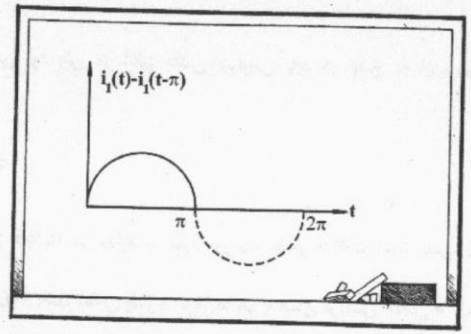
پس:



$$i_2(t)=\frac{d\left[i_1(t)-i_1(t-\pi)\right]}{dt}$$

و همین بلا را باید سر $v_1(t)$ هم در بیاوریم و $v_2(t)$ را بدست آوریم.

$$v_2(t)\Big|_{t=\frac{3\pi}{2}}=\frac{d}{dt}\left[e^{-(t-\pi)}-\left(\sin(t-\pi)-e^{-(t-\pi)}\right)\right]_{t=\frac{3\pi}{2}}$$

$$=\left[-e^{-(t-\pi)}-\cos(t-\pi)-e^{-(t-\pi)}\right]_{t=\frac{3\pi}{2}}=-2e^{-\frac{\pi}{2}}$$

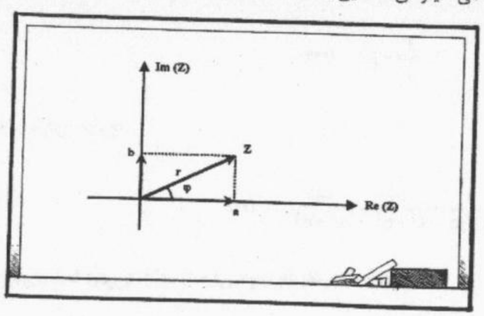
پس گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

فصل ششم

تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی

اعداد مختلط و فازور:

پیش نیاز بحث آنالیز حالت دائمی سینوسی، آشنایی با حساب مختلط است.



شکل (۲۰۷): نمایش یک عدد مختلط

نمایش دکارتی (۳۵۷ $Z=a+jb$

نمایش قطبی (۳۵۸ $Z=r\measuredangle\varphi=re^{j\varphi}$

تبدیلات:

قطبی به دکارتی: (۳۵۹ $a=r\cos\varphi\ ,\ \ b=r\sin\varphi$

دکارتی به قطبی: (۳۶۰ $r=\sqrt{a^2+b^2}\ ,\ \ \varphi=\tan^{-1}\frac{b}{a}$

مزدوج مختلط:

$$Z^* = a - jb = r\measuredangle -\varphi \qquad (۳۲۱$$

عملیات:
واضح است که جمع و تفریق در سیستم دکارتی، و ضرب، تقسیم و توان در سیستم قطبی راحت‌تر است.

$$Z_1 \pm Z_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2) \qquad (۳۲۲$$

$$Z_1 \overset{\times}{\div} Z_2 = (r_1 \overset{\times}{\div} r_2) \measuredangle \varphi_1 \pm \varphi_2 \qquad (۳۲۳$$

$$Z^n = r^n \measuredangle n\varphi = r^n(\cos n\varphi + j\sin n\varphi) \qquad (۳۲۴$$

ضمناً به این روابط هم توجه کنید:

$$ja = a\measuredangle 90^\circ \;,\; -ja = a\measuredangle -90^\circ \;,\; -a = a\measuredangle 180^\circ \;,\; a = a\measuredangle 0^\circ \qquad (۳۲۵$$

به علاوه:

$$\frac{1}{j} = -j \qquad (۳۲۶$$

و اما ضرب در مزدوج مخرج:

$$\frac{1}{a+jb} = \frac{a}{a^2+b^2} + j\frac{-b}{a^2+b^2} \qquad (۳۲۷$$

خلاصه این جور روابط پیش پا افتاده را خیلی خوب بلد باشید.

