روش Bairstow برای یافتن ریشه‌های مختلط

این روشی است برای یافتن دو عدد حقیقی r و q بطوری‌که چندجمله‌ای

$$p(x) = a_\circ x^n + \cdots + a_{n-۱}x + a_n$$

بر تابع درجه دوم

$$x^۲ - rx - q$$

بخش‌پذیر باشد(و این روش برای یافتن ریشه‌های مختلط بکار می‌رود، برای ریشه‌های حقیقی از روش نیوتن استفاده می‌شود).

بیائید تقسیم انجام دهید:

$$p(x) = p_۱(x)(x^۲ - rx - q) + Ax + B \qquad (*)$$

که در آن درجه $p_۱(x)$ برابر $n - ۲$ است. ضرایب به r و q بستگی دارند. پس آنها را بصورت

$$\begin{cases} A = A(r,q) \\ B = B(r,q) \end{cases}$$

می‌نویسیم. هدف آن است که r و q را طوری تعیین کنیم که

$$\begin{cases} A(r,q) = \circ \\ B(r,q) = \circ \end{cases}$$

برای یافتن ریشه‌های این دستگاه دو معادله دو مجهول (در حالت کلی غیرخطی) از روش نیوتن استفاده می‌کنیم:

$$(**) \qquad \begin{bmatrix} r_{i+۱} \\ q_{i+۱} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_i \\ q_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial A}{\partial r} & \frac{\partial A}{\partial q} \\ \frac{\partial B}{\partial r} & \frac{\partial B}{\partial q} \end{bmatrix}^{-۱}_{\substack{r=r_i \\ q=q_i}} \cdot \begin{bmatrix} A(r_i,q_i) \\ B(r_i,q_i) \end{bmatrix}$$

اما برای آنکه بتوان $(*)$ را انجام داد باید توابع

$$A_r = \frac{\partial A}{\partial r}\ ,\ A_q = \frac{\partial A}{\partial q}\ ,\ B_r = \frac{\partial B}{\partial r}\ ,\ B_q = \frac{\partial B}{\partial q}$$

را بدست آورد. برای این منظور بیائید از رابطه $(*)$ که برای هر x برقرار است مشتق بگیرید(x را ثابت بگیرید)

$$(***) \qquad \begin{cases} \circ = \frac{\partial}{\partial r}p(x) = (x^۲ - rx - q)\frac{\partial p_۱(x)}{\partial r} - xp_۱(x) + A_r x + B_r \\ \circ = \frac{\partial}{\partial q}p(x) = (x^۲ - rx - q)\frac{\partial p_۱(x)}{\partial q} - p_۱(x) + A_q x + B_q \end{cases}$$

حال $p_1(x)$ را بر $x^2 - rx - q$ تقسیم کنید

$$p_1(x) = p_2(x)(x^2 - rx - q) + A_1 x + B_1 \qquad (****)$$

اگر فرض کنیم که معادله $x^2 - rx - q = 0$ دارای دو ریشه متمایز x_0 و x_1 است، آنگاه

$$p_1(x_k) = A_1 x_k + B_1 \qquad k = 0, 1$$

حال در روابط $(***)$ قرار دهید $x = x_k$:

$$\begin{cases} -x_k(A_1 x_k + B_1) + A_r x_k + B_r = 0 \\ -(A_1 x_k + B_1) + A_q x_k + B_q = 0 \end{cases} \qquad k = 0, 1$$

معادله دوم برحسب x_k معادله‌ای خطی است که دو ریشه متمایز x_0 و x_1 دارد، پس سمت چپ بایستی چندجمله‌ای ثابت صفر باشد.

$$A_1 = A_q \qquad , \qquad B_1 = B_q$$

فلذا معادله اول را می‌توان بدین شکل نوشت:

$$-x_k^2 A_q + x_k(A_r - B_q) + B_r = 0 \qquad , \qquad k = 0, 1$$

اما فرض کرده‌ایم که $x_k^2 = r x_k + q$ $(k = 0, 1)$، فلذا

$$x_k(A_r - B_q - A_q \cdot r) + B_r - A_q \cdot q = 0 \qquad , \qquad k = 0, 1$$

باز به همان دلیلی که در بالا آمد، می‌بایستی که ضرایب صفر باشند:

$$\begin{cases} A_r - B_q - A_q \cdot r = 0 \\ B_r - A_q \cdot q = 0 \end{cases}$$

این دو تساوی همراه دو تساوی دیگر که در بالا آمدند بدین شکل درمی‌آیند:

$$\begin{cases} A_q &= A_1 \\ B_q &= B_1 \\ A_r &= rA_1 + B_1 \\ B_r &= qA_1 \end{cases}$$

پس برای یافتن چهار مقدار A_r، B_r، A_q و B_q باید که A_1 و B_1 حساب شوند و هم‌چنین باید که $A(r,q)$ و $B(r,q)$ را حساب کنیم. در واقع با فرض

$$\begin{aligned} p_1(x) &= b_0 x^{n-2} + \cdots + b_{n-2} \\ p(x) &= a_0 x^n + \cdots + a_n \end{aligned}$$

در $(*)$ خواهیم داشت:

$$\begin{array}{rcl} b_۰ &=& a_۰ \\ b_۱ &=& b_۰ r + a_۱ \\ b_i &=& b_{i-۲} q + b_{i-۱} r + a_i \qquad i = ۲, ۳, \cdots, n-۲ \\ A &=& b_{n-۳} q + b_{n-۲} r + a_{n-۱} \\ B &=& b_{n-۲} q + a_n \end{array}$$

چون ضرایب چندجمله‌ای $p(x)$ در دسترس هستند، از بالا به پائین که حرکت کنیم مقادیر A و B و ضرایب چندجمله‌ای $p_۱(x)$ بدست می‌آیند. سپس با استفاده از رابطه $(***)$، و همین روش هرنر مقادیر $A_۱$ و $B_۱$ بدست می‌آیند.

یک تکرار دلخواه از این روش بدین صورت انجام می‌گیرد: جدولی هورنری شکل مانند

r	$a_۰$	$a_۱$	$a_۲$	$\cdots$	$a_{n-۱}$	a_n
q		$r\,b_۰$	$r\,b_۱$	$\cdots$	$r\,b_{n-۲}$	صفر
			$q\,b_۰$	$\cdots$	$q\,b_{n-۳}$	$q\,b_{n-۲}$
	$b_۰$	$b_۱$	$b_۲$	$\cdots$	A	B
		$r\,c_۰$	$r\,c_۱$	$\cdots$	صفر	
			$q\,c_۰$	$\cdots$	$r\,c_{n-۳}$	
	$c_۰$	$c_۱$	$c_۲$	$\cdots$	$B_۱$	

ترتیب دهید.

مثال با شروع از $(r_۰, q_۰) = (-۲, -۲)$، دو تکرار از روش Bairstow را بکار برده تا عامل درجه دومی از $x^۴ - ۳x^۳ + ۲۰x^۲ + ۴۴x + ۵۴$ را تخمین بزنید.

حل

-2	1	-3	20	44	54
-2		-2	10	-56	0
			-2	10	-56
	1	-5	28	$\boxed{-۲}$	$\boxed{-2}$
		-2	14	0	
			-2	14	
	1	-7	$\boxed{۴۰}$	$\boxed{۱۲}$	

و از آنجا $A = -۲$ و $B = -۲$ و $A_۱ = ۴۰$ و $B_۱ = ۱۲$.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A_q &=& A_۱ = ۴۰ \\ B_q &=& B_۱ = ۱۲ \\ A_r &=& rA_۱ + B_۱ = (-۲)(۴۰) + (۱۲) = -۶۸ \\ B_r &=& qA_۱ = (-۲)(۴۰) = -۸۰ \end{array} \right.$$

سپس

$$\begin{bmatrix} r_۱ \\ q_۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ \\ -۲ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -۶۸ & ۴۰ \\ -۸۰ & ۱۲ \end{bmatrix}^{-۱} \cdot \begin{bmatrix} -۲ \\ -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲/۰۲۳۵ \\ -۱/۹۸۹۹ \end{bmatrix} \qquad (**)$$

تکرار بعد را برای بدست آوردن $r_۲$ و $q_۲$ انجام دهید.

فرمول اویلر–مکلورن

چندجمله‌ای برنولی $B_n(x)$ $(0 \leq n)$ بدین شکل تعریف می‌شود:

$$B_0(x) \equiv 1 \qquad , \qquad B_1(x) \equiv x - \frac{1}{2}$$

$$B'_{k+1}(x) \equiv (k+1)B_k(x) \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

سپس به استقراء معلوم می‌شود که ضریب پیشروی هر $B_n(x)$ مساوی ۱ است. حال نشان می‌دهیم که اگر قیدهای

$$0 = B_3(0) = B_3(1) = B_5(0) = B_5(1) = B_7(0) = B_7(1) = \cdots \qquad (*)$$

فرض شود، آنگاه چندجمله‌ای‌های برنولی منحصراً مشخص می‌شوند. پس فرض استقراء بگیرید که برای $1 \leq l$ چندجمله‌ای‌های

$$B_0(x)\ ,\ B_1(x)\ ,\ \cdots\ ,\ B_{2l-2}(x)\ ,\ B_{2l-1}(x) \qquad (1)$$

مشخص شده باشند. آنگاه

$$B'_{2l}(t) = (2l)B_{2l-1}(t) \quad \Rightarrow \quad B_{2l}(x) = (2l)\int_0^x B_{2l-1}(t)dt + c \quad \Rightarrow$$

$$B_{2l+1}(y) = (2l+1)\int_0^y B_{2l}(x)dx + d = (2l+1)(2l)\int_0^y\int_0^x B_{2l-1}(t)dtdx + (2l+1)cy + d \qquad (**)$$

حال در طرفین قرار دهید $y = 0$ و از فرض $(*)$ استفاده کنید تا بدست آورید $d = 0$. حال در تساوی بالا بگیرید $y = 1$ تا بدست آید:

$$0 = (2l+1)(2l)\int_0^1\int_0^x B_{2l-1}(t)dtdx + (2l+1)c$$

که از اینجا مقدار c هم مشخص می‌شود. پس در $(**)$ مقدار $B_{2l+1}(y)$ کاملاً مشخص می‌شود. پس به دنباله (۱) دو چندجمله‌ای دیگر اضافه می‌شود. بدین ترتیب به استقراء تمامی چند جمله‌ای‌های برنولی به دست می آیند:

$$B_0(x) \equiv 1 \qquad , \qquad B_1(x) \equiv x - \frac{1}{2} \qquad , \qquad B_2(x) \equiv x^2 - x + \frac{1}{6}$$

$$B_3(x) \equiv x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \qquad , \qquad B_4(x) \equiv x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30} \qquad , \qquad \dots$$

حکم.

الف) برای اندیس‌های فرد و حداقل مساوی ۳ داریم $B_k(0) = B_k(1) = 0$

ب) برای تمامی اندیس‌ها داریم $B_k(1-x) = (-1)^k B_k(x)$

پس برای k زوج چندجمله‌ای $B_k(x)$ نسبت به $x = \frac{1}{2}$ متقارن است در حالی که برای k فرد نسبت به $x = \frac{1}{2}$ پادمتقارن است.

پ) برای همه اندیس‌ها حداقل مساوی ۲ داریم $B_k(0) = B_k(1)$ [این مقدار مشترک را به B_k نمایش دهید. این اعداد را اعداد برنولی می‌نامند].

ث) برای همه اندیس‌های حداقل مساوی ۱ داریم $\int_0^1 B_k(x)dx = 0$

برهان. قسمت (الف) را خود قبلاً تحمیل کرده بودیم. برای قسمت (ب) قرار دهید $C_k(x) = (-1)^k B_k(1-x)$ آنگاه

$$(k \geq 1) \qquad C'_{k+1}(x) = (-1)^{k+2} B'_{k+1}(1-x) = (-1)^{k+2}(k+1)B_k(1-x)$$

$$= (-1)^k (k+1) B_k(1-x) = (k+1)C_k(x)$$

پس $C'_{k+1}(x) = (k+1)C_k(x)$. بعلاوه

$$C_0(x) = (-1)^0 B_0(1-x) \equiv 1 \qquad C_1(x) = -B_1(1-x) = x - \frac{1}{2}$$

$$C_{2l+1}(0) = (-1)^{2l+1} B_{2l+1}(1) = 1 \qquad (l \geq 1)$$

$$C_{2l+1}(1) = (-1)^{2l+1} B_{2l+1}(0) = 0 \qquad (l \geq 1)$$

پس دنباله $\{C_0, C_1, \dots\}$ همان خواص مشخص کننده دنباله $\{B_0, B_1, \dots\}$ را دارد. پس این دو دنباله مساوی‌اند، یعنی $C_k(x) = B_k(x)$، پس $(-1)^k B_k(1-x) = B_k(x)$، یعنی (ب) برقرار است. برقراری

قسمت (پ) برای k های فرد نتیجه مستقیم (الف) است برای k های زوج هم نتیجه (ب) است. بالاخره برای (پ):

$$\int_0^1 B_k(x)dx = \frac{1}{k+1}\int_0^1 B'_{k+1}(x)dx = \frac{1}{k+1}[B_{k+1}(1) - B_{k+1}(0)] = 0$$

$\blacksquare$

۱. قضیه . *فرض کنیم* $g \in C^{2m+2}[0,N]$*. آنگاه*

$$\int_0^N g(t)dt = \frac{g(0)}{2} + g(1) + \cdots + g(N-1) + \frac{g(N)}{2} +$$

$$+\sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left[g^{(2k-1)}(0) - g^{(2k-1)}(N)\right] - \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}N\, g^{(2m+2)}(\xi) \qquad (0 \le \xi \le N)$$

برهان. مرحله اول ابتدا تساوی برای $N = 1$ را ثابت می‌کنیم:

$$\int_0^1 B_{2k-1}(t)g^{(2k-1)}(t)dt = \int_0^1 \frac{1}{2k}B'_{2k}(t)g^{(2k-1)}(t)dt =$$

$$\left[\frac{1}{2k}B_{2k}(t)g^{(2k-1)}(t)\right]_{t=0}^{t=1} - \frac{1}{2k}\int_0^1 B_{2k}(t)g^{(2k)}(t)dt =$$

$$\frac{B_{2k}}{2k}\left[g^{(2k-1)}(1) - g^{(2k-1)}(0)\right] - \frac{1}{2k}\int_0^1 B_{2k}(t)g^{(2k)}(t)dt =$$

$$\frac{B_{2k}}{2k}\left[g^{(2k-1)}(1) - g^{(2k-1)}(0)\right] - \frac{1}{(2k)(2k+1)}\int_0^1 B'_{2k+1}(t)g^{(2k)}(t)dt =$$

$$\frac{B_{2k}}{2k}\left[g^{(2k-1)}(1) - g^{(2k-1)}(0)\right] - \frac{1}{(2k)(2k+1)}\left[B_{2k+1}(t)g^{(2k)}(t)\right]_{t=0}^{t=1} + \frac{1}{(2k)(2k+1)}\int_0^1 B_{2k+1}(t)g^{(2k+1)}(t)dt =$$

$$= \frac{B_{2k}}{2k}\left[g^{(2k-1)}(1) - g^{(2k-1)}(0)\right] + \frac{1}{(2k)(2k+1)}\int_0^1 B_{2k+1}(t)g^{(2k+1)}(t)dt \quad (k \ge 1)$$

با استفاده از این رابطه که دو اندیس فرد متوالی را بهم ربط می‌دهد و با استفاده از استقراء ثابت می‌گردد که

$$\int_0^1 g(t)dt = \int_0^1 B'_1(t)g(t)dt = [B_1(t)g(t)]_0^1 - \int_0^1 B_1(t)g'(t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}[g(0)+g(1)] - \int_0^1 B_1(t)g'(t)dt = \frac{1}{2}[g(0)+g(1)] + \frac{B_2}{2!}[g'(0)-g'(1)] - \frac{1}{3!}\int_0^1 B_3(t)g^{(3)}(t)dt$$

$$= \frac{g(0)}{2} + \frac{g(1)}{2} + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)!}[g^{(2k-1)}(0) - g^{(2k-1)}(1)] + \gamma$$

که در آن

$$\gamma = \frac{-1}{(2m+1)!}\int_0^1 B_{(2m+1)}(t) g^{(2m+1)}(t)dt = \frac{-1}{(2m+2)!}\int_0^1 [B_{2m+2}(t) - B_{2m+2}]' g^{(2m+1)}(t)dt$$

$$= \frac{1}{(2m+2)!}\int_0^1 [B_{2m+2}(t) - B_{2m+2}] g^{(2m+2)}(t)dt \qquad [\text{as } B_{2m+2}(1) - B_{2m+2} = 0 \text{ and } B_{2m+2}(0) - B_{2m+2} = 0]$$

اما چون $B_{2m+2}(t) - B_{2m+2}$ روی $[0, 1]$ تغییر علامت نمی‌دهد، پس در ادامه رابطه بالا داریم،

$$= \frac{1}{(2m+2)!} g^{(2m+2)}(\xi) \left\{ \left[\frac{1}{2m+3} B_{2m+3}(t) \right]_0^1 - B_{2m+2} \right\} = \frac{-B_{2m+2}}{(2m+2)!}\, g^{(2m+2)}(\xi) \qquad (0 < \xi < 1)$$

این حکم را برای بازه $[0, 1]$ به اثبات می‌رساند.

مشابهاً برای هر بازه $[i, i+1]$ به طول ۱ خواهیم داشت:

$$\int_i^{i+1} g(t)dt = \frac{g(i) + g(i+1)}{2} + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left[g^{2k-1}(i) - g^{2k-1}(i+1) \right] - \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}\, g^{2m+2}(\xi_i) \quad (i < \xi_i < i+1)$$

حال این عبارت‌ها را برای $i = 0, 1, ..., N-1$ با هم جمع کنید:

$$\int_0^N g(t)dt = \frac{g(0)}{2} + g(1) + \cdots + g(N-1) + \frac{g(N)}{2} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left[g^{2k-1}(0) - g^{2k-1}(N) \right] - \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!} \sum_{i=0}^{N-1} g^{2m+2}(\xi_i)$$

اما طبق قضیه مقدار میانی برای توابع پیوسته، عدد $0 < \xi < N$ موجود است که $\sum_{i=0}^{N-1} g^{2m+2}(\xi_i) = N\ g^{(2m+2)}(\xi)$. پس

$$\int_0^N g(t)dt = \frac{g(0)}{2} + g(1) + \cdots + g(N-1) + \frac{g(N)}{2} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left[g^{2k-1}(0) - g^{2k-1}(N) \right] - \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}\, N\, g^{2m+2}(\xi) \qquad (0 < \xi < N)$$

■

تبصره. این قضیه بالا، فرمول خطا را برای روش ذوزنقه‌ای مرکب بهبود می‌بخشد.

حکم برای چندجمله‌ای‌های برنولی،

الف) $(0 < x < \frac{1}{2}) \qquad 0 < (-1)^m B_{2m-1}(x)$

ب) $(0 < x < 1) \qquad 0 < (-1)^m [B_{2m}(x) - B_{2m}]$ (از اندیس ۲ به بعد)

پس، $B_{2m}(x) - B_{2m}$ بر $[0, 1]$ تغییر علامت نمی‌دهد.

پ) $0 < (-1)^{m+1} B_{2m}$ (از اندیس ۲ به بعد)

برهان. هر سه قسمت را هم‌زمان به استقراء ثابت می‌کنیم: اولاً آنها هر سه برای $m = 1$ برقرار هستند. فرض کنیم برای $m \leq 1$ برقرار باشند. چون $B_{2m+1}(x)$ نسبت به $x = \frac{1}{2}$ پاد متقارن است، پس $B_{2m+1}(\frac{1}{2}) = 0$. همچنین از قسمت (الف) حکم بالا، $B_{2m+1}(0) = 0$. حال اگر قرار می‌بود که $B_{2m+1}(x)$ بر بازه $[0, \frac{1}{2}]$ تغییر علامت دهد، آنگاه وجود سه صفر بر $[0, \frac{1}{2}]$ منجر به یک $0 < \bar{x} < \frac{1}{2}$ می‌شد که $B''_{2m+1}(\bar{x}) = 0$ [قضیه مقدار میانگین برای مشتقات]. از این و با استفاده از رابطه معادله دیفرانسیلی، خواهیم داشت $B_{2m-1}(\bar{x}) = 0$. اما این فرض استقراء را برای قسمت (الف) بر هم می‌زند. پس، $B_{2m+1}(x)$ بر بازه $0 < x < \frac{1}{2}$ تغییر علامت نمی‌دهد. برای تعیین این علامت، ابتدا توجه کنید که بنا به فرض استقراء برای قسمت (پ)، عدد $0 < \delta < \frac{1}{2}$ موجود است که برای هر $0 < c < \delta$ داریم $0 < (-1)^{m+1} B_{2m}(c)$ چرا مقادیر $(-1)^{m+1} B_{2m}(c)$ نزدیک $(-1)^{m+1} B_{2m}(0)$ هستند. حال یک نقطه $0 < x < \delta$ درنظر بگیرید و قضیه مقدار میانگین را بکار برید:

$$\begin{aligned}
(-1)^{m+1} B_{2m+1}(x) &= (-1)^{m+1} [B_{2m+1}(x) - B_{2m+1}(0)] \\
&= (-1)^{m+1}\, x\, B'_{2m+1}(c) \qquad (0 < c < \delta) \\
&= x(2m+1)(-1)^{m+1} B_{2m}(c) > 0
\end{aligned}$$

پس علامت $(-1)^{m+1} B_{2m+1}(x)$ بر بازه $0 < x < \frac{1}{2}$ باید مثبت باشد. این حکم استقراء را برای (الف) ثابت می‌کند. سپس از برقرای (الف) برای $m+1$ (یعنی برقرارای $0 < (-1)^{m+1} B_{2m+1}(x)$ برای $0 < x < \frac{1}{2}$) داریم

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^{m+1}}{2m+2} [B_{2m+2}(x) - B_{2m+2}] &= \frac{(-1)^{m+1}}{2m+2} \int_0^x B'_{2m+2}(t)dt \\
&= \int_0^x (-1)^{m+1} B_{2m+1}(t)dt > 0 \qquad (0 < x < \tfrac{1}{2})
\end{aligned}$$

پس $(-1)^{m+1}[B_{2m+2}(x) - B_{2m+2}]$ بر $0 < x < \frac{1}{2}$ مثبت است. اما چون $B_{2m+2}(x)$ نسبت به $x = \frac{1}{2}$ متقارن است، فی‌الواقع رابطه $(-1)^{m+1}[B_{2m+2}(x) - B_{2m+2}] > 0$ برای هر $0 < x < 1$ برقرار است. این حکم استقراء را برای (ب) ثابت می‌کند. بالاخره از $\int_0^1 B_{2m+2}(x)dx = 0$ (حکم بالا)، داریم

$$(-1)^{m+2} B_{2m+2} = (-1)^{m+1} \int_0^1 [B_{2m+2}(x) - B_{2m+2}]dx > 0$$

و این حکم استقراء را برای (پ) ثابت می‌کند. ■

کوادراتور گاووسی

فرمول‌های نیوتن—گوته به شکل $\sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$ هستند که در آن x_i ها به فاصله مساوی از یکدیگر قرار دارند. در روش گاووسی به x_i ها به عنوان مجهول نگاه می‌شود و آن‌ها همراه با w_iها چنان تعیین می‌شوند که حداکثر رتبه دقت بدست آید. خواهیم دید که مرتبه دقت روش گاوسی برابر $2n-1$ است (n تعداد گره‌ها است) و x_iها و w_iها منحصراً تعیین می‌شوند.

قرارداد می‌کنیم که

$\overline{\prod}_n$ = مجموعه کلیه چندجمله‌ای‌های درجهn که ضریب پیشرو آنها مساوی ۱ است

درادامه بحث، با تابع وزن w بر روی بازه (متناهی یا نامتناهی) $[a,b]$ سروکار داریم که خواص زیر را باید داشته باشد:

الف) بر $[a,b]$ داریم $w(x) \geq 0$ و w اندازه‌پذیر است (مثلاً اگر w پیوسته باشد).

ب) گشتاورهای $\int_a^b x^k\, w(x)dx$ $(k=1,2,\ldots)$ موجود و متناهی هستند.

پ) اگر $s(x)$ چندجمله‌ای نامنفی بر $[a,b]$ باشد که $\int_a^b w(x)\, s(x)dx = 0$، آنگاه داریم $s(x) \equiv 0$.

برای یک تابع وزن $w(x)$، تعریف می‌کنیم

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$$

که در اینجا بازه انتگرالگیری $[a,b]$ بازه متناهی یا نامتناهی است. می‌گوییم که f و g نسبت به w متعامد هستند درصورتی که $(f,g)=0$. قابل توجه است که برای توابع f و h و g داریم $(f,gh)=(fg,h)$.

مثال ضرب داخلی توابع $f(x)=x$ و $g(x)=x^2$ را نسبت به تابع وزن $w(x)=x^2$ بر بازه $[2,5]$ بدست آورید. طول f تحت این تایع وزن چیست؟.

حل

$$\langle f\,,\,g\rangle = \int_2^5 f(x)g(x)w(x)dx = \int_2^5 x^5 dx = \frac{1}{6}x^6\Big]_2^5 = \frac{15561}{6}$$

$$\|f\|^2 = \int_2^5 f(x)^2 w(x)dx = \int_2^5 x^4 dx = \frac{1}{5}x^5\Big]_2^5 = \frac{3093}{5}$$

$$\Rightarrow \|f\| = \sqrt{\frac{۳۰۹۳}{۵}} \approx ۲۴/۸۷$$

۱. قضیه . *دنباله چندجمله‌ایهای منحصربفرد*

$$p_j \in \overline{\prod}_j \qquad\qquad (j = ۰, ۱, ...)$$

موجود است که

$$(p_i, p_k) = ۰ \qquad i \neq k$$

این چندجمله‌ایها به روش بازگشتی بدست می‌آیند

$$\begin{aligned} &p_۰(x) \equiv ۱ \\ &p_{i+۱}(x) \equiv (x - \delta_{i+۱})p_i(x) - \gamma_{i+۱}^۲\, p_{i-۱}(x) \qquad (i \geq ۰) \qquad (*) \end{aligned}$$

که در آن $p_{-۱}(x) = ۰$ *و*

$$\delta_{i+۱} = \frac{(xp_i\, ,\, p_i)}{(p_i\, ,\, p_i)} \qquad\qquad (i \geq ۰)$$

$$\gamma_{i+۱}^۲ = \begin{cases} ۰ & i = ۰ \\ \\ \frac{(p_i\, ,\, p_i)}{(p_{i-۱}\, ,\, p_{i-۱})} & i > ۰ \qquad (**) \end{cases}$$

برهان. قرار دهید $p_۰(x) \equiv ۱$. فرض کنید که به استقراء چندجمله‌ای‌های $\{p_۰, ..., p_i\}$ را ساخته باشیم که در روابط گفته شده صدق کنند. حال به دنبال چندجمله‌ای $p_{i+۱}$ می‌گردیم که در روابط بالا صدق کند. اولاً توجه کنید که چندجمله‌ای

$$\{p_۰(x)\ ,\ p_۱(x)\ ,\ ...\ ,\ p_i(x)\ ,\ xp_i(x)\} \qquad (***)$$

همگی دارای ضریب پیشرو ۱ هستند.

مرحله بعد چندجمله‌ای‌های در $(***)$ مستقل هستند: در واقع فرض کنید

$$c_۰p_۰(x) + c_۱p_۱(x) + \cdots + c_{i-۱}p_{i-۱}(x) + c_ip_i(x) + d_i\, x\, p_i(x) = ۰$$

ضریب بزرگترین درجه برابر d_i است، لذا $d_i = ۰$. پس رابطه بالا تقلیل می‌یابد به

$$c_۰p_۰(x) + c_۱p_۱(x) + \cdots + c_{i-۱}p_{i-۱}(x) + c_ip_i(x) = ۰$$

ضریب پیشرو چندجمله‌ای سمت چپ برابر c_i است، پس $c_i = ۰$. پس

$$c_۰ p_۰(x) + c_۱ p_۱(x) + \cdots + c_{i-۱} p_{i-۱}(x) = ۰$$

با ادامه روند بالا معلوم می‌شود که همه c_iها صفراند.

<u>**مرحله بعد**</u> چون چندجمله‌ایها در $(***)$ مستقل هستند و تعدادشان $i+۲$ است، پس فضای چندجمله‌ای‌های $\prod_{j+۱}$ را تولید می‌کنند. لذا ضرایب c_k $(۰ \leq k \leq i)$ موجودند که

$$p_{i+۱}(x) = c_۰ p_۰(x) + c_۱ p_۱(x) + \cdots + c_{i-۱} p_{i-۱}(x) + (x - \delta_{i+۱}) p_i(x)$$

حال ضرایب را طوری تعیین می‌کنیم که این چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای‌های $\{p_۰, ..., p_i\}$ عمود باشد. در واقع با اثر داده

$$۰ = (xp_i, p_i) - \delta_{i+۱}(p_i, p_i)$$

و مشابهاً

$$\begin{aligned} ۰ &= (xp_i, p_{j-۱}) + c_{j-۱}(p_{j-۱}, p_{j-۱}) \qquad (j \leq i) \\ &= (p_i, xp_{j-۱}) + c_{j-۱}(p_{j-۱}, p_{j-۱}) \end{aligned}$$

اگر می‌داشتیم $(p_j, p_j) = ۰$، آنگاه معادلاً می‌داشتیم $\int_a^b p_j^۲(x) w(x) dx = ۰$. اما سپس چون $p_j^۲(x)$ یک چندجمله‌ای نامنفی است، لازم می‌آمد که $p_j(x) = ۰$. این تناقض نشان می‌دهد که $(p_j, p_j) \neq ۰$، پس از بالا

$$\delta_{i+۱} = \frac{(xp_i, p_i)}{(p_i, p_i)}$$

مشابهاً $(p_{j-۱}, p_{j-۱}) \neq ۰$ و

$$c_{j-۱} = -\frac{(xp_{j-۱}, p_i)}{(p_{j-۱}, p_{j-۱})}$$

طبق فرض استقراء

$$p_j(x) = (x - \delta_j) p_{j-۱}(x) - \gamma_j^۲ \, p_{j-۲}(x)$$

$$\Rightarrow \quad xp_{j-۱}(x) = p_j(x) + \delta_j \, p_{j-۱}(x) + \gamma_j^۲ \, p_{j-۲}(x)$$

$$\Rightarrow \quad (xp_{j-۱}, p_i) = (p_j, p_i) \qquad (j \leq i)$$

$$\Rightarrow \quad c_{j-1} = -\frac{(p_j,p_i)}{(p_{j-1},p_{j-1})} = \begin{cases} -\gamma_{i+1}^2 & j=i \\ 0 & j<i \end{cases}$$

بالاخره، از فرمول بازگشتی که بین این چندجمله‌ای‌ها بدست آمده منحصربفرد بودن آنها محرز است. ■

با توجه به منحصر بفرد بودن این چندجمله‌ای‌ها، آنها را به روش زیر هم می‌توان بدست آورد:

ابتدا قرار دهید $p_0(x) \equiv 1$. سپس به استقراء اگر p_0 و ... و p_{k-1} ساخته شده باشند، آنگاه چندجمله‌ای $p_k(x) = x^k + \sum_{j=0}^{k-1} a_j p_j(x)$ را بگونه‌ای بدست می آوریم که بر چندجمله‌ای‌های ماقبل عمود باشد:

$$\langle p_k,p_i\rangle = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \langle p_k,x^k\rangle + a_i\langle p_i,p_i\rangle = 0 \qquad (i=0,...,k-1)$$

$$\Rightarrow \quad a_i = -\frac{\langle p_k,x^k\rangle}{\langle p_i,p_i\rangle}$$

<u>**مثال**</u> اولین چهار عضو از چندجمله‌ای‌های متعامد نسبت به وزن $w(x)=1$ بر $[-1,1]$ را بدست آورید.

<u>**حل**</u> با فرض $p_0 = 1$:

$$\langle p_0,p_0\rangle = \int_{-1}^{1} p_0^2(x)w(x)dx = \int_{-1}^{1} dx = 2$$

$$\langle p_0,x\rangle = \int_{-1}^{1} p_0(x)xw(x)dx = \int_{-1}^{1} xdx = 0$$

<u>**مرحله بعد**</u> با قراردادن $p_1(x) = x + ap_0(x)$، باید که $a = -\frac{\langle p_0,x\rangle}{\langle p_0,p_0\rangle} = 0$. لذا $p_1(x) = x$.

<u>**مرحله بعد**</u> با قراردادن $p_2(x) = x^2 + a_0p_0(x) + a_1p_1(x)$، باید که

$$\langle p_1,p_1\rangle = \int_{-1}^{1} p_1(x)^2 w(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{2}{3}$$

$$\langle p_0,x^2\rangle = \int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{2}{3}$$

$$\langle p_1,x^2\rangle = \int_{-1}^{1} x^3dx =$$

$$a_0 = -\frac{(p_0,x^2)}{(p_0,p_0)} = \frac{\int_{-1}^{1} x^2dx}{2} = -\frac{\frac{2}{3}}{2} = -\frac{1}{3}$$

$$a_1 = -\frac{(p_1,x^2)}{(p_1,p_1)} = -\frac{\int_{-1}^{1} x^3dx}{\int_{-1}^{1} x^2dx} = -\frac{0}{(\frac{2}{3})} = 0$$

پس $p_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}p_0(x) = x^2 - \frac{1}{3}$.

<u>مرحله بعد</u> با قراردادن $p_3(x) = x + a_0 p_0(x) + a_1 p_1(x) + a_2 p_2(x)$، باید که

$$a_0 = -\frac{(p_0, x^3)}{(p_0, p_0)} = \frac{\int_{-1}^{1} x^3 dx}{2} = 0$$

$$a_1 = -\frac{(p_1, x^3)}{(p_1, p_1)} = -\frac{\int_{-1}^{1} x^4 dx}{(\frac{2}{3})} = -\frac{(\frac{2}{5})}{(\frac{2}{3})} = -\frac{3}{5}$$

$$a_2 = -\frac{(p_2, x^3)}{(p_2, p_2)} = -\frac{\int_{-1}^{1} (x^5 - \frac{1}{3}x^3) dx}{\int_{-1}^{1} (x^2 - \frac{1}{3})^2 dx} = 0$$

پس $p_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$

<u>تبصره</u> چندجمله‌ای‌های متعامد $\{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$ که به روش گرام—اشمیت برای وزن $w(x) = 1$ بر $[-1, 1]$ بدست می‌آیند به چندجمله‌ای‌های لژاندر معروف هستند. معمولاً در کاربردها این چندجمله‌ای‌ها را در ثابت‌هایی ضرب کرده به نحوی که داشته باشیم $P_n(1) = 1$ (که لذا ضرایب پیشرو آنها دیگر برابر ۱ نیست). با این محدودیت، این چندجمله‌ای‌ها دارای خاصیت تراجعی زیر هستند:

$$P_{k+1}(x) = \frac{2k+1}{k+1} x P_k(x) - \frac{k}{k+1} P_{k-1}(x)$$

حال برگردیم به بحث در باره چندجمله‌ای‌هایی که در قضیه قبل بدست آوردیم:

۲. نتیجه. برای هر $p \in \prod_{n-1}$ داریم $(p, p_n) = 0$.

برهان. در یکی از مراحل اثبات بالا دیدیم که برای هر i چندجمله‌ای‌های $\{\{p_0(x), p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x)\}$ مستقل هستند. چون تعداد آنها n است، پس فضای $\prod_{n-1}$ را تولید می‌کنند. یعنی هر چندجمله‌ای در $\prod_{n-1}$ به صورت ترکیبی خطی از آنها نوشت. اما چون آنها بر p_n عمود هستند، پس همه $\prod_{n-1}$ بر p_n عمود است. ■

۳. قضیه . *ریشه‌های چندجمله‌ای p_n همگی حقیقی و ساده هستند و همگی در بازه (a, b) قرار دارند.*

برهان. <u>مرحله اول</u> در اینجا ثابت می‌کنیم که p_n ریشه‌ای در (a, b) با مرتبه تکرار فرد دارد. فرض خلف بگیرید که چنین چیزی درست نباشد. پس $p_n(x)$ برروی $[a, b]$ تغییر علاوت نمی‌دهد. چون $p_n(x)$ چندجمله‌ای ناصفر است، پس بنا به خاصیت پ) از w،

$$(p_n, 1) = \int_a^b w(x) p_n(x) dx \neq 0$$

که این خلاف نتیجه بالا است.

مرحله دوم به اتکاء بر مرحله قبل، p_n شامل ریشه‌هایی در (a,b) از مرتبه تکرار فرد است که آنها را بصورت زیر نامگذاری می‌کنیم:

$$a < x_۱ < \cdots < x_k < b$$

قرار دهید $q(x) = \prod_{j=۱}^{k}(x-x_j)$. آنگاه $p_n(x)q(x)$ در $[a,b]$ تغییر علامت نمی‌دهد و چون چندجمله‌ای ناصفر است، پس

$$(p_n, q) = \int_a^b w(x)p_n(x)q(x)dx \neq ۰$$

اما مجدداً این متناقض با نتیجه بالا است مگر آنکاه درجه‌های p_n و q مساوی باشند که در آن صورت لازم می آید که $p_n = q$ (چرا که p_n و q با ضریب پیشرو ۱ هستند). رابطه $p_n = q$ دقیقاً به معنی آن است که ریشه‌های p_n ساده و حقیقی هستند و همگی در (a,b) قرار دارند. ■

۴. قضیه . *درصورتی که* $\{t_۰, ..., t_{n-۱}\}$ *اعداد متمایز باشند، آنگاه ماتریس*

$$A = \begin{bmatrix} p_۰(t_۰) & \cdots & p_۰(t_{n-۱}) \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n-۱}(t_۰) & \cdots & p_{n-۱}(t_{n-۱}) \end{bmatrix}$$

وارونپذیر است.

برهان. فرض کنیم $c = (c_۰, ..., c_{n-۱})$ چنان باشد که $cA = ۰$ (برای اثبات وارونپذیری A باید نشان دهیم که $c = ۰$). چندجمله‌ای $q(x) = \sum_{i=۰}^{n-۱} c_i\, p_i(x)$ رادرنظر بگیرید. این چندجمله‌ای از درجه کمتر از n است که n ریشه متمایز $\{t_۰, ..., t_{n-۱}\}$ دارد. اما چون چندجمله‌ای‌های $\{p_۰(x)\,,\, p_۱(x)\,,\, ...\,,\, p_{n-۱}(x)\}$ مستقل هستند، از $q(x) \equiv ۰$ لازم می آید که $c_۰ = \cdots = c_{n-۱} = ۰$. ■

حال قضیه اصلی این بخش:

۵. قضیه .

الف) *فرض کنیم* $\{x_۱, ..., x_n\}$ *ریشه‌های چندجمله‌ای* $p_n(x)$ *باشند و فرض کنیم* $\{w_۱, ..., w_n\}$ *جواب*

دستگاه

$$\begin{bmatrix} p_0(x_1) & \cdots & p_0(x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n-1}(x_1) & \cdots & p_{n-1}(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (p_0, p_0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

باشد. آنگاه همگی $w_i > 0$ و بعلاوه رابطه

$$\int_a^b \omega(x)\, p(x) dx = \sum_{i=1}^{n} w_i p(x_i) \qquad (**)$$

برای چندجمله‌ای‌های $p \in \prod_{2n-1}$ برقرار است (یعنی کوادراتور برای این چندجمله‌ای‌ها دقیق است).

ب) *بالعکس اگر اعداد w_i چنان باشند که رابطه $(**)$ برای هر $p \in \prod_{2n-1}$ برقرار باشد، آنگاه x_i ها ریشه‌های p_n هستند و رابطه $(*)$ برقرار است.*

پ)) *فرمول انتگرال‌گیری $\sum_{i=1}^{n} w_i\, p(x_i)$ دارای مرتبه دقت $2n-1$ است، یعنی رابطه $(**)$ تنها برای چندجمله‌ای‌های در $\prod_{2n-1}$ درست است و برای بعضی از اعضای $\prod_{2n}$ درست نیست.*

برهان. چنانکه در بالا دیدیم، ریشه‌های $\{x_1, ..., x_n\}$ از p_n ساده و اعدادی در (a, b) هستند (از جمله دوبدو متمایز هستند). سپس بنابه قضیه قبل، دستگاه $(*)$ دارای جواب منحصر بفرد است؛ جواب منحصربفرد $\{w_1, ..., w_n\}$ رادرنظر بگیرید. حال برای هر $p \in \prod_{2n-1}$، با تقسیم بر p_n،

$$p(x) = p_n(x) q(x) + r(x)$$

که $r \in \prod_{n-1}$. چون درجه p حداکثر برابر $2n-1$ است، پس درجه q حداکثر $n-1$ است. سپس هر دوی q و r را می‌توان به‌صورت ترکیب خطی از $\{p_0, ..., p_{n-1}\}$ نوشت.:

$$q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k\, p_k(x) \qquad\qquad r(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k\, p_k(x)$$

سپس

$$\begin{aligned}
\int_a^b \omega(x)p(x)dx &= (p,1) = (p_n q, 1) + (r,1) = (p_n, q) + (r,1) = (r,1) = \beta_0(1,1)\\
&= [\beta_0, \dots, \beta_{n-1}] \begin{bmatrix} (p_0, p_0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\\
&= [\beta_0, \dots, \beta_{n-1}] \begin{bmatrix} p_0(x_1) & \cdots & p_0(x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n-1}(x_1) & \cdots & p_{n-1}(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}\\
&= [\, \textstyle\sum_k \beta_k\, p_k(x_1)\,,\, \dots\,,\, \sum_k \beta_k\, p_k(x_n)\,] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}\\
&= [\, r(x_1)\,,\, \dots\,,\, r(x_n)\,] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \qquad (***)
\end{aligned}$$

اما از $p_n(x_i) = 0$، داریم $p(x_i) = r(x_i)$، فلذا در ادامه $(***)$ می‌توان نوشت

$$= [\, p(x_1)\,,\, \dots\,,\, p(x_n)\,] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

پس رابطه $(**)$ برقرار است. این قسمتی از (الف) را ثابت می‌کند به استثنای اینکه هنوز نشان نداده که $w_i > 0$.

مرحله بعد فرض کنیم w_iها و x_iها نقاطی باشند که رابطه $(**)$ برای هر $p \in \prod_{2n-1}$ برقرار باشد. نشان می‌دهیم که $w_i > 0$ (این اثبات (الف) را کامل خواهد کرد). در واقع رابطه $(**)$ را برای $p(x) = \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} (x - x_k)^2$ از $\prod_{2n-1}$ بکار برید. چون این چندجمله‌ای نامنفی است و متحداً صفر نیست، پس ω—انتگرال‌اش مثبت است:

$$0 < \int_a^b \omega\, p(x)dx = \sum_{i=1}^{n} w_i\, p(x_i) = w_j \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} (x_j - x_k)^2$$

فلذا $w_j > ۰$.

<u>**مرحله بعد**</u> حال به اثبات (پ) می‌پردازیم: فرض خلف بگیریم که w_iهایی و x_iهایی یافت شده باشند که رابطه $(**)$ برای هر $p \in \prod_{۲n}$ برقرار باشد. آنگاه باید برای $p(x) = \prod_{k=۱}^{n}(x-x_k)^۲$ هم برقرار باشد. اما چون این چندجمله‌ای نامنفی است که متحداً صفر نیست، پس

$$۰ \neq \int_a^b \omega(x)\, p(x)dx = \sum_{i=۱}^{n} w_i\, p(x_i) = ۰$$

(چرا که طبق تعریف p داریم $p(x_i) = ۰$). این تناقض نشان می‌هد که (پ) برقرار است.

<u>**مرحله بعد**</u> برای اثبات قسمت (ب)، فرض کنید w_iها و x_iها در $(**)$ برای هر $p \in \prod_{۲n-۱}$ صدق کنند. اگر در این حال، x_iها متمایز نباشند آنگاه با ادغام کردن برخی x_iها، کوادراتور $\sum_{i=۱}^{n} w_i\, f(x_i)$ به یک کوادراتور $\sum_{i=۱}^{n-۱} w_i'\, f(x_i')$ تبدیل می‌شود که بنا به فرض در (ب) باید برای چندجمله‌ای‌های $p \in \prod_{۲n-۱}$ دقیق باشد. آن را به چندجمله‌ای $p(x) = \prod_{k=۱}^{n-۱}(x-x_k')^۲$ تحمیل کنید. چون این چندجمله‌ای ناصفر است، پس

$$\int_a^b w(x)\, p(x)dx \neq ۰$$

اما

$$\sum_{i=۱}^{n-۱} w_i'\, p(x_i') = ۰$$

فلذا

$$\int_a^b w(x)\, p(x)\, dx \neq \sum_{i=۱}^{n-۱} w_i'\, p(x_i')$$

این تناقض نشان می‌دهد که x_i ها باید دو به دو متمایز باشند. حال برای p_kها در $\prod_{۲n-۱}$ داریم

$$\sum_{i=۱}^{n} w_i\, p_k(x_i) = \int_a^b w(x)\, p_k(x)dx = (p_k, p_۰) = \begin{cases} (p_۰, p_۰) & k = ۰ \\ ۰ & otherwise \end{cases}$$

پس وزن‌های w_i باید در $(*)$ صدق کنند. حال رابطه $(**)$ را برای $p(x) = p_k(x)p_n(x)$ $(k = ۰, ..., n-۱)$ بنویسید:

$$۰ = (p_k, p_n) = \sum_{i=۱}^{n} w_i p_n(x_i) p_k(x_i) \qquad (k = ۰, ..., n-۱)$$

این n معادله را می‌توان با گرفتن $c = \begin{bmatrix} w_۱ p_n(x_۱) \\ \vdots \\ w_n p_n(x_n) \end{bmatrix}$ و با گرفتن ماتریس $n \times n$ رابطه $(*)$ به عنوان

A، به صورت $Ac = 0$ نوشت. چون x_i ها دوبدو متمایز هستند، پس A وارونپذیر است، فلذا $c = 0$. پس $w_i p_n(x_i) = 0$ برای هر i. اما $w_i > 0$. پس $p_n(x_i) = 0$. پس x_iها ریشه‌های p_n هستند. ■

حال تخمین خطا در روش گاووسی:

۶. قضیه . *فرض کنیم* $f \in C^{2n}[a,b]$. *آنگاه*

$$\int_a^b \omega(x)f(x)dx = \Sigma_{i=1}^{n} w_i f(x_i) + \frac{f^{(2n)}(\zeta)}{(2n)!}(p_n, p_n)$$

برهان. با استفاده از درونیابی هرمیت، جندجمله‌ای $h \in \prod_{2n-1}$ را بیابید که

$$h(x_i) = f(x_i) \qquad , \qquad h'(x_i) = f'(x_i), \qquad i = 1, \cdots, n$$

چون فرمول کوادراتور گاووسی برای اعضای $\prod_{2n-1}$ دقیق است، پس

$$\Sigma_{i=1}^{n}\ w_i f(x_i) = \Sigma_{i=1}^{n}\ w_i h(x_i) = \int_a^b w(x)h(x)dx$$

پس خطای روش گاووسی:

$$\int_a^b \omega(x)f(x)dx - \Sigma_{i=1}^{n}\ w_i f(x_i) = \int_a^b \omega(x)[f(x) - h(x)]dx \quad (*)$$

$$\begin{aligned} f(x) - h(x) &= f[x, x_1, x_1, \cdots, x_n, x_n](x - x_1)^2 \cdots (x - x_n)^2 \\ &= f[x, x_1, x_1, \cdots, x_n, x_n]p_n^2(x) \end{aligned}$$

اما نقطه $\zeta = \zeta(x)$ در بازه $[a,b]$ موجود است که

$$f[x, x_1, x_1, \cdots, x_n, x_n] = \frac{f^{2n}(\zeta(x))}{(2n)!}$$

و می‌دانیم که عبارت سمت چپ نسبت به x پیوسته است [از نمایش انتگرالی برای تفاضلات تقسیم شده استفاده کنید]. چون $w(x)p_n^2(x)$ بر $[a,b]$ تغییر علامت نمی‌دهد، پس در ادامه $(*)$، نقطه x^* موجود است که:

$$\begin{aligned} \int_a^b \omega(x)f^{(2n)}(\zeta(x))p_n^2(x)dx &= f[x^*, x_1, x_1, \cdots, x_n, x_n]\int_a^b \omega(x)p_n^2(x)dx \\ &= \frac{f^{(2n)}(\zeta)}{(2n)!}\int_a^b \omega(x)p_n^2(x)dx \qquad (a \le \zeta \le b) \end{aligned}$$

که نتیجه موردنظر از این بدست می آید. ■

حال در ادامه به معرفی مکانیزمی برای محاسبه عملی w_i هاو x_i ها می‌پردازیم.

