

ضریب کیفیت یا Q:

طبق تعریف در هر مدار هرچه انرژی دیرتر تلف شود، (یا مدار دیرتر بمیرد!) Q بالاتر است و بالعکس، و برابر است با:

$$Q = \frac{\Delta \omega_0}{2\alpha} \quad (۲۱۴)$$

آیا حالا می‌توانید مراحل یافتن ضریب کیفیت را بگویید؟



خب واضح است دیگر:



تشکیل معادله‌ی دیفرانسیل مدار



یافتن ω_0^2 و 2α



رابطه‌ی (۲۱۴)

حالا سوالی پیش می‌آید؛ چگونه باید به معادله دیفرانسیل رسید؟



باید اولاً روابط ولتاژ و جریان عناصر را دانست و به کمک آن‌ها و KVL و KCL و حذف متغیرهای اضافی، به معادله دیفرانسیل رسید.

رسید.

یک‌بار روابط ولتاژ و جریان در عناصر را با هم مرور می‌کنیم:

$$V_r = R \times i_r \quad (۲۱۵)$$

$$i_r = \frac{1}{R} \times V_r \quad (۲۱۶)$$

فصل چهارم

مدارهای مرتبه دوم

یعنی مدارهای با معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم، و به عبارت دیگر:



یک سلف و یک خازن و هر تعداد مقاومت و منبع و یا دو سلف یا دو خازن مستقل (غیرسری، غیرموازی) و هر تعداد مقاومت و

منبع.

عالی است. معادله دیفرانسیل کلی این مدارها بصورت زیر است:

$$(۲۱۴) \text{ عبارتی بر حسب ورودی و مشتقاتش} = \omega_0^2 y + 2\alpha \frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}$$

و به یاد درس معادلات دیفرانسیل! معادله مشخصه بصورت زیر می‌شود:

$$S^2 + 2\alpha S + \omega_0^2 = 0 \quad (۲۱۳)$$

که در آن ω_0 فرکانس تشدید و α ضریب تضعیف است.

ببینید اساس کار در مدارهای مرتبه‌ی دوم، نوشتن معادله دیفرانسیل و حل آن است. و خیلی از پارامترها از دل همین معادله دیفرانسیل متولد می‌شود. مثلاً:

و مثلاً ضریب کیفیت برابر است با:

$$Q = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (۲۲۶)$$

خُب کافی است، پس در مدارهای بسیار ساده RLC سری و موازی داریم:
در RLC سری:

$$2\alpha = \frac{r}{L} \quad \text{و} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (۲۲۵)$$

در RLC موازی:

$$2\alpha = \frac{1}{rC} \quad \text{و} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (۲۲۷)$$

و در سایر مدارهای مرتبه‌ی دوم



همان مراحل مرسوم: ۱- نوشتن معادله دیفرانسیل و ...

حال با هم سری به درس معادلات دیفرانسیل می‌زنیم؛ به معادله‌ی (۲۱۳) نگاه کنید:

$$S^2 + 2\alpha S + \omega_0^2 = 0 \quad (۲۲۷)$$

و ریشه‌هایش:

$$S_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (۲۲۸)$$

برحسب نوع ریشه‌ها، حالات مدارهای مرتبه‌ی دوم را نام‌گذاری می‌کنیم:

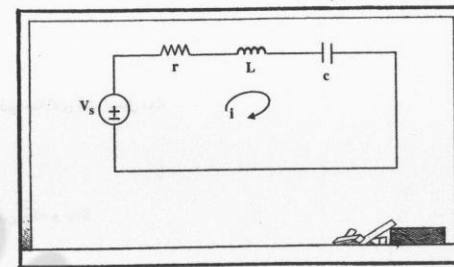
$$V_c = V_0 + \frac{1}{C} \int i_c \cdot dt \quad (۲۱۷)$$

$$i_c = C \frac{dV_c}{dt} \quad (۲۱۸)$$

$$V_L = L \frac{di_L}{dt} \quad (۲۱۹)$$

$$i_L = I_0 + \frac{1}{L} \int V_L \cdot dt \quad (۲۲۰)$$

به عنوان نمونه در یک مدار خیلی ساده (مثلاً RLC سری) برای جریان مدار معادله دیفرانسیل بنویسید:



شکل (۱۴۸): مدار RLC سری

با یک KVL ساده و توجه به شش رابطه‌ی بالا داریم:

$$V_s = ri + L \frac{di}{dt} + V_0 + \frac{1}{C} \int i \cdot dt \quad (۲۲۱)$$

و با مشتق‌گیری داریم:

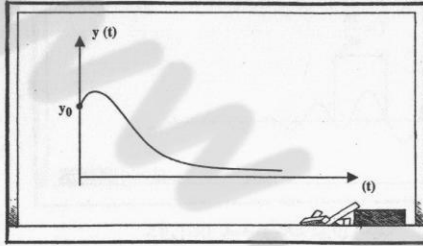
$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{r}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{1}{L} \frac{dV_s}{dt} \quad (۲۲۲)$$

از این رابطه پیداست که:

$$2\alpha = \frac{r}{L} \quad \text{و} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad (۲۲۳)$$

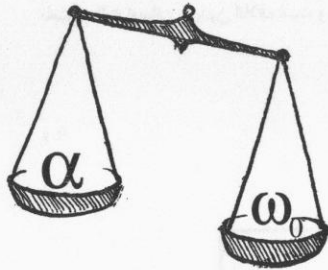


$$s_1 = s_2 < 0 \rightarrow (K_1 + K_2 t) e^{s_1 t} \quad (۲۳۰)$$



شکل (۱۵۰): پاسخ در حالت میرای بحرانی

نام این حالت هم میرای بحرانی یا Critically damped است.



۳- و هرگاه $\alpha < \omega_0$ ، یعنی دو ریشه‌ی مزدوج مختلط خواهیم داشت.

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d \quad (۲۳۱)$$

به طوری که:

$$\omega_d^2 = \omega_0^2 - \alpha^2 \quad (۲۳۲)$$

در این جا ω_d را فرکانس نوسانات میراشونده می‌نامیم و از رابطه‌ی (۲۳۲) حاصل می‌گردد. فرم کلی پاسخ این گونه است:

$$y(t) = K e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \theta) \quad (۲۳۳)$$

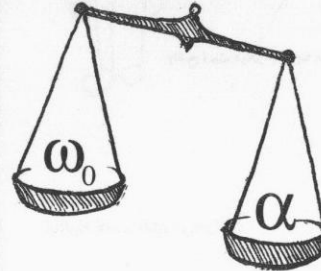
و یا:

$$y(t) = e^{-\alpha t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t) \quad (۲۳۴)$$

و شکل سیگنال خروجی در این حالت که نامش میرای ضعیف یا under damped است ، اینگونه می‌گردد:



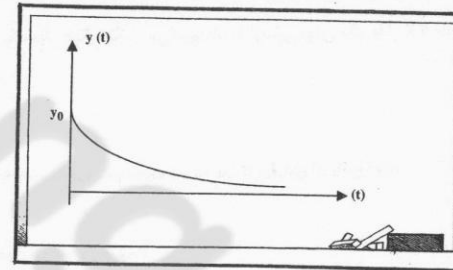
۱- اگر $\alpha > \omega_0$ ، به عبارت دیگر دو ریشه حقیقی منفی متمایز داریم؛ فرم کلی پاسخ چگونه می‌شود؟



در درس معادلات داشتیم:

$$(s_1, s_2 < 0) \rightarrow y(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} \quad (۲۲۹)$$

و شکل آن:

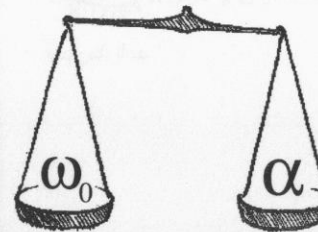


شکل (۱۴۹): پاسخ در حالت میرای شدید

نام این حالت میرای شدید یا Over damped است.

حالات دیگر نیز بسیار ساده‌اند:

۲- اگر $\alpha = \omega_0$ ، یعنی دو ریشه مضاعف حقیقی منفی داریم.