در این قسمت با سیگنال‌هایی سر و کار داریم به صورت:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad (۳۲۸$$

در این سیگنال، سه مقدار، مهم است:

A : دامنه یا ماکزیمم، ω : فرکانس و φ = فاز (یا همان فاز اولیه)

خوب دقت کنید؛ تا امروز وقتی سؤال می‌شد که فلان ولتاژ یا جریان چقدر است، شما در پاسخ فقط یک **عدد** می‌گفتید، درست

هم همین بود ولی در آنالیز دائمی سینوسی باید در پاسخ به این سؤال، سه جواب بدهید؛  A ،  ω

 φ

یک خبر خوب: در مدارهای مورد بررسی، مقدار ω ثابت است یعنی، اگر ورودی یک سیگنال سینوسی با فرکانس «فلان= ω_{in}» باشد، تمامی ولتاژ و جریان‌ها هم با همان فرکانس «فلان = ω_{out}» می‌باشند، پس باید به دو مقدار برسیم: دامنه و فاز که آن‌ها را در یک کمیت جمع می‌کنیم با عنوان فازور[1]، به صورت:

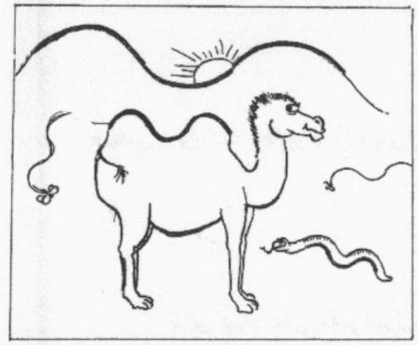
$$X = A\measuredangle\varphi = Ae^{j\varphi} = A\cos\varphi + jA\sin\varphi \qquad (۳۲۹$$

پس فازور یک جور **«بردار»** و به عبارتی یک کمیت **«مختلط»** است.

یک خواهش: در درس آنالیز دائمی سینوسی یک **«تیک عصبی»**! پیدا کنید؛ به جای ولتاژ بگویید: «فازور ولتاژ» و به جای جریان بگویید: «فازور جریان» و ... حالا آماده‌ایم تا درس آنالیز حالت دائمی سینوسی را آغاز کنیم.

1- Phasor

آنالیز حالت دائمی سینوسی:



ابتدا به مفهوم این قضیه خوب دقت کنید:

قضیه: مجموع هر تعداد سیگنال سینوسی هم فرکانس و مشتقات آن‌ها، یک سیگنال سینوسی با همان فرکانس است.

اگر گفتید این قضیه به چه دردی می‌خورد؟

خیلی جالب است دیگر؛ اصلاً به همین دلیل است که ادعا می‌کنیم اگر فرکانس ورودی «فلان = ω_{in}» باشد، فرکانس هر سیگنال دیگری هم برابر همان «فلان = ω_{out}» است.

حالا معادله‌ی دیفرانسیل چنین مداری را نگاه کنید:

$$\frac{d^n y}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^n}+\cdots+a_0 y=A\cos(\omega t+\varphi) \qquad (۳۷۰$$

و فرم کلی پاسخ کامل بدین صورت است:

$$y(t)=\underbrace{\sum_{i=1}^{n}k_i e^{s_i t}}_{\text{پاسخ همگن یا پاسخ ورودی صفر}}+\underbrace{B\cos(\omega t+\theta)}_{\text{پاسخ خصوصی یا پاسخ حالت صفر}} \qquad (۳۷۱$$

در درس آنالیز **حالت دائمی سینوسی** ما به بخش دوم این پاسخ کار داریم، این پاسخ فقط در اثر ورودی سینوسی است و نه شرایط اولیه و نه ورودی DC.

اگر این گونه باشد، یعنی ما هرگاه در جستجوی پاسخ حالت دائمی سینوسی بودیم ، اثر شرایط اولیه و بخش DC ورودی‌ها را صفر می‌کنیم.

دقیقاً ! ضمناً یادتان باشد که گاهی پاسخ حالت دائمی سینوسی معنی ندارد، به عنوان نمونه:

وقتی تعدادی از S_i ها (ریشه‌های معادله‌ی مشخصه) در نیمه‌ی راست صفحه‌ی فرکانس مختلط باشد. (با مقدار حقیقی مثبت) که اصلاً در این صورت مدار ناپایدار می‌گردد.