فرض را بر این می‌گذاریم که مقادیر δ_i هاو γ_i ها که در تعریف $p_i(x)$ ها بدست آمدند قبلاً مشخص هستند. مقالاتی به بحث محاسبه δ_i هاو γ_i ها پرداخته‌اند. قرار دهید

$$J_j = \begin{bmatrix} \delta_1 & \gamma_2 & & & & \\ \gamma_2 & \delta_2 & \gamma_3 & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \gamma_{j-1} & \delta_{j-1} & \gamma_j \\ & & & & \gamma_j & \delta_j \end{bmatrix}$$

قضیه زیر را بدون اثبات می‌پذیریم:

۷. قضیه . *ریشه‌های $\{x_1, \cdots, x_n\}$ از p_n مقادیر ویژه ماتریس سه قطری J_n هستند. با استفاده از روش‌هایی که در درس محاسبات ماتریسی یاد می‌گیریم می‌توانید مقادیر ویژه J_n (فلذا $x_1, \cdots, x_n$) را محاسبه کنید.*

حال به روش عملی محاسبه w_i ها می‌پردازیم:

۸. قضیه . *فرض کنیم $v^{(i)} = \begin{bmatrix} v_1^{(i)} \\ \vdots \\ v_n^{(i)} \end{bmatrix}$ بردار ویژه‌ای از J_n متناظر با مقدار ویژه x_i باشد، $J_n v^{(i)} = x_i v^{(i)}$. در صورت لزوم بردارهای $v^{(i)}$ را در اعداد ثابتی ضرب کنید که شرط زیر هم برقرار باشد:*

$$\| v^{(i)} \|_2^2 = (p_0, p_0) = \int_a^b \omega(x) dx$$

آنگاه وزنهای w_i از رابطه زیر بدست می‌آیند:

$$w_i = (v_1^{(i)})^2 \qquad i = 1, \cdots, n$$

برهان. برای $2 \le i$ داشتیم $\gamma_i^2 = \frac{(p_{i-1}, p_{i-1})}{(p_{i-2}, p_{i-2})}$. پس $\gamma_i \neq 0$ $(2 \le i)$. سپس قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 1 \\ \rho_j &= \tfrac{1}{\gamma_2 \cdots \gamma_{j+1}} \quad (j = 1, \cdots, n-1) \end{aligned}$$

توجه کنید که $\gamma_{j+1}\rho_j = \rho_{j-1}$. برای هر i ثابت قرار می‌دهیم

$$z = \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_0 p_0(x_i) \\ \rho_1 p_1(x_i) \\ \vdots \\ \rho_{n-1} p_{n-1}(x_i) \end{bmatrix}$$

نشان می‌دهیم که z بردار ویژه ماتریس J_n متناظر با x_i است. در واقع،

$$\delta_1 \rho_0 p_0(x) + \gamma_2 \rho_1 p_1(x) = \delta_1 p_0(x) + p_1(x) = x p_0(x) = x \rho_0 p_0(x)$$

که با محاسبه طرفین در x_i:

$$\delta_1 z_0 + \gamma_2 z_1 = x_i z_0 \qquad (1)$$

حال برای $k = 2, \cdots, n-1$

$$\gamma_k \rho_{k-2} p_{k-2}(x) + \delta_k \rho_{k-1} p_{k-1}(x) + \gamma_{k+1} \rho_k p_k(x)$$

$$= \gamma_k^2 \rho_{k-1} p_{k-2}(x) + \delta_k \rho_{k-1} p_{k-1}(x) + \rho_{k-1} p_k(x)$$

$$= \rho_{k-1}[\gamma_k^2 p_{k-2}(x) + \delta_k p_{k-1}(x) + p_k(x)]$$

$$= \rho_{k-1}[x p_{k-1}(x)]$$

با محاسبه طرفین در x_i:

$$(1 \leq k \leq n-1) \qquad \gamma_k z_{k-2} + \delta_k z_{k-1} + \gamma_{k+1} z_k = x_i z_{k-1} \qquad (2)$$

مرحله بعد

$$p_j(x) = (x - \delta_j) p_{j-1}(x) - \gamma_j^2 p_{j-2}(x) \qquad (j \geq 1)$$

پس

$$\gamma_n^2 p_{n-2}(x) + \delta_n p_{n-1}(x) = x p_{n-1}(x) - p_n(x)$$

با ضرب طرفین در ρ_{n-1}:

$$\gamma_n^2 \rho_{n-1} p_{n-2}(x) + \delta_n \rho_{n-1} p_{n-1}(x) = x \rho_{n-1} p_{n-1}(x) - \rho_{n-1} p_n(x)$$

با محاسبه طرفین در x_i ها و توجه به آنکه $p_n(x_i) = 0$:

$$\gamma_n \rho_{n-2} p_{n-2}(x_i) + \delta_n \rho_{n-1} p_{n-1}(x_i) = x_i \rho_{n-1} p_{n-1}(x_i)$$

$$\gamma_n z_{n-2} + \delta_n z_{n-1} = x_i z_{n-1} \qquad (3)$$

روابط (۱)، (۲) و (۳) در شکل ماتریسی:

$$\begin{bmatrix} \delta_1 & \gamma_2 & & & & \\ \gamma_2 & \delta_2 & \gamma_3 & & & \\ & . & . & . & & \\ & & . & . & . & \\ & & & \gamma_{n-1} & \delta_{n-1} & \gamma_n \\ & & & & \gamma_n & \delta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{bmatrix} = x_i \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{bmatrix}$$

این z را به $z^{(i)}$ نشان دهید. می‌دانیم که w_i ها در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{bmatrix} P_0(x_1) & P_0(x_2) & \cdots & P_0(x_n) \\ P_1(x_1) & P_1(x_2) & \cdots & P_1(x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n-1}(x_1) & P_{n-1}(x_2) & \cdots & P_{n-1}(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (p_0, p_0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

اگر اولین این معادلات را در $\rho_0 = 1$ و دومین را در ρ_1 و ... و سطر آخر را در ρ_{n-1} ضرب کنیم:

$$\begin{bmatrix} \rho_0 P_0(x_1) & \rho_0 P_0(x_2) & \cdots & \rho_0 P_0(x_n) \\ \rho_1 P_1(x_1) & \rho_1 P_1(x_2) & \cdots & \rho_1 P_1(x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{n-1} P_{n-1}(x_1) & \rho_{n-1} P_{n-1}(x_2) & \cdots & \rho_{n-1} P_{n-1}(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (p_0, p_0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

یعنی

$$\begin{bmatrix} z^{(1)}, z^{(2)}, \cdots, z^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (p_0, p_0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

چون $z^{(i)}$ ها بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه دوبدو متمایز از یک ماتریس متقارن هستند، پس $z^{(i)}$ ها دوبدو بر هم عموداند. فلذا با ضرب طرفین رابطه (۴) از چپ در $\begin{bmatrix} z^{(1)}, z^{(2)}, \cdots, z^{(n)} \end{bmatrix}$ بدست می‌آید

$$\begin{bmatrix} \| z^{(1)} \|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \| z^{(n)} \|^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1^{(1)}(p_0, p_0) \\ z_1^{(2)}(p_0, p_0) \\ \vdots \\ z_1^{(n)}(p_0, p_0) \end{bmatrix}$$

پس

$$\| z^{(i)} \|^2 \, w_i = z_1^{(i)}(p_0, p_0)$$

اما چون $\rho_\circ = ۱$ و $p_\circ(x) \equiv ۱$ پس $z_۱^{(i)} = ۱$، فلذا

$$\| z^{(i)} \|^۲ w_i = (p_\circ, p_\circ)$$

$$\| z^{(i)} \|^۲ w_i = \| v^{(i)} \|^۲ \qquad (۵)$$

اما فضاهای برداری

$$\{u \in \mathbb{R}^n \ : \ (J_n - x_i I)u = \circ\}$$

هر یک دارای بردار ویژه $z^{(i)}$ است پس بعد این فضاها حداقل ۱ است [اینها فضاهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه x_i هستند].

چون J_n متقارن است، پس این فضاها دوبدو متعامد هستند. چون تعدادشان n تا است پس بعد هر یک باید دقیقاً ۱ یک باشد (به تبصره بعد از قضیه نیز رجوع کنید). چون $z^{(i)}$ و $v^{(i)}$ هر دو در فضای i–ام هستند پس باید هر یک مضربی از دیگری باشد. اما اگر $v^{(i)} = tz^{(i)}$، آنگاه با توجه به $z_۱^{(i)} = ۱$ خواهیم داشت $v_۱^{(i)} = t$. پس $v^{(i)} = v_۱^{(i)} z^{(i)}$. اگر این تساوی را در (۵) قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\| z^{(i)} \|^۲ w_i = v_۱^{(i)} \| z^{(i)} \|^۲$$

$$w_i = v_۱^{(i)}$$

■

<u>**مثال**</u> چندجمله‌ای‌های چبی‌شف به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \qquad -۱ \leq x \leq ۱$$

داریم $T_\circ(x) = ۱$ و $T_۱(x) = x$. می‌توان رابطه

$$T_{n+۱}(x) = ۲xT_n(x) - T_{n-۱}(x)$$

را بدست آورد. T_n چندجمله‌ای از درجه n با ضریب پیشروی $۲^{n-۱}$ است. با تغییر متغیر $x = \cos t$ بدست می آوریم

$$\int_{-۱}^{۱} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{۱-x^۲}} dx = \int_\circ^\pi \cos nt \cos mt \; dt = \begin{cases} \pi & n = m = \circ \\ \frac{\pi}{۲} & n = m > \circ \\ \circ & n \neq m \end{cases} \qquad (*)$$

لذا چندجمله‌ای‌های P_n که در روش گرام—اشمیت برای تابع وزن $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ بدست می آید عبارت است از $P_n = 2^{1-n}T_n$. صفرهای P_n همانا صفرهای T_n هستند. توجه کنیم که $0 \leq \arccos x \leq \pi$ فلذا $0 \leq n\arccos x \leq n\pi$ فلذا از $\cos(n\arccos x) = 0$ نتیجه می‌شود

$$n\arccos x = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{(2k+1)\pi}{2} \qquad k = 0, 1, ..., n-1$$

پس اینها ریشه‌های P_n هستند. وزن‌های کوادراتور گاووسی متناظر بگونه‌ای تعیین می‌شوند که کوادراتور برای چندجمله‌ای‌های تا درجه $2n-1$ دقیق باشد. بالاخص وزن‌های w_k باید در رابطه زیر صدق کنند:

$$\sum_{k=0}^{n-1} w_k T_m(x_k) = \int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad m = 0, ..., n-1 \qquad (**)$$

اگر در رابطه $(*)$ بگیریم $n = 0$ آنگاه بدست می آید

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} \pi & m = 0 \\ \\ 0 & m \neq 0 \end{cases} \qquad (***)$$

از طرف دیگر

$$\arccos x_k = \arccos\left[\cos(\frac{2k+1}{2n}\pi)\right] = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

فلذا از $(**)$ و $(***)$

$$\sum_{k=0}^{n-1} w_k \cos\frac{(2k+1)m\pi}{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} w_k \cos[m\arccos x_k] = \sum_{k=0}^{n-1} w_k T_m(x_k) = \begin{cases} \pi & m = 0 \\ \\ 0 & m = 1, ..., n-1 \end{cases}$$

جواب این دستگاه عبارت است از

$$w_0 = \cdots = w_{n-1} = \frac{\pi}{n}$$

سپس کوادراتور گاوس—چبی‌شف با n گره عبارت است از

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \;\approx\; \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\cos\frac{2k+1}{2n}\pi\right)$$

خطای حاصل از این تخمین بدین شکل است

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \;=\; \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\cos\frac{2k+1}{2n}\pi\right) + \frac{\pi f^{(2n)}(\xi)}{2^{2n-1}(2n)!} \qquad -1 \leq \xi \leq 1$$

<u>**مثال**</u> چندجمله‌ای‌های لژاندر بر $[-1, 1]$ را درنظر بگیرید. ریشه‌های چندجمله‌ای $p_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$ عبارتند از $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. حال وزن‌های w_1 و w_2 را طوری می‌یابیم که کواردراتور

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx w_1 f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + w_2 f(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

برای چندجمله‌ای‌های تا درجه ۳ (یعنی برای $2n-1$ برای $n=2$) دقیق باشد. در واقع با دقیق کردن فرمول برای چندجمله‌ای‌های ۱ و x:

$$w_1 + w_2 = \int_{-1}^{1} dx = 2$$

$$\frac{-w_1}{\sqrt{3}} + \frac{w_2}{\sqrt{3}} = \int_{-1}^{1} xdx = 0$$

از این دو معادله بدست می‌آوریم $w_1 = w_2 = 1$. پس کوادراتور زیر از درجه ۳ دقیق است:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

توجه کنیم که

$$(p_2,p_2) = \int_{-1}^{1} p_2(x)^2 dx = \int_{-1}^{1} (x^2 - \frac{1}{3})^2 dx = \int_{-1}^{1} (x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9})dx$$

$$= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{9}x\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{45}$$

سپس با توجه به دستور کلی خطای روش گاوسی که به شکل $\frac{f^{(2n)}(\zeta)}{(2n)!}(p_n,p_n)$ شناسایی شد، خطا در این مثال خاص که $n=2$، برابر است با

$$\frac{f^{(4)}}{4!}(p_2,p_2) = \frac{f^{(4)}}{4!}\frac{8}{45} = \frac{1}{135}f^{(4)}(\zeta)$$

پس

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}}) + \frac{1}{135}f^{(4)}(\zeta) \qquad -1 \le \zeta \le 1$$

مسئله همین کار را برای p_3 در کوادراتور گاوس—لژاندر انجام دهید.

۱. قضیه . *فرض کنیم $A : X \to Y$ عملگری خطی بین فضاهای نرم‌دار باشد. آنگاه گزاره‌های زیر معادلند.*

(i) *A در یک نقطه خاص $x_\circ$ پیوسته است.*

(ii) *A کران‌دار است.*

(iii) *A همه‌جا پیوسته است.*

برهان. $(i \Longrightarrow ii)$ برای $\varepsilon = ۱$ عدد $\delta > \circ$ یافت می‌شود که

$$\|x - x_\circ\| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \|Ax - Ax_\circ\| < ۱$$

حال برای هر $\|y\| = ۱$ قرار دهید $x = x_\circ + \frac{\delta}{۲}y$. آنگاه $\|x - x_\circ\| < \delta$ فلذا $\|Ax - Ax_\circ\| < ۱$، یعنی $\left\|\frac{\delta}{۲}A(y)\right\| < ۱$. پس $\|Ay\| < \frac{۲}{\delta}$ فلذا $\|A\| = \sup\limits_{\|y\|=۱} \|Ay\| \leq \frac{۲}{\delta} < \infty$.

$(ii \Longrightarrow iii)$ برای هر $x_\circ$،

$$\|Ax - Ax_\circ\| = \|A(x - x_\circ)\| \leq \|A\|\,\|x - x_\circ\|$$

پس اگر $x \to x_\circ$، آنگاه $Ax \to Ax_\circ$ (چرا که $\|A\| < \infty$). این پیوستگی را در هر نقطه $x_\circ$ ثابت می‌کنیم، پس A همه‌جا پیوسته است.

$(iii \Longrightarrow i)$ بدیهی است. ∎

حال به معرفی برخی نرمهای ماتریسی مهم می‌پردازیم:

۲. قضیه . *فرض کنیم (a_{ij}) ماتریس $n \times n$ از اعداد مختلط (یا اعداد حقیقی) باشد. اپراتور $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ (یا $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$) را با ضابطه*

$$(Ax)_i = \sum_{k=۱}^{n} a_{ik}x_k \tag{۱}$$

تعریف کنید. آنگاه A نسبت به همه نرم‌های بر $\mathbb{C}^n$ (یا $\mathbb{R}^n$) کران‌دار است. به‌ویژه

$$\|A\|_۱ = \max_{۱ \leq k \leq n} \sum_{i=۱}^{n} |a_{ik}| \tag{۲}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{۱\le i\le n}\sum_{k=۱}^{n}|a_{ik}| \tag{۳}$$

$$\|A\|_۲ \le \Big(\sum_{i,k=۱}^{n}|a_{ik}|^۲\Big)^{\frac{۱}{۲}} \tag{۴}$$

این نرم‌ها را نرم‌های ماتریسی می‌نامند.

برهان. برای آنکه کران‌داری اپراتور تعریف شده در (۱) را ثابت کنیم، کافی است آن را برای یک نرم خاص انجام دهیم (چراکه همه نرم‌ها بر $\mathbb{C}^n$ معادل‌اند). برای $\|\,\|_۱$:

$$\|Ax\|_۱ = \sum_{i=۱}^{n}|(Ax)_i| = \sum_{i=۱}^{n}\Big|\sum_{k=۱}^{n}a_{ik}x_k\Big| \le \sum_k|x_k|\sum_i|a_{ik}| \le \max_{۱\le k\le n}\sum_{i=۱}^{n}|a_{ik}|\sum_k|x_k| \le \max_{۱\le k\le n}\sum_{i=۱}^{n}|a_{ik}|\,\|x\|_۱$$

پس

$$\|A\|_۱ \le \max_{۱\le k\le n}\sum_{i=۱}^{n}|a_{ik}|$$

حال اندیس j را آن‌طور اختیار کنید که

$$\sum_{i=۱}^{n}|a_{ij}| = \max_{۱\le k\le n}\sum_{i=۱}^{n}|a_{ik}|$$

حال نقطه خاص $z = \begin{bmatrix} ۰ \\ \vdots \\ ۰ \\ ۱ \\ ۰ \\ \vdots \\ ۰ \end{bmatrix}$ از $\mathbb{C}^n$ را برگزینید که ۱ در مکان j ـ اک است. آنگاه

$$\|Az\|_۱ = \sum_{i=۱}^{n}|(Az)_i| = \sum_{i=۱}^{n}\Big|\sum_{k=۱}^{n}a_{ik}z_k\Big| = \sum_{i=۱}^{n}|a_{ij}| = \max_{۱\le k\le n}\sum_{i=۱}^{n}|a_{ik}|$$

پس

$$\|A\|_۱ = \sup_{\|x\|_۱=۱}\|Ax\|_۱ \ge \|Az\|_۱ = \max_{۱\le k\le n}\sum_{i=۱}^{n}|a_{ik}|$$

از دو نامساوی به‌دست آمده، تساوی (۲) به دست می‌آید. برای $\|\,\|_\infty$:

$$\begin{aligned}\|Ax\|_\infty &= \max_{۱\le i\le n}|(Ax)_i| = \max_{۱\le i\le n}\Big|\sum_k a_{ik}x_k\Big| \le \max_{۱\le i\le n}\sum_k|a_{ik}|\,|x_k| \\ &\le \Big(\max_{۱\le i\le n}\sum_k|a_{ik}|\Big)\big(\max_k|x_k|\big) = \Big(\max_{۱\le i\le n}\sum_k|a_{ik}|\Big)\|x\|_\infty\end{aligned}$$

از این نامساوی‌ها خواهیم داشت

$$\|A\|_\infty \le \max_{۱\le i\le n}\sum_k|a_{ik}|$$

حال $i_۰$ را طوری اختیار کنید که

$$\sum_k|a_{i_۰k}| = \max_{۱\le i\le n}\sum_k|a_{ik}|$$

حال نقطه $z\in\mathbb{C}^n$ را بدین صورت تعریف کنید:

$$z_k = \begin{cases}\dfrac{\overline{a_{i_۰k}}}{|a_{i_۰k}|} & a_{i_۰k}\ne ۰\\ ۱ & a_{i_۰k}=۰\end{cases} \qquad (k=۱,\dots,n)$$

آنگاه

$$\|Az\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |(Az)_i| = \max_{1\le i\le n} \Big| \sum a_{ik} z_k \Big| \ge \Big| \sum_{k=1}^{n} a_{i_0 k} z_k \Big| = \sum_k |a_{i_0 k}| = \max_{1\le i\le n} \sum_k |a_{ik}|$$

پس

$$\|A\|_\infty = \sup_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty \ge \|Az\|_\infty \ge \max_{1\le i\le n} \sum_k |a_{ik}|$$

از این نامساوی و نامساوی در جهت عکس که بالاتر به دست آمده بود رابطه (۳) حاصل می‌شود.

بالاخره برای $\|\ \|_2$ از نامساوی کشی ـ شوارتز استفاده می‌کنیم:

$$\|Ax\|_2^2 = \sum_i |(Ax)_i|^2 = \sum_i \Big| \sum_k a_{ik} x_k \Big|^2 \le \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_k |a_{ik}|^2 \sum_k |x_k|^2 \Big) = \sum_{i,k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \sum_k |x_k|^2$$
$$= \Big(\sum_{i,k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \Big) \|x\|_2^2$$

با جذرگیری از طرفین و سپس تقسیم بر $\|x\|_2$ (با فرض $\|x\|_2 \neq 0$) و سپس سوپریمم‌گیری روی x ها نامساوی (۴) به‌دست می آید. ■

در این بخش طیف یک ماتریس مربعی مختلط را معرفی کرده و برخی خواص اینگونه ماتریس‌ها را مطالعه می‌کنیم.

۳. قضیه . *برای هر ماتریس مختلط $A_{n\times n}$ ماتریس یکانی Q موجود است که Q^*AQ بالا مثلثی است.*

برهان. برای $n=1$ واضح است. فرض کنید حکم برای $n-1$ ثابت شده باشد. حال برای ماتریس A از سایز $n\times n$ فرض کنید λ مقدار ویژه‌ای از آن متناظر با بردار ویژه u باشد. بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم $\|u\| = 1$ (نرم اقلیدسی $\|\ \|_2$). با استفاده از فرآیند گرام ـ اشمیت، می‌توان پایه متعامد یکه $\{u, v_2, \dots, v_n\}$ برای $\mathbb{C}^n$ درست کرد که u اولین عضو آن باشد. ماتریس $U := [\ u\ \ v_2\ \ \cdots\ \ v_n\ ]$ را در نظر بگیرید. چون $\langle u, v_j\rangle = 0$ (ضرب داخلی اقلیدسی)، پس

$$U^*AU = U^* [\ \lambda u\ \ Av_2\ \ \cdots\ \ Av_n\ ] = \begin{bmatrix} \lambda & * \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

گه B ماتریسی از سایز $(n-1)\times(n-1)$ است. بنابه فرض ماتریس یکانی Q_{n-1} از سایز $(n-1)\times(n-1)$ موجود است که $Q_{n-1}^* B Q_{n-1}$ بالا مثلثی است. آنگاه ماتریس

$$Q = U \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_{n-1} \end{bmatrix}$$

ماتریس یکانی $n\times n$ ای معرفی می‌کند که Q^*AQ بالا مثلثی است. ■

۴. لم. برای $\mathbb{C}$ ـ ماتریس مربعی A و ماتریس الحاقی آن $A^* = \overline{A}^T$ داریم

$$\langle A^*x, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$$

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$$

که در آن $\langle\ ,\ \rangle$ ضرب اسکالر اقلیدسی بر $\mathbb{C}^n$ است.

برهان.

$$\begin{aligned}\langle Ax, y\rangle &= \sum_{j=1}^{n}(Ax)_j\overline{y}_j = \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n}A_{jk}x_k\Big)\overline{y}_j\\ &= \sum_{k=1}^{n}x_k\sum_{j=1}^{n}\overline{(A^*)_{kj}y_j} = \sum_{k=1}^{n}x_k\overline{(A^*y)_k} = \langle x, A^*y\rangle\end{aligned}$$

دومی هم مشابه انجام می‌شود. ■

۵. تعریف. $\mathbb{C}$ ـ *ماتریس مربعی A را هرمیتی می‌نامند در صورتی که $A^* = A$.*

۶. قضیه . *فرض کنیم A ماتریسی هرمیتی باشد. آنگاه*

(الف) *پایه‌ای متعامد یکه برای $\mathbb{C}^n$ متشکل از بردارهای ویژه ماتریس A وجود دارد.*

(ب) *مقادیر ویژه A همگی حقیقی هستند.*

(ج) *A قطری شونده است، بدین معنی که ماتریس یکانی Q موجود است که Q^*AQ قطری است.*

برهان. ماتریس یکانی Q را برگزینید که ماتریس $B = Q^*AQ$ بالامثلثی باشد. چون A هرمیتی است آنگاه به سادگی معلوم می‌شود که B هم هرمیتی است. اما چون B بالا مثلثی است، لازم می‌آید که B قطری باشد؛ مثلاً

$$B = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$

ستون‌های Q را به‌ترتیب u_1، ...، u_n بنامید: $Q = [\ u_1\ \ \cdots\ \ u_n\ ]$. آنگاه از $Q^*AQ = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ داریم

$$AQ = Q\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

$$A\,[\ u_1\ \ \cdots\ \ u_n\ ] = [\ u_1\ \ \cdots\ \ u_n\ ]\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

$$[\ Au_1\ \ \cdots\ \ Au_n\ ] = [\ \lambda_1 u_1\ \ \cdots\ \ \lambda_n u_n\ ]$$

پس $Au_j = \lambda_j u_j$، یعنی ستون‌های Q مقادیر ویژه‌ی ماتریس A هستند. اما می‌دانیم که ستون‌های Q یک پایه متعامد یکه برای $\mathbb{C}^n$ هستند چراکه Q یک ماتریس یکانی است. این قسمت (الف) را ثابت می‌کند. برای قسمت (ب) از لم قبل استفاده می‌کنیم: فرض کنیم λ مقدار ویژه‌ای برای ماتریس A بوده و u بردار ویژه‌ای با طول واحد برای این مقدار ویژه باشد؛ آنگاه:

$$\langle Au, u\rangle = \langle u, A^*u\rangle$$

$$\langle Au, u\rangle = \langle u, Au\rangle$$

$$\langle \lambda u, u\rangle = \langle u, \lambda u\rangle$$

$$\lambda\langle u, u\rangle = \overline{\lambda}\langle u, u\rangle$$

$$\lambda = \overline{\lambda}$$

و این (ب) را ثابت می‌کند. بالاخره برای قسمت (ج)، توجه کنید که با ماتریس Q که در بالا بدست آمد، ماتریس Q^*AQ قطری است (به بحث بالا توجه کنید). ■

۷. تعریف. *ماتریس هرمیتی* A **مثبت شبه معین** *خوانده می‌شود در صورتی که*

$$\circ \leq \langle Ax, x\rangle \qquad (x \in \mathbb{C}^n)$$

آن را **مثبت معین** *می‌خوانیم در صورتی که*

$$\circ < \langle Ax, x\rangle \qquad (x \in \mathbb{C}^n, x \neq \circ)$$

۸. تعریف. **شعاع طیفی** $\mathbb{C}$ ـ *ماتریس مربعی* A *بدین شکل تعریف می‌شود:*

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| \ : \ \lambda \text{ مقدار ویژه } A \text{ است}\}$$

مثال . برای ماتریس مربعی A، هر دوی ماتریس‌های A^*A و AA^* مثبت شبه معین هستند. آنها تنها و تنها وقتی مثبت معین هستند که A وارون‌پذیر باشد.

حل.

$$\langle A^*Ax, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\|^{۲} \geq \circ$$

پس A^*A مثبت شبه معین است. مشابهاً AA^* مثبت شبه معین است. شرط لازم و کافی برای مثبت معین بودن آن است که برای هر $x \neq \circ$ داشته باشم $\langle A^*Ax, x\rangle > \circ$، معادلاً برای هر $x \neq \circ$ داشته باشم $\|Ax\| > \circ$. این هم تنها و تنها وقتی درست است که A وارون‌پذیر باشد.

۹. لم.

(الف) اگر A مثبت شبه معین باشد، آنگاه مقادیر ویژه‌اش همگی نامنفی‌اند.

(ب) اگر A مثبت معین باشد، آنگاه مقادیر ویژه‌اش همگی مثبت هستند.

برهان. (الف) فرض کنیم u بردار ویژه‌ای برای A متناظر با مقدار ویژه λ باشد. آنگاه

$$\circ \leq \langle Au, u\rangle = \langle \lambda u, u\rangle = \lambda\|u\|^{۲} \qquad (۵)$$

و چون $\|u\| > \circ$ پس $\lambda \geq \circ$.

(ب) چون $u \neq \circ$ پس

$$\circ < \langle Au, u\rangle = \lambda \|u\|^{۲}$$

و چون $\|u\| > \circ$ پس $\lambda > \circ$. ■

۱۰. قضیه . *برای هر ماتریس مربعی A،*

$$\|A\|_{۲} = \sqrt{\rho(A^* A)}$$

اگر A هرمیتی باشد آنگاه

$$\|A\|_{۲} = \rho(A)$$

برهان. چنانکه دیدیم، A^*A مثبت شبه معین است پس مقادیر ویژه‌اش همگی نامنفی هستند پس آنها را می‌توان به‌صورت $\{\mu_{۱}^{۲}, \ldots, \mu_n^{۲}\}$ تلقی کرد. چون A^*A هرمیتی است، پس پایه‌ای متعامد یکه برای $\mathbb{C}^n$ متناظر با این مقادیر ویژه وجود دارد، آن پایه را $S = \{u_{۱}, \ldots, u_n\}$ بنامید. برای $x \in \mathbb{C}^n$ بنویسید $x = \sum_{j=۱}^{n} \alpha_j u_j$. چون پایه S متعامد یکه است (یعنی تحت ضرب داخلی اقلیدسی و نرم $\|\ \|_{۲}$ متعامد یکه است) پس

$$\|x\|_{۲}^{۲} = \sum |\alpha_j|^{۲} \|u_j\|_{۲}^{۲} = \sum |\alpha_j|^{۲}$$

ولی

$$A^*Ax = \sum_j \alpha_j A^*Au_j = \sum_j \alpha_i \mu_j^{۲} u_j$$

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_{۲}^{۲} &= \langle Ax, Ax\rangle \\
&= \langle x, A^*Ax\rangle \\
&= \Big\langle \sum_k \alpha_k u_k, \sum_j \alpha_j \mu_j^{۲} u_j \Big\rangle \\
&= \sum_j \mu_j^{۲} |\alpha_j|^{۲} \\
&\le \big(\max_{۱\le j\le n} \mu_j^{۲}\big) \sum_j |\alpha_j|^{۲} \\
&= \big(\max_j \mu_j^{۲}\big) \|x\|_{۲}^{۲} \\
&= \rho(A^*A) \|x\|_{۲}^{۲}
\end{aligned}$$

که از آنجا

$$\|Ax\|_{۲} \le \sqrt{\rho(A^*A)} \|x\|_{۲}$$

$$\|A\|_{۲} \le \sqrt{\rho(A^*A)}$$

برای جهت عکس اندیس $j_\circ$ را طوری انتخاب کنید که $\mu_{j_\circ}^{۲} = \rho(A^*A)$. سپس داریم

$$\|A\|_{۲}^{۲} = \sup_{\|x\|_{۲}=۱} \|Ax\|_{۲}^{۲} \ge \|Au_{j_\circ}\|_{۲}^{۲} = \langle Au_{j_\circ}, Au_{j_\circ}\rangle = \langle u_{j_\circ}, A^*Au_{j_\circ}\rangle$$

$$= \langle u_{j_0}, \mu_{j_0}^2 u_{j_0} \rangle = \mu_{j_0}^2 = \rho(A^*A)$$

از د ونامساوی به‌دست آمده خواهیم داشت $\|A\|_2^2 = \rho(A^*A)$. اما اگر A هرمیتی باشد آنگاه $A^*A = A^2$ فلذا

$$\rho(A^*A) = \rho(A^2) = \rho(A)^2 \qquad \text{(تمرین زیر را نگاه کنید)}$$

از مقایسه این نتایج به‌دست آمده خواهیم داشت $\|A\|_2^2 = \rho(A)^2$ پس $\|A\|_2 = \rho(A)$. ■

تمرین. فرض کنید A هرمیتی باشد و فرض کنید $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ مقادیر ویژهٔ A باشند. آنگاه برای هر چندجمله‌ای p، مقادیر ویژهٔ ماتریس $p(A)$ عبارت اند از $\{p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n)\}$ (بالاخص برای هر m، مقادیر ویژه A^m عبارتنداز $\{\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m\}$). از آنجا نتیجه بگیرید که $\rho(A^m) = \rho(A)^m$.

۱۱. قضیه . *فرض کنیم A یک $\mathbb{C}$ ـ ماتریس $n \times n$ باشد. آنگاه*

(الف) *برای هر نرم بر $\mathbb{C}^n$ داریم*

$$\rho(A) \le \|A\|$$

(ب) *برای هر $\varepsilon > 0$، نرم $\|\ \|$ بر $\mathbb{C}^n$ وجود دارد که*

$$\|A\| \le \rho(A) + \varepsilon$$

برهان (الف). فرض کنید λ مقدار ویژه‌ای برای A با مقدار ویژه u باشد. فرض کنید $\|u\| = 1$. آنگاه

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \ge \|Au\| = \|\lambda u\| = |\lambda|$$

چون این برای هر مقدار ویژه λ برقرار است پس $\rho(A) \le \|A\|$.

اثبات (ب)

ماتریس یکانی Q موجود است که ماتریس $B = Q^*AQ$ بالا مثلثی است. فرض کنید $B = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$.
چون A و B متشابه هستند پس دارای مقادیر ویژه یکسان هستند. اما چون B بالامثلثی است مقادیر ویژه‌اش روی قطر اصلی‌اش هستند. پس مقادیر ویژه A اعداد b_{11} و ... و b_{nn} هستند، فرض کنید

$$b := \max\{|b_{ij}| \ : \ 1 \le i \le n, 1 \le j \le n\}$$

$$\delta := \min\left(1, \frac{\varepsilon}{(n-1)b}\right)$$

ماتریس قطری $D = \operatorname{diag}(1, \delta, \delta^2, \dots, \delta^{n-1})$ را که دارای وارون $D^{-1} = \operatorname{diag}(1, \delta^{-1}, \delta^{-2}, \dots, \delta^{-n+1})$ است در نظر بگیرید. آنگاه برای $C := D^{-1}BD$ داریم

$$C = \begin{bmatrix} b_{11} & \delta b_{12} & \delta^2 b_{13} & \cdots & \delta^{n-1} b_{1n} \\ & b_{22} & \delta b_{23} & \cdots & \delta^{n-2} b_{2n} \\ & & b_{33} & \cdots & \delta^{n-3} b_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & b_{nn} \end{bmatrix}$$

اما اگر فرض کنید $C = (c_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$، آنگاه

$$c_{ij} = \begin{cases} 0 & i > j \\ \delta^{j-i} b_{ij} & i \le j \end{cases}$$

اما سپس

$$\begin{aligned} \|C\|_\infty &= \max_{1 \le i \le n} \sum_{k=1}^{n} |c_{ik}| \\ &= \max_{1 \le i \le n} \sum_{k=i}^{n} |c_{ik}| \\ &= \max_{1 \le i \le n} \Big(\sum_{k=i}^{n} \delta^{k-i} |b_{ik}| \Big) \\ &\le \max_{1 \le i \le n} \Big(|b_{ii}| + \delta \sum_{k=i+1}^{n} |b_{ik}| \Big) \qquad (\text{چراکه } 0 < \delta \le 1) \\ &= \max_{1 \le i \le n} \big(|b_{ii}| + \delta (n-1) b \big) \\ &\le \max_{1 \le i \le n} |b_{ii}| + \varepsilon \\ &= \rho(A) + \varepsilon \end{aligned}$$

حال قرار دهید $V = QD$ و نرم جدیدی بر $\mathbb{C}^n$ تعریف کنید:

$$\|x\| = \|V^{-1} x\|_\infty$$

سپس با استفاده از تساوی $C = D^{-1} B D = V^{-1} Q B Q^{-1} V = V^{-1} A V$، برای هر x داریم

$$\|Ax\| = \|V^{-1} A x\|_\infty = \|C V^{-1} x\|_\infty \le \|C\|_\infty \|V^{-1} x\|_\infty = \|C\|_\infty \|x\|$$

پس

$$\|A\| \le \|C\|_\infty \le \rho(A) + \varepsilon.$$ ■

■

---

۱۲. تعریف. *فرض کنیم U زیرمجموعه‌ای از فضای نرم‌دار X باشد. نگاشت $A : U \to X$ را (که لزومی ندارد خطی باشد) یک اپراتور انقباضی می‌نامند در صورتی که ثابت $0 \le \alpha < 1$ موجود باشد که*

$$\|Ax - Ay\| \le \alpha \|x - y\|$$

به‌وضوح چنین نگاشتی پیوسته است.

۱۳. تعریف. *نقطه x از فضای نرم‌دار X یک نقطه ثابت برای اپراتور $A : U \to X$ خوانده می‌شود در صورتی که $Ax = x$.*

۱۴. قضیه . *هر اپراتور انقباضی حداکثر یک نقطه ثابت دارد.*

برهان. اگر x و y نقاط ثابت اپراتور A باشند و A انقباضی با عدد انقباضی $۰ \leq \alpha < ۱$ باشد آنگاه

$$\|x - y\| = \|Ax - Ay\| \leq \alpha \|x - y\|$$

$$(۱ - \alpha)\|x - y\| \leq ۰$$

اما چون هر دوی $۱ - \alpha$ و $\|x - y\|$ نامنفی هستند باید که هر دو صفر باشند و لذا $x = y$. ■

۱۵. قضیه (باناخ) . *فرض کنیم U زیرمجموعه‌ای کامل از فضای نرم‌دار X باشد (یعنی هر دنباله‌کشی از U در U همگرا باشد). اگر $A : U \to U$ اپراتور انقباضی باشد آنگاه دارای نقطه ثابت منحصر به‌فرد است.*

برهان. با شروع از نقطه $x_۰ \in U$ دنباله $\{x_n\}$ را به استقراء به‌صورت $x_{n+۱} = Ax_n$ تعریف کنید. آنگاه

$$\|x_{n+۱} - x_n\| = \|Ax_n - Ax_{n-۱}\| \leq \alpha \|x_n - x_{n-۱}\| \qquad (۶)$$

که به روش استقرائی به‌دست می‌آید

$$\|x_{n+۱} - x_n\| \leq \alpha^n \|x_۱ - x_۰\| \qquad n = ۱, ۲, \ldots$$

پس برای $n < m$:

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &\leq \|x_n - x_{n+۱}\| + \|x_{n+۱} - x_{n+۲}\| + \cdots + \|x_{m-۱} - x_m\| \\ &\leq (\alpha^n + \alpha^{n+۱} + \cdots + \alpha^{m-۱})\|x_۱ - x_۰\| \\ &= \frac{\alpha^n - \alpha^m}{۱ - \alpha}\|x_۱ - x_۰\| \qquad (۷) \end{aligned}$$

پس اگر $m, n \to \infty$، آنگاه $\|x_n - x_m\| \to ۰$ لذا $\{x_n\}$ یک دنباله کشی است. چون U کامل است، عنصر $x \in U$ موجود است که $x_n \to x$ لذا از پیوستگی اپراتور انقباضی A داریم $x_{n+۱} = Ax_n \to Ax$. از طرفی $x_{n+۱} \to x$. پس $Ax = x$. منحصر به‌فرد بودن نقطه ثابت نتیجه قضیه بالا است. ■

اگر در نامساوی (۷) اجازه دهیم $m \to \infty$ در حالی که n ثابت است، آنگاه تخمین

$$\|x_n - x\| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|x_1 - x_0\| \tag{8}$$

به‌دست می‌آید که از این برای یافتن حداقل تعداد تکرارهای لازم جهت نیل به تخمین $\|x_n - x\| \leq \varepsilon$ استفاده می‌کنیم. در واقع برای داشتن این دقت کافی است بگیریم $n \geq \frac{\ln \hat{\varepsilon}}{\ln \alpha}$ که در آن $\hat{\varepsilon} = \frac{(1-\alpha)\varepsilon}{\|x_1 - x_0\|}$.

نامساوی (۸) نتیجه می‌دهد که

$$\|x_n - x\| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\|x_1 - x_0\|$$

چراکه $\alpha^n \leq \alpha$. حال برای لحظه‌ای فرض کنید که نقطه شروع x_{n-1} باشد یعنی x_0 برابر x_{n-1} باشد. آنگاه x_1 برابر x_n است پس نامساوی

$$\|x_n - x\| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\|x_n - x_{n-1}\|$$

به‌دست می‌آید. از این رابطه جهت بررسی دقت محاسبات و تشخیص زمان اتمام تکرارها استفاده می‌کنیم.

۱۶. قضیه . *فرض کنیم $B : X \to X$ یک اپراتور خطی کراندار روی فضای باناخ X باشد. و فرض کنید $\|B\| < 1$. آنگاه $I - B$ وارون‌پذیر است یعنی $I - B$ یک به یک و پوشا است و وارون $(I - B)^{-1}$ عملگر خطی کراندار است. بعلاوه*

$$\|(I-B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}$$

بعلاوه برای هر $y \in X$ و با شروع از هر نقطه $x_0 \in X$، تخمین‌های متوالی

$$x_{n+1} = Bx_n + y$$

به نقطه $(I - B)^{-1}y$ میل می‌کند که درضمن:

$$\begin{cases} \|x_n - x\| \leq \dfrac{\|B\|^n}{1-\|B\|}\|x_1 - x_0\| \\ \\ \|x_n - x\| \leq \dfrac{\|B\|}{1-\|B\|}\|x_n - x_{n-1}\| \end{cases} \tag{9}$$

برهان. برای هر نقطه $y \in X$ (و از این به بعد ثابت) نگاشت $A : X \to X$ را تعریف کنید:

$$Ax = Bx + y$$

آنگاه

$$\|Ax - Az\| = \|B(x - z)\| \leq \|B\|\ \|x - z\|$$

چون $\|B\| < 1$ پس A نگاشت انقباضی است. پس می‌توان مطالب قضیه قبل را برای آن به‌کار برد. بالاخص روابط (۹) به‌دست می‌آیند. همچنین با شروع از $x_0 = y$، تقریب‌های متوالی $x_{n+1} = Ax_n$ در

رابطه

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} B^k y$$

صدق می‌کنند (به استقراء قابل تحقیق است).

سپس

$$\|x_n\| \leq \sum_{k=0}^{n} \|B^k y\| \leq \sum_{k=0}^{n} \|B\|^k \|y\| \leq \frac{\|y\|}{1 - \|B\|} \tag{10}$$

اما از قضیه قبل می‌دانیم که تقریب‌های متوالی $x_{n+1} = Ax_n$ به نقطه ثابت منحصر به فرد برای A میل می‌کنند. آن نقطه ثابت را x بنامید. سپس روابط زیر معادلند:

$$x = Ax$$

$$x = Bx + y$$

$$(I - B)x = y$$

چون x ای که در این رابطه صدق می‌کند منحصر به فرد است پس $x = (I - B)^{-1} y$ وجود دارد. چون $x_n \to x$، پس از (۱۰) با اجازه دادن $n \to \infty$ به‌دست می آید

$$\|x\| \leq \frac{\|y\|}{1 - \|B\|}$$
$$\|(I - B)^{-1} y\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|} \|y\|$$

چون این برای هر y درست است پس داریم $\|(I - B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}$. ■

۱۷. قضیه . *فرض کنیم B، $\mathbb{C}$ ـ ماتریسی $n \times n$ باشد. آنگاه تخمین‌های متوالی*

$$x_{k+1} = Bx_k + y$$

برای هر y و هر نقطه ابتدائی x_0 تنها و تنها وقتی همگرا است که $\rho(B) < 1$.

برهان. $\Leftarrow$ فرض کنید $\rho(B) < 1$. آنگاه نرم $\| \cdot \|$ بر $\mathbb{C}^n$ موجود است که $\|B\| < 1$. سپس بنابه قضیه بالا، دنباله $\{x_k\}$ همگرا است.

$\Longrightarrow$ فرض کنید $\rho(B) \geq 1$. آنگاه مقدار ویژه λ برای B موجود است که $|\lambda| \geq 1$. فرض کنید y بردار ویژه‌ای برای این مقدار ویژه باشد و قرار دهید $x_0 = y$. آنگاه چنانکه در بالا گفته شد داریم $x_k = \sum_{s=0}^{k} B^s y$ فلذا $x_k = \sum_{s=0}^{k} \lambda^s y = \frac{1 - \lambda^{k+1}}{1 - \lambda} y$ و به‌وضوح این دنباله $\{x_k\}$ واگرا است چراکه $|\lambda| \geq 1$. ■

$\mathbb{C}$ ـ ماتریس دلخواه A را در نظر بگیرید. آن را تجزیه کنید به

$$A = D + L + U$$

که در آن D قسمت قطری A است و L قسمت پایین مثلثی اکید و از طرفی U قسمت بالا مثلثی اکید برای ماتریس $A=(a_{ij})$ است:

$$D=\mathrm{diag}(a_{11},\ldots,a_{nn})$$

$$L=\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ a_{21} & 0 & & & \\ a_{31} & a_{32} & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$U=\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & a_{n-1,n} \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

همچنین فرض می‌کنیم که D^{-1} وجود داشته باشد [معادلاً یعنی آنکه همه عناصر روی قطر اصلی ماتریس A ناصفر باشند].

در روش ژاکوبی، برای یافتن جواب x ای برای دستگاه $Ax=y$، دستگاه را به‌صورت

$$x=-D^{-1}(L+U)x+D^{-1}y$$

بازنویسی می‌کنند و سپس تقریب‌های متوالی

$$x^{(k+1)}=-D^{-1}(L+U)x^{(k)}+D^{-1}y$$

با نقطه شروع دلخواه $x^{(0)}$ تشکیل داده می‌شود. در شکل مؤلفه‌ای:

$$x_i^{(k+1)}=-\sum_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{n}\frac{a_{il}}{a_{ii}}x_l^{(k)}+\frac{y_i}{a_{ii}} \qquad i=1,\ldots,n$$

۱۸. قضیه . *فرض کنید که ماتریس $A=(a_{ik})$ در یکی از روابط زیر صدق کند:*

$$P_\infty=\max_{1\leq i\leq n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{n}\left|\frac{a_{il}}{a_{ii}}\right|<1$$

$$P_1=\max_{1\leq l\leq n}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{n}\left|\frac{a_{il}}{a_{ii}}\right|<1$$

$$P_2=\left(\sum_{\substack{i,l=1\\ i\neq l}}^{n}\left|\frac{a_{il}}{a_{ii}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}<1$$

آنگاه روش ژاکوبی

$$x_i^{(k+1)}=-\sum_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{n}\frac{a_{il}}{a_{ii}}x_l^{(k)}+\frac{y_i}{a_{ii}} \qquad (i=1,\ldots,n)$$

برای هر $x^{(0)}\in\mathbb{C}^n$ و هر $y\in\mathbb{C}^n$ در هر نرمی به جواب منحصربه فرد $Ax=y$ میل می‌کند. **بعلاوه تحت**

هر یک از سه شرط بالا متناظراً تخمین‌های زیر را داریم:

$$\|x^{(k)} - x\|_s \leq \frac{P_s^k}{1 - P_s}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_s \qquad (s = 1, 2, \infty)$$
$$\|x^{(k)} - x\|_s \leq \frac{P_s}{1 - P_s}\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_s \qquad (s = 1, 2, \infty)$$

برهان. ماتریس ژاکوبی $-D^{-1}(L + U)$ دارای مؤلفه‌های صفر روی قطر اصلی است در حالی که عناصر خارج قطر عبارت اند از $-\frac{a_{il}}{a_{ii}}$. لذا

$$\| - D^{-1}(L + U)\|_\infty = P_\infty$$

$$\| - D^{-1}(L + U)\|_1 = P_1$$

$$\| - D^{-1}(L + U)\|_2 \leq P_2$$

پس همه چیز نتیجه مستقیم قضیه قبل است. ■

شرط اول قضیه بالا را می‌توان بدین شکل نوشت:

$$\sum_{\substack{l=1 \\ l\neq i}}^{n} |a_{il}| < |a_{ii}| \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

که در این صورت می‌گویند که در سطرها اکیداً غالب قطری است. شرط دوم به‌صورت

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq l}}^{n} |a_{il}| < |a_{ll}| \qquad (l = 1, \ldots, n)$$

نوشته می‌شود که اصطلاحاً می‌گویند که A در ستون‌ها اکیداً غالب قطری است.

حال دستگاه $Ax = y$ را به صورت زیر بنویسید

$$(D + L)x = -Ux + y$$

$$x = -(D + L)^{-1}Ux + (D + L)^{-1}y$$

پس دنباله $\{x^{(k)}\}$ را بدین شکل می‌سازیم

$$x^{(k+1)} = -(D + L)^{-1}Ux^{(k)} + (D + L)^{-1}y \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

با نوشتن $(D + L)x^{(k+1)} = -Ux^{(k)} + y$ و حل این دستگاه برای $x^{(k+1)}$ با استفاده از جایگذاری پیشرو به‌دست می آید

$$x_i^{(k+1)} = -\sum_{l=1}^{i-1} \frac{a_{il}}{a_{ii}}x_l^{(k+1)} - \sum_{l=i+1}^{n} \frac{a_{il}}{a_{ii}}x_l^{(k)} + \frac{y_i}{a_{ii}} \qquad (n = 1, \ldots, n)$$

(جمع‌های تهی را صفر بگیرید.) این روش Gauss-Seidel است.

به تفاوت بین این روش و روش ژاکوبی توجه کنید، در روش Gauss-Seidel برای یافتن $x_i^{(k+1)}$ از مقادیر $x_1^{(k+1)}$ و ... و $x_{i-1}^{(k+1)}$ استفاده می‌شود.

۱۹. قضیه . *فرض کنید ماتریس $A = (a_{ik})$ در شرط* Sassenfeld *صدق کند:*

$$p = \max_{1 \le i \le n} p_i < 1$$

که در آن به‌صورت بازگشتی داریم

$$p_1 = \sum_{l=2}^{n} \left| \frac{a_{1l}}{a_{11}} \right| \quad \text{و} \quad p_i = \sum_{l=1}^{i-1} \left| \frac{a_{il}}{a_{ii}} \right| p_l + \sum_{l=i+1}^{n} \left| \frac{a_{il}}{a_{ii}} \right| \qquad (i = 2, \ldots, n)$$

آنگاه روش Gauss-Seidel *برای هر $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ و هر $y \in \mathbb{C}^n$ در هر نرم به جواب منحصربه فرد از $Ax = y$ میل می‌کند. سپس تخمین‌های زیر را داریم*

$$\|x^{(k)} - x\|_\infty \le \frac{p^k}{1 - p} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty$$
$$\|x^{(k)} - x\|_\infty \le \frac{p}{1 - p} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty$$

برهان. چون روش Gauss-Seidel روش تکراری

$$x^{(k+1)} = -(D + L)^{-1} U x^{(k)} + (D + L)^{-1} y$$

است پس کافی است نشان دهیم $\|(D + L)^{-1} U\|_\infty < 1$ تا قضیه کاملاً ثابت گردد. در واقع برای هر $z \in \mathbb{C}^n$ که $\|z\|_\infty = 1$، با قرار دادن $x = (D + L)^{-1} U z$ داریم $(D + L)x = Uz$ و سپس رابطه زیر بین مؤلفه‌های x و z برقرار است:

$$x_i = \sum_{l=1}^{i-1} \frac{a_{il}}{a_{ii}} x_l + \sum_{l=i+1}^{n} \frac{a_{il}}{a_{ii}} z_l \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

از این به استقراء نتیجه می‌شود $|x_i| \le p_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. پس $\|x\|_\infty \le p$. یعنی $\|(D+L)^{-1} U z\|_\infty \le p$. چون این برای هر $\|z\|_\infty = 1$ برقرار است پس $\|(D + L)^{-1} U\|_\infty \le p$. پس تحت شرط $p < 1$ داریم $\|(D + L)^{-1} U\| < 1$. ■

۲۰. نتیجه. فرض کنید که ماتریس A در سطرها اکیداً غالب قطری باشد. آنگاه شرط Sassenfeld برقرار است فلذا روش Gauss-Soidel همگرا است.

برهان. تحت این شرط به‌وضوح داریم $p_1 < 1$ و به استقراء برای هر i داریم $p_i < 1$. پس $p < 1$. ■

مثال زیر نشان می‌دهد که عکس نتیجه بالا ضرورتاً درست نیست.

مثال . نشان دهید که ماتریس سه قطری

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۰ & \cdots & \cdots & ۰ \\ -۱ & ۲ & -۱ & & & \vdots \\ ۰ & -۱ & ۲ & -۱ & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & ۰ \\ \vdots & & & -۱ & ۲ & -۱ \\ ۰ & \cdots & \cdots & ۰ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

در شرط Sassenfeld صدق می‌کند (اما به‌وضوح در سطرها اکیداً غالب قطری نیست).