واضح است دیگر. با توجه به رابطه‌ی

$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} \quad (۲۳۸)$$

اینگونه تقسیم‌بندی می‌شود:

$$Q < \frac{1}{2} \quad (۲۳۹) \quad \text{میرای شدید}$$

$$Q = \frac{1}{2} \quad (۲۴۰) \quad \text{میرای بحرانی}$$

$$Q > \frac{1}{2} \quad (۲۴۱) \quad \text{میرای ضعیف}$$

$$Q \rightarrow \infty \quad (۲۴۲) \quad \text{نوسانی}$$

حالت چهارم را با یک بیان دیگر، تکرار می‌کنیم؛ شرط نوسانی بودن یک مدار ۲ تا است: (۱) $\alpha = 0$ و ضمناً (۲) $\omega_0^2 > 0$



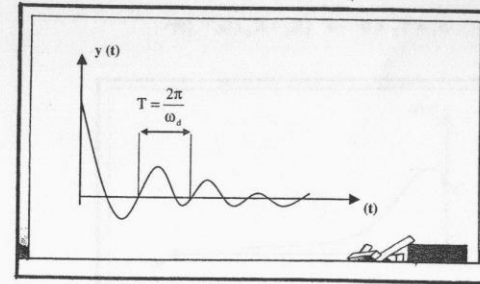
به نظر شما شرط دوم، بیهوده نیست؟ چرا که برقراری آن واضح است:

پس لازم شد با هم یک تمرین ببینیم!



۳۸: ابتدا برای i_L معادله‌ی دیفرانسیلی بنویسید و سپس مقدار R_1 را طوری تعیین کنید که مدار زیر یک

نوسان ساز باشد.



شکل (۱۵۱): پاسخ در حالت میرای ضعیف

۴- و نهایتاً چنانچه $\alpha = 0$ باشد، دو ریشه مزدوج موهومی محض داریم.

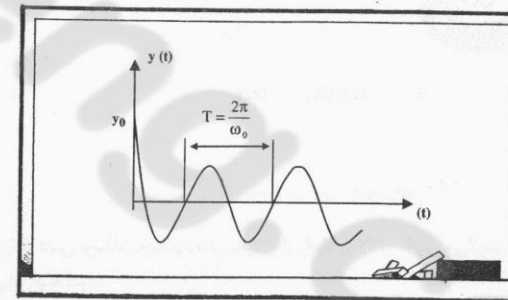
$$S_{1,2} = \pm j\omega_0 \quad (۲۳۵)$$

نامش حالت نوسانی یا بدون اتلاف است و پاسخ بدین صورت می‌گردد:

$$y(t) = K \cos(\omega_0 t + \theta) \quad (۲۳۶)$$

و یا

$$y(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad (۲۳۷)$$

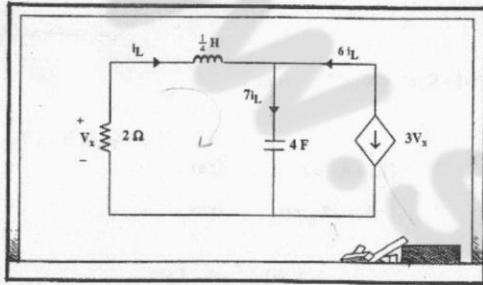


شکل (۱۵۲): پاسخ در حالت بدون اتلاف یا نوسانی

و در هر یک از این حالات برای بدست آوردن ثابت‌ها، از صدق دادن شرایط اولیه و مشتقات آن بهره می‌گیریم. در این ۴ حالت در مورد Q (یا ضریب کیفیت) چه می‌توان گفت؟

۳۹، ابتدا معادله دیفرانسیلی برای i_L تشکیل دهید و سپس پاسخ ورودی صفر $i_L(t)$ را بیابید. (ضمناً

$(V_C(0) = -2V$ و $i_L(0) = 1A$)



شکل (۱۵۴): مدار تمرین (۳۹)



ابتدا روی شکل KCL باری می‌کنیم!

$V_x = -2i_L \rightarrow 3V_x = -6i_L$ (۲۴۸)

و سپس روی حلقه‌ی چپ‌ی KVL می‌زنیم:

$2i_L + \frac{1}{4} \frac{di_L}{dt} + V_C(0) + \frac{7}{4} \int_0^t i_L \cdot dt = 0$ (۲۴۹)

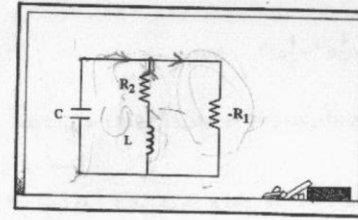
$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 8 \frac{di_L}{dt} + 7i_L = 0$ (۲۵۰)

و برای شرایط اولیه:

$i_L(0) = 1$ (۲۵۱)

در معادله (۲۴۹) $t = 0$ را قرار می‌دهیم، خواهیم داشت:

$2i_L(0) + \frac{1}{4} \frac{di_L}{dt}(0) + V_C(0) + 0 = 0$ (۲۵۲)



شکل (۱۵۳): مدار تمرین (۳۸)

ولتاژ دو سر خازن برابر است با:

$V_C = R_2 i_L + L \frac{di_L}{dt}$ (۲۴۳)

با داشتن این ولتاژ، حالا KCL می‌زنیم:

$R_2 C \frac{di_L}{dt} + LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + i_L - \frac{R_2}{R_1} i_L - \frac{L}{R_1} \frac{di_L}{dt} = 0$ (۲۴۴)

و بعد از مرتب کردن:

$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{LC} \left(R_2 C - \frac{L}{R_1} \right) \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} \left(1 - \frac{R_2}{R_1} \right) i_L = 0$ (۲۴۵)

حال آن دو شرط نوسانی را اعمال می‌کنیم:

$2\alpha = 0 \rightarrow R_1 = \frac{L}{R_2 C}$ (۲۴۶)

$\omega_0^2 > 0 \rightarrow R_1 > R_2$ (۲۴۷)

پس پاسخ، اشتراک دو شرط ۲۴۶ و ۲۴۷ است، یعنی حرفم را پس می‌گیرم!



حالا یک مسأله‌ی نسبتاً جامع حل می‌کنیم:

$$3) i_L(t) = \frac{7}{6}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-7t} \quad (۲۶۱)$$

$$4) i_L(t) = \frac{4}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-7t} \quad (۲۶۲)$$

حال از این که $i_L(0) = 1$ می‌دانید چه نکته‌ی مهمی را متوجه می‌شویم؟ اینکه یا گزینه‌ی ۱ درست است یا ۲ یا ۳ یا ۴.

و یا این که زمین، گرد است!

اما ناامید نشوید! اگر خوب دقت کنید، یک راه حرفه‌ای هست، بگویید گزینه‌ای درست است که در آن «شرایط اولیه‌ی مشتق» سیگنال صدق کند. یعنی مثلاً در این تمرین باید

$$\frac{di_L}{dt}(0) = 0 \quad (۲۶۳)$$

که اگر این را در گزینه‌ها چک کنیم، به کمک رد گزینه‌ها، فقط گزینه‌ی ۳ می‌تواند درست باشد.



اگر بی‌ادبی نباشد! من یک اعتراض دارم؛ بدست آوردن خود شرایط اولیه‌ی مشتق هم قدری زمان می‌برد، اگر می‌شد آن را هم

سریع‌تر بدست آوریم که عالی بود.

بسیار خوب، برای این هم راهی داریم!

به این روابط دقت کنید:

$$\frac{di_L}{dt}(0^+) = \frac{1}{L} V_L(0^+) = \frac{1}{L} \times (\text{ولتاژ اولیه‌ی سلف}) \quad (۲۶۴)$$

$$\frac{dV_C}{dt}(0^+) = \frac{1}{C} I_C(0^+) = \frac{1}{C} \times (\text{جریان اولیه‌ی خازن}) \quad (۲۶۵)$$

من اسم این دو رابطه را «تعبیرهای فیزیکی» نهادام.