و جالب‌تر !! زمانی که ریشه‌های معادله مشخصه بصورت $\pm j\omega_0$ (موهومی محض) باشند، در این حالت پاسخ دائمی هست ولی سینوسی نمی‌باشد، به فرم:

$$y=\underbrace{A\cos(\omega_0 t+\alpha)}_{\text{پاسخ ورودی صفر}}+\underbrace{B\cos(\omega_{in} t+\theta)}_{\text{پاسخ حالت صفر (ناشی از منبع)}} \qquad (۳۷۲$$

که در آن ω_0 فرکانس تشدید و ω_{in} فرکانس ورودی است.

کاملاً صحیح است و جالب آن که یک نوع مساله‌ی خیلی قشنگ که در این مدل مسایل می‌دهد آن است که مداری را با این شرایط می‌دهند و می‌پرسند که در چه صورتی پاسخ حالت دائمی سینوسی دارد. حال ما باید شرطِ:

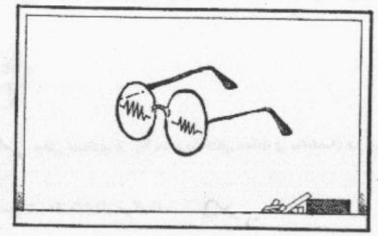
$$\omega_0=\omega_{in} \qquad (۳۷۳$$

را برقرار نماییم، تا پاسخ بصورت **حالت دائمی سینوسی** گردد.

خُب برویم سراغ آنالیز حالت دائمی سینوسی :

با دیدن معادله‌ی ۳۷۰) که یک معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی n ام غیرهمگن است و فکر به آن که سر جلسه‌ی آزمون باید آن را حل کنیم؛ غباری از غم بر ذهن ما می‌نشیند که ...

اما به کمک یک عینک مشهور[۱]، باز یک بار دیگر از بند معادله دیفرانسیل خلاص می‌شویم.



شکل (۲۰۸): عینک مقاومت بین !

۱ ـ البته برای من و شما مشهور است.

امپدانس و ادمیتانس و عینک ... !

امپدانس Z[۱] : برابر است با **فازور**[۲] ولتاژ دو سر عنصر تقسیم بر **فازور** جریان آن

$$Z = \frac{V}{I} \qquad (۳۷۴$$

ادمیتانس Y : برابر است با **فازور** جریان عبوری از عنصر تقسیم بر **فازور** ولتاژ آن

$$Y = \frac{I}{V} \qquad (۳۷۵$$

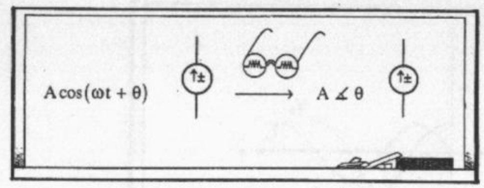
با این عینک تمامی عناصر اعم از مقاومت و سلف و خازن را به چشم مقاومت می‌بینیم، (مطابق جدول شکل ۲۰۹))

نگاه ما \ واقعیت	r	L	C
امپدانس Z^{Ω}	r	$j\omega L$	$\frac{1}{j\omega C}$
ادمیتانس $Y^{\mho}$	$\frac{1}{r}$	$\frac{1}{j\omega L}$	$j\omega C$

شکل (۲۰۹): جدول همه چیز را مقاومت بین !

حالا که همه چیز مقاومتی شد، پس دیگر خبری از معادله‌ی دیفرانسیل نمی‌باشد، همه روابط **جبری** شد، منتهی بصورت جبر **مختلط** ضمناً به جای منابع سینوسی هم فازور آن‌ها را می‌گذاریم:

۱ـ همان مقاومت خودمان است که در دوران راهنمایی ! خواندیم !
۲ـ همان تیک عصبی که ذکر شد !



شکل (۳۱۰): منابع سینوسی از دید عینک مشهور

یک نفر جمع‌بندی کند:

در مدار در حالت دائمی سینوسی با فرکانس ω ، تمامی ولتاژها و جریان‌ها سیگنال سینوسی با فرکانس ω می‌باشند و تنها فازورها عوض می‌شوند. پس برای بررسی مدار به تحلیل فازورها می‌پرازیم. خصوصاً که با این عینک ارزشمند، روابط همگی بصورت جبری شد. (البته جبر مختلط) و خبری هم از معادله دیفرانسیل نیست.