حل.

$$p_۱ = \sum_{l=۲}^{n} \left|\frac{a_{۱l}}{a_{۱۱}}\right| = \frac{۱}{۲}$$
$$p_i = \sum_{l=۲}^{i-۱} \left|\frac{a_{il}}{a_{ii}}\right| p_l + \sum_{l=i+۱}^{n} \left|\frac{a_{il}}{a_{ii}}\right| = \frac{۱}{۲} p_{i-۱} + \frac{۱}{۲} \qquad (۲ \leq i \leq n-۱)$$
$$p_n = \sum_{l=۱}^{n-۱} \left|\frac{a_{il}}{a_{ii}}\right| p_l = \frac{۱}{۲} p_{n-۱}$$

پس به استقراء به‌دست می آید

$$p_i = ۱ - \frac{۱}{۲^i} \qquad i = ۱, \ldots, n-۱$$
$$p_n = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲^n}$$

پس $p = ۱ - \frac{۱}{۲^{n-۱}} < ۱$.

تبصره. وقتی n بزرگ باشد عدد انقباضی p نزدیک ۱ است و این باعث کند شدن همگرائی روش Gauss-Soidel برای این ماتریس می‌شود. هدف بعدی ما این است که راهی برای افزایش سرعت همگرائی بیابیم.

۲۱. تعریف. *ماتریس $n \times n$ $A = (a_{ij})$ را تحویل‌پذیر می‌خوانیم در صورتی که دو مجموعه ناتهی M و N افرازی برای $\{۱, \ldots, n\}$ موجود باشند که*

$$a_{ij} = ۰ \qquad (i \in M, j \in N)$$

در غیر این صورت آن را تحویل ناپذیر می‌خوانند.

اگر A تحویل‌پذیر باشد، آنگاه پس از جابه‌جایی سطرها و جابه‌جایی ستون‌ها می‌توان آن را به شکل $A = \begin{bmatrix} A_{۱۱} & ۰ \\ A_{۲۱} & A_{۲۲} \end{bmatrix}$ درآورد. پس حل دستگاه‌هی با ماتریس A برمی‌گردد به حل دو دستگاه کوچکتر با ماتریس‌های $A_{۱۱}$ و $A_{۲۲}$. در واقع برای حل $A \begin{bmatrix} X_۱ \\ X_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_۱ \\ Y_۲ \end{bmatrix}$ ابتدا $A_{۱۱} X_۱ = Y_۱$ را حل می‌کنیم. سپس $A_{۲۲} X_۲ = Y_۲ - A_{۲۱} X_۱$ را حل می‌کنیم تا $X_۲$ هم به‌دست آید.

۲۲. قضیه . *فرض کنید ماتریس $A = (a_{il})$ تحویل ناپذیر باشد و بعلاوه فرض کنید که در سطرها (ضعیفاً) غالب قطری باشد:*

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} |a_{ik}| \leq |a_{ii}| \qquad (i = 1, ..., n)$$

و به ازاء حداقل یک اندیس این نامساوی اکید باشد. آنگاه برای هر $y \in \mathbb{C}^n$ و هر نقطه شروع $x_\circ \in \mathbb{C}^n$ روش ژاکوبی (در هر نرمی) به جواب منحصر بفرد دستگاه $Ax = y$ میل می‌کند.

برهان. قبلاً دیدیم که برای $B = D^{-1}(L+U)$ در روش ژاکوبی داریم $\|B\|_\infty \leq 1$. پس $\rho(B) \leq 1$. حال فرض کنید مقدار ویژه λ ای برای B موجود باشد که $|\lambda| = 1$. بردار ویژه x انتخاب کنید که $\|x\|_\infty = 1$. آنگاه

$$\begin{aligned} \lambda x &= Bx \\ \lambda D x &= (L+U)x \\ \lambda a_{ii}\, x_i &= \textstyle\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} a_{ik}\, x_k \end{aligned}$$

$$|\lambda|\,|x_i| \leq \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \left|\frac{a_{ik}}{a_{ii}}\right| |x_k| \leq \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \left|\frac{a_{ik}}{a_{ii}}\right| \leq 1 \qquad (i = 1, ..., n)$$

حال قرار دهید $N = \{i \ : \ |x_i| = 1\}$. بنا به $\|x\|_\infty = 1$ داریم $N \neq \emptyset$. برای $i \in N$ داریم $|\lambda|\,|x_i| = 1$ فلذا نامساوی بالا برای $i \in N$ تبدیل می‌شود به

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \left|\frac{a_{ik}}{a_{ii}}\right| = 1\ , \qquad |\lambda|\,|x_j| \leq \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \left|\frac{a_{ik}}{a_{ii}}\right| |x_k| \qquad (i \in N)$$

اما فرض کرده بودیم که برای حداقل یک اندیس، نامساوی

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} |a_{ik}| \leq |a_{ii}| \qquad (i = 1, ..., n)$$

اکید باشد. از این‌رو مجموعه متمم $M = \{1, ..., n\} - N$ ناتهی است. چون A تحویل ناپذیر است پس اندیس‌های $i_\circ \in N$ و $k_\circ \in M$ موجوداند که $a_{i_\circ k_\circ} \neq 0$. چون $k_\circ \notin N$، پس $|x_{k_\circ}| \neq 1$ فلذا

$$|a_{i_\circ k_\circ}|\,|x_{k_\circ}| < |a_{i_\circ k_\circ}|$$

که حال این نامساوی منجر به تناقض زیر می‌شود:

$$1 = |x_{i_\circ}| = |\lambda||x_{i_\circ}| = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \left|\frac{a_{i_\circ k}}{a_{i_\circ i_\circ}}\right| |x_k| < \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \left|\frac{a_{i_\circ k}}{a_{i_\circ i_\circ}}\right| \leq 1$$

فلذا از ابتدا می‌بایست داشته باشیم $\rho(B) < 1$ که این به نوبه خود همگرایی روش را منجر می‌شود.

■

چنانکه در قضایای بالا دیدیم، در حالت کلی کوچکی ضریب انقباضی α معرف سرعت همگرایی روش تکراری است. پس در صورت استفاده از روش تکراری $x_{k+1} = Bx_k + y$، کوچکی $\rho(B)$ سرعت همگرایی را افزایش می‌دهد. هدف بعدی ما آن است که روش‌های تکراری بسازیم که $\rho(B)$ برای آنها کوچک باشد. روش ژاکوبی را بیاد آوریم:

$$\begin{aligned}
x^{(k+1)} &= -D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}y \\
&= -D^{-1}(A-D)x^{(k)} + D^{-1}y \\
&= x^{(k)} + D^{-1}(y - Ax^{(k)}) \\
&= (I - D^{-1}A)x^{(k)} + D^{-1}y
\end{aligned}$$

جمله $D^{-1}(y - Ax^{(k)})$ را جمله تصحیح کننده می‌نامند. در روشهای relaxation جمله تصحیح کننده را در یک عامل وزنی ω ضرب می‌کنند.

۲۳. تعریف. *روش تکراری*

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega D^{-1}(y - Ax^{(k)})$$

را روش ژاکوبی با relaxation *می‌نامند. عامل $\omega > 0$ را پارامتر* relaxation *می‌خوانیم.*

۲۴. قضیه . *فرض کنید که ماتریس ژاکوبی $B = D^{-1}(L+U)$ دارای مقادیر ویژه حقیقی بوده و $\rho(B) < 1$. فرض کنید λ_{min} و λ_{max} بترتیب کوچکترین و بزرگترین مقادیر ویژه B باشند. آنگاه شعاع طیفی ماتریس تکراری*

$$I - \omega D^{-1}A = (1-\omega)I - \omega D^{-1}(L+U)$$

برای روش ژاکوبی با relaxation *با پارامتر $\omega^* = \frac{2}{2-\lambda_{max}-\lambda_{min}}$ دارای کوچکترین شعاع طیفی است. در صورت $\lambda_{max} \neq -\lambda_{min}$، سرعت همگرایی روش ژاکوبی با ω^* سریع‌تر از روش ژاکوبی بدون* relaxation *است.*

برهان. برای $\omega > 0$ تساوی $Bu = \lambda u$ معادل است با

$$[(1-\omega)I + \omega B]u = [1 - \omega + \omega\lambda]u$$

پس مقدار ویژه λ از B متناظر است با مقدار ویژه $1 - \omega + \omega\lambda$ برای $(1-\omega)I + wB$. پس مقادیر ویژه ماتریس $(1-\omega)I + wB$ همگی حقیقی هستند و کوچکترین مقدار ویژه این ماتریس برابر $\omega\lambda_{min} + (1-\omega)$ است در حالی که بزرگتری مقدار ویژه برابر $\omega\lambda_{max} + (1-\omega)$ است. شعاع طیفی زمانی

می‌نیمم می‌شود که کوچکترین و بزرگترین مقدار ویژه مختلف‌العلامه باشند، یعنی

$$۱ - \omega^* + \omega^* \lambda_{min} = -۱ + \omega^* - \omega^* \lambda_{max}$$

از حل این معادله بدست می آوریم

$$\omega^* = \frac{۲}{۲ - \lambda_{max} - \lambda_{min}}$$

بقیه موارد قضیه نتیجه این هستند. ■

روش Gauss-Seidel برای حل $Ax = y$ به‌صورت زیر بود:

$$x^{(k+۱)} = -(D+L)^{-۱} U x^{(k)} + (D+L)^{-۱} y$$

معادلاً

$$(D+L)x^{(k+۱)} = -Ux^{(k)} + y$$

$$(D+L)x^{(k+۱)} = Dx^{(k)} - (D+U)x^{(k)} + y$$

$$Dx^{(k+۱)} = Dx^{(k)} + y - Lx^{(k+۱)} - (D+U)x^{(k)}$$

$$x^{(k+۱)} = x^{(k)} + D^{-۱}\left[y - Lx^{(k+۱)} - (D+U)x^{(k)}\right]$$

پس تعریف زیر معنی پیدا می‌کند.

۲۵. تعریف. *روش تکراری*

$$x^{(k+۱)} = x^{(k)} + \omega\, D^{-۱}\left[y - Lx^{(k+۱)} - (D+U)x^{(k)}\right]$$

معادلاً در مولفه‌ها:

$$x_i^{(k+۱)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left[y_i - \sum_{l=۱}^{i-۱} a_{ik}\, x_l^{(k+۱)} - \sum_{l=i}^{n} a_{il}\, x_l^{(k)}\right]$$

را روش Gauss-Seidel *با* relaxation *و یا روش* SOR *(*successive overrelaxation*) می‌نامند.* $\omega > ۰$ *را ضریب* relaxation *می‌خوانند.* □

روش معرفی شده در این تعریف را می‌توان بدین شکل نوشت:

$$(I+\omega D^{-1}L)x^{(k+1)}=\left[I-\omega D^{-1}(D+U)\right]x^{(k)}+\omega D^{-1}y$$

$$(D+\omega L)x^{(k+1)}=\left[D-\omega(D+U)\right]x^{(k)}+\omega y$$

$$x^{(k+1)}=(D+\omega L)^{-1}\left[(1-\omega)D-\omega U\right]x^{(k)}+(D+\omega L)^{-1}\omega\, y$$

که با فرض

$$B(\omega)=(D+\omega L)^{-1}\left[(1-\omega)D-\omega U\right]$$

روش تکراری

$$x^{(k+1)}=B(\omega)\,x^{(k)}+(D+\omega L)^{-1}\omega\, y$$

بدست می آید که ماتریس روش، یعنی ماتریس $B(\omega)$، تابعی غیر خطی بر حسب ω است لذا تحلیل این روش پیچیده‌تر از روش Jacobi با relaxation است (که در آن ماتریس روش تکرار تابعی خطی بر حسب ω است).

۲۶. قضیه (Kahan) **.** *فرض کنید روش SOR همگرا باشد (یعنی $\rho(B(\omega))<1$). آنگاه $0<\omega<2$.*

برهان. برای مقادیر ویژه μ_1 و ... و μ_n از $B(\omega)$ (که ممکن است تکراری باشند) داریم

$$\prod_{j=1}^{n}\mu_j=detB(\omega) \qquad (*)$$

از طرفی ماتریس $D+\omega L$ پایین مثلثی است با اعضای روی قطر a_{ii} در حالی که $(1-\omega)D-\omega U$ بالا مثلثی است با اعضای روی قطر $(1-\omega)a_{ii}$. سپس از

$$B(\omega)=(D+\omega\, L)^{-1}[(1-\omega)D-\omega U]$$

بدست می آید

$$\begin{aligned}\det(B(\omega)) &= \tfrac{1}{\det(D+\omega L)}\det\left[(1-\omega)D-\omega U\right]\\ &= \tfrac{1}{a_{11}\cdots a_{nn}}\cdot(1-\omega)^n\, a_{11}\cdots a_{nn}=(1-\omega)^n\end{aligned}$$

سپس

$$|1-\omega|^n = |\det\ B(\omega)| = |\mu_1|\cdots|\mu_n| \leq \rho(B(\omega))^n$$

$$|1-\omega| \leq \rho(B(\omega))$$

حال اگر روش SOR همگرا باشد، باید داشته باشیم $\rho(B(\omega)) < 1$ فلذا $|\omega - 1| < 1$، معادلاً $0 < \omega < 2$.

■

۲۷. قضیه (Ostrowski) . *اگر A ماتریس هرمیتی و مثبت معین باشد، آنگاه روش SOR برای هر نقطه شروع $x_0 \in \mathbb{C}^n$ و هر $y \in \mathbb{C}^n$ و هر $0 < \omega < 2$ به جواب منحصر بفرد دستگاه $Ax = y$ همگرا است.*

برهان. نشان می‌دهیم که $\rho(B(\omega)) < 1$. پس فرض کنید μ مقدار ویژه‌ای برای $B(\omega)$ متناظر با بردار ویژه x باشد:

$$\begin{aligned}(D+\omega L)^{-1}\left[(1-\omega)D - \omega U\right]x &= \mu x \\ \left[(1-\omega)D - \omega\, U\right]x &= \mu(D+\omega\, L)x\end{aligned}$$

حال به مدد دو تساوی

$$(2-\omega)D - \omega A - \omega(U-L) = 2\left[(1-\omega)D - \omega U\right]$$

و

$$2[D+\omega L] = (2-\omega)D + \omega A - \omega(U-L)$$

می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\left[(2-\omega)D - \omega A - \omega(U-L)\right]x &= 2\left[(1-\omega)D - \omega U\right]x \\ &= 2\mu\left[D+\omega L\right]x \\ &= \mu\left[(2-\omega)D + \omega A - \omega(U-L)\right]x\end{aligned}$$

با ضرب داخلی گرفتن با بردار x بدست می آید

$$\mu = \frac{(2-\omega)(Dx\,,\,x) - \omega(Ax\,,\,x) + \mathbf{i}\ \omega[\mathbf{i}\,(Ux - Lx\,,\,x)]}{(2-\omega)(Dx\,,\,x) + \omega(Ax\,,\,x) + \mathbf{i}\ \omega[\mathbf{i}\,(Ux - Lx\,,\,x)]}$$

که با قرار دادن $a = (Ax\,,\,x)$ و $d = (Dx\,,\,x)$ و $s = \mathbf{i}\,(Ux - Lx\,,\,x)$ آن را بدین شکل می‌نوسیم:

$$\mu = \frac{(2-\omega)d - \omega a + \mathbf{i}\omega s}{(2-\omega)d + \omega a + \mathbf{i}\omega s}$$

چون A مثبت معین است، پس $a > ۰$. از طرفی عناصر روی قطر اصلی هر ماتریس مثبت معین ضرورتاً مثبت هستند، فلذا

$$d = (Dx\,,\,x) = \sum_{i=۱}^{n} a_{ii}\,x_i^{۲} > ۰$$

فلذا برای $۰ < \omega < ۲$ داریم

$$|(۲-\omega)d - \omega a| < |(۲-\omega)d + \omega a|$$

چون A هرمیتی است، پس $U = L^*$ و $L = U^*$ فلذا

$$\begin{aligned} s &= i(Ux\,,\,x) - i\,(Lx\,,\,x) \\ &= i\,(x\,,\,Lx) - i\,(x\,,\,Ux) \\ &= i\,\overline{(Lx\,,\,x)} - i\,\overline{(Ux\,,\,x)} \\ &= \overline{i\,(Ux\,,\,x) - i\,(Lx\,,\,x)} \\ &= \bar{s} \end{aligned}$$

پس s حقیقی است. حال از این مطالب:

$$|\mu|^{۲} = \frac{[(۲-\omega)d - \omega a]^{۲} + (\omega\,s)^{۲}}{[(۲-\omega)d + \omega a]^{۲} + (\omega\,s)^{۲}} < ۱$$

پس $|\mu| < ۱$. چون این برای هر مقدار ویژهٔ ماتریس $B(\omega)$ برقرار است، پس $\rho(B(\omega)) < ۱$ چنانکه مورد نظر بود.

■

کوادراتور نیوتن—کوته

۱. لم. فرض کنید g تابعی پیوسته بر $[a,b]$ بوده و $\{\alpha_1,...,\alpha_m\}$ اعداد نامنفی باشند. آنگاه برای هر مجموعه $\{x_1,...,x_m\}$ از نقاط $[a,b]$ (که لزومی ندارد متمایز باشند) نقطه $\xi \in [a,b]$ موجود است که

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k g(x_k) = \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k\right) g(\xi)$$

برای اثبات از قضیه مقدار میانگین برای توابع پیوسته استفاده کنید (اثبات آن مشابه اثبات قضیه بعد است).

۲. قضیه (قضیه مقدار میانگین برای انتگرال‌ها) . *فرض کنید $f(x)$ تابعی پیوسته بوده و g تابعی ریمان انتگرال‌پذیر باشد بطوری که بر $[a,b]$ تغییر علامت ندهد. آنگاه نقطه $a \le \xi \le b$ موجود است بطوری که*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx \qquad (*)$$

برهان. مثلاً فرض کنیم $g \le 0$ بر $[a,b]$. قرار دهید $M = \max_{[a,b]} f$ و $m = \min_{[a,b]} f$. آنگاه

$$m \le f(x) \le M$$

$$mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$$

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx \qquad (**)$$

حال دو حالت درنظر بگیرید:

حالت اول فرض کنید $\int_a^b g(x)dx = 0$. آنگاه از $(**)$ معلوم می‌شود که $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$. در این‌صورت هر $\xi \in (a,b)$ جوابی برای $(*)$ است.

حالت دوم فرض کنید $\int_a^b g(x)dx > 0$. آنگاه $(**)$ تبدیل می‌شود به

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M$$

حال از قضیه مقدار میانی برای توابع پیوسته، نقطه $a \leq \xi \leq b$ موجود است که

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

■

———————————————————————————————————

قرار دهید

$$\pi_{۰}(t) \equiv t$$
$$\pi_j(t) \equiv t(t-۱)\cdots(t-j) \qquad j = ۱, ۲, ...$$

۳. لم.

الف) برای n فرد داریم

$$\pi_n\left(\frac{n}{۲} - \tau\right) = \pi_n\left(\frac{n}{۲} + \tau\right)$$

یعنی π_n حول نقطه $t = \frac{n}{۲}$ متقارن است.

ب) برای n زوج داریم

$$\pi_n\left(\frac{n}{۲} - \tau\right) = -\pi_n\left(\frac{n}{۲} + \tau\right)$$

یعنی π_n حول $t = \frac{n}{۲}$ پادمتقارن است.

برهان. داریم $\pi_n(t) = \prod_{k=۰}^{n}(t-k)$، پس

$$\begin{aligned}
\pi_n(\tfrac{n}{۲} + \tau) &= \textstyle\prod_{k=۰}^{n}\left(\tfrac{n}{۲} + \tau - k\right) \\
&= (-۱)^{n+۱}\textstyle\prod_{k=۰}^{n}\left(-\tfrac{n}{۲} - \tau + k\right) \\
&= (-۱)^{n+۱}\textstyle\prod_{k=۰}^{n}\left[\left(\tfrac{n}{۲} - \tau\right) + (k-n)\right] \\
&= (-۱)^{n+۱}\textstyle\prod_{l=۰}^{n}\left[\left(\tfrac{n}{۲} - \tau\right) - l\right] = (-۱)^{n+۱}\pi_n\left(\tfrac{n}{۲} - \tau\right)
\end{aligned}$$

که از این هر دوی قسمت‌های الف و ب نتیجه می‌شوند. ■

۴. لم.

الف) فرض کنید t عددی غیر صحیح باشد که $0 < t+1 \leq \frac{n}{2}$. آنگاه

$$|\pi_n(t+1)| < |\pi_n(t)|$$

ب) فرض کنید t عددی غیر صحیح باشد که $\frac{n}{2} \leq t < n$. آنگاه

$$|\pi_n(t)| < |\pi_n(t+1)|$$

برهان. (الف)

هردوی t و $t+1$ اعداد غیرصحیح هستند، فلذا

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\pi_n(t+1)}{\pi_n(t)}\right| &= \left|\frac{(t+1)(t)(t-1)\cdots(t-n+1)}{(t)(t-1)\cdots(t-n+1)(t-n)}\right| \\
&= \left|\frac{t+1}{t-n}\right| = \left|\frac{t+1}{n-t}\right| = \frac{t+1}{(n+1)-(t+1)} \\
&\leq \frac{n/2}{(n+1)-(n/2)} = \frac{1}{1+2/n} < 1
\end{aligned}$$

برای قسمت (ب) بیایید برای $\frac{n}{2} \leq t < n$ عدد s را تصویر آینه‌ای t نسبت به $\frac{n}{2}$ بگیریم. آنگاه $\frac{s+t}{2} = \frac{n}{2}$ پس $s = n - t$ فلذا s نسز غیر صحیحی است. همچنینی $s - 1$ تصویر آینه‌ای $t + 1$ است. پس بنا به قسمت (الف)،

$$\begin{aligned}
|\pi_n(s)| &< |\pi_n(s-1)| \\
|(-1)^{n+1}\pi_n(s)| &< |(-1)^{n+1}\pi_n(s-1)| \\
|\pi_n(t)| &< |\pi_n(t+1)|
\end{aligned}$$

■

حال برگردیم به بازه $[a,b]$. قرار دهید $x_{n/2} = \frac{a+b}{2} = x_0 + \frac{n}{2}h$ (نقطه وسط بازه $[a,b]$). توجه کنید که $x_{n/2}$ متناظر با $t = \frac{n}{2}$ است.

حال با استفاده از لم‌های بالا و با رفتن از تابع π_n بر $[0,n]$ به تابع ω_n بر $[a,b]$، لم‌های زیر بدست می آیند:

۵. لم.

$$\omega_n(x_{n/2} + \xi) = (-1)^{n+1}\ \omega_n(x_{n/2} - \xi)$$

۶. لم.

الف) برای $a < \xi + h \le x_{n/2}$ و همچنین $\xi \ne x_j$ $(j = 0, 1, ..., n)$ داریم

$$|\omega_n(\xi + h)| < |\omega_n(\xi)|$$

ب) برای $x_{n/2} \le \xi < b$ و همچنین $\xi \ne x_j$ $(j = 0, 1, ..., n)$ داریم

$$|\omega_n(\xi)| < |\omega_n(\xi + h)|$$

---

۷. تعریف.

الف) *منظور از یک کوادراتور یا انتگرال‌گیری عددی برای محاسبه انتگرالی به‌صورت* $\int_a^b f(x)dx$ *عبارتی است به شکل* $\sum_{k=0}^{n} w_k\, f(x_k)$ *که در آن*

$$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$$

و بعلاوه همگی x_k*ها و* w_k*ها و* n *مستقل از* f *هستند و* <u>*وزن‌های*</u> w_k *و* <u>*گره‌های*</u> x_k *به نحوی تعیین می‌شوند که عبارت* $\sum_{k=0}^{n} w_k\, f(x_k)$ *تقریب معقولی از* $\int_a^b f(x)\, dx$ *بدست دهد.*

ب) *اگر* $P_n(x)$ *چندجمله‌ای درون‌یاب درجه* n *در نقاط* $(x_k, f(x_k))$ *باشد و اگر* $L_k(x)$*ها چندجمله‌ای‌های لاگرانژ متناظر باشند و اگر وزن‌ها به‌صورت* $w_k = \int_a^b L_k(x)dx$ *گرفته شوند، آنگاه کوادراتور بدست آمده را کوادراتور درون‌یابی (*interpolatory quadrature*) می‌نامند. توجه کنید که در این حالت، اگر* $P_n(x)$ *چندجمله‌ای درونیاب* f *در آن گره‌ها باشد، آنگاه خطای استفاده از این کوادراتور برابر است با:*

$$E(f) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b P_n(x)dx$$

پ) *یک فرمول کوادراتور گفته می‌شود که دارای درجه دقت* n *است درصورتی که خطای آن*

$$E(f) = \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n} w_k\, f(x_k)$$

برای چندجمله‌ای‌های f *تا درجه* n *صفر باشد و برای حداقل یک چندجمله‌ای از درجه* $n+1$ *مخالف صفر باشد. این معادل است با آنکه*

$$\begin{cases} E(1) = E(x) = \cdots = E(x^n) = 0 \\ E(x^{n+1}) \ne 0 \end{cases}$$

♣

کوادراتورهای درونیاب با خاصیت زیر مشخص می‌شوند:

۸. قضیه . *فرض کنید که یک فرمول کوادراتور از $n+1$ گره متمایز استفاده می‌کند. آنگاه این فرمول یک کوادراتور درونیابی است اگر و تنها اگر درجه دقت آن حداقل n باشد.*

برهان. $\Leftarrow$ فرض کنید $\sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k)$ فرمول کوادراتور درونیابی باشد (پس $w_k = \int_a^b L_k(x)dx$). آنگاه برای هر چندجمله‌ای $f(x)$ از درجه حداقل n چندجمله‌ای درونیاب $P_n(x)$ مساوی خود f است: $f(x) = P_n(x)$ فلذا $E(f) = 0$، فلذا خطای هر چندجمله‌ای $f(x)$ از درجه حداقل n برابر صفر است. اثبات در جهت عکس به عنوان تمرین. ■

۹. تعریف. *اگر در کوادراتور درون‌یابی گره‌های $\{x_0, ..., x_n\}$ (که $a \le x_0 < ... < x_n \le b$) به فواصل مساوی از یکدیگر قرار داشته باشند، به کوادراتور حاصل کوادراتور نیوتن—کوته می‌گویند. اگر $x_0 = a$ و $x_n = b$ (یعنی اگر نقاط انتهایی بازه‌ها هم در فرمول بیایند)، آنگاه فرمول بدست آمده را فرمول بسته نیوتن—کوته می‌نامند؛ در مقابل اگر $x_0 \neq a$ و $x_n \neq b$، آنگاه به فرمول باز نیوتن—کوته رسیده‌ایم.* ♣

تبصره توجه کنید که در فرمول باز، ابتدا بازه $[a, b]$ به تعدادی از زیربازه‌ها با طول‌های مساوی تقسیم می‌شود و سپس دو بازه اول و آخر را حذف می‌کنیم.

قرارداد می‌کنیم:

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \qquad \Omega_n(x) = \int_a^x \omega_n(t)dt$$

پس $\Omega_n'(x) = \omega_n(x)$.

دو حالت را جداگانه را برای Ω_n بررسی می‌کنیم:

حالت اول: n زوج است. در این حالت بازه $[a, b]$ به تعدادی زوج از زیر بازه‌ها تقسیم شده که در ضمن نقطه میانی $\frac{a+b}{2}$ یکی از گره‌ها است (به عنوان مثال، حالت $n = 4$ را درنظر داشته باشید). آنگاه لمی در بالا که نزولی بودن $|\omega_n|$ در نیمه اول و صعودی بودن $|\omega_n|$ در نیمه دوم از بازه $[a, b]$ را مدعی است به کمک ما می‌آید و نتیجه می‌گیریم که برای هر $x \in (a, b)$ داریم $\Omega_n(x) > 0$. از طرف دیگر، برای عدد زوج n تابع ω_n تابعی پادمتقارن نسبت به نقطه میانی $\frac{a+b}{2}$ است، فلذا عدد $\Omega_n(b)$ که مساحت محصور به منحنی ω_n و محور x ها را بر دو نیمه بدست می‌دهد برابر صفر است. پس:

۱۰. لم. برای عدد زوج n داریم

الف) $\Omega_n > 0$ بر (a,b).

ب) $\Omega_n(a) = 0$ و $\Omega_n(b) = 0$.

حالت دوم: n فرد است. توجه کنیم که $\omega_n(x) = \omega_{n-1}(x)(x-x_n)$. توجه کنیم که وقتی تحدید $\omega_{n-1}(x)$ بر بازه $[x_0, x_{n-1}]$ را درنظر می‌گیریم، آنگاه به دلیل زوج بودن $n-1$، لم قبل برای $x \in [x_0, x_{n-1}]$ نتیجه می‌دهد که $\Omega_{n-1}(x) \geq 0$. از طرفی برای $x \in [x_0, x_{n-1}]$ داریم $(x - x_{n-1}) \leq 0$، فلذا $x \in [x_0, x_{n-1}]$ برای داریم:

$$\begin{aligned}
\Omega_n(x) &= \int_a^x \omega_{n-1}(t)(t-x_n)dt \\
&= \int_a^x \omega'_{n-1}(t)(t-x_n)dt \\
&= \Big[\Omega_{n-1}(t)(t-x_n)\Big]_{t=a}^{t=x} - \int_a^x \Omega_{n-1}(t)dt \\
&= \Omega_{n-1}(x)(x-x_n) - \int_a^x \Omega_{n-1}(t)dt \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

چون $(x - x_n) < 0$، پس تساوی در نامساوی بالا تنها زوانی رخ می‌دهد که $\Omega_{n-1}(x) = 0$، فلذا $x = x_{n-1}$. اما برای چنین x داریم $\int_a^{x_{n-1}} \Omega_{n-1}(t)dt > 0$. پس در هر حال در نامساوی بالا نامساوی اکید خواهد بود.

همچنین برای $t \in (x_{n-1}, x_n)$ داریم $\omega_n(t) < 0$ (برای مثال، حالت ۵ $n=$ را بررسی کنید)، فلذا برای $x \in (x_{n-1}, x_n)$ و به اتکاء بر قسمت (ب) از لم قبل برای عدد زوج $n-1$ داریم:

$$\begin{aligned}
\Omega_n(x) &= \int_a^{x_{n-1}} \omega_n(t)dt + \int_{x_{n-1}}^x \omega_n(t)dt \\
&= \Omega_{n-1}(x_{n-1}) + \int_{x_{n-1}}^x \omega_n(t)dt \\
&= \int_{x_{n-1}}^x \omega_n(t)dt \\
&< 0
\end{aligned}$$

پس:

۱۱. لم. برای عدد فرد n داریم $\Omega_n < 0$ بر (a,b).

حال فرض کنید که n عددی زوج باشد. می‌خواهیم خطای روش نیوتن—کوته بسته را بدست آوریم (پس تلویحاً فرض کرده‌ایم که گره‌ها به فاصله مساوی از یکدیگر قرار دارند):

از طرفین $f(x) - P_n(x) = \omega_n(x)\, f[x_\circ, ..., x_n, x]$ انتگرال بگیرید تا خطای کوادراتور $E(f)$ بدست آید:

$$\begin{aligned}
E(f) &= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b P_n(x)dx \\
&= \int_a^b \omega_n(x)\, f[x_\circ, ..., x_n, x]\; dx \qquad (*) \\
&= \int_a^b \Omega_n'(x)\, f[x_\circ, ..., x_n, x] dx \\
&= \Omega_n(x)\, f[x_\circ, ..., x_n, x]\,\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \Omega_n(x) \tfrac{d}{dx} f[x_\circ, ..., x_n, x]\, dx \\
&= = - \int_a^b \Omega_n(x)\, \tfrac{d}{dx} f[x_\circ, ..., x_n, x] dx
\end{aligned}$$

اما می‌دانیم که $\frac{d}{dx} f[x_\circ, ..., x_n, x]$ تابعی پیوسته از x است و $\Omega_n(x)$ تغییر علامت نمی‌دهد [در واقع، $\Omega_n(x) \leq \circ$]. پس بنا به قضیه مقدار میانگین برای انتگرال‌ها نقطه η موجود است که در ادامه تساوی بالا می‌توان نوشت

$$= - \frac{d}{dx} f[x_\circ, ..., x_n, x]\Big|_{x=\eta} \int_a^b \Omega_n(x)\, dx \qquad (a \leq \eta \leq b) \qquad (**)$$

اما

$$\circ < \int_a^b \Omega_n(x)\, dx = x\, \Omega_n(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b x\, \Omega_n'(x)\, dx = - \int_a^b x\, \omega_n(x)\, dx$$

همچنین از قبل می‌دانیم که (در صورت $f \in C^{n+۲}[a, b]$)

$$\frac{d}{dx} f[x_\circ, ..., x_n, x]\Big|_{x=\eta} = \frac{f^{(n+۲)}(\xi)}{(n+۲)!} \qquad (\xi \in [a, b])$$

پس قضیه زیر بدست می آید:

۱۲. قضیه . *فرض کنیم بازه $[a, b]$ به تعداد زوج n قسمت مساوی تقسیم شده باشد. فرض کنیم $f \in C^{(n+۲)}[a, b]$. آنگاه خطای ناشی از فورم بسته کوادراتور نیوتن—کوته بصورت*

$$E(f) = \frac{K_n}{(n+۲)!}\; f^{(n+۲)}(\xi) \qquad (a \leq \xi \leq b)$$

است که در آن $K_n = \int_a^b x\omega_n(x)\, dx < \circ$.

تبصره. اگر f چندجمله‌ای از درجه حداکثر $n + ۱$ باشد آنگاه $f^{(n+۲)} \equiv \circ$، فلذا خطای ذکر شده در قضیه بالا صفر است، یعنی فورم بسته کوادراتور نیوتن—کوته در زمانی که n زوج باشد دارای درجه دقت $n + ۱$ است [یعنی برای چندجمله‌ای‌های تا درجه $n + ۱$ دقیقی است] گرچه P_n ای که برای تقریب زدن انتگرال استفاده شده خود از درجه n است.

حال توجه خود را معطوف به n فرد می‌کنیم.:

ابتدا توجه کنیم که $\omega_n(x)$ دارای علامت ثابت بر $[x_{n-1}, x_n]$ است (به تعریف $\omega_n(x)$ توجه کنید). فلذا بنا به قضیه مقدار میانی برای انتگرال‌ها،

$$\begin{aligned} E(f) &= \int_a^{x_{n-1}} \omega_n(x)\, f[x_0, ..., x_n, x]\, dx + \int_{x_{n-1}}^b \omega_n(x)\, f[x_0, ..., x_n, x]\, dx \\ &= \int_a^{x_{n-1}} \omega_n(x)\, f[x_0, ..., x_n, x]\, dx + \frac{f^{(n+1)}(\xi')}{(n+1)!} \int_{x_{n-1}}^b \omega_n(x)\, dx \qquad (x_{n-1} \le \xi' \le x_n) \end{aligned}$$

اما برای انتگرال اولی توجه کنیم که

$$\begin{aligned} \int_a^{x_{n-1}} \omega_n(x)\, f[x_0, ..., x_n, x]\, dx &= \int_a^{x_{n-1}} \omega_{n-1}(x)(x-x_n) f[x_0, ..., x_n, x]\, dx \\ &= \int_a^{x_{n-1}} \Omega'_{n-1}(x)\, \{f[x_0, ..., x_{n-1}, x] - f[x_0, ..., x_{n-1}, x_n]\}\, dx \end{aligned} \qquad (*)$$

اما $n-1$ عددی زوج است، فلذا

$$\Omega_{n-1}(a) = 0, \qquad \Omega_{n-1}(x_{n-1}) = 0$$

پس

$$\int_a^{x_{n-1}} \Omega'_{n-1}(x) dx = 0$$

فلذا در $(*)$ انتگرالی که شامل عبارت $f[x_0, ..., x_n]$ است برابر صفر می‌باشد. پس در ادامه $(*)$:

$$= \int_a^{x_{n-1}} \Omega'_{n-1}(x)\, f[x_0, ..., x_{n-1}, x] dx$$

$$= \Omega_{n-1}(x) f[x_0, ..., x_{n-1}, x]\, \Big|_{x=a}^{x=x_{n-1}} - \int_a^{x_{n-1}} \Omega_{n-1}(x)\, \frac{d}{dx} f[x_0, ..., x_{n-1}, x]\, dx$$

$$= -\int_a^{x_{n-1}} \Omega_{n-1}(x)\, \frac{d}{dx}\, f[x_0, ..., x_{n-1}, x]\, dx$$

$$= -\frac{d}{dx} f[x_0, ..., x_{n-1}, x]\, \Big|_{x=\xi''} \int_a^{x_{n-1}} \Omega_{n-1}(x)\, dx \qquad [\text{Mean} - \text{Value Theorem for integral}]$$

$$= -\frac{f^{(n+1)}(\xi'')}{(n+1)!} \int_a^{b-h} \Omega_{n-1}(x)\, dx$$

<u>**مرحله بعد**</u> پس تا به‌حال نشان داده‌ایم که

$$E(f) = -\left[A\, f^{(n+1)}(\xi') + B\, f^{(n+1)}(\xi'')\right]$$

که در آن

$$A = -\frac{1}{(n+1)!}\int_{x_{n-1}}^{b} \omega_n(x)\,dx, \qquad B = \frac{1}{(n+1)!}\int_a^{x_{n-1}} \Omega_{n-1}(x)dx$$

به وضوح برای هر x دربازه (x_{n-1}, x_n) داریم $\omega_n(x) < 0$، پس $A > 0$. از طرفی $n-1$ زوج است، پس $\Omega_{n-1}(x) > 0$ برای $a < x < x_{n-1}$. فلذا $B > 0$. پس اگر فرض کنیم که $f \in C^{n+1}[a,b]$، آنگاه بنا به لمی در بالا نقطه ξ در فاصله بین ξ' و ξ'' موجود است که

$$E(f) = -(A+B)f^{(n+1)}(\xi)$$

مرحله بعد داریم

$$\int_a^{x_{n-1}} \omega_n(x)\,dx = \int_a^{x_{n-1}} \omega_{n-1}(x)\,(x-x_n)\,dx = \int_a^{x_{n-1}} \Omega'_{n-1}(x)(x-x_n)\,dx =$$

$$= \Omega_{n-1}(x)(x-x_n)\,\Big|_a^{x_{n-1}} - \int_a^{x_{n-1}} \Omega_{n-1}(x)\,dx = -\int_a^{x_{n-1}} \Omega_{n-1}(x)\,dx$$

فلذا $B = \frac{-1}{(n+1)!}\int_a^{x_{n-1}} \omega_n(x)\,dx$، و از آنجا

$$A+B = -\frac{1}{(n+1)!}\int_a^b \omega_n(x)\,dx$$

پس قضیه زیر ثابت شده است:

۱۳. قضیه . *اگر n فرد باشد و $f \in C^{n+1}[a,b]$، آنگاه در فورم بسته فرمول نیوتن—کوته خطا به‌صورت زیر است:*

$$E(f) = \frac{K_n}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi) \qquad (a \le \xi \le b)$$

که در آن $K_n = \int_a^b \omega_n(x)\,dx < 0$

توضیح: توجه کنید که چون $\omega_n(x) = \Omega'_n(x)$، آنگاه

$$\int_a^b \omega_n(x)\,dx = \Omega_n(b) - \Omega_n(a) = \Omega_n(b) < 0$$

تبصره. این فرمول نشان می‌دهد که برای عدد فرد n درجه دقت برابر n است. این در حالی است که برای عدد زوج n (چنانکه در بالا دیدیم) درجه دقت برابر $n+1$ است. پس مناسب است که با تعداد فردی از گره‌ها (متناظراً با عدد زوج n) کار کنیم.

در یک جمع‌بندی، خطاها را بر حسب گام h بدین شکل بیان می‌شود (با رفتن از بازه $[a,b]$ به بازه $[0,n]$):

۱۴. قضیه . *فرض کنیم $\sum_{k=0}^{n} w_k\, f(x_k)$ فرمول بسته نیوتن—کوته باشد. آنگاه:*

الف) *با فرض n زوج و $f \in C^{n+2}[a,b]$ داریم*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} w_k\, f(x_k) + \frac{h^{n+3}\, f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!} \int_0^n t^2(t-1)\cdots(t-n)\, dt$$

که $\int_0^n t^2(t-1)\cdots(t-n)\, dt < 0$.

ب) *با فرض n فرد و $f \in C^{n+1}[a,b]$ داریم*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} w_k\, f(x_k) + \frac{h^{n+2}\, f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} \int_0^n t(t-1)\cdots(t-n)\, dt$$

که $\int_0^n t(t-1)\cdots(t-n)\, dt < 0$.

حال فرمول باز نیوتن—کوته را مطالعه می‌کنیم:

بازه $[a,b]$ را به $n+2$ قسمت مساوی تقسیم کنید و قرار دهید $h = \frac{b-a}{n+2}$ و

$$x_{-1} = a \quad , \quad x_j = x_0 + jh \quad (j = 0, ..., n) \quad , \quad x_{n+1} = b$$

مثل قبل

$$\omega_n(x) = (x - x_0)\cdots(x - x_n)$$

در این حالت به جای تابع $\Omega_n(x)$ از تابع

$$J_n(x) = \int_a^x \omega_n(t)\, dt \qquad\qquad (n = 1, 2, ...)$$

استفاده می‌شود. وقتی که n زوج است، برای $a < x < x_0$ همه جمل $(x - x_j)$ در تعریف $\omega_n(x)$ منفی هستند، پس $\omega_n(x) > 0$ برای $a < x < x_0$. این باعث می‌شود که

$$\begin{cases} J_n(a) = J_n(b) = 0 & \\ J_n(x) < 0 & (a < x < b) \qquad (n\ even) \end{cases}$$

حال اگر استدلال موجود در قضایای بالا را کلمه به کلمه، منتها با J_n به جای Ω_n، تکرار کنیم، آنگاه خواهیم داشت:

۱۵. قضیه . *فرض کنیم بازه $[a,b]$ به n قسمت مساوی تقسیم شده باشد که n زوج است. فرض کنیم $f \in C^{n+2}[a,b]$. آنگاه خطای ناشی از فرمول باز نیوتن—کوته بصورت*

$$E(f) = \frac{K'_n}{(n+2)!}\, f^{(n+2)}(\eta)$$

است، که در آن

$$K'_n = \int_a^b x\,\omega_n(x)\,dx > ۰$$

۱۶. قضیه . *فرض کنیم بازه $[a,b]$ به n قسمت مساوی تقسیم شده باشد که n فرد است. فرض کنیم $f \in C^{n+۱}[a,b]$. آنگاه خطای ناشی از فرمول باز نیوتن—کوته بصورت*

$$E(f) = \frac{K'_n}{(n+۲)!}\; f^{(n+۱)}(\eta)$$

است، که در آن

$$K'_n = \int_a^b \omega_n(x)\,dx > ۰$$

بر حسب گام h خطا بدین شکل است:

۱۷. قضیه . *فرض کنیم $\sum_{k=۰}^{n} w_k\, f(x_k)$ فرمول باز نیوتن—کوته باشد. آنگاه:*

الف) *با فرض n زوج و $f \in C^{n+۲}[a,b]$ داریم*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=۰}^{n} w_k\, f(x_k) + \frac{h^{n+۳}\, f^{(n+۲)}(\eta)}{(n+۲)!}\; \int_{-۱}^{n+۱} t^۲(t-۱)\cdots(t-n)\,dt$$

که $\int_{-۱}^{n+۱} t^۲(t-۱)\cdots(t-n)\,dt > ۰$.

ب) *با فرض n فرد و $f \in C^{n+۱}[a,b]$ داریم*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=۰}^{n} w_k\, f(x_k) + \frac{h^{n+۲}\, f^{(n+۱)}(\eta)}{(n+۱)!}\; \int_{-۱}^{n+۱} t(t-۱)\cdots(t-n)\,dt$$

که $\int_{-۱}^{n+۱} t(t-۱)\cdots(t-n)\,dt > ۰$.

تبصره. مجدداً ملاحظه می‌شود که مرتبه دقت برای n زوج برابر $n+۱$ است در حالی که برای n فرد برابر n است.

روش نیوتن برای مسائل غیرخطی

۱. قضیه (قضیه مقدار میانگین) . *فرض می‌کنیم $D \subset \mathbb{R}^n$ مجموعه‌ای باز و محدب بوده و نگاشت $f : D \to \mathbb{R}^n$*

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \cdots, x_n) \end{bmatrix}$$

بطور پیوسته مشتق‌پذیر باشد، یعنی ماتریس ژاکوبی

$$f'(x) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x)\right)_{j,k=1,\cdots,n}$$

بر D دارای مؤلفه‌های پیوسته باشد. آنگاه

$$\| f(x) - f(y) \| \leq \max_{0 \leq \lambda \leq 1} \| f'(\lambda x + (1-\lambda)y \| \| x - y \| \qquad (\forall x, y \in D)$$

که در آن $\| . \|$ نرم دلخواهی بر $\mathbb{R}^n$ است.

برهان. <u>**مرحله اول**</u> برای نرم دلخواه $\| . \|$ و برای هر تابع پیوسته $g : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ داریم

$$\left\| \int_0^1 g(t)dt \right\| \leq \int_0^1 \| g(t) \| dt$$

در واقع نقاط $t_i = \frac{i}{m}$ $(0 \leq i \leq m)$ را که افرازی برای بازه $[0, 1]$ تشکیل می‌دهند در نظر بگیرید. آنگاه روابط زیر بنابه تعریف انتگرال برداری برقرار هستند:

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \| g(t_i) \| (t_i - t_{i-1}) = \int_0^1 \| g(t) \| dt$$

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} g(t_i)(t_i - t_{i-1}) = \int_0^1 g(t)dt$$

اما

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} g(t_i)(t_i - t_{i-1}) \right\| \leq \sum_{i=1}^{m} \| g(t_i) \| (t_i - t_{i-1})$$

اما با حدگیری روی $m \to \infty$، بدست می‌آید

$$\left\| \int_0^1 g(t)dt \right\| \leq \int_0^1 \| g(t) \| dt$$

مرحله دوم برای $x, y \in D$ تابع $h_j : [۰, ۱] \to \mathbb{R}$ را با ضابطه $h_j(t) = f_j(tx + (۱ - t)y)$ تعریف کنید. آنگاه

$$\begin{aligned} f_j(x) - f_j(y) &= h_j(۱) - h_j(۰) \\ &= \int_۰^۱ h_j'(t)dt \\ &= \int_۰^۱ \sum_{k=۱}^n \frac{\partial f_j}{\partial s_k}(tx + (۱ - t)y)(x_k - y_k)dt \\ &= \int_۰^۱ f'(tx + (۱ - t)y)(x - y)dt \quad \text{مولفه } j \text{ —ام از} \end{aligned}$$

پس

$$f(x) - f(y) = \int_۰^۱ f'(tx + (۱ - t)y)(x - y)dt$$

سپس از نتیجه مرحل اول:

$$\begin{aligned} \| f(x) - f(y) \| &\leq \int_۰^۱ \| f'(tx + (۱ - t)y) \| \| x - y \| dt \\ &\leq \max_{۰ \leq t \leq ۱} \| f'(tx + (۱ - t)y) \| \| x - y \| \end{aligned}$$

■

۲. قضیه . *فرض کنید $D \subset \mathbb{R}^n$ مجموعه‌ای باز و محدب باشد و $f : D \to D$ دارای مشتق پیوسته باشد. بعلاوه برای نرمی روی $\mathbb{R}^n$ داشته باشیم*

$$\alpha = \sup_{x \in D} \|f'(x)\| < ۱$$

آنگاه f را می‌توان بر $\bar{D}$ توسعه داد : $f : \bar{D} \to \bar{D}$، و معادله $f(x) = x$ دارای یک جواب منحصربفرد $x \in \bar{D}$ است، و برای هر $x_۰ \in D$ تکرار

$$x_{n+۱} = f(x_n) \qquad n = ۰, ۱, ۲, ...$$

به آن جواب میل می‌کند که برای آن تخمین‌های

$$\|x_n - x\| \leq \frac{\alpha^n}{۱ - \alpha} \|x_۱ - x_۰\|$$

$$\|x_n - x\| \leq \frac{\alpha}{۱ - \alpha} \|x_n - x_{n-۱}\|$$

را داریم.

برهان. بنا به فرض داریم $0 \leq \alpha < 1$. برای هر $x \in \bar{D}$ دنباله $x_n \in D$ موجود است که $x_n \to x$. بنابه قضیه مقدار میانگین، برای $m < n$:

$$\|f(x_m) - f(x_n)\| \leq \alpha \|x_m - x_n\|$$

پس $\{f(x_n)\}$ هم دنباله‌ای کشی است. پس به یک نقطه $y \in \mathbb{R}^n$ همگرا است. حال نشان می‌دهیم که y به انتخاب خاصی از $\{x_n\}$ بستگی ندارد فلذا منحصراً از روی x تعریف می‌شود: در واقع اگر $x'_n \in D$ هم دنباله‌ای باشد که $x'_n \to x$، آنگاه

$$\|f(x_n) - f(x'_n)\| \leq \alpha \|x_n - x'_n\|$$

پس چون $\|x_n - x'_n\| \to 0$ داریم $\|f(x_n) - f(x'_n)\| \to 0$. پس $f(x'_n) \to y$. این ادعای ما را ثابت می‌کند. چون وجود y تنها به x بستگی دارد، $f(x)$ را مساوی y تعریف می‌کنیم. بدین ترتیب یک توسیع f بر $\bar{D}$ بدست می آید. حال با گرفتن حد روی نقاط D، نامساوی

$$\|f(x) - f(x')\| \leq \alpha \|x - x'\| \qquad \forall x, x' \in D$$

تبدیل می‌شود به نامساوی

$$\|f(x) - f(x')\| \leq \alpha \|x - x'\| \qquad \forall x, x' \in \bar{D}$$

چون $\bar{D}$ کامل است (یعنی هر دنباله کشی در آن همگرا است)، پس f دارای نقطه ثابت منحصربفردی است که تکرارهای $x_{n+1} = f(x_n)$ به نقطه ثابت میل می‌کند و تخمین‌های بالا را داریم (اینها نتیجه یکی از قضایا بوده که برای نقاط ثابت قبلاً گفته‌ایم). ■

شکل زیر از قضیه بالا را نیز مشابه بالا می‌توان ثابت کرد:

۳. قضیه . *فرض کنید $S \subset \mathbb{R}^n$ مجموعه‌ای بسته و محدب باشد و $f : S \to S$ تابعی پیوسته باشد که در نقاط درونی بطور پیوسته مشتقپذیر باشد. بعلاوه برای نرمی روی $\mathbb{R}^n$ داشته باشیم*

$$\alpha = \sup_{x \in S^\circ} \|f'(x)\| < 1$$

آنگاه معادله $f(x) = x$ دارای یک جواب منحصربفرد $x \in S$ است، و برای هر $x_0 \in S$ تکرار

$$x_{n+1} = f(x_n) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

به آن جواب میل می‌کند که برای آن تخمین‌های

$$\|x_n - x\| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \|x_1 - x_0\|$$

$$\|x_n - x\| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \|x_n - x_{n-1}\|$$

را داریم.