می‌دانید این روابط به چه دردی می‌خورند؟

$$\frac{di_L}{dt}(0) = 0 \quad (۲۵۳)$$

حالا باید معادله‌ی (۲۵۰) را با شرایط (۲۵۱) و (۲۵۳) حل کنیم:

$$S^2 + 8S + 7 = 0 \rightarrow S_{1,2} = -1, -7 \quad (۲۵۴)$$

یعنی میرای شدید است، پس:

$$i_L(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-7t} \quad (۲۵۵)$$

و برای K_1 و K_2 داریم:

$$i_L(0) = 1 \rightarrow \begin{cases} K_1 + K_2 = 1 & (۲۵۶) \end{cases}$$

$$\frac{di_L}{dt}(0) = 0 \rightarrow \begin{cases} -K_1 - 7K_2 = 0 & (۲۵۷) \end{cases}$$

$$i_L(t) = \frac{7}{6}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-7t} \quad \text{ولذا:}$$

دقیقاً درست است؛ حالا همین جا یک سؤال مطرح می‌شود و آن این که اگر در یک تست، پاسخ را بخواهند، اینقدر نیاز به دنگ و فنگ! دارد؟ یعنی راه ساده‌تری برای یافتن پاسخ صحیح نداریم؟



آخر من چه بگویم! به نظرم چرا! می‌شود از ابتدا به روش رد گزینه‌ها، پاسخ را بدست آوریم! و بگوییم گزینه‌ای درست

است که در آن شرایط اولیه $i_L(0) = 1A$ بخواند.

چرا شما حرفی نمی‌زنی؟ آیا با دوستت مخالفی!



به نظرم ایشان خیلی ساده لوحانه با مسأله برخورد می‌کند! آخر مگر می‌شود یک طراح تست اینقدر ساده و Low IQ باشد، مثلاً

در همین تمرین (۳۹) گزینه‌ها را چنین قرار می‌دهیم.

$$1) i_L(t) = 5e^{-t} - 4e^{-7t} \quad (۲۵۹)$$

$$2) i_L(t) = -9e^{-t} + 10e^{-7t} \quad (۲۶۰)$$

و نهایتاً با رد گزینه، مساله حل است.



یک مشکل:

وقتی می‌خواهیم مدار را در $t = 0^+$ به کمک رابطه‌ی صفره رسم کنیم، نیاز به $V_C(0^+)$ و $i_L(0^+)$ داریم، اگر آن‌ها را نداشته‌ایم، چه کنیم؟

سؤال خوبی است، آنگاه ابتدا مدار را در $t = 0^-$ به کمک رابطه‌ی بی‌نهایت رسم می‌کنیم تا $V_C(0^-)$ (و در نتیجه $V_C(0^+)$) و یا $i_L(0^-)$ (و در نتیجه $i_L(0^+)$) بدست آیند و سپس سایر قدم‌ها ... پس یک نفر جمع‌بندی کند.



قدم صفرم: رسم مدار در $t = 0^-$ به کمک رابطه‌ی بی‌نهایت و یافتن شرایط اولیه $V_C(0^-)$ و $i_L(0^-)$

قدم یکم: رسم مدار در $t = 0^+$ به کمک رابطه‌ی صفره و یافتن $V_C(0^+)$ و $i_L(0^+)$.

قدم دوم: استفاده از تعبیرهای فیزیکی (روابط ۲۶۴ و ۲۶۵)

قدم نهمین: حل تست به کمک رد گزینه‌ها و ...

تا دیر نشده با هم، یکی دوتا مثال خوب ببینیم:

۱۴۰ در مدار شکل (۱۵۶) داریم:



$$\frac{dV_C}{dt}(0^+) = 10 \quad (۲۷۷)$$

$$\frac{di_L}{dt}(0^+) = V_C(0^+) = i_L(0^+) = 0 \quad (۲۷۸)$$



خیلی جالب شد، به کمک این روابط برای بدست آوردن شرایط اولیه مشتق (یعنی $\frac{di_L}{dt}(0^+)$ ، $\frac{dV_C}{dt}(0^+)$) ابتدا مدار

را در $t = 0^+$ رسم می‌کنیم. (به کمک رابطه صفره) و سپس با تحلیل مدار، $V_L(0^+)$ (و در نتیجه $\frac{di_L}{dt}(0^+)$) و یا $i_C(0^+)$ (و در نتیجه $\frac{dV_C}{dt}(0^+)$) را داریم.



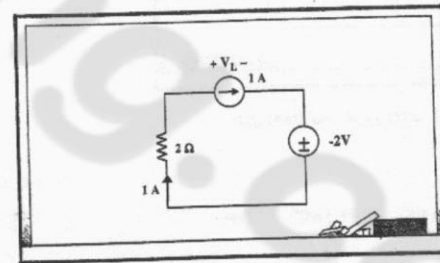
بگذارید من تمام کنم، و در نتیجه می‌گویم گزینه‌ای درست است که شرایط اولیه‌ی مشتق سیگنال در آن صدق کند!...

خُب پس حالا همین تمرین ۳۹ را با گزینه‌های (۲۵۹) الی (۲۶۲) با این روش حل کنید.



با رسم مدار در $t = 0^-$ به کمک رابطه صفره داریم:

in $t = 0^+$

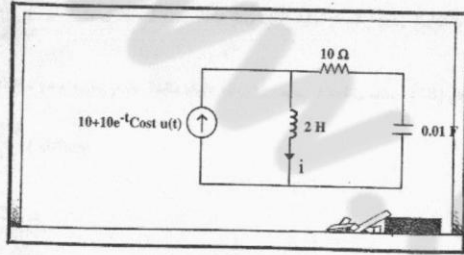


شکل (۱۵۵)، مدار تمرین ۳۹ در حالت $t = 0^+$

با یک KVL ساده:

$$\text{KVL: } V_L = -2 - (-2) = 0 \rightarrow \frac{di_L}{dt}(0^+) = 0 \quad (۲۷۷)$$

۴۴: در شکل (۱۵۸)، $\frac{di}{dt}(0^+)$ چقدر می‌شود؟

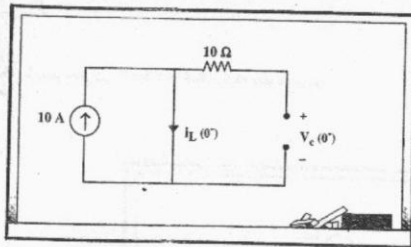


شکل (۱۵۸): مدار تمرین (۴۴)

در تمرین قبلی به قدم صفرم نیازی نبود ولی در این جا قدم صفرم لازم است، پس دست به کار می‌شویم:



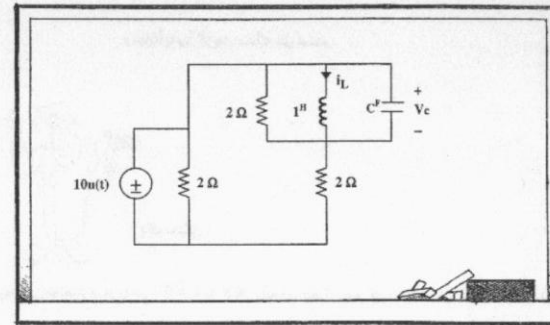
$t = 0^-$



شکل (۱۵۹): مدار تمرین (۴۴) در $t = 0^-$

$i_L(0^-) = 10^A, V_C(0^-) = 0^V$ (۲۷۰)

واضح است که:



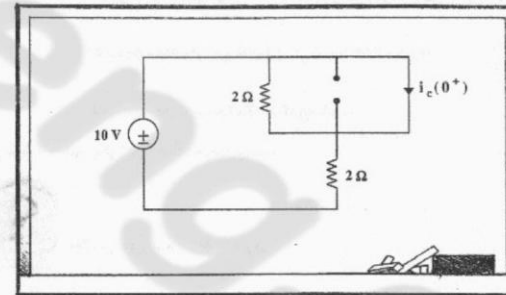
شکل (۱۵۶): مدار تمرین ۴۰

مقدار ظرفیت خازن (C) چقدر است؟



به راحتی از قدم یکم شروع می‌کنیم:

$t = 0$



شکل (۱۵۷): مدار تمرین (۴۰) در $t = 0^+$

و با یک KVL ساده:

$i_C(0^+) = \frac{10}{2} = 5 = C \frac{dV_C}{dt}(0^+) = 10C \Rightarrow C = 0.5F$ (۲۷۹)

و حالا قدم اول:

قبل از آن که شما، مسأله را حل کنید، یک نکته‌ی مهم بگوییم؛ لطفاً خوب دقت کنید:

ببینید گاهی صورت بعضی تست‌ها فریاد می‌زند که:

" مرا اینگونه حل کنید!!! "

مثلاً صورت این تست، می‌گوید یک بار از رابطه صفره و یک بار از رابطه بی‌نهایت کمک بگیرید و.....