دوستان من، ببینید. با این توصیف همه چیز تکراری است. تمام روابط عین قبل است، مثلاً نگاه کنید:

$$V=Z\times I \qquad (۳۷۶)$$

فقط یادتان باشد که این × ضرب مختلط است یعنی دو معنی دارد:

$$|V|=|Z|\times|I| \ , \ \angle V=\angle Z+\angle I \qquad (۳۷۷)$$

و یا:

$$I=Y\times V \qquad (۳۷۸)$$

$$|I|=|Y||V| \ , \ \angle I=\angle Y+\angle V \qquad (۳۷۹)$$

و یا:

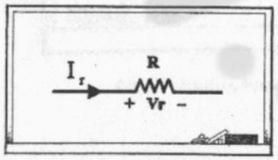
$$Y=\frac{1}{Z} \qquad (۳۸۰)$$

یعنی:

$$|Y|=\frac{1}{|Z|} \ , \ \angle Y=-\angle Z \qquad (۳۸۱)$$

به عنوان نمونه روابط ولتاژ و جریان را در عناصر تکی بررسی می‌کنیم:

۱ـ مقاومت



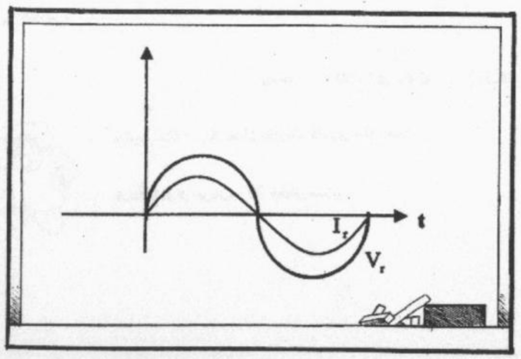
شکل (۳۱۱): مقاومت در حالت دائمی سینوسی

$$V=R\times I \qquad (۳۸۲)$$

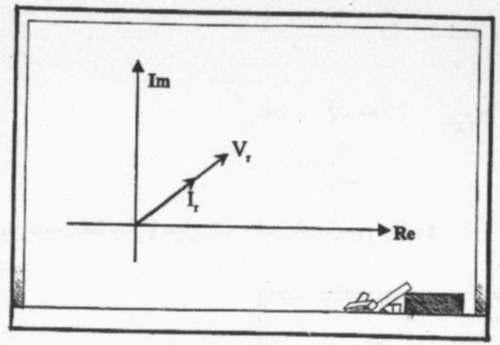
و در نتیجه:

$$|V|=R|I| \ , \ \angle V=\angle I \qquad (۳۸۳)$$

یعنی ولتاژ و جریان با هم، همفازند.

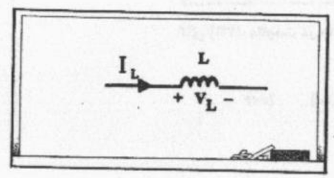


شکل (۳۱۲): ولتاژ و جریان در حوزه‌ی زمان در مقاومت



شکل (۲۱۳): دیاگرام فازوری ولتاژ و جریان در مقاومت

۲ـ سلف



شکل (۲۱۴): سلف در حالت دائمی سینوسی

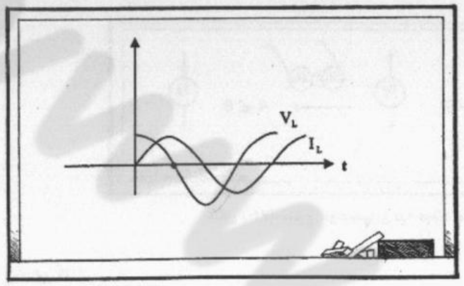
$$V = j\omega L \times I \quad (۳۸۴$$

و به عبارتی:

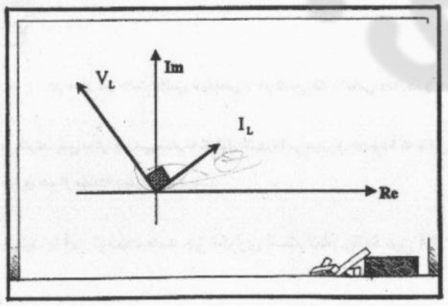
$$|V| = \omega L|I| \;,\; \measuredangle V = \measuredangle I + 90^\circ \quad (۳۸۵$$

و این $X_L = \omega L$ همان مقاومت ظاهری سلف است.

ضمناً ولتاژ از جریان، 90° جلوتر است.

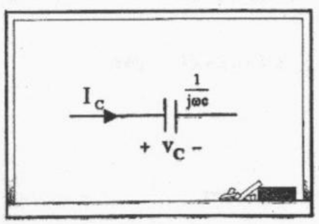


شکل (۲۱۵): ولتاژ و جریان در حوزهٔ زمان در سلف



شکل (۲۱۶): دیاگرام فازوری ولتاژ و جریان در سلف

۳ـ خازن

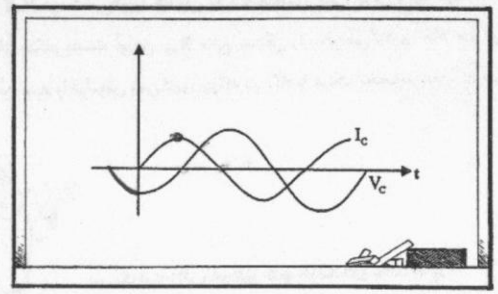


شکل (۲۱۷): خازن در حالت دائمی سینوسی

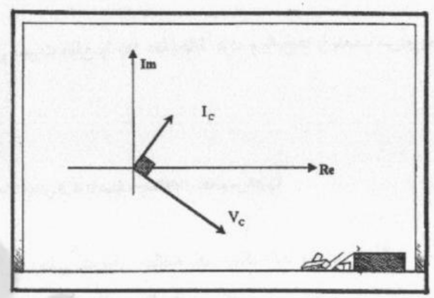
$$V = -j\frac{1}{\omega C} \times I \quad (۳۸۶$$

$$|V| = \frac{1}{\omega C}|I| \;,\; \measuredangle V = \measuredangle I - 90^\circ \quad (۳۸۷$$

$X_c = \frac{1}{\omega C}$ مقاومت ظاهری خازن است ودر این‌جا ولتاژ از جریان 90° عقب‌تر است.



شکل (۳۱۸): ولتاژ و جریان در حوزه‌ی زمان در خازن



شکل (۳۱۹): دیاگرام فازوری ولتاژ و جریان خازن

حالت‌های مختلف برای امپدانس یک مدار:

مِن بَعد، زاویه‌ی امپدانس را با φ می‌شناسیم، به عبارت دیگر:

(۳۸۸) $$\varphi = \measuredangle Z = \measuredangle V - \measuredangle I$$

مدار مقاومتی خالص: (۳۸۹) if $Z = r$ یا $Y = g \Rightarrow \varphi = 0$

مدار سلفی خالص: (۳۹۰) if $Z = jX_L$ یا $Y = -j\frac{1}{X_L} \Rightarrow \varphi = 90^\circ$

مدار خازنی خالص: (۳۹۱) if $Z = -jX_C$ یا $Y = j\frac{1}{X_C} \Rightarrow \varphi = -90^\circ$

مدار مقاومتی سلفی: (۳۹۲) if $Z = r + jX_L$ یا $Y = G - jB \Rightarrow 0 < \varphi < 90^\circ$

مدار مقاومتی خازنی: (۳۹۳) if $Z = r - jX_C$ یا $Y = G + jB \Rightarrow -90^\circ < \varphi < 0^\circ$

تحلیل حالت دائمی سینوسی:

تحلیل عیناً مشابه مدارهای مقاومتی است، منتهی در این‌جا برای فازور ولتاژ و فازور جریان KVL و KCL می‌زنیم.

به هم بستن عناصر:

واضح است دیگر:

۱-  (۳۹۴) $Z_{eq} = \sum_i Z_i$

۲-  (۳۹۵) $Y_{eq} = \sum_i y_i$

امپدانس یا ادمیتانس ورودی:

پس از تحلیل مدار از روابط ذیل بدست می‌آیند:

