$$\frac{Z}{b} = \frac{r^2}{1-r^2} \Rightarrow \frac{Z}{b} = \frac{w^2/w_n^2}{1-w^2/w_n^2}$$

$$Z\underbrace{\left(1-\frac{w^2}{w_n^2}\right)}_{\simeq 1} \cdot w_n^2 = b w^2$$

$$Z \cdot w_n^2 \simeq b w^2 = \left|\ddot{u}_{max}\right|$$

دامنه ثبت شده

مجذور فرکانس طبیعی

شتاب ماکزیمم

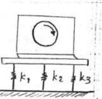
شتاب سنج

که در r نزدیک صفر

روی کار می آید.

مثال: موتوری به وزن ~~...~~ 50kg بر روی سه فنر به سختی معادل k سوار شده است. اگر سرعت دورانی موتور ~~...~~ 1500 rpm باشد سختی k را چنان محاسبه کنید تا ٪۱۰ از نیروی نابالانسی موتور به تکیه‌گاه منتقل شود. (نیروی منتقل شده ٪۱۰ نیروی اعمال شده باشد)

$$|T.R| = \frac{1}{|1-r^2|} = 0.1 \qquad \left(\frac{w}{w_n}\right)^2 = 11$$



$$w_n^2 = \frac{k_{معادل}}{m} = \frac{w^2}{11} \Rightarrow k = \frac{m w^2}{11}$$

$m = 50kg$

$k_1 = k_2$

$k_{معادل} = k_1 + k_2 + \ldots$

$$n = 1500 \text{ rpm} \Rightarrow w = \frac{1500\pi}{30} = 50\pi \text{ rad/s} \qquad , \cancel{m = \frac{55}{32.2} \text{ slug}}$$

~~$k_{معادل} = 56.5$ lb/in~~ $\Rightarrow$ ~~$k_{هرفنر} = 56.5/3$ lb/in~~

$$\Rightarrow w^2 = 25000 \longrightarrow \frac{1}{\left|1 - \frac{25000 \times 50}{k_{معادل}}\right|} = 0.1$$

$$\Rightarrow \frac{1250000}{11} \Rightarrow k_{معادل} = 113636.37 \longrightarrow k_{هرفنر} = 37878.8$$

0.3cm 1000 kg

مثال: دستگاهی به جرم 500 kg بر روی فنرهایی با خیز استاتیکی 0.5 cm سوار شده است. نامیزانی دستگاه $m_0 e = 0.2\ kg.m$ (0.1) است. دامنه لرزش دستگاه (X) و نیروی منتقل شده به تکیه گاه $(F_{T.R})$ در سرعت 1200 rpm (3000 rpm) دستگاه چقدر است؟ اگر دستگاه بر روی یک فنداسیون 1000kg (1000) نصب شود مسئله را مجدداً حل کنید.

چه تغییراتی در سیستم ایجاد می‌کند

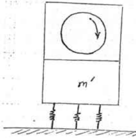
راه حل: $k = \frac{mg}{\Delta} = \frac{5000}{0.5 \times 10^{-2}} = 10^6\ N/m$

$$\omega_n^2 = k/m = \frac{10^6}{500} \quad , \quad \omega = \frac{2\pi n}{60} = 40\pi\ rad/s$$

$$X = \frac{m_0 e}{m} \left| \frac{r^2}{1-r^2} \right| \Longrightarrow r^2 = \frac{1600\pi^2 \times 500}{10^6} \simeq 8$$

$$X = 0.5 \times 10^{-3}\ m \quad , \quad F_{T.R} = 500 N = kX$$

* مقدار دامنه لرزش $X = 0.5\ mm$ برای یک دستگاه زیاد است.



فرض ۱) خیز استاتیکی تغییر نکند یعنی نوع فنر تغییر کند:

$$k = \frac{1500}{0.5 \times 10^{-2}} = 3 \times 10^6\ N/m$$

$$\omega_n^2 = \frac{3 \times 10^6}{1500} = \frac{10^6}{500} \quad , \quad \omega = 40\pi\ rad/s$$

$$r^2 = 8$$

$$X = \underbrace{\frac{m_0 e}{m}}_{m' = 1500\ kg} \left| \frac{r^2}{1-r^2} \right| \simeq 0.17 \times 10^{-3}\ m$$

$$F_{T.R} \simeq 500 N$$

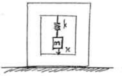
فرض 2) خیز استاتیکی تغییر کند (نوع فنر تغییر نکند):

$$k = 10^6\ N/m \quad , \quad \Delta = 1.5\ cm$$

$$\omega_n^2 = \frac{10^6}{1500} \quad , \quad \omega = 40\pi\ \frac{rad}{s} \quad , \quad r^2 = \frac{1600\pi^2 \times 1500}{10^6} = 24$$

$$X = \frac{m_0 e}{m}\left(\frac{24}{23}\right) \simeq 0.15 \times 10^{-3}\ m \quad ; \quad F_{T.R} = kX \simeq 150\ N$$

مثال: دامنه؟



$$\begin{cases} m = 0.5\,kg \\ f = 4\,Hz \\ b = 2\,mm \end{cases}$$

$\updownarrow b\sin\omega t$

اگر نیروی استاتیکی $5N$ به جرم وارد شود $10mm$ جابجا می‌شود.

$$k = \frac{F}{x} = \frac{5}{0.01} = 500\ N/m$$

$$\omega_n^2 = k/m = 500/0.5 = 1000$$

$$\omega^2 = (2\pi f)^2 = 4\pi^2 \times 16 = 631.6$$

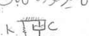
$$X = \frac{b}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} = \frac{2}{1 - \frac{631.6}{1000}} = 5.43\ mm$$ دامنه ارتعاش

« فصل سوم - ارتعاش میرای غیر اجباری یا مستهلک شونده »

(Damped vibration)

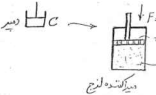
کلیه سیستم های ارتعاشی کم و بیش در معرض میرایی هستند زیرا انرژی بوسیله اصطکاک و دیگر مقاومت ها تلف می شود. اگر میرایی کوچک باشد تأثیر خیلی کمی بر فرکانس های طبیعی سیستم دارد و به این دلیل محاسبات فرکانس های طبیعی عموماً براساس بدون میرایی انجام می گیرد. از طرف دیگر میرایی اهمیت زیادی در محدود ساختن دامنه نوسان در حالت تشدید دارد.

اگر سیستم ارتعاشی پس از مدتی متوقف شود و انرژی جنبشی تبدیل به اصطکاک و گرما گردد یک سیستم ارتعاشی میرا خواهیم داشت: در زمان ارتعاش رفته رفته انرژی حرکت جذب شود تا دامنه ی حرکت به سمت صفر میل نماید گوییم حرکت ارتعاشی میرا شونده می باشد.

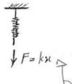


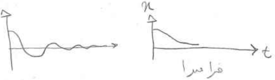
میرا (Damper):
- میراکننده لزج ← میراکننده روغنی مانند کمک فنرها (Dashpot)
- میراکننده خشک ← اصطکاک کولمب (اصطکاک بین جسم و زمین یا اصطکاک در کلیه اهرمها یا لولاها) (کولمب) نقش ایفا کننده ای دارد.

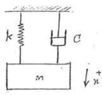
علت استفاده از دمپر به علاوه موازی در سیستم جرم و فنر اینست که چون در استفاده از فنر به تنهایی انرژی از بین نمی رود باید با استفاده از دمپر انرژی را میرا کرد و دامنه نوسان را صفر کرد.



دمپر یک سیلندر و پیستون سوراخ سوراخ است که با رفتن آن به پائین روغن از سوراخ ها گذر کرده به بالا می آید و با رفتن پیستون به بالا روغن از سوراخ ها گذر کرده و به پائین می آید و انرژی جنبشی مکانیکی به این ترتیب به اصطکاک و انرژی گرمایی تبدیل می شود و هر چه این سرعت بیشتر باشد انرژی گرمایی بیشتری تولید می گردد. ($F=c\dot{x}$)





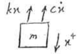


$$N = c \times \frac{m}{s}$$ نیوتن / متر

c : ثابت دمپر میرایی که بستگی به شکل هندسی دمپر و تعداد سوراخ‌ها و نوع روغن دارد.

$$\frac{N \cdot s}{m} = \frac{kg \cdot m \cdot s}{s^2 \cdot m} = \frac{kg}{s}$$

هرچه قدر c بزرگتر شود کوک تندتر قوی‌تر شده یعنی حجیم‌تر می‌شود.



$$\sum F = m\ddot{x}$$

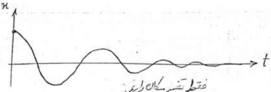
$$-kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$$ معادله دیفرانسیل حرکت

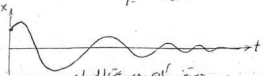
نکته: سه شکل زیر سیستم ارتعاشی میرا می‌باشند که به c بستگی دارند.

$\begin{cases} x = x_0 \\ t = 0 \end{cases}$



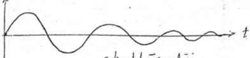
فقط تغییر مکان داریم.

$\begin{cases} x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \\ t = 0 \end{cases}$



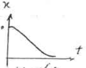
هم تغییر مکان و هم سرعت اولیه داریم.

$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x}_0 \\ t = t_0 \end{cases}$

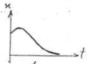


فقط سرعت اولیه داریم.

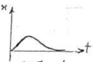
نکته: سه شکل زیر سیستم میرا ولی غیرارتعاشی می‌باشد که به c بستگی دارد.



با مکان اولیه



با سرعت و مکان اولیه



با سرعت اولیه

برای حل معادله دیفرانسیل سیستم ارتعاشی میرایی که معادله مشخصه تشکیل داده و یک تغییر متغیر انجام می دهیم:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

معادله مشخصه. $r^2 + \frac{c}{m}r + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$

تغییر متغیر $x = De^{rt} \Rightarrow x = D_1 e^{r_1 t} + D_2 e^{r_2 t}$

معادله مکان بر حسب زمان (معادله پاسخ زمانی)

$$x = e^{-\left(\frac{c}{2m}\right)t}\left[D_1 e^{+\sqrt{\frac{c^2}{4m^2}-\frac{k}{m}}\,t} + D_2 e^{-\sqrt{\frac{c^2}{4m^2}-\frac{k}{m}}\,t}\right]$$

اگر $\sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$ حقیقی باشد

$\mathrm{I}\ \left(\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m} > 0\right)$

$\mathrm{III}\ \left(\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m} = 0\right)$

پاسخ نهایی بدون ارتعاش به سمت صفر میل می کند

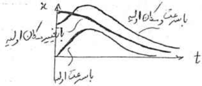
اگر $\sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$ حقیقی نباشد یعنی مجازی یا موهومی باشد $\mathrm{II}\ \left(\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m} < 0\right)$ پاسخ نهایی با ارتعاش به سمت صفر میل می کند

حالت I) $\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m} > 0 \Rightarrow c^2 > 4mk \Rightarrow c > 2\sqrt{mk}$

c ← ثابت میرایی

حالت فرامیرا (over Damping)

معادله پاسخ $x(t)$ برحسب زمان ارتعاشی نیست.



$$\frac{c^2}{4m^2}-\frac{k}{m}<0 \Rightarrow c^2<4mk \Rightarrow c<2\sqrt{mk}$$ (II حالت

حالت فرومیرا (under damping)

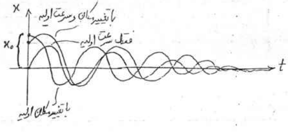
$$\sqrt{\frac{c^2}{4m^2}-\frac{k}{m}}=\sqrt{\left(\frac{k}{m}-\frac{c^2}{4m^2}\right)}\,i$$

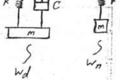
$$x=e^{-\frac{c}{2m}t}\Big[\underbrace{D_1 e^{\sqrt{k/m-c^2/4m^2}\cdot it}+D_2 e^{-\sqrt{k/m-c^2/4m^2}\cdot it}}_{A\cos w_d t+B\sin w_d t}\Big]$$

$$w_d=\sqrt{k/m-\frac{c^2}{4m^2}}$$ ⟵ فرکانس زاویه‌ای حرکت اگر دمپر داشته باشد

این حالت در کمک‌فنر اتومبیل استفاده می‌شود.

$$x=e^{-\frac{c}{2m}t}\left[A\cos w_d t+B\sin w_d t\right]$$





فرکانس میرایی $w_d=\sqrt{k/m-\frac{c^2}{4m^2}}$

$$w_d<w_n$$

$$c=0 \Longrightarrow w_d=w_n$$

$$\frac{C^2}{4m^2}-\frac{k}{m}=0 \Rightarrow \frac{C^2}{4m^2}=\frac{k}{m} \Rightarrow C=2\sqrt{mk}$$ (حالت III

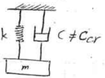
$$x=e^{-\frac{C}{2m}t}\cdot(D_1+D_2t)$$

حالت میرایی بحرانی (Critical Damping)

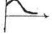
سیستم بدون ارتعاش به سمت صفر میل می‌کند. ولی سرعت میرا شدن آن بیشتر است و زمان کمتری را برای میرایی طی می‌کند (در حالت زمان دامنه ارتعاش به صفر می‌رسد) سرعت میرا شدن ارتعاشات سریع‌تر است. یعنی این حالت سریع‌ترین حالت میرا شدن می‌باشد که سرعت میرایی نسبت به حالت فرامیرا (overdamping) بیشتر می‌باشد ولی شکل همان است.

$C_{cr}=2\sqrt{mk}$ ثابت میرایی بحرانی

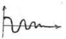
$$\frac{C}{C_{cr}}=\beta$$ زتا (نسبت میرایی)



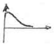
$\beta>1 \rightarrow$ حرکت فرامیرا overdamping



$\beta<1 \rightarrow$ حرکت فرومیرا under damping



$\beta=1 \rightarrow$ حرکت میرایی بحرانی critical damping



نکته: اگر $C>C_{cr}$ زمان زیادی سپری می‌شود و حرکت ارتعاشی نیست. و اگر $C<C_{cr}$ زمان زیادی سپری می‌شود ولی حرکت ارتعاشی است.

$$\beta=\frac{C}{C_{cr}}=\frac{C}{2\sqrt{mk}}=\frac{C}{2m\omega_n}$$ $\omega_n^2=\frac{k}{m}$ $C_{cr}=2m\omega_n$

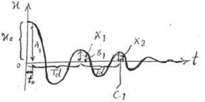
* نوشتن ω_d برحسب ω_n و β:

(در حالت II) under damping فرومیرا $\Longrightarrow \omega_d=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{C^2}{4m^2}}=\sqrt{\frac{k}{m}\left(1-\frac{C^2}{4mk}\right)}$ ($4mk = C_{cr}^2$)

$\beta=0 \Rightarrow \omega_d=\omega_n$ ارتعاش غیرمیرا

$$\Rightarrow \omega_d=\omega_n\sqrt{1-\beta^2}$$

(در حالت II)



$$w_d = 2\pi f_d = \frac{2\pi}{T_d}$$

زمان نوسان $T_d = \frac{2\pi}{w_d} = \frac{2\pi}{w_n\sqrt{1-\beta^2}}$

$\frac{X_1}{X_0} = ?$

$\frac{X_2}{X_1} = ?$

$\frac{X_n}{X_{n-1}} = ?$

* اگر نقاط مشابه که فاصله آنها روی محور t به اندازه T_d باشد با یکدیگر مقایسه گردند، نسبت دامنه هایشان چقدر خواهد بود؟

معادله پاسخ $x = e^{-\frac{c}{2m}t}\left[A\cos w_d t + B\sin w_d t\right]$

$$\begin{cases} x = A_1 \\ t = t_0 \\ A_1 = E.e^{-\frac{c}{2m}t_0} \end{cases}$$

$t = t_0 + T_d$

$x = B_1$

$B_1 = e^{-\frac{c}{2m}(t_0 + T_d)} \cdot (E)$

$B_1 = A_1 \cdot e^{-\frac{c}{2m} \cdot T_d}$

$t = t_0 + 2T_d$

$C_1 = A_1 \cdot e^{-\frac{c}{2m} \cdot 2T_d}$

$t_0 = 0 \rightarrow X_0 = E' e^{-\frac{c}{2m} \times 0} = E' = A$

$X_1 = X_0 e^{-\frac{c}{2m} \cdot T_d}$

$X_2 = X_0 e^{-\frac{c}{2m} \cdot 2T_d}$

پس از n سیکل $\Rightarrow$ $X_n = X_0 e^{-\frac{c}{2m} \cdot nT_d}$

نتایج :

۱- دامنه‌ها خودشان نسبت به هم به شکل متوالی یک ضریب ثابت را دارند.
این تصاعد بخاطر توان منفی e کاهنده است.

$$\frac{X_n}{X_{n-1}} = e^{\frac{-c}{2m} \cdot T_d}$$

تصاعد هندسی

$$X_0 , X_1 , X_2 , \cdots , X_{n-1} , X_n$$

$$\text{قدر نسبت} = e^{-c/2m \cdot T_d} = e^{-\delta} < 1$$

$$X_2 < X_1 \quad , \quad X_n < X_{n-1}$$

۲- تعیین کاهش لگاریتمی :

$$\ln X_n = \ln X_0 - \frac{c}{2m} \cdot n T_d$$

$$\underbrace{\frac{c}{2m} \cdot T_d = \delta}_{\text{کاهش لگاریتمی}} \Rightarrow \ln X_n - \ln X_0 = -n\delta$$

$$\ln\left(\frac{X_n}{X_0}\right) = -n\delta$$

هرچه قدر δ بزرگتر باشد سیستم سریعتر کاهش می‌یابد و بالعکس.

$$\boxed{X_n = X_0 e^{-n\delta}}$$

$$\boxed{\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{X_0}{X_n}}$$

اگر تساوی متقابل برای δ درست باشد صحیح است.

$$\delta = \ln \frac{X_0}{X_1} = \frac{1}{2} \ln \frac{X_0}{X_2} = \frac{1}{3} \ln \frac{X_0}{X_3} = \cdots$$

$e^{-\delta}$ قدر نسبت تصاعد هندسی

ارتباط بین β و δ :

$$\frac{c}{2m} \cdot T_d = \delta \Rightarrow \frac{c}{2m} \cdot \frac{2\pi}{w_d} = \delta$$

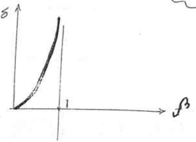
$$\Rightarrow \frac{c}{2m} \cdot \frac{2\pi}{w_n \sqrt{1-\beta^2}} = \delta \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m w_n}$$

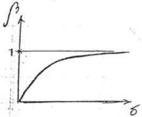
$$\Rightarrow \boxed{\delta = \frac{2\pi\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}} \Rightarrow \delta^2(1-\beta^2) = 4\pi^2\beta^2$$

$$\beta^2(4\pi^2+\delta^2) = \delta^2 \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2+\delta^2}}}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \beta \to 0 \\ \delta \to 0 \end{array} \right.$ غیرمیرا

$\left\{ \begin{array}{l} \beta \to 1 \\ \delta \to \infty \end{array} \right.$ میرای بحرانی





نکته: δ پارامتر طراحی در دمپرهاست. مثلاً

$\left\{ \begin{array}{l} \delta \simeq 4 \quad \text{دمپر نو در اتومبیل} \\ \delta \simeq 2 \quad \text{دمپر کهنه} \end{array} \right.$

مثال: یک دستگاه مرتعش میرا به جرم $m = 2.267\ kg$ و سفتی $k = 17.5\ \frac{N}{cm}$ دارای دو دامنه متوالی با نسبت $\frac{1}{0.98}$ است. مطلوبست الف) محاسبه کاهش لگاریتمی (δ) و ضریب نسبت میرایی (β)

ب) فرکانس طبیعی (ω_n) و فرکانس میرایی (ω_d) ج) ثابت میرایی (C)

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{X_0}{X_n} = \frac{1}{1} \ln \frac{1}{0.98} = 0.0202$$

$$\beta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2+\delta^2}} \simeq \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2}} = \frac{\delta}{2\pi} = 0.00315$$

* اگر $\delta \ll 1$ باشد یعنی در حد صدم می‌توان از δ^2 در زیر رادیکال صرف نظر کرد.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1750}{2.267}} = 27.78\ \frac{rad}{s} \simeq \omega_d$$

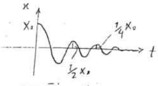
* اگر β در حد هزارم باشد $\omega_d \simeq \omega_n$ برابر می‌شود.

$$C = \underbrace{2m\omega_n}_{C_{cr}} \cdot \beta = 0.405\ \frac{N.s}{m}$$

مثال: نسبت دامنه های متوالی 2:1 است و β را بدست آورید.

$$\delta = \frac{1}{1}\ln\frac{2}{1} = 0.693$$

$$\beta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2+\delta^2}} = 0.11$$

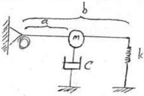


مثال: $\beta = 0.5$ نسبت دامنه های متوالی را بدست آورید.

$$\delta = \frac{2\pi\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{1}\ln\frac{x_0}{x_1} = 3.62$$

$e^{-\delta}$ قدر نسبت $36.1 : 1$

مثال: معادله دیفرانسیل حرکت، فرکانس طبیعی، فرکانس میرایی و ثابت میرایی بحرانی را بدست آورید.