ولی گاهی در یک تست این شماست که باید بفهمید چه راهی بهینه است مثلاً اگر در همین مسأله، در مورد $i(t)$ سؤال کرد

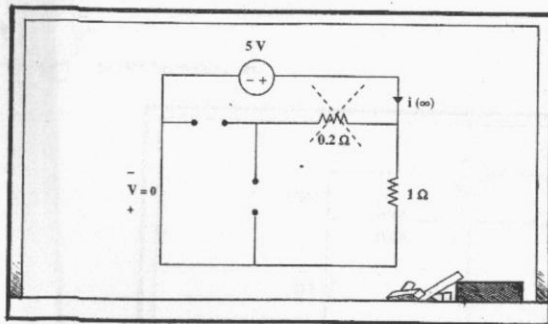
بود و ما می‌خواستیم یا " رد گزینه " مسأله را حل کنیم، خودمان (بدون آنکه مسأله مستقیماً بگوید) $i(0)$ ، $i(\infty)$ را

می‌کردیم و آن گاه می‌گفتیم گزینه‌ای درست است که.....



حالا من مسأله را حل می‌کنم:

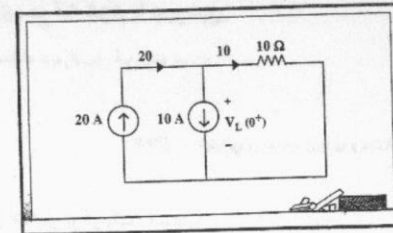
in $t \rightarrow \infty$



شکل (۱۷۲): مدار تمرین (۴۲) در بی‌نهایت

$$i(\infty) = \frac{5}{1} = 5^A \quad (۲۷۳)$$

$t = 0$



شکل (۱۷۰): مدار تمرین (۴۱) در $t = 0^+$

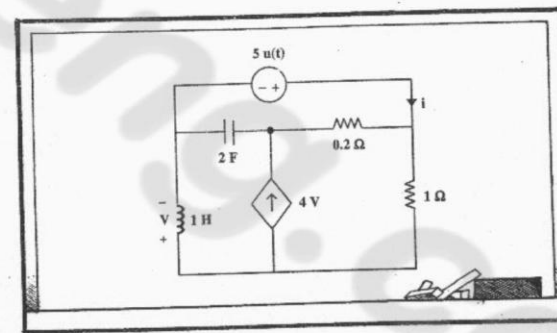
$$V_L(0^+) = 10 \times 10 = 100V \quad (۲۷۱)$$

و در نهایت:

$$\frac{di_L}{dt}(0^+) = \frac{1}{2} \times 100 = 50 \frac{A}{s} \quad (۲۷۲)$$



۴۲: در مدار شکل زیر شرایط اولیه، صفر هستند، $i(0^+)$ و $i(\infty)$ برابر کدام است؟



شکل (۱۷۱): مدار تمرین (۴۲)

$$i(\infty) = -5, i(0^+) = 29 \quad (۲)$$

$$i(\infty) = 5, i(0^+) = -29 \quad (۴)$$

$$i(\infty) = 5, i(0^+) = 29 \quad (۱)$$

$$i(\infty) = -5, i(0^+) = -29 \quad (۳)$$

مدارهای مرتبه دوم با ورودی:

فرم کلی معادله دیفرانسیل این گونه است:

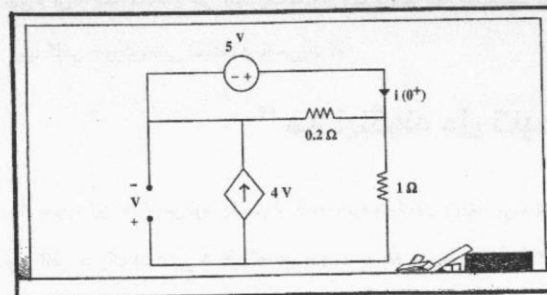
$$(۲۷۵) \quad \alpha_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\alpha_1 \frac{dy}{dt} + \alpha_0 y = \text{عباراتی بر حسب ورودی و مشتقاتش}$$

پاسخ کامل مشتمل بر دو بخش است:

$$(۲۷۶) \quad y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

که y_h همان پاسخ همگن و y_p پاسخ خصوصی است. (یاد درس معادلات دیفرانسیل بیافزاید)پاسخ همگن ناشی از شرایط اولیه است. (ورودی $= 0$ یا سمت راست معادله دیفرانسیل $= 0$)

پاسخ خصوصی ناشی از ورودی است، و هم جنس با سمت راست معادله دیفرانسیل.

و سپس $i(0^+)$:in $t = 0^+$ شکل (۱۷۳): مدار تمرین ۴۴ در 0^+

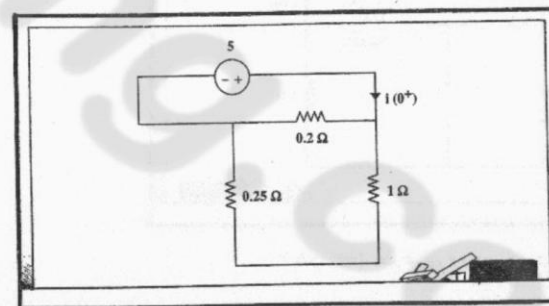
برای حل از روش گره استفاده می‌کنیم....



شمرنده! اما من راه حل بهتری سراغ دارم. در این مدار منبع جریان وابسته‌ای داریم که به ولتاژ خودش وابسته است. یعنی

یک مقاومت $\frac{1}{4}$ اهمی.

پس مدار این جور می‌شود:

شکل (۱۷۴): مدار تمرین ۴۴ پس از ساده‌سازی در $t = 0^+$

$$(۲۷۶) \quad i(0^+) = \frac{5}{0.2 \parallel 1.25} = +29$$

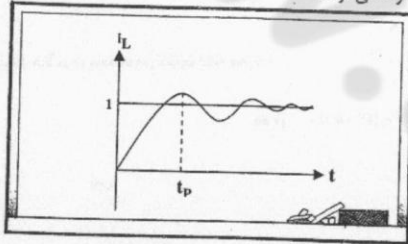
یعنی گزینه ۱ صحیح می‌باشد.



پس یعنی در این مساله

$$i_{LP}(t) = 1 \quad (۲۸۲)$$

یعنی فرم پاسخ در این مساله این گونه می‌گردد:



شکل (۱۷۵): پاسخ پله مدار RLC موازی

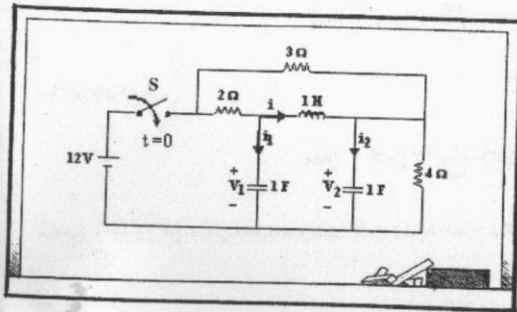
و برای پاسخ ضربه، می‌توان از پاسخ پله مشتق گرفت:

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \left(\frac{\omega_0^2}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t \right) u(t) \quad (۲۸۳)$$

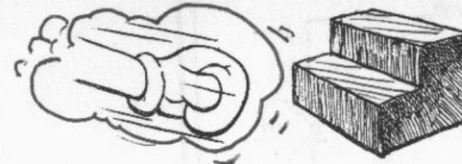
و برای یافتن سایر پاسخ‌ها، مثل پاسخ پالس در مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان، از خواص جمع آثار و شیفت زمانی استفاده می‌کنیم.



۴۳: مدت طولانی باز بوده و در $t=0$ بسته می‌گردد. $\frac{d^2i}{dt^2}(0^+)$ چقدر است؟



شکل (۱۷۷): مدار تمرین ۴۳



پاسخ پله و پاسخ ضربه

مثلاً در یک مدار RLC موازی پاسخ پله را برای جریان سلف می‌خواهیم.



معادله دیفرانسیل اینجوری می‌شود:

$$\begin{cases} \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = \frac{1}{LC} u(t) \\ i_L(0) = 0, i_L'(0) = 0 \end{cases} \quad (۲۷۷)$$

حالا برای پاسخ همگن مثلاً فرض کنید به صورت میرای ضعیف است:

$$i_{Lh}(t) = e^{-\alpha t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t) \quad (۲۷۸)$$

$$i_{LP}(t) = ? \quad (۲۷۹)$$

قبل از اتمام حل مساله یک نکته‌ی جالب دیگر بگوییم، ببینید اگر بنویسیم:

$$i_L(t) = i_{Lh}(t) + i_{LP}(t) \quad (۲۸۰)$$

و با توجه به میرا بودن $i_{Lh}(t)$ داریم:

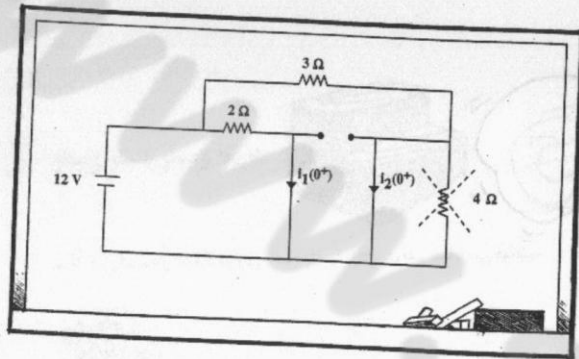
$$\lim_{t \rightarrow \infty} i_L(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} i_{LP}(t) \quad (۲۸۱)$$

آیا اصل منظورم را فهمیدید؟



جالب شد، یعنی در اینجا پاسخ خصوصی همان پاسخ دائمی یا ماندگار شد، و می‌شود مقدار آن را از $y(\infty)$ (به کمک رابطه

بی‌نهایت) بدست آورد و لزومی به مراحل انجام شده برای یافتن پاسخ خصوصی در درس معادلات دیفرانسیل نمی‌باشد.

شکل (۱۷۷)، مدار تمرین ۴۳ در $t = 0^+$ (با رابطه صفره)

$$i_1(0^+) = \frac{12}{2} = 6A \quad (۲۸۹)$$

$$i_2(0^+) = \frac{12}{3} = 4A \quad (۲۹۰)$$

پس:

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2}(0^+) + 4 - 6 = 0 \rightarrow \frac{d^2 i_1}{dt^2}(0^+) = 2 \quad (۲۹۱)$$

تا اینجا در مورد مدارهای مرتبه دوم کافی است. بعداً با هم از این مبحث نیز مسایل بیشتری حل می کنیم.



اگر $\frac{di}{dt}(0^+)$ را می خواست، خیلی ساده بود، چرا که با تعبیرهای فیزیکی که قبلاً حرفش را زدیم، کار ساده می شد، در حلقه‌ی

وسطی می گفتیم:

$$\text{KVL: } \frac{di}{dt}(0^+) + V_2(0^+) - V_1(0^+) = 0 \quad (۲۸۶)$$

و چون مدار قبلاً مرده بوده همه‌ی شرایط اولیه صفرند:

$$i(0^+) = V_2(0^+) = V_1(0^+) = 0 \quad (۲۸۵)$$

پس:

$$\frac{di}{dt}(0^+) = 0 \quad (۲۸۷)$$

اما حیف که حرفهای من ربطی به خواسته‌ی مسأله نداشت!

اشتباه می کنید، خیلی هم حرف‌های خوبی بود، از رابطه‌ی (۲۸۴) مشتق بگیرید و از تعبیرهای فیزیکی استفاده کنید:



با مشتق‌گیری داریم:

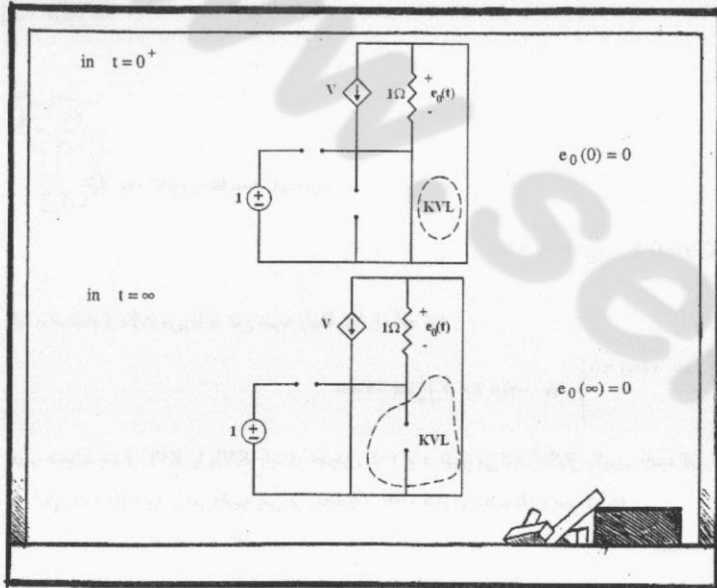
$$\frac{d^2 i_1}{dt^2}(0^+) + \frac{dV_2}{dt}(0^+) - \frac{dV_1}{dt}(0^+) = 0 \quad (۲۸۷)$$

و با تعبیرهای فیزیکی،

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2}(0^+) + \frac{1}{C_2} i_2(0^+) - \frac{1}{C_1} i_1(0^+) = 0 \quad (۲۸۸)$$

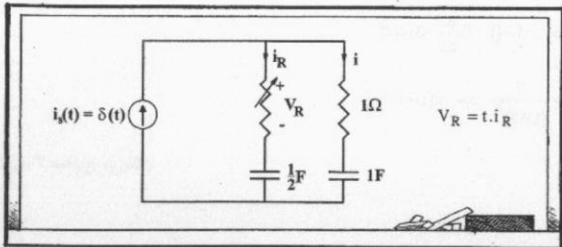
حالا فقط $i_1(0^+)$ ، $i_2(0^+)$ را می خواهیم، مدار را در $t = 0^+$ (با رابطه صفره) می کشیم:

به نظرم با بررسی مقدار اولیه و نهایی $e_0(t)$ گزینه صحیح مشخص می‌شود.



و تنها گزینه ۴ دو شرط فوق را دارد.

۲- همگی شرایط اولیه صفر هستند. $i(C=1F)$ در $t=1s$ کدام است؟



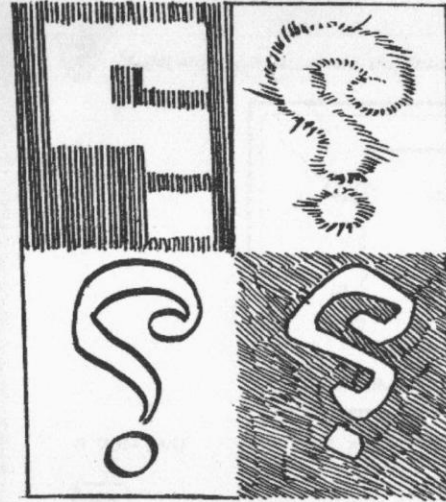
$\frac{1}{16}$ (۴)

$\frac{1}{8}$ (۳)

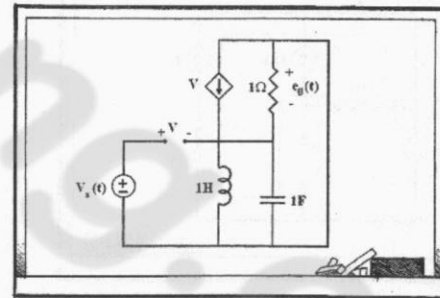
$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

تمرینات فصل چهارم



۱- پاسخ به $e_0(t)$ کدام است؟



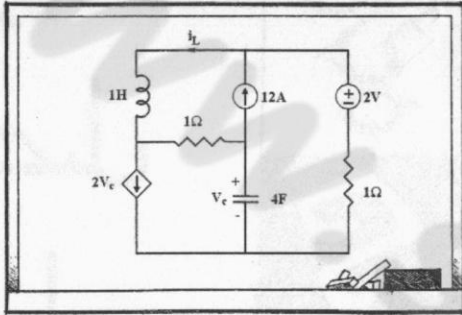
$-te^{-t}u(t)$ (۴)

$e^{-t}u(t)$ (۳)

$(1+te^{-t})u(t)$ (۲)

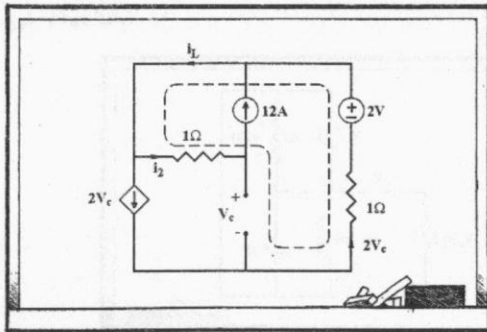
$(1-e^{-t})u(t)$ (۱)

۳- ولتاژ خازن و جریان سلف در حالت دائمی کدامند؟



- (۱) 12A, -10V
 (۲) 12A, -12V
 (۳) 16/3 A, -10/3 V
 (۴) 16/3 A, -12V

در حالت دائمی سلف اتصال کوتاه و خازن مدار باز است:



حالا اگر یک KVL در مدار بزنیم داریم:

$$+V_C + 2V_C - 2 + 12 = 0 \rightarrow V_C = -\frac{10}{3} V$$

چون مقاومت غیرخطی داریم و مدار مرتبه دو پس از رابطه طلایی نمی‌توانیم استفاده کنیم پس به سراغ KCL و KVL برویم.

$$i_R = \delta(t) - i$$

یک KVL در حلقه سمت راست بزنیم.

$$t(\delta(t) - i) + \frac{1}{2} \int_0^t (\delta(t) - i) dt - \int_0^t i dt - i = 0$$

باید با استفاده از نکات مربوط به تابع ضربه رابطه بالا را ساده کنید.

$$\left. \begin{aligned} f(t) \delta(t) &= f(0) \delta(t) \Rightarrow t \delta(t) = 0 \\ \int_0^t \delta(t) dt &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -ti + 2 - 3 \int_0^t i dt - i = 0$$

خوب همیشه بعد از KCL یا KVL، باید در حدودی که t و i تغییر می‌کنند انتگرال بگیریم حدود تغییرات t را می‌دانیم از $t=0$ تا $t=1$ ولی $I_0 = i(t=0)$ را نمی‌دانیم، پس در رابطه بالا $t=0$ قرار می‌دهیم تا I_0 بدست آید:

$$0 + 2 - 0 - i = 0 \Rightarrow i = 2A$$

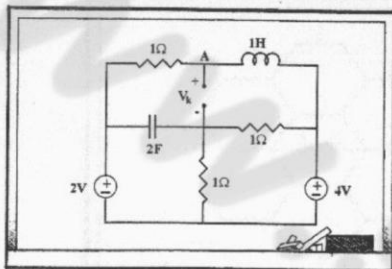
و برای آن که di و dt در رابطه ظاهر شوند، یکبار از رابطه برحسب t مشتق می‌گیریم:

$$\frac{d[-(t+1)i + 2 - 3 \int_0^t i dt]}{dt} = 0 \Rightarrow -i - (t+1) \frac{di}{dt} - 3i = 0$$

$$\Rightarrow \int_2^1 \frac{di}{-4i} = \int_0^1 \frac{dt}{t+1} \Rightarrow i = \frac{2}{(t+1)^4} \Rightarrow i(t=1) = \frac{1}{8}$$

پس گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

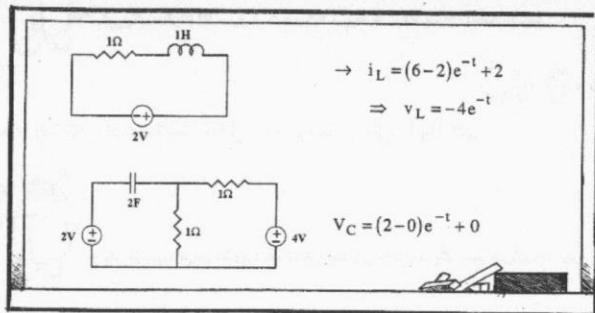
با کمی دقت به راحتی $i_L(0) = 6A$ و $V_C(0) = 2V$ بدست می آید.
بعد از باز شدن کلید مدار به صورت زیر در می آید:



قبول دارید که ولتاژ دو سر هر کدام از دو شاخه شامل سلف و خازن 2V است؟



بله، چقدر جالب. فهمیدم، می شه مدار بالا را به صورت دو مدار مرتبه اول نوشت:



حالا با یک KVL هم V_K بدست می آید:



$$V_K = -V_L + 4 - 2 - V_C = 2e^{-t} + 2$$

$$V_K(t=1) = 2e^{-1} + 2 = 2.74$$

پس گزینه ۳ صحیح می باشد.

و با یک KCL هم i_L بدست می آید:



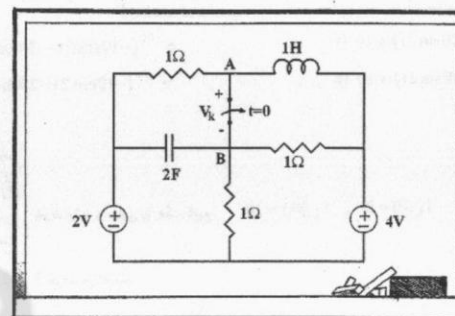
$$i_L = 12 + 2V_C = \frac{16}{3}$$

پس گزینه ۳ صحیح می باشد.

۴- کلید K به مدت طولانی بسته بوده و مدار به حالت دائمی درآمده است، در $t=0$ کلید باز می شود V_K در $t=1s$ کدام است؟



است؟



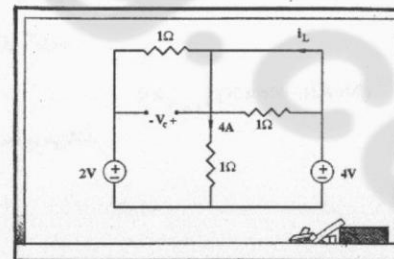
3.1 (۴)

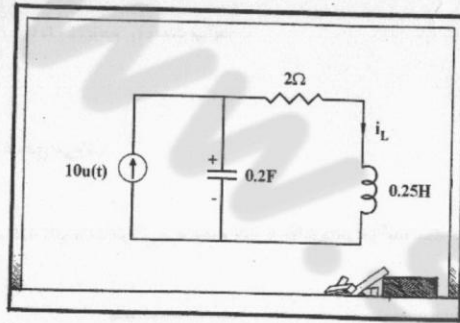
2.74 (۳)

2.37 (۲)

2 (۱)

در ابتدا باید مدار را در حالت دائمی رسم کنیم و مقادیر اولیه را بدست آوریم.



عـ $i_L(t)$ کدام است؟

$$e^{-4t}(-10\cos 2t - 20\sin 2t) + 10 \quad (2)$$

$$e^{-4t}(-10\cos 2t - 20\sin 2t) \quad (1)$$

$$e^{-4t}(-10\cos 2t + 20\sin 2t) + 10 \quad (4)$$

$$e^{-2t}(-10\cos 2t - 20\sin 2t) \quad (3)$$

شرط اولیه و نهایی را چک کنیم. $i_L(0) = 0$ ، $i_L(\infty) = 10$



پس گزینه ۲ یا ۴ صحیح است.

حالا باید از تعبیروهای فیزیکی و مشتق گرفتن از i_L استفاده کنیم.



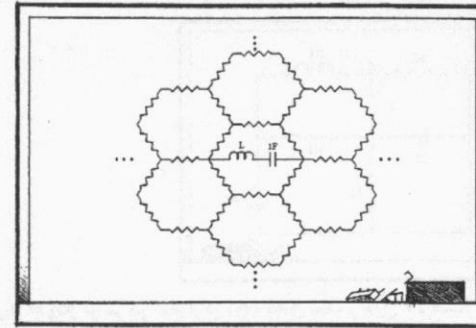
$$V_L(0^+) = 0 \rightarrow \frac{di_L}{dt}(0^+) = 0$$

از گزینه ۲ مشتق بگیریم.

$$\frac{di_L(0^+)}{dt} = \left[-4e^{-4t}(-10\cos 2t - 20\sin 2t) + e^{-4t}(20\sin 2t - 40\cos 2t) \right]_{t=0} = 0$$

پس گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

۵ - تمام مقاومت‌ها 1Ω هستند و شبکه از هر طرف به بینهایت می‌رود، به ازاء کدام مقدار L ، $Q = 1.2$ خواهد بود؟



۱.96 H (4)

1.2 H (3)

1 H (2)

0.5 H (1)

این یک مدار RLC سری است و روابط مربوط به RLC سری را حفظ هستیم.



$$2\alpha = \frac{R}{L} , \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

و حالا فقط کافی است، مقاومت معادل از دو سر سلف و خازن را پیدا کنیم.

و راه حل پیدا کردن مقاومت شبکه‌های بینهایتی را بلدیم، یک منبع جریان 1A وارد می‌کنیم و یک منبع جریان 1A هم خارج



می‌کنیم.

در اثر منبع جریان 1A ورودی:

$$V = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$$

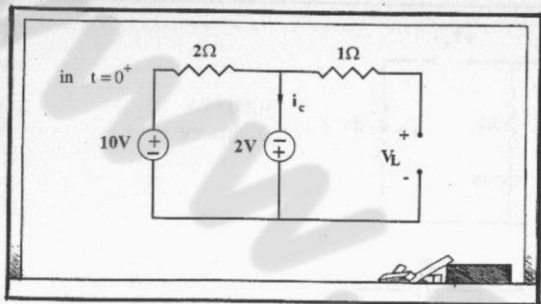
و در اثر منبع جریان 1A خروجی:

$$V = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}$$

پس کلاً داریم:

$$R_{eq} = V = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \right) = \frac{7}{6} \rightarrow Q = \frac{6}{7} \sqrt{\frac{L}{1}} = 1.2 \rightarrow L = 1.96H$$

پس گزینه ۴ صحیح می‌باشد.



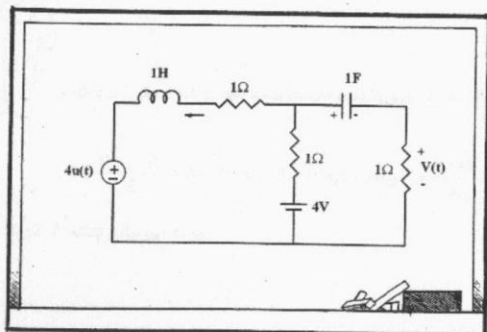
$$V_L(0^+) = -2V$$

$$i_c(0^+) = 6A$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dV_C(0^+)}{dt} = 1 \times 6 = 6 \\ \frac{di_L(0^+)}{dt} = \frac{1}{1} \times -2 = -2 \end{cases}$$

پس گزینه ۱ صحیح می باشد.

در $t < 0$ مدار در حالت دائمی است، $V(t)$ برای $t > 0$ کدام است؟

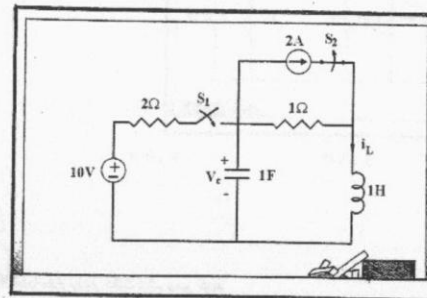


- $2te^{-t}$ (۴) $\frac{1}{2}(t+4)e^{-t}$ (۳) $\frac{1}{2}te^{-t}$ (۲) $2(t+1)e^{-t}$ (۱)

ابتدا مدار را در $t = 0^-$ رسم کنیم و مقادیر اولیه را بیابیم:

۷. در مدار شکل زیر کلید S_1 برای مدت طولانی باز و کلید S_2 برای مدت طولانی بسته بوده است. در $t = 0$ کلید S_1 را

بسته و S_2 را باز می کنیم. کمیت های $\frac{dV_C(0^+)}{dt}$ و $\frac{di_L(0^+)}{dt}$ به ترتیب کدامند؟

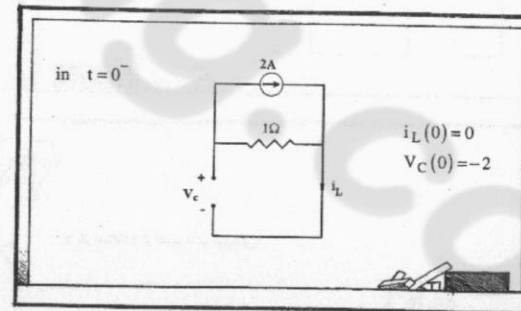


- 2 و 6 (۴) -1 و 3 (۳) -2 و 4 (۲) -2 و 6 (۱)

باید از تعبیرهای فیزیکی استفاده کنیم.

$$\frac{dV_C(0^+)}{dt} = \frac{1}{C} i_c(0^+)$$

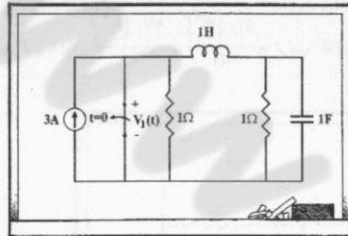
$$\frac{di_L(0^+)}{dt} = \frac{1}{L} V_L(0^+)$$



$$i_L(0) = 0$$

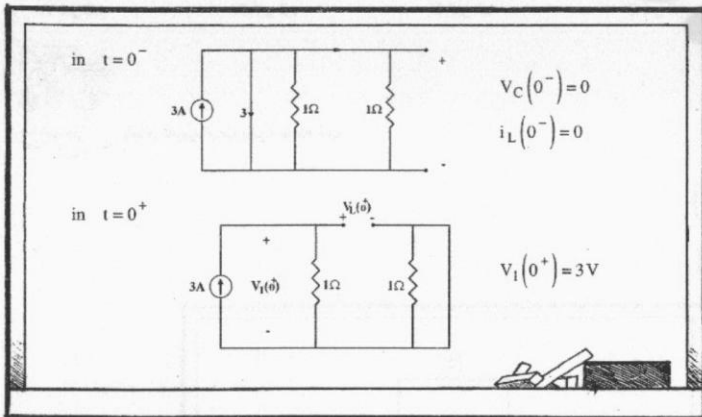
$$V_C(0) = -2$$

۹- کلید در $t=0$ باز می‌شود و قبل از آن به حالت دائم رسیده است. $V_1(0^+)$ و $\frac{dV_1(0^+)}{dt}$ کدامند؟



- (۱) 3 و 0 (۲) 0 و -3 (۳) 3 و 3 (۴) 3 و -3

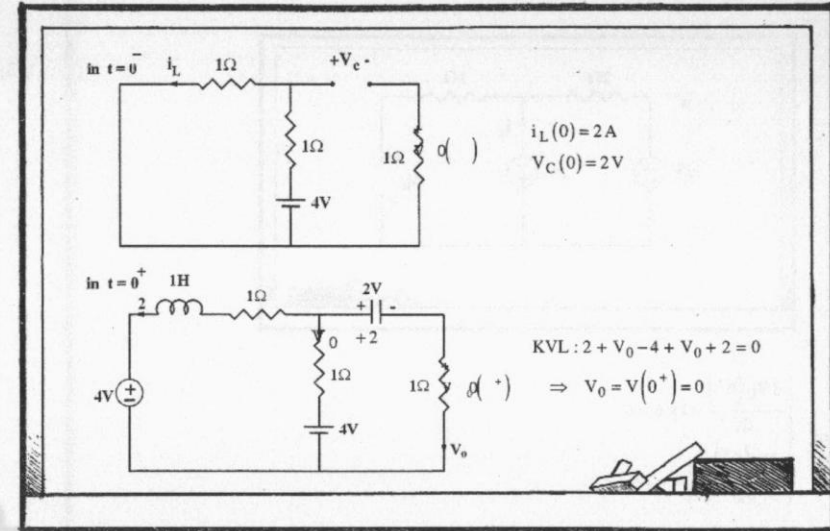
ابتدا مدار را در حالت دائم رسم کنیم:



و باز استفاده از تعبيرهای فیزیکی:

$$V_1(t) + i_L(t) = 3 \rightarrow \frac{dV_1}{dt} + \frac{di_L}{dt} = 0 \rightarrow \frac{dV_1(0^+)}{dt} = -V_L(0^+) = -V_1(0^+) = -3$$

پس گزینه ۴ صحیح می‌باشد.