۴. تعریف. فرض کنید $D \subset \mathbb{R}^n$ مجموعه‌ای باز بوده و $f : D \to \mathbb{R}^n$ تابعی بطور پیوسته مشتق‌پذیر باشد، و بعلاوه ماتریس ژاکوبی $f'(x)$ برای هر $x \in D$ وارون‌پذیر باشد. آنگاه روش نیوتن برای حل $f(x) = 0$ توسط روش تکراری

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1} f(x_n) \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

و با شروع از نقطه $x_0 \in D$ معرفی می‌شود.

۵. قضیه . فرض کنید $D \subset \mathbb{R}^n$ مجموعه‌ای باز و محدب باشد و $f : D \to \mathbb{R}^n$ تابعی بطور پیوسته مشتق‌پذیر باشد. فرض کنید که برای یک نرم $\|\ .\ \|$ روی $\mathbb{R}^n$ و برای $x_0 \in D$ شرایط زیر برقرار باشند:

(a) عدد $\gamma > 0$ موجود است که

$$\| f'(x) - f'(y) \| \leq \gamma \| x - y \| \qquad (\forall x, y \in D)$$

(b) ماتریس ژاکوبی $f'(x)$ برای هر $x \in D$ وارون‌پذیر است و $\beta > 0$ موجود است که

$$\left\| f'(x)^{-1} \right\| \leq \beta \qquad (\forall x \in D)$$

(c) برای اعداد

$$\alpha = \left\| f'(x_0)^{-1} f(x_0) \right\| \qquad , \qquad q = \alpha\beta\gamma$$

نامساوی $q < \frac{1}{2}$ برقرار است.

(d) گوی بسته $B[x_{\circ},۲\alpha]=\{x : \| x-x_{\circ}\| \leq ۲\alpha\}$ زیرمجموعه‌ای از D است.

آنگاه تحت این چهار فرض، f دارای صفر منحصربفردی در $B[x_{\circ},۲\alpha]$ است. با شروع از $x_{\circ}$، تکرار نیوتن یک دنباله از $\{x_n\}$ از نقاط در $B[x_{\circ},۲\alpha]$ را بدست می‌دهد و این دنباله به صفر x^* از f همگرا است که برای آن تخمین خطا به‌صورت زیر است:

$$\| x_n - x^* \| \leq ۲\alpha q^{۲^n-۱} \qquad (n=\circ,۱,۲,...)$$

برهان. <u>**مرحله اول**</u> فرض کنید $x,y,z\in D$. از اثبات قضیه بالا داریم

$$f(y)-f(x)=\int_{\circ}^{۱} f'[tx+(۱-t)y](y-x)dt$$

$$f(y)-f(x)-f'(z)(y-x)=\int_{\circ}^{۱}\{f'[tx+(۱-t)y]-f'(z)\}(y-x)dt$$

$$\begin{aligned}\| f(y)-f(x)-f'(z)(y-x)\| &\leq \gamma \| y-x\| \textstyle\int_{\circ}^{۱} \| t(x-z)+(۱-t)(y-z)\| dt\\ &\leq \tfrac{\gamma}{۲} \| y-x\| \{\| x-z\| + \| y-z\|\}\end{aligned}$$

که با انتخاب $z=x$ بدست می آوریم

$$\| f(y)-f(x)-f'(x)(y-x)\| \leq \frac{\gamma}{۲}\| y-x\|^{۲} \qquad (\forall x,y\in D)$$

و با انتخاب $z=x_{\circ}$ بدست می آوریم

$$\| f(y)-f(x)-f'(x_{\circ})(y-x)\| \leq ۲\alpha\gamma \| y-x\| \qquad (\forall x,y\in B[x_{\circ},۲\alpha])$$

<u>**مرحله دوم**</u> حال به استقراء نشان می‌دهیم که

$$(*) \qquad x_n\in B[x_{\circ},۲\alpha] \qquad , \qquad \| x_n-x_{n-۱}\| \leq \alpha q^{۲^{n-۱}-۱} \qquad n=۱,۲,...$$

برای $n=۱$ داریم

$$\| x_۱ - x_{\circ}\| = \| f'(x_{\circ})^{-۱}f(x_{\circ})\| = \alpha$$

پس هر دو رابطه $(*)$ برای $n=۱$ برقرار هستند. فرض استقراء بگیرید که روابط $(*)$ برای $n\geq ۱$ برقرار باشند. چون $x_n\in B[x_{\circ},۲\alpha]\subset D$ پس عنصر $x_{n+۱}=x_n-f'(x_n)^{-۱}f(x_n)$ خوشتعریف است. چون

$x_n = x_{n-1} - f'(x_{n-1})^{-1} f(x_{n-1})$، پس $f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = 0$. پس می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\| x_{n+1} - x_n \| &= \| f'(x_n)^{-1} f(x_n) \| \leq \beta \| f(x_n) \| \\
&= \beta \| f(x_n) - f(x_{n-1}) - f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) \| \\
&\leq \frac{\beta\gamma}{2} \| x_n - x_{n-1} \|^2 \\
&\leq \frac{\beta\gamma}{2} \left[\alpha\, q^{2^{n-1}-1} \right]^2 = \frac{\alpha}{2}\, \alpha\beta\gamma q^{2^n - 2} = \frac{\alpha}{2}\, q^{2^n-1} < \alpha q^{2^n - 1}
\end{aligned}$$

و سپس

$$\begin{aligned}
\| x_{n+1} - x_0 \| &\leq \| x_{n+1} - x_n \| + \cdots + \| x_1 - x_0 \| \\
&\leq \alpha(1 + q + q^3 + q^7 + \cdots + q^{2^n - 1}) \leq \frac{\alpha}{1-q} \leq 2\alpha
\end{aligned}$$

پس $(*)$ برای $n+1$ برقرار است.

مرحله سوم با استفاده از $q < \frac{1}{2}$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\| x_n - x_{n+k} \| &\leq \| x_n - x_{n+1} \| + \cdots + \| x_{n+k-1} - x_{n+k} \| \\
&\leq \alpha(q^{2^n - 1} + q^{2^{n+1}-1} + \cdots + q^{2^{n+k-1}-1}) \\
&= \alpha q^{2^n - 1} \left[1 + q^{2^n} + \cdots + (q^{2^n})^{2^{k-1}-1} \right] \\
&\leq 2\,\alpha\, q^{2^n - 1}
\end{aligned} \qquad (**)$$

پس $\{x_n\}$ یک دنباله کشی است. قرار دهید $x^* = \lim x_n$. چون $x_n \in B[x_0, 2\alpha]$ و این مجموعه بسته است پس $x^* \in B[x_0, 2\alpha]$. حال در رابطه $(**)$ اجازه دهید $k \to \infty$، تا بدست آید $\| x_n - x^* \| \leq 2\alpha\, q^{2^n - 1}$. که این تخمین را در صورت قضیه مدعی شده بودیم.

مرحله چهارم نشان می‌دهیم که x^* صفری از f است. در واقع از $f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0$ داریم

$$\begin{aligned}
\| f(x_n) \| &= \| f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \| \\
&\leq \| f'(x_n) - f'(x_0) + f'(x_0) \| \; \|x_{n+1} - x_n\| \\
&\leq \{\gamma \| x_n - x_0 \| + \|f'(x_0)\|\} \; \|x_{n+1} - x_n\|
\end{aligned}$$

پس $f(x_n) \to 0$. سپس از پیوستگی f نتیجه می‌شود $f(x^*) = 0$.

مرحله پنجم حال نشان می‌دهیم که x^* تنها صفر از f در $B[x_0, 2\alpha]$ است: تابع $g : B[x_0, 2\alpha] \to \mathbb{R}^n$ را

در نظر بگیرید:

$$g(x) = x - f'(x_\circ)^{-1} f(x)$$

سپس

$$g(x) - g(y) = f'(x_\circ)^{-1}\{f(y) - f(x) - f'(x_\circ)(y - x)\}$$

$$\| g(x) - g(y) \| \leq 2\alpha\beta\gamma \| y - x \| = 2q \| y - x \|$$

و چون $2q < 1$، پس g تابع انقباضی است. لذا بنابه قضیه‌ای که قبلاً داشتیم، g حداکثر یک نقطه ثابت می‌تواند داشته باشد. اما x^* یک نقطه ثابت آن است. پس x^* تنها نقطه ثابت برای g است. لذا x^* تنها صفر از f در $B[x_\circ, 2\alpha]$ است. ■

۶. نتیجه. فرض کنید $D \subset \mathbb{R}^n$ مجموعه‌ای باز بوده و $f : D \to \mathbb{R}^n$ دو بار مشتق پیوسته داشته باشد (یعنی مشتقات جزئی $\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}$ همگی موجود و پیوسته هستند). فرض کنید x^* صفری از f باشد بطوری‌که ماتریس $f'(x^*)$ وارون‌پذیر است. آنگاه روش نیوتن همگرای موضعی ($locally\ convergent$) است، یعنی همسایگی B از صفر x^* موجود است که روش نیوتن با شروع از هر $x_\circ \in B$ به x^* همگرا است.

برهان. بدلیل بطور پیوسته مشتق‌پذیر بودن f' می‌توان قضیه مقدار میانگین را برای f' بکار برد:

$$\|f'(x) - f'(y)\| \leq \gamma\|x - y\| \qquad \forall x, y \in B[x^*, \rho]$$

که در آن $B[x^*, \rho] \subset D$. از پیوستگی f' می‌توان $\rho > 0$ را آنقدر کوچک بگیرید که $f'(x)$ برای هر $x \in B[x^*, \rho]$ نامنفرد باشد و سپس β را طوری می‌گیریم که $\|f'(x)^{-1}\| \leq \beta$ برای هر $x \in B[x^*, \rho]$. از طرفی از $f(x^*) = 0$ نتیجه می‌شود که برای هر $x_\circ$ که به اندازه کافی به x^* نزدیک باشد، $\|f(x_\circ)\|$ به اندازه کافی کوچک است؛ پس $0 < \delta < \frac{\rho}{2}$ موجود است که برای هر $x_\circ$ که $\|x_\circ - x^*\| < \delta$ داریم

$$\|f(x_\circ)\|\beta^2\gamma < \frac{1}{2}$$

$$2\beta\|f(x_\circ)\| < \frac{\rho}{2}$$

حال برای $x_\circ \in B[x^*, \delta]$ داریم $x_\circ \in B[x^*, \rho]$ چرا که $\delta < \frac{\rho}{2}$، فلذا $\|f'(x_\circ)^{-1}\| \leq \beta$. سپس برای $\alpha = \|f'(x_\circ)^{-1} f(x_\circ)\|$ داریم

$$\alpha\beta\gamma \leq \|f(x_\circ)\|\beta^2\gamma < \frac{1}{2}$$

$$۲\alpha \leq ۲\beta\|f(x_۰)\| < \frac{\rho}{۲}$$

دومی تضمین می‌کند که گوی بسته $B[x_۰, ۲\alpha]$ در داخل گوی باز $B(x^*, \rho)$ است. پس زیرمجموعه‌ای از D است. حال همه شرایط قضیه بالا برای $D = B(x^*, \rho)$ مهیا هستند تا نتیجه بگیریم که با شروع از $x_۰$ روش نیوتن همگرا است. این برای هر $x_۰ \in B(x^*, \delta)$ ثابت شد. پس روش نیوتن همگرای موضعی است. ■

۷. نتیجه. فرض کنید $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ دوبار مشتق پیوسته داشته باشد و فرض کنید x^* صفر ساده‌ای برای f باشد. آنگاه روش نیوتن موضعاً همگرا است.

<u>مثال</u> دستگاه

$$\begin{aligned} \ln(x^۲ + y) - ۱ + y &= ۰ \\ \sqrt{x} + xy &= ۰ \end{aligned}$$

را با تقریب اولیه $(x_۰ , y_۰) = (۲/۴ , -۰/۶)$ درنظر بگیرید. سه تکرار از روش نیوتن را برای بهبود بخشیدن به تخمین انجام دهید.

<u>حل</u> ماتریس ژاکوبی در نقطه دلخواه (x_n, y_n):

$$J = \begin{bmatrix} \frac{۲x_n}{x_n^۲+y_n} & \frac{x_n^۲+y_n+۱}{x_n^۲+y_n} \\ \\ \frac{۱+۲y_n\sqrt{x_n}}{۲\sqrt{x_n}} & x_n \end{bmatrix}$$

که وارون آن عبارت است از

$$J^{-۱} = \frac{۱}{D}\begin{bmatrix} x_n & \frac{-(x_n^۲+y_n+۱)}{x_n^۲+y_n} \\ \\ \frac{-(۱+۲y_n\sqrt{x_n})}{۲\sqrt{x_n}} & \frac{۲x_n}{x_n^۲+y_n} \end{bmatrix}$$

که در آن

$$D = \frac{۱}{x_n^۲ + y_n}\left[۲x_n^۲ - x_n^۲y_n - y_n^۲ - y_n - \frac{x_n^۲ + y_n + ۱}{۲\sqrt{x_n}}\right]$$

سپس تخمین بعدی:

$$\begin{bmatrix} x_{n+۱} \\ y_{n+۱} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} - J^{-۱}\begin{bmatrix} \ln(x_n^۲ + y_n) - ۱ + y \\ \sqrt{x_n} + x_ny_n \end{bmatrix}$$

سه تخمین بعدی عبارتند از:

$$(x_۱, y_۱) = (۲/۴۱۲۵۲۴\ ,\ -۰/۶۴۴۰۱۴)$$

$$(x_۲, y_۲) = (۲/۴۱۲۲۴۹\ ,\ -۰/۶۴۳۸۵۶)$$

$$(x_۳, y_۳) = (۲/۴۱۲۲۴۹\ ,\ -۰/۶۴۳۸۵۶)$$

۸. قضیه . *فرض کنیم $p(x)$ چندجمله‌ای از درجه $n \geq ۲$ باشد. فرض کنید که ریشه‌های آن*

$$\xi_۱ \geq \xi_۲ \geq \cdots \geq \xi_n$$

همگی حقیقی هستند. آنگاه با شروع از هر $x_۰$ که $x_۰ > \xi_۱$، روش نیوتن یک دنباله اکیداً نزولی و همگرا بدست می‌دهد.

برهان. بدون از دست دادن کلیت می توان فرض کرد که $p(x_۰) > ۰$. چون $p(x)$ بر بازه $(\xi_۱, \infty)$ تغییر علامت نمی‌دهد، پس

$$۰ < p(x) = a_n x^n + \cdots + a_۰ \qquad (\xi_۱ < x)$$

فلذا $a_n > ۰$. از قضیه مقدار میانگین نتیجه می‌شود که p' دارای $n - ۱$ ریشه α_i است که

$$\xi_۱ \geq \alpha_۱ \geq \xi_۲ \geq \alpha_۲ \cdots \geq \alpha_{n-۱} \geq \xi_n$$

داریم $p'(x) = na_n x^{n-۱} + \cdots$ و $\lim_{x\to+\infty} p'(x) = +\infty$ چراکه $a_n > ۰$. سپس چون $p'(x)$ بر بازه $(\alpha_۱, \infty)$ تغییر علامت نمی‌دهد باید داشته باشیم

$$۰ < p'(x) \qquad (\alpha_۱ < x)$$

با بکار بردن مجدد قضیه مقدار میانگین بدست می آید

$$۰ < p''(x) \qquad (\alpha_۱ < x)$$

$$۰ \leq p'''(x) \qquad (\alpha_۱ \leq x)$$

حالت تساوی $= ۰$ زمانی رخ می‌دهد که $n = ۲$. پس p و p' توابع محدبی بر $[\alpha_۱, \infty)$ هستند. حال به استقراء بر $k \geq ۰$ برای دنباله $\{x_k\}$ بدست آمده در روش نیوتن ثابت می‌کنیم که $x_k > \xi_۱$. برای $k = ۰$ با

انتخاب $x_0 > \xi_1$ برقرار است. فرض استقراء بگیرید که $x_k > \xi_1$، پس $p'(x_k) > 0$. آنگاه بدلیل دقیق بودن بسط تیلور برای چندجمله‌ای‌ها:

$$\begin{aligned} 0 = p(\xi_1) &= p(x_k) + (\xi_1 - x_k)p'(x_k) + \tfrac{1}{2}(\xi_1 - x_k)^2 p''(c) \quad \xi_1 < c < x_k \\ &> p(x_k) + (\xi_1 - x_k)p'(x_k) \\ &= p'(x_k)(x_k - x_{k+1}) + (\xi_1 - x_k)p'(x_k) \qquad [as\ p(x_k) = p'(x_k)(x_k - x_{k+1})] \\ &= p'(x_k)(\xi_1 - x_{k+1}) \end{aligned}$$

پس از $p'(x_k) > 0$ نتیجه می‌شود که $\xi_1 - x_{k+1} < 0$ پس $x_{k+1} > \xi_1$. پس استقراء کامل است. با توجه به این واقعیت، برای هر $k \leq 0$ داریم $p(x_k) > 0$ و $p'(x_k) > 0$ فلذا

$$x_{k+1} = x_k - \frac{p(x_k)}{p'(x_k)} < x_k$$

یعنی دنباله $\{x_k\}$ اکیداً نزولی است.

چون دنباله $\{x_k\}$ نزولی و از پایین (به ξ_1) کراندار است، پس دنباله‌ای همگرا است و حد آن حداقل مساوی ξ_1 است. نام این حد را s بنامید. فرض خلف بگیرید که $s > \xi_1$. چون در بالای ξ_1 صفری از p' موجود نیست نتیجه می‌گیریم که $p'(s) \neq 0$. سپس با حدگیری از طرفین رابطه $x_{k+1} = x_k - \frac{p(x_k)}{p'(x_k)}$ به دست می‌آید $s = s - \frac{p(s)}{p'(s)}$، فلذا $p(s) = 0$. اما این متناقض با $s > \xi_1$ است، چرا که ξ_1 بزرگترین صفر از p است. ■

در اثبات بالا نتیجه زیر هم ملاحظه گردید.

۹. لم. فرض کنیم $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ که $a_n > 0$ چندجمله‌ای از درجه $n \geq 2$ باشد که تمامی ریشه‌هایش حقیقی هستند. اگر α_1 بزرگترین ریشه از p' باشد، آنگاه $p''' \geq 0$ بر بازه $[\alpha_1, +\infty)$، یعنی p' تابعی محدب بر این بازه است. ♣

چون مقدار ξ_1 در عمل نامعلوم است، پس فعلاً برای انتخاب x_0 مشکل داریم. قضیه زیر این امکان را فراهم می‌کند:

۱۰. قضیه . *ریشه‌های (در حالت کلی مختلط) λ از چندجمله‌ای* $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ در

روابط زیر صدق می‌کنند:

$$|\lambda| \leq \max\left\{\left|\frac{a_0}{a_n}\right| , 1+\left|\frac{a_1}{a_n}\right| , \ldots , 1+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right\}$$

$$|\lambda| \leq \max\left\{1 , \sum_{j=1}^{n}\left|\frac{a_j}{a_n}\right|\right\}$$

$$|\lambda| \leq \max\left\{\left|\frac{a_0}{a_1}\right| , 2\left|\frac{a_1}{a_2}\right| , \ldots , 2\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right\}$$

$$|\lambda| \leq \max\sum_{j=0}^{n-1}\left|\frac{a_j}{a_{j+1}}\right|$$

$$|\lambda| \leq 2\max\left\{\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| , \sqrt{\left|\frac{a_{n-2}}{a_n}\right|} , \sqrt[3]{\left|\frac{a_{n-3}}{a_n}\right|} , \ldots , \sqrt[n]{\left|\frac{a_0}{a_n}\right|}\right\}$$

برهان. تنها دو نامساوی اول و دوم را ثابت می‌کنیم:

ماتریس

$$F = \begin{bmatrix} 0 & & & -\gamma_0 \\ 1 & & & -\gamma_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & -\gamma_{n-1} \end{bmatrix}$$

را درنظر بگیرید که در آن $\gamma_i = \frac{a_i}{a_n}$. آنگاه چندجمله‌ای مشخصه ماتریس F برابر است با $\frac{(-1)^n}{a_n}p(x)$، فلذا مقادیر ویژه ماتریس F همان ریشه‌های چندجمله‌ای $p(x)$ هستند. می‌دانیم که برای هر مقدار ویژه λ از یک ماتریس A و هر نرم ماتریسی $\|\cdot\|$ داریم $|\lambda| \leq \|A\|$، از جمله

$$|\lambda| \leq \|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|$$

چون مقادیر ویژه A و A^T یکسان هستند، پس با بکار بردن این نتیجه برای A^T خواهیم داشت:

$$|\lambda| \leq \max_{1\leq i\leq n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}^T| = \max_{1\leq i\leq n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ki}|$$

با بکار بردن این دو نامساوی برای ماتریس F دو نامساوی زیر برای ریشه‌های چندجمله‌ای $p(x)$ با ضرایب a_i بدست می آیند:

$$|\lambda| \leq \max\left\{\left|\frac{a_0}{a_n}\right| , \max_{1\leq k\leq n-1}\left(1+\left|\frac{a_k}{a_n}\right|\right)\right\}$$

$$|\lambda| \leq \max\left\{1 , \sum_{k=0}^{n-1}\left|\frac{a_k}{a_n}\right|\right\}$$

■

مثال . برای $p(x) = x^{۳} - ۲x^{۲} + x - ۱$ داریم

$$|\lambda| \leq \max\left\{\left|\frac{a_{\circ}}{a_n}\right| \ , \ ۱ + \left|\frac{a_{۱}}{a_n}\right| \ , \ \dots \ , \ ۱ + \left|\frac{a_{n-۱}}{a_n}\right|\right\} = \max\{۱, ۲, ۳\} = ۳$$

$$|\lambda| \leq \max\left\{۱ \ , \ \sum_{j=۱}^{n} \left|\frac{a_j}{a_n}\right| \ \right\} = \max\{۱, ۱ + ۱ + ۲\} = ۴$$

$$|\lambda| \leq \max\left\{ \ \left|\frac{a_{\circ}}{a_{۱}}\right| \ , \ ۲\left|\frac{a_{۱}}{a_{۲}}\right| \ , \ \dots \ , \ ۲\left|\frac{a_{n-۱}}{a_n}\right| \ \right\} = ۴$$

$$|\lambda| \leq \max \sum_{j=\circ}^{n-۱} \left|\frac{a_j}{a_{j+۱}}\right| = ۳/۵$$

$$|\lambda| \leq ۲\max\left\{ \ \left|\frac{a_{n-۱}}{a_n}\right| \ , \ \sqrt{\left|\frac{a_{n-۲}}{a_n}\right|} \ , \ \sqrt[۳]{\left|\frac{a_{n-۳}}{a_n}\right|} \ , \ \dots \ , \ \sqrt[n]{\left|\frac{a_{\circ}}{a_n}\right|} \ \right\} = ۴$$

تخمین اولی از همه بهتر است.

نمایش پئانو برای خطا

کوادراتوری به شکل

$$I(f) = \sum_{k=0}^{m_0} a_{k0} f(x_{k0}) + \sum_{k=0}^{m_1} a_{k1} f'(x_{k1}) + \cdots + \sum_{k=0}^{m_n} a_{kn} f^{(n)}(x_{kn})$$

را درنظر بگیرید. آنگاه خطا:

$$R(f) = I(f) - \int_a^b f(x)dx$$

نسبت به f خطی است. توجه کنیم که فرمول‌های انتگرالگیری نیوتن—کوته و گاوس از این نوع هستند.

۱. لم. فرض کنید F تابعی پیوسته باشد که $\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ موجود و پیوسته است. همچنین فرض کنید $F(x,x)=0$. آنگاه $\frac{d}{dx}\int_a^x F(x,t)dt = \int_a^x \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)dt$.

برهان. قرار دهید $G(x,y)=\int_a^y F(x,t)dt$. آنگاه از قضایای مقدماتی آنالیز

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial x}(x,y) = \int_a^y \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)dt \\ \\ \frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = F(x,y) \end{cases}$$

بالاخص،

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x,x) = F(x,x) = 0$$

سپس از قاعده زنجیری،

$$\frac{d}{dx}G(x,x) = \frac{\partial G}{\partial x}(x,x) + \frac{\partial G}{\partial y}(x,x)\frac{dy}{dx} = \frac{\partial G}{\partial x}(x,x) + 0$$

یعنی

$$\frac{d}{dx}\int_a^x F(x,t)dt = \int_a^x \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)dt$$

■

۲. قضیه . *فرض کنیم کوادراتور بالا برای اعضای $\prod_n$ دقیق باشد. آنگاه برای هر $f \in C^{n+1}[a,b]$ می‌توان نوشت*

$$R(f) = \int_a^b f^{(n+1)}(t)\, K(t)dt$$

که

$$K(t) = \frac{۱}{n!} R_x \left[(x-t)_+^n\right] \qquad (x-t)_+^n = (\max\left[(x-t)\,,\ ۰\right])^n = \begin{cases} (x-t)^n & (x \geq t) \\ ۰ & (x < t) \end{cases}$$

و بعلاوه

$$R_x \left[(x-t)_+^n\right]$$

خطا برای تابع $g(x) = (x-t)_+^n$ است.

تبصره. تابع $K(t)$ را هسته پئانو برای اپراتور خطا، R، می‌نامند.

برهان. داریم (بسط تیلور)

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r_n(x) \qquad (*)$$

که در آن

$$r_n(x) = \frac{۱}{n!} \int_a^x f^{(n+۱)}(t)(x-t)^n dt = \frac{۱}{n!} \int_a^b f^{(n+۱)}(t)(x-t)_+^n \ dt$$

چون خطا برای چندجمله‌ای‌های در $\prod_n$ صفر است، پس از $(*)$ داریم

$$R(f) = R(r_n) = \frac{۱}{n!}\ R_x \left[\int_a^b f^{(n+۱)}(t)(x-t)_+^n \, dt\right] \qquad (**)$$

مرحله بعد اگر لم بالا را مکرراً بکار بریم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \tfrac{d^k}{dx^k} \textstyle\int_a^b f^{(n+۱)}(t)(x-t)_+^n \ dt &= \tfrac{d^k}{dx^k} \textstyle\int_a^x f^{(n+۱)}(t)(x-t)^n \, dt \\ &= \textstyle\int_a^x f^{(n+۱)}(t) \tfrac{d^k}{dx^k}(x-t)^n \, dt \\ &= \textstyle\int_a^b f^{(n+۱)}(t) \tfrac{d^k}{dx^k}(x-t)_+^n \, dt \qquad k = ۰, ۱, ..., n \end{aligned}$$

تساوی آخر به این دلیل است که مقدار انتگرال تغییر نمی‌کند اگر که مقدار تابع انتگرالده در یک نقطه تغییر کند، از این رو تک نقطه $t = x$ در انتگارالگیری که تابع در آن مشتقپذیر نیست تاثیری در مقدار انتگرال ندارد و مقدار مشتق $\frac{d^k}{dx^k}(x-t)_+^n$ را در نقطه $x = t$ هرچه خواستیم تعریف می‌کنیم. سپس با تعریف نمودن

داریم $h(x)=\int_a^b f^{(n+1)}(t)(x-t)_+^n\,dt$

$$\begin{aligned}
I(h) &= \sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{m_l} a_{kl}\, h^{(l)}(x_{kl})\\
&= \sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{m_l} a_{kl}\int_a^b f^{(n+1)}(t)\ \frac{d^k}{dx^k}(x-t)_+^n\Big|_{x=x_{kl}}\ dt\\
&= \int_a^b f^{(n+1)}(t)\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{m_l} a_{kl}\ \frac{d^k}{dx^k}(x-t)_+^n\Big|_{x=x_{kl}}\ dt\\
&= \int_a^b f^{(n+1)}(t) I_x\left[(x-t)_+^n\right] dt \qquad (***)
\end{aligned}$$

همچنین با بکار بردن قضیه فوبینی برای توابع پیوسته،

$$\int_a^b h(x)dx=\int_a^b\int_a^b f^{(n+1)}(t)(x-t)_+^n\,dt\,dx=\int_a^b\int_a^b f^{(n+1)}(t)(x-t)_+^n\,dx\,dt=$$

$$=\int_a^b f^{(n+1)}(t)\left[\int_a^b (x-t)_+^n\,dx\right]dt \qquad (****)$$

حال با کم کردن $(****)$ از $(***)$ داریم

$$R_x(h)=\int_a^b f^{(n+1)}(t)\ R_x\left[(x-t)_+^n\right]\ dt$$

$$R_x\left[\int_a^b f^{(n+1)}(t)(x-t)_+^n\,dt\right]=\int_a^b f^{(n+1)}(t)\ R_x\left[(x-t)_+^n\right]\ dt$$

با بکار بردن این تساوی در $(**)$ نتیجه بدست می‌آید. ■

مثال . کرنل پئانو را برای روش سیمپسون محاسبه می‌کنیم:

$$R(f)=\frac{1}{3}f(-1)+\frac{4}{3}f(0)+\frac{1}{3}f(+1)-\int_{-1}^{1}f(x)dx$$

روش سیمپسون از نوع فرمولهای بسته نیوتن—کوته است برای $n=2$، فلذا دقت انتگرالگیری آن $n+1=3$ است. یعنی روش سیمپسون برای $\prod_3$ دقیق است، پس قضیه بالا را می‌توان برای $n=3$ بکار

برد. حال هسته پئانو:

$$\begin{aligned} K(t) = \tfrac{1}{6}R_x[(x-t)_+^3] &= \tfrac{1}{6}\left[\tfrac{1}{3}(-1-t)_+^3 + \tfrac{4}{3}(0-t)_+^3 + \tfrac{1}{3}(1-t)_+^3 - \int_{-1}^{1}(x-t)_+^3 dx\right] \\ &= \tfrac{1}{6}\left[0 + \tfrac{4}{3}(-t)_+^3 + \tfrac{1}{3}(1-t)^3 - \int_t^1 (x-t)^3 dx\right] \\ &= \tfrac{1}{6}\left[0 + \tfrac{4}{3}(-t)_+^3 + \tfrac{1}{3}(1-t)^3 - \tfrac{(1-t)^4}{4}\right] \\ &= \begin{cases} \tfrac{1}{6}\left[0 + 0 + \tfrac{1}{3}(1-t)^3 - \tfrac{(1-t)^4}{4}\right] & 0 \le t \le 1 \\ \tfrac{1}{6}\left[0 + \tfrac{4}{3}(-t)^3 + \tfrac{1}{3}(1-t)^3 - \tfrac{(1-t)^4}{4}\right] & -1 \le t \le 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \tfrac{1}{72}(1-t)^3(1+3t) & 0 \le t \le 1 \\ K(-t) & -1 \le t \le 0 \end{cases} \end{aligned}$$

و این روی بازه $[a\,,\,b]$ تغییر علامت نمی‌دهد.

تبصره. نشان داده می‌شود که در فرمول نیوتن—کوته، کرنل $K(t)$ روی بازه $[a,b]$ تغییر علامت نمی‌دهد. اما برای فرمول بسته نیوتن—کوته، این فرمول برای $\prod_n$ دقیق است وقتی که n فرد باشد، در حالی که برای $\prod_{n+1}$ دقیق است وقتی که n زوج باشد. فلذا

$$R(f) = \begin{cases} f^{(n+1)}(\xi)\int_a^b K(t)dt & (n\ odd) \\ f^{(n+2)}(\xi)\int_a^b K(t)dt & (n\ even) \end{cases} \qquad a < \xi < b \qquad (1)$$

اما برای حالت n فرد که در آن $R(f) = f^{(n+1)}(\xi)\int_a^b K(t)dt$، این رابطه را برای $f(x) = x^{n+1}$ بکار برید:

$$R(x^{n+1}) = (n+1)!\int_a^b K(t)dt$$

پس

$$\int_a^b K(t)dt = \frac{R(x^{n+1})}{(n+1)!}$$

مشابهاً برای n زوج،

$$\int_a^b K(t)dt = \frac{R(x^{n+2})}{(n+2)!}$$

سپس با قراردادن در (1):

$$R(f) = \begin{cases} \frac{R(x^{n+1})}{(n+1)!}\ f^{(n+1)}(\xi) & (n\ odd) \\ \frac{R(x^{n+2})}{(n+2)!}\ f^{(n+2)}(\xi) & (n\ even) \end{cases} \qquad a < \xi < b$$

البته باید در اولی فرض نمود که $f \in C^{n+۱}[a,b]$ و در دومی فرض نمود که $f \in C^{n+۲}[a,b]$. مثلاً در روش سیمپسون (برای $n = ۲$ است)

$$R(x^۴) = \frac{۱}{۳}\cdot ۱ + \frac{۴}{۳}\cdot ۰ + \frac{۱}{۳}\cdot ۱ - \int_{-۱}^{۱} x^۴ dx = \frac{۴}{۱۵}$$

پس خطای روش سیمپسون

$$\frac{۱}{۳}f(-۱) + \frac{۴}{۳}f(۰) + \frac{۱}{۳}f(+۱) - \int_{-۱}^{۱} f(x)dx = \frac{۱}{۴!}R(x^۴)\, f^{(۴)}(\xi) = \frac{۱}{۹۰}\, f^{(۴)}(\xi) \qquad a < \xi < b$$

حال انتگرال‌گیری با استفاده از درونیابی هرمیت درجه ۳ را درنظر بگیرید:

$$I(f) = \frac{h}{۲}(f(a) + f(b)) + \frac{h^۲}{۱۲}(f'(a) - f'(b)) \qquad (h = b - a)$$

این روش برای اعضای $\prod_۳$ دقیقی است (بررسی کنید). سپس

$$\begin{aligned}
K(t) &= \tfrac{۱}{۶}R_x[(x-t)_+^۳] \\
&= \tfrac{۱}{۶}\left[\tfrac{h}{۲}\left\{(a-t)_+^۳ + (b-t)_+^۳\right\} + \tfrac{h^۲}{۴}\left\{(a-t)_+^۲ - (b-t)_+^۲\right\} - \int_a^b (x-t)_+^۳ dt\right] \\
&= \tfrac{۱}{۶}\left[\tfrac{h}{۲}(b-t)^۳ - \tfrac{h^۲}{۴}(b-t)^۲ - \tfrac{۱}{۴}(b-t)^۴\right] \\
&= -\tfrac{۱}{۲۴}(b-t)^۲(a-t)^۲ \le ۰
\end{aligned}$$

پس $K(t)$ روی $[a,b]$ تغییر علامت نمی‌دهد. فلذا خطای این روش:

$$\begin{aligned}
R(f) &= f^{(۴)}(\xi)\int_a^b K(t)dt \\
&= -\tfrac{۱}{۲۴}f^{(۴)}(\xi)\int_a^b (b-t)^۲(a-t)^۲\, dt \\
&= -\tfrac{(b-a)^۵}{۷۲۰}f^{(۴)}(\xi) \qquad (a < \xi < b)
\end{aligned}$$

درونیابی توسط چندجمله‌ای‌ها

قرارداد: فضای برداری کلیه چندجمله‌ای‌های از درجه حداکثر m را به $\prod_m$ نشان می‌دهیم.

رده‌هایی از توابع که بیشتر از همه برای تقریب زدن بکار می‌روند عبارتند از چندجمله‌ای‌ها، توابع مثلثاتی، توابع نمایی، و توابع گویا. و در این بین چندجمله‌ای‌ها از همه بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرند چرا که کار کردن با آنها از جهات مختلف محاسباتی، مشتقگیری و انتگرالگیری سهل‌تر است.

۱. تعریف. *فرض کنیم $\{x_۰, ..., x_n\}$ اعداد متمایزی باشند. فرض کنیم $\{y_۰, y_۱, ..., y_n\}$ مقادیری مفروض باشند (که ممکن است متمایز نباشند). آنگاه چندجمله‌ای که در*

$$p(x_i) = y_i \qquad i = ۰, ۱, ..., n$$

صدق کند را چندجمله‌ای درونیاب نقاط $\{(x_i, y_i) \;:\; i = ۰, ۱, ..., n\}$ می‌نامند؛ و در صورتی که تابع f چنان باشد که $f(x_i) = y_i \; (\forall i)$، آنگاه می‌گوییم که p تابع f را در نقاط $\{x_۰, x_۱, ..., x_n\}$ درونیابی می‌کند.

به محض آنکه چندجمله‌ای f را یافتیم، آنگاه برای هر x در دامنه f مقدار $f(x)$ را با $p(x)$ تخمین می‌زنیم.

۱. شکل لاگرانژی چندجمله‌ای دونیاب

برای هر $۰ \leq k \leq n$ و برای نقاط دوبدو متمایز $\{x_۰, x_۱, ..., x_n\}$ چندجمله‌ای‌های لاگرانژ متناظر با آن نقاط را اینچنین تعریف کنید:

$$L_{n.k}(x) = \frac{(x - x_۰)\cdots(x - x_{k-۱})(x - x_{k+۱})\cdots(x - x_n)}{(x_k - x_۰)\cdots(x_k - x_{k-۱})(x_k - x_{k+۱})\cdots(x_k - x_n)} = \prod_{\substack{j=۰ \\ l\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

گاهی اوقات اندیس n را انداخته و آن را به $L_k(x)$ نشان می‌دهیم. این چندجمله‌ای‌ها با این خاصیت مشخص می‌شوند که

$$L_k(x_j) = \delta_{k,j} = \begin{cases} ۱ & j = k \\ ۰ & j \neq k \end{cases} \quad (۱-۲)$$

مثال برای $(x_۰, x_۱, x_۲) = (۱, -۱, ۲)$ داریم

$$L_۰(x) = \frac{(x-x_۱)(x-x_۲)}{(x_۰-x_۱)(x_۰-x_۲)} = -\frac{۱}{۲}(x+۱)(x-۲)$$

$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{1}{6}(x-1)(x-2)$

$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = -\frac{1}{3}(x-1)(x+1)$

۲. قضیه . *فرض کنیم $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ اعداد حقیقی دوبدو متمایز باشند. آنگاه برای مقادیر $\{y_0, y_1, ..., y_0\}$ (که ممکن است متمایز نباشند) چندجمله‌ای منحصربفرد $p_n(x)$ از درجه حداکثر n موجود است که*

$p_n(x_i) = y_i \qquad 0 \leq i \leq n \qquad (*)$

برهان. منحصر بفرد بودن: فرض کنید p_n و q_n دو چندجمله‌ای از درجه حداکثر n باشند که هر دو در $(*)$ صدق کنند. آنگاه $p_n - q_n$ چندجمله‌ای از درجه حداکثر n است که دارای $n+1$ ریشه متمایز می‌باشد:

$(p_n - q_n)(x_i) = 0 \qquad 0 \leq i \leq n$

اما این تنها درصورتی ممکن است که $p_n - q_n$ چندجمله‌ای ثابت صفر باشد. لذا $p_n = q_n$.

اثبات وجود: چندجمله‌ای $p(x) \equiv \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$ از درجه حداکثر n است که برای هر i داریم

$p(x_i) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x_i) = \sum_{k=0}^{n} y_k \delta_{k,i} = y_i$

راه دیگری برای اثبات وجود: به طور صوری بنویسید $p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. باید ضرایب $n+1$ گانه $\{a_0, a_1, ..., a_n\}$ را طوری تعیین کنیم که معادلات در $(*)$ برقرار باشند، یعنی می‌خواهیم که دستگاه معادلات خطی

$a_0 + a_1 x_i + \cdots + a_n x_i^n = y_i \qquad 0 \leq i \leq n \qquad (**)$

از $n+1$ معادله و $n+1$ مجهول $\{a_0, a_1, ..., a_n\}$ دارای جواب است. ماتریس ضرایب این دستگاه عبات است از

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & \vdots & \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}$$

و دستگاه در صورتی برای هر $\{y_0, y_1, ..., y_n\}$ جواب دارد که دترمینان ضرایب ناصفر باشد. اما در واقع

دترمینان ضرایب همان دترمینان واندرموند است:

$$\begin{vmatrix} ۱ & x_۰ & \cdots & x_۰^n \\ ۱ & x_۱ & \cdots & x_۱^n \\ \vdots & & \vdots & \\ ۱ & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$$

است که به دلیل متمایز بودن x_iها یک دترمینان ناصفر است؛ فلذا دستگاه $(**)$ برای تمامی انتخاب‌های $\{y_۰, y_۱, ..., y_n\}$ دارای جواب است. لذا مسئله درونیابی دارای جواب است. ■

مثال چندجمله‌ای $p(x)$ با کمترین درجه ممکن را بیابید که مقادیر زیر از تابع f را درونیابی کند. سپس با استفاده از آن مقدار $f(۱/۵)$ را تخمین بزنید.

x	۱	-۱	۲
y	٦	۰	۱۲

حل در مثال بالا چندجمله‌ای‌های لاگرانژ متناظر با نقاط $(x_۰, x_۱, x_۲) = (۱, -۱, ۲)$ را بدست آوردیم. حال چندجمله‌ای موردنظر عبارت است از

$$p(x) = (٦)L_۰(x) + (۰)L_۱(x) + (۱۲)L_۲(x) = -۳(x+۱)(x-۲) + ۴(x-۱)(x+۱) = x^۲ + ۳x + ۲$$

برای قسمت آخر ملاحظه کنید که:

$$f(۱/۵) \approx p(۱/۵) = (۱/۵)^۲ + ۳(۱/۵) + ۲ = ۸/۷۵$$

۲. درونیابی خطی مکرر و فرایند نویل (Neville)

در بیشتر کاربردها مشکل بتوان از ابتدا گفت که چه تعدادی از گره‌ها را باید انتخاب کرد تا تخمینی مناسب برای تابع در نقطه‌ای خاص به دست آورد. برای فائق آمدن به این مشکل، ممکن است که دنباله‌ای همچون $P_۰(x)$، $P_۱(x)$ و ... و $P_k(x)$ از چندجمله‌ای‌ها بسازیم به نحوی که $P_j(x)$ تابع $f(x)$ را در گره‌های $\{x_۰, ..., x_j\}$ درونیابی کند و انتخاب این چندجمله‌ای‌ها تا آنجایی ادامه می‌یابد که تخمین مناسب $P_k(x)$ برای مقدار $f(x)$ به دست می آید.

برای شروع به کار، قرارداد زیر را می‌پذیریم:

برای گره‌های $\{x_۰, x_۱, ..., x_n\}$ فرض کنید $\{m_۱, ..., m_k\}$ تعدادی دلخواه از اندیس‌ها باشد. آنگاه نماد $P_{m_۱,...,m_k}(x)$ را برای چندجمله‌ای درونیاب $f(x)$ در گره‌های $\{x_{m_۱}, ..., x_{m_k}\}$ بکار می‌بریم.

۳. قضیه . *برای $i \neq j$ و برای x داریم*

$$P_{0,1,\ldots,k}(x) = \frac{x-x_i}{x_j-x_i}P_{0,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}(x) + \frac{x_j-x}{x_j-x_i}P_{0,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k}(x)$$

برهان. چندجمله‌ای سمت راست را به $Q(x)$ نشان دهید. برای آنکه نشان دهیم که Q با $P_{0,1,\ldots,k}$ مساوی است باید معادلاً نشان دهیم که خواص مشخصه چندجمله‌ای $P_{0,1,\ldots,k}$ را دارا است. اولاً هر دو از درجه حداکثر k هستند (توجه کنید که $P_{0,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}$ و $P_{0,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k}$ هر دو چندجمله‌ای‌هایی از درجه حداکثر $k-1$ هستند). در ثانی برای هر گره x_r که $r \neq i,j$ داریم

$$\left.\begin{array}{l} P_{0,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}(x_r) = f(x_r) \\ P_{0,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k}(x_r) = f(x_r) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad Q(x_r) = \frac{x_r-x_i}{x_j-x_i}f(x_r) + \frac{x_j-x_r}{x_j-x_i}f(x_r) = f(x_r)$$

ثالثاً

$$Q(x_i) = \frac{x_i-x_i}{x_j-x_i}P_{0,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}(x_i) + \frac{x_j-x_i}{x_j-x_i}P_{0,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k}(x_i)$$

$$= P_{0,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k}(x_i) = f(x_i)$$

و مشابهاً ثابت می‌گردد که $Q(x_j) = f(x_j)$. پس Q نیز همچون چندجمله‌ای $P_{0,1,\ldots,k}$ گره‌های $\{x_0,\ldots,x_k\}$ را به مقادیر $\{f(x_0),\ldots,f(x_k)\}$ می‌فرستد. لذا بنا به یکتایی چندجمله‌ای درونیاب داریم $Q = P_{0,1,\ldots,k}$، یعنی تساوی ذکر شده در صورت قضیه برقرار است. ■

این روش درونیابی خطی مکرر به روش نویل (Neville) معروف است.

<u>**مثال**</u> با بکار بردن روش نویل برای جدول زیر، تخمینی برای $f(۱/۲)$ به دست آورید.

k	x_k	$f(x_k)$
۰	۰/۱	۰/۰۹۹۶۶۹
۱	۰/۵	۰/۴۶۳۶۴۸
۲	۱/۵	۰/۹۸۲۷۹۴
۳	۲/۲	۱/۱۴۴۱۶۹
۴	۲/۵	۱/۱۹۰۲۹۰

<u>**حل**</u> اعداد بدست آمدهٔ این روش در جدول زیر مشخص هستند. عدد $P_{0,1,2,3,4}(۱/۲) = ۰/۸۷۳۱۰۰$ بهترین تقریبی است که توسط این جدول به دست می‌آید.

x_0	P_0				
x_1	P_1	$P_{0,1}$			
x_2	P_2	$P_{1,2}$	$P_{0,1,2}$		
x_3	P_3	$P_{2,3}$	$\boxed{P_{1,2,3}}$	$P_{0,1,2,3}$	
x_4	P_4	$P_{3,4}$	$P_{2,3,4}$	$P_{1,2,3,4}$	$P_{0,1,2,3,4}$

۰/۱	۰/۰۹۹۶۶۹				
۰/۵	۰/۴۶۳۶۴۸	۱/۱۰۰۶۱۱			
۱/۵	۰/۹۸۲۷۹۴	۰/۸۲۷۰۵۰	۰/۸۸۵۶۷۰		
۲/۲	۱/۱۴۴۱۶۹	۰/۹۱۳۶۳۳	$\boxed{\text{۰/۸۶۲۷۰۲}}$	۰/۸۷۳۶۳۹	
۲/۵	۱/۱۹۰۲۹۰	۰/۹۹۰۴۳۲	۰/۸۹۰۵۹۳	۰/۸۷۲۴۶۴	۰/۸۷۳۱۰۰

$$P_{1,2,3}(\text{۱/۲}) = \frac{\text{۱/۲} - x_1}{x_3 - x_1} P_{2,3}(\text{۱/۲}) + \frac{x_3 - \text{۱/۲}}{x_3 - x_1} P_{1,2}(\text{۱/۲}) = \frac{(\text{۰/۷})(\text{۰/۹۱۳۶۳۳}) + (\text{۱/۰})(\text{۰/۸۲۷۰۵۰})}{\text{۱/۷}} = \text{۰/۸۶۲۷۰۲}$$

برای آنکه نتیجه بدست آمده را بهبود ببخشیم می‌توان یک گره دیگر را اضافه نمود: مثلاً $x_5 = \text{۱/۷}$. آنگاه یک سطر در پایین جدول اضافه می‌شود:

۱/۷	۱/۰۳۹۰۷۲	۰/۹۴۴۵۶۱	۰/۸۹۸۶۹۰	۰/۸۷۸۴۴۸	۰/۸۷۵۹۵۵	۰/۸۷۵۰۶۳

با قراردادن $Q_{k,l} = P_{k-l,k-l+1,\ldots,k}(x)$، رابطه

$$P_{i,i+1,\ldots,j-1,j}(x) = \frac{x - x_i}{x_j - x_i} P_{i+1,\ldots,j}(x) + \frac{x_j - x}{x_j - x_i} P_{i,\ldots,j-1}(x)$$

را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$Q_{j,j-i} = \frac{x - x_i}{x_j - x_i} Q_{j,j-i-1} + \frac{x_j - x}{x_j - x_i} Q_{j-1,j-i-1}$$

که با نامگذاری $k = j - i$ (معادلاً $i = j - k$)، آن را می‌توان بدین شکل بازنویسی کرد:

$$Q_{j,k} = \frac{x - x_{j-k}}{x_j - x_{j-k}} Q_{j,k-1} + \frac{x_j - x}{x_j - x_{j-k}} Q_{j-1,k-1}$$

و از آنجا جدول زیر پدید می‌آید:

$x_۰$	$Q_{۰,۰}$				
$x_۱$	$Q_{۱,۰}$	$Q_{۱,۱}$			
$x_۲$	$Q_{۲,۰}$	$Q_{۲,۱}$	$Q_{۲,۲}$		
$x_۳$	$Q_{۳,۰}$	$Q_{۳,۱}$	$Q_{۳,۲}$	$Q_{۳,۳}$	
$x_۴$	$Q_{۴,۰}$	$Q_{۴,۱}$	$Q_{۴,۲}$	$P_{۴,۳}$	$Q_{۴,۴}$

الگوریتم نویل

ورودی: گره‌های $x, x_۰, ..., x_n$ و مقادیر $f(x_۰), ..., f(x_n)$ برای ستون اول $Q_{۰,۰}, Q_{۱,۰}, ..., Q_{n,۰}$

مرحله اول: برای $j = ۱, ..., n$

برای $k = ۱, ..., j$ قرار بده

$$Q_{j,k} = \frac{x - x_{j-k}}{x_j - x_{j-k}} Q_{j,k-۱} + \frac{x_j - x}{x_j - x_{j-k}} Q_{j-۱,k-۱}$$

مرحله دوم: مقادیر $Q_{j,k}$ را به خروجی بفرست.

۳. شکل نیوتنی چندجمله‌ای درونیاب

۴. قضیه . *برای چندجمله‌ای درونیاب $p_n(x)$ که تابع f را در گره‌های $\{x_۰, ..., x_n\}$ درونیابی می‌کند اعداد منحصربفرد $\{c_۰, c_۱, ..., c_n\}$ موجود هستند که*

$$p_n(x) = c_۰ + c_۱(x - x_۰) + c_۲(x - x_۰)(x - x_۱) + \cdots + c_n(x - x_۰)\cdots(x - x_{n-۱})$$

برهان. به استقراء بر $n \geq ۰$: برای $n = ۰$ چیزی برای اثبات نداریم. حال فرض کنیم که حکم برای یک n دلخواه برقرار باشد. فرض کنیم p_n چندجمله‌ای درونیاب در گره‌های $\{x_۰, ..., x_n\}$ باشد. فرض کنیم که $p_{n+۱}$ چندجمله‌ای درونیاب در گره‌های $\{x_۰, ..., x_n, x_{n+۱}\}$ باشد. باید عدد منحصر بفرد c را بیابیم که رابطه زیر برقرار باشد:

$$p_{n+۱}(x) = p_n(x) + c(x - x_۰)\cdots(x - x_n)$$

یعنی باید c را طوری تعیین کنیم که

$$p_{n+۱}(x_i) = y_i \qquad ۰ \leq i \leq n + ۱$$

در واقع،

$$y_{n+۱} = p_{n+۱}(x_{n+۱})$$

یعنی می‌خواهیم داشته باشیم

$$y_{n+1} = p_n(x_{n+1}) + c(x_{n+1} - x_0)\cdots(x_{n+1} - x_n)$$

لذ از ابتدا c را طوری تعیین می‌کنیم که

$$c = \frac{y_{n+1} - p_n(x_{n+1})}{(x_{n+1} - x_0)\cdots(x_{n+1} - x_n)}$$

■

۵. تعریف. *ضرایب منحصر بفرد $\{c_0, ..., c_n\}$ از چندجمله‌ای درونیاب را به علامت $c_k = f[x_0, ..., x_k]$ هم نشان می‌دهیم. پس چندجمله‌ای درونیاب بدین شکل است:*

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots + f[x_0, ..., x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})$$

۶. قضیه . *برای نقاط متمایز $\{a, b, x_1, ..., x_n\}$ داریم*

$$f[a, b, x_1, ..., x_n] = \frac{f[a, x_1, ..., x_n] - f[b, x_1, ..., x_n]}{a - b}$$

برهان. فرض کنیم $P_{a,b,x_1,...,x_n}$ چندجمله‌ای درونیاب تابع f در نقاط $\{a, b, x_1, ..., x_n\}$ باشد، و نمادهای مشابهی را برای $P_{a,x_1,...,x_n}$ و $P_{b,x_1,...,x_n}$ درنظر بگیرید. آنگاه از بحثی که قبلاً برای دو چندجمله‌ای درونیاب متوالی داشته‌ایم می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} P_{a,b,x_1,...,x_n}(x) = P_{a,x_1,...,x_n} + f[a, b, x_1, ..., x_n](x - a)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \\ \\ P_{a,b,x_1,...,x_n}(x) = P_{b,x_1,...,x_n} + f[a, b, x_1, ..., x_n](x - b)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \end{cases}$$

با کم کردن این دو رابطه از یکدیگر به دست می آید

$$P_{a,x_1,...x_n}(x) - P_{b,x_1,...,x_n}(x) = f[a, b, x_1, ..., x_n](a - b)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

با مساوی قرار دادن ضرایب x^n در دوطرف به دست می آید

$$f[a, x_1, ..., x_n] - f[b, x_1, ..., x_n] = f[a, b, x_1, ..., x_n](a - b)$$

$$f[x_1, ..., x_n] = \frac{f[a, x_1, ..., x_n] - f[b, x_1, ..., x_n]}{a - b}$$

■

با توجه به قضیه اخیر، می‌توان جدول تفاضلات منقسم را تشکیل داد:

$\mathbf{x_k}$	$\mathbf{f[\,] = f()}$	$\mathbf{f[\,,\,]}$	$\mathbf{f[\,,\,,\,]}$	$\mathbf{f[\,,\,,\,,\,]}$	$\mathbf{f[\,,\,,\,,\,,\,]}$
$x_۰$	$f[x_۰]$				
		$f[x_۰, x_۱]$			
$x_۱$	$f[x_۱]$		$f[x_۰, x_۱, x_۲]$		
		$f[x_۱, x_۲]$		$f[x_۰, ..., x_۳]$	
$x_۲$	$f[x_۲]$		$f[x_۱, x_۲, x_۳]$		$f[x_۰, ..., x_۴]$
		$f[x_۲, x_۳]$		$f[x_۱, ..., x_۴]$	
$x_۳$	$f[x_۳]$		$f[x_۲, x_۳, x_۴]$		
		$f[x_۳, x_۴]$			
$x_۴$	$f[x_۴]$				

$\mathbf{x_k}$	$\mathbf{f[\,] = f()}$	$\mathbf{f[\,,\,]}$	$\mathbf{f[\,,\,,\,]}$	$\mathbf{f[\,,\,,\,,\,]}$
2	4			
		$\frac{8-4}{4-2} = 2$		
4	8		$\frac{3-2}{6-2} = \frac{1}{4}$	
		$\frac{14-8}{6-4} = 3$		$\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{8-2} = \frac{1}{8}$
6	14		$\frac{1-3}{8-4} = -\frac{1}{2}$	
		$\frac{16-14}{8-6} = 1$		
8	16			

مثال. چندجمله‌ای از کوچکترین درجه ممکن را بیابید که جدول زیر را درونیابی کند:

x	۱	$-$۱	۲	۳
y	۲۴	۰	۶۰	۱۲۰

حل:

$\mathbf{x_k}$	$\mathbf{f[\,] = f()}$	$\mathbf{f[\,,\,]}$	$\mathbf{f[\,,\,,\,]}$	$\mathbf{f[\,,\,,\,,\,]}$
1	$\boxed{24}$			
		$\boxed{12}$		
-1	0		$\boxed{8}$	
		20		$\boxed{1}$
2	60		10	
		60		
3	120			

سپس نمایش چندجمله‌ای درونیاب تابع f در گره‌های $\{۱, -۱, ۲, ۳\}$ بدین گونه است:

(نمایش نیوتنی) $$p(x) = ۲۴ + ۱۲(x-۱) + ۸(x-۱)(x+۱) + ۱(x-۱)(x+۱)(x-۲)$$

(نمایش توانی) $$= x^۳ + ۶x^۲ + ۱۱x + ۶$$

الگوریتم محاسبه ضرایب چندجمله‌ای درونیاب نیوتن (قطر بالایی جدول تفاضلات منقسم) ورودی:

گره‌های $x_۱, ..., x_n$ را در برداری به نام x، مقادیر $y_۱ = f(x_۱), ..., y_n = f(x_n)$ را در برداری به نام y بده.

مرحله اول: برای $k = ۱, ..., n - ۱$

قرار بده $D(k, ۱) = \frac{y(k+۱)-y(k)}{x(k+۱)-x(k)}$

مرحله دوم: برای $i = ۲, ..., n - ۱$

برای $k = ۱, ..., n - i$

قراربده $D(k, i) = \frac{D(k+۱,i-۱)-D(k,i-۱)}{x(k+i)-x(k)}$

مرحله سوم: مقادیر $\{y(۱), D(۱, ۱) , \ldots , D(۱, n)\}$ ضرایب چندجمله‌ای درونیاب هستند.

۴. خطای نقطه‌ای استفاده از چندجمله‌ای درونیاب

خطای بین تابع f و چندجمله‌ای p_n اینچنین تعریف می‌شود:

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

قضیه رل تعمیم‌یافته را از حسابان به یاد می‌آوریم:

۷. قضیه . (قضیه رل تعمیم‌یافته) *فرض کنیم که f بر بازه $[a, b]$ پیوسته بوده و بر (a, b) n بار مشتق‌پذیر باشد. اگر در $n + ۱$ نقطه متمایز $\{x_۰, x_۱, ..., x_n\}$ از $[a, b]$ مقدار صفر را بگیرد، آنگاه نقطه $c \in (a, b)$ یافت می‌شود که $f^{(n)}(c) = ۰$.*

۸. قضیه . *فرض کنیم $f \in C^{n+۱}[a, b]$. فرض کنیم p_n چندجمله‌ای درونیاب $f(x)$ در گره‌های $\{x_۰, x_۱, ..., x_n\}$ باشد که این گره‌ها به $[a, b]$ تعلق دارند. آنگاه برای هر $x \in [a, b]$ نقطه ξ موجود است که*

$$\min(x_۰, x_۱, ..., x_n, x) < \xi < \max(x_), x_۱, ..., x_n, x)$$

و

$$f(x) - p_n(x) = (x - x_۰)(x - x_۱) \cdots (x - x_n) \frac{f^{n+۱}(\xi)}{(n + ۱)!} \qquad (*)$$

برهان. اگر x یکی از گره‌های x_i باشد، آنگاه سمت چپ رابطه $(*)$ صفر است فلذا تساوی برای هر انتخابی

از ξ برقرار است و در این حالت چیزی برای اثبات نمی‌ماند. پس فرض کنیم x مساوی هیچکدام از گره‌های x_i نباشد. قرار دهید

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

$$E(t) = f(t) - p_n(t) - \frac{\omega(t)}{\omega(x)}(f(x) - p_n(x))$$

دو نکته زیر به وضوح برقرار هستند:

الف) $E \in C^{(n+1)}[a,b]$

ب) E در $n+2$ نقطه متمایز $\{x_0, x_1, ..., x_n, x\}$ مقدار صفر را می‌گیرد.

سپس از (الف) و (ب) و شکل تعمیم یافته قضیه رل، نقطه ξ یافت می‌شود که

$$\min(x_0, x_1, ..., x_n, x) < \xi < \max(x_), x_1, ..., x_n, x)$$

و

$$E^{(n+1)}(\xi) = 0$$

یعنی

$$f^{(n+1)}(\xi) - p^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)!}{\omega(x)}(f(x) - p(x)) = 0$$

اما $p^{(n+1)} \equiv 0$، لذا

$$f(x) - p_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

و این همان تساوی مورد نظر است.

■

۹. قضیه . *فرض کنید* $f \in C^n[a,b]$*. آنگاه برای نقاط دوبه‌دو متمایز* $x_0, x_1, \cdots, x_n$ *از* $[a,b]$ *داریم*

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} f^{(n)}\left(t_n[x_n - x_{n-1}] + \cdots + t_1[x_1 - x_0] + x_0\right) dt_n \qquad (*)$$

برهان. اثبات به استقراء بر n. ابتدا نشان می‌دهیم که

$$f[x_0, x_1] = \int_0^1 f'(t_1[x_1 - x_0] + x_0)\, dt_1$$

در واقع با تغییر متغیر $\xi = t_1[x_1 - x_0] + x_0$ داریم

$$\int_0^1 f'(t_1[x_1 - x_0] + x_0)\, dt_1 = \frac{1}{x_1 - x_0}\int_{x_0}^{x_1} f'(\xi)\, d\xi = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1]$$

حال فرض استقراء بگیرید که

$$f[x_0,\cdots,x_{n-1}]=\int_0^1 dt_1\int_0^{t_1} dt_2\cdots\int_0^{t_{n-2}} f^{(n-1)}(t_{n-1}[x_{n-1}-x_{n-2}]+\cdots+t_1[x_1-x_0]+x_0)dt_{n-1}$$

حال تغییر متغیر $t_n \to \xi$ را بدین صورت در نظر بگیرید

$$\begin{cases} \xi = t_n[x_n - x_{n-1}] + \cdots + t_1[x_1 - x_0] + x_0 \\ \frac{d\xi}{x_n - x_{n-1}} = dt_n \end{cases}$$

حدود انتگرالگیری

$$\begin{cases} t_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi_0 = t_{n-1}[x_{n-1} - x_{n-2}] + \cdots + t_1[x_1 - x_0] + x_0 \\ t_n = t_{n-1} \quad \Rightarrow \quad \xi_1 = t_{n-1}[x_n - x_{n-2}] + t_{n-2}[x_{n-2} - x_{n-3}]\cdots + t_1[x_1 - x_0] + x_0 \end{cases}$$

فلذا انتگرال خطی در $(*)$ بدین شکل تغییر می‌یابد

$$\begin{aligned} &\int_0^{t_{n-1}} f^{(n)}(t_n[x_n - x_{n-1}] + \cdots + t_1[x_1 - x_0] + x_0)dt_n \\ &= \int_{\xi_0}^{\xi_1} f^{(n)}(\xi)\frac{d\xi}{x_n - x_{n-1}} = \frac{f^{(n-1)}(\xi_1) - f^{(n-1)}(\xi_0)}{x_n - x_{n-1}} \end{aligned} \qquad (**)$$

اما طبق فرض استقراء

$$\begin{aligned} &\int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-2}} f^{(n-1)}(\xi_1)dt_{n-1} \\ = \quad &\int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-2}} f^{(n-1)}(t_{n-1}[x_n - x_{n-2}] + \cdots + t_1[x_1 - x_0] + x_0)dt_{n-1} \\ = \quad &f[x_0, \cdots, x_{n-2}, x_n] \end{aligned}$$

و مشابهاً

$$\int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-2}} f^{(n-1)}(\xi_0)dt_{n-1} = f[x_0, \cdots, x_{n-2}, x_{n-1}]$$

که با قرار دادن این دو عبارت در رابطه $(**)$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} &= \frac{f[x_0, \cdots, x_{n-2}, x_n] - f[x_0, \cdots, x_{n-2}, x_{n-1}]}{x_n - x_{n-1}} \\ &= f[x_0, \cdots, x_n] \end{aligned}$$

■

تبصره. توجه کنید که سمت راست رابطه $(*)$ تابعی پیوسته برحسب متغیرهای $x_0, x_1, \cdots, x_n$ است چرا که تابع انتگرالده اینگونه است. پس سمت راست توسیعی پیوسته از $f[x_0, \cdots, x_n]$ تعریف می‌کند (برای حالتی که گره‌ها دیگر متمایز نباشند). پس از این به بعد، وقتی گره‌ها متمایز باشند یا نباشند، مقدار $f[x_0, \cdots, x_n]$ را بصورت انتگرال سمت راست در $(*)$ تعریف می‌کنیم.

تبصره. در انتگرال بالا قرار دهید:

$$\begin{cases} s_0 = 1 - t_1 \\ s_1 = t_1 - t_2 \\ \quad \vdots \\ s_{n-1} = t_{n-1} - t_n \\ s_n = t_n \end{cases}$$

آنگاه هر s_i نامنفی است و داریم $s_0 + s_1 + \cdots + s_n = 1$. لذا با قراردادن

$$S = \{(s_0, ..., s_n) \in R^{n+1} \ : \ 0 \leq s_i \leq 1, \ \ s_0 + \cdots + s_n = 1\}$$

تساوی در قضیه بالا تبدیل می‌شود به

$$f[x_0, ..., x_n] = \underset{S}{\int \cdots \int} f^{(n)}(s_0 x_0 + \cdots + s_n x_n) ds_0 \cdots ds_n$$

۱۰. نتیجه. اگر $f \in C^n[a, b]$ و اگر $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ نقاطی از $[a, b]$ باشند که ضرورتاً متمایز نیستند، آنگاه نقطه

$$\min(x_0, x_1, \cdots, x_n) \leq \xi \leq \max(x_0, x_1, \cdots, x_n)$$

موجود است که

$$f[x_0, \cdots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

برهان. فرض کنیم $[c, d]$ بازه با دو نقطه انتهایی $\min(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ و $\max(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ باشد. فرض کنیم $m = \min_{[c,d]} f^{(n)}$ و $M = \max_{[c,d]} f^{(n)}$. آنگاه از شکل انتگرالی برای $f[x_0, \cdots, x_n]$ داریم

$$m \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \leq f[x_0, \cdots, x_n] \leq M \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n$$

$$m \frac{1}{n!} \leq f[x_0, \cdots, x_n] \leq M \frac{1}{n!}$$

$$m \leq f[x_0, \cdots, x_n](n!) \leq M$$

سپس از پیوستگی $f^{(n)}$، باید یک نقطه $c \leq \xi \leq d$ موجود باشد که

$$f[x_0, \cdots, x_n](n!) = f^{(n)}(\xi)$$

■

۱۱. نتیجه. اگر $f^{(n)}$ در همسایگی از x پیوسته باشد آنگاه

$$f[x, x, \cdots, x] = \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \qquad (\text{n + 1 terms of } \ \text{x})$$

۱۲. قضیه . *فرض کنیم $f(x)$ چندجمله‌ای از درجه n باشد. آنگاه برای $n < k$ داریم*

$$f[x_{\circ}, ..., x_k] = \circ$$

برهان. روش اول (با استفاده از نتیجه بالا)

در واقع بنا به نتیجه بالا می‌توان نقطه

$$\min(x_{\circ}, x_{۱}, \cdots, x_k) \le \xi \le \max(x_{\circ}, x_{۱}, \cdots, x_k)$$

را یافت که

$$f[x_{\circ}, \cdots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$$

اما چون f چندجمله‌ای از درجه n است، تابع $f^{(k)}$ صفر است، لذا مقدار تساوی بالا صفر است.

روش دوم (بدون استفاده از نتیجه بالا)

حالت اول ابتدا فرض کنیم که گره‌ها دوبه‌دو متمایز باشند. چون $f(x)$ یک چندجمله‌ای است که از نقاط $(x_i, f(x_i))$ $(\circ \le i \le k)$ می‌گذرد، آنگاه به دلیل یکتایی چندجمله‌ای درونیاب داریم

$$P_{\circ,۱,...,k}(x) = f(x) \qquad (\forall x)$$

چون $f(x)$ از درجه n است، پس ضریب x^k در آن صفر است. اما ضریب x^k در چندجمله‌ای $P_{\circ,۱,...,k}(x)$ چیزی نیست جز $f[x_{\circ}, ..., x_k]$، لذا

$$f[x_{\circ}, ..., x_k] = \circ$$

حالت دوم در حالت کلی فرض کنید که $\{x_{\circ}, x_{۱}, ..., x_k\}$ دلخواه باشند (برخی می‌توانند مساوی هم باشند). آنگاه نقاط دوبه‌دو متمایز $\{\xi_{\circ}, \xi_{۱}, ..., \xi_k\}$ را اختیار کنید که

$$\xi_i \to x_i \qquad (\circ \le i \le k)$$

سپس به دلیل پیوستگی تفاضلات تقسیم شده نسبت به مولفه‌هایش داریم

$$f[\xi_0, \xi_1, ..., \xi_k] \to f[x_0, x_1, ..., x_k]$$

اما بنا به حالت اول، مقدار سمت چپ صفر است. لذا سمت راست هم صفر است:

$$f[x_0, ..., x_k] = 0$$

■

حکم. اپراتور تفاضلات تقسیم شده تحت جایگشت مؤلفه‌هایش پایدار است، یعنی اگر

$$\{i_0, i_1, \ldots, i_k\} = \{j_0, j_1, \ldots, j_k\}$$

آنگاه

$$f[x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}] = f[x_{j_0}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}].$$

برهان. **حالت اول** فرض کنید که گره‌ها دوبه‌دو متمایز باشند.
چندجمله‌ای درونیاب $p(x)$ برای $\{x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$ و $\{x_{j_0}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}\}$ یکی است چراکه هر دو یک مجموعه از نقاط را معرفی می‌کنند. برای مجموعه اول ضریب x^k برابر $f[x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}]$ است در حالی که برای مجموعه دوم ضریب x^k برابر $f[x_{j_0}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}]$ است، پس ضرایب باید مساوی باشند.
حالت دوم حال حالت کلی را درنظر بگیرید که برخی از مولفه‌ها ممکن است که مساوی باشند. آنگاه نقاط دوبه‌دو متمایز $\{\xi_{i_0}, ..., \xi_{i_k}\}$ را اختیار کنید که

$$\xi_{i_j} \to x_{i_j} \qquad j = 0, 1, ..., k$$

آنگاه بنا به حالت اول داریم

$$f[\xi_{i_0}, ..., \xi_{i_k}] = f[\xi_{j_0}, ..., \xi_{j_k}]$$

سپس با حدگیری روی ξها به دست می‌آید

$$f[x_{i_0}, ..., x_{i_k}] = f[x_{j_0}, ..., x_{j_k}]$$

■

۱۳. نتیجه. برای نقاط متمایز $a \neq b$ و برای نقاط دلخواه $\{x_1, ..., x_n\}$ (که لزومی ندارند که متمایز باشند)، داریم

$f[a,b,x_1,...,x_n] = \frac{f[a,x_1,...,x_n]-f[b,x_1,...,x_n]}{a-b}$

برهان. این را قبلاً برای وقتی که تمامی نقاط $\{a,b,x_1,...,x_n\}$ متمایز باشند ثابت کرده‌ایم. حالت کلی را هم می‌توان از این حالت خاص و با حدگیری بدست آورد. ■

۱۴. تعریف. *فرض کنیم f تابعی به اندازه کافی مشتق‌پذیر بر $[a,b]$ باشد. برای گره‌های دوبه‌دو متمایز $\{x_0,x_1,...,x_n\}$ از این بازه می‌خواهیم که چندجمله‌ای P را بیابیم که*

$$P^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i) \qquad k = 0,1,...,m_i-1 \quad , \quad i = 0,1,...,n$$

*چنین چندجمله‌ای را چندجمله‌ای بوسان تخمین‌زننده تابع f می‌نامند. معمولاً حالت $m_i = 2$ $(\forall i)$ را درونیابی هرمیت می‌نامند (*Hermite interpolation*)، اما ما مسئله حالت کلی را مسئله درونیابی هرمیت می‌نامیم.*

با نام‌گذاری مجدد، مسئله درونیابی هرمیت را بدین شکل بازنویسی می‌کنیم:

$$P^{(k)}(x_i) = c_{ik} \qquad (k = 0,1,...,m_i-1 \quad , \quad i = 0,1,...,n)$$

در اینجا به تعداد $m_0 + \cdots + m_n$ شرط داریم. اگر قرار باشد که این مسئله دارای جواب منحصر به فرد باشد، باید به دنبال چندجمله‌ای در $\prod_{m_0+\cdots+m_n-1}$ بگردیم.

۱۵. قضیه . *چندجمله‌ای منحصر بفردی در $\prod_{m_0+\cdots+m_n-1}$ موجود است که در شرایط درونیابی هرمیت*

$$P^{(k)}(x_i) = c_{ik} \qquad (k = 0,1,...,m_i-1 \quad , \quad i = 0,1,...,n)$$

صدق می‌کند.

برهان. با فرض $m = m_0 + \cdots + m_n - 1$ چندجمله‌ای $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$ را به طور صوری درنظر گرفته و شرایط درونیابی هرمیت را بر آن تحمیل می‌کنیم. در پی آن به یک دستگاه خطی از $m+1$ معادله و $m+1$ مجهول $(a_0,...,a_m)$ می‌رسیم. ماتریس ضرایب این دستگاه را به A نشان دهید. اگر نشان دهیم که ماتریس ضرایب وارونپذیر است، آنگاه برای هر انتخاب از c_{ik}ها مسئله درونیابی هرمیت جواب منحصر بفرد خواهد داشت. و برای اثبات وارونپذیری A کافی است نشان داده شود که برای $u = \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$ دستگاه همگن $Au = 0$ تنها جواب $u = 0$ را دارد. اما دستگاه همگن $Au = 0$ همانند دستگاه معادلات زیر است:

$$P^{(k)}(x_i) = 0 \qquad (k = 0, 1, ..., m_i - 1 \quad , \quad i = 0, 1, ..., n) \qquad (*)$$

روابط $(*)$ می‌گویند که چندجمله‌ای P دارای صفری از مرتبه حداقل m_i در x_i است. لذا این چندجمله‌ای باید بر چندجمله‌ای $Q(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)^{m_i}$ بخش‌پذیر باشد. اما چون $Q(x)$ از درجه $m_0 + \cdots + m_n$ است و $P(x)$ از درجه $m_0 + \cdots + m_n - 1$ است، این تنها زمانی مقدور می‌باشد که $P(x)$ چندجمله‌ای ثابت صفر باشد. ■

۵. شکل نیوتنی تعمیم‌یافته چندجمله‌ای درونیاب برای تفاضلات منقسم (زمانی که مشتقات هم در کارند)

نقاط دوبه‌دو متمایز $\{\xi_i^{k_i} \; : \; 0 \le i \le n \;\; , \;\; 0 \le k_i \le m_i - 1\}$ را اختیار کنید (به تعداد $m_0 + m_1 + \cdots + m_n$ تا):

$$(*) \qquad \begin{cases} \xi_0^{(0)} \, , \, \xi_0^{(1)} \, , \, ... \, , \, \xi_0^{(m_0-1)} \\ \\ \xi_1^{(0)} \, , \, \xi_1^{(1)} \, , \, ... \, , \, \xi_1^{(m_1-1)} \\ \\ \qquad \vdots \\ \\ \xi_n^{(0)} \, , \, \xi_n^{(1)} \, , \, ... \, , \, \xi_n^{(m_n-1)} \end{cases}$$

چندجمله‌ای درونیاب در این نقاط را به $Q(x)$ نشان دهید و نمایش نیوتنی $Q(x)$ را با درنظر گرفتن همین ترتیبی که در $(*)$ ملاحظه می‌کنید بنویسید. سپس نقاط ردیف اول از $(*)$ را به x_0، نقاط ردیف دوم را به x_1، و ... میل دهید. به چندجمله‌ای به شکل زیر می‌رسیم:

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_0](x - x_0) + f[x_0, x_0, x_0](x - x_0)^2 + \cdots +$$

$$+f[x_0, ..., x_0](x - x_0)^{m_0-1} \qquad \text{(}m_0\text{ جمله در داخل کروشه)}$$

$$+f[x_0, ..., x_0, x_1](x - x_0)^{m_0} \qquad \text{(}m_0 + 1\text{ جمله در داخل کروشه)}$$

$$+f[x_0, ..., x_0; x_1, x_1](x - x_0)^{m_0}(x - x_1)$$

$$\vdots$$

$$+f[x_0, ..., x_0 \, ; \, x_1, ..., x_1 \, ; \, ... \, ; \, x_n, x_n, ..., x_n](x - x_0)^{m_0}(x - x_1)^{m_1} \cdots (x - x_{n-1}^{m_{n-1}})(x - x_n)^{m_n-1}$$

($m_\circ + m_۱ + \cdots + m_n$ جمله در داخل کروشه).

ادعا می‌کنیم که این چندجمله‌ای همانا چندجمله‌ای درونیاب هرمیت است. درواقع، با مشتقگیری‌های پی‌درپی در نقطه $x_\circ$ درمی‌یابیم که

$$\begin{aligned}
&P(x_\circ) = f(x_\circ)\\
&P'(x_\circ) = f[x_\circ, x_\circ] = f'(x_\circ)\\
&P''(x_\circ) = ۲\, f[x_\circ, x_\circ, x_\circ] = f''(x_\circ)\\
&\quad\vdots\\
&P^{(m_\circ - ۱)}(x_\circ) = (m_\circ - ۱)!\, f[x_\circ, ..., x_\circ] = f^{(m_\circ - ۱)}(x_\circ)
\end{aligned}$$

اما اگر از ابتدا چندجمله‌ای Q را با شروع از گره‌های $\xi^{(k_۱)}$ می‌نوشتیم و حد می گرفتیم، آنگاه بازهم به چندجمله‌ای P می‌رسیدیم (چرا که حد منحصر بفرد است). و بالاخره به این می‌رسیدیم که P در شرایط لازم در نقطه $x_۱$ صدق می‌کند. بالاخره با ادامه این روند، معلوم می‌شود که P درشرایط لازم در نقاط x_i صدق می‌کند. بالاخره توجه کنیم که این چندجمله‌ای از درجه حداکثر $m_\circ + m_۱ + \cdots + m_n - ۱$ است، پس واقعاً P چندجمله‌ای درونیاب هرمیت برای تابع f است.

استفاده از جدول برای نوشتن چندجمله‌ای درونیاب هرمیت

با استفاده از جدول تفاضلات منقسم، چندجمله‌ای از درجه حداکثر ۷ را بیابید که در جدول زیر صدق کند:

x	0	1	2
y	1	2	129
y'	0	7	448
y''	0		1344

حل:

x	y	1 d.d.	2 d.d.	3 d.d.	4 d.d.	5 d.d.	6 d.d.	7 d.d.
0	1							
		0						
0	1		0					
		0		1				
0	1		1		4			
		1		5		11		
1	2		6		26		6	
		7		57		23		1
1	2		120		72		8	
		127		201		39		
2	129		321		150			
		$\boxed{448}$		351				
2	129		$\boxed{672}$					
		448						
2	129							

$\frac{f'(2)}{1!} = 448$ $\qquad\qquad$ $\frac{f''(2)}{2!} = \frac{1344}{2} = 672$

۱۶. قضیه . *فرض کنیم $\{x_0, ..., x_n\}$ نقاط دوبه‌دو متمایز از $[a,b]$ بوده و همچون قبل فرض کنیم $m = m_0 + \cdots + m_n - 1$. فرض کنیم $f \in C^{m+1}[a,b]$ (یعنی f به اندازه قیود در مسئله مشتق پیوسته دارد). فرض کنیم $p(x)$ چندجمله‌ای در $\prod_m$ صادق در قیود هرمیت باشند. آنگاه برای هر $x \in [a,b]$ نقطه $\xi \in (a,b)$ موجود است که*

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^{m_i}$$

برهان. اگر x یکی از گره‌ها باشد، چیزی برای اثبات نمی‌ماند چرا که آنگاه حکم برای هر ξ برقرار است. پس فرض کنید که x مساوی هیچکدام از گره‌ها نباشد. قرار دهید $q(t) = \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)^{m_i}$. قرار دهید $\phi(t) = f(t) - p(t) - \lambda q(t)$ که در آن عدد λ طوری انتخاب می‌شود که $\phi(x) = 0$. پس $\lambda = \frac{f(x) - p(x)}{q(x)}$. آنگاه با احتساب صفرهای تکراری، ϕ دارای $m + 2$ صفر می‌باشد. پس بنا به قضیه رل تعمیم‌یافته دارای صفری در (a,b) است. پس

وجود دارد ξایی که $\qquad\qquad$ $\phi^{(m+1)}(\xi) = 0$

$$f^{(m+1)}(\xi)-p^{(m+1)}(\xi)-\lambda q^{(m+1)}(\xi)=0 \qquad (*)$$

اما چون p از درجه حداکثر m است. پس $p^{(m+1)}\equiv 0$. از طرفی چون q از درجه $m+1$ است و ضریب پیشرو آن ۱ است، $q^{(m+1)}\equiv (m+1)!$. سپس رابطه $(*)$ تقلیل می‌یابد به

$$f^{(m+1)}(\xi)-\lambda(m+1)!=0 \qquad \Rightarrow \qquad f^{(m+1)}(\xi)=\frac{f(x)-p(x)}{q(x)}(m+1)!$$

$$\Rightarrow \qquad f(x)-p(x)=\frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^{m_i}$$

■

الگوریتم به دست آوردن قطر بالایی جدول تفاضلات منقسم هرمیت

الگوریتم محاسبه ضرایب چندجمله‌ای درونیاب هرمیت (قطر بالایی جدول تفاضلات منقسم)

ورودی: گره‌های $x_1,...,x_n$ را در برداری به نام x، مقادیر $y_1=f(x_1),...,y_n=f(x_n)$ را در برداری به نام y، و مقادیر $f^{(k)}(x_i)$ را به ترتیب در برداری به نام z قرار دهید.

مرحله اول: برای $k=1,...,n-1$

اگر $x(k+1)=x(k)$، آنگاه قرار بده $D(k,1)=z(k+1)$.

اگر $x(k+1)\neq x(k)$ آنگاه قرار بده $D(k,1)=\frac{y(k+1)-y(k)}{x(k+1)-x(k)}$

مرحله دوم: برای $k=2,...,n-1$

برای $k=1,...,n-i$

اگر $x(k+i)=x(k)$، آنگاه قراربده $D(k,i)=z(k+i)/i!$

اگر $x(k+i)\neq x(k)$، آنگاه قراربده $D(k,i)=\frac{D(k+1,i-1)-D(k,i-1)}{x(k+i)-x(k)}$

$$D(k,i)=\frac{D(k+1,i-1)-D(k,i-1)}{x(k+i)-x(k)}$$

مرحله سوم: مقادیر $G_{0,k}$ $(0\leq k\leq n)$ ضرایب چندجمله‌ای درونیاب هستند.

حال در صدد آن هستیم که نمایشی برای چند جمله‌ای درونیاب هرمیتی توسط چند جمله‌ای‌های لاگرانژ تعمیم یافته بیابیم. مسئلهٔ هرمیت را بیاد بیاوریم:

$$P^{(k)}(x_i)=y_i^{(k)} \qquad 0\leq k\leq n_i-1 \qquad 0\leq i\leq m \qquad (*)$$

که در اینجا $y_i^{(k)}$ها مقادیر از پیش تعیین شده‌ای هستند. هدف ما این است که جواب این مسئله را با استفاده از چند جمله‌ای‌های لاگرانژ تعمیم یافته که در پایین تعریف می‌شوند بدست آوریم.

بیایید تعریف کنیم:

$$l_{i,k}(x) \equiv \frac{(x-x_i)^k}{k!} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{m} \left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right)^{n_j} \qquad 0 \le k \le n_i - 1 \qquad 0 \le i \le m$$

برخی مشاهدات:

- $l_{i,k}(x)$ دارای صفر مرتبه n_j در هر نقطه x_j است که $j \neq i$. پس

$$l_{i,k}^{(\sigma)}(x_j) = 0 \qquad \sigma \le n_j - 1 \ , \quad j \neq i$$

- $l_{i,k}(x)$ دارای صفر مرتبه k در x_i است، پس برای $\sigma < k$ داریم $l_{i,k}^{(\sigma)}(x_i) = 0$ حال آنکه $l_{i,k}^{(k)}(x_i) = 1$.

با این دو مشاهده، حال چند جمله‌ای‌های $L_{i,k}$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$L_{i,n_i-1}(x) \equiv l_{i,n_i-1}(x) \qquad i = 0, ..., m$$

$$L_{i,k}(x) \equiv l_{i,k}(x) - \sum_{\nu=k+1}^{n_i-1} l_{i,k}^{(\nu)}(x_i)\, L_{i,\nu}(x) \qquad k = n_i - 2,\, n_i - 3, ..., 0$$

به استقراء بر k نشان می‌دهیم که

$$L_{i,k}^{(\sigma)}(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \ , \ k = \sigma \\ \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (\sigma \le n_j - 1)$$

اولاً چون $L_{i,n_i-1}(x) = l_{i,n_i-1}(x)$، پس بنا به آنچه در مورد $l_{i,k}$ ها در بالا آمد:

$$L_{i,n_i-1}^{(\sigma)}(x_i) = \begin{cases} 0 & \sigma < n_i - 1 \\ \\ 1 & \sigma = n_i - 1 \end{cases}$$

و

$$L_{i,n_i-1}^{(\sigma)}(x_j) = 0 \qquad j \neq i \ , \ \sigma \le n_j - 1$$

پس

$$L_{i,n_i-1}^{(\sigma)}(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \ , \ \sigma = n_i - 1 \\ \\ o & otherwise \end{cases}$$

حال فرض کنیم که حکم برای اندیس‌های از $k+۱$ تا n برقرار باشد. ثابت می‌کنیم که برای k هم برقرار است. در واقع داریم

$$L_{i,k}^{(\sigma)}(x)=l_{i,k}^{(\sigma)}(x)-\sum_{\nu=k+۱}^{n_i-۱} l_{i,k}^{(\nu)}(x_i)\, L_{i,\nu}^{(\sigma)}(x)$$

اما برای $x=x_j$ که $i\neq j$، هم $l_{i,k}^{(\sigma)}(x_j)$ صفر است هم (بنا به فرض استقرا) $L_{i,\nu}^{(\sigma)}(x_j)$ صفر است. پس $L_{i,k}^{(\sigma)}(x_j)=۰$ برای $i\neq j$.

حال بحث‌ها را برای اندیس i پیش می‌بریم: بنا به فرض استقرا، مشتقات $L_{i,\nu}^{(\sigma)}(x_i)$ $(k+۱\leq\nu\leq n_i-۱)$ برای $\nu=\sigma$ مساوی ۱ هستند و در بقیه مقادیر صفراند. با توجه به این موضوع، سه حالت برای σ در نظر می‌گیریم:

<u>حالت اول</u> $\sigma=k$. همهٔ مقادیر $L_{i,\nu}^{(\sigma)}(x_i)$ برای $k+۱\leq\nu\leq n_i-۱$ صفر هستند فلذا $L_{i,k}^{(\sigma)}(x_i)=l_{i,k}^{(\sigma)}(x_i)=۱$.

<u>حالت دوم</u> $\sigma<k$. در این حالت، هر دوی $l_{i,k}^{(\sigma)}(x_i)$ و $L_{i,\nu}^{(\sigma)}(x_i)$ $(k+۱\leq\nu\leq n_i-۱)$ صفراند، پس از جمله $L_{i,k}^{(\sigma)}(x_i)=۰$

<u>حالت سوم</u> $k<\sigma\leq n_j-۱=n_i-۱$. آنگاه از فرض استقرا، در بین عبارتهای $L_{i,\nu}^{(\sigma)}(x_i)$ تنها به ازاء $\sigma=\nu$ این مقدار مساوی ۱ است و در بقیه ν ها صفر است. پس

$$L_{i,k-۱}^{(\sigma)}(x_i)=l_{i,k}^{(\sigma)}(x_i)-l_{i,k}^{(\sigma)}(x_i)=۰$$

تا اینجا ادعای بالا را ثابت کرده‌ایم که

$$L_{i,k}^{(\sigma)}(x_j)=\begin{cases} ۱ & i=j\ ,\ \ k=\sigma \\ ۰ & \text{otherwise}\end{cases}$$

با توجه به این موضوع چند جمله‌ای

$$P(x)=\sum_{i=۰}^{m}\sum_{k=۰}^{n_i-۱} y_i^{(k)} L_{ik}(x)$$

در تمامی روابط

$$P^{(k)}(x_i)=y_i^{(k)} \qquad ۰\leq k\leq n_i-۱ \qquad ۰\leq i\leq m$$

صدق می‌کند.

درونیابی توسط توابع گویا

در این بخش بررسی امکان یافتن توابع گویای

$$\Phi(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_\mu x^\mu}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_\nu x^\nu}$$

است که $\Phi(x_i) = f_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, \mu + \nu)$

فرض می‌کنیم که صورت و مخرج کسر عامل مشترکی نداشته باشند. مسئله یافتن Φ که در این روابط صدق کند به $A^{\mu,\nu}$ نشان داده می‌شود. توجه کنیم که در این مسئله به تعداد $\mu + \nu + 2$ مجهول داریم در حالی که تعداد قیود برابر $\mu + \nu + 1$ است.

تساوی بالا را می‌توان در دستگاه $S^{\mu,\nu}$ از معادلات بدین شکل نوشت:

$$P(x_i) - f_i Q(x_i) = 0$$

$$a_0 + a_1 x_i + \cdots + a_\mu x_i^\mu - f_i(b_0 + b_1 x_i + \cdots + b_\nu x_i^\nu) = 0 \qquad 0 \le i \le \mu + \nu$$

و این دستگاهی است از $\mu + \nu + 1$ معادله با $\mu + \nu + 2$ مجهول. توجه کنید که $S^{\mu+\nu}$ یک مسئله درونیابی توسط چندجمله‌ای‌ها است. به‌وضوح هر جواب از $A^{\mu,\nu}$ جوابی برای $S^{\mu+\nu}$ است اما چنانکه مثال زیر نشان می‌دهد عکس آن درست نیست.

مثال . جدول

x_i	0	1	2
f_i	1	2	2

را در نظر بگیریم و سعی کنیم $A^{1,1}$ را حل کنیم. برای این منظور ابتدا $S^{1,1}$ را حل می‌کنیم:

$$(a_0 + a_1 x_i) - f_i(b_0 + b_1 x_i) = 0 \qquad i = 1, 2, 3$$

معادلاً

$$\begin{cases} a_0 & & -1b_0 & & = 0 \\ a_0 & +a_1 & -2b_0 & -2b_1 & = 0 \\ a_0 & +2a_1 & -2b_0 & -4b_1 & = 0 \end{cases}$$

با حذف a_0:

$$\begin{cases} a_1 - b_0 - 2b_1 = 0 \\ 2a_1 - b_0 - 4b_1 = 0 \end{cases}$$

برای آنکه جواب غیربدیهی داشته باشیم بگیریم $b_1 = 1$ (یا هر مقدار ناصفری). آنگاه به‌دست می‌آید $a_1 = 2$ و $b_0 = 0$ و سپس هم $a_0 = 0$. پس

$$\Phi(x) = \frac{2x}{x} = 2$$

اما این چندجمله‌ای ثابت در همگی تساوی‌های $\Phi(x_i) = f_i$ صدق نمی‌کند.

۱. قضیه . *دستگاه همگن $S^{\mu,\nu}$ همواره دارای جواب غیربدیهی است. بعلاوه برای هر جواب $\frac{P(x)}{Q(x)}$ از آن داریم $Q(x) \neq \circ$.*

برهان. دستگاه $S^{\mu,\nu}$ دستگاهی همگن از $\mu + \nu + ۱$ معادله و $\mu + \nu + ۲$ مجهول $(a_\circ, \ldots, a_\mu, b_\circ, \ldots, b_\nu)$ است. لذا جوابی غیربدیهی $(a_\circ, \ldots, a_\mu, b_\circ, \ldots, b_\nu) \neq \circ$ دارد. یکی از آنها را به‌دلخواه اختیار کنید. اگر قرار می‌بود که $Q(x) \equiv \circ$ (معادلاً $b_\circ = \cdots = b_\nu = \circ$) آنگاه می‌داشتیم

$$P(x_i) = \circ \qquad i = \circ, ۱, \ldots, \mu + \nu$$

و یعنی چندجمله‌ای $P(x)$ از درجه حداکثر μ دارای $\mu + \nu + ۱$ جواب است، که از آن لازم می‌آید که $P(x) \equiv \circ$. پس $a_\circ = \cdots = a_\mu = b_\circ = \cdots = b_\nu = \circ$. که خلاف آن چیزی است که در بالا به‌دست آمد. ■

دو تابع گویای $\Phi_۱(x) = \frac{P_۱(x)}{Q_۱(x)}$ و $\Phi_۲(x) = \frac{P_۲(x)}{Q_۲(x)}$ را معادل خوانند در صورتی که با حذف عاملی از صورت و مخرج کسر یکی به دیگری برسیم، معادلاً

$$P_۱(x)Q_۲(x) = P_۲(x)Q_۱(x).$$

۲. قضیه . *اگر $\Phi_۱$ و $\Phi_۲$ هر دو جواب‌های مسئله $S^{\mu,\nu}$ باشند، آنگاه $\Phi_۱$ و $\Phi_۲$ معادلند.*

برهان. فرض کنید $\Phi_۱(x) = \frac{P_۱(x)}{Q_۱(x)}$ و $\Phi_۲(x) = \frac{P_۲(x)}{Q_۲(x)}$. قرار دهید $R(x) = P_۱(x)Q_۲(x) - P_۲(x)Q_۱(x)$. آنگاه برای $i = \circ, ۱, \ldots, \mu + \nu$ داریم:

$$R(x_i) = P_۱(x_i)Q_۲(x_i) - P_۲(x_i)Q_۱(x_i)$$

$$R(x_i) = f_iQ_۱(x_i)Q_۲(x_i) - f_iQ_۲(x_i)Q_۱(x_i)$$

اما درجه $R(x)$ از درجه حداکثر $\mu + \nu$ است که دارای $\mu + \nu + ۱$ ریشه است. پس باید چندجمله‌ای صفر باشد. این نشان می‌دهد که $\Phi_۱ \sim \Phi_۲$. ■

۳. قضیه . *فرض کنید که صورت و مخرج کسر Φ نسبت به هم اول باشند (یعنی چندجمله‌ای مشترک از درجه حداقل ۱ نداشته باشند). همچنین فرض کنید Φ مسئله $S^{\mu,\nu}$ را حل کند. آنگاه Φ مسئله $A^{\mu,\nu}$ را حل می‌کند.*

برهان. فرض کنیم $\Phi(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$. آنگاه

$$P(x_i)-f_iQ(x_i)=0 \qquad i=0,1,\ldots,\mu+\nu$$

اگر قرار می‌بود که $Q(x_i)=0$، آنگاه می‌داشتیم $P(x_i)=0$ که سپس لازم می‌آمد که هر دوی $P(x)$ و $Q(x)$ بر $x-x_i$ قابل قسمت هستند. اما چنین وضعیتی خلاف فرض اول بودن $P(x)$ و $Q(x)$ است. پس $Q(x_i)\neq 0$ و لذا با تقسیم بر $Q(x_i)$:

$$\frac{P(x_i)}{Q(x_i)}=f_i \qquad i=0,1,\ldots,\mu+\nu$$

یعنی $\dfrac{P}{Q}$ جوابی برای $A^{\mu,\nu}$ است. ■

برای هر تابع گویای Φ فرض کنید $\widetilde{\Phi}$ تابع گویای معادل با Φ باشد که صورت و مخرج کسر آن نسبت به هم اول هستند.

۴. قضیه . *فرض کنید Φ مسئله $S^{\mu,\nu}$ را حل کند. آنگاه $\Phi^{\mu,\nu}$ مسئله $A^{\mu,\nu}$ را حل می‌کند اگر و تنها اگر $\widetilde{\Phi}$ مسئله $S^{\mu,\nu}$ (معادلاً مسئله $A^{\mu,\nu}$) را حل کند.*

برهان. ($\Longleftarrow$) اگر $\Phi=\dfrac{P}{Q}$ مسئله $A^{\mu,\nu}$ را حل کند آنگاه

$$\frac{P(x_i)}{Q(x_i)}=f_i \qquad i=0,1,\ldots,\mu+\nu$$

که تلویحاً فرض بر این است که $Q(x_i)\neq 0$. با حذف عوامل مشترک (که ضرورتاً از نوع $(x-x_i)$ نیستند چراکه $Q(x_i)\neq 0$) می‌داشتیم $\dfrac{\widetilde{P}(x_i)}{\widetilde{Q}(x_i)}=f_i$ پس $\widetilde{\Phi}$ مسئله $A^{\mu,\nu}$ را حل می‌کند، و لذا $S^{\mu,\nu}$ را هم حل می‌کند.

($\Longrightarrow$) فرض کنید $\widetilde{\Phi}$ مسئله $S^{\mu,\nu}$ را حل کند. آنگاه بنابه حکم بالا، $\widetilde{\Phi}$ مسئله $A^{\mu,\nu}$ را حل می‌کند. لذا با ضرب نمودن در عواملی، لازم می‌آید که Φ هم مسئله $A^{\mu,\nu}$ را حل کند. ■

در پایین فرض می‌کنیم که هم $A^{\mu,\nu}$ و هم هر زیر مسئله $A^{\kappa,\lambda}$ ($\kappa\leq\mu$ و $\lambda\leq\nu$) حل پذیر است.

برای نقاط (x_i,f_i) که x_i ها دو به دو متمایز هستند، تفاضلات inverse بدین شکل تعریف می‌شوند

x_0	f_0			
x_1	f_1	$\varphi(x_0,x_1)$		
x_2	f_2	$\varphi(x_0,x_2)$	$\varphi(x_0,x_1,x_2)$	
x_3	f_3	$\varphi(x_0,x_3)$	$\varphi(x_0,x_1,x_3)$	$\varphi(x_0,x_1,x_2,x_3)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$\varphi(x_i,x_j)=\frac{x_i-x_j}{f_i-f_j}$$

$$\varphi(x_i, x_j, x_k) = \frac{x_j - x_k}{\varphi(x_i, x_j) - \varphi(x_i, x_k)}$$
$$\vdots$$
$$\varphi(x_i, \ldots, x_l, x_m, x_n) = \frac{x_m - x_n}{\varphi(x_i, \ldots, x_l, x_m) - \varphi(x_i, \ldots, x_l, x_n)}$$

که در صورت صفر شدن مخرج کسر، کسر را مساوی ∞ تعریف می‌کنیم.

توجه کنید که تفاضلات inverse نسبت به مؤلفه‌هایش متقارن نیست.

<u>قرارداد.</u> منظور از P^{μ} چندجمله‌ای P با درجه حداکثر μ است.

هدف بعدی ما آن است که با استفاده از تفاضلات inverse توابع گویای $\Phi^{n,n}(x) = \frac{P^n(x)}{Q^n(x)}$ بیابیم به‌طوری که

$$\Phi^{n,n}(x_i) = f_i \qquad i = 0, 1, \ldots, 2n$$

برای این منظور بنویسید

$$\frac{P^n(x)}{Q^n(x)} = f_0 + \frac{P^n(x)}{Q^n(x)} - \frac{P^n(x_0)}{Q^n(x_0)}$$

$$\frac{P^n(x)}{Q^n(x)} = f_0 + \frac{(x - x_0)P^{n-1}(x)}{Q^n(x)} = f_0 + \frac{x - x_0}{\left[\frac{Q^n(x)}{P^{n-1}(x)}\right]}$$

اما عبارت $\frac{Q^n(x)}{P^{n-1}(x)}$ این خاصیت را دارد که

$$\frac{Q^n(x_i)}{P^{n-1}(x_i)} = \frac{x_i - x_0}{f_i - f_0} = \varphi(x_0, x_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n)$$

پس

$$\frac{Q^n(x)}{P^{n-1}(x)} = \varphi(x_0, x_1) + \frac{Q^n(x)}{P^{n-1}(x)} - \frac{Q^n(x_1)}{P^{n-1}(x_1)}$$

$$\frac{Q^n(x)}{P^{n-1}(x)} = \varphi(x_0, x_1) + (x - x_1)\frac{Q^{n-1}(x)}{P^{n-1}(x)}$$

$$= \varphi(x_0, x_1) + \frac{x - x_1}{\left[\frac{P^{n-1}(x)}{Q^{n-1}(x)}\right]}$$

که سپس

$$\frac{P^{n-1}(x_i)}{Q^{n-1}(x_i)} = \frac{x_i - x_1}{\varphi(x_0, x_i) - \varphi(x_0, x_1)} = \varphi(x_0, x_1, x_i) \qquad i = 2, 3, \ldots, 2n$$

با ادامه این روند

$$\Phi^{n,n}(x)=\frac{P^n(x)}{Q^n(x)}=f_0+\frac{x-x_0}{\left[\frac{Q^n(x)}{P^{n-1}(x)}\right]}$$

$$\Phi^{n,n}(x)=f_0+\cfrac{x-x_0}{\varphi(x_0,x_1)+\cfrac{x-x_1}{\left[\frac{P^{n-1}(x)}{Q^{n-1}(x)}\right]}}$$

$$\vdots$$

$$=f_0+\cfrac{x-x_0}{\varphi(x_0,x_1)+\cfrac{x-x_1}{\varphi(x_0,x_1,x_2)+\cfrac{x-x_2}{\varphi(x_0,x_1,x_2,x_3)+\ddots+\cfrac{x-x_{2n-1}}{\varphi(x_0,\ldots,x_{2n})}}}}$$

فلذا $\Phi^{n,n}(x)$ به‌صورت کسر مسلسلی زیر نمایش داده می‌شود:

$$\Phi^{n,n}(x)=f_0+\underline{x-x_0}\big/\overline{\varphi(x_0,x_1)}+\underline{x-x_1}\big/\overline{\varphi(x_0,x_1,x_2)}+\underline{x-x_2}\big/\overline{\varphi(x_0,x_1,x_2,x_3)}+\cdots$$

$$\Phi^{n,n}(x)=+\underline{x-x_{2n-1}}\big/\overline{\varphi(x_0,x_1,\ldots,x_{2n})}$$

مثال .

i	x_i	f_i	$\varphi(x_0,x_i)$	$\varphi(x_0,x_1,x_i)$	$\varphi(x_0,x_1,x_2,x_i)$
0	0	0			
1	1	-1	-1		
2	2	$-\frac{2}{3}$	-3	$-\frac{1}{2}$	
3	3	9	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$\Phi^{2,1}(x)=0+\underline{x}\big/\overline{-1}+\underline{x-1}\big/\overline{-\tfrac{1}{2}}+\underline{x-2}\big/\overline{\tfrac{1}{2}}$$

$$\Phi^{2,1}(x)=0+\underline{x}\big/\overline{-1}+\underline{x-1}\big/\overline{-\tfrac{1}{2}}+2(x-2)$$

$$=0+\underline{x}\big/\overline{-1}+\underline{x-1}\big/\overline{-\tfrac{1}{2}+2(x-2)}$$

$$=0+\underline{x}\big/\overline{-1}+\underline{x-1}\big/\overline{2x-\tfrac{9}{2}}$$

$$=0+\underline{x}\big/\overline{-1+\tfrac{2(x-1)}{4x-9}}$$

$$=0+\underline{x}\big/\overline{\tfrac{-2x+7}{4x-9}}=\frac{x}{\frac{-2x+7}{4x-9}}=\frac{4x^2-9x}{-2x+7}$$

تبصره. توجه کنید که

$$\underline{a}\big/\overline{b}+c=\underline{a}\big/\overline{b+c}$$

چرا که

$$\text{سمت چپ} = \frac{a}{b+c} = \underline{a}\big/\overline{b+c}$$

چون تفاضلات inverse متقارن نیستند، تفاضلات reciprocal را تعریف می‌کنیم که خاصیت تقارن دارند:

$$\rho(x_i) = f_i$$

$$\rho(x_i, x_{i+1}) = \frac{x_i - x_{i+1}}{f_i - f_{i+1}}$$

$$\vdots$$

$$\rho(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) = \frac{x_i - x_{i+k}}{\rho(x_i, \dots, x_{i+k-1}) - \rho(x_{i+1}, \dots, x_{i+k})} + \rho(x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1})$$

معادلاً

$$\rho(x_i, x_{i+1} \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}) - \rho(x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}) = \frac{x_i - x_{i+k}}{\rho(x_i, \dots, x_{i+k-1}) - \rho(x_{i+1}, \dots, x_{i+k})}$$

۵. قضیه . *با قرارداد* $\rho(x_0, x_{-1}) = 0$ *داریم*

$$\varphi(x_0, x_1, \dots, x_p) = \rho(x_0, x_1, \dots, x_p) - \rho(x_0, x_1, \dots, x_{p-2}) \qquad (p = 1, 2, 3, \dots)$$

برهان. برای $p = 1$ داریم

$$\rho(x_0, x_1) = \frac{x_0 - x_1}{f_0 - f_1} = \varphi(x_0, x_1)$$

پس برای $p = 1$ قضیه برقرار است. فرض کنید برای p برقرار باشد. آنگاه

$$\varphi(x_0, x_1, \dots, x_{p+1}) = \frac{x_p - x_{p+1}}{\varphi(x_0, \dots, x_p) - \varphi(x_0, \dots, , x_{p-1}, x_{p+1})}$$

$$\varphi(x_0, , ,) = \frac{x_p - x_{p+1}}{\Big(\rho(x_0, \dots, x_p) - \rho(x_0, \dots, x_{p-2})\Big) - \Big(\rho(x_0, \dots, , x_{p-1}, x_{p+1}) - \rho(x_0, \dots, , x_{p-2})\Big)}$$

$$= \frac{x_p - x_{p+1}}{\rho(x_0, \dots, x_p) - \rho(x_0, \dots, , x_{p-1}, x_{p+1})}$$

$$= \frac{x_p - x_{p+1}}{\rho(x_p, x_0, \dots, x_{p-1}) - \rho(x_0, \dots, , x_{p-1}, x_{p+1})} \qquad \text{[به‌علت تقارن]}$$

$$= \rho(x_p, x_0, \dots, x_{p-1}, x_{p+1}) - \rho(x_0, \dots, , x_{p-1}) \qquad \text{[تعریف } \rho \text{]}$$

$$= \rho(x_0, \dots, x_{p-1}, x_p, x_{p+1}) - \rho(x_0, \dots, , x_{p-1}) \qquad \text{[تقارن]}$$

■

تفاصلات reciprocal را در جدولی به‌شرح زیر می‌چینیم:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
x_{۰} & f_{۰} & & & & & \\
 & & \rho(x_{۰},x_{۱}) & & & & \\
x_{۱} & f_{۱} & & \rho(x_{۰},x_{۱},x_{۲}) & & & \\
 & & \rho(x_{۱},x_{۲}) & & \rho(x_{۰},x_{۱},x_{۲},x_{۳}) & & \\
x_{۲} & f_{۲} & & \rho(x_{۱},x_{۲},x_{۳}) & & & \\
 & & \rho(x_{۲},x_{۳}) & & \vdots & & \\
x_{۳} & f_{۳} & & \vdots & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & &
\end{array}
$$

پس با استفاده از قضیه بالا کسرهای مسلسل Thiele را داریم

$$\Phi^{n,n}(x) = f_{۰} + \underline{x - x_{۰}}\big/\overline{\rho(x_{۰},x_{۱})} + \underline{x - x_{۱}}\big/\overline{\rho(x_{۰},x_{۱},x_{۲}) - \rho(x_{۰})} + \cdots$$

$$\Phi^{n,n}(x) = + \underline{x - x_{۲n-۱}}\big/\overline{\rho(x_{۰},x_{۱},\ldots,x_{۲n}) - \rho(x_{۰},x_{۱},\ldots,x_{۲n-۲})}$$

الگوریتم‌هایی از نوع Neville.

در این بخش می‌خواهیم الگوریتمی برای درون‌یابی توسط توابع گویا به‌دست آوریم که شبیه به الگوریتم نویل برای درون‌یابی به‌وسیله چندجمله‌ای‌ها است. برای ادامه بحث قرارداد می‌کنیم که نماد

$$\Phi_s^{\mu,\nu}(x) = \frac{P_s^{\mu,\nu}(x)}{Q_s^{\mu,\nu}(x)}$$

معرف تابع گویایی باشد که

$$\Phi_s^{\mu,\nu}(x_i) = f_i \qquad i = s, s+۱, \ldots, s+\mu+\nu$$

که در آن $P_s^{\mu,\nu}$ و $Q_s^{\mu,\nu}$ چندجمله‌ای‌هایی به‌ترتیب از درجات حداکثر μ و ν هستند. فرض کنید $p_s^{\mu,\nu}$ و $q_s^{\mu,\nu}$ ضرایب پیشرو این دو چندجمله‌ای باشند:

$$P_s^{\mu,\nu}(x) = p_s^{\mu,\nu}x^\mu + \cdots \quad \text{و} \quad Q_s^{\mu,\nu}(x) = q_s^{\mu,\nu}x^\nu + \cdots$$

و قرار دهید

$$\alpha_i = x - x_i \quad \text{و} \quad T_s^{\mu,\nu}(x,y) = P_s^{\mu,\nu}(x) - y\,Q_s^{\mu,\nu}(x)$$

توجه کنید که شرایط $\Phi_s^{\mu,\nu}(x_i) = f_i$ معادل هستند با

$$T_s^{\mu,\nu}(x_i, f_i) = ۰ \qquad i = s, s+۱, \ldots, s+\mu+\nu$$

٦. قضیه . *با قرار دادن*

$P_s^{\circ,\circ}(x) = f_s$ و $Q_s^{\circ,\circ}(x) = ۱$

روابط بازگشتی زیر برقرارند:

الف) *عبور از* $(\mu - ۱, \nu)$ *به* (μ, ν):

$$P_s^{\mu,\nu}(x) = \alpha_s\, q_s^{\mu-۱,\nu}\, P_{s+۱}^{\mu-۱,\nu}(x) - \alpha_{s+\mu+\nu}\, q_{s+۱}^{\mu-۱,\nu}\, P_s^{\mu-۱,\nu}(x)$$

$$Q_s^{\mu,\nu}(x) = \alpha_s\, q_s^{\mu-۱,\nu}\, Q_{s+۱}^{\mu-۱,\nu}(x) - \alpha_{s+\mu+\nu}\, q_{s+۱}^{\mu-۱,\nu}\, Q_s^{\mu-۱,\nu}(x)$$

ب) *عبور از* $(\mu, \nu - ۱)$ *به* (μ, ν):

$$P_s^{\mu,\nu}(x) = \alpha_s\, p_s^{\mu,\nu-۱}\, P_{s+۱}^{\mu,\nu-۱}(x) - \alpha_{s+\mu+\nu}\, p_{s+۱}^{\mu,\nu-۱}\, P_s^{\mu,\nu-۱}(x)$$

$$Q_s^{\mu,\nu}(x) = \alpha_s\, p_s^{\mu,\nu-۱}\, Q_{s+۱}^{\mu,\nu-۱}(x) - \alpha_{s+\mu+\nu}\, p_{s+۱}^{\mu,\nu-۱}\, Q_s^{\mu,\nu-۱}(x)$$

برهان. (الف) می‌دانیم که توابع گویای $\Phi_s^{\mu-۱,\nu}$ و $\Phi_{s+۱}^{\mu-۱,\nu}$ به‌ترتیب در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} T_s^{\mu-۱,\nu}(x_i, f_i) = \circ & i = s, \dots, s+\mu+\nu-۱ \\ T_{s+۱}^{\mu-۱,\nu}(x_i, f_i) = \circ & i = s+۱, \dots, s+\mu+\nu \end{cases} \qquad (*)$$

با در دست داشتن $P_s^{\mu-۱,\nu}$ و $P_{s+۱}^{\mu-۱,\nu}$ و $Q_s^{\mu-۱,\nu}$ و $Q_{s+۱}^{\mu-۱,\nu}$ چندجمله‌ای‌های $P_s^{\mu,\nu}$ و $Q_s^{\mu,\nu}$ را مطابق روابط داده شده در (الف) تعریف کنید. آنگاه درجه $P_s^{\mu,\nu}$ از μ تجاوز نمی‌کند. در ظاهر چندجمله‌ای $Q_s^{\mu,\nu}$ شامل جمله $x^{\nu+۱}$ است اما چون $q_s^{\mu-۱,\nu}$ ضریب پیشرو $Q_s^{\mu-۱,\nu}$ است و $q_{s+۱}^{\mu-۱,\nu}$ ضریب پیشرو $Q_{s+۱}^{\mu-۱,\nu}$ است پس ضریب $x^{\nu+۱}$ عملاً صفر است، پس درجه $Q_s^{\mu,\nu}$ حداکثر ν است. اگر ردیف دوم از تعریف (الف) را در y ضرب کرده و از ردیف اول کم کنیم آنگاه

$$T_s^{\mu,\nu}(x,y) = \alpha_s q_s^{\mu-۱,\nu} T_{s+۱}^{\mu-۱,\nu}(x,y) - \alpha_{s+\mu+\nu} q_{s+۱}^{\mu-۱,\nu} T_s^{\mu-۱,\nu}(x,y)$$

آنگاه از (*) داریم

$$T_s^{\mu,\nu}(x_i, f_i) = \circ \qquad i = s, \dots, s+\mu+\nu$$

چرا که α_s در x_s صفر می‌شود و $\alpha_{s+\mu+\nu}$ در $x_{s+\mu+\nu}$ صفر می‌شود. پس

$$P_s^{\mu,\nu}(x_i) - f_i Q_s^{\mu,\nu}(x_i) = \circ \qquad i = s, \dots, s+\mu+\nu$$

از این داریم

$$\Phi_s^{\mu,\nu}(x_i) = f_i \qquad i = s, \dots, s+\mu+\nu$$

■

روابط تراجعی گفته شده در قضیه بالا شامل ضرایب $p_s^{\mu,\nu-۱}$ و $q_s^{\mu-۱,\nu}$ هستند. اما قضیه زیر کمک می‌کند

از آنها را حذف کنیم.

۷. قضیه . *الف)*

$$\Phi_s^{\mu-1,\nu}(x) - \Phi_{s+1}^{\mu-1,\nu-1}(x) = k_1 \frac{(x-x_{s+1})\cdots(x-x_{s+\mu+\nu-1})}{Q_s^{\mu-1,\nu}(x)Q_{s+1}^{\mu-1,\nu-1}(x)}$$

که در آن $k_1 = -p_{s+1}^{\mu-1,\nu-1} q_s^{\mu-1,\nu}$

ب)

$$\Phi_{s+1}^{\mu-1,\nu}(x) - \Phi_{s+1}^{\mu-1,\nu-1}(x) = k_2 \frac{(x-x_{s+1})\cdots(x-x_{s+\mu+\nu-1})}{Q_{s+1}^{\mu-1,\nu}(x)Q_{s+1}^{\mu-1,\nu-1}(x)}$$

که در آن $k_2 = -p_{s+1}^{\mu-1,\nu-1} q_{s+1}^{\mu-1,\nu}$.

برهان. الف)

$$\Phi_s^{\mu-1,\nu}(x) - \Phi_{s+1}^{\mu-1,\nu-1}(x) = \frac{P_s^{\mu-1,\nu}(x)\ Q_{s+1}^{\mu-1,\nu-1}(x) - P_{s+1}^{\mu-1,\nu-1}(x)\ Q_s^{\mu-1,\nu}(x)}{Q_s^{\mu-1,\nu}(x)\ Q_{s+1}^{\mu-1,\nu-1}(x)}$$

درجه صورت کسر حداکثر $\mu+\nu-1$ است و دارای همین تعداد صفر است:

$$x_i, \quad i = s+1,\cdots,(s+1)+(\mu-1)+(\nu-1) = s+\mu+\nu-1$$

پس صورت کسر باید مضرب ثابتی از $(x-x_{s+1})\cdots(x-x_{s+\mu+\nu-1})$ باشد. اما این مضرب همان ضریب پیشروی صورت کسر است که آن هم به‌صورت $k_1 = 0 - p_{s+1}^{\mu-1,\nu-1} q_s^{\mu-1,\nu}$ است. اثبات قسمت (ب) هم مشابهاً انجام می‌گیرد. ■

۸. قضیه . *به شرط آنکه کسرها مبهم نباشند داریم:*

الف)

$$\Phi_s^{\mu,\nu}(x) = \Phi_{s+1}^{\mu-1,\nu}(x) + \frac{\Phi_{s+1}^{\mu-1,\nu}(x) - \Phi_s^{\mu-1,\nu}(x)}{\frac{\alpha_s}{\alpha_{s+\mu+\nu}}\left(1 - \frac{\Phi_{s+1}^{\mu-1,\nu}(x) - \Phi_s^{\mu-1,\nu}(x)}{\Phi_{s+1}^{\mu-1,\nu}(x) - \Phi_{s+1}^{\mu-1,\nu-1}(x)}\right) - 1}$$

ب)

$$\Phi_s^{\mu,\nu}(x) = \Phi_{s+1}^{\mu,\nu-1}(x) + \frac{\Phi_{s+1}^{\mu,\nu-1}(x) - \Phi_s^{\mu,\nu-1}(x)}{\frac{\alpha_s}{\alpha_{s+\mu+\nu}}\left(1 - \frac{\Phi_{s+1}^{\mu,\nu-1}(x) - \Phi_s^{\mu,\nu-1}(x)}{\Phi_{s+1}^{\mu,\nu-1}(x) - \Phi_{s+1}^{\mu-1,\nu-1}(x)}\right) - 1}$$

برهان. بنابه دو قضیه قبل

$$\Phi_s^{\mu,\nu}(x) = \frac{P_s^{\mu,\nu}(x)}{Q_s^{\mu,\nu}(x)}$$

$$\Phi_s^{\mu,\nu}(x) = \frac{\alpha_s\ q_s^{\mu-1,\nu}\ P_{s+1}^{\mu-1,\nu}(x) - \alpha_{s+\mu+\nu}\ q_{s+1}^{\mu-1,\nu}\ P_s^{\mu-1,\nu}(x)}{\alpha_s\ q_s^{\mu-1,\nu}\ Q_{s+1}^{\mu-1,\nu}(x) - \alpha_{s+\mu+\nu}\ q_{s+1}^{\mu-1,\nu}\ Q_s^{\mu-1,\nu}(x)} \qquad (*)$$

چون در صورت قضیه فرض کردیم که کسرها مبهم نباشند پس از قضیه قبل ضرورتاً داریم $p_{s+1}^{\mu-1,\nu-1} \neq 0$

(به قسمت (ب) قضیه قبل توجه کنید). حال صورت و مخرج کسر اخیر را در

$$\frac{-p_{s+1}^{\mu-1,\nu-1}(x-x_{s+1})(x-x_{s+2})\cdots(x-x_{s+\mu+\nu-1})}{Q_{s+1}^{\mu-1,\nu}(x)\; Q_{s}^{\mu-1,\nu}(x)\; Q_{s+1}^{\mu-1,\nu-1}(x)}$$

ضرب می‌کنیم. پس در ادامه $(*)$ می‌نویسیم

$$=\frac{\alpha_s\;\Phi_{s+1}^{\mu-1,\nu}(x)\left[\Phi_{s}^{\mu-1,\nu}(x)-\Phi_{s+1}^{\mu-1,\nu-1}(x)\right]-\alpha_{s+\mu+\nu}\;\Phi_{s}^{\mu-1,\nu}(x)\left[\Phi_{s+1}^{\mu-1,\nu}(x)-\Phi_{s+1}^{\mu-1,\nu-1}(x)\right]}{\alpha_s\left[\Phi_{s}^{\mu-1,\nu}(x)-\Phi_{s+1}^{\mu-1,\nu-1}(x)\right]-\alpha_{s+\mu+\nu}\left[\Phi_{s+1}^{\mu-1,\nu}(x)-\Phi_{s+1}^{\mu-1,\nu-1}(x)\right]}$$

که با قرار دادن

$$[\,]_1=\Phi_{s}^{\mu-1,\nu}(x)-\Phi_{s+1}^{\mu-1,\nu-1}(x)$$

$$[\,]_2=\Phi_{s+1}^{\mu-1,\nu}(x)-\Phi_{s+1}^{\mu-1,\nu-1}(x)$$

رابطه بالا بدین صورت نوشته می‌شود:

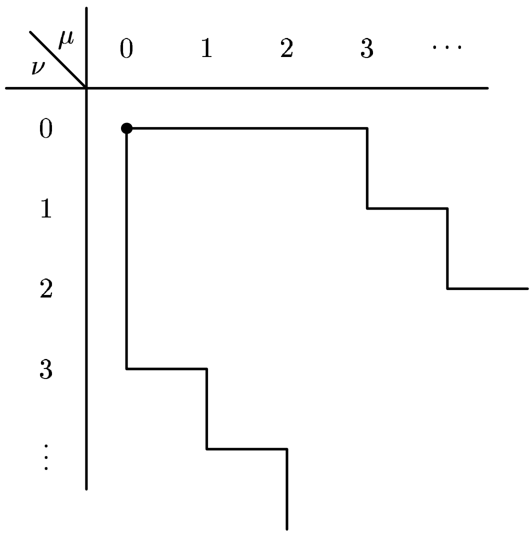
$$=\frac{\alpha_s\Phi_{s+1}^{\mu-1,\nu}(x)[\,]_1-\alpha_{s+\mu+\nu}\Phi_{s}^{\mu-1,\nu}(x)[\,]_2}{\alpha_s[\,]_1-\alpha_{s+\mu+\nu}[\,]_2}$$

$$=\frac{\Big(\alpha_s[\,]_1-\alpha_{s+\mu+\nu}[\,]_2\Big)\Phi_{s+1}^{\mu-1,\nu}(x)+\alpha_{s+\mu+\nu}[\,]_2\Big(\Phi_{s+1}^{\mu-1,\nu}(x)-\Phi_{s}^{\mu-1,\nu}(x)\Big)}{\alpha_s[\,]_1-\alpha_{s+\mu+\nu}[\,]_2}$$

$$=\Phi_{s+1}^{\mu-1,\nu}(x)+\frac{\Phi_{s+1}^{\mu-1,\nu}(x)-\Phi_{s}^{\mu-1,\nu}(x)}{\dfrac{\alpha_s}{\alpha_{s+\mu+\nu}}\dfrac{[\,]_1}{[\,]_2}-1}$$

$$=\Phi_{s+1}^{\mu-1,\nu}(x)+\frac{\Phi_{s+1}^{\mu-1,\nu}(x)-\Phi_{s}^{\mu-1,\nu}(x)}{\dfrac{\alpha_s}{\alpha_{s+\mu+\nu}}\left(1-\dfrac{[\,]_2-[\,]_1}{[\,]_2}\right)-1}$$

قضیه بالا این امکان را فراهم می‌آورد که مقدار عبارت‌های گویا را در نقطه خاص x حساب کنیم. اما احتیاج است برخی حالت‌های خاص بحث شوند:



وقتی روی مسیر $\nu = ۰$ در حرکت هستیم عبارت‌های گویا به‌صورت چندجمله‌ای هستند و لذا از همان الگوریتم نویل برای چندجمله‌ای‌ها استفاده می‌کنیم

$$P_{s,s+۱,\dots,s+\mu}(x) = \frac{(x-x_s)P_{s+۱,\dots,s+\mu}(x) - (x-x_{s+\mu})P_{s,\dots,s+\mu-۱}(x)}{(x_{s+\mu}-x_s)}$$

در نماد جدید:

$$\Phi_s^{\mu,۰}(x) = \frac{\alpha_s \Phi_{s+۱}^{\mu-۱,۰}(x) - \alpha_{s+\mu}\Phi_s^{\mu-۱,۰}(x)}{\alpha_s - \alpha_{s+\mu}} \qquad (\mu = ۱,۲,\dots)$$

و این معادل با فرمول قسمت (الف) از قضیه بالا است که در آن قرار داده باشیم $\Phi_{s+۱}^{\mu-۱,-۱}(x) = \infty$. برای نقطه شروع قرار می‌دهیم $\Phi_s^{۰,۰}(x) = f_s$.

حال حالتی را در نظر بگیرید که روی مسیر $\mu = ۰$ حرکت می‌کنیم. پس صورت کسرها چندجمله‌ای‌های ثابت هستند پس می‌توان آنها را ۱ فرض کرد. سپس $f_i = \dfrac{۱}{Q_s^{۰,\nu}(x_i)}$ داریم $Q_s^{۰,\nu}(x_i) = \dfrac{۱}{f_i}$ و این معادل با درون‌یابی چندجمله‌ای است با گره‌های $\left(x_i, \dfrac{۱}{f_i}\right)$. روش نویل را برای Q ها به‌کار برید:

$$Q_s^{۰,\nu}(x) = \frac{\alpha_s Q_{s+۱}^{۰,\nu-۱}(x) - \alpha_{s+\mu} Q_s^{۰,\nu-۱}(x)}{\alpha_s - \alpha_{s+\mu}}$$

حال با استفاده از اینکه $\Phi^{۰,\nu} = \dfrac{۱}{Q^{۰,\nu}}$، تساوی بالا را بدین شکل بازنویسی می‌کنیم:

$$\Phi_s^{۰,\nu}(x) = \frac{\alpha_s - \alpha_{s+\mu}}{\dfrac{\alpha_s}{\Phi^{۰,\nu-۱}(x)} - \dfrac{\alpha_{s+\nu}}{\Phi^{۰,\nu-۱}(x)}} \qquad (\nu = ۱,۲,\dots$$

که برای نقطه شروع داریم $\Phi_s^{۰,۰}(x) = f_s$. توجه کنید که تساوی به‌دست آمده در بالا معادل است با آنکه در قسمت (ب) قضیه قبل قرار دهیم $\Phi_{s+۱}^{-۱,\nu-۱}(x) = ۰$ چه با این فرض قسمت (ب) قضیه قبل بدین صورت خوانده می‌شود (صرف‌نظر از x)

$$\Phi_s^{۰,\nu} = \Phi_{s+۱}^{۰,\nu-۱} + \frac{\Phi_{s+۱}^{۰,\nu-۱} - \Phi_s^{۰,\nu-۱}}{\dfrac{\alpha_s}{\alpha_{s+\mu+\nu}}\left(۱ - \dfrac{\Phi_{s+۱}^{۰,\nu-۱} - \Phi_s^{۰,\nu-۱}}{\Phi_{s+۱}^{۰,\nu-۱} - ۰}\right) - ۱}$$

$$\Phi_s^{۰,\nu} = \Phi_{s+۱}^{۰,\nu-۱} + \frac{\Phi_{s+۱}^{۰,\nu-۱} - \Phi_s^{۰,\nu-۱}}{\dfrac{\alpha_s}{\alpha_{s+\mu+\nu}}\left(\dfrac{\Phi_s^{۰,\nu-۱}}{\Phi_{s+۱}^{۰,\nu-۱}}\right) - ۱}$$

$$= \Phi_{s+۱}^{۰,\nu-۱} + \frac{\alpha_{s+\mu+\nu}\Phi_{s+۱}^{۰,\nu-۱}\left[\Phi_{s+۱}^{۰,\nu-۱} - \Phi_s^{۰,\nu-۱}\right]}{\alpha_s \Phi_s^{۰,\nu-۱} - \alpha_{s+\mu+\nu}\Phi_{s+۱}^{۰,\nu-۱}}$$

$$= \frac{(\alpha_s - \alpha_{s+\mu+\nu})\Phi_s^{۰,\nu-۱}\Phi_{s+۱}^{۰,\nu-۱}}{\alpha_s \Phi_s^{۰,\nu-۱} - \alpha_{s+\mu+\nu}\Phi_{s+۱}^{۰,\nu-۱}}$$

$$= \frac{(\alpha_s - \alpha_{s+\nu})}{\dfrac{\alpha_s}{\Phi_{s+۱}^{۰,\nu-۱}} - \dfrac{\alpha_{s+\mu+\nu}}{\Phi_s^{۰,\nu-۱}}}$$

که همان عبارتی است که قبلاً معرفی شد.

حال برای لحظه‌ای برای $i = s + \mu + \nu$ و $k = \mu + \nu$ معرفی کنید

$$T_{ik} = \Phi_s^{\mu,\nu}(x)$$

آنگاه تساوی در قضیه قبل بدین شکل باز نویسی می‌شود:

$$T_{i,-1} = 0$$

$$T_{i,0} = f_i$$

$$T_{i,k} = T_{i,k-1} + \frac{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{\frac{x - x_{i-k}}{x - x_i}\left(1 - \frac{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-2}}\right) - 1} \qquad (1 \le k \le i,\ i = 1, 2, \ldots)$$

$(\mu,\nu) \longrightarrow \hat{*}-1cm$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$	$(1,2)$
$0 = T_{0,-1}$	$f_0 = T_{0,0}$			
$0 = T_{1,-1}$	$f_1 = T_{1,0}$	$T_{1,1}$		
$0 = T_{2,-1}$	$f_2 = T_{2,0}$	$T_{2,1}$	$T_{2,2}$	
$0 = T_{3,-1}$	$f_3 = T_{3,0}$	$T_{3,1}$	$T_{3,3}$	

توجه کنید که این الگوریتم برای یافتن مقدار تابع گویا در نقطه‌ای خاص است. درصورتی که بخواهیم ضرایب تابع گویا را به‌دست آوریم آن‌وقت از تفاضلات inverse یا reciprocal استفاده می‌کنیم.

مقایسه درونیابی های چندجمله‌ای و گویا

زمانی که بخواهیم مقدار تابع $f(x)$ را در نقطه‌ای خص تخمین بزنیم از درونیابی چندجمله‌ای استفاده می‌کنیم، اما اگر آن نقطه نزدیک به یک نقطه تکین تابع باشد آنوقت درونیابی گویا ترجیح داده می‌شود (مثلاً مقدار x ای که نزدیک به $\frac{\pi}{2}$ باشد در تابع $\tan x$).

مثال . برای تابع $f(x) = \cot x$ مقادیر $\cot 1^\circ$ و $\cot 2^\circ$ و $\cot 3^\circ$ و $\cot 4^\circ$ و $\cot 5^\circ$ را فرض بگیرید و سعی کنید توسط مقدار آنها $\cot 2^\circ 30'$ را تخمین بزنید. آنگاه روش نویل استفاده شده برای چندجمله‌ایهای درجه ۴ مقدار تخمین ۲۲٫۶۳۵۱۹۱۵۸ را به‌دست می‌دهد در صورتی که روش نویل به‌کار رفته برای $(\mu,\nu) = (2,2)$ مقدار ۲۲٫۹۰۳۷۶۵۵۲ را به‌دست می‌دهد که مقایسه این دو با مقدار واقعی $\cot 2^\circ 30' =$ ۲۲٫۹۰۳۷۶۵۵۴۸۴۰۰۰ معلوم می‌کند که چندجمله‌ای گویا دقیق‌تر است.

انتگرالگیری رامبرگ

هدف از این روش انتگرالگیری ایجاد روش تقریبی با مرتبه بالا با استفاده از روش‌های از مرتبه پائین است.

فرض کنید $f \in C^{2m+2}[a\,,\,b]$ و فرض کنیم بازه را به N قسمت مساوی تقسیم کرده باشیم. قرار دهید

$$g(t) = f(a + \frac{t}{N}(b-a)) \qquad (0 \le t \le N)$$

آنگاه

$$g^{(k)}(t) = \left(\frac{b-a}{N}\right)^k f^{(k)}(a + \frac{t}{N}(b-a)) = h^k f^{(k)}(a + \frac{t}{N}(b-a))$$

پس

$$g^{(2l-1)}(N) - g^{(2l-1)}(0) = h^{2l-1}\left[f^{(2l-1)}(b) - f^{(2l-1)}(a)\right]$$

از طرفی با قرار دادن $x = a + \frac{t}{N}(b-a)$ داریم

$$\int_0^N g(t)dt = \frac{1}{h}\int_a^b f(x)dx$$

$$\frac{1}{h}\int_a^b f(x)dx = \left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_{N-1}) + \frac{f(x_N)}{2}\right] - \sum_{l=1}^{m}\frac{B_{2l}}{(2l)!}h^{2l-1}[f^{(2l-1)}(b) - f^{(2l-1)}(a)]$$

$$-\frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}\frac{b-a}{h}h^{2m+2}f^{(2m+2)}(\xi) \qquad (a \le \xi \le b)$$

با ضرب طرفین در h به دست می‌آید

$$\int_a^b f(x)dx = h\left[\frac{f(a)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_{N-1}) + \frac{f(b)}{2}\right] - \sum_{l=1}^{m}\frac{B_{2l}}{(2l)!}h^{2l}[f^{(2l-1)}(b) - f^{(2l-1)}(a)]$$

$$-\frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}(b-a)h^{2m+2}f^{(2m+2)}(\xi) \qquad (a < \xi < b)$$

سپس به دلیل $f \in C^{2m+2}[a\,,\,b]$ تابع $f^{(2m+2)}$ کراندار است لذا برای آن می‌توان نوشت

$$\int_a^b f(x)dx = T_h^1(f) + \gamma_1 h^2 + \cdots + \gamma_m h^{2m} + O(h^{2m+2})$$

که در آن $T_h^1(f)$ قاعده ذوزنقه‌ای مرکب است:

$$T_h^1(f) = h\left[\frac{f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) + \frac{f(b)}{2}\right]$$

اگر فرض شود که $f \in C^4[a,b]$، آنگاه بنابه بسط اویلر—مک‌لورن می‌توان نوشت

$$\int_a^b f(x)dx = T_h^1(f) + \gamma_1 h^2 + O(h^4)$$

که در آن ثابت γ_1 به f بستگی دارد و به h وابسته نیست. پس با تبدیل h به $\frac{h}{2}$ در این تساوی بدست می آوریم:

$$\int_a^b f(x)dx = T_{\frac{h}{2}}^1(f) + \gamma_1\frac{h^2}{4} + O(h^4)$$

حال تساوی اول را در $-\frac{1}{3}$ و تساوی دوم را در $\frac{4}{3}$ ضرب کنید تا بدست آید

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{3}\left[4T_{\frac{h}{2}}^1(f) - T_h^1(f)\right] + O(h^4)$$

به این ترتیب مرتبه خطا به $O(h^4)$ کاهش یافته است. قرار دهید

$$T_h^2(f) = \frac{1}{3}\left[4T_{\frac{h}{2}}^1(f) - T_h^1(f)\right]$$

فرمول‌های اویلر—مک‌لورن برای گام‌های h و $\frac{h}{2}$ بدست می آوریم

$$\int_a^b f(x)dx = T_h^2(f) + \gamma_2 h^4 + O(h^6)$$

که در آن γ_2 تنها به f بستگی دارد. با تبدیل h به $\frac{h}{2}$:

$$\int_a^b f(x)dx = T_{\frac{h}{2}}^2(f) + \gamma_2\frac{h^4}{16} + O(h^6)$$

سپس با ترکیب کردن:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{15}\left[16T_{\frac{h}{2}}^2(f) - T_h^2(f)\right] + O(h^6)$$

و خطا در اینجا از مرتبه $O(h^6)$ است. حال تعریف کنید

$$\begin{aligned}
h_k &= \tfrac{h}{2^k} && k = 0, 1, 2, \cdots \\
T_{k,1}(f) &= T_{h_k}^1(f) \\
T_{k,m+1}(f) &= \tfrac{1}{4^m - 1}\left[4^m T_{k+1,m}(f) - T_{k,m}(f)\right] && \begin{array}{l} m = 1, 2, \cdots \\ k = 0, 1, 2, \cdots \end{array}
\end{aligned}$$

سپس قضیه زیر را داریم

۱. قضیه . *فرض کنید $f \in C^{۲m}[a,b]$. آنگاه برای کوادراتور رامبرگ خطای زیر را داریم*

$$\left|\int_a^b f(x)dx - T_{k,m}(f)\right| \le C_m \|f^{(۲m)}\|_\infty \left(\frac{h}{۲^k}\right)^{۲m} \qquad k = ۰, ۱, \cdots$$

که در آن C_m بستگی به m دارد.

برهان. در واقع به استقراء بر m و بر هر i که $۱ \le i \le m$ ثابت می‌کنیم که ثابت‌های $\gamma_{l,i}$ وجود دارند که

$$\left|\int_a^b f(x)dx - T_{k,i}(f) + \sum_{l=i}^{m-۱} \gamma_{l,i}\left[f^{(۲l-۱)}(b) - f^{(۲l-۱)}(a)\right]\left(\frac{h}{۲^k}\right)^{۲l}\right|$$

$$\le \gamma_{m,i}\ \|f^{(۲m)}\|_\infty\ \left(\frac{h}{۲^k}\right)^{۲m}$$

برای $i = ۱, \cdots, m$ و $k = ۰, ۱, \cdots$ (برای $i = m$ جمع بالا را مساوی صفر بگیرید). برای $i = ۱$ داریم

$$\begin{aligned} T_{k,۱}(f) &= T^{۱}_{h_k}(f) \\ &= \textstyle\int_a^b f(x)dx + \sum_{l=۱}^{m-۱} h_k^{۲l}\frac{B_{۲l}}{(۲l)!}\left[f^{(۲l-۱)}(b) - f^{(۲l-۱)}(a)\right] \\ &\quad + h_k^{۲m}\frac{B_{۲m}}{(۲m)!}(b-a)f^{(۲m)}(\xi) \end{aligned}$$

پس کافی است که برای $l = ۱, \cdots, m-۱$ بگیریم $\gamma_{l,۱} = \frac{B_{۲l}}{(۲l)!}$ و بگیریم $\gamma_{m,۱} = \frac{|B_{۲m}|}{(۲m)!}(b-a)$. فرض استقراء بگیرید که برای m و برای هر $۱ \le i \le m$ برقرار است. آنگاه تعریف کنید:

$$\gamma_{l,i+۱} = \frac{۴^{i-l} - ۱}{۴^i - ۱}\ \gamma_{l,i} \qquad l = i+۱, \cdots, m-۱$$

سپس با قرارداد

$$F_l = f^{(۲l-۱)}(b) - f^{(۲l-۱)}(a) \qquad l = ۱, \cdots, m-۱$$

داریم

$$\frac{۴^i}{۴^i - ۱}\left[\int_a^b f(x)dx - T_{k+۱,i}(f) + \sum_{l=i}^{m-۱}(\frac{h}{۲^{k+۱}})^{۲l}\gamma_{l,i}F_l\right]$$

$$-\frac{۱}{۴^i - ۱}\left[\int_a^b f(x)dx - T_{k,i}(f) + \sum_{l=i}^{m-۱}(\frac{h}{۲^k})^{۲l}\gamma_{l,i}F_l\right] =$$

$$= \int_a^b f(x)dx - T_{k,i+۱}(f) + \sum_{l=i+۱}^{m-۱}(\frac{h}{۲^k})^{۲l}\gamma_{l,i+۱}F_l$$

پس از فرض استقراء نتیجه می‌شود:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - T_{k,i+۱}(f) + \sum_{l=i+۱}^{m-۱} (\frac{h}{۲^k})^{۲l}\gamma_{l,i+۱}F_l\right| \leq$$

$$= \frac{۴^i}{۴^i - ۱}\gamma_{m,i}\|f^{(۲m)}\|_\infty(\frac{h}{۲^{k+۱}})^{۲m} + \frac{۱}{۴^i - ۱}\ \gamma_{m,i}\|f^{(۲m)}\|_\infty(\frac{h}{۲^k})^{۲m}$$

$$= \frac{۴^{i-m} + ۱}{۴^i - ۱}\ \gamma_{m,i}\|f^{(۲m)}\|_\infty(\frac{h}{۲^k})^{۲m}$$

$$= \gamma_{m,i+۱}\|f^{(۲m)}\|_\infty(\frac{h}{۲^k})^{۲m}$$

که در آن $\gamma_{m,i+۱} = \frac{۴^{i-m}+۱}{۴^i-۱}\ \gamma_{m,i}$. (توجه کنید که نحوه استقرایی تعریف کردن $\gamma_{m,i+۱}$ برای اندیس اول m با نحوه استقرایی تعریف آن برای اندیس اول مساوی $۱ \leq i < m$ فرق می‌کند). ■

۲. قضیه . *وزن‌های موجود در کوادراتور رامبرگ همگی مثبت هستند.*

برهان. قرار دهید

$$Q_{k,m} = (۴^m - ۱)T_{k,m+۱} - T_{k,m}$$

معادلاً

$$T_{k,m+۱} = \frac{۱}{۴^m - ۱}[T_{k,m} + Q_{k,m}] \qquad (*)$$

سپس می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
Q_{k,m+۱} &= (۴^{m+۱} - ۱)T_{k,m+۲} - T_{k,m+۱} \\
&= \left[۴^{m+۱}T_{k+۱,m+۱} - T_{k,m+۱}\right] - T_{k,m+۱} \\
&= ۴^{m+۱}T_{k+۱,m+۱} - ۲T_{k,m+۱} \\
&= ۴^{m+۱}T_{k+۱,m+۱} - ۲\,\tfrac{۱}{۴^m-۱}\left[۴^m T_{k+۱,m} - T_{k,m}\right] \\
&= ۴^{m+۱}\tfrac{۱}{۴^m-۱}\left[T_{k+۱,m} + Q_{k+۱,m}\right] + \tfrac{-۲\times ۴^m}{۴^m-۱}T_{k+۱,m} + \tfrac{۲}{۴^m-۱}T_{k,m} \\
&= \tfrac{۱}{۴^m-۱}\left[۲\times ۴^m T_{k+۱,m} + ۲T_{k,m} + ۴^{m+۱}Q_{k+۱,m}\right]
\end{aligned} \qquad (**)$$

حال از روابط (*) و (**) می‌توان به استقراء نتیجه گرفت که وزن‌های معرفی $T_{k,m}$ ها مثبت‌اند و وزن‌های معرفی کننده $Q_{k,m}$ ها نامنفی هستند (چگونه؟). ■

۳. تعریف. *یک دنباله Q_n از فرمول‌های کوادراتور گفته می‌شود که همگرا است درصورتی که برای هر تابع پیوسته $f \in C[a,b]$ داشته باشیم*

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(f) = \int_a^b f(x)dx$$

۴. قضیه . *فرض کنید*

$$Q_n(f) = \sum_{k=۰}^{m_n} a_k^{(n)} f(x_k^{(n)})$$

یک دنباله از فرمول‌های کوادراتور باشد که برای هر چندجمله‌ای همگرا است و بعلاوه بطور یکشکل کراندار باشد، بدین معنی که ثابت $C > ۰$ موجود باشد که

$$\sum_{k=۰}^{m_n} |a_k^{(n)}| \le C \qquad (\forall n)$$

آنگاه دنباله Q_n از کوادراتورها همگرا است.

برهان. برای $f \in C[a,b]$، چندجمله‌ای p را برگزینید که

$$||f-p||_\infty \le \epsilon$$

حال N را اختیار کنید که

$$|Q_n(p) - Q(p)| \le \epsilon \qquad (\forall n \ge N)$$

(در اینجا برای چندجمله‌ای p منظور از $Q(p)$ همان $\int_a^b p(x)dx$ است). حال

$$|Q_n(f) - Q(f)| \le \sum_{k=۰}^{n} |a_k^{(n)}|\,|f(x_k^{(n)}) - p(x_k^{(n)})| + |Q_n(p) - Q(p)| + \int_a^b |p(x) - f(x)|dx$$

$$\le C\epsilon + \epsilon + (b-a)\epsilon = (C+b-a+۱)\epsilon$$

و این برای هر $n \ge N$ برقرار است. پس $Q_n(f) \to Q(f)$. ■

عکس قضیه بالا هم برقرار است: برای آن احتیاج به قضیه کاملاً شناخته شده زیر داریم که اثبات آن را در درس آنالیز حقیقی برایتان می‌گویند:

۵. قضیه . *(**قضیه کرانداری یکشکل**) فرض کنید $T_n \ : \ X \to Y$ یک دنباله از اپراتورهای خطی از فضای باناخ X به فضای نرمدار Y باشد. فرض کنید که این دنباله نقطه به نقطه کراندار باشد:*

$$\sup_{n=1,2,\ldots} \|T_n x\| < \infty \qquad (\forall x)$$

آنگاه این دنباله از اپراتورها بطور یکشکل کراندار است، بدین معنی که عدد C موجود است که برای هر n، $\|T_n\| \le C$. ■

حال نشان می‌دهیم که برای هر کوادراتور $Q(f) = \sum_{k=0}^m a_k f(x_k)$ داریم

$$\|Q\|_\infty = \sum_{k=0}^m |a_k|$$

در واقع برای هر $f \in C[a,b]$،

$$|Q(f)| \le \sum_{k=0}^m |a_k|\,|f(x_k)| \le \|f\|_\infty \sum_{k=0}^m |a_k|$$

چون این برای هر $f \in C[a,b]$ برقرار است، پس $\|Q\|_\infty \le \sum_{k=0}^m |a_k|$. از طرفی می‌توان تابع $f \in C[a,b]$ را یافت که اولاً $\|f\|_\infty = 1$ و در ثانی $f(x_k)a_k = |a_k|$. در واقع اگر $a_k = 0$ آنگاه بگیرید $f(x_k) = 1$ ولی اگر $a_k \neq 0$، آنگاه بگیرید $f(x_k) = \frac{|a_k|}{a_k}$. آنگاه برای این f داریم $\|Q\|_\infty \ge Q(f) = \sum_{k=0}^m a_k f(x_k) = \sum_{k=0}^m |a_k|$. از دو نامساوی بدست آمده ادعای $\|Q\|_\infty = \sum_{k=0}^m |a_k|$ ثابت می‌شود.

حال همه چیز آماده است که عکس قضیه بالا را ثابت کنیم: فرض کنید که Q_n یک دنباله همگرا از کوادراتورها روی $C[a,b]$ باشد. پس برای هر $f \in C[a,b]$، دنباله $\{Q_n(f)\}$ همگرا است. پس دنباله $Q_n \ : \ C[a,b] \to \mathbb{R}$ نقطه به نقطه کراندار است، پس باید که بطور یکشکل کراندار باشد، لذا Cای هست که برای هر n داریم $\|Q_n\|_\infty \le C$. پس $\sum_{k=0}^{m_n} |a_k^{(n)}| \le C$. و این عکس قضیه بالا است.

٦. نتیجه. **[Steklov]** فرض کنید که دنباله $\{Q_n\}$ از فرمول‌های کوادراتور برای هر چندجمله‌ای همگرا باشد و بعلاوه وزن‌ها همگی نامنفی باشند. آنگاه دنباله $\{Q_n\}$ همگرا است.

برهان. در واقع،

$$\sum_{k=0}^{m_n} |a_k^{(n)}| = \sum_{k=0}^{m_n} a_k^{(n)} = Q_n(1) \to \int_a^b dx = b-a \qquad , \ as \ n \to \infty$$

■

__مثال__ روش رامبرگ را برای تخمین زدن $\int_0^\pi \sin x\, dx$ (که مقدار واقعی آن ۲ است) بکار می‌بریم:

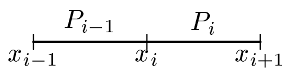
h	$R_{i,۱}$	$R_{i,۲}$	$R_{i,۳}$			
3.14159265	0.00000000					
1.57079633	1.57079633	2.09439510				
0.78539816	1.89611890	2.00455975	1.99857073			
0.39269908	1.97423160	2.00026917	1.99998313	2.00000555		
0.19634954	1.99357034	2.00001659	1.99999975	2.00000002	1.99999999	
0.09817477	1.99839336	2.00000103	2.00000000	2.00000000	2.00000000	2.00000000

۱. **تعریف.** *منظور از اسپلاین مکعبی روی افراز $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ تابعی است $S : [a,b] \to \mathbb{R}$ با این خواص:*

(الف) $S \in C^2[a,b]$، *یعنی S دارای مشتق مرتبه دوم پیوسته است.*

(ب) *بر هر زیربازه $[x_i, x_{i+1}]$، S با یک چندجمله‌ای در Π_3 مساوی است.*

پس اسپلاین مکعبی از یک سری چندجمله‌ای‌های درجه سوم تشکیل یافته که هر دو چندجمله‌ای مجاور P_{i-1} و P_i (یعنی دو تایی که بر روی بازه‌های $[x_{i-1}, x_i]$ و $[x_i, x_{i+1}]$ تعریف شده‌اند) در گره‌های x_i خود و مشتقات اول و دوم‌شان مساوی هستند.



$$\begin{cases} P_{i-1}(x_i) = P_i(x_i) \\ P'_{i-1}(x_i^-) = P'_i(x_i^+) \\ P''_{i-1}(x_i^-) = P''_i(x_i^+) \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n-1 \qquad (1)$$

حال $n+1$ عدد $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ را در نظر بگیرید. منظور از حل مسئله درون‌یابی اسپلاینی در زوج‌های (x_i, y_i)، $(0 \le i \le n)$، یافتن اسپلاین مکعبی $S : [a,b] \to \mathbb{R}$ است که

$$S(x_i) = y_i \qquad i = 0, 1, \ldots, n \qquad (2)$$

برای حل این مسئله باید چندجمله‌ای P_i توصیف شده در (۱) را بیابیم که هر کدام ۴ ضریب برای تعیین شدن دارند. پس جمعاً $4n$ مجهول داریم. این در حالی است که تعداد شرایط گفته شده در (۱) برابر $3(n-1)$ و تعداد شرایط در (۲) برابر $n+1$ است که مجموعاً $4n-2$ شرط داریم. پس برای آنکه مسئله را بتوان به‌طور منحصر به فرد حل کرد احتیاج به ۲ شرط دیگر داریم. شرط‌های (a) و (b) و (c) هر کدام می‌توانند در این راه خدمت کنند:

(a $S''(a) = S''(b) = 0$

(b S متناوب باشد یعنی $S^{(k)}(a) = S^{(k)}(b)$ برای $k = 0, 1, 2$.

(c $S'(a)$ و $S'(b)$ مساوی مقادیر خاصی فرض شوند.

تبصره. توجه کنید که در (b) که در ظاهر تعداد قیدها $4n+1$ می‌شود، رابطه $S(a) = S(b)$ به معنی $y_0 = y_n$ است که اگر این شرط از ابتدا بر y ها برقرار بوده باشد آنگاه شرط $S(a) = S(b)$ چیز خاصی را

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

به‌دست نمی‌دهد و هنوز $۴n$ قید داریم، و اگر $y_n = y_۰$ از ابتدا برقرار نبوده باشد آنگاه مسئله اسپلاین فاقد جواب است.

حال در صدد آن هستیم که نشان دهیم که تحت هر یک از این شرایط، اسپلاین مکعبی منحصر به فردی وجود دارد که در این شرایط صدق می‌کند. قبل از آن تعریف زیر را می آوریم:

۲. تعریف. *تابع $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ گفته می‌شود که بر $[a,b]$ مطلقاً پیوسته است هرگاه برای هر $\varepsilon > ۰$ بتوان $\delta > ۰$ یافت که برای هر تعداد $\{(c_i,d_i)\}_{i=۱}^{n}$ از بازه‌های باز غیرمتقاطع در $[a,b]$، اگر $\sum_{i=۱}^{n} |c_i - d_i| < \delta$ آن‌گاه باشیم $\sum_{i=۱}^{n} |h(c_i) - h(d_i)| < \varepsilon$.*

توجه کنید که چنین تابعی به‌طور یکنواخت پیوسته فلذا پیوسته است. در درس آنالیز حقیقی موارد زیر را ثابت می‌کنند:

i) اگر $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ مطلقاً پیوسته باشد آنگاه h' بر $[a,b]$ تقریباً همه جا موجود است و $h' \in L^۱[a,b]$ و بعلاوه h تابع اولیه تابع h' است

$$h(x) - h(a) = \int_a^x h' \qquad (a \le x \le b)$$

ii) $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ مطلقاً پیوسته است اگر و تنها اگر تابع $g \in L^۱[a,b]$ موجود باشد که h تابع اولیه g باشد:

$$h(x) - h(a) = \int_a^x g$$

iii) گردایه توابع مطلقاً پیوسته تشکیل یک جبر از توابع می‌دهد، یعنی تحت ضرب اسکالر، جمع توابع و ضرب توابع بسته است.

نکته‌ای دیگر. اگر f و g توابعی مطلقاً پیوسته باشند آنگاه انتگرال جزء به جزء

$$\int_a^b f'g = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b fg'$$

معتبر است و انتگرال‌های هر دو طرف وجود دارند. در واقع چون g بر $[a,b]$ پیوسته است پس کران‌دار است مثلاً $|g| \le M$. از طرفی می‌دانیم $f' \in L^۱[a,b]$ (چراکه f مطلقاً پیوسته است). سپس $\int_a^b |f'g| \le M \int_a^b |f'| < \infty$. پس $f'g \in L^۱[a,b]$. مشابهاً $fg' \in L^۱[a,b]$. پس انتگرال‌ها هر دو موجودند. اما fg هم تابعی مطلقاً پیوسته است که در نقاطی که هر دوی f' و g' موجود باشند داریم $(fg)' = f'g + fg'$. پس

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b (fg)' = \int_a^b f'g + \int_a^b fg'$$

که فرمول انتگرال جزء به جزء را به‌دست می‌دهد.

حال، $\mathbb{R}$ ــ فضای برداری $K^{۲}[a,b]$ متشکل از توابع $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید که f' بر $[a,b]$ مطلقاً پیوسته است و f'' بر $[a,b]$ تقریباً همه‌جا موجود است و داریم $f'' \in L^{۲}[a,b]$، یعنی $\int_a^b |f''(x)|^{۲} dx < \infty$. اگر برای $f, g \in K^{۲}[a,b]$ تعریف کنیم

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f''(x) g''(x) dx$$

آنگاه یک شبه ضرب داخلی خواهیم داشت، یعنی خواص ضرب داخلی را دارد به استثنای اینکه از $\langle f, f\rangle = ۰$ نتیجه نمی‌شود که $f = ۰$. برای مثال تابع ناصفر $f(x) = x$ در $\langle f, f\rangle = ۰$ صدق می‌کند. تابع $f \in K^{۲}[a,b]$ متناوب خوانده می‌شود هرگاه $\begin{cases} f(a) = f(b) \\ f'(a) = f'(b) \end{cases}$.

برای یک شبه ضرب داخلی $\langle\ ,\ \rangle$ بر روی یک فضای برداری V اگر شبه نرم را تعریف کنیم $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ آنگاه هنوز هم داریم

$$\|u \pm v\|^{۲} = \|u\| \pm ۲\langle u, v\rangle + \|v\|^{۲}$$

و اگر فضای برداری بر روی اعداد مختلط باشد آنگاه

$$\|u \pm v\|^{۲} = \|u\|^{۲} \pm ۲\,\mathrm{Re}\langle u, v\rangle + \|v\|^{۲}$$

نکته دیگر آنکه هر اسپلاین S (متناظر با افراز $x_{۰} < x_{۱} < \cdots < x_n$) ضرورتاً در $K^{۲}[a,b]$ است چراکه S'' پیوسته است

۳. قضیه (Holladay) . *فرض کنیم $f \in K^{۲}[a,b]$ و فرض کنیم S اسپلاینی متناظر با یک افراز $x_{۰} < x_{۱} < \cdots < x_n$ باشد. آنگاه با شبه نرم تعریف شده بر $K^{۲}[a,b]$ داریم*

$$\|f - S\|^{۲} = \|f\|^{۲} - \|S\|^{۲} - ۲\Big[(f' - S')S''\Big]_a^b + ۲\sum_{i=۱}^{n}\Big[(f - S)S'''\Big]_{x_{i-۱}^{+}}^{x_i^{-}}$$

برهان. بر هر بازه $[x_{i-۱}, x_i]$ تابع S با یک چندجمله‌ای درجه ۳ بنام P مساوی است، لذا برای هر زیر بازه $[x_{i-۱} + \varepsilon\,,\, x_i - \varepsilon]$ از آن داریم $S^{(۴)} \equiv ۰$. حال با دوبار به‌کار بردن انتگرال جزء به جزء:

$$\int_{x_{i-۱}+\varepsilon}^{x_i - \varepsilon} (f'' - S'')S'' = \Big[(f' - S')S''\Big]_{x_{i-۱}+\varepsilon}^{x_i-\varepsilon} - \int_{x_{i-۱}+\varepsilon}^{x_i-\varepsilon} (f' - S')S'''$$

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

$$= \Big[(f'-S')S''\Big]_{x_{i-1}+\varepsilon}^{x_i-\varepsilon} - \Big[(f-S)S'''\Big]_{x_{i-1}+\varepsilon}^{x_i-\varepsilon} + \int_{x_{i-1}+\varepsilon}^{x_i-\varepsilon} (f-S)S^{(4)}$$
$$= \Big[(f'-S')S''\Big]_{x_{i-1}+\varepsilon}^{x_i-\varepsilon} - \Big[(f-S)S'''\Big]_{x_{i-1}+\varepsilon}^{x_i-\varepsilon}$$

حال اجازه دهید $\varepsilon \to 0$ و از پیوستگی توابع f و S و f' و S' و f'' و S'' استفاده کنید تا به‌دست آورید:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (f''-S'')S'' = \Big[(f'-S')S''\Big]_{x_{i-1}}^{x_i} - \Big[(f-S)S'''\Big]_{x_{i-1}^+}^{x_i^-}$$

حال این مقادیر را برای $i = 1, \dots, n$ جمع کنید:

$$\int_a^b (f''-S'')S'' = \Big[(f'-S')S''\Big]_a^b - \sum_{i=1}^n \Big[(f-S)S'''\Big]_{x_{i-1}^+}^{x_i^-}$$

یعنی در ضرب داخلی که بر $K^2[a,b]$ تعریف شده داریم

$$\langle f-S, S\rangle = \Big[(f'-S')S''\Big]_a^b - \sum_{i=1}^n \Big[(f-S)S'''\Big]_{x_{i-1}^+}^{x_i^-}$$

حال با توجه به این تساوی می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\|f-S\|^2 &= \|f\|^2 + \|S\|^2 - 2\langle f, S\rangle \\
&= \|f\|^2 - \|S\|^2 - 2\langle f-S, S\rangle \\
&= \|f\|^2 - \|S\|^2 - 2\Big[(f'-S')S''\Big]_a^b + 2\sum_{i=1}^n \Big[(f-S)S'''\Big]_{x_{i-1}^+}^{x_i^-}
\end{aligned}$$

که مورد نظر بود. ■

قضیه زیر خاصیت می‌نیمالی از توابع اسپلاین را در بین تمامی توابع در $K^2[a,b]$ به‌دست می‌دهد:

۴. قضیه . *فرض کنیم $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ افرازی از $[a,b]$ باشد. تابع f از $K^2[a,b]$ را مفروض گرفته و فرض کنید که اسپلاین S متناظر با افراز، نقاط $(x_0, f(x_0))$ و ... و $(x_n, f(x_n))$ را درون‌یابی کند. آنگاه تحت هر یک از سه شرط زیر داریم*

$$\|f-S\|^2 = \|f\|^2 - \|S\|^2$$

و درنتیجه $\|S\| \le \|f\|$.

اما سه شرط

a) $S''(a) = S''(b) = 0$ *(اسپلاین طبیعی)*

b) f و S *هر دو تناوبی باشند یعنی*

$$\begin{cases} f(a) = f(b) \\ f'(a) = f'(b) \end{cases} \qquad \begin{cases} S(a) = S(b) \\ S'(a) = S'(b) \\ S''(a) = S''(b) \end{cases}$$

c) $\begin{cases} f'(a) = S'(a) \\ f'(b) = S'(b) \end{cases}$

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

برهان. ابتدا توجه کنید که تحت شرط درون‌یابی داریم

$$\sum_{i=1}^{n}\Big[(f-S)S'''\Big]_{x_{i-1}^{+}}^{x_i^{-}} = \sum_{i=1}^{n}\Big[\big(f(x_i)-S(x_i)\big)S'''(x_i^{-}) - \big(f(x_{i-1})-S(x_{i-1})\big)S'''(x_{i-1}^{+})\Big) = 0$$

همچنین پرواضح است که تحت شرط‌های (a) و (c) عبارت $\Big[(f'-S')S''\Big]_a^b$ صفر است. این عبارت تحت (b) نیز مساوی صفر است چرا که تحت آن شرط:

$$\begin{aligned}\Big[(f'-S')S''\Big]_a^b &= \big(f'(b)-S'(b)\big)S''(b) - \big(f'(a)-S'(a)\big)S''(a)\\ &= \big(f'(b)-S'(b)\big)S''(a) - \big(f'(a)-S'(a)\big)S''(a)\\ &= \big(f'(b)-S'(b)-f'(a)+S'(a)\big)S''(a)\\ &= 0\end{aligned}$$

پس تحت هر یک از سه شرط (a) و(b) و (c) دو عبارت آخر در تساوی Holladay مساوی صفر است، پس آن تساوی به شکل $||f-S||^2 = ||f||^2 - ||S||^2$ در می‌آید. ■

۵. نتیجه. برای افراز $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ و مقادیر مفروض $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ و y'_0 و y'_n، حدکثر یک تابع اسپلاین مکعبی متناظر با افراز موجود است که نقاط (x_0, y_0) و ... و (x_n, y_n) را درون‌یابی می‌کند و دریکی از شرایط زیر صدق می‌کند:

a) $S''(a) = S''(b) = 0$

b) S متناوب است.

c) $S'(a) = y'_0$ و $S'(b) = y'_n$.

[حداکثر یکی موجود است که در (a) صدق کند، حداکثر یکی موجود است که در (b) صدق کند، حداکثر یکی موجود است که در (c) صدق کند]

برهان. چه اگر S_1 و S_2 دو تابع اسپلاین باشند که هر دو در (a) یا هر دو در (b) یا هر دو در (c) صدق کنند، آنگاه قضیه بالا را یکبار برای $f = S_1$ و یکبار برای $f = S_2$ بکار برید تا به‌دست آید $||S_2|| \geq ||S_1||$ و $||S_1|| \geq ||S_2||$. از آنجا $||S_1|| = ||S_2||$. اما همچنین قضیه بالا می‌گوید که $||S_1 - S_2||^2 = ||S_1||^2 - ||S_2||^2$. پس لازم می‌آید که $||S_1 - S_2||^2 = 0$. یعنی $\int_a^b (S''_1 - S''_2)^2 = 0$. اما چون S''_1 و S''_2 توابعی پیوسته هستند، لازم می‌آید که $S''_1 - S''_2 = 0$. پس $S_1 - S_2$ باید چندجمله‌ای درجه اول باشد. اما چون $\begin{cases} S_1(a) - S_2(a) = 0 \\ S_1(b) - S_2(b) = 0 \end{cases}$، پس چندجمله‌ای درجه اول دو ریشه دارد لذا باید چندجمله‌ای صفر باشد. پس $S_1 = S_2$. ■

Created with
nitro PDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

حال به مسئله تخمین اسپلاین مکعبی می‌پردازیم. پس فرض کنیم S اسپلاینی مکعبی باشد متناظر با افراز $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ که درضمن

$$S(x_i) = y_i \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

قرار دهید

$$h_{j+1} = x_{j+1} - x_j \qquad (j = 0, 1, \ldots, n-1) \qquad (\text{طول بازه } j+1 \text{ ـ ام})$$

$$M_j = S''(x_j) \qquad (j = 0, 1, \ldots, n)$$

بر بازه $[x_j, x_{j+1}]$ تابع S مساوی یک چندجمله‌ای درجه ۳ است پس بر آن بازه S'' یک تابع خطی است. اما چون

$$\begin{cases} S''(x_j) = M_j \\ S''(x_{j+1}) = M_{j+1} \end{cases}$$

پس باید که

$$S''(x) = M_j \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} + M_{j+1} \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} \qquad (x_j \leq x \leq x_{j+1})$$

$$S''(x) = \frac{M_j}{h_{j+1}}(x_{j+1} - x) + \frac{M_{j+1}}{h_{j+1}}(x - x_j) \qquad (x_j \leq x \leq x_{j+1})$$

سپس با انتگرال‌گیری روی این بازه:

$$S'(x) = -\frac{M_j}{2h_{j+1}}(x_{j+1} - x)^2 + \frac{M_{j+1}}{2h_{j+1}}(x - x_j)^2 + A_j$$

$$S(x) = \frac{M_j}{6h_{j+1}}(x_{j+1} - x)^3 + \frac{M_{j+1}}{6h_{j+1}}(x - x_j)^3 + A_j(x - x_j) + B_j \qquad (x \in [x_j, x_{j+1}]) \qquad (3)$$

حال بر این تساوی شرطهای $S(x_j) = y_j$ و $S(x_{j+1}) = y_{j+1}$ را تحمیل کنید تا به‌دست آید:

$$\begin{cases} \dfrac{M_j h_{j+1}^2}{6} + B_j = y_j \\ \dfrac{M_{j+1} h_{j+1}^2}{6} + A_j h_{j+1} + B_j = y_{j+1} \end{cases}$$

با این دستگاه:

$$\begin{cases} A_j = \dfrac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} + \dfrac{h_{j+1}(M_j - M_{j+1})}{6} \\ B_j = y_j - \dfrac{M_j h_{j+1}^2}{6} \end{cases} \qquad (4)$$

اما توجه کنید که

$$\begin{aligned} \frac{M_j}{6h_{j+1}}(x_{j+1} - x)^3 &= \frac{M_j}{6h_{j+1}}(h_{j+1} - (x - x_j))^3 \\ &= \frac{M_j}{6h_{j+1}}(h_{j+1}^3 - 3h_{j+1}^2(x - x_j) + 3h_{j+1}(x - x_j)^2 - (x - x_j)^3) \\ &= \frac{M_j h_{j+1}^2}{6} - \frac{M_j h_{j+1}}{2}(x - x_j) + \frac{M_j}{2}(x - x_j)^2 - \frac{M_j}{6h_{j+1}}(x - x_j)^3 \end{aligned}$$

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

که اگر این را در (۳) جایگزین کنیم:

$$S(x)=\Big(B_j+\frac{M_jh_{j+1}^2}{6}\Big)+\Big(A_j-\frac{M_jh_{j+1}}{2}\Big)(x-x_j)+\frac{M_j}{2}(x-x_j)^2+\frac{(M_{j+1}-M_j)}{6h_{j+1}}(x-x_j)^3$$

$$S(x)=y_j+\Big(\frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}}-\frac{2M_j+M_{j+1}}{6}h_{j+1}\Big)(x-x_j)+\frac{M_j}{2}(x-x_j)^2+\frac{(M_{j+1}-M_j)}{6h_{j+1}}(x-x_j)^3$$

$$=\alpha_j+\beta_j(x-x_j)+\gamma_j(x-x_j)^2+\delta_j(x-x_j)^3 \qquad (x_j\le x\le x_{j+1})$$

توجه کنید اگر M_j ها مشخص شوند آنگاه S کاملاً مشخص خواهد شد.

با مشتق‌گیری:

$$S'(x)=\beta_j+2\gamma_j(x-x_j)+3\delta_j(x-x_j)^2 \qquad (x_j\le x\le x_{j+1})$$

مشابهاً

$$S'(x)=\beta_{j-1}+2\gamma_{j-1}(x-x_{j-1})+3\delta_{j-1}(x-x_{j-1})^2 \qquad (x_{j-1}\le x\le x_j)$$

اما محاسبه $S'(x_j)$ از هر دو روش باید منجر به یک مقدار شود، پس

$$\beta_j=\beta_{j-1}+2\gamma_{j-1}(x_j-x_{j-1})+3\delta_{j-1}(x_j-x_{j-1})^2 \qquad (x_j\le x\le x_{j+1})$$

یعنی باید که

$$\frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}}-\frac{(2M_j+M_{j+1})h_{j+1}}{6}=\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j}-\frac{(2M_{j-1}+M_j)h_j}{6}+M_{j-1}h_j+\frac{(M_j-M_{j-1})h_j}{2}$$

که با جابه‌جا کردن این مقادیر:

$$\frac{h_j}{6}M_{j-1}+\frac{h_j+h_{j+1}}{3}M_j+\frac{h_{j+1}}{6}M_{j+1}=\frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}}-\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j} \qquad (1\le j\le n-1)$$

اینها $n-1$ معادله برحسب $n+1$ مجهول M_j هستند. احتیاج به دو معادله دیگر برحسب M_j ها داریم.

این معادلات را در مقدار $\dfrac{6}{h_j+h_{j+1}}$ ضرب کنید:

$$\frac{h_j}{h_j+h_{j+1}}M_{j-1}+2M_j+\frac{h_{j+1}}{h_j+h_{j+1}}M_{j+1}=\frac{6}{h_j+h_{j+1}}\Big(\frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}}-\frac{y_j-y_{i-1}}{h_j}\Big)$$

که با نمادگذاری

$$\begin{cases}\mu_j=\dfrac{h_j}{h_j+h_{j+1}}\\[2mm] \lambda_j=\dfrac{h_{j+1}}{h_j+h_{j+1}} & \qquad j=1,\dots,n-1\\[2mm] d_j=\dfrac{6}{h_j+h_{j+1}}\Big(\dfrac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}}-\dfrac{y_j-y_{i-1}}{h_j}\Big)\end{cases}$$

بدین شکل است

$$\mu_jM_{j-1}+2M_j+\lambda_jM_{j+1}=d_j \qquad (j=1,\dots,n-1) \qquad (5)$$

توجه داریم که $\lambda_j+\mu_j=1$.

حال حالت‌های (a) و (b) و (c) را مطالعه می‌کنیم:

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

درحالت (a) داریم $S''(x_0)=S''(x_n)=0$، یعنی $M_0=M_n=0$. این دو همراه با معادلات (۵) بدین شکل نوشته می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \vdots \\ 0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

در حالت (c) داریم $S'(x_0)=y'_0$ و $S'(x_n)=y'_n$، یعنی دو رابطه زیر را داریم (از تساوی که S' را به‌دست می‌داد)

$$\begin{cases} \beta_0 = y'_0 \\ \beta_{n-1} + 2\gamma_{n-1}(x_n - x_{n-1}) + 3\delta_{n-1}(x_n - x_{n-1})^2 = y'_n \end{cases}$$

که ترجمه می‌شوند به

$$\begin{cases} \dfrac{y_1 - y_0}{h_1} - \dfrac{2M_0 + M_1}{6} h_1 = y'_0 \\ \left(\dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \dfrac{(2M_{n-1} + M_n)h_n}{6}\right) + M_{n-1}h_n + \dfrac{(M_n - M_{n-1})h_n}{2} = y'_n \end{cases}$$

معادلاً

$$\begin{cases} 2M_0 + M_1 = \dfrac{6}{h_1}\left(\dfrac{y_1 - y_0}{h_1} - y'_0\right) \\ M_{n-1} + 2M_n = \dfrac{6}{h_n}\left(y'_n - \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_n}\right) \end{cases}$$

که این دو همراه با معادلات (۵) بدین شکل هستند

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \vdots \\ 0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

که در آن $d_0 = \dfrac{6}{h_1}\left(\dfrac{y_1 - y_0}{h_1} - y'_0\right)$ و $d_n = \dfrac{6}{h_n}\left(y'_n - \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_n}\right)$.

ماتریس‌های ضرایب در حالت‌های (a) و (c) به شکل زیر هستند؛

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \vdots \\ 0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mu_n & 2 \end{bmatrix}$$

که در آن $\lambda_j + \mu_j = 1$ $(0 \le j \le n)$ (توجه کنید که در حالت (a) قرار داده‌ایم $\lambda_0 = 0$ و $\mu_0 = 1$ و $\lambda_n = 1$ و $\mu_n = 0$ در حالی که در حال (c) قرار داده‌ایم $\lambda_0 = 1$ و $\mu_0 = 0$ و $\lambda_n = 0$ و $\mu_n = 1$). در پایان خواهیم دید که چنین ماتریسی وارون‌پذیر است فلذا دستگاه‌های بالا جواب دارند و M_j ها تعیین

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

می‌شوند. حال برگردیم به حالت (b). در آن حالت فرض می‌شود که

$$\begin{cases} S(x_0) = S(x_n) \\ S'(x_0) = S'(x_n) \\ S''(x_0) = S''(x_n) \end{cases}$$

پس در این حالت از ابتدا می‌بایست فرض کنیم $y_0 = y_n$ و درثانی باید داشته باشیم

$$\begin{cases} S'(x_0) = S'(x_n) \\ S''(x_0) = S''(x_n) \end{cases}$$

معادلاً

$$\begin{cases} \beta_0 = \beta_{n-1} + 2\gamma_{n-1}(x_n - x_{n-1}) + 3\delta_{n-1}(x_n - x_{n-1})^2 \\ M_0 = M_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{(2M_0 + M_1)h_1}{6} = \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \frac{(2M_{n-1} + M_n)h_n}{6} + M_{n-1}h_n \\ \qquad + \frac{(M_n - M_{n-1})h_n}{2} \\ M_0 = M_n \end{cases} \tag{6}$$

که اگر M_0 را از بحث‌ها حذف کرده و به جای آن M_n قرار دهیم آنگاه اولین معادله در (۵) که عبارت است از

$$\mu_1 M_0 + 2M_1 + \lambda_1 M_2 = d_1$$

تبدیل می‌شود به

$$\mu_1 M_n + 2M_1 + \lambda_1 M_2 = d_1 \tag{7}$$

همچنین معادله اول در (۶) تبدیل می‌شود به

$$\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{(2M_n + M_1)h_1}{6} = \text{طرف دوم}$$

که این معادله ساده می‌شود به

$$\lambda_n M_1 + \mu_n M_{n-1} + 2M_n = d_n \tag{8}$$

که در آن $\lambda_n = \frac{h_1}{h_n + h_1}$ و $\mu_n = \frac{h_n}{h_n + h_1}$ و $d_n = \frac{6}{h_n + h_1}\left(\frac{y_1 - y_n}{h_1} - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}\right)$.

معادلات (۷) و (۸) و معادلات (۵) برای $j = 2, \dots, n-1$ بدین صورت نوشته می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

در قضیه‌ای در پایین ثابت می‌شود که چنین ماتریسی وارون‌پذیر است.

---

۶. قضیه . *ماتریس‌های ضرایب که در دستگاه‌های بالا توصیف شدند واون‌پذیراند.*

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

برهان. به‌عنوان مثال ثابت می‌کنیم که ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & \lambda_۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ \mu_۱ & ۲ & \lambda_۱ & & \vdots \\ ۰ & \ddots & \ddots & \ddots & ۰ \\ \vdots & & \mu_{n-۱} & ۲ & \lambda_{n-۱} \\ ۰ & \cdots & ۰ & \mu_n & ۲ \end{bmatrix}$$

وارون‌پذیر است که در آن $\begin{cases} \lambda_i + \mu_i = ۱ \\ \lambda_i \geq ۰ \quad \text{و} \quad \mu_i \geq ۰ \end{cases}$ $(۰ \leq i \leq n)$ (این ماتریس تحت شرایط (a)و (c) به‌دست آمد). دستگاه‌های متناظر با این ماتریس را به‌صورت $Az = w$ تلقی کنید. برای $z = \begin{bmatrix} z_۰ \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$ و $w = \begin{bmatrix} w_۰ \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$، r ای اختیار کنید که $|z_r| = \max\limits_i |z_i|$. با قرار داد $z_{-۱} = z_{n+۱} = ۰$ داریم

$$\mu_r z_{r-۱} + ۲z_r + \lambda_r z_{r+۱} = w_r$$

پس

$$\begin{aligned} \max_i |w_i| \geq |w_r| &\geq ۲|z_r| - \mu_r|z_{r-۱}| - \lambda_r|z_{r+۱}| \\ &\geq ۲|z_r| - \mu_r|z_r| - \lambda_r|z_r| \\ &= (۲ - \mu_r - \lambda_r)|z_r| \\ &= |z_r| \\ &= \max_i |z_i| \end{aligned}$$

حال اگر قرار می‌بود که وارون ماتریس A وجود نداشته باشد آنگاه $z \neq ۰$ ای وجود می‌داشت که $w = ۰$.
این متناقض با نامساوی بالاست. ■

همگرائی اسپلاین مکعبی

در حالت کلی، چندجمله‌ای‌های درونیاب ممکن است که به تابع f میل نکند (تحت همگرایی یکشکل بر $[a, b]$). اما با قدری شرایط اضافی خواهیم دید که اسپلاین‌های مکعبی به f میل می‌کنند. فعلاً این کار را در مورد مشتقات دوم انجام می‌دهیم: فرض کنید، برای افراز Δ، اسپلاین S را داریم و مثل قبل

$$M_j = S''(x_j) \qquad (j = ۰, ۱, \ldots, n)$$

$$M = \begin{bmatrix} M_۰ \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad d = \begin{bmatrix} d_۰ \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

فرض می‌کنیم که $\begin{cases} S'(a) = f'(a) \\ S'(b) = f'(b) \end{cases}$ (پس در شرط (c) قرار دادیم).

داشتیم $AM = d$. برای تابع f هم قرار دهید

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

$$F=\begin{bmatrix} f''(x_0)\\ \vdots \\ f''(x_n)\end{bmatrix}$$

بالاخره قرار دهید $\|\Delta\|=\max\limits_{j}|x_{j+1}-x_j|$ و $r=A(M-F)=d-AF$.

حکم. با نمادها و قراردادهای بالا اگر $f\in C^4[a,b]$ و $|f^{(4)}|\le L$، آنگاه

$$\|M-F\|\le\|A(M-F)\|\le\frac{3}{4}L\|\Delta\|^2$$

که در آن منظور از $\|\cdot\|$ نرم $\|\cdot\|_\infty$ است.

برهان. تحت شرط (c) ماتریس A بدین شکل است:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \vdots\\ 0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1}\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

پس

$$r=\begin{bmatrix} d_0\\ d_1\\ \vdots\\ d_{n-1}\\ d_n\end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2f''(x_0)+f''(x_1)\\ \mu_1 f''(x_0)-2f''(x_1)+\lambda_1 f''(x_2)\\ \vdots\\ \mu_{n-1}f''(x_{n-2})+2f''(x_{n-1})+\lambda_{n-1}f''(x_n)\\ f''(x_{n-1})+2f''(x_n)\end{bmatrix}$$

پس

$$\begin{aligned} r_0&=\frac{6}{h_1}\Big(\frac{y_1-y_0}{h_1}-y'_0\Big)-2f''(x_0)-f''(x_1)\\ &=\frac{6}{h_1}\Big(\frac{f(x_1)-f(x_0)}{h_1}-f'(x_0)\Big)-2f''(x_0)-f''(x_1)\\ &=\frac{6}{h_1}\Big(\frac{h_1}{2}f''(x_0)+\frac{h_1^2}{6}f'''(x_0)+\frac{h_1^3}{24}f^{(4)}(\tau_1)\Big)\\ &\quad-2f''(x_0)-\Big(f''(x_0)+h_1f'''(x_0)+\frac{h_1^2}{2}f^{(4)}(\tau_2)\Big) \qquad \text{(بسط تیلور)}\\ &=\frac{h_1^2}{4}f^{(4)}(\tau_1)-\frac{h_1^2}{2}f^{(4)}(\tau_2)\end{aligned}$$

که در آن $\tau_1,\tau_2\in[x_0,x_1]$. لذا

$$|r_0|\le\frac{3}{4}L\|\Delta\|^2$$

به‌طریقی مشابه از $r_n=d_n-f''(x_{n-1})-2f''(x_n)$ و شکلی که d_n در فرض (c) دارد نتیجه می‌شود

$$|r_n|\le\frac{3}{4}L\|\Delta\|^2$$

حال فرض کنید $1\le j\le n-1$. آنگاه

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

$$r_j = d_j - \mu_j f''(x_{j-1}) - 2f''(x_j) - \lambda_j f''(x_{j+1})$$
$$= \frac{6}{h_j + h_{j+1}}\left(\frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j}\right) - \frac{h_j}{h_j + h_{j+1}} f''(x_{j-1}) - 2f''(x_j) - \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}} f''(x_{j+1})$$

که با بکار بدن بسط تیلور حول x_j، این مقدار مساوی است با

$$\begin{aligned} r_j = \frac{1}{h_j + h_{j+1}}\Bigg(6\Big(f'(x_j) + \frac{h_{j+1}}{2} f''(x_j) + \frac{h_{j+1}^2}{6} f'''(x_j) + \frac{h_{j+1}^3}{24} f^{(4)}(\tau_1) - f'(x_j) + \frac{h_j}{2} f''(x_j) \\ - \frac{h_j^2}{6} f'''(x_j) + \frac{h_j^3}{24} f^{(4)}(\tau_2)\Big) - h_j\Big(f''(x_j) - h_j f'''(x_j) + \frac{h_j^2}{2} f^{(4)}(\tau_3)\Big) \\ - 2f''(x_j)(h_j + h_{j+1}) - h_{j+1}\Big(f''(x_j) + h_{j+1} f'''(x_j) + \frac{h_{j+1}^2}{2} f^{(4)}(\tau_4)\Big)\Bigg) \\ = \frac{1}{h_j + h_{j+1}}\left(\frac{h_{j+1}^3}{4} f^{(4)}(\tau_1) + \frac{h_j^3}{4} f^{(4)}(\tau_2) - \frac{h_j^3}{2} f^{(4)}(\tau_3) - \frac{h_{j+1}^3}{2} f^{(4)}(\tau_4)\right) \end{aligned}$$

که در آن $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4 \in [x_{j-1}, x_{j+1}]$. لذا

$$|r_j| \le \frac{3}{4} L \frac{1}{h_j + h_{j+1}} (h_{j+1}^3 + h_j^3) \qquad (9)$$

اما توجه کنیم که با قرار دادن $u = \min(h_j, h_{j+1})$ و $v = \max(h_j, h_{j+1})$ داریم

$$\frac{1}{h_j + h_{j+1}} (h_{j+1}^3 + h_j^3) = h_{j+1}^2 + h_j^2 - h_j h_{j+1} \le u^2 + v^2 - u^2 = v^2 \le \|\Delta\|^2$$

لذا در ادامه (۹) می‌توان نوشت:

$$|r_j| \le \frac{3}{4} L \|\Delta\|^2 \qquad (j = 1, \dots, n-1)$$

و لذا این نامساوی برای هر $j = 0, 1, \dots, n$ برقرار است چه قبلاً برای $j = 0, n$ هم ثابت شده است. از طرفی در قضیه‌ای که وارون‌پذیری ماتریس A ثابت شد دیدیم که برای z و w ای که در روابط $Az = w$ صدق کنند داریم $\max_i |z_i| \le \max_i |w_i|$. اما چون $r = A(M - F)$ پس $\max_i |M_i - F_i| \le \max_i |r_i|$. لذا

$$\|M - F\|_\infty \le \|r\|_\infty \le \frac{3}{4} L \|\Delta\|^2. \qquad \blacksquare$$

۷. قضیه . *فرض کنید $f \in C^4[a\,,\,b]$ و $|f^{(4)}| \le L$ بر $[a\,,\,b]$. برای افراز Δ فرض کنید عدد K چنان در دسترس است که*

$$\frac{\|\Delta\|}{|x_{j+1} - x_j|} \le K \qquad (for\ j = 0, \dots, n-1)$$

فرض کنید S تابع اسپلان مکعبی باشد که مقادیر تابع را در گره‌های $\{x_0, \dots, x_n\}$ درونیابی کند و بعلاوه $S'(x) = f'(x)$ برای $x = a, b$. آنگاه ثابت $C \le 2$ موجود است که

$$|f^{(k)} - S^{(k)}| \le C\, L\, K\, \|\Delta\|^{4-k} \qquad (k = 0, 1, 2, 3)$$

برهان. ابتدا آن را برای $k = 3$ انجام می‌دهیم.

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

توجه داریم که S''' بر $[x_{j-۱}, x_j]$ تابع ثابت است. در واقع با توجه به رابطه زیر (که قبلاً داشتیم)

$$S''(x) = M_{j-۱}\frac{x_j - x}{x_j - x_{j-۱}} + M_j\frac{x - x_{j-۱}}{x_j - x_{j-۱}} \qquad (x_{j-۱} \le x \le x_j)$$

$$S'''(x) = \frac{M_j - M_{j-۱}}{h_j}$$

پس

$$\begin{aligned} S'''(x) - f'''(x) &= \tfrac{M_j - M_{j-۱}}{h_j} - f'''(x) \\ &= \tfrac{M_j - f''(x_j)}{h_j} - \tfrac{M_{j-۱} - f''(x_{j-۱})}{h_j} + \tfrac{f''(x_j) - f''(x) - [f''(x_{j-۱}) - f''(x)]}{h_j} - f'''(x) \end{aligned} \qquad (x_{j-۱} \le x \le x_j) \qquad (*)$$

اما بنا به قضیه قبل، فاکتورهای $\frac{M_j - f''(x_j)}{h_j}$ و $\frac{M_{j-۱} - f''(x_{j-۱})}{h_j}$ از حیث قدر مطلق حداکثر به اندازه $\frac{۳}{۴}L\frac{\|\Delta\|^۲}{h_j}$ می‌باشند. حال با نوشتن بسط تیلور حول نقطه x:

$$\begin{cases} f''(x_j) - f''(x) = f'''(x)(x_j - x) + \frac{(x_j - x)^۲}{۲} f^{(۴)}(\eta_۱) \\ f''(x_{j-۱}) - f''(x) = f'''(x)(x_{j-۱} - x) + \frac{(x_{j-۱} - x)^۲}{۲} f^{(۴)}(\eta_۲) \end{cases}$$

فلذا

$$\left|\frac{f''(x_j) - f''(x) - [f''(x_{j-۱}) - f''(x)]}{h_j} - f'''(x)\right| = \frac{۱}{h_j}\left|\frac{(x_j - x)^۲}{۲} f^{(۴)}(\eta_۱) - \frac{(x_{j-۱} - x)^۲}{۲} f^{(۴)}(\eta_۲)\right| \le \frac{L\,\|\Delta\|^۲}{۲h_j}$$

با توجه به این جزییات و با توجه به تساوی $(*)$ می‌توان نوشت:

$$|S'''(x) - f'''(x)| \le \frac{۳}{۲}L\frac{\|\Delta\|^۲}{h_j} + \frac{L}{۲}\frac{\|\Delta\|^۲}{h_j} \qquad (x_{j-۱} \le x \le x_j)$$

اما بر طبق فرض داریم $\frac{\|\Delta\|}{h_j} \le K$. پس

$$|S'''(x) - f'''(x)| \le ۲LK\|\Delta\| \qquad (\forall x)$$

پس حکم برای $k = ۳$ بر قرار است. حال آن را برای $k = ۲$ انجام می‌دهیم. توجه کنید که برای هر $x \in (a, b)$ گره x_j وجود دارد که $|x_j - x| \le \frac{۱}{۲}\|\Delta\|$. حال برای این x بنویسید

$$f''(x) - S''(x) = f''(x_j) - S''(x_j) + \int_{x_j}^{x}(f''' - S''') \qquad (***)$$

اما بنا به حالت $k = ۳$ (که برقراری آن در بالا ثابت گردید)،

$$\left|\int_{x_j}^{x}(f''' - S''')\right| \le ۲LK\,\|\Delta\|\,|x - x_j| \le LK\,\|\Delta\|^۲$$

پس در ادامه $(***)$ (و با توجه به حکم قبل)،

$$|f''(x) - S''(x)| \le \frac{۳}{۴}L\,\|\Delta\|^۲ + LK\|\Delta\|^۲ \le \frac{۷}{۴}LK\,\|\Delta\|^۲ \qquad (as\ K \ge ۱)$$

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

حال حالت $k = ۱$ را ثابت می‌کنیم: با استفاده از قضیه رُل و با توجه به $\begin{cases} f(x_{j-۱}) &= S(x_{j-۱}) \\ f(x_j) &= S(x_j) \end{cases}$، در هر یک از بازه‌های $(x_{j-۱}\,,\,x_j)$ $(j = ۱, \ldots, n)$ نقطه ξ_j موجود است که $f'(\xi_j) = S'(\xi_j)$. البته این تساوی را در نقاط انتهایی $\xi_\circ = a$ و $\xi_{n+۱} = b$ جزو فرض قضیه داشته‌ایم، پس

$$f'(\xi_j) = S'(\xi_j) \qquad (j = \circ, \ldots, n+۱)$$

حال برای هر $x \in [a\,,\,b]$ نزدیکترین نقطه ξ_j را به x اختیار کنید. پس $|\xi_j - x| < \|\Delta\|$؛ سپس برای همین x:

$$f'(x) - S'(x) = \int_{\xi_j}^{x} (f'' - S'')$$

حال با توجه به برقراری حالت $k = ۲$:

$$|f'(x) - S'(x)| \leq |x - \xi_j| \frac{۷}{۴} LK \|\Delta\|^{۲} < \frac{۷}{۴} LK \|\Delta\|^{۳}$$

و این حکم را برای $k = ۱$ ثابت می‌کند. بالاخره برای $\mathrm{K} = 0$:

برای هر x نزدیکترین گره x_j را به آن اختیار کنید و سپس بنویسید

$$f(x) - S(x) = \int_{x_j}^{x} (f' - S')$$

و با توجه به حالت $k = ۱$ برای همین x داریم

$$|f(x) - S(x)| \leq \frac{۷}{۴} LK \|\Delta\|^{۳} \times \frac{۱}{۲} \|\Delta\| = \frac{۷}{۸} LK \|\Delta\|^{۴}$$

اثبات کامل است. ■

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

درونیابی به وسیله چندجمله‌ای‌های مثلثاتی،

و تبدیل فوریه سریع

۱. قضیه . *هدف از این بخش آن است که توابع تناوبی*

$$f(t+T)=f(t) \qquad t\in\mathbb{R}$$

را درون‌یابی کنیم. معمولاً با دوره تناوب $T=2\pi$ کار می‌کنیم. برای این نوع توابع، درون‌یابی بوسیله چندجمله‌ای‌های جبری، که قبلاً برخورده‌ایم، مناسب نیستند چراکه چندجمله‌ای‌های جبری توابع تناوبی نیستند.

۲. تعریف. $\mathbb{C}$ *ـ فضای برداری کلیه چندجمله‌ای‌های*

$$p(t)=\sum_{k=0}^{n}a_k\cos kt+\sum_{k=1}^{n}b_k\sin kt$$

را به T_n نشان دهید (که در آن ضرایب مختلط هستند).

حکم. *هر عضو از T_n نمایشی به‌صورت*

$$p(t)=\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ikt} \qquad (c_k\in\mathbb{C})$$

دارد و بالعکس هر چنین چندجمله‌ای در T_n است.

برهان. برای رفتن از نمایش $\sum_{k=0}^{n}a_k\cos kt+\sum_{k=1}^{n}b_k\sin kt$ به نمایش $\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ikt}$ از روابط

$$\cos kt=\frac{e^{ikt}+e^{-ikt}}{2} \qquad \text{و} \qquad \sin kt=\frac{e^{ikt}-e^{-ikt}}{2i}$$

استفاده کنید و برای جهت عکس از روابط

$$\begin{cases} e^{ikt}=\cos kt+i\sin kt & (k\geq 0)\\ e^{ikt}=\cos(-kt)-i\sin(-kt) & (k<0)\end{cases}$$

استفاده کنید. ■

در صورت نوشتن اعضای T_n در نمایش سری فوریه

$$q(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)$$

و در نمایش مختلط آن

$$q(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$$

آنگاه رابطه بین ضرایب بدین صورت است

$$\begin{cases} c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \\ c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k) \end{cases} \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

که در آن $b_0 = 0$. در جهت عکس داریم

$$\begin{cases} a_k = c_k + c_{-k} \\ b_k = i(c_k - c_{-k}) \end{cases}$$

۳. قضیه . *اگر عضوی از T_n دارای بیش از $2n$ ریشه در $[0, 2\pi)$ باشد آنگاه چندجمله‌ای ثابت صفر است.*

برهان. اثبات را با نمایش تحت ضرایب c_k انجام می‌دهیم، اثباتی مشابه برای نمایش در ضرایب دیگر هم برقرار است.

فرض کنیم که چندجمله‌ای $p(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$ از T_n بیش از $2n$ ریشه در $[0, 2\pi)$ داشته باشد. قرار دهید $q(t) = e^{int}p(t)$ آنگاه

$$q(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i(k+n)t} = \sum_{k=0}^{2n} c_{k-n} e^{ikt} = \sum_{k=0}^{2n} d_k e^{ikt} \qquad (d_k = c_{k-n})$$

قرار دهید $h(z) = \sum_{k=0}^{2n} d_k z^k$. با رفتن از p به q و سپس به h و توجه به این نکته که نگاشت $t \mapsto e^{it} = z$ از $[0, 2\pi)$ به دایره واحد نگاشتی ۱ــ۱ به یک است معلوم می‌شود که h بیش از $2n$ ریشه روی دایره واحد دارد. پس باید چندجمله‌ای ثابت صفر باشد. لذا $d_k = 0$ $(k = 0, 1, \ldots, 2n)$ فلذا $c_k = 0$. $-n \le k \le n$. ■

قرارداد. نماد $C[a, b]$ *را برای فضای توابع مختلط پیوسته بر $[a, b]$ به‌کار می‌بریم*

۴. قضیه . *الف) توابع $\{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \ldots\}$ یک مجموعه مستقل خطی از اعضای $C[0, 2\pi]$ را تشکیل می‌دهند.*

ب) توابع $\{1, e^{it}, e^{-it}, e^{2it}, e^{-2it}, \ldots\}$ یک مجموعه مستقل خطی از اعضای $C[0, 2\pi]$ را تشکیل می‌دهند.

برهان. الف) کافی است نشان داده شود که برای هر n، $\{1, \cos t, \sin t, \ldots, \cos nt, \sin nt\}$ مجموعه‌ای

مستقل خطی است. ترکیبی از اینها را مساوی صفر قرار دهید:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cos kt + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kt = 0$$

پس چندجمله‌ای $p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kt + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kt$ از T_n بیش از $2n$ ریشه در $[0, 2\pi)$ دارد (در واقع در تمامی نقاط $[0, 2\pi)$ صفر است). پس از حکم قبل، این چندجمله‌ای صفر است، پس a_k ها و b_k ها همگی صفرند.

اثبات قسمت (ب) هم مشابهاً انجام می‌گیرد. ■

حال در صدد آن هستیم که چندجمله‌ای‌ها لاگرانژی در T_n بیابیم.

در واقع برای $2n + 1$ نقطه $t_0, t_1, \ldots, t_{2n}$ در $[0, 2\pi)$ چندجمله‌ای‌های

$$L_k(t) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{2n} \frac{\sin \frac{t - t_i}{2}}{\sin \frac{t_k - t_i}{2}} \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2n)$$

در T_n هستند و این خاصیت را دارند که

$$L_k(t_j) = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases}$$

<u>مسأله.</u> نشان دهید که *چندجمله‌ای‌های $L_k(t)$ در T_n هستند.*

۵. قضیه . *با در دست داشتن $2n + 1$ نقطه متمایز $\{t_0, t_1, \ldots, t_{2n}\}$ در $[0, 2\pi)$ و با داشتن اعداد $y_0, \ldots, y_{2n}$ (که لزومی ندارد متمایز باشند)، چندجمله‌ای منحصر به فرد $p \in T_n$ موجود است که*

$$p(t_j) = y_j \qquad (j = 0, 1, \ldots, 2n)$$

برهان. برای وجود کافی است بگیرید $p(t) = \sum_{k=0}^{2n} y_k L_k(t)$ که $L_k(t)$ ها چندجمله‌ای‌های لاگرانژ در T_n هستند. برای اثبات یکتایی، فرض کنید $q(t)$ از T_n هم همان خاصیت را داشته باشد. آنگاه چندجمله‌ای $p - q$ از T_n در بیش از $2n$ نقطه از $[0, 2\pi)$ صفر می‌گردد. پس $p - q = 0$. ■

---

۶. تعریف. *فرض کنید X یک فضای برداری (حقیقی یا مختلط) باشد. قرار دهید $K = \mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ (میدانی که X روی آن تعریف شده است). یک تابع $\|\cdot\| : X \to K$ را نرم می‌خوانند در صورتی که خواص زیر را داشته باشد:*

i) $0 \leq \|x\|$

ii) $\|x\| = 0$ *اگر و تنها اگر* $x = 0$

iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \quad (\forall \alpha \in K\ ,\ x \in X)$

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (iv

در صورت وجود یک نرم بر X می‌گوییم که X فضای نرمدار است.

مثال . *مثال‌هایی از نرم‌هایی بر $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{C}^n$ عبارتند از*

برای $x = (x_1, \cdots, x_n)$

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \quad \text{و} \quad \|x\|_2 = \Big(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \quad \text{و} \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leq j\leq n} |x_j|$$

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \qquad 1 \leq p < \infty$$

اینها را نرم‌های ℓ_1 و ℓ_2 و ℓ_∞ و ℓ_p می‌نامند.

تبصره. *نرم در رابطه زیر صدق می‌کند:*

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\|$$

چراکه

$$\|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|$$

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\| \qquad (1)$$

که با تعویض نقش x و y داریم

$$\|y\| - \|x\| \leq \|y-x\|$$

$$\|y\| - \|x\| \leq \|x-y\| \qquad (2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود.

۷. تعریف. *دنباله $\{x_n\}$ در فضای نرمدار X گفته می‌شود که به نقطه $x \in X$ همگرا است هرگاه $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$، یعنی دنباله حقیقی $\{\|x_n - x\|\}$ به صفر بگراید. در این صورت می‌نویسیم $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ و یا می‌نویسیم $x_n \to x$. به‌وضوح حد در صورت وجود منحصر به فرد است.*

۸. تعریف. *دو نرم $\|\cdot\|_a$ و $\|\cdot\|_b$ بر X معادل خوانده می‌شوند در صورتی که هر یک از مضرب مثبتی از دیگری کوچک‌تر باشد، یعنی اعداد $M, m > 0$ موجود باشند که*

$$\begin{array}{ll} \|x\|_a \leq m\|x\|_b & \\ & (\forall x \in X) \\ \|x\|_b \leq M\|x\|_a & \end{array}$$

۹. قضیه . *دو نرم معادل هستند اگر و تنها اگر دنباله‌های همگرای یکسان داشته باشند.*

برهان. $\Longleftarrow$ پرواضح است که اگر دو نرم معادل باشند آنگاه دنباله‌های همگرای یکسان دارند.

$\Longrightarrow$ در جهت عکس فرض کنید $M > 0$ ای وجود نداشته باشد که شرط $\|x\|_b \leq M\|x\|_a$ برای هر x برقرار

باشد. پس برای هر n، x_n ای هست که $\|x_n\|_b > n^2\|x_n\|_a$. از این واضح است که $x_n \neq 0$ (چه در غیر این صورت طرفین نامساوی صفر می‌بودند). سپس با گرفتن $y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|_a}$ داریم $\|y_n\|_b > n$.

توجه کنید که $\|y_n\|_a \to 0$ در حالی که $\|y_n\|_b \not\to 0$. پس $\{y_n\}$ در نرم $\|\cdot\|_a$ به صفر می‌گراید در حالی که در نرم $\|\cdot\|_a$ بی‌کران است فلذا نمی‌تواند به هیچ نقطه‌ای همگرا باشد. ■

۱۰. قضیه . *در یک فضای برداری متناهی‌البعد تمامی نرم‌ها معادل‌اند.*

برهان. فرض کنید X فضای متناهی‌البعد با پایه $\{u_1, \ldots, u_n\}$ باشد. هر $x \in X$ نمایش منحصر به فرد به شکل $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j$ دارد. تعریف کنید $\|x\|_\infty := \max_{1\leq j\leq n} |\alpha_j|$. این یک نرم بر X تعریف می‌کند. حال نشان می‌دهیم که هر نرم $\|\ \|$ از X با نرم $\|\ \|_\infty$ معادل است. برای این منظور قرار دهید $M = \sum_{j=1}^{n} \|u_j\|$. آنگاه

$$\|x\| \leq \sum |\alpha_j|\ \|u_j\| \leq \sum_{j=1}^{n} \|x\|_\infty \|u_j\| = M\|x\|_\infty$$

پس نرم $\|\ \|_\infty$ از نرم $\|\ \|$ قوی‌تر است. برای جهت عکس فرض خلف بگیرید که نتوان m ای یافت که رابطه $\|x\|_\infty \leq m\|x\|$ برای هر x برقرار باشد. سپس برای هر k می‌توان x_k ای یافت که $\|x_k\| = 1$ و $\|x_k\|_\infty \geq k$. دنباله $y_k = \frac{x_k}{\|x_k\|_\infty}$ را در نظر بگیرید. بنویسید $y_k = \sum_{j=1}^{n} \beta_{kj} u_j$. داریم

$$\max_{1\leq j\leq n} |\beta_{kj}| = \|y_k\|_\infty = 1$$

پس دنباله‌های $\{\beta_{kj}\}_{k=1}^{\infty}$ (برای $j = 1, \ldots, n$) از اعداد مختلط کراندارند. پس هر کدام زیردنباله‌ای همگرا دارد. اما اگر این کار را (یعنی یافتن زیردنباله‌ها را) از $j = 1$ شروع کنیم و بعد به $j = 2$ برویم و الی آخر، آنگاه می‌توانیم اندیس‌های $k_1 < k_2 < \cdots$ را بیابیم که زیردنباله‌های $\{\beta_{k_i,j}\}_{i=1}^{\infty}$ برای هر $j = 1, \ldots, n$ همگرا باشند، مثلاً

$$\lim_{i\to\infty} \beta_{k_i,j} = \beta_j$$

سپس قرار دهید $y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j u_j$. آنگاه

$$\|y_{k_i} - y\|_\infty = \Big\| \sum_{j=1}^{n} (\beta_{k_i,j} - \beta_j) u_j \Big\|_\infty = \max_{1\leq j\leq n} |\beta_{k_i,j} - \beta_j| \xrightarrow{i\to\infty} 0$$

سپس، به‌دلیل قوی‌تر بودن $\|\ \|_\infty$ از $\|\ \|$، داریم

$$\|y_{k_i} - y\| \xrightarrow{i\to\infty} 0$$

اما $\|y_{k_i}\| = \frac{1}{\|x_{k_i}\|_\infty} \to 0$. پس باید $y = 0$. فلذا از بالا داریم $\|y_{k_i}\|_\infty \to 0$. اما این متناقض با آن است که $\|y_{k_i}\|_\infty = 1$. ■

۱۱. قضیه . *هر دنباله کراندار در یک فضای نرمدار متناهی‌البعد دارای زیردنباله‌ای همگرا است.*

برهان. فرض کنید $\{u_1,\dots,u_n\}$ پایه‌ای برای X باشد و فرض کنید $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ دنباله‌ای کراندار در X باشد. فرض کنید $\|\ \|$ نرم حاکم بر X باشد. بنویسید $x_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{k,j}\, u_j$. چون نرم $\|\ \|$ با نرم $\|\ \|_\infty$ معادل است، پس دنباله $\{x_k\}$ در نرم $\|\ \|_\infty$ نیز کراندار است. فلذا از $\max_{1\le j\le n} |\alpha_{k,j}| = \|x_k\|_\infty$ معلوم می‌شود که هر دنباله $\{\alpha_{k,j}\}_{k=1}^{\infty}$ کراندار است. حال همچون قضیه بالا می‌توان اندیس‌های $k_1 < k_2 < \cdots$ را یافت که هر زیردنباله $\{\alpha_{k_i,j}\}_{i=1}^{\infty}$ همگرا باشد:

$$\lim_{i\to\infty} \alpha_{k_i,j} = \alpha_j.$$

حال اگر بگیریم $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, u_j$، آنگاه مثل قضیه بالا نتیجه می‌شود که $\|x_{k_i} - x\| \to 0$. پس $\{x_k\}$ زیردنباله‌ای همگرا دارد. ■

۱۲. تعریف. *فرض کنیم X فضای برداری روی $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ باشد. نگاشت $\langle\cdot,\cdot\rangle : X\times X \to \mathbb{K}$ را ضرب داخلی می‌خوانیم در صورتی که خواص زیر را داشته باشد:*

i) $0 \le \langle x,x\rangle$

ii) $\langle x,x\rangle = 0$ *اگر و تنها اگر* $x = 0$

iii) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$

iv) *روی مؤلفه اول خطی و روی مولفه دوم مزدوج—خطی باشد:*

$$\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle + \beta\langle y,z\rangle$$
$$\langle x\,,\, ay+bz\rangle = \bar{a}\langle x,y\rangle + \bar{b}\langle x,z\rangle$$

در صورت وجود چنین ضرب داخلی روی X، می‌گوییم که X یک فضای ضرب داخلی است.

تبصره. *توجه کنید که در فضای ضرب داخلی داریم* $\langle 0,x\rangle = \langle x,0\rangle = 0$.

مثال . *بر روی $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{C}^n$ عمل زیر یک ضرب داخلی تعریف می‌کند:*

$$\langle (x_1,\dots,x_n)\,,\,(y_1,\dots,y_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\overline{y_i}$$

۱۳. قضیه . *فرض کنید X یک فضای ضرب داخلی باشد. قرار دهید*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

آنگاه

الف) *نامساوی کشی ـ شوارتز بر X برقرار است:*

$$|\langle x,y\rangle|^۲ \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$$

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\ \|y\|$$

ب) $\|\ \|$ یک نرم بر X است.

برهان الف). نامساوی کشی ــ شوارتز برای $x=۰$ بدیهی است چه برای $x=۰$ هر دو طرف صفر هستند. پس فرض کنیم $x\neq ۰$. قرار دهید $\alpha=\frac{\langle y,x\rangle}{\|x\|}$ و $\beta=\|x\|$ تا به‌دست آید

$$\begin{aligned}
۰ \leq \|\alpha x-\beta y\|^۲ &= \langle \alpha x-\beta y, \alpha x-\beta y\rangle\\
&= |\alpha|^۲\|x\|^۲ - \alpha\overline{\beta}\langle x,y\rangle - \overline{\alpha}\beta\langle y,x\rangle + |\beta|^۲\|y\|^۲\\
&= |\alpha|^۲\|x\|^۲ - ۲\,\mathrm{Re}(\alpha\overline{\beta}\langle x,y\rangle) + |\beta|^۲\|y\|^۲\\
&= |\langle x,y\rangle|^۲ - ۲|\langle x,y\rangle|^۲ + \|x\|^۲\|y\|^۲\\
&= -|\langle x,y\rangle|^۲ + \|x\|^۲\|y\|^۲
\end{aligned}$$

که از اینجا نامساوی کشی ــ شوارتز حاصل می‌شود. ■

برهان ب). دو خاصیت اول و دوم نرم برای $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ بدیهی هستند. برای خاصیت سوم:

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x,\alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}\langle x,x\rangle} = \sqrt{|\alpha|^۲\langle x,x\rangle} = |\alpha|\ \|x\|$$

برای خاصیت چهارم:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^۲ = \langle x+y,x+y\rangle &= \|x\|^۲ + ۲\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^۲\\
&\leq \|x\|^۲ + ۲|\langle x,y\rangle| + \|y\|^۲\\
&\leq \|x\|^۲ + ۲\|x\|\ \|y\| + \|y\|^۲ = (\|x\|+\|y\|)^۲
\end{aligned}$$

که با جذرگیری از طرفین، نامساوی $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$ به‌دست می آید. ■

۱۴. تعریف. *در فضای ضرب داخلی X، بردارهای x و y متعامد خوانده می‌شوند در صورتی که $\langle x,y\rangle=۰$. زیرمجموعه U از X یک دستگاه متعامد می‌خوانند در صورتی که هر دو عضو متمایز در U بر هم عمود باشند. بالاخره U را یک دستگاه متعامد یکه می‌خوانیم در صورتی که همچنین برای هر $x\in U$ داشته باشیم $\|x\|=۱$.*

۱۵. قضیه . *بردارهای در یک دستگاه متعامد یکه ضرورتاً مستقل خطی هستند.*

برهان. فرض کنیم $\{u_۱,\ldots,u_n\}$ بردارهایی از دستگاه متعامد یکه باشند. فرض کنید $\alpha_۱u_۱+\cdots+\alpha_nu_n=۰$ (باید نشان دهیم $\alpha_۱=\cdots=\alpha_n=۰$). با ضرب طرفین در u_i به‌دست می آید: $\alpha_i\langle u_i,u_i\rangle=۰$، یعنی $\alpha_i=۰$ $\quad(i=۱,\ldots,n)$. ■

۱۶. قضیه (فرآیند متعامدسازی گرام ـ اشمیت) . *فرض کنید $\{u_0, u_1, \ldots\}$ گردایه‌ای شمارا (متناهی یا نامتناهی) از بردارهای مستقل خطی از فضای ضرب داخلی X باشد. آنگاه دستگاه متعامد $\{q_0, q_1, \ldots\}$ از بردارهای در X موجود است که*

$$\mathrm{Span}\{u_0, \ldots, u_n\} = \mathrm{Span}\{q_0, \ldots, q_n\} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

و در واقع

$$\begin{cases} q_0 = u_0 \\ q_n = u_n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle u_n, q_k\rangle}{\langle q_k, q_k\rangle} q_k & n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

برهان. به استقراء همه موارد قابل تحقیق هستند. ■

۱. بهترین تقریب

۱۷. تعریف. *فرض کنیم U زیرمجموعه‌ای از فضای نرمدار X بوده و $x_0 \in X$. نقطه $u_0 \in U$ بهترین تقریب برای x_0 نسبت به U است (که به آن یک بهترین U—تقریب می‌گوییم) در صورتی که*

$$\|u_0 - x_0\| = \inf_{u\in U} \|u - x_0\|$$

۱۸. قضیه . *فرض کنیم U زیرفضایی متناهی‌البعد از فضای نرمدار X باشد. آنگاه برای هر عضو از X بهترین U—تقریب موجود است.*

برهان. فرض کنید $x_0 \in X$. قرار دهید

$$d = \inf_{u\in U} \|x_0 - u\|$$

دنباله $\{u_n\}$ را در U اختیار کنید که $\|x_0 - u_n\| \to d$.

پس دنباله $\|x_0 - u_n\|$ کراندار است، سپس بنابه نامساوی $\|u_n\| \leq \|x_0 - u_n\| + \|x_0\|$، دنباله $\{\|u_n\|\}$ کراندار است. بنابه یکی از قضایا که در بالا آمد، دنباله کراندار $\{u_n\}$ در فضای متناهی‌البعد U زیردنباله‌ای همگرا دارد همچون $\{u_{n_k}\}$، مثلاً $u_{n_k} \to u_0 \in U$. آنگاه

$$\|x_0 - u_0\| = \lim_k \|x_0 - u_{n_k}\| = d$$

پس u_0 نزدیک‌ترین نقطه از U به x_0 است. ■

۱۹. قضیه . *فرض کنیم U زیرفضایی از فضای ضرب داخلی X باشد. نقطه $u_0 \in U$ بهترین U ـ تقریب برای $x_0 \in X$ است اگر و تنها اگر*

$$\langle x_0 - u_0, u\rangle = 0 \qquad (\forall u \in U) \tag{۳}$$

یعنی $x_\circ - u_\circ \perp U$. درثانی، برای هر $x_\circ \in X$ حداکثر یک بهترین U ـ تقریب وجود دارد.

برهان. برای هر $u \in U$ داریم

$$\|x_\circ - u\|^۲ = \|(x_\circ - u_\circ) + (u_\circ - u)\|^۲ = \|x_\circ - u_\circ\|^۲ + ۲\,\mathrm{Re}\langle x_\circ - u_\circ, u_\circ - u\rangle + \|u_\circ - u\|^۲$$

حال فرض کنید رابطه (۳) برقرار بوده باشد. آنگاه Re در این تساوی صفر است فلذا

$$\|x_\circ - u\|^۲ = \|x_\circ - u_\circ\|^۲ + \|u_\circ - u\|^۲$$

فلذا $\|x_\circ - u\|^۲ \geq \|x_\circ - u_\circ\|^۲$، پس $u_\circ$ بهعترین تقریب است.

برای جهت عکس فرض کنید $u_\circ$ بهترین تقریب باشد اما $u_۱ \in U$ موجود باشد که $\langle x_\circ - u_\circ, u_۱\rangle \neq \circ$. قرار دهید

$$u = u_\circ + \frac{\langle x_\circ - u_\circ, u_۱\rangle}{\|u_۱\|^۲}\, u_۱$$

سپس مثل بالا:

$$\begin{aligned}\|x_\circ - u\|^۲ &= \|x_\circ - u_\circ\|^۲ + ۲\,\mathrm{Re}\langle x_\circ - u_\circ, u_\circ - u\rangle + \|u_\circ - u\|^۲ \\ &= \|x_\circ - u_\circ\|^۲ - \frac{|\langle x_\circ - u_\circ, u_۱\rangle|^۲}{\|u_۱\|^۲} < \|x_\circ - u_\circ\|^۲\end{aligned}$$

که این متناقض با بهترین تقریب بودن $u_\circ$ است.

فقط می‌ماند که یکتایی را ثابت کنیم. در واقع اگر $u_۱$ و $u_۲$ دو بهترین تقریب برای $x_\circ$ باشند آنگاه بنابه (۳) داریم

$$\begin{cases}\langle x_\circ - u_۱, u_۱ - u_۲\rangle = \circ \\ \langle x_\circ - u_۲, u_۱ - u_۲\rangle = \circ\end{cases}$$

با کم کردن دو رابطه اخیر از یکدیگر به دست می آید

$$\langle u_۱ - u_۲, u_۱ - u_۲\rangle = \circ$$

$$\|u_۱ - u_۲\|^۲ = \circ \quad \Longrightarrow \quad u_۱ = u_۲$$

■

۲۰. تعریف. *عملگر خطی $A : X \to Y$ بین فضاهای نرمدار X و Y را کراندار می‌خوانیم در صورتی که عدد*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=۱} \|Ax\|$$

متناهی باشد. عدد $\|A\|$ را نرم عملگر A می‌نامند.

تبصره *دو عدد زیر مساوی $\|A\|$ هستند:*

$$\sup_{\|x\|\leq ۱} \|Ax\|$$

$$\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

سپس با توجه به تساوی $\|A\|=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$*، برای هر* x *داریم* $\|Ax\|\leq\|A\|\,\|x\|$.

<u>تبصره</u> فرض کنیم که عملگرهای $X\overset{A}{\to}Y\overset{B}{\to}Z$ *کراندار باشند. آنگاه ترکیب* BA *نیز کراندار است و داریم*

$$\|BA\|\leq\|B\|\,\|A\|$$

<u>اثبات</u> در واقع برای هر $\|x\|=1$ *داریم؛*

$$\|(BA)(x)\|=\|B(Ax)\|\leq\|B\|\,\|Ax\|\leq\|B\|\,\|A\|\,\|x\|=\|B\|\,\|A\|$$

که با سوپرموم گیری روی $\|x\|=1$*ها نتیجه بدست می‌آید.*

۲۱. قضیه . *فرض کنیم* U *زیرفضای کاملی از فضای ضرب داخلی* X *باشد (یعنی هر دنباله کشی از* U *در* U *همگرا است). آنگاه برای هر عنصر از* X *بهترین* U *ـ تقریب وجود دارد. نگاشت* $P:X\to U$ *که بهترین* U *ـ تقریب را نسبت می‌دهد یک اپراتور خطی است که خواص زیر را دارد:*

$$P^2=P \qquad \text{و} \qquad \|P\|=1$$

آن را تصویر متعامد X *بر* U *می‌نامند.*

برهان. برای $x\in X$ قرار دهید

$$d=\inf_{u\in U}\|x-u\|$$

و سپس دنباله (u_n) را در U برگزینید تا

$$\|x-u_n\|^2\leq d^2+\frac{1}{n}$$

آنگاه

$$\|(x-u_n)+(x-u_m)\|^2+\|(x-u_n)-(x-u_m)\|^2=2\|x-u_n\|^2+2\|x-u_m\|^2\leq 4d^2+\frac{2}{n}+\frac{2}{m}$$

سپس از آنجا و از اینکه $\frac{u_n+u_m}{2}\in U$ می‌توان نوشت

$$\|u_n-u_m\|^2\leq 4d^2+\frac{2}{n}+\frac{2}{m}-4\left\|x-\frac{u_n+u_m}{2}\right\|^2\leq\frac{2}{n}+\frac{2}{m}$$

از این رابطه معلوم است که (u_n) دنباله‌ای کشی است. چون U کامل است پس نقطه $u\in U$ موجود است که $u_n\to u$. لذا از رابطه $\|x-u_n\|^2\leq d^2+\frac{1}{n}$ و با حدگیری روی n نتیجه می‌شود که $\|x-u\|^2\leq d^2$ فلذا $\|x-u\|=d$. پس هر x دارای بهترین U ــ تقریب است. یکتایی u از قضیه قبل می‌آید. نقطه منحصر به فرد $u\in U$ را به $P(x)$ نشان دهید: $P(x)=u$. به وضوح $P(u)=u$ پس $P(Px)=P(x)$ یعنی

$P^۲ = P$. اما می‌دانیم که عنصر $u = Px$ از U با این خاصیت مشخص می‌شود که $x - Px \perp U$. حال اگر $x_۱, x_۲ \in U$، آنگاه

$$\left.\begin{array}{l} x_۱ - Px_۱ \perp U \\ x_۲ - Px_۲ \perp U \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad (x_۱ + x_۲) - (Px_۱ + Px_۲) \perp U$$

اما چون $Px_۱ + Px_۲ \in U$، آنگاه یکتایی بهترین U ـ تقریب نتیجه می‌دهد که $P(x_۱ + x_۲) = Px_۱ + Px_۲$. پس P جمعی است اینکه P ضرب اسکالر را هم حفظ می‌کند بهمین ترتیب ثابت می‌شود. پس P اپراتور خطی است. اما از $x - Px \perp U$ داریم

$$x - Px \perp Px$$

پس

$$\|x\|^۲ = \|(x - Px) + Px\|^۲ = \|x - Px\|^۲ + \|Px\|^۲ \geq \|Px\|^۲$$

پس $\|Px\| \leq \|x\|$ فلذا $\|P\| \leq ۱$. اما چون $P^۲ = P$ داریم

$$\|P\| = \|P^۲\| \leq \|P\| \, \|P\| \quad \Longrightarrow \quad ۱ \leq \|P\|$$

پس $\|P\| = ۱$. ■

۲۲. نتیجه. *فرض کنیم U زیرفضای متناهی‌البعد از فضای ضرب داخلی X با پایه $\{u_۱, \ldots, u_n\}$ باشد. آنگاه ترکیب*

$$\sum_{k=۱}^{n} \alpha_k u_k$$

بهترین تقریب برای عنصر $x \in X$ است اگر و تنها اگر ضرایب $\alpha_۱$ و ... و α_n در معادلات نرمال صدق کنند:

$$\sum_k \alpha_k \langle u_k, u_j \rangle = \langle x, u_j \rangle \qquad j = ۱, \ldots, n$$

برهان. به‌وضوح این معادلات هم‌ارز هستند با اینکه

$$x - \sum_{k=۱}^{n} \alpha_k u_k \perp U$$

■

۲۳. نتیجه. *فرض کنیم U زیرفضای متناهی‌البعد از فضای ضرب داخلی X باشد و $\{u_۱, \ldots, u_n\}$ پایه‌ای متعامد یکه برای U باشد. آنگاه اپراتور تصویر متعامد $P : X \to U$ عبارت است از*

$$Px = \sum_{k=۱}^{n} \langle x, u_k \rangle u_k \qquad (x \in X)$$

برهان. از شرط تعامد

$$x - Px \perp U$$

نتیجه می‌شود. ■

فرض کنیم V یک فضای ضرب داخلی متناهی البعد باشد و $\{u_1, \ldots, u_n\}$ پایه‌ای متعامد یکه برای آن باشد. آنگاه

$$(\forall v \in V) \qquad v = \sum_{j=1}^{n} \langle v, u_j \rangle u_j \quad \text{(i)}$$

$$(\forall v, w \in V) \qquad \langle v, w \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle v, u_j \rangle \overline{\langle w, u_j \rangle} \quad \text{(ii)}$$

$$\|v\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\langle v, u_j \rangle|^2 \quad \text{(iii)}$$

برهان. بنویسید $v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k \quad (\alpha_k \in \mathbb{C})$. با ضرب داخلی دادن این بردار با u_j به‌دست می آید

$$\langle v, u_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle u_k, u_j \rangle = \alpha_j$$

پس $v = \sum_{j=1}^{n} \langle v, u_j \rangle u_j$ و این (i) را نتیجه می‌دهد. برای (ii) بنویسید $v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j$ و $w = \sum_{k=1}^{n} \beta_k u_k$ که $\alpha_j = \langle v, u_j \rangle$ و $\beta_k = \langle w, u_k \rangle$ و سپس ملاحظه کنید که

$$\langle v, w \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j, \sum_{k=1}^{n} \beta_k u_k \right\rangle = \sum_{j} \sum_{k} \alpha_j \overline{\beta}_k \langle u_j, u_k \rangle = \sum_{j} \alpha_j \overline{\beta}_j = \sum_{j=1}^{n} \langle v, u_j \rangle \overline{\langle w, u_j \rangle}$$

و این (ii) را به دست می‌دهد. حال اگر در رابطه (ii) به جای w از v استفاده کنید آنگاه (iii) نتیجه می‌شود. ■

مثال . توجه کنید که $\mathbb{C}^N$ را می‌توان با $\mathbb{C}$–فضای برداری کلیه توابع $f : \{0, 1, ..., N-1\} \to \mathbb{C}$ یکی گرفت هر گاه به هر چنین تابعی عضو $\begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{bmatrix}$ از $\mathbb{C}^N$ را نسبت دهیم.

توجه کنید که با این یکی کردن، ضرب داخلی بر $\mathbb{C}^N$ بدین شکل تعریف می‌شود:

$$\langle f \, , \, g \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} f(j) \, \overline{g(j)}$$

قرارداد. اعضای $\{E_0, E_1, \ldots, E_{N-1}\}$ از $\mathbb{C}^N$ را بدین شکل تعریف می‌کنیم

$$E_0(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{\left(\frac{2\pi i}{N}\right)(0)} \qquad k = 0, ..., N-1$$

$$E_1(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{\left(\frac{2\pi i}{N}\right)(k)}$$

$$\vdots$$

$$E_j(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{\left(\frac{2\pi i}{N}\right)(jk)}$$

$$\vdots$$

$$E_{N-1}(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{\left(\frac{2\pi i}{N}\right)((N-1)k)}$$

مثال . برای $N = ۳$،

$$E_۰ = \begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۳}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۳}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۳}} \end{bmatrix} \qquad E_۱ = \begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۳}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۳}}e^{\frac{۲\pi i}{۳}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۳}}e^{\frac{۴\pi i}{۳}} \end{bmatrix} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \begin{bmatrix} ۱ \\ -\frac{۱}{۲} + i\frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ -\frac{۱}{۲} - i\frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix}$$

$$E_۲ = \begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۳}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۳}}e^{\frac{۴\pi i}{۳}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۳}}e^{\frac{۸\pi i}{۳}} \end{bmatrix} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \begin{bmatrix} ۱ \\ -\frac{۱}{۲} - i\frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ -\frac{۱}{۲} + i\frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix}$$

۲۴. لم. با ضرب داخلی تعریف شده در $\mathbb{C}^N$، مجموعه $\{E_۰, E_۱, \ldots, E_{N-۱}\}$ یک پایه متعامد یکه می‌باشد.

برهان. برای دو عضو E_m و E_n از این مجموعه:

$$\begin{aligned}
\langle E_m, E_n\rangle &= \sum_{j=۰}^{N-۱} E_m(j)\overline{E_n(j)} \\
&= \sum_{j=۰}^{N-۱} \Big(\frac{۱}{\sqrt{N}}e^{\frac{i۲\pi mj}{N}}\Big)\overline{\Big(\frac{۱}{\sqrt{N}}e^{\frac{i۲\pi nj}{N}}\Big)} \\
&= \frac{۱}{N}\sum_{j=۰}^{N-۱} e^{\frac{i۲\pi(m-n)j}{N}} \\
&= \frac{۱}{N}\sum_{j=۰}^{N-۱} \big(e^{\frac{i۲\pi(m-n)}{N}}\big)^j
\end{aligned}$$

که این مقدار اخیر برای $m = n$ برابر است با:

$$= \frac{۱}{N}\sum_{j=۰}^{N-۱} ۱ = ۱$$

درحالی‌که برای $m \neq n$ برابر است با:

$$= \frac{۱}{N}\frac{\left(e^{\frac{i۲\pi(m-n)}{N}}\right)^N - ۱}{e^{\frac{i۲\pi(m-n)}{N}} - ۱} = \frac{۱}{N}\frac{e^{i۲\pi(m-n)} - ۱}{e^{\frac{i۲\pi(m-n)}{N}} - ۱} = ۰$$

این ادعای لم را تمام می‌کند. ∎

بنابه قضیه‌ای در بالا، برای هر $z \in \mathbb{C}^N$ داریم $z = \sum_{k=۰}^{N-۱}\langle z, E_k\rangle E_k$.

اما

$$\langle z, E_k\rangle = \sum_{j=۰}^{N-۱} z(j)\overline{E_k(j)} = \sum_{j=۰}^{N-۱} z(j)\overline{\frac{۱}{\sqrt{N}}e^{\frac{i۲\pi kj}{N}}} = \frac{۱}{\sqrt{N}}\sum_{j=۰}^{N-۱} z(j)e^{-\frac{i۲\pi kj}{N}}$$

و این انگیزه‌ای است برای تعریف زیر:

۲۵. تعریف. (**تبدیل فوریه گسسته**) *فرض کنید* $z = \begin{bmatrix} z(0) \\ z(1) \\ \vdots \\ z(N-1) \end{bmatrix}$ *عضوی از* $\mathbb{C}^N$ *باشد. آنگاه تبدیل فوریه گسسته از* z *عضو* $\hat{z}$ *از* $\mathbb{C}^N$ *است که بدین صورت مؤلفه‌هایش تعریف می‌شوند:*

$$\hat{z}(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} z(j) e^{-\frac{i2\pi kj}{N}} = \langle z, E_k \rangle$$

بدین ترتیب نگاشت $\wedge : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ *به‌دست می‌آید که به هر عضو* z *از* $\mathbb{C}^N$ *عضو* $\hat{z}$ *از* $\mathbb{C}^N$ *را نسبت می‌دهد. این نگاشت را تبدیل فوریه گسسته می‌نامند.*

تبصره. قابل ملاحظه است که تبدیل فوریه یک نگاشت خطی است:

$$(az + bw)^\wedge = a\,\hat{z} + b\,\hat{w}.$$

۲۶. قضیه . *فرض کنید* z *و* w *اعضایی از* $\mathbb{C}^N$ *باشند. آنگاه*

الف) *(تبدیل فوریه وارون)* $z(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{z}(j) e^{\frac{i2\pi jk}{N}}$

ب) *(تساوی پارسوال)* $\langle z, w \rangle = \langle \hat{z}, \hat{w} \rangle$

پ) *(فرمول پلانشرل* [۱]*)* $\|z\| = \|\hat{z}\|$

برهان. داریم

$$\hat{z}(j) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} z(l) e^{-\frac{i2\pi lj}{N}}$$

پس

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{z}(j) e^{\frac{i2\pi jk}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} z(l) e^{\frac{i2\pi(k-l)j}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} z(l) e^{\frac{i2\pi(k-l)j}{N}}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} z(l) \sum_{j=0}^{N-1} \left(e^{\frac{i2\pi(k-l)}{N}} \right)^j \qquad (4)$$

اما

$$\sum_{j=0}^{N-1} \left(e^{\frac{i2\pi(k-l)}{N}} \right)^j = \begin{cases} \dfrac{e^{i2\pi(k-l)} - 1}{e^{\frac{i2\pi(k-l)}{N}} - 1} = 0 & k \neq l \\ N & k = l \end{cases}$$

پس در ادامه (۴) می‌توان نوشت

$$= \frac{1}{N} \times z(k) \times N = z(k)$$

این قسمت (الف) را ثابت می‌کند. برای قسمت (ب) توجه کنید که

---

[۱] Plancherel

$$z(k)\overline{w(k)} = \left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_j \hat{z}(j)e^{\frac{i2\pi jk}{N}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_p \overline{\hat{w}(p)}e^{-\frac{i2\pi pk}{N}}\right)$$
$$= \frac{1}{N}\sum_j\sum_p \hat{z}(j)\overline{\hat{w}(p)}\, e^{\frac{i2\pi(j-p)k}{N}}$$

پس

$$\sum_k z(k)\overline{w(k)} = \frac{1}{N}\sum_j\sum_p \hat{z}(j)\overline{\hat{w}(p)}\sum_k e^{\frac{i2\pi(j-p)k}{N}} \qquad (5)$$

و اما جمع $\sum_k$ در (۵) تنها برای $j-p=0$ مساوی N می‌شود و برای $j-p\neq 0$ مساوی صفر است. پس در ادامه (۵) می‌توان نوشت (با اختیار کردن $p=j$):

$$= \sum_j \hat{z}(j)\overline{\hat{w}(j)} = \langle \hat{z}, \hat{w}\rangle$$

و این (ب) را ثابت می‌کند. برای قسمت (پ) کافی است قسمت (ب) را برای $w=z$ به‌کار برید. ■

مثال . برای $N=4$ و $z = \begin{bmatrix} 2 \\ i \\ 3 \\ 1-i \end{bmatrix}$ مطلوب است $\hat{z}$.

<u>**حل.**</u> در $\mathbb{C}^N$ پایه زیر را داریم

$$\{E_0, E_1, E_2, E_3\} = \left\{\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\i\\-1\\-i\end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-i\\-1\\i\end{bmatrix}\right\}$$

پس

$$\hat{z}(0) = \frac{1}{2}[(2)(1)+(i)(1)+(3)(1)+(1-i)(1)] = 3$$
$$\hat{z}(1) = \frac{1}{2}[(2)(1)+(i)(-i)+(3)(-1)+(1-i)(i)] = \frac{i+1}{2}$$
$$\hat{z}(2) = \frac{1}{2}[(2)(1)+(i)(-1)+(3)(1)+(1-i)(-1)] = 2$$
$$\hat{z}(3) = \frac{1}{2}[(2)(1)+(i)(i)+(3)(-1)+(1-i)(-i)] = \frac{-3-i}{2}$$

پس

$$\hat{z} = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{i+1}{2} \\ 2 \\ \frac{-3-i}{2} \end{bmatrix}$$

قرار دهید $\omega = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$. آنگاه از تعریف $\hat{z}$ داریم

$$\hat{z}(k) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1} z(j)\omega^{kj}$$

پس فرض کنید W ماتریس با مؤلفه‌های $\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\,\omega^{kj}\right)_{\substack{0\le k\le N-1\\ 0\le j\le N-1}}$ باشد. آنگاه روابط بالا در شکل ماتریسی بدین صورت هستند:

$$\begin{bmatrix} \hat{z}(۰) \\ \hat{z}(۱) \\ \vdots \\ \hat{z}(N-۱) \end{bmatrix} = W \begin{bmatrix} z(۰) \\ z(۱) \\ \vdots \\ z(N-۱) \end{bmatrix}$$

$$\hat{z} = Wz$$

مثال . برای $N = ۳$:

$$W = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -\frac{۱}{۲} - i\frac{\sqrt{۳}}{۲} & -\frac{۱}{۲} + i\frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ ۱ & -\frac{۱}{۲} + i\frac{\sqrt{۳}}{۲} & -\frac{۱}{۲} - i\frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix}$$

و سپس برای $z = \begin{bmatrix} ۰ \\ i\sqrt{۳} \\ ۲ \end{bmatrix}$ داریم

$$\hat{z} = Wz = \begin{bmatrix} \frac{۲}{\sqrt{۳}} + i \\ \frac{۱}{۲\sqrt{۳}} + i\frac{۱}{۲} \\ \frac{-۵}{۲\sqrt{۳}} - i\frac{۳}{۲} \end{bmatrix}$$

قسمت (الف) قضیه بالا انگیزه‌ای است برای تعریف زیر:

۲۷. تعریف. *برای $z \in \mathbb{C}^n$ تعریف می‌کنیم:*

$$\check{z}(k) = \frac{۱}{\sqrt{N}} \sum_{j=۰}^{N-۱} z(j)\, e^{\frac{i۲\pi kj}{N}}$$

نگاشت $\vee : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ را تبدیل فوریه وارون می‌نامند.

پس از قسمت (الف) قضیه بالا معلوم است که $z = (\hat{z})^\vee$.

مشاهده‌ای دیگر. توجه کنید که

$$\check{z}(k) = \sum_{j=۰}^{N-۱} z(j) \frac{۱}{\sqrt{N}}\, \overline{\omega}^{kj}$$

پس با همان ماتریس W که در بالا تعریف شد داریم $\check{z} = \overline{W}\, z$.

حال در این تساوی که کلی است، z را با $\hat{z}$ جایگزین کنید:

$$(\hat{z})^\vee = \overline{W}\hat{z}$$

سمت چپ مساوی z است درحالی که در سمت راست می‌توان $\hat{z}$ را با Wz جایگزین کرد:

$z = \overline{W}Wz$

چون این برای هر z از $\mathbb{C}^N$ برقرار است پس $\overline{W}W$ ماتریس همانی است، یعنی $\overline{W}$ وارون W است. از این‌رو می‌توان نوشت:

$(\check{z})^\wedge = W\check{z} = W\overline{W}z = Iz = z$

پس دو چیز را نشان داده‌ایم:

$(\check{z})^\wedge = z$

$(\hat{z})^\vee = z$

و این یعنی آنکه تبدیلات $\wedge$ و $\vee$ وارون‌های یکدیگرند.

۲۸. نتیجه.

(الف) $\langle \check{z}, \check{w} \rangle = \langle z, w \rangle$

(ب) $||\check{z}|| = ||z||$

(ج) تبدیل فوریه وارون یک ایزومورفیسم فضاهای ضرب داخلی از $\mathbb{C}^N$ به $\mathbb{C}^N$ است.

برهان. (الف) بنابه قضیه قبل داریم

$\langle \check{z}, \check{w} \rangle = \langle (\check{z})^\wedge, (\check{w})^\wedge \rangle$

اما سمت راست چیزی نیست جز $\langle z, w \rangle$.

برای اثبات قسمت (ب) کافی است که در الف بگیریم $w = z$. ■

حال حالتی را در نظر بگیرید که t_j ها از $[۰, ۲\pi)$ به فاصله مساوی از یکدیگر باشند. در این حالت ضرایب چندجمله‌ای مثلثاتی درونیاب را دقیقاً مشخص خواهیم کرد.

اینکه تعداد t_j ها فرد باشد باشد یا زوج ما را به دو حالت رهنمون می‌کند:

ابتدا حالتی را در نظر بگیرید که تعداد فردی از t_j ها داریم

$t_۰, t_۱, \ldots, t_{۲n}$

پس $t_k = \frac{۲\pi k}{۲n+۱}$.

۲۹. قضیه . *ضرایب چندجمله‌ای منحصر به‌فرد*

$$p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kt + b_k \sin kt) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$$

که در روابط

$$p\left(\frac{2\pi k}{2n+1}\right) = y_k \qquad k = 0, 1, \dots, 2n$$

صدق کند عبارتند از

$$\begin{cases} a_k = \frac{2}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n} y_j \ \cos\frac{2\pi jk}{2n+1} & k = 0, 1, \dots, n \\ b_k = \frac{2}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n} y_j \ \sin\frac{2\pi jk}{2n+1} & k = 1, \dots, n \end{cases}$$

و در شکل مختلط:

$$c_k = \frac{1}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n} y_j \ e^{-\frac{i2\pi kj}{2n+1}}$$

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم که c_k ها به‌صورت بالا هستند: در واقع اگر چندجمله‌ای $p(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$ در روابط گفته شده صدق کند، آنگاه

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt_j} = y_j$$

$$\sum_{k=0}^{2n} c_{k-n} e^{i(k-n)t_j} = y_j$$

$$\sum_{k=0}^{2n} d_k e^{\frac{i2\pi(k-n)j}{2n+1}} = y_j \qquad (d_k = c_{k-n})$$

$$\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\sum_{k=0}^{2n} d_k \ e^{\frac{i2\pi kj}{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \ y_j \ e^{\frac{i2\pi nj}{2n+1}}$$

که با فرض $D = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{2n} \end{bmatrix}$ داریم $D \in \mathbb{C}^{2n+1}$، و رابطه بالا بدین صورت است:

$$\check{D}(j) = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \ y_j \ e^{\frac{i2\pi nj}{2n+1}} \qquad j = 0, 1, \dots, 2n$$

با اثر دادن تبدیل فوریه به طرفین:

$$D(k) = (\check{D})^\wedge(k) = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\sum_{j=0}^{2n} \check{D}(j) e^{\frac{-i2\pi jk}{2n+1}} = \frac{1}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n} \ y_j \ e^{\frac{i2\pi(n-k)j}{2n+1}}$$

پس

$$c_{k-n} = \frac{1}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n} \ y_j \ e^{\frac{i2\pi(n-k)j}{2n+1}}$$

که با تبدیل k به $k+n$:

$$c_k = \frac{1}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n} \ y_j \ e^{-\frac{i2\pi kj}{2n+1}} \qquad (-n \le k \le n)$$

سپس

$$a_k = c_k + c_{-k} = \frac{۱}{۲n+۱}\sum_{j=۰}^{۲n} y_j \left[e^{-\frac{i۲\pi kj}{۲n+۱}} + e^{\frac{i۲\pi kj}{۲n+۱}}\right] = \frac{۲}{۲n+۱}\sum_{j=۰}^{۲n} y_j \cos\frac{۲\pi kj}{۲n+۱}$$

و

$$b_k = i(c_k - c_{-k}) = \frac{۱}{۲n+۱}\sum_{j=۰}^{۲n} y_j\, i \left[e^{-\frac{i۲\pi kj}{۲n+۱}} - e^{\frac{i۲\pi kj}{۲n+۱}}\right] = \frac{۲}{۲n+۱}\sum_{j=۰}^{۲n} y_j \sin\frac{۲\pi kj}{۲n+۱}$$

و اثبات کامل است. ■

مثال . چندجمله‌ای مثلثاتی درجه دومی را بیابید که تابع متناوب $f(t) = e^{\sin t + \cos t}$ را بر $[۰, ۲\pi]$ درونیابی کند.

<u>حل</u> بدنبال چندجمله‌ای

$$p(x) = \frac{a_۰}{۲} + a_۱ \cos t + a_۲ \cos ۲t + b_۱ \sin t + b_۲ \sin ۲t$$

می‌گردیم که در روابط

$$p(t_i) = e^{\sin t_i + \cos t_i} \qquad t_i = i\frac{۲\pi}{۵} \quad i = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴$$

صدق کند. تعداد گره‌ها فرد است، لذا با استفاده از فرمول‌های

$$a_j = \frac{۲}{۵}\sum_{k=۰}^{۴} f(t_k) \cos\frac{۲\pi kj}{۵} \qquad b_j = \frac{۲}{۵}\sum_{k=۰}^{۴} f(t_k) \sin\frac{۲\pi kj}{۵}$$

بدست می‌آید:

$$a_۰ = ۳/۱۲۷۶۴ \quad a_۱ = ۱/۲۴۸۷۲ \quad a_۲ = -۰/۰۹۴۲۶ \quad b_۱ = ۱/۲۷۱۳۵ \quad b_۲ = ۰/۴۹۴۴۱$$

سپس

$$p(t) = ۱/۵۶۳۸۲ + ۱/۲۴۸۷۲ \cos t - ۰/۰۹۴۲۶ \cos ۲t + ۱/۲۷۱۳۵ \sin t + ۰/۴۹۴۴۱ \sin ۲t$$

حال حالتی را در نظر بگیرید که تعداد گره‌ها زوج باشد:

$$t_۰, t_۱, \ldots, t_{۲n-۱}$$
$$t_j = \frac{۲\pi j}{۲n} = \frac{\pi j}{n}$$

و به‌دنبال آن هستیم که عضو $p \in T_n$ را بیابیم که

$$p(t_j) = y_j \qquad j = ۰, ۱, \ldots, ۲n-۱ \tag{٦}$$

چون $p(t)$ با $۲n+۱$ ضریب مشخص می‌شود، ظاهراً یافتن p در (٦) معادل است با حل $۲n$ معادله با $۲n+۱$ مجهول. اما قابل توجه است که که در عبارت

$$p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

مقدار $\sin nt$ در گره‌های $t_j = \frac{\pi j}{n}$ صفر است و لذا آن را می‌توان از $p(t)$ حذف کرد و نگرانی راجع به به‌دست آوردن b_n نداریم. پس $p(t)$ بدین شکل در نظر گرفته می‌شود:

$$p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) + a_n \cos nt$$

حال اثبات قضیه زیر همانند قضایای بالا، انجام می‌گیرد:

۳۰. قضیه . *چندجمله‌ای منحصر به‌فرد*

$$p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) + \frac{a_n}{2} \cos nt$$

موجود است که

$$p\left(\frac{\pi j}{n}\right) = y_j \qquad j = 0, 1, \dots, 2n - 1$$

ضرایب این چندجمله‌ای به‌صورت هستند

$$a_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} y_j \cos \frac{\pi j k}{n} \qquad k = 0, 1, \dots, n$$

$$b_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} y_j \sin \frac{\pi j k}{n} \qquad k = 1, \dots, n - 1$$

اثباتی که در قضیه‌ای در بالا برای عدد $2n + 1$ ذکر شد را می‌توان تکرار کرد و نتیجه زیر را به‌دست آورد.

۳۱. قضیه . *برای نقاط* $t_k = \frac{2\pi k}{N} \quad (k = 0, 1, \dots, N - 1)$ *چندجمله‌ای منحصر به فرد*

$$p(t) = c_0 + c_1 e^{it} + \cdots + c_{N-1} e^{i(N-1)t}$$

موجود است که

$$p(t_k) = y_k \qquad k = 0, 1, \dots, N - 1$$

ضرایب چندجمله‌ای عبارت‌اند از:

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j e^{-\frac{i 2 \pi k j}{N}}$$

♣

برای همین چندجمله‌ای $p(t)$ و ضرایب آن که در این قضیه مشخص شده، بیایید s—مقطع آن را، برای $0 \leq s \leq N-1$، به‌صورت زیر تعریف کنید

$$p_s(t) = c_0 + c_1 e^{it} + \cdots + c_s e^{ist}$$

همچنین بیایید $\mathbb{C}$ ـ فضای برداری کلیه چندجمله‌ای‌های

$$q(t) = \gamma_0 + \gamma_1 e^{it} + \cdots + \gamma_s\, e^{ist}$$

را که ضرایب آن مختلط هستند در نظر بگیرید و نام این فضا را X بگذارید. سپس قرا دهید

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} q(t_0) \\ q(t_1) \\ \vdots \\ q(t_{N-1}) \end{bmatrix} \ : \ q \in X \right\}$$

آنگاه U زیرفضایی از $\mathbb{C}^N$ است. می‌دانیم که $\mathbb{C}^N$ یک فضای ضرب داخلی است با ضرب داخلی استاندارد که روی آن می‌شناسیم. حال نقطه $\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix}$ از $\mathbb{C}^N$ را در نظر بیرید. طبق یکی از قضایا که در بالا آمده، نزدیکترین نقطه از U به $\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix}$ وجود داررد. قضیه زیر این نزدیکترین نقطه را به‌دست می‌دهد:

۳۲. قضیه . *نزدیکترین نقطه U به* $\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix}$ *عبارت است از* $\begin{bmatrix} p_s(t_0) \\ p_s(t_1) \\ \vdots \\ p_s(t_{N-1}) \end{bmatrix}$.

برهان. باید نشان دهیم $\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_s(t_0) \\ p_s(t_1) \\ \vdots \\ p_s(t_{N-1}) \end{bmatrix} \perp U$، یعنی معادلاً نشان می‌دهیم که برای هر $\begin{bmatrix} q(t_0) \\ q(t_1) \\ \vdots \\ q(t_{N-1}) \end{bmatrix}$ از U داریم

$$\sum_{l=0}^{N-1} (p_s(t_l) - y_l)\overline{q(t_l)} = 0$$

معادلاً نشان می‌دهیم که

$$\sum_{l=0}^{N-1} y_l \overline{q(t_l)} = \sum_{l=0}^{N-1} p_s(t_l)\overline{q(t_l)}$$

در واقع

$$
\begin{aligned}
\text{سمت چپ} &= \sum_{l=0}^{N-1} p(t_l)\overline{q(t_l)} \\
&= \sum_{l=0}^{N-1} \Big(\sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{\frac{i2\pi lk}{N}}\Big)\Big(\sum_{j=0}^{s} \overline{\gamma}_j e^{-\frac{i2\pi lj}{N}}\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{s} c_k\overline{\gamma}_j \sum_{l=0}^{N-1} (e^{\frac{i2\pi(k-j)}{N}})^l
\end{aligned}
$$

اما مقدار جمع داخلی $\sum_{l=0}^{N-1}$ برای $k \neq j$ مساوی صفر است. لذا رابطه بالا برای هر k که $s < k$ قطعاً صفر است. پس در ادامه رابطه بالا می‌توان نوشت:

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{s}\sum_{j=0}^{s} c_k\overline{\gamma}_j \sum_{l=0}^{N-1} (e^{\frac{i2\pi(k-j)}{N}})^l \\
&= \sum_{l=0}^{N-1} \Big(\sum_{k=0}^{s} c_k e^{\frac{i2\pi lk}{N}}\Big)\Big(\sum_{j=0}^{s} \overline{\gamma}_j e^{-\frac{i2\pi lj}{N}}\Big) \\
&= \sum_{l=0}^{N-1} p_s(t_l)\overline{q(t_l)} \\
&= \text{سمت راست}
\end{aligned}
$$

■

۳۳. لم. فرض کنید $N = 2M$ عددی زوج باشد. برای $z \in \mathbb{C}^N$ عناصر $u, v \in \mathbb{C}^M$ را بدین شکل تعریف کنید:

$$
\begin{cases} u(k) = z(2k) \\ v(k) = z(2k+1) \end{cases} \qquad k = 0, 1, \dots, M-1
$$

پس u بردار متشکل از درایه‌های زوج z است درحالی‌که v درایه‌های فرد z را دارد. آنگاه

$$
\sqrt{2}\hat{z}(k) = \hat{u}(k) + e^{-\frac{i2\pi k}{N}}\hat{v}(k) \qquad k = 0, 1, \dots, M-1
$$

$$
\sqrt{2}\hat{z}(k) = \hat{u}(k-M) - e^{-\frac{i2\pi(k-M)}{N}}\hat{v}(k-M) \qquad k = M, \dots, 2M-1 = N-1
$$

برهان.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{N}\hat{z}(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} z(n)e^{-\frac{i2\pi kn}{N}} \\
&= \sum_{m=0}^{M-1} z(2m)e^{-\frac{i2\pi k(2m)}{N}} + \sum_{m=0}^{M-1} z(2m+1)e^{-\frac{i2\pi k(2m+1)}{N}} \\
&= \sum_{m=0}^{M-1} z(2m)e^{-\frac{i2\pi km}{M}} + e^{-\frac{i2\pi k}{N}}\sum_{m=0}^{M-1} z(2m+1)e^{-\frac{i2\pi km}{M}} \\
&= \sum_{m=0}^{M-1} u(m)e^{-\frac{i2\pi km}{M}} + e^{-\frac{i2\pi k}{N}}\sum_{m=0}^{M-1} v(m)e^{-\frac{i2\pi km}{M}} \qquad (7)
\end{aligned}
$$

که برای $k = ۰, ۱, \ldots, M-۱$ مساوی است با:

$$= \sqrt{M}\hat{u}(k) + \sqrt{M}e^{-\frac{i۲\pi k}{N}}\hat{v}(k)$$

که با حذف $\sqrt{M}$ از طرفین:

$$\hat{z}(k) = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\hat{u}(k) + \frac{۱}{\sqrt{۲}}e^{-\frac{i۲\pi k}{N}}\hat{v}(k) \qquad k = ۰, ۱, \ldots, M-۱$$

حال فرض کنید $k = M, M+۱, \ldots, N-۱$. آنگاه در ادامه (۷) می‌توان نوشت:

$$= \sum_{m=۰}^{M-۱} u(m)e^{-\frac{i۲\pi Mm}{M}} \cdot e^{-\frac{i۲\pi(k-M)m}{M}} + e^{-\frac{i۲\pi k}{N}} \sum_{m=۰}^{M-۱} v(m)e^{-\frac{i۲\pi Mm}{M}} e^{-\frac{i۲\pi(k-M)m}{M}}$$

$$= \sum_{m=۰}^{M-۱} u(m)e^{-\frac{i۲\pi(k-M)m}{M}} + e^{-\frac{i۲\pi(k-M)}{N}} e^{-\frac{i۲\pi M}{N}} \sum_{m=۰}^{M-۱} v(m)e^{-\frac{i۲\pi(k-M)m}{M}}$$

$$= \sqrt{M}\hat{u}(k-M) - e^{-\frac{i۲\pi(k-M)}{N}}\sqrt{M}\,\hat{v}(k-M)$$

که با حذف $\sqrt{M}$ از طرفین تساوی ذکر شده به‌دست می‌آید. ■

مثال . تبدیل فوریه عنصر $z = [\ ۱\ \ ۰\ \ i\ \ ۲\ \ -i\ \ ۱\ \ ۰\ \ i\ ]'$ از $\mathbb{C}^۸$ را به روش گفته شده در لم بالا بیابید.

حل. داریم $u = \begin{bmatrix} ۱ \\ i \\ -i \\ ۰ \end{bmatrix}$ و $v = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۲ \\ ۱ \\ i \end{bmatrix}$.

در $\mathbb{C}^۴$ داریم داریم

$$W = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -i & -۱ & i \\ ۱ & -۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & i & -۱ & -i \end{bmatrix}$$

پس

$$\hat{u} = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -i & -۱ & i \\ ۱ & -۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & i & -۱ & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ i \\ -i \\ ۰ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲+i \\ ۱-۲i \\ i \end{bmatrix}$$

$$\hat{v} = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -i & -۱ & i \\ ۱ & -۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & i & -۱ & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ \\ ۲ \\ ۱ \\ i \end{bmatrix} = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۳+i \\ -۲-i \\ -۱-i \\ ۲i \end{bmatrix}$$

پس

$$\hat{z} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \begin{bmatrix} \hat{u}(۰) + \hat{v}(۰) \\ \hat{u}(۱) + e^{-\frac{i۲\pi}{۸}} \hat{v}(۱) \\ \hat{u}(۲) + e^{-\frac{i۴\pi}{۸}} \hat{v}(۲) \\ \hat{u}(۳) + e^{-\frac{i۶\pi}{۸}} \hat{v}(۳) \\ \hat{u}(۰) - \hat{v}(۰) \\ \hat{u}(۱) - e^{-\frac{i۲\pi}{۸}} \hat{v}(۱) \\ \hat{u}(۲) - e^{-\frac{i۴\pi}{۸}} \hat{v}(۲) \\ \hat{u}(۳) - e^{-\frac{i۶\pi}{۸}} \hat{v}(۳) \end{bmatrix} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \begin{bmatrix} ۴ + i \\ ۲ - ۲\sqrt{۲} + i \\ \sqrt{۲} + i(۱ - \sqrt{۲}) \\ -۲ - i \\ ۲ + ۲\sqrt{۲} + i \\ ۲ - ۳i \\ -\sqrt{۲} + i(۱ + \sqrt{۲}) \end{bmatrix}$$

تعداد ضرب‌های مورد نیاز برای محاسبه $\hat{z}$ از این روش عبارت است از $۲(M^۲ + M)$، [$(M^۲ + M)$ برای هر یک از $\hat{u}$ و $\hat{v}$]. از طرفی احتیاج به ضرب‌های $\hat{v}(k)e^{-\frac{i۲\pi k}{N}}$ است که تعداد آنها M است. پس در کل تعداد

$$۲(M^۲ + M) + M + N = \frac{۱}{۲}N^۲ + \frac{۵}{۲}N$$

محاسبه ضرب لازم است. اما اگر می‌خواستیم $\hat{z}$ را از روش مستقیم و با استفاده از دستور $\hat{z} = Wz$ به‌دست آوریم به تعداد $N^۲ + N$ ضرب احتیاج داشتیم. ملاحظه می‌شود که روش اول سرعت کار را قدری بالا می‌برد. حال بیائید حالتی را در نظر بگیرید که $N = ۲^n$. در این‌جا می‌توان روش $\hat{u}$ و $\hat{v}$ را مکرراً استفاده کرد (یعنی تبدیلات مؤلفه‌های زوج و فرد). حال برای هر $N \in \mathbb{N}$ تعریف کنید

$s(N) =$ تعداد ضرب‌های مورد نیاز برای محاسبه تبدیل فوریه در $\mathbb{C}^N$

چنانکه در بالا ملاحظه شد، برای $N = ۲M$ داریم

$$s(N) \leq ۲s(M) + M + N$$

۳۴. قضیه . *برای $N = ۲^n$ داریم*

$$s(N) \leq \frac{۳}{۲} N \log_۲ N$$

$$s(۲^n) \leq ۳n۲^{n-۱}$$

برهان. به استقراء بر n عمل می‌کنیم. برای $n = ۱$ داریم $N = ۲$ پس $W = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ و برای $z = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ داریم

$$\hat{z} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \begin{bmatrix} a + b \\ a - b \end{bmatrix}$$

اما برای محاسبه بردار $\begin{bmatrix} a+b \\ a-b \end{bmatrix}$ احتیاج به ضرب نداریم و تنها باید بعد از محاسبه این بردار آن را در $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ضرب کنیم. پس تنها ۲ ضرب احتیاج است. پس استقراء برای $n = ۱$ درست است. فرض کنیم حکم برای $n - ۱$ ثابت شده باشد، یعنی فرض کنید

$$s(۲^{n-۱}) \leq ۳(n-۱)۲^{n-۲}$$

آنگاه برای $N = ۲^n$ می‌توان نوشت:

$$s(N) \leq ۲S(M) + M + N$$

$$\begin{aligned} s(۲^n) &\leq ۲s(۲^{n-۱}) + ۲^{n-۱} + ۲^n \\ &\leq ۳(n-۱)۲^{n-۱} + ۲^{n-۱} + ۲^n \\ &= ۳(n-۱)۲^{n-۱} + ۲^{n-۱} + ۲ \times ۲^{n-۱} \\ &= ۳n \times ۲^{n-۱} \end{aligned}$$

■