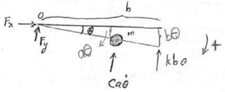


میله بدون جرم - نوع حرکت دورانی است و تغییر مکان فنر و دمپر مساوی نیست.

حل: $\sum M_o = I_o\ddot{\theta}$

$$-kb^2\theta - ca^2\dot{\theta} = ma^2\ddot{\theta}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{c}{m}\dot{\theta} + \frac{k}{m}\cdot\frac{b^2}{a^2}\theta = 0}$$



در حالت استاندارد:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$ ضریب x

w_d رادیکال $= 0 \Rightarrow C_{cr} = \ldots$ $\longleftarrow$ $w_n = \sqrt{k/m}$, $w_d = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}$

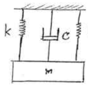
(نصف ضریب $\dot{x}$)^2

در مسئله فعلی:

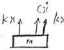
$C=0$ فرض میکنیم دمپیر $\Longrightarrow$ $\boxed{w_n = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{k}{m}}}$, $\boxed{w_d = \sqrt{\frac{k}{m}\cdot\frac{b^2}{a^2} - \frac{c^2}{4m^2}}}$

w_d زیر رادیکال صفر $\xrightarrow{C \to C_{cr}}$ $\frac{k}{m}\frac{b^2}{a^2} - \frac{C_{cr}^2}{4m^2} = 0 \longrightarrow C_{cr} = \frac{2b}{a}\sqrt{km}$

مثال: معادله پاسخ $(x(t))$ را بدست آورید.



$$\begin{cases} W = 40\ lb \\ k = 25\ lb/in \\ C = 0.85\ \frac{lb \cdot s}{in} \end{cases} \qquad \begin{cases} t = 0 \\ \dot{x} = 4\ in/s \\ x = 0 \end{cases}$$



$$-kx - c\dot{x} - kx = m\ddot{x} \longrightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{2k}{m}x = 0$$

$$m = \frac{40}{32.2}\ slug \quad , \quad k_{eq} = 2k$$

$W_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ → lb/ft, → slug, $\frac{rad}{s}$

و در سیستم انگلیسی — تبدیل به ft — دو فوتر

$$W_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{2k}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 25 \times 12 \times 32.2}{40}} = 22\ \frac{rad}{s}$$

$$C = 0.85 \times 12$$

$$\beta = \frac{C}{2mW_n} = 0.181 < 1 \implies \text{under damping (فرومیرا)}$$

$$x = e^{-\frac{c}{2m}t}(A\cos w_d t + B\sin w_d t)$$

$$-\frac{c}{2m} = -\beta \cdot w_n \qquad \beta \cdot w_n = 3.98$$

$$W_d = W_n\sqrt{1-\beta^2} = 22\sqrt{1-0.181^2} = 21.6\ \frac{rad}{s}$$

$$\begin{cases} t = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t = 0 \\ \dot{x} = 4\ in/s \end{cases} \implies \boxed{A = 0}$$

$$\dot{x} = -3.98e^{-3.98t}(A\cos 21.6t + B\sin 21.6t) + 21.6e^{-3.98t}(-A\sin 21.6t + B\cos 21.6t)$$

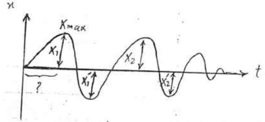
$\Rightarrow B = 0.185$

جواب معادله حرکت
یا معادله پاسخ برحسب اینچ

$$x = 0.185\, e^{-3.98t} \cdot \sin 21.6t$$

معادله سرعت

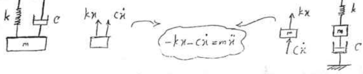
$$\dot{x} = -3.98\, e^{-3.98t}\left(0.185 \sin 21.6\, t\right) + 21.6\, e^{-3.98t}\left(0.185 \cos 21.6t\right)$$



سؤال: در چه زمانی جرم به حداکثر دامنه خود می‌رسد و حداکثر آن را حساب کنید.
(نسبت به زمان مشتق گرفته و مساوی صفر قرار می‌دهیم.)

و همچنین مطلوب است تعیین مقادیر X_1، X_1'، X_2 و X_2' ؟

نکته: تعیین معادله حرکت در حالتی که فنر و دمپر بصورت موازی قرار گرفته باشند یا بصورت سری باتوجه به شکل یکسان است. همچنین باید توجه داشت که دمپر و فنر باید تغییر طول یکسان داشته باشند و جهتشان نیز یکی باشد.



مثال: برای سیستم مرتعش میرا مقادیر ذیل مفروض است:

$k = 8000\ N/m$ ، $m = 10\ kg$ ، دامنه اولین سیکل ($X_0 = 64\ mm$) ، دومین سیکل ($X_1 = 48\ mm$) ، سومین سیکل ($X_2 = 36\ mm$) و چهارمین سیکل ($X_3 = 27\ mm$).

برای سیستم فوق فرکانس طبیعی، فرکانس میرایی، ثابت میرایی، ثابت میرایی بحرانی و کاهش لگاریتمی و نسبت میرایی (ζ) را بدست آورید.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{8000}{10}} = 28.28\ \frac{rad}{s} \quad , \quad C_{cr} = 2m\omega_n = 2\times 10\times 28.28$$

$$C_{cr} = 565.6\ \frac{kg}{s}$$

$$X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ ---$$

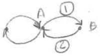
$$64,\ 48,\ 36,\ 27,\ --- \Rightarrow \underset{\text{قدر نسبت}}{e^{-\delta}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \delta = 0.288$$

$$\delta = \frac{1}{n}\ln\frac{X_0}{X_n} = \frac{1}{1}\ln\frac{X_0}{X_1} = \ln\frac{64}{48} = 0.288$$

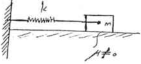
$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} = \frac{0.288}{\sqrt{4\pi^2}} = 0.046 \Rightarrow \zeta = \frac{c}{C_{cr}}$$

$$C = \zeta\times C_{cr} = 0.046\times 565.6 = 26.02\ \frac{kg}{s} \quad , \quad \omega_d = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} = \sqrt{\frac{8000}{10} - \frac{26.02^2}{4\times 100}}$$

$$\omega_d = 28.25\ \frac{rad}{s}$$



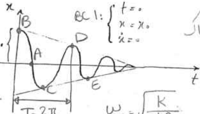
میرایی خشک یا کولمب :



در این میرایی از هیچ المانی استفاده نمی‌شود و تنها عامل میرایی اصطکاک بین جسم و زمین در حال خشک می‌باشد.

$$F_f = \mu \cdot N$$

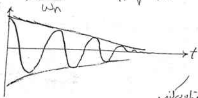
ضریب اصطکاک — عکس العمل عمودی سطح



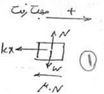
$$BC\,1: \begin{cases} t = 0 \\ x = x_0 \\ \dot{x} = 0 \end{cases}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

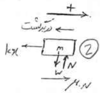
* در میرایی خشک (کولمب) همانطوری که در منحنی مقابل مشاهده می‌شود نوک دامنه‌ها را به همدیگر متصل کنیم یک خط راست است از همه آنها می‌گذرد و محور افقی را قطع می‌کند.



* در میرایی لزج همانطور که در منحنی مقابل مشاهده می‌شود نوک دامنه‌ها با خط منحنی به همدیگر متصل می‌شود و محور افقی را قطع نمی‌کند بهمین دلیل تعداد سیکل‌ها بینهایت است ولی در حالت واقعی چون میرایی لزج با میرایی خشک همراه است (نیروی اصطکاک) بالاخره محور افقی را قطع می‌کند.



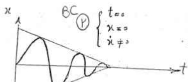
$$-kx - \mu N = m\ddot{x}$$
$$m\ddot{x} + kx = -\mu N$$



$$-kx + \mu N = m\ddot{x}$$
$$m\ddot{x} + kx = \mu N$$

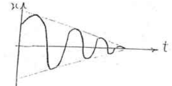
* در میرایی لزج با یک معادله دیفرانسیل می‌توان حرکت رفت و برگشت را تشریح و مدل کرد ولی در میرایی خشک برای تشریح حرکت در یک سیکل برای رفت و برگشت نیاز به حل دو معادله دیفرانسیل داریم. (چون جهت نیروی اصطکاک متفاوت است.)

* معادلات فوق در سیکل‌های بعدی دارای شرایط مرزی متفاوت خواهند شد و بایستی مجدداً حل شوند.



$$BC\,2: \begin{cases} t = 0 \\ x = 0 \\ \dot{x} \neq 0 \end{cases}$$

$$BC\,3: \begin{cases} t = 0 \\ x \neq 0 \\ \dot{x} \neq 0 \end{cases}$$



- ۸ - ۲ - ۲۹

* همیشه معادلات در سمت کشش فنر نوشته می‌شوند.

$$\begin{cases} ① \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = -\frac{\mu N}{m} & \text{معادله رفت} \\ ② \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{\mu N}{m} & \text{معادله برگشت} \end{cases}$$

جوابی که اگر در معادله می‌گذاریم صدق کند ← حل خصوصی

$$A \to B \begin{cases} \text{رفت } ① \quad x_1 = \overbrace{A_1 \cos w_n t + B_1 \sin w_n t}^{\text{حل عمومی}} - \overbrace{\frac{\mu N}{k}}^{\text{حل خصوصی}} \\ \end{cases}$$

$$B \to A \begin{cases} \text{برگشت } ② \quad x_2 = A_2 \cos w_n t + B_2 \sin w_n t + \frac{\mu N}{k} \end{cases}$$

فرکانس حرکت همان فرکانس طبیعی است.

* چون دامنه های تشکیل دهنده حساب می دهند برای یافتن آن در نسبت به معادله با شرایط مرزی زیر داریم: در سیرای کولمب

نقطه B

$$B.C)_1 \begin{cases} t = 0 \\ x = x_0 \\ \dot{x}_0 = 0 \end{cases} \quad (\text{برگشت}) \; x_1 = A_1 \cos w_n t + B_1 \sin w_n t + \frac{\mu N}{k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 = x_0 - \frac{\mu N}{k} \\ B_1 = 0 \end{cases}$$

اگر از طرفین مشتق و مساوی صفر قرار دهیم

$B.C)_1$ با شرایط مرزی ⟹ معادله از B به A

$$x_1 = \left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right) \cos w_n t + \frac{\mu N}{k} \qquad \text{I}$$

$$\dot{x} = -\left(x_0 + \frac{\mu N}{k}\right) \sin w_n t$$

نقطه C

$$B.C)_2 \begin{cases} t = \frac{\pi}{w_n} \\ x = -x_0 + \frac{2\mu N}{k} \\ \dot{x} = 0 \end{cases}$$

t در معادله I

$$(\text{رفت}) \; x_2 = A_2 \cos w_n t + B_2 \sin w_n t - \frac{\mu N}{k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_2 = x_0 - \frac{3\mu N}{k} \\ B_2 = 0 \end{cases}$$

معادله از C به D

$B.C)_2$ با شرایط مرزی ⟹

$$x_2 = \left(x_0 - \frac{3\mu N}{k}\right) \cos w_n t - \frac{\mu N}{k} \qquad \text{II}$$

نقطه D

$$B.C)_3 \begin{cases} t = \frac{2\pi}{w_n} \\ \dot{x} = 0 \\ x = x_0 - \frac{4\mu N}{k} \end{cases}$$

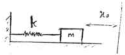
t در معادله II

$$(\text{برگشت}) \; x_3 = A_3 \cos w_n t + B_3 \sin w_n t + \frac{\mu N}{k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_3 = x_0 - \frac{5\mu N}{k} \\ B_3 = 0 \end{cases}$$

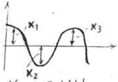
معادله از D به E $\;B.C)_3$ با شرایط مرزی ⟹

$$x_3 = \left(x_0 - \frac{5\mu N}{k}\right) \cos w_n t + \frac{\mu N}{k} \qquad \text{III}$$



اختلاف دامنه‌های متوالی که در یک طرف هستند نشان دهندهٔ قدر نسبت تصاعد [illegible]

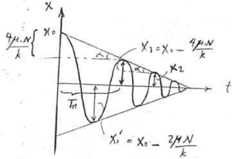
$$\Rightarrow \boxed{X_1 - X_3 = 4\frac{\mu . N}{k}}$$



$$X_n - X_{n+2} = 4\frac{\mu . N}{k}$$

$$X_1 - X_2 = 2\frac{\mu N}{K}$$

$$\text{قدر نسبت تصاعد حسابی} = X_{n+2} - X_n = -4\frac{\mu . N}{K}$$



$$tg\alpha = \frac{x_0 - x_1}{T_n} = \frac{x_2 - x_1}{T_n}$$

T_n ثابت است چون w_n ثابت است.

$$T_n = \frac{2\pi}{w_n}$$

$$tg\alpha = \frac{(x_0 - x_1)\, w_n}{2\pi}$$

$$x_0 - x_1 = x_1 - x_2 = \cdots = x_n - x_{n+1}$$

$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ تشکیل یک تصاعد حسابی با قدر نسبت منفی

$$x_0 - x_1 = \frac{4\mu . N}{k} \Rightarrow tg\alpha = \frac{4\mu . N . w_n}{2\pi k}$$

$$\boxed{\text{شیب خط مماس} \quad tg\alpha = \frac{2\mu . N . w_n}{\pi k}} \Leftarrow$$

نکته: زمانی که جرم حرکت رفت را انجام می‌دهد و برمی‌گردد و به تعادل می‌رسد برای حرکت دوباره نیاز دارد نیروی فنر بیشتر از نیروی اصطکاک باشد بنابراین:

انتهای مسیر

$\boxed{m} \rightarrow k x_n$, $\leftarrow \mu . N$

شرط حرکت $k x_n \geq \mu . N \rightarrow x_n \geq \frac{\mu . N}{k}$

شرط توقف $x_n < \frac{\mu . N}{k}$

تمرین: در یک سیستم میرای خشک با فرض مقادیر اختیاری برای جرم، سختی فنر، ضریب اصطکاک و شرایط اولیه به شکلی که حداقل قبل از توقف ۳ سیکل کامل قابل مشاهده باشد ضمن حل معادلات دیفرانسیل و بدست آوردن ثابت های انتگرال معادلات حاصل را رسم نموده و شیب خطی کاهش را به کمک معادلات رسم شده و به کمک مقدار تئوری آن باهم مقایسه کنید و به همین ترتیب مقدار کاهش در دو دامنه متوالی را از روی شکل بدست آمده و مقدار تئوری آن باهم مقایسه کنید. مسئله یک بار با سرعت اولیه دلخواه و یک بار با تغییر مکان اولیه دلخواه حل کنید.

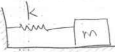
$m \to$ زیر 5 kg

$k \to$ طوری که حداقل ۳ سیکل بزند

$\mu \to$ 0.1 تا 0.3

(یکبار دستی و بار دیگر با کامپیوتر (نرم افزار Matlab) گراف آن را ترسیم کنید.)

تمرین تحویلی: ارتعاش اجباری میرای خشک. با انتخاب مقادیر اختیاری برای μ، m، k مطلوبست:



۱) تغییر مکان اولیه ۲) سرعت اولیه

۳) تغییر مکان و سرعت اولیه

مسئله را حل کنید و دیاگرام مکان برحسب زمان را رسم نمایید.

✓ مقادیر به نحوی انتخاب شوند که حداقل ۳ سیکل کامل رسم شوند (با مقیاس)

نرم افزاری / کاغذ میلیمتری

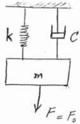
- تعداد نیم سیکل های لازم برای توقف کامل چیست؟

«فصل چهارم - ارتعاش اجباری میرا»

Damped- Forced

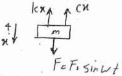
الف) اجباری میرا لزج

سیستم تعلیق در اتومبیل بکار می رود.



حالت اول) F_0 مستقل از ω است.

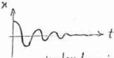
$$\Sigma F = m\ddot{x}$$



$$-kx - c\dot{x} + F_0 \sin \omega t = m\ddot{x}$$

معادله دیفرانسیل حرکت
$$\boxed{\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\sin \omega t} \qquad (1)$$

فرض: سیستم بدون بار اجباری دارای ارتعاش است.



حالت underdamping

(فروسیرا)

معادله پاسخ (حل معادله دیفرانسیل)

$$x = e^{-\left(\frac{c}{2m}\right)t}\underbrace{\left[A\cos \omega_d t + B\sin \omega_d t\right]}_{\text{پاسخ عمومی (گذرا) (همگن)}} + \underbrace{A'\cos \omega t + B'\sin \omega t}_{\text{پاسخ خصوصی (یکنواخت) دائم}} \qquad (2)$$

نکته: پاسخ گذرا با گذشت زمان از بین می رود ولی پاسخ یکنواخت باقی می ماند. بخاطر جمله $\frac{c}{2m}t$

نکته: زمانی که $\boxed{\frac{c}{2m}t > 5}$ می توان از پاسخ گذرا صرف نظر کرد و فقط پاسخ یکنواخت را در نظر گرفت.

$$x = A'\cos \omega t + B'\sin \omega t \qquad (3)$$

شرط درستی رابطه (3) اینست که در معادله (1) صدق کند، بنابراین داریم:

اهداف این فصل: ۱) (یعنی) پاسخ یکنواخت را پیدا کنیم.

۲) تغییرات دامنه ی پاسخ یکنواخت را نسبت به ω (فرکانس تحریک) بررسی کنیم.

- درحالت ارتعاش دائم، فرکانس حرکت همان فرکانس تحریک است.

$$\dot{x} = -A'w\sin wt + B'w\cos wt$$

$$\ddot{x} = -A'w^2\cos wt - B'w^2\sin wt$$

در رابطه (1) قرار دهیم

$$\Longrightarrow \left(-A'w^2\cos wt - B'w^2\sin wt\right) + \frac{C}{m}\left(-A'w\sin wt + B'w\cos wt\right) + \frac{k}{m}\left(A'\cos wt + B'\sin wt\right) = \frac{F_0}{m}\sin wt$$

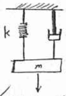
در طرفین باید ضرایب $\sin wt$ و $\cos wt$ یکسان باشد :

ضرایب $\sin wt$ و $\cos wt$

$$\begin{cases} -A'w^2 + B'\dfrac{C}{m}w + A'\dfrac{k}{m} = 0 \\ -B'w^2 - A'w\dfrac{C}{m} + B'\dfrac{k}{m} = \dfrac{F_0}{m} \end{cases}$$

از حل دستگاه فوق ضرایب A' و B' بدست می آید :

$$\begin{cases} A' = \dfrac{F_0 C w}{m^2\left[\left(w_n^2 - w^2\right)^2 + \left(\dfrac{Cw}{m}\right)^2\right]} \\ B' = \dfrac{F_0\left(w_n^2 - w^2\right)}{m\left[\left(w_n^2 - w^2\right)^2 + \left[\dfrac{Cw}{m}\right]^2\right]} \end{cases} \qquad X = \sqrt{A'^2 + B'^2}$$



بار تحریک $F = F_0 \sin wt$

ماتحریک

$$x = A'\cos wt + B'\sin wt$$

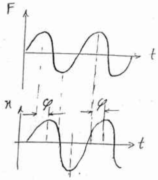
$$x = X\sin(wt - \varphi)$$

دامنه حرکت $X = \sqrt{A'^2 + B'^2}$

$$\boxed{\varphi = -\mathrm{Arctg}\frac{A'}{B'} \Leftarrow \mathrm{tg}\,\varphi = -\frac{A'}{B'}}$$

φ اختلاف فاز
یعنی میزان عقب افتادگی
تغییر مکان نسبت به نیرو

$$x = \underbrace{X\cos\varphi}_{B'}\sin wt - \underbrace{X\sin\varphi}_{A'}\cos wt$$



* دلیل عقب افتادگی تغییر مکان از نیرو دمپر است.

سیستم غیر میرا / $C=0$

$A'=0$

$\varphi=0$

نکته: F_0 تابع ما نیست بلکه سیستم نوع اول (I) است.

$$\xi=\frac{C}{C_{cr}} \qquad X=\frac{F_0}{m\sqrt{(w_n^2-w^2)^2+\left(\frac{Cw}{m}\right)^2}}=\frac{F_0}{k\sqrt{\left(1-\frac{w^2}{w_n^2}\right)^2+\left(2\beta\frac{w}{w_n}\right)^2}}$$

$C_{cr}=2m\omega_n$

$$\frac{w}{w_n}=r \Rightarrow ** \quad \boxed{X=\frac{F_0}{k\sqrt{(1-r^2)^2+(2\beta r)^2}}}$$

دامنه ارتعاش یکنواخت
در حالت ارتعاش اجباری
میرا با معادله لزج

$$\begin{cases} r\to 1 \text{ یا } w\to w_n \\ X \not\to \infty \end{cases}$$

در فرکانس اجباری دارای میرا هیچ وقت تشدید رخ نمی‌دهد

$$\begin{cases} r=1 \\ X_{max} \end{cases}$$

رخ نمی‌دهد

$$\Rightarrow \overbrace{\frac{X}{F_0/k}}^{\text{بدون بعد}}=\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\beta r)^2}} \qquad \begin{cases} r & \text{متغیر اصلی} \\ X & \text{تابع اصلی} \end{cases}$$

$$\frac{d\left(\frac{X}{F_0/k}\right)}{dr}=0$$

فقط نوشتن صورت زیر رادیکال کفایت می‌کند

$$\Rightarrow 2(-2r)(1-r^2)+2(2\beta)(2\beta r)=0$$

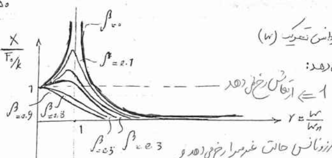
$$-4r+4r^3+8\beta^2 r=0 \Rightarrow -1+r^2+2\beta^2=0$$

$$r=\sqrt{1-2\xi^2}$$

$$r^2=1-2\beta^2 \longrightarrow \frac{w}{w_n}=\sqrt{1-2\beta^2}$$

$$** \Rightarrow \boxed{w=w_n\sqrt{1-2\beta^2}}$$

فرکانسی که در آن بیشترین دامنه است.



* گراف مقابل تأثیر فرکانس تحریک (ω) را روی دامنه نشان می‌دهد:

اگر r نزدیک به 1 $\Leftarrow$ ارتعاش رخ می‌دهد

* حداکثر دامنه قبل از رزونانس حالت غیرمیرا رخ می‌دهد و مقدار آن بی‌نهایت نیست.

* دامنه (X) با تغییرات ξ و ω تغییر می‌کند.

مختصات نقطه ماکزیمم در گراف

$$\left\{\begin{array}{l} r = \frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{1-2\beta^2} \\ \left(\frac{X}{F_0/k}\right)_{max} = \frac{1}{2\beta\sqrt{1-\beta^2}} \end{array}\right.$$

نکته: در گراف فوق مشاهده می‌شود که با افزایش β پیک (اکسترمم) منحنی هم به سمت چپ می‌آید و هم پائین‌تر می‌رود.

$$1-2\beta^2 < 0 \longrightarrow \beta^2 < \frac{1}{2}$$

$$\beta < \frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow \beta \approx \sqrt{0.7}$$

گراف تغییرات X برحسب r دارای نقطه اکسترمم هست.

نکته: هیچ وقت به ازای داشتن یک دمپر در ارتعاش اجباری میرا دامنه بی‌نهایت نداریم و دمپر فقط باعث کم شدن دامنه ارتعاش در سیستم اجباری می‌شود و زودتر نیز رخ می‌دهد.

نکته: تا وقتی منحنی دارای نقطه پیک (اکسترمم) است که $\beta < \frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد و اگر $\beta > \frac{\sqrt{2}}{2}$ شود دیگر گراف اکسترمم ندارد.

نکته: در ارتعاش اجباری میرا $\omega \neq \omega_n$ و $\omega \neq \omega_d$ می‌باشد.

اگر $\omega = \omega_n \longrightarrow r = 1 \Longrightarrow \frac{X}{F_0/k} = \frac{1}{2\beta}$

با کمک یک آزمایش ساده مقدار β بدست می‌آید.

$$\frac{1}{\beta} = \frac{2X}{F_0/k}$$

$$\boxed{\beta = \frac{F_0/k}{2X}}$$

نیروی تحریک $F = F_0 \sin \omega t$

$x = X \sin(\omega t - \varphi)$ به دلیل وجود دمپر

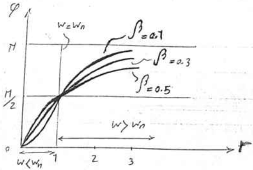
اختلاف فاز: میزان عقب ماندن تغییرمکان نسبت به نیروی اعمالی

$$\tan\varphi = -\frac{A'}{B'} = \frac{c\omega}{m(\omega_n^2 - \omega^2)} = \frac{2\beta\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

ضرایب کلی انتگرال

$$\Rightarrow \boxed{\tan\varphi = \frac{2\beta r}{1-r^2}}$$

نکته: اگر سیستم دوران نکند (یعنی بار تحریک بار استاتیکی باشد نه بار دینامیکی) اختلاف فاز نداریم.



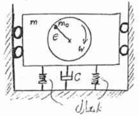
$$\begin{cases} r \to 0 \\ \varphi \to 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} r \to 1 \\ \varphi \to \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} r \to \infty \\ \varphi \to \pi \end{cases}$$

نکته: اگر $\omega = \omega_n$ شود اختلاف فاز برابر $\pi/2$ است.

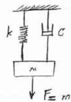
نکته: قبل از رزونانس ($r=1$) هر قدر که β بیشتر باشد اختلاف فاز بیشتری دارد و گراف با β کمتر اختلاف فاز کمتری دارد و بعد از رزونانس ($r=1$) آنکه β بیشتری دارد اختلاف فاز کمتر و گراف با β کمتر دارای اختلاف فاز بیشتری است.

اثر دوران

ارتعاش اجباری میرا در اجسام نابالانس در حال چرخش:



$\equiv$



هدف: تعیین دامنه‌ی پاسخ بلندمدت برحسب فرکانس تحریک

$\underbrace{F_o}$ تابع w است.

$F_o = m_o e w^2$

m_o: جرم نابالانس

m: جرم کل سیستم

$w_n^2 = k/m \Rightarrow k = m w_n^2$

از قبل داریم: $X = \dfrac{F_o}{k\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}} \Longrightarrow X = \dfrac{m_o e \omega^2}{k\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$

$$X = \frac{F_o\, m_o e w^2}{\underset{m w_n^2}{k}\sqrt{(1-r^2)^2+(2\beta r)^2}}$$

$$\Longrightarrow X = \frac{m_o e \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\omega_n^2}{k\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}} \qquad \omega_n^2 \to \frac{k}{m}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{mX}{m_o e} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\beta r)^2}}}$$

معادله تغییرات دامنه حرکت برحسب r و β در سیستم‌های دوار نابالانس میرا

$r \to 1$

$X \not\to \infty$

$\dfrac{dX}{dr} = 0$ باید حل شود $\Longrightarrow \dfrac{dX^2}{dr} = 0$

نقطه حداکثر تفاوتی نمی‌کند

$$\frac{m^2 X^2}{m_o^2 e^2} = \frac{r^4}{(1-r^2)^2+(2\beta r)^2}$$

$$\frac{dx}{dr}=0 \Longrightarrow 4r^3\left[(1-r^2)^2+(2\beta r)^2\right]-r^4\left[2(-2r)(1-r^2)+2\times 2\beta\times 2\beta r\right]=0$$

$$4\left[1+r^4-2r^2+4\beta^2 r^2\right]-\left[-4r^2+4r^4+8\beta^2 r^2\right]=0$$

$$+4-8r^2+16\beta^2 r^2+4r^2-8\beta^2 r^2=0 \Longrightarrow -r^2+2\beta^2 r^2+1=0$$

$$r^2(2\beta^2-1)+1=0 \Longrightarrow r^2=\frac{1}{1-2\beta^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-2\beta^2}}=r$$

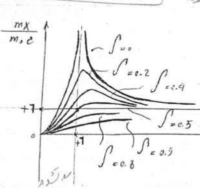
$$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2=\frac{1}{1-2\beta^2} \Longrightarrow \boxed{\omega=\frac{\omega_n}{\sqrt{1-2\beta^2}}}$$

فرکانس حداکثر دامنه

$$\text{I}\quad \boxed{\frac{mX}{m_0 e}=\frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\beta r)^2}}}$$

نقش دمپر در اینجا علاوه بر جذب تدریجی ارتعاشات در $r \neq 1$ اجازه نمی‌دهد دامنه بینهایت شود که $\beta \neq 0$

با وجود دمپر منحنی بالا ایجاد نمی‌شود.

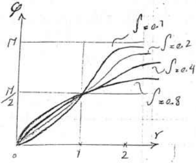


$$\boxed{r=\frac{\omega}{\omega_n}}$$

$$\begin{cases} F=F_0\sin\omega t=m_0 e\omega^2\sin\omega t \\ x=X\sin(\omega t-\varphi) \end{cases}$$

که معادله حرکت به اندازه φ از معادله نیرو عقب‌تر است. (اختلاف فاز)

$$\varphi=f(\omega,\beta)$$



مختصات نقطه ماکزیمم

$$\boxed{\left(\frac{mX}{m_0 e}\right)_{max}=\frac{1}{2\beta\sqrt{1-\beta^2}}}$$

$$r=\frac{1}{\sqrt{1-2\beta^2}}$$

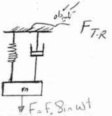
استاد جای این دو تا را باهم عوض کرده بود.

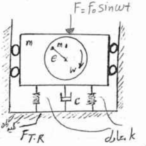
در معادله Ⓘ گذاشتم تا بالایی بدست آید.

* مقدار نیروی منتقل شده به کف یا تکیه‌گاه و جداسازی ارتعاش :

نسبت انتقال :

تعیین نیروی منتقل شده به زمین و تعیین نسبت انتقال در اثر ارتعاش اجباری اجسام (F_0 می‌تواند ثابت یا تابع ω باشد)





$F_{T.R} = kx$ در حالت غیرمیرا

(نسبت انتقال) $T.R = \dfrac{F_{TR}}{F_0}$

نیرویی که به کل انتقال داده می‌شود

$$F_{T.R} = kx + c\dot{x} = kX\sin(\omega t-\varphi) + cX\omega\cos(\omega t-\varphi)$$

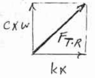
دامنه بار حرکت

حداکثر نیروی منتقل شده به تکیه‌گاه (دامنه بار منتقل شده)

$$F_{T.R} = \sqrt{(k^2X^2)+(c^2\omega^2X^2)} = X\sqrt{k^2+c^2\omega^2}$$

$$\begin{cases} kx = kX\sin(\omega t-\varphi) \\ c\dot{x} = cX\omega\cos(\omega t-\varphi) \end{cases}$$

$$x = X\sin\omega t \longrightarrow \dot{x} = X\omega\cos\omega t$$



$$A = \alpha\sin\omega t + \beta\cos\omega t$$

$$A_{max} = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

$$T.R = \frac{F_{T.R}}{F_0 \text{ یا } m_0 e\omega^2}$$

نوع I — نوع II

مثلاً : سیستم نوع I

$$X = \frac{F_0}{k\sqrt{(1-r^2)^2+(2\beta r)^2}}$$

$$\frac{mX}{m_0 e} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\beta r)^2}}$$

$$X = \frac{m_0 e\omega^2}{k\sqrt{(1-r^2)^2+(2\beta r)^2}}$$

* برای سیستم نوع I و II داریم:

$$T.R = \frac{\sqrt{k^2X^2 + c^2w^2X^2}}{X.k\sqrt{(1-r^2)^2+(2\beta r)^2}}$$

$$T.R = \frac{\sqrt{k^2+c^2w^2}}{k\sqrt{(1-r^2)^2+(2\beta r)^2}} = \frac{\sqrt{1+\frac{c^2w^2}{k^2}}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\beta r)^2}}$$

**

$$\boxed{T.R = \frac{\sqrt{1+(2\beta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\beta r)^2}}}$$

نسبت انتقال در سیستم اجباری میرا
(نوع I و نوع II)

(اثبات تمرین کلاسی)

(ارتعاش F. ناجهش و ارتعاش F_0 ثابت)

$$\frac{c}{c_{cr}} = \beta \rightarrow k^2 = m^2w_n^4 \rightarrow c_{cr} = 2mw_n \Rightarrow c_{cr} = 2\sqrt{mk}$$

$$\frac{cw}{k} = \frac{c_{cr}\beta w}{m.w_n^2} \Rightarrow \frac{cw}{k} = \frac{2m.w_n.\beta.w}{m.w_n^2} = 2\beta r \Rightarrow \boxed{\frac{cw}{k} = 2\beta r}$$

نسبت جداسازی

$$\boxed{1 - T.R = I.R} \rightarrow \text{Isolation Ratio}$$

$r=1$

$$T.R = \frac{\sqrt{1+4\beta^2}}{2\beta} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d(T.R)^2}{dr}=0$$

$$2\times 2\beta\times 2\beta r\left[(1-r^2)^2+(2\beta r)^2\right]-(1+4\beta^2r^2)\left[2(-2r)(1-r^2)+2\times 2\beta\times 2\beta r\right]=0$$

$$4\beta^2\left[1+r^4-2r^2+4\beta^2r^2\right]-\left[-2+2r^2+4\beta^2-8\beta^2r^2+8\beta^2r^4+16\beta^4r^2\right]=0$$

$$\Rightarrow 4\beta^2+4\beta^2r^4-8\beta^2r^2+16\beta^4r^2+2-2r^2-4\beta^2+8\beta^2r^2-8\beta^2r^4-16\beta^4r^2=0$$

$$\Rightarrow -4\beta^2r^4+2-2r^2=0$$

$$-2\beta^2r^4-r^2+1=0 \longrightarrow r^2=\frac{1\pm\sqrt{1+8\beta^2}}{-4\beta^2}$$

$$r^2=\frac{+\sqrt{1+8\beta^2}-1}{4\beta^2} \Longrightarrow r=\frac{\sqrt{\sqrt{1+8\beta^2}-1}}{2\beta}$$

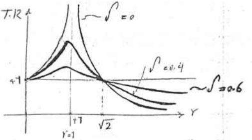
$$\boxed{W=W_n\cdot\frac{\sqrt{\sqrt{1+8\beta^2}-1}}{2\beta}}$$

فرکانس حداکثر نیروی منتقله

$$\beta=0 \longrightarrow \begin{cases} r\to 1 \\ T.R\to\infty \\ X\to\infty \end{cases}$$

دامنه و نیرو هردو بینهایت می‌شوند

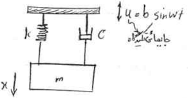
$$\beta=1 \longrightarrow W=W_n\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}W_n<W_n$$



نکته: به ازای تمام دمپرها اگر فرکانس بیشتر از $\sqrt{2}W_n$ شود نسبت انتقال از یک کمتر می‌شود. $(T.R<1)$

نکته: حداکثر دامنه قبل از رزونانس رخ می‌دهد.

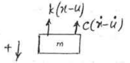
حرکت ارتعاشی اجباری - میرا در اثر حرکت هارمونیک تکیه گاه :



کاربرد در ماشینهای صنعتی و خودرو.
با ارتعاش تکیه گاه وارد می شود.

$$\sum F = m\ddot{x}$$

$$-k(x-u) - c(\dot{x}-\dot{u}) = m\ddot{x} \qquad (*)$$



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{u} + ku$$

$$u = b\sin\omega t$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = cb\omega\cos\omega t + kb\sin\omega t$$

معادله دیفرانسیل حرکت برحسب x (تغییر مکان جسم)

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{cb\omega}{m}\cos\omega t + \frac{kb}{m}\sin\omega t$$

تغییر طول فنر $Z = x - u \longrightarrow \ddot{Z} = \ddot{x} - \ddot{u} \longrightarrow \dot{Z} = \dot{x} - \dot{u}$

در معادله $* \Rightarrow -kZ - c\dot{Z} = m(\ddot{Z} + \ddot{u}) \Rightarrow m\ddot{Z} + c\dot{Z} + kZ = -m\ddot{u}$

$$u = b\sin\omega t \longrightarrow \dot{u} = b\omega\cos\omega t \longrightarrow \ddot{u} = -b\omega^2\sin\omega t$$

$$m\ddot{Z} + c\dot{Z} + kZ = mb\omega^2\sin\omega t \qquad (**)$$

معادله دیفرانسیل حرکت برحسب Z (تغییر طول فنر)

$$\ddot{Z} + \frac{c}{m}\dot{Z} + \frac{k}{m}Z = b\omega^2\sin\omega t$$

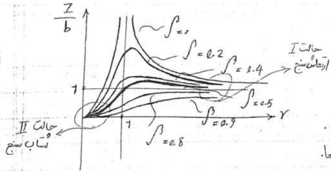
$$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m_0 e\omega^2\sin\omega t}$$ $\Longleftarrow$ معادله (**) متناسب شود با

تبدیل‌ها
$$\begin{cases} x \to Z \\ X \to Z \\ m_0 \to m \\ e \to b \end{cases}$$

$$\frac{mX}{m_0 e} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\beta r)^2}}$$

$$\boxed{\frac{mZ}{mb} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\beta r)^2}}}$$

دامنه تغییر طول فنر / دامنه بار تحریک



$$r = \frac{1}{\sqrt{1-2\beta^2}}$$ نقطه ماکزیمم

* کاربرد گراف در لرزه‌نگارهاست. یعنی ارتعاش‌سنج‌ها و شتاب‌سنج‌ها.

مطالب گفته شده در مورد لرزه‌نگارها در فصل دوم در مورد طراحی ارتعاش‌سنج و شتاب‌سنج در اینجا نیز معتبر است. به علاوه در این حالت مسئله کاملاً واقعی‌تر خواهد بود زیرا در عمل همیشه دستگاههای ارتعاش‌سنج و شتاب‌سنج دارای خاصیت دمپینگ می‌باشند چنانچه از گراف رسم شده می‌توان دریافت در rهای خیلی کوچک و rهای خیلی بزرگ تمام گراف‌های حاصل از میراکننده‌های متفاوت کاملاً نزدیک به یکدیگر عمل می‌کنند.

تمرین تحویلی: اثبات کنید که در معادلهٔ دیفرانسیل حرکت در سیستمهای ارتعاشی میرا در هنگامی که تکیه‌گاه دچار حرکت هارمونیک شود چنانچه تغییر مکان جسم مجهول باشد:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{cb\omega}{m}\cos\omega t + \frac{kb}{m}\sin\omega t$$

دارای دامنه‌ای به شکل ذیل می‌باشد.

$$T.R. = \frac{X}{b} = \frac{\sqrt{1+(2\beta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\beta r)^2}}$$

اثبات کنید در معادله دیفرانسیل حرکت در سیستمهای ارتعاشی میرا در حالتی که تکیه‌گاه دچار حرکت هارمونیک شود چنانچه تغییر مکان جسم معادل باشد

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{cbw}{m}\cos wt + \frac{kb}{m}\sin wt \quad (1)$$

دارای دامنه‌ای به شکل ذیل می‌باشد :

$$\boxed{\frac{X}{b} = \frac{\sqrt{1+(2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}}$$

معادله مشخصه : $p^2 + \frac{c}{m}p + \frac{k}{m} = 0 \implies p = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$

$$p = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}\right)i^2} = \frac{-c}{2m} \pm i\sqrt{w_n^2\left(1-\left(\frac{c}{2mw_n}\right)^2\right)}$$

$$p = \frac{-c}{2m} \pm i\,w_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad , \quad w = w_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\Rightarrow p = \frac{-c}{2m} \pm i w$$

بنابراین معادله پاسخ حرکت بصورت زیر نمایش داده می‌شود :

$$x = \underbrace{e^{-\frac{c}{2m}t}\left(A\cos wt + B\sin wt\right)}_{\text{پاسخ عمومی (گذرا)}} + \underbrace{A'\cos wt + B'\sin wt}_{\text{پاسخ یکنواخت یا دائمی (خصوصی)}} \quad (2)$$

می توان بدلیل میرا شدن از پاسخ گذرا صرف نظر کرد چون با گذشت زمان پاسخ گذرا از بین می‌رود و البته این زمانی که $\frac{c}{2m}t > 5$ شود صادق است. و فقط پاسخ یکنواخت را در نظر گرفت :

$$x = A'\cos wt + B'\sin wt \quad (3)$$

شرط درستی رابطه (3) اینست که در معادله (1) صدق کند بنابراین داریم :

$$\dot{x} = -A' w \sin wt + B' w \cos wt$$

$$\ddot{x} = -A' w^2 \cos wt - B' w^2 \sin wt$$

در معادله (1) قرار می‌دهیم $\Rightarrow$

$$-A'w^2 \cos wt - B'w^2 \sin wt - \frac{c}{m} A' w \sin wt + \frac{c}{m} B' w \cos wt + \frac{k}{m} A' \cos wt + \frac{k}{m} B' \sin wt = \frac{cbw}{m} \cos wt + \frac{kb}{m} \sin wt.$$

شرط تساوی آن است که ضرایب $\sin wt$ و $\cos wt$ در طرفین باهم برابر باشد :

$$\begin{cases} -A'w^2 + B'\dfrac{cw}{m} + A'\dfrac{k}{m} = \dfrac{cbw}{m} \\[2ex] -B'w^2 - A'\dfrac{cw}{m} + B'\dfrac{k}{m} = \dfrac{kb}{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A'(w_n^2 - w^2) + B'\left(\dfrac{cw}{m}\right) = \dfrac{cbw}{m} \\[2ex] B'(w_n^2 - w^2) + A'\left(\dfrac{-cw}{m}\right) = \dfrac{kb}{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B' = \dfrac{b\left[w_n^2(w_n^2 - w^2) + \left(\frac{cw}{m}\right)^2\right]}{(w_n^2 - w^2)^2 + \left(\frac{cw}{m}\right)^2} \\[4ex] A' = \dfrac{-bcw^3}{m\left[(w_n^2 - w^2)^2 + \left(\frac{cw}{m}\right)^2\right]} \end{cases}$$

$$X = \sqrt{A'^2 + B'^2} = \sqrt{\frac{b^2(cw^3)^2}{m^2\left[(w_n^2 - w^2)^2 + \left(\frac{cw}{m}\right)^2\right]^2} + \frac{b^2\left[w_n^2(w_n^2 - w^2) + \left(\frac{cw}{m}\right)^2\right]^2}{\left[(w_n^2 - w^2)^2 + \left(\frac{cw}{m}\right)^2\right]^2}}$$

$$X=\sqrt{\frac{b^2(c\omega^3)^2+b^2m^2\left[\omega_n^2(\omega_n^2-\omega^2)+\left(\frac{c\omega}{m}\right)^2\right]^2}{m^2\left[(\omega_n^2-\omega^2)^2+\left(\frac{c\omega}{m}\right)^2\right]^2}}$$

$$X=\sqrt{\frac{b^2\cancel{m^2}\left[\left(\frac{c\omega^3}{m}\right)^2+\left[\omega_n^2(\omega_n^2-\omega^2)+\left(\frac{c\omega}{m}\right)^2\right]^2\right]}{\cancel{m^2}\left[(\omega_n^2-\omega^2)^2+\left(\frac{c\omega}{m}\right)^2\right]^2}}$$

$$\frac{X}{b}=\sqrt{\frac{\left(\frac{c\omega^3}{m}\right)^2+\left[\omega_n^4\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)+\omega_n^4\left(\frac{c\omega}{m\omega_n^2}\right)^2\right]^2}{\left[\omega_n^4\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\omega_n^4\left(\frac{c\omega}{m\omega_n^2}\right)^2\right]^2}}$$

$$\frac{X}{b}=\sqrt{\frac{\cancel{\omega_n^8}\left[\left(\frac{c\omega^3}{m\omega_n^4}\right)^2+\left(\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)+\left(\frac{c\omega}{m\omega_n^2}\right)^2\right)^2\right]}{\cancel{\omega_n^8}\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(\frac{c\omega}{m\omega_n^2}\right)^2\right]^2}}$$

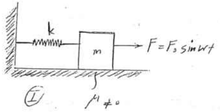
$$\frac{X}{b}=\sqrt{\frac{r^4(2\zeta r)^2+\left[(1-r^2)+(2\zeta r)^2\right]^2}{\left[(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2\right]^2}}$$

$$\frac{X}{b}=\sqrt{\frac{\left(1+(2\zeta r)^2\right)\left[(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2\right]}{\left[(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2\right]^{\cancel{2}}}}$$

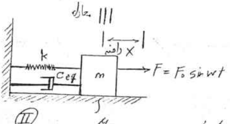
و به این ترتیب دامنه بدست می‌آید:

$$\Longrightarrow\ \boxed{\frac{X}{b}=\sqrt{\frac{1+(2\zeta r)^2}{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}}$$

حرکت ارتعاش اجباری میرا در میراکننده های خشک (کولمب) :



چون این مسئله یک حرکت غیرخطی دارد بایستی برای حل از یک روش معادل سازی استفاده کرد .



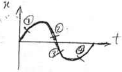
* میزان جذب انرژی در یک سیکل کامل

در هر دو سیستم I و II یکسان است بنابراین می توان دو سیستم را معادل کرده و یک Ceq بدست آورد و مسئله را مانند دمپر لزج حل کرد

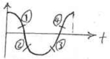
$$U_{(I)} = \oint f\,dx = 4\mu N X$$

در یک سیکل کامل تبدیل به گرما می شود.

$f = \mu . N$ نیروی اصطکاک



چون در هر سیکل ۴ ربع سیکل داریم بنابراین : $U = 4\mu N X$



$$U_{(II)} = \oint f . dx = \oint c\dot{x} . dx = \int_0^T c\dot{x}^2 dt = \int_0^{\frac{2\pi}{w}} cX^2 w^2 \cos^2(wt-\varphi) dt$$

چون نیروی اصطکاک صفر است $f = c\dot{x}$, $T = \frac{2\pi}{w}$

$$x = X \sin(wt-\varphi) \Rightarrow \dot{x} = Xw\cos(wt-\varphi) \quad , \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

ادامه حل انتگرال $\Rightarrow$

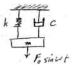
$$U_{(II)} = cX^2 w^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2wt - 2\varphi)}{4w} \right)_0^{\frac{2\pi}{w}} = cX^2 w\pi$$

$$U_{II} = C X^2 \omega^2 \cdot \frac{\pi}{\omega} = C X^2 \pi \omega$$

$$U_I = U_{II} \Longrightarrow 4\mu N X = C_{eq} X^2 \pi \omega \longrightarrow \boxed{C_{eq} = \frac{4\mu N}{\pi X \omega}}$$

$$\frac{X}{F_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

در ارتعاش اجباری لزج داشتیم ⇐



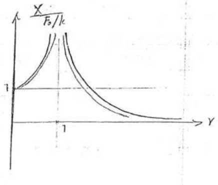
$$2\zeta r = 2\,\frac{C_{eq}}{C_{cr}} \cdot \frac{\omega}{\omega_n} = 2 \cdot \frac{4\mu N}{\pi X \omega} \cdot \frac{1}{\underbrace{C_{cr}}_{2m\omega_n}} \cdot \frac{\omega}{\omega_n}$$

$$k$$

$$\Longrightarrow \boxed{2\zeta r = \frac{4\mu N}{\pi k X}}$$

$$\frac{X^2}{F_0^2/k^2} = \frac{1}{(1-r^2)^2 + \left(\frac{4\mu N}{\pi k X}\right)^2} \Longrightarrow X^2 = \frac{(F_0/k)^2 - \left(\frac{4\mu N}{\pi k}\right)^2}{(1-r^2)^2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{X}{F_0/k} = \sqrt{\frac{1-\left(\frac{4\mu N}{\pi F_0}\right)^2}{(1-r^2)^2}}}$$

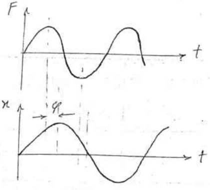


اگر $\left(\frac{4\mu N}{\pi F_0}\right)^2 < 1$ شود می‌توان سیستم ارتعاشی میرای کولمب را با میرایی لزج مدل کرد در غیر اینصورت نمی‌توان مدل کرد.

$$\boxed{\tan\varphi = \frac{\frac{4\mu N}{\pi F_0}}{\sqrt{1-\left(\frac{4\mu N}{\pi F_0}\right)^2}}}$$

φ میزان عقب افتادگی تغییر مکان نسبت به نیرو

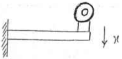
$$\begin{cases} x = X\sin(\omega t-\varphi) \\ F = F_0 \sin\omega t \end{cases}$$



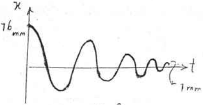
مسئله ۱: یک موتور الکتریکی به جرم 25 kg بر روی یک تیر یک سر گیردار قرار دارد. این موتور جرم نابالانس است.

اگر موتور به اندازه 16 mm جابجا شود ارتعاشات تیر در طی ۴ سیکل به یک میلیمتر می رسد.

اگر موتور در حال کارکردن باشد مقدار کمیت بدون بعد $\frac{mX}{m_0 e}$ را برای حالت تشدید بیابید.



$$\frac{mX}{m_0 e} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$$



ارتعاش میرا (غیراجباری)

در زمان تشدید: فرکانس سیستم با فرکانس طبیعی سیستم برابر است. $\omega=\omega_n$

$$r=1 \Rightarrow \frac{mX}{m_0 e} = \frac{1}{2\zeta}$$

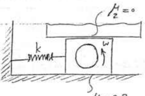
$$\delta = \frac{1}{n}\ln\frac{X_0}{X_n} = \frac{1}{4}\ln\frac{16}{1} = 0.69$$

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} \Rightarrow \zeta = 0.109$$ نسبت میرایی

$$\boxed{\frac{mX}{m_0 e} = 4.58}$$

نکته: در مسائل ارتعاش اجباری - میرا باید ابتدا یک حالت ارتعاش میرا (غیراجباری) را در نظر گرفت تا بتوان خاصیت damping سیستم را بدست آورد سپس به حالت ارتعاش اجباری - میرا حل کرد مثلاً در مسئله قبل ابتدا موتور را خاموش در نظر گرفته و ارتعاش تیر را بصورت میرا (غیراجباری) با نمودار $x-t$ نشان می‌دهیم.

مسئله ۲: وقتی $\mu = 0$ باشد می‌توان سیستم را به درون یک ریل قرار داد (یا روغن) تا اصطکاک صفر شود.



اگر $\mu_2 \neq 0$ بود $\Leftarrow$ $\mu = \mu_1 + \mu_2$ کل

در حالت w_1 و w_2 نیرو را محاسبه و تغییر مکان یا دامنه (X) را بدست آورید.

$k = 1800 \ N/m$

$m_0 = \frac{15}{4} kg$

$e = 2 \ mm$

$m = 15 kg$

$w_1 = 10 \ rad/s$

$w_2 = 100 \ rad/s$

$w_1 = 10 \ rad/s$

$F_0 = m_0 e w^2 = \frac{15}{4} \times 0.002 \times 10^2$

$F_0 = 0.75 \ N$

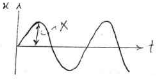
مقدار نیروی لازم برای راه‌اندازی سیستم $\left(\mu N = 0.2 \times 10 \times 15 = 30 \ N \right)$

بنابراین $F_0 < \mu N$ و سیستم بدون حرکت باقی می‌ماند. $(X = 0)$

$w_2 = 100 \ rad/s \Rightarrow F_0 = 75 N > 30 N$

بنابراین سیستم حرکت می‌کند و دامنه را می‌توان بدست آورد:

$$\left(\frac{X}{F_0/k}\right)^2 = \frac{1 - \left(\frac{4 \mu N}{\pi F_0}\right)^2}{(1 - r^2)^2}$$



$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} = \frac{1800}{15} = 120 \quad \left(\frac{rad}{s}\right)^2$$

$$r^2 = \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 = \frac{10^4}{120}$$

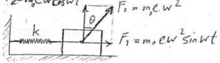
$$\left(\frac{X}{75/1800}\right)^2 = \frac{1-\left(\frac{4\times 0.2\times 15\times 10}{75\pi}\right)^2}{\left(1-\frac{10^4}{120}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{X = 0.44\ mm}$$

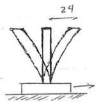
نکته: درباره این مسأله می‌توان با فرضیات جدید مسأله جدیدی را حل کرد و معادلات جدیدی برای X بدست آورد همچنین می‌توان مسائل جدیدی را مطرح کرد که در زیر عنوان می‌شود:

۱- فرض کنیم تمام وزن به کف وارد می‌شود و هیچ وزنی را قطعه بالایی تحمل نمی‌کند بنابراین $\mu_2 = 0$ بوده و باید یک معادله جدید نوشت و X را بدست آورد چون: ($U \neq 4\mu N X$ انرژی پتانسیل)

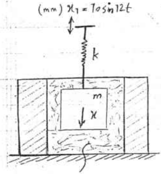
۲- فرض کنیم بخشی از وزن به کف وارد شده مثلاً $\frac{N}{2}$ و بخشی توسط قطعه بالایی تحمل می‌شود در اینصورت $\mu_2 \neq 0$ بوده و $U \neq 4\mu N X$ است و معادله جدیدی باید بدست آورد برای محاسبه دامنه (X).

۳- فرض شود یا اینکه مسئله بصورتی باشد که قطعه بالایی وجود نداشته باشد بنابراین یک نیروی گریز از مرکز F_0 داریم که به دو مؤلفه تجزیه می‌شود در یک نیم سیکل $(N + m_0 e\omega^2 \cos\omega t)$ می‌شود و در نیم سیکل دیگر $(N - m_0 e\omega^2 \cos\omega t)$ می‌شود.





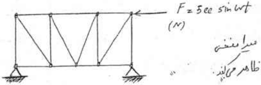
مسئله 3: در ارتعاشات آزاد یک تیر یکسر گیردار مشاهده شده است که دامنه در نوک تیر از 20 mm به نصف آن در طی 10 سیکل کاهش می‌یابد.
اگر پایه تحت تأثیر یک ارتعاش هارمونیک با دامنه 1 mm (10^{-3} m) قرار گیرد دامنه قابل انتظار در حالت تشدید را بیابید.



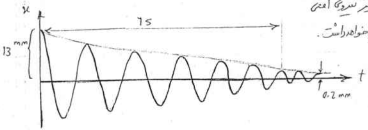
مایع لزج مانند روغن

مسئله 4: یک پیستون به جرم 4 kg با اصطکاک لزج درون یک استوانه می‌لغزد. انتهای بالایی یک فنر کشسان با یک حرکت هارمونیک برحسب میلیمتر حرکت داده می‌شود.
اگر ثابت فنر 400 N/m و ثابت میرایی $20\ \frac{N.s}{m}$ فرض شود، بیشترین دامنه پیستون را محاسبه کنید.

مسئله 5:



یک قاب سبک تحت تأثیر ارتعاشات آزاد منحنی دامنه-زمان نشان داده شده را از خود ظاهر می‌کند.
می‌دانیم که قاب تحت تأثیر نیروی افقی 500 N به اندازه 2 mm خمش خواهد داشت.



اگر $w = 960\ rpm$ باشد و نیروی هارمونیک $F = 500 \sin wt$ برحسب نیوتن به سیستم وارد شود دامنه حرکت دستگاه چقدر است ؟

در این مسئله ابتدا فرض کنید که میرای دستگاه معادل یک سیستم لزج است و بار دوم میرای دستگاه (مقادیر داده شده) معادل یک سیستم میرای خشک است.

$X = ? \longrightarrow$ میرای لزج

$X = ? \longrightarrow$ میرای خشک

جواب مسأله 3 :

ارتعاش میرای غیراجباری $\delta = \frac{1}{10} \ln \frac{20}{10} = \frac{1}{10} \ln 2 = 0.069$

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} = 0.011$$

$$\frac{X}{b} = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

در حالت تشدید $r = 1 \implies \frac{X}{b} = \frac{\sqrt{1 + 4\zeta^2}}{2\zeta}$

$$\implies X = 1 \times \frac{\sqrt{1.022}}{0.022} = 46\ mm$$

$\boxed{\text{جواب مسأله 5 :}}$

$$k = \frac{500}{0.002} = 25\times10^4 \ \frac{N}{m}$$

$$\omega = 960 \times \frac{2\pi}{60} = 100.5 \ \frac{rad}{s} \quad , \quad \delta = \frac{1}{8}\ln\frac{13}{0.2} = 0.52$$

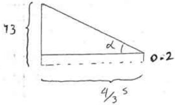
$$\beta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2+\delta^2}} = 0.082 \implies f = 6\ Hz \implies T_d = \frac{1}{6}\ s$$

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = 37.7\ \frac{rad}{s} \implies \omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\beta^2}} = 37.8\ \frac{rad}{s}$$

$$X = \frac{F_0}{k\sqrt{(1-r^2)^2+(2\beta r)^2}} \implies \boxed{X = 0.32\ mm}$$

اگر میرایی از نوع کولمب باشد :

شیب خط کاهش $\tan\alpha = \frac{2\mu N\omega_n}{\pi k} \implies \frac{13-0.2}{4/3} = 9.6$



6 سیکل $\quad$ 1 s

8 سیکل $\quad \frac{8}{6}$ s

$$\frac{4\mu N}{k} = 1.6 \implies \frac{4\mu g}{\omega_n^2} = 1.6$$

مقدار کاهش دامنه در هر سیکل $\quad X_n - X_{n+1} = \frac{4\mu N}{k} \implies \frac{13-0.2}{8} = 1.6 = \frac{4\mu N}{k}$

$$\begin{cases} \dfrac{4\mu N}{k} = 1.6 \\ \dfrac{2\mu N w_n}{\pi k} = 9.6 \end{cases} \Rightarrow \frac{2\pi}{w_n} = \frac{1.6}{9.6} \Rightarrow \boxed{w_n = 37.7 \ \frac{rad}{s}}$$

$$\frac{4\mu N}{k} = 1.6 = \frac{4\mu g}{w_n^2} = 1.6$$

$$\Rightarrow \mu = 0.058 \ , \ k = 25\times10^4 \ \frac{N}{m} \ , \ N = 1724 N$$

$$\frac{X}{F_0/k} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{4\mu N}{\pi F_0}\right)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2}} \Rightarrow \underline{X = 0.317 \ mm}$$

$\boxed{\text{جواب مسئله 4:}}$

$$-c\dot{x} - k(x - x_1) = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = kx_1 = 10\,k\sin 12t$$

$$\zeta = \frac{c}{2mw_n} = \frac{20}{2\times4\times10} = 0.25$$

$$w_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{420}{4}} = 10 \ \frac{rad}{s} \quad , \quad w = 12 \ \frac{rad}{s}$$

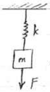
$$\frac{X}{b} = \frac{\sqrt{1+(2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}} \Rightarrow \boxed{X = 17.6 \ mm}$$

$$tg\,\varphi = \frac{2\zeta r}{1-r^2} \Rightarrow 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi \quad \varphi = 53.7^{\circ}$$

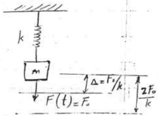
« فصل پنجم – انتگرال کانولوشن در ارتعاشات »

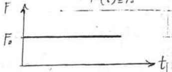
واستفاده از تبدیل لاپلاس

تابع پله‌ای مستطیلی :



F اعمالی است.





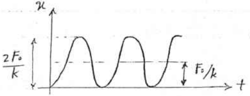
« تابع پله‌ای مستطیلی »

$$m\ddot{x} + kx = F_0$$

$$x = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t + \frac{F_0}{k}$$

شرایط اولیه سکون
$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{F_0}{k} \\ B = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{F_0}{k}\left(1 - \cos\omega_n t\right)$$ معادله پاسخ



Δ تغییر شکل استاتیکی $= F_0/k$

$$X_{max} = \frac{2F_0}{k}$$

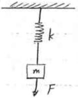
نکته : اگر به جرم یک بار ناگهانی وارد شود تغییر شکل دینامیکی دو برابر تغییر شکل استاتیکی می‌باشد.

شرایط اولیه $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = x_0 - \dfrac{F_0}{k} \\ B = \dfrac{v_0}{w_n} \end{cases}$

$$x = \left(x_0 - \frac{F_0}{k}\right)\cos w_n t + \frac{v_0}{w_n}\sin w_n t + \frac{F_0}{k}$$

معادله پاسخ $\boxed{x = \sqrt{\left(x_0^2 + \dfrac{v_0^2}{w_n^2}\right)} \sin(w_n t + \varphi) + \dfrac{F_0}{k}(1 - \cos w_n t)}$

تابع نیروی افزاینده خطی :

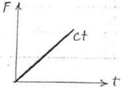


$F = ct \longrightarrow$ ضریب زاویه بار

$$m\ddot{x} + kx = ct$$

$$x = A\cos w_n t + B\sin w_n t + \frac{ct}{k}$$

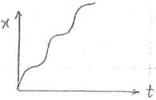
که این پاسخ حرکت و نیروی F دائم می باشد.



ساده ترین حالت $\Rightarrow$ شرایط اولیه سکون $\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \dfrac{-C}{k w_n} \end{cases}$

« تابع نیروی افزاینده خطی »

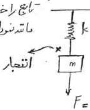
$$x = \frac{-C}{k w_n}\sin w_n t + \frac{ct}{k}$$



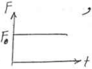
$\boxed{x = \dfrac{C}{k w_n}(w_n t - \sin w_n t)}$ معادله پاسخ برحسب زمان

تابع کاهنده نمایی : (تابع انفجاری)

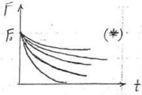
اگر در نزدیکی جرم یک انفجار رخ دهد رفتار همین تابع را خواهد داشت و مانند نمودار (*) است.



$a \to 0$, $F \to F_0$ $\longrightarrow$ تابع پله‌ای مستطیلی بدست می‌آید



$a \to \infty$ $\longrightarrow$ تابع ضربه‌ای



$F = F_0 e^{-at}$

تابع کاهنده نمایی

$$m\ddot{x} + kx = F_0 e^{-at}$$

$$x = A\cos \omega_n t + B\sin \omega_n t + \frac{F_0 e^{-at}}{ma^2 + k}$$

شرایط اولیه
$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = A + \dfrac{F_0}{ma^2+k} \longrightarrow A = \dfrac{-F_0}{ma^2+k} = \dfrac{-F_0}{k\left(\frac{a^2}{\omega_n^2}+1\right)} \\ 0 = B\omega_n - \dfrac{aF_0}{ma^2+k} \longrightarrow B = \dfrac{aF_0}{\omega_n(ma^2+k)} = \dfrac{aF_0}{\omega_n k\left(\frac{a^2}{\omega_n^2}+1\right)} \end{cases}$$

$$x = \frac{F_0}{k\left(1+\frac{a^2}{\omega_n^2}\right)}\left[\frac{a}{\omega_n}\sin \omega_n t - \cos \omega_n t + e^{-at}\right]$$

$at > 5 \Rightarrow e^{-at} \ll$ تابع صرف‌نظر کردنی است.

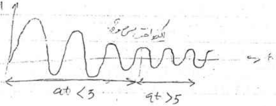
$$x = \frac{F_0}{k\left(1+\frac{a^2}{\omega_n^2}\right)}\left(\frac{a}{\omega_n}\sin \omega_n t - \cos \omega_n t\right)$$

$$x = \frac{F_0}{k\left(1+\frac{a^2}{W_n^2}\right)}\left(\sqrt{1+\frac{a^2}{W_n^2}}\ \sin\left(W_n t-\varphi\right)\right)$$

$$x = \frac{F_0}{k\sqrt{1+\frac{a^2}{W_n^2}}}\ \sin\left(W_n t-\varphi\right)$$

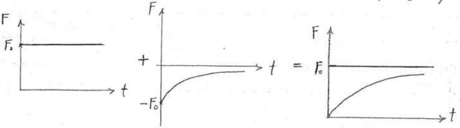
$$\boxed{\begin{array}{l} y = a\sin t + b\cos t \\ y = \sqrt{a^2+b^2}\ \sin(t-\varphi) \end{array}}$$

$$x = X\ \sin\left(W_n t-\varphi\right)$$

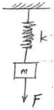


ترکیب توابع نیرو :

$$F = F_0\left(1-e^{-at}\right)$$



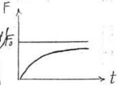
بدست آورید <=
پاسخ مسئله

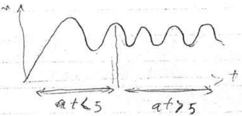


پاسخ مسئله
با شرایط سکون

$$\begin{cases} x(0)=0 \\ \dot{x}(0)=0 \end{cases}$$

$$x = \frac{F_0}{k} - \frac{F_0}{k\left(1+\frac{a^2}{\omega_n^2}\right)}\left[\frac{a}{\omega_n}\left(\frac{a}{\omega_n}\cos\omega_n t + \sin\omega_n t\right) + e^{-at}\right]$$

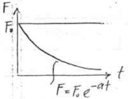




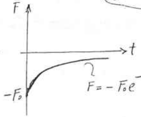
ترکیب دو تابع کاهنده نمایی : (دو تابع انفجاری)

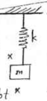
$$m\ddot{x} + kx = F_0\left(e^{-at} - e^{-bt}\right)$$

معادله مرتبه خصوصی $x_p = E e^{Ft} + G e^{Ht}$



+

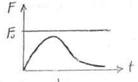




$F = F_0 e^{-at}$ ×

$F = F_0 e^{-bt}$ ×

=



$$F = F_0\left(e^{-at} - e^{-bt}\right)$$

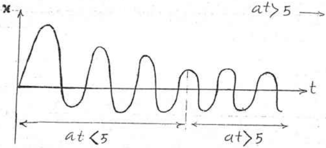
$$x = A\cos w_n t + B\sin w_n t + \frac{F_0}{k}\left[\frac{e^{-at}}{1+\frac{a^2}{w_n^2}} - \frac{e^{-bt}}{1+\frac{b^2}{w_n^2}}\right]$$

شرایط اولیه سکون $\begin{cases} x(0)=0 \\ \dot{x}(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{-F_0}{k\left(1+\frac{a^2}{w_n^2}\right)} + \dfrac{F_0}{k\left(1+\frac{b^2}{w_n^2}\right)} \\ B = \dfrac{aF_0}{kw_n\left(1+\frac{a^2}{w_n^2}\right)} - \dfrac{bF_0}{kw_n\left(1+\frac{b^2}{w_n^2}\right)} \end{cases}$

$$x = \frac{F_0}{k\left(1+\frac{a^2}{w_n^2}\right)}\left[\frac{a}{w_n}\sin w_n t - \cos w_n t + e^{-at}\right] -$$

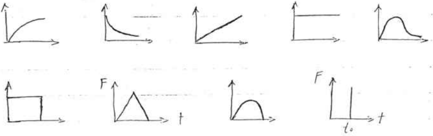
$$\frac{F_0}{k\left(1+\frac{b^2}{w_n^2}\right)}\left[\frac{b}{w_n}\sin w_n t - \cos w_n t + e^{-bt}\right]$$

$at > 5 \longrightarrow$ معادله پاسخ پایاست



توجه: نمودارهای بدست آمده در هر یک از توابع پله‌ای، کاهنده نمائی و ترکیب توابع به کمک نرم‌افزار Matlab یا Excel رسم کنید.

پاسخ ارتعاشی در حالت بار اختیاری:
- حل مسئله به روش معمول (معادله نیروی تحریک بصورت دائمی است.)
- 〃 〃 〃 تبدیل لاپلاس (بارهای غیر دائم)
- 〃 〃 〃 انتگرال کانولوشن



استفاده از روش تبدیل لاپلاس در حل مسائل ارتعاشات :

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = F(s) \qquad t \rightleftarrows s$$

مثال: $f(t) = e^{-at}$

$$\mathcal{L}(e^{-at}) = \int_0^\infty e^{-at} \cdot e^{-st}\,dt = \int_0^\infty e^{-(s+a)t}\,dt = \left[\frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)}\right]_0^\infty$$

$$\boxed{\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{s+a}}$$

$$\mathcal{L}(\cos at) = \int_0^\infty \cos at \cdot e^{-st}\,dt = \left[\frac{e^{-st}}{s^2+a^2}\left(-s\cos at + a\sin at\right)\right]_0^\infty$$

$$\boxed{\mathcal{L}(\cos at) = \frac{s}{s^2+a^2}}$$

$$\mathcal{L}(\sin at) = \int_0^\infty \sin at \cdot e^{-st}\,dt = \left[\frac{e^{-st}}{s^2+a^2}\left(-a\cos at - s\sin at\right)\right]_0^\infty$$

$$\boxed{\mathcal{L}(\sin at) = \frac{a}{s^2+a^2}}$$

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
B	B/s	$e^{-at}\sin \omega t$	$\omega/((s+a)^2+\omega^2)$
t	$1/s^2$	$\cos\omega t \cdot e^{-at}$	$(s+a)/((s+a)^2+\omega^2)$
e^{-at}	$1/(s+a)$	$t\cdot e^{-at}$	$1/(s+a)^2$
$\sin at$	$a/(s^2+a^2)$	$t\cdot \sin at$	$2as/(s^2+a^2)^2$
$\cos at$	$s/(s^2+a^2)$	$t\cdot\cos at$	$(s^2-a^2)/(s^2+a^2)^2$

$f(t)=x$	$F(s)$
$f'(t)=\dot{x}$	$sF(s)-f(0)$
$f''(t)=\ddot{x}$	$s^2F(s)-\underbrace{sf(0)}_{\text{مکان اولیه}}-\underbrace{f'(0)}_{\text{سرعت اولیه}}$
$af(t)+bg(t)$	$aF(s)+bG(s)$

$X(s)$ تبدیل یافته پاسخ می‌باشد.

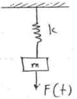
$$m\ddot{x}+(\dot{x}+kx)=f(t) \Longleftarrow$$ از طرفین لاپلاس می‌گیریم

$$m\left[s^2X(s)-s\,x(0)-\dot{x}(0)\right]+c\left[sX(s)-x(0)\right]+kX(s)=F(s)$$

$$X(s)=\frac{F(s)}{ms^2+cs+k}+\frac{(ms+c)\,x(0)+m\,\dot{x}(0)}{ms^2+cs+k} \Longleftarrow$$ از طرفین لاپلاس معکوس می‌گیریم

$x(t)=$

مثال : با استفاده از تبدیل لاپلاس پاسخ زمانی سیستم را بدست آورید.



شرایط مرزی
$$\begin{cases} x(0) = 0.1 \\ \dot{x}(0) = 8 \end{cases}$$

$$F(t) = F_0 \cos wt = 4\cos 60t$$

$$SI \begin{cases} m = 0.2\ kg \\ k = 500\ N/m \\ F_0 = 4\ N \\ w = 60\ \frac{rad}{s} \end{cases}$$

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \sin wt$$

$$x = \underbrace{A\cos w_n t + B\sin w_n t}_{\text{پاسخ عمومی - گذرا}} + \underbrace{C\cos wt + D\sin wt}_{\text{پاسخ خصوصی - یکنواخت یا دائم}}$$

از طرفین لاپلاس می‌گیریم :

$$\mathcal{L}(m\ddot{x} + kx) = \mathcal{L}(F_0 \cos wt)$$

$$m\left[s^2 X(s) - s\,x(0) - \dot{x}(0)\right] + k\left[X(s)\right] = F_0 \frac{s}{s^2 + w^2}$$

$$0.2\left[s^2 X(s) - 0.1s - 8\right] + 500\,X(s) = \frac{4s}{s^2 + 60^2}$$

$$X(s) = \frac{0.02s^3 + 1.6s^2 + 76s + 5760}{(0.2s^2 + 500)(s^2 + 60^2)}$$

$$X(s) = \frac{As + B}{0.2s^2 + 500} + \frac{Cs + D}{s^2 + 60^2}$$

X در میدان s و x در میدان زمان (t) تعریف می‌شود.

از حل دستگاه چهار معادله و چهار مجهول مقادیر ذیل بدست می آید:

$$\begin{cases} A = 0.02363 \\ B = 1.6 \\ C = -0.01818 \\ D = 0 \end{cases}$$

$$X(s) = \frac{0.02363\, s}{0.2\, s^2 + 500} + \frac{1.6}{0.2 s^2 + 500} - \frac{0.01818\, s}{s^2 + 60^2}$$

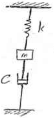
$$X(s) = \frac{(0.02363/0.2)\, s}{s^2 + 50^2} + \frac{8}{s^2 + 50^2} - \frac{0.01818\, s}{s^2 + 60^2}$$

از طرفین معادله فوق لاپلاس معکوس می گیریم:

$$\boxed{x(t) = \underbrace{0.1182 \cos 50t + 0.16 \sin 50t}_{\text{پاسخ گذرا}} - \underbrace{0.01818 \cos 60t}_{\text{پاسخ یکنواخت}}}$$

پاسخ کلی اثر هر دو فرکانس طبیعی و تحریک می باشد. از روی فرکانس ها می توان پاسخ گذرا و یکنواخت را تشخیص داد.

مسئله: سیستم زیر در مسیر افقی تحریک شده و پاسخ زمانی آن را تعیین کنید.



$$\begin{cases} m = 1 \\ k = 10^4 \\ C = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 0 \\ x(0) = 2.5 \ (in) \\ \dot{x}(0) = 40 \ (in/s) \end{cases}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$\mathcal{L}(m\ddot{x} + c\dot{x} + kx) = 0$$

$$m\left[s^2 X(s) - s\, x(0) - \dot{x}(0)\right] + C\left[s X(s) - x(0)\right] + k X(s) = 0$$

$$1\left[s^2X(s) - 0.5s - 40\right] + 100\left[sX(s) - 0.5\right] + 10^4 X(s) = 0$$

$$X(s) = \frac{0.5s + 90}{s^2 + 100s + 10^4}$$

$$X(s) = \frac{0.5\,s}{s^2 + 100s + 10^4} + \frac{90}{s^2 + 100s + 10^4}$$

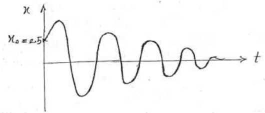
$$s^2 + 100s + 10^4 = (s+50)^2 + 86.6^2$$

$$90 - 25 = 65$$

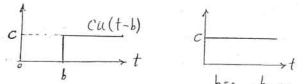
$$X(s) = \frac{1}{2}\,\frac{s+50}{(s+50)^2 + 86.6^2} + \frac{65 \to \frac{3}{4}\times 86.6}{(s+50)^2 + 86.6^2}$$

از طرفین لاپلاس معکوس می‌گیریم:

$$\boxed{x(t) = e^{-50t}\left(0.5\cos 86.6\,t + 0.75\sin 86.6\,t\right)}$$



: Step Function تابع



$b=0 \quad , b \to 0$

$u(t-b) = 0 \quad \text{if} \quad t<b$

$u(t-b) = 1 \quad \text{if} \quad t \geq b$

$m\ddot{x} + kx = cu(t-b)$

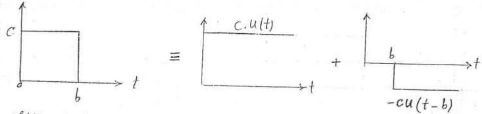
$$\mathcal{L}\left[cu(t-b)\right] = \int_0^\infty c e^{-st} \cdot u(t-b)\, dt$$

$$= c\int_0^b e^{-st} \cdot 0\, dt + c\int_b^\infty e^{-st} \cdot 1 \cdot dt$$

$$= \frac{c}{s} e^{-sb}$$

$$b=0 \longrightarrow \mathcal{L}\left(cu(t)\right) = \frac{c}{s}$$

تابع مستطیلی : (Rectangular pulse)

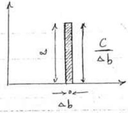


$f(t) = cu(t) - cu(t-b)$

$$\mathcal{L}\left[c\,u(t)-c\,u(t-b)\right] = \int_0^b c\cdot e^{-st}\,dt + \int_b^\infty 0\cdot e^{-st}\,dt$$

$$= c\int_0^b e^{-st}\,dt = \frac{c}{s}\left(1-e^{-sb}\right)$$

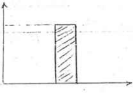
تابع ضربه (Impulse) :

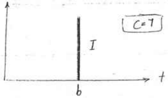


اگر سطح زیر منحنی برابر واحد باشد حاصل

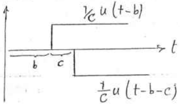
یک ضربه واحد یا Unit Impulse خواهد بود.

$$u'(t-b) = \text{Unit Impulse}$$

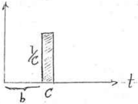




$$u'(t-b) = \lim_{c\to 0}\left[\frac{1}{c}u(t-b) - \frac{1}{c}u(t-b-c)\right]$$



=



$$\mathcal{L}\, u'(t-b) = \lim_{c \to 0} \left[\frac{e^{-sb} - e^{-s(b+c)}}{cs} \right]$$

$$c \to 0 \quad \frac{+se^{-s(b+c)}}{s}$$

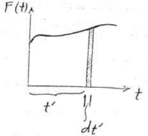
چون ۰ می‌شود هوپیتال می‌گیریم و مخرج و صورت کسر را نسبت به c مشتق می‌گیریم:

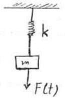
$$\boxed{\mathcal{L}\, u'(t-b) = e^{-sb}}$$

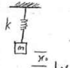
انتگرال کانولوشن :

این روش تابع $F(t)$ را به یک سری ضربه تبدیل می‌کند.

انتگرال کانولوشن







اگر یک سیستم تحت تغییر شکل و سرعت اولیه به اندازه x_0 و v_0 داشته باشیم:

پاسخ سیستم : $x = x_0 \cos w_n t + \frac{v_0}{w_n} \sin w_n t$

ضربه کوچک : $F(t').d(t')$

در دینامیک $\int F dt = \int m dv$

$F.t = mv$

طبق قانون دوم نیوتن : $F(t')dt' = m d\dot{x}$

$$d\dot{x} = \frac{F(t').dt'}{m}$$

در اثر اعمال نیروی $F(t')$ در مدت dt' به جسم چقدر افزایش تغییر مکان می‌دهد؟

$$dx = ?$$

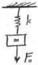
چون در لحظه t' فقط سیستم سرعت دارد ($d\dot{x}$) بنابراین داریم:

$$dx = \frac{d\dot{x}}{\omega_n} \cdot \sin \omega_n (t-t')$$

$$dx = \frac{F(t') \cdot d(t')}{m \cdot \omega_n} \sin \omega_n (t-t')$$

$$\boxed{x = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t \underbrace{F(t')}_{\text{معادله بار تحریک}} \cdot \sin \omega_n (t-t')\, dt'}$$

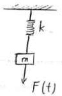
مثال:



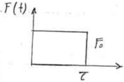
$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t F_0 \sin \omega_n (t-t')\, dt'$$

$$= \frac{F_0}{m\omega_n} \int_0^t \sin \omega_n (t-t')\, dt' = \frac{F_0}{k} \left(1 - \cos \omega_n t\right)$$

مثال: پاسخ سیستم



$$x(t)=\frac{1}{m w_n}\left[\int_0^{\tau} F_0 \sin w_n (t-t')dt' + \int_{\tau}^{t} 0\cdot \sin w_n (t-t')dt'\right]$$



$$x=\frac{F_0}{k}\left(\cos w_n (t-\tau)-\cos w_n t\right)$$

پاسخ سیستم پس از اتمام بار

قبل از اتمام بار باید $\cos w_n (t-\tau)=1$ قرار داده شود و پاسخ بصورت $x=\frac{F_0}{k}(1-\cos w_n t)$ در می‌آید.

با استفاده از تبدیل لاپلاس:

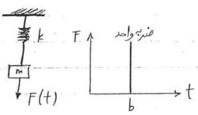
$$m\ddot{x}+kx=F_0\left[u(t)-u(t-\tau)\right]$$

$$\begin{cases} x(0)=0 \\ \dot{x}(0)=0 \end{cases} \Longrightarrow m s^2 X(s)+kX(s)=F_0\left(\frac{1}{s}-\frac{e^{-s\tau}}{s}\right)$$

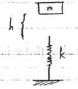
$$\begin{cases} \mathcal{L}(x(t))=X(s) \\ \mathcal{L}(\ddot{x}(t))=s^2X(s) \\ \mathcal{L}(u(t))=\frac{1}{s} \\ \mathcal{L}(u(t-\tau))=\frac{e^{-s\tau}}{s} \end{cases} \qquad X(s)=\frac{F_0}{m}\left[\frac{1-e^{-s\tau}}{s(s^2+w_n^2)}\right]$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x(t)=\frac{F_0}{k}(1-\cos w_n t) & 0<t<\tau \\ x(t)=\frac{F_0}{k}\left(\cos w_n (t-\tau)-\cos w_n t\right) & t>\tau \end{cases}$$

تمرین :

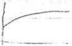


تمرین :



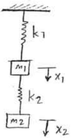
$$\begin{cases} \dot{x}(0) = \sqrt{2gh} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

$$m\ddot{x} + kx = mg$$



$$\left|\left(\frac{\ddot{x}}{g}\right)_{max}\right| = \sqrt{\frac{2h}{\delta_{st}}+1}$$

«فصل ششم - سیستمهای دو درجه آزادی»



نکات:

۱- متغیرهای x_1 و x_2 از هم مستقل اند.

۲- (ω_{n_1}) و (ω_{n_2}) دو فرکانس طبیعی سیستم هستند.

۳- (ω_{n_1}) و (ω_{n_2}) ماکزیمم و مینیمم مقدار فرکانس ممکن است که سیستم می‌تواند با آن ارتعاش کند.

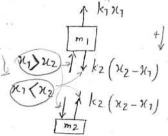
حرکت جسم 1: $x_1 = A\cos\omega_{n_1}t + B\cos\omega_{n_2}t$

حرکت جسم 2: $x_2 = C\cos\omega_{n_1}t + D\cos\omega_{n_2}t$

٤- اگر سیستم از این شرایط اولیه شروع به کار کند، هر گاه نس حرکت آن ترکیبی از هر دو فرکانس طبیعی خواهد بود.

٥- سیستم‌های ۲ درجه آزادی دارای ۲ mode Shape هستند.

تحلیل مسئله: روش نیوتن / روش انرژی
- تعیین فرکانس‌های طبیعی
- تعیین مُد شیپ‌ها (mode shape) ← شکل حرکت
- تعیین پاسخ زمانی (پاسخ کل سیستم)



$+\downarrow$

سیستم ممکن است با فرکانس ω_{n_1} یا با ω_{n_2} یا فرکانسی بین این دو ارتعاش کند.

$\sum F = ma$

$$\begin{cases} \text{برای جسم ۱} & -k_1x_1 + k_2(x_2-x_1) = m_1\ddot{x}_1 \\ \text{برای جسم ۲} & -k_2(x_2-x_1) = m_2\ddot{x}_2 \end{cases}$$

ساده‌ترین فرم مود آگر میروی فرد طبیعی قرار گیرد

$$\begin{cases} x_1 = X_1\sin\omega t \\ x_2 = X_2\sin\omega t \end{cases}$$

(حالتی که روی یکی از mode shape ها قرار گیرد)

$\sin\omega t$ از طرفین خط می‌خورد، متقارن، مستقل از زمان $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} -k_1X_1 + k_2(X_2-X_1) = -m_1\omega^2X_1 \\ -k_2(X_2-X_1) = -m_2\omega^2X_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = A\sin(\omega_{n_1}t + \varphi_1) + B\sin(\omega_{n_1}t + \varphi_2) \\ x_2 = A'\sin(\omega_{n_1}t + \varphi_1) + B'\sin(\omega_{n_2}t + \varphi_2) \end{cases}$$

(*)

$$\Rightarrow \begin{cases} (-k_1-k_2+m_1w^2)X_1+k_2X_2=0 \\ k_2X_1+(-k_2+m_2w^2)X_2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (-2k+mw^2)X_1+kX_2=0 \\ kX_1+(-k+mw^2)X_2=0 \end{cases}$$

(بدون ارتعاش) مسئله استاتیک $X_1=X_2=0$ $\Longrightarrow$ جواب قابل قبول نیست

جوابهای دیگر با این شرط بدست خواهند آمد که ۲ معادله فوق وابسته باشند.

* بنابراین شرط وجود جواب آنست که دترمینان ضرایب صفر باشد: (شرط داشتن جوابهای غیر صفر)

$$\begin{vmatrix} -k_1-k_2+m_1w^2 & k_2 \\ k_2 & -k_2+m_2w^2 \end{vmatrix}=0$$

از بسط دترمینان یک معادله توان چهارم از w بدست می‌آید که به معادله فرکانس مشهور است.

$$\Rightarrow k_1k_2-k_1m_2w^2+\cancel{k_2^2}-k_2m_2w^2-k_2m_1w^2+m_1m_2w^4-\cancel{k_2^2}=0$$

$$m_1m_2w^4+(-k_1m_2-k_2m_2-k_2m_1)w^2+k_1k_2=0$$

فرض $\begin{cases} k_1=k_2=k \\ m_1=m_2=m \end{cases} \Rightarrow \boxed{m^2w^4+(-3kmw^2)+k^2=0}$

(معادله فرکانس حتما باید دارای درجه ۴ و ۲ و ۰ باشد) $w^4-\frac{3k}{m}w^2+\left(\frac{k}{m}\right)^2=0 \quad < \begin{matrix} w_{n1} \\ w_{n2} \end{matrix}$

فرکانس های طبیعی ریشه های مثبت معادله فوق هستند.

$$\boxed{w^2=\frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (w_n)_1=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\sqrt{\frac{k}{m}}\approx 1.6\sqrt{\frac{k}{m}} \\ (w_n)_2=\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\sqrt{\frac{k}{m}}\approx 0.6\sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}$$

نکته: در پیدا کردن ریشه ها باید دقت کرد که باید حتما عبارات زیر رادیکال ها مثبت باشد و اگر منفی بود اشتباه حل کرده ایم و این یک روش چک کردن حل مسئله است.

$$\frac{X_2}{X_1} \quad \text{یا} \quad \frac{X_1}{X_2} \quad \Leftarrow \quad \text{mode shape}$$

(*) $$\frac{X_2}{X_1} = \frac{2k - m\omega^2}{k}$$

مُدشیپ اول بیان می‌کند :

اگر سیستم با فرکانس ω_{n1} ارتعاش کند.
$$\begin{cases} \dfrac{x_2(0)}{x_1(0)} = -0.6 \\[2ex] \dfrac{\dot{x}_2(0)}{\dot{x}_1(0)} = -0.6 \end{cases}$$

$$(\omega_{n1})^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{k}{m} \implies \left(\frac{X_2}{X_1}\right)_1 = \frac{2k - m\,\frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}}{k} = 2 - \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \simeq -0.6$$

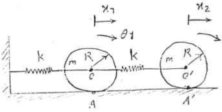
$$(\omega_{n2})^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{k}{m} \implies \left(\frac{X_2}{X_1}\right)_2 = \frac{2k - m\,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}}{k} = 2 - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \simeq 1.6$$

نکته : وقتی سیستم با فرکانس طبیعی (ω_{n2}) نوسان کند روی مُدشیپ دوّم می‌افتد و در نهایت سیستم طوری نوسان می‌کند که ماکزیمم دامنه جرم دوّم (X_2) به ماکزیمم دامنه جرم اول (X_1) برابر 1.6 شود.

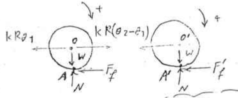
و همچنین وقتی سیستم با فرکانس طبیعی (ω_{n1}) نوسان کند روی مُدشیپ اوّل می‌افتد و در نهایت سیستم طوری نوسان می‌کند که ماکزیمم دامنه جرم دوّم به جرم اوّل برابر 0.6- شود.

نکته : از نکته فوق می‌توان نتیجه گرفت که اگر بخواهیم سیستم با فرکانس طبیعی (ω_{n1}) نوسان کند باید طوری حرکت جرم‌ها تنظیم شود که $\frac{X_2}{X_1} = -0.6$ شود و اگر بخواهیم با فرکانس (ω_{n2}) نوسان کند باید در تنظیم حرکت جرم‌ها نسبت $\frac{X_2}{X_1} = 1.6$ را ایجاد کرد.
و اگر نسبت ماکزیمم دامنه‌ها یعنی ($\frac{X_2}{X_1}$) یکی از دو مقدار فوق نباشد سیستم با فرکانسی مابین (ω_{n1}) و (ω_{n2}) نوسان می‌کند.

نکته : مدشیپ اوّل که منفی می‌باشد نشانگر آنست که حرکت جرم‌ها مخالف یکدیگر است یعنی این مُدشیپ بازشونده و بسته شونده است و سیستم با فرکانس (ω_{n1}) ارتعاش می‌کند و مُدشیپ دوّم که مثبت است بیانگر آنست که حرکت جرم‌ها موافق یکدیگر است یعنی دینامیومی می‌باشد و سیستم با فرکانس (ω_{n2}) ارتعاش می‌کند.



مثال: فرکانسهای طبیعی و مُدشیپ های سیستم مقابل را بدست آورید. غلطکها استوانه‌ای هستند و حرکت غلتشی بدون لغزش است.



حرکت غلتشی بدون لغزش:

$$\begin{cases} \theta_2 > \theta_1 \\ x_2 > x_1 \end{cases}$$

بخاطر غلتش $f_f \neq \mu . N$

F_f و F_f' تابعی از زمان هستند.

معادله $\Sigma M = I\alpha$ را برای ⇐ محورهای مرکز آنی می‌نویسیم

$$\begin{cases} \Sigma M_A = I_A \ddot{\theta}_1 \\ \Sigma M_{A'} = I_{A'} \ddot{\theta}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -kR^2\theta_1 + kR^2(\theta_2-\theta_1) = \frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta}_1 \\ -kR^2(\theta_2-\theta_1) = \frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta}_2 \end{cases}$$

معادلات دیفرانسیل حرکت:

معادلات بر حسب Θ می‌شود ⟸

$$\begin{cases} \theta_1 = \Theta_1 \sin \omega t \\ \theta_2 = \Theta_2 \sin \omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -k\,\Theta_1 + k(\Theta_2 - \Theta_1) = -\frac{3}{2} m\omega^2 \Theta_1 \\ -k(\Theta_2 - \Theta_1) = -\frac{3}{2} m\omega^2 \Theta_2 \end{cases}$$

معادلات مستقل از زمان بدست آمد:

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(-2k + \frac{3}{2}m\omega^2\right)\Theta_1 + k\,\Theta_2 = 0 \quad (*) \\ k\,\Theta_1 + \left(-k + \frac{3}{2}m\omega^2\right)\Theta_2 = 0 \end{cases} \xRightarrow[(*)]{\text{مدشیپ}} \boxed{\frac{\Theta_2}{\Theta_1} = \frac{2k - \frac{3}{2}\ast}{k}}$$

شرط داشتن جواب غیرصفر دستگاه فوق صفر بودن دترمینان ضرایب است. ⟸

$$\begin{vmatrix} -2k + \frac{3}{2}m\omega^2 & k \\ k & -k + \frac{3}{2}m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2k^2 - 3mk\omega^2 - \frac{3}{2}mk\omega^2 + \frac{9}{4}m^2\omega^4 - k^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{9}{4}m^2\omega^4 - \frac{9}{2}mk\omega^2 + k^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\omega^4 - 2\left(\frac{k}{m}\right)\omega^2 + \frac{4}{9}(}$$

$$\omega^2 = \left(\frac{2}{2} \pm \sqrt{\frac{4}{4} - \frac{4}{9}}\right)\frac{k}{m} \Rightarrow \begin{cases} \omega_{n_1}^2 = \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{3}\right)\frac{k}{m} \simeq 1.73\frac{k}{m} \\ \omega_{n_2}^2 = \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{3}\right)\frac{k}{m} \simeq 0.27\frac{k}{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)_1 = \alpha_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \simeq -0.6 \\ \left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)_2 = \alpha_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6 \end{cases}$$

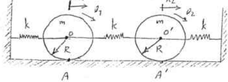
اگر سیستم با مد شیب دوم و فرکانس ω_{n_2} ارتعاش کند:

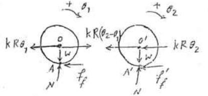
می‌توانند برقرار باشد
$$\begin{cases} \frac{\theta_2(0)}{\theta_1(0)} = 1.6 \\ \frac{\dot\theta_2(0)}{\dot\theta_1(0)} = 1.6 \end{cases}$$

توجه: اگر می‌خواستیم در حل مثال فوق از خاصیت مرکز آنی دوران استفاده کنیم بایستی برای هر استوانه روابط متقابل را بنویسیم و حل کنیم:

$$(*)\begin{cases} \sum F = m\underset{\ddot x}{a} \\ \sum M_o = I_o \cdot \underset{\ddot\theta}{\alpha} \end{cases}$$

نکته: اگر سیستم فوق بصورت متقارن باشد یعنی از نظر هندسی متقارن باشد $\theta_2 = \theta_1$ و $x_2 = x_1$ می‌شود و همواره در سیستم‌های متقارن مد شیب‌ها ۱، ۱- می‌شود $(\alpha = \pm 1)$



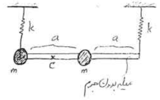


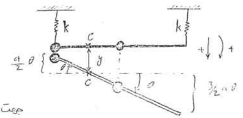
انرژی جنبشی $T = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}mR^2\right)\dot\theta_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}mR^2\right)\dot\theta_2^2$

انرژی پتانسیل $U = \frac{1}{2}k(R\theta_1)^2 + \frac{1}{2}k(R\theta_2)^2 + \frac{1}{2}k\left(R(\theta_2-\theta_1)\right)^2$

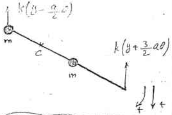
$$\Rightarrow \begin{cases} (\omega_n^2)_1 = \frac{2k}{3m} = \left(\frac{2}{3}\right)\frac{k}{m}, & \left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)_1 = \alpha_1 = +1 \\ (\omega_n^2)_2 = \frac{2k}{m} = 2\left(\frac{k}{m}\right), & \left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)_2 = \alpha_2 = -1 \end{cases}$$

مثال: تعیین فرکانس های حرکت و مُدشیپ ها در سیستم زیر.





جهت دوران حول مرکز ثقل اختیاری است و برای پیدا کردن مرکز ثقل دستگاه xy را در یک گلوله سمت چپ قرار می دهیم:



$$\bar{x} = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i} = \frac{0 \times m + a \times m}{m+m} = \frac{a}{2}$$

حرکت خطی مرکز ثقل / حرکت دورانی حول مرکز ثقل

$$\begin{cases} \sum F = m_{\text{کل}} \cdot a_C \\ \sum M_C = I_C \cdot \ddot{\theta} = I_C \cdot \alpha \end{cases}$$

y : متغیر مستقل مربوط به حرکت خطی مرکز ثقل

θ : متغیر مستقل مربوط به حرکت دورانی حول مرکز ثقل

$$\Rightarrow \begin{cases} -k(y-\frac{a}{2}\theta) - k(y+\frac{3}{2}a\theta) = 2m \cdot \ddot{y}_C \\ k(y-\frac{a}{2}\theta)\frac{a}{2} - k(y+\frac{3}{2}a\theta)\frac{3}{2}a = \left(\frac{ma^2}{4}+\frac{ma^2}{4}\right)\ddot{\theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -k(Y-\frac{a}{2}\theta) - k(Y+\frac{3}{2}a\theta) = -2m\omega^2 Y \\ k(Y-\frac{a}{2}\theta)\frac{a}{2} - k(Y+\frac{3}{2}a\theta)\frac{3}{2}a = -\frac{ma^2}{2}\omega^2\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-2k+2m\omega^2)Y + (-ka)\theta = 0 \\ -kaY + \left(\frac{-5}{2}ka^2 + \frac{ma^2\omega^2}{2}\right)\theta = 0 \end{cases}$$

مُدشیپ: $\frac{a\theta}{Y} = \frac{-2k+2m\omega^2}{k}$

$$\begin{vmatrix} -2k+2m\omega^2 & -ka \\ -ka & -\frac{5}{2}ka^2+\frac{ma^2\omega^2}{2} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5k^2a^2 - mka^2\omega^2 - 5mka^2\omega^2 + 4m^2a^2\omega^4 - k^2a^2 = 0$$

$$\omega^4 - 6\frac{k}{m}\omega^2 + 4\left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0$$

$$\omega^2 = \left(3 \pm \sqrt{9-4}\right)\frac{k}{m}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \omega_{n_1}^2 = \left(3+\sqrt{5}\right)\dfrac{k}{m} \\ \omega_{n_2}^2 = \left(3-\sqrt{5}\right)\dfrac{k}{m} \end{cases}$$

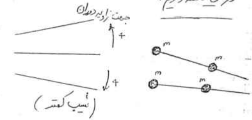
$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{a\theta}{y}\right)_1 = 4+2\sqrt{5} \simeq 8.4 \\ \left(\dfrac{a\theta}{y}\right)_2 = 4-2\sqrt{5} \simeq -0.4 \end{cases}$$

در این مسئله داریم:

$$\left(\frac{\frac{a}{2}\theta}{y}\right)_1 \simeq 4.2$$

یعنی حرکت همسو

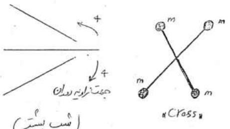
(همدیگر را خیلی دیر قطع می کنند.)



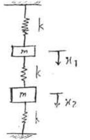
$$\left(\frac{\frac{a}{2}\theta}{y}\right)_2 \simeq -0.2$$

یعنی حرکت بصورت بازشونده و بسته شونده

(همدیگر را قطع می کنند در این سیستم Cross گفته می شود یعنی متقاطع.)



* استفاده از روش انرژی (روش ریلی) در حل مسائل دو درجه آزادی :



انرژی پتانسیل $E_p = U = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 + \frac{1}{2} k (x$

انرژی جنبشی $E_c = T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2$

چون اصطکاک در مسئله وجود ندارد پس انرژی به سیستم وارد نمی‌شود یا از آن گرفته نمی‌شود لذا : $\boxed{U_{max}=T_{max}}$

$$\left(\frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 + \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2\right)_{max} = \left(\frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \sin wt \\ x_2 = X_2 \sin wt \end{cases}$$

بشرط آنکه سیستم بر روی فرکانس طبیعی خود نوسان کند :

$$\frac{1}{2} k X_1^2 + \frac{1}{2} k X_2^2 + \frac{1}{2} k (X_2 - X_1)^2 = \frac{1}{2} m X_1^2 w^2 + \frac{1}{2} m X_2^2 w$$

$$w^2 = \frac{X_1^2 + X_2^2 + (X_2 - X_1)^2}{X_1^2 + X_2^2} \left(\frac{k}{m}\right)$$

$$\left(\frac{X_2}{X_1}\right) = \text{mode shape} = \alpha \quad \Rightarrow \quad w^2 = \frac{1+\alpha^2 + (\alpha - 1)^2}{1+\alpha^2} \left(\frac{k}{m}\right)$$

روش با اصل ریلی : مقادیر α که در این معادله می‌توانند جواب باشند (مقادیر شکل های حرکت) مقادیری هستند که این رابطه را اکسترمم سازند و در نتیجه فرکانس های بدست آمده حامل همان فرکانس های طبیعی خواهد بود.

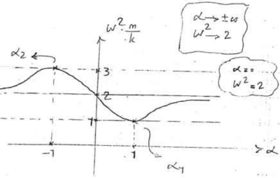
$$\frac{d(w^2)}{d\alpha}=0 \implies (4\alpha-2)(\alpha^2+1)-2\alpha(2\alpha^2-2\alpha+2)=0$$

$$\implies (\alpha^2-1)=0$$

حاصل حتماً باید معادله درجه ۲ باشد چون دو ریشه باید داشته باشد زیرا دو مُد شیپ داریم.

$$\implies \begin{cases} (\alpha)_1=1 \longrightarrow (W_1)^2=\dfrac{k}{m} \\ (\alpha)_2=-1 \longrightarrow (W_2)^2=\dfrac{3k}{m} \end{cases}$$

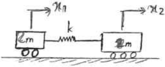
$$w^2\frac{m}{k}=\frac{2\alpha^2-2\alpha+2}{\alpha^2+1}$$



نمودار نشان دهنده آنست که اگر مُد شیپ‌ها به جز α_1 و α_2 باشد فرکانس‌ها حتماً بین 1 و 3 خواهد بود. یعنی نمودار کران‌دار است.

مثال: تعیین فرکانس‌های حرکت و مُد شیپ‌ها در سیستم زیر.

$x_2 > x_1$



روش انرژی:

$$U=\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2$$

$$T=\frac{1}{2}(2m)\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}(2m)\dot{x}_2^2$$

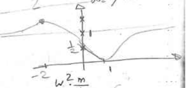
$$U_{max}=T_{max} \implies \frac{1}{2}k(X_2-X_1)^2=\frac{1}{2}mX_1^2w^2+\frac{1}{2}(2m)X_2^2w^2$$

$$w^2 = \frac{\frac{1}{2}(X_2 - X_1)^2}{\frac{1}{2}X_2^2 + X_1^2}\left(\frac{k}{m}\right) = \frac{(X_2 - X_1)^2}{2X_1^2 + X_2^2}\left(\frac{k}{m}\right)$$

$$\frac{X_2}{X_1} = \alpha \implies w^2 = \frac{\frac{1}{2}(\alpha-1)^2}{1+\frac{\alpha^2}{2}}\left(\frac{k}{m}\right)$$

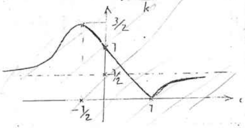
$$\frac{d(w^2)}{d\alpha} = 0 \implies (\alpha-1)\left(1+\frac{\alpha^2}{2}\right) - \frac{\alpha}{2}(\alpha-1)^2 = 0$$

$$\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha}{2} - 1 = 0$$



$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 \longrightarrow (w_1)^2 = 0 \\ \alpha_2 = -2 \longrightarrow (w_2)^2 = \frac{3}{2}\left(\frac{k}{m}\right) \end{cases}$$

$$\frac{w^2 m}{k} = \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{\alpha^2 + 2}$$

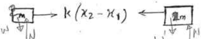


گراف نشان می دهد با هر مقدار شیب دلخواه غیر از α_1 و α_2 سیستم با فرکانسی مابین w_1 و w_2 ارتعاش می کند

$$\left.\begin{matrix} \alpha \to \infty \\ \alpha \to -\infty \end{matrix}\right\} \Rightarrow w^2 \to 1$$

جهت مثبت حرکت $\longrightarrow +$

روش نیوتن :



$x_2 > x_1$

$$\begin{cases} +k(x_2 - x_1) = m\ddot{x}_1 & (*) \\ -k(x_2 - x_1) = m\ddot{x}_2 & (**) \end{cases} \xRightarrow[x_2 = X_2 \sin\omega t]{x_1 = X_1 \sin\omega t} \begin{cases} k(X_2 - X_1) = -m X_1 w^2 \\ -k(X_2 - X_1) = -m X_2 w^2 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} (-k + m w^2) X_1 + k X_2 = 0 \\ k X_1 + (-k + m w^2) X_2 = 0 \end{cases}$$

(دترمینان) ضرایب را برابر با صفر

$$\cancel{\frac{X_2}{X_1} = \frac{-k+mw^2}{-k}} \Rightarrow (-k+2mw^2)(-k+mw^2)-k^2=0$$

$$k^2-2kmw^2-kmw^2+2m^2w^4-k^2=0$$

$$-3kmw^2+2m^2w^4=0$$

$$w^2(-3k+2mw^2)=0 \Rightarrow \begin{cases} w_{n1}=0 \\ w_{n2}^2=\dfrac{3k}{2m} \end{cases}$$

شکل حرکت : $\dfrac{X_2}{X_1} = \dfrac{-K+2m\omega^2}{-K}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (w_1)^2=0 \longrightarrow \left(\dfrac{X_2}{X_1}\right)_1 = 1 \\ (w_2)^2=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{k}{m}\right) \longrightarrow \left(\dfrac{X_2}{X_1}\right)_2 = -2 \end{cases}$$

یعنی یکی از دو جسم را 2cm به یک سمت و دیگری را 1cm در جهت مخالف می‌کشیم.

با توجه به اینکه سیستم یک درجه آزادی است تنها معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت را بیابید و از آن جا تنها فرکانس طبیعی غیر صفر را بدست آورید.

هدف: یافتن یک معادله دیفرانسیل که سیستم را با یک درجه آزادی نشان دهد.

$$-3k(\underbrace{x_2-x_1}_{y}) = 2m(\underbrace{\ddot{x}_2-\ddot{x}_1}_{\ddot{y}}) \Leftarrow$$

طرفین معادله ** را در (2-) ضرب کرده و با معادله (*) جمع می‌کنیم.

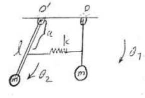
$$-3ky = 2m\ddot{y} \Rightarrow \ddot{y} + \left(\frac{3}{2}\,\frac{k}{m}\right)\cdot y = 0$$

$$\boxed{w^2 = \frac{3}{2}\left(\frac{k}{m}\right)}$$

حال اگر او را 3cm بکشیم، باز هم نسبت دامنه‌ها 2- می‌شود، پس 1cm حرکت می‌کند و سپس متوقف می‌شود و سپس شروع به ارتعاش با ω_{n2} می‌نماید.

چون فقط یک ω_n داریم، در یک مکان می‌ایستد و ارتعاش می‌کنند.

مسئله : معادلات پاسخ زمانی سیستم را تعیین کنید



در چه شرایطی از شرایط اولیه حرکت سیستم مرتعش بر روی مُدهای حرکت خود قرار می‌گیرد.

(محاسبه فرکانس‌های طبیعی مُدهای حرکت لازم است تا انجام گیرد.)

$\theta_1(0) = \phi$

$\theta_2(0) = 0$

$\dot{\theta}_1(0) = 0$

$\dot{\theta}_2(0) = 0$

$\theta_1(t) = ?$

$\theta_2(t) = ?$

روش انرژی :

فرض: $\theta_2 > \theta_1$

$$\begin{cases} U = mg\ell(1-\cos\theta_1) + mg\ell(1-\cos\theta_2) + \frac{1}{2}ka^2(\theta_2-\theta_1)^2 \\ T = \frac{1}{2}\underbrace{I_o}_{m\ell^2}\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\underbrace{I_{o'}}_{m\ell^2}\dot{\theta}_2^2 \end{cases}$$

$a(\theta_2-\theta_1) = \Delta x$

$U_{max} = T_{max}$

$$mg\ell\frac{\theta_1^2}{2} + mg\ell\frac{\theta_2^2}{2} + \frac{1}{2}ka^2(\theta_2-\theta_1)^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\theta_1^2\omega^2 + \frac{1}{2}m\ell^2\theta_2^2$$

$$\omega^2 = \frac{\theta_1^2/2 + \theta_2^2/2}{\theta_1^2/2 + \theta_2^2/2}\cdot\frac{g}{\ell} + \frac{\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)^2}{\frac{1}{2}(\theta_1^2+\theta_2^2)}\cdot\frac{a^2}{\ell^2}\cdot\frac{k}{m}$$

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell} + \frac{(\theta_2-\theta_1)^2}{\theta_1^2+\theta_2^2}\cdot\frac{a^2}{\ell^2}\cdot\frac{k}{m}$$

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = \alpha \implies \omega^2 = \frac{g}{\ell} + \frac{(\alpha-1)^2}{1+\alpha^2}\cdot\frac{a^2}{\ell^2}\cdot\frac{k}{m}$$

$$\frac{d(\omega^2)}{d\alpha} = 0 \implies 2(\alpha-1)(1+\alpha^2) - 2\alpha(-1+\alpha)^2 = 0$$

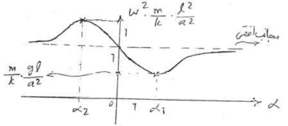
$$(\alpha-1)\left(1+\alpha^2-\alpha(-1+\alpha)\right) = 0$$

$$(\alpha-1)(1+\alpha) = 0$$

$$\implies \begin{cases} \alpha_1 = 1 \longrightarrow (\omega_1)^2 = \dfrac{g}{l} \\ \alpha_2 = -1 \longrightarrow (\omega_2)^2 = \dfrac{g}{l} + 2\dfrac{a^2}{l^2}\cdot\dfrac{k}{m} \end{cases}$$

* همانطور که مشاهده می‌شود سرعت یا فرکانس ارتعاش در مود دوم بیشتر از مود اول است.

$$\omega^2 \frac{m}{k}\cdot\frac{l^2}{a^2} = \frac{m}{k}\cdot\frac{g\cdot l}{a^2} + \frac{(\alpha-1)^2}{1+\alpha^2}$$



معادلات پاسخ زمانی :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = A_1 \cos \omega_{n_1} t + B_1 \cos \omega_{n_2} t \\ \theta_2(t) = C_1 \cos \omega_{n_1} t + D_1 \cos \omega_{n_2} t \end{cases}$$

$$\left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right) = \text{mode shape}$$

$$\begin{cases} \dfrac{C_1}{A_1} = \alpha_1 \implies C_1 = A_1 \\ \dfrac{D_1}{B_1} = \alpha_2 \implies D_1 = -B_1 \end{cases} \implies \begin{cases} \theta_1(t) = A_1 \cos \omega_{n_1} t + B_1 \cos \omega_{n_2} t \\ \theta_2(t) = A_1 \cos \omega_{n_1} t - B_1 \cos \omega_{n_2} t \end{cases}$$

$$\phi = A_1 + B_1$$
$$0 = A_1 - B_1 \implies A_1 = B_1 = \frac{\phi}{2}$$

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \frac{\phi}{2}\cos W_{n_1}t + \frac{\phi}{2}\cos W_{n_2}t \\ \theta_2(t) = \frac{\phi}{2}\cos W_{n_1}t - \frac{\phi}{2}\cos W_{n_2}t \end{cases}$$

شرط قرار گرفتن بر روی مدشیپ‌ها :

۱) اگر بر روی مدشیپ اول قرار گیرد:

① همزمان باید برقرار باشند

$$\begin{cases} \frac{\theta_2(0)}{\theta_1(0)} = 1 \\ \frac{\dot{\theta}_2(0)}{\dot{\theta}_1(0)} = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} \theta_1(t) = +\phi/2 \cos W_{n_1}t \\ \theta_2(t) = +\phi/2 \cos W_{n_1}t \end{cases}$$

۲) اگر بر روی مدشیپ دوم قرار گیرد:

② همزمان

$$\begin{cases} \frac{\theta_2(0)}{\theta_1(0)} = -1 \\ \frac{\dot{\theta}_2(0)}{\dot{\theta}_1(0)} = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} \theta_1(t) = +\phi/2 \cos W_{n_2}t \\ \theta_2(t) = -\phi/2 \cos W_{n_2}t \end{cases}$$

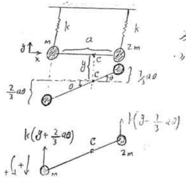
نکته: در مسئله فوق اگر بجای شرایط اولیه صفر برای سرعت، شرایط سرعت اولیه غیرصفر داشت یعنی مثلاً

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \phi \\ \dot{\theta}_2 = 0 \end{cases}$$

باید در معادله حرکت یک اختلاف فاز هم در نظر گرفت مثلاً

$\cos(W_{n_1}t - B)$ و $\cos(W_{n_2}t - B')$

مثال: فرکانس‌های طبیعی حرکت و مدشیپ‌ها را برای سیستم زیر تعیین کنید.



دستگاه xy در مرکز جرم کوپلینگ قرار دارد.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i} = \frac{0 \times m + a \times 2m}{m + 2m} = \frac{2}{3}a$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \sum F_y = m_{t} \cdot (a_c)_y \\ \sum M_c = I_c \cdot \ddot{\theta} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -k\left(y + \frac{2}{3}a\theta\right) - k\left(y - \frac{1}{3}a\theta\right) = 3m\ddot{y} \\ -k\left(y + \frac{2}{3}a\theta\right) \cdot \frac{2}{3}a + k\left(y - \frac{1}{3}a\theta\right)\frac{1}{3}a = \\ \left[m\left(\frac{2}{3}a\right)^2 + 2m\left(\frac{1}{3}a\right)^2\right]\ddot{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = Y\sin\omega t \\ \theta = \Theta\sin\omega t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -k\left(Y + \frac{2}{3}a\Theta\right) - k\left(Y - \frac{1}{3}a\Theta\right) = -3m\omega^2 Y \\ -kY\frac{a}{3} + \left(-k \cdot \frac{4}{9}a^2\Theta - \frac{k}{9}a^2\Theta\right) = -\frac{2}{3}m\omega^2 a^2\Theta \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \left(-2k + 3m\omega^2\right)Y - \frac{1}{3}ka\Theta = 0 \\ -\frac{ka}{3}Y + \left(\frac{-5}{9}ka^2 + \frac{2}{3}ma^2\omega^2\right)\Theta = 0 \end{cases}$$

نسبت مد: $\frac{a\Theta}{Y} = \frac{-6k + 9m\omega^2}{k}$

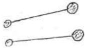
$$\begin{vmatrix} -2k + 3m\omega^2 & -\frac{1}{3}ka \\ -k\frac{a}{3} & \frac{-5}{9}ka^2 + \frac{2}{3}ma^2\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

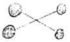
$$\Longrightarrow \frac{10}{9}k^2a^2 - \frac{4}{3}kma^2\omega^2 - \frac{5}{3}kma^2\omega^2 + 2a^2m^2\omega^4 - \frac{k^2a^2}{9} = 0$$

$$\omega^4 - \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{k}{m}\right)\omega^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0 \Longrightarrow \omega^2 = \left(\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{1}{2}}\right)\frac{k}{m}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_n^2\Big)_1 = \dfrac{k}{m} , & \left(\dfrac{a\theta}{Y}\right)_1 = \alpha_1 = 3 \\ \omega_n^2\Big)_2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{k}{m} , & \left(\dfrac{a\theta}{Y}\right)_2 = \alpha_2 = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{a\theta}{Y}\right)_1 = 2 & \Longrightarrow \text{مرکز را قطع نمی‌کند} \\ \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{a\theta}{Y}\right)_2 = -1 & \Longrightarrow \text{مرکز را قطع می‌کند} \end{cases}$$





مسئله: مثال قبل را به روش انرژی حل کنید.

$$U = \frac{1}{2}k\left(y + \frac{2}{3}a\theta\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(y - \frac{1}{3}a\theta\right)^2$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{y} + \frac{2}{3}a\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}2m\left(\dot{y} - \frac{1}{3}a\dot{\theta}\right)^2$$

$$\boxed{U_{max} = T_{max}} \Longrightarrow \frac{1}{2}k\left(Y + \frac{2}{3}a\theta\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(Y - \frac{1}{3}a\theta\right)^2 =$$

$$\frac{1}{2}m\left(Y\omega + \frac{2}{3}a\theta\omega\right)^2 + m\left(Y\omega - \frac{1}{3}a\theta\omega\right)^2$$

$$\boxed{\frac{a\theta}{Y} = \alpha} \Longrightarrow \omega^2 = \frac{\frac{1}{2}k\left[\left(Y + \frac{2}{3}a\theta\right)^2 + \left(Y - \frac{1}{3}a\theta\right)^2\right]}{\frac{1}{2}m\left[\left(Y + \frac{2}{3}a\theta\right)^2 + 2\left(Y\omega - \frac{1}{3}a\theta\right)^2\right]}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}\left(\frac{\left(1 + \frac{2}{3}\alpha\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\alpha\right)^2}{\left(1 + \frac{2}{3}\alpha\right)^2 + 2\left(1 - \frac{1}{3}\alpha\right)^2}\right)$$

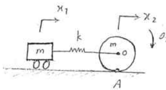
$$\omega^2 = \frac{\frac{5}{9}\alpha^2 + \frac{2}{3}\alpha + 2}{\frac{2}{3}\alpha^2 + 3}\left(\frac{k}{m}\right) \Longrightarrow \frac{d(\omega^2)}{d\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{10}{9}\alpha + \frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\alpha^2 + 3\right) - \left(\frac{4}{3}\alpha\right)\left(\frac{5}{9}\alpha^2 + \frac{2}{3}\alpha + 2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - \frac{3}{2}\alpha - \frac{9}{2} = 0 \Longrightarrow \alpha = \frac{3}{4} \pm \frac{9}{4} \begin{cases} \alpha_1 = 3 , & \omega_{n_1}^2 = \dfrac{k}{m} \\ \alpha_2 = -\dfrac{3}{2} , & \omega_{n_2}^2 = \dfrac{k}{2m} \end{cases}$$

۱۰۵

مثال ۷: تعیین فرکانس‌ها و مدشیپ‌ها برای سیستم زیر به روش ریلی



$$T_1 = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}_2^2$$

$$= \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m R^2\right)\dot{\theta}_2^2$$

$$= \frac{3}{4} m R^2 \dot{\theta}_2^2$$

یا $T_2 = \frac{1}{2} I_A \dot{\theta}_2^2 = \frac{3}{4} m R^2 \dot{\theta}_2^2 = \frac{3}{4} m \dot{x}_2^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{کل } T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{3}{4} m \dot{x}_2^2 \\ \text{کل } U = \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2 \end{cases}$$

$$\boxed{T_{max} = U_{max}} \Rightarrow \frac{1}{2} m X_1^2 \omega^2 + \frac{3}{4} m X_2^2 \omega^2 = \frac{1}{2} k (X_2 - X_1)^2$$

$$\omega^2 = \frac{\frac{1}{2}(X_2 - X_1)^2}{\frac{1}{2} X_1^2 + \frac{3}{4} X_2^2} \cdot \frac{k}{m} \xrightarrow{\frac{X_2}{X_1} = \alpha} \omega^2 = \frac{(\alpha - 1)^2}{1 + \frac{3\alpha^2}{2}} \cdot \frac{k}{m}$$

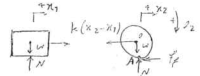
$$\frac{d\omega^2}{d\alpha} = 0 \Rightarrow 2(\alpha - 1)\left(1 + \frac{3}{2}\alpha^2\right) - 3\alpha(\alpha - 1)^2 = 0$$

$$(\alpha - 1)\left(2 + 3\alpha^2 - 3\alpha(\alpha - 1)\right) = 0 \rightarrow \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = \frac{-2}{3}$$

$$\left(\frac{X_2}{X_1}\right)_1 = \alpha_1 = 1 \Rightarrow \omega_{n_1}^2 = 0$$

$$\left(\frac{X_2}{X_1}\right)_2 = \alpha_2 = \frac{-2}{3} \Rightarrow \omega_{n_2}^2 = \frac{5}{3} \cdot \frac{k}{m}$$

روش نیوتن :



$$\begin{cases} k(x_2-x_1) = m\ddot{x}_1 \\ -k(x_2-x_1)\cdot R = \left(\frac{3}{2} m R^2\right)\cdot \ddot{\theta}_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k(x_2-x_1) = m\ddot{x}_1 & (*) \\ -k(x_2-x_1) = \frac{3}{2} m \ddot{x}_2 & (**) \end{cases}$$

این روش فقط درصورتی که یکی از ... ها صفر شده باشد کاربرد دارد. در غیر اینصورت بایستی برای بدست آوردن ... از راه حل های قبلی استفاده نمود.

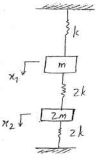
⟵ حال معادله $(*)$ را در ضریب $\left(\frac{-3}{2}\right)$ ضرب کرده و با معادله $(**)$ جمع می کنیم :

$$\frac{3}{2} m(\ddot{x}_2-\ddot{x}_1) + k\left(x_2-x_1+\frac{3}{2}x_2-\frac{3}{2}x_1\right) = 0$$

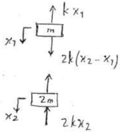
$$\frac{3}{2} m \underbrace{(\ddot{x}_2-\ddot{x}_1)}_{\ddot{y}} + \frac{5}{2} k \underbrace{(x_2-x_1)}_{y} = 0$$

$$\ddot{y} + \left(\frac{5}{3}\cdot\frac{k}{m}\right) y = 0 \Longrightarrow \boxed{\omega_n^2 = \frac{5}{3}\left(\frac{k}{m}\right)}$$

مثال: ابتدا معادلات پاسخ زمانی سیستم را تعیین کنید.
در چه شرایطی از شرایط اولیه حرکت سیستم مرتعش بر روی مدهای حرکت خود قرار می گیرد.



$$\begin{cases} x_1(0) = \Delta \\ \dot{x}_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \\ \dot{x}_2(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(t) = ? \\ x_2(t) = ? \end{cases}$$



$$\begin{cases} -kx_1 + 2k(x_2 - x_1) = m\ddot{x}_1 \\ -2k(x_2 - x_1) - 2kx_2 = 2m\ddot{x}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -kX_1 + 2k(X_2 - X_1) = -mX_1\omega^2 \\ -2k(X_2 - X_1) - 2kX_2 = -2mX_2\omega^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-3k + m\omega^2)X_1 + 2kX_2 = 0 \\ 2kX_1 + (-4k + 2m\omega^2)X_2 = 0 \end{cases}$$

$$\left| \quad \right| = 0 \Rightarrow 12k^2 - 6km\omega^2 - 4km\omega^2 + 2m^2\omega^4 - 4k^2 = 0$$

$$\omega^4 - 5\frac{k}{m}\omega^2 + 4\left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0$$

$$\omega^2 = \left(\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4}\right)\frac{k}{m} \quad \begin{matrix} \nearrow \omega_1^2 = 4\frac{k}{m} \\ \searrow \omega_2^2 = \frac{k}{m} \end{matrix}$$

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{3k - m\omega^2}{2k} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{X_2}{X_1}\right)_1 = \alpha_1 = -\frac{1}{2} \\ \left(\frac{X_2}{X_1}\right)_2 = \alpha_2 = +1 \end{cases}$$

معادلات پاسخ زمانی :

$$\begin{cases} x_1(t) = \overbrace{A_1\cos(\omega_{n_1}t + \varphi_1)}^{\text{قسمت اول}} + \overbrace{B_1\cos(\omega_{n_2}t + \varphi_2)}^{\text{قسمت دوم}} \\ x_2(t) = A_2\cos(\omega_{n_1}t + \varphi_1) + B_2\cos(\omega_{n_2}t + \varphi_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -A_1\omega_{n_1}\sin(\omega_{n_1}t + \varphi_1) - B_1\omega_{n_2}\sin(\omega_{n_2}t + \varphi_2) \\ \dot{x}_2(t) = -A_2\omega_{n_1}\sin(\omega_{n_1}t + \varphi_1) - B_2\omega_{n_2}\sin(\omega_{n_2}t + \varphi_2) \end{cases}$$

با توجه به شرایط مرزی داریم:

$$\begin{cases} \Delta = A_1 \cos\varphi_1 + B_1 \cos\varphi_2 \\ 0 = A_2 \cos\varphi_1 + B_2 \cos\varphi_2 \\ 0 = -A_1 \omega_{n_1} \sin\varphi_1 - B_1 \omega_{n_2} \sin\varphi_2 \\ 0 = -A_2 \omega_{n_1} \sin\varphi_1 - B_2 \omega_{n_2} \sin\varphi_2 \end{cases}$$

مشاهده می‌شود که چهار معادله داریم و شش مجهول (φ_1 ، φ_2 ، A_1 ، A_2 ، B_1 و B_2).

بنابراین از مود شیپ‌ها استفاده می‌کنیم:

$$\frac{A_2}{A_1} = -\frac{1}{2} \Longrightarrow$$

سیستم با ω_{n_1} ارتعاش می‌کند و مود شیپ اول برای آن صادق است بنابراین در معادلات پاسخ قسمت دوم حذف می‌شود.

$$\frac{B_2}{B_1} = 1 \Longrightarrow$$

سیستم با ω_{n_2} ارتعاش می‌کند و مود شیپ دوم برای آن صادق است و در معادلات پاسخ قسمت اول حذف می‌شود.

$$\Longrightarrow \begin{cases} \Delta = A_1 \cos\varphi_1 + B_1 \cos\varphi_2 \\ 0 = \frac{-A_1}{2} \cos\varphi_1 + B_1 \cos\varphi_2 \\ 0 = -A_1 \omega_{n_1} \sin\varphi_1 - B_1 \omega_{n_2} \sin\varphi_2 \\ 0 = \frac{A_1}{2} \omega_{n_1} \sin\varphi_1 - B_1 \omega_{n_2} \sin\varphi_2 \end{cases}$$

از حل چهار معادله و چهار مجهول داریم:

$$\Longrightarrow \begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 = 0 \\ A_1 = \frac{2\Delta}{3} \quad , \quad B_1 = \frac{\Delta}{3} \\ A_2 = -\frac{\Delta}{3} \quad , \quad B_2 = \frac{\Delta}{3} \end{cases}$$

بنابراین (*) :

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{2\Delta}{3} \cos\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + \frac{\Delta}{3} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) \\ x_2(t) = \frac{-\Delta}{3} \cos\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + \frac{\Delta}{3} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) \end{cases}$$

اگر سیستم پس از رهایش در یکی از مدشیپ‌ها قرار گیرد :

مثلاً مدشیپ اول

$$\begin{cases} \dfrac{x_2(0)}{x_1(0)} = -\dfrac{1}{2} \implies \boxed{x_1(0) = -2\,x_2(0)} \\[2ex] \dfrac{\dot{x}_2(0)}{\dot{x}_1(0)} = \dfrac{-1}{2} \implies \boxed{\dot{x}_1(0) = -2\,\dot{x}_2(0)} \end{cases}$$

در مدشیپ اول $\implies$

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{2\Delta}{3} \cos\left(2\sqrt{\dfrac{k}{m}}\, t\right) \\[2ex] x_2(t) = -\dfrac{\Delta}{3} \cos\left(2\sqrt{\dfrac{k}{m}}\, t\right) \end{cases}$$

مثلاً در مدشیپ دوم

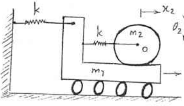
$$\begin{cases} \dfrac{x_2(0)}{x_1(0)} = 1 \implies \boxed{x_2(0) = x_1(0)} \\[2ex] \dfrac{\dot{x}_2(0)}{\dot{x}_1(0)} = 1 \implies \boxed{\dot{x}_2(0) = \dot{x}_1(0)} \end{cases}$$

در مدشیپ دوم $\implies$

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{\Delta}{3} \cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\, t\right) \\[2ex] x_2(t) = \dfrac{\Delta}{3} \cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\, t\right) \end{cases}$$

---

۷۲ مثال : در سیستم دو درجه آزادی نشان داده شده اگر حرکت غلطک نسبت به ارابه (x_2) غلطشی باشد با شرایط اولیه زیر با استفاده از روش ریلی فرکانس‌های حرکت و مدشیپ‌ها و معادلات پاسخ زمانی را بدست آورید . $(m_1 = 2m_2)$



$$\begin{cases} x_1(0) = \Delta \\ x_2(0) = 0 \\ \dot{x}_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2(0) = 0 \end{cases}$$

x_1 حرکت ارابه نسبت به زمین

$\dot{x}_1$ سرعت ارابه نسبت به زمین

x_2 حرکت غلطک نسبت به ارابه

$\dot{x}_2$ سرعت غلطک نسبت به ارابه

$$m_1 = 2m_2 \qquad \vec{x}_{m_2} = \vec{x}_{m_1} + \vec{x}_{m_2/m_1}$$

$$x_2 = R\cdot(\theta_2) \qquad = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$$

$$U = \frac{1}{2}k(x_1)^2 + \frac{1}{2}k(x_2)^2$$

نیروی هر دو فنر در جهت مثبت حرکت می‌کنند.

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2+\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}I_o\dot{\theta}_2^2$$

$$\boxed{U_{max} = T_{max}} \Rightarrow \frac{1}{2}kX_1^2 + \frac{1}{2}kX_2^2 = \frac{1}{2}m_1X_1^2w^2 + \frac{1}{2}m_2(X_2w + X_1 \ldots$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_2R^2\right)\left(\frac{X_2w}{R}\right)^2$$

$$\Rightarrow w^2 = \frac{k(X_1^2+X_2^2)}{3m_2X_1^2 + \frac{3}{2}m_2X_2^2 + 2m_2X_1X_2}$$

$$\boxed{\text{مُدشیپ}\ \frac{X_2}{X_1} = \alpha} \Longrightarrow w^2 = \frac{k(1+\alpha^2)}{3m_2 + \frac{3}{2}m_2\alpha^2 + 2m_2\alpha} = \left(\frac{1+\alpha^2}{\frac{3}{2}\alpha^2+2\alpha+3}\right)\frac{k}{m}$$

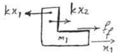
$$\frac{dw^2}{d\alpha} = 0 \Rightarrow 2\alpha\left(\frac{3}{2}\alpha^2+2\alpha+3\right) - (1+\alpha^2)(3\alpha+2) = 0$$

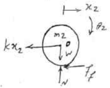
$$3\alpha^3 + 4\alpha^2 + 6\alpha - 3\alpha - 2 - 3\alpha^3 - 2\alpha^2 = 0$$

$$\alpha^2 + \frac{3}{2}\alpha - 1 = 0 \longrightarrow \alpha = \frac{-3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{4\times4}+1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{2} \longrightarrow w_{n1}^2 = \frac{2}{7}\frac{k}{m_2} = \frac{4}{7}\frac{k}{m_1} \\ \alpha_2 = -2 \longrightarrow w_{n2}^2 = \frac{k}{m_2} = \frac{2k}{m_1} \end{cases}$$

روش نیوتن :





$$\begin{cases} \sum F_1 = m_1\ddot{x}_1 \\ \sum F_2 = m_2(\ddot{x}_2 + \ddot{x}_1) \\ \sum M_o = I_o\cdot\ddot{\theta}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -kx_1+kx_2+f_f=m_1\ddot{x}_1 \\ -kx_2-f_f=m_2(\ddot{x}_2+\ddot{x}_1) \\ f_f\cdot R=\frac{1}{2}\frac{m}{2}R^2\left(\frac{\ddot{x}_2}{R}\right)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -kx_1+kx_2+\frac{m_2}{2}\ddot{x}_2=m_1\ddot{x}_1 \\ -kx_2-\frac{m_2}{2}\ddot{x}_2=m_2\ddot{x}_2+m_2\ddot{x}_1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -kX_1+kX_2+\frac{m_2}{2}\left(-X_2\omega^2\right)=2m_2\left(-X_1\omega^2\right) \\ -kX_2+\frac{m_2}{2}\left(X_2\omega^2\right)=m_2\left(-X_2\omega^2\right)+m_2\left(-X_1\omega^2\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(-k+2m_2\omega^2\right)X_1+\left(k-\frac{m_2}{2}\omega^2\right)X_2=0 \\ m_2\omega^2X_1+\left(-k+\frac{3}{2}m_2\omega^2\right)X_2=0\end{cases}$$

مدشیپ $\frac{X_2}{X_1}=\alpha=\frac{k-2m_2\omega^2}{k-\frac{m_2}{2}\omega^2}$

$$\left|\ \ \right|=0 \Rightarrow k^2-\frac{3}{2}km_2\omega^2-2km_2\omega^2+3m_2^2\omega^4-km_2\omega^2+\frac{m_2^2}{2}\omega^4=0 \Rightarrow \omega^4-\frac{9}{7}\frac{k}{m_2}\omega^2+\frac{2}{7}\left(\frac{k}{m_2}\right)^2=0$$

$$\Rightarrow \omega^2=\left(\frac{9}{14}\pm\sqrt{\frac{81}{49\times4}-\frac{2}{7}}\right)\frac{k}{m_2} \begin{cases} \omega_{n_1}^2=\frac{2k}{7m_2}=\frac{4k}{7m_1}, & \alpha_1=\frac{1}{2} \\ \omega_{n_2}^2=\frac{k}{m_2}=\frac{2k}{m_1}, & \alpha_2=-2\end{cases}$$

چون فرکانس طبیعی به دستگاه ارجاع بستگی ندارد

خیلی مهم

اگر فرض می‌کردیم که x_2 حرکت غلطک نسبت به زمین می‌باشد مودشیپ‌ها تغییر می‌کرد ولی فرکانس‌های حرکت ثابت بود:

$$\frac{X_2}{X_1} \rightarrow \frac{X_2+X_1}{X_1}=\frac{\alpha+1}{1}$$

$$\Theta_1=\left(\frac{x_2-x_1}{R}\right)$$

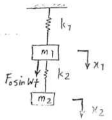
$$\begin{cases}\alpha_1=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2} \\ \alpha_2=-2+1=-1\end{cases}$$

$$T=\frac{1}{2}(2m)\dot{x}_2^2+\frac{1}{2}I_o\underbrace{\left(\dot{\Theta}_1\right)^2}_{\left(\frac{\dot{x}_2-\dot{x}_1}{R}\right)^2}+\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2$$

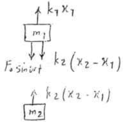
* معادلات با پاسخ زمانی هماهنگ مطلق حاصل می‌شوند.

$$U=\frac{1}{2}kx_2^2+\frac{1}{2}k\left(x_2-x_1\right)^2$$

* ارتعاش اجباری دو درجه آزادی و جاذب ارتعاش :



فرض $x_2 > x_1$



$$\begin{cases} -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) + F_0 \sin wt = m_1 \ddot{x}_1 \\ -k_2(x_2 - x_1) = m_2 \ddot{x}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \sin wt \\ x_2 = X_2 \sin wt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-m_1 X_1 w^2 + k_1 X_1 - k_2 X_2 + k_2 X_1) = F_0 \sin wt \\ (-m_2 X_2 w^2 + k_2 X_2 - k_2 X_1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-m_1 w^2 + k_1 + k_2) X_1 - k_2 X_2 = F_0 \\ -k_2 X_1 + (k_2 - m_2 w^2) X_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -m_1 w^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 w^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

روش کرامر $X_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} F_0 & -k_2 \\ 0 & k_2 - m_2 w^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -m_1 w^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 w^2 \end{vmatrix}}$

روش کرامر $X_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} -m_1 w^2 + k_1 + k_2 & F_0 \\ -k_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -m_1 w^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 \end{vmatrix}}$