پس گزینه ۲ یا ۴ صحیح است.

و حالا با زدن یک KVL در حلقه سمت راست و مشتق‌گیری از آن $V'(0)$ را با استفاده از تعبيرهای فیزیکی می‌یابیم.

$$V(t) - 4 + V(t) + i_L(t) + V_C = 0 \Rightarrow 2 \frac{dV(t)}{dt} + V_L(t) + i_C(t) = 0 \Rightarrow V'(0) = \frac{-0 - (-4)}{2} = 2$$

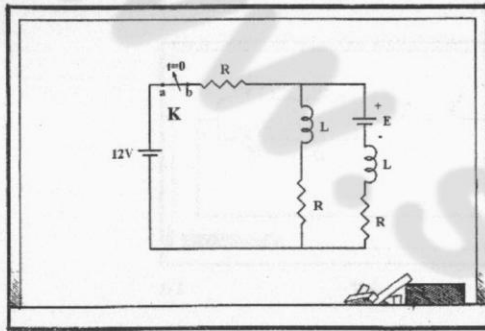
حال اگر از گزینه ۴ مشتق بگیریم، داریم:

$$V'(t) \Big|_{t=0} = (2e^{-t} - 2te^{-t}) \Big|_{t=0} = 2$$

پس گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

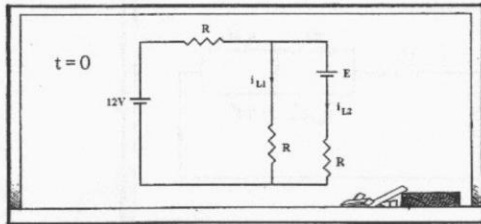


۱- کلید K به مدت طولانی بسته بوده و در $t=0$ باز می‌شود، E چقدر باشد تا در لحظه باز شدن کلید ولتاژ ضربه‌ای بین دو سر ab ایجاد نشود؟



- ۴) 24 ۳) 16 ۲) 12 ۱) 4

قبل از باز شدن کلید، مدار به حالت دائم رسیده است، پس:



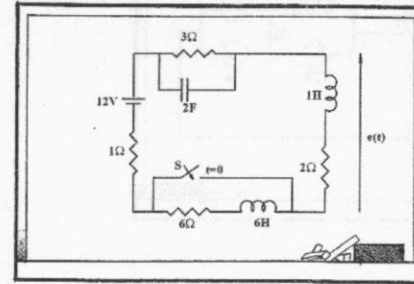
$$\begin{cases} 12 = R(i_{L1} + i_{L2}) + Ri_{L1} \\ -E + Ri_{L1} - Ri_{L2} = 0 \end{cases} \Rightarrow i_{L1} = \frac{1}{3R}(12 + E), \quad i_{L2} = \frac{1}{3R}(12 - 2E)$$

$$i_{L1} = -i_{L2} \Rightarrow E = 24V$$

و برای آن‌که ولتاژ ضربه ایجاد نشود، باید:

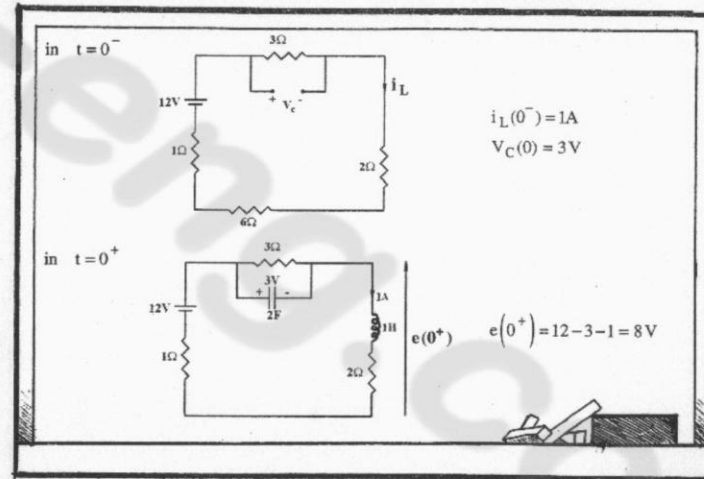
پس گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

۱- مدار شکل مقابل در حالت دائمی است. در لحظه $t=0$ کلید S بسته می‌شود. $e(0^+)$ و $\frac{de(0^+)}{dt}$ کدامند؟



- ۴) هیچکدام ۳) 3V و $-12 \frac{V}{sec}$ ۲) 8V و $0 \frac{V}{sec}$ ۱) 8V و $-6 \frac{V}{sec}$

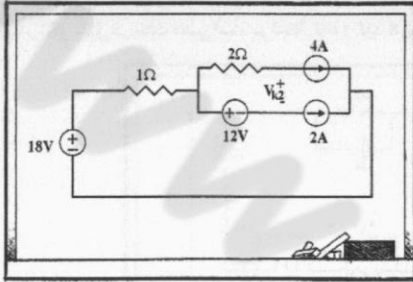
قبل از $t=0$ مدار به حالت دائم رسیده است.



$$e(t) = 12 - V_C - i_L \Rightarrow \frac{de(t)}{dt} = -\frac{dV_C}{dt} - \frac{di_L}{dt} = -\frac{1}{2}i_C - V_L \Rightarrow \frac{de(0^+)}{dt} = 0 - (8 - 2) = -6$$

پس گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

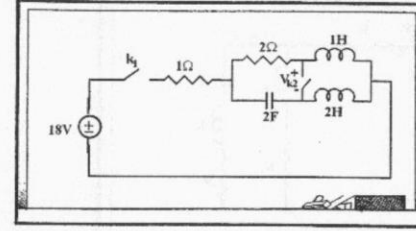
حالا که مدار به حالت دائمی رسیده است کلید k_2 باز می شود و مدار به صورت زیر در می آید.



$$V_{k_2} = -2 \times 4 + 12 = 4 \text{ V}$$

پس گزینه ۳ صحیح می باشد.

۱۲- در مدار شکل زیر در حالی که سلفها و خازن ها بدون انرژی هستند، کلیدهای k_1 و k_2 به طور هم زمان بسته می شوند. پس از آن که مدار به حالت دائمی خود رسید، کلید k_2 را مجدداً باز می کنیم. درست پس از باز شدن کلید k_2 ولتاژ دو سر V_{k_2} کدام است؟



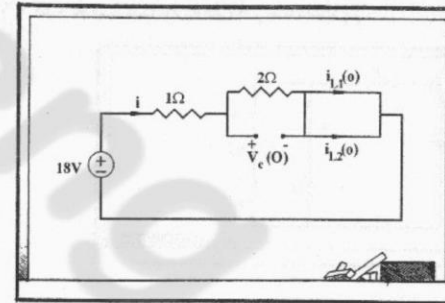
۸ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

۰ (۱)

اول با رسم مدار در حالت دائمی مقادیر اولیه جریان سلفها و ولتاژ خازن را می یابیم.



$$i = \frac{18}{3} = 6 \text{ A}$$

$$i_{L_1}(0) = \frac{2}{2+1} \times 6 = 4 \text{ A}$$

$$i_{L_2}(0) = \frac{1}{2+1} \times 6 = 2 \text{ A}$$

$$V_C(0) = 2 \times 6 = 12 \text{ V}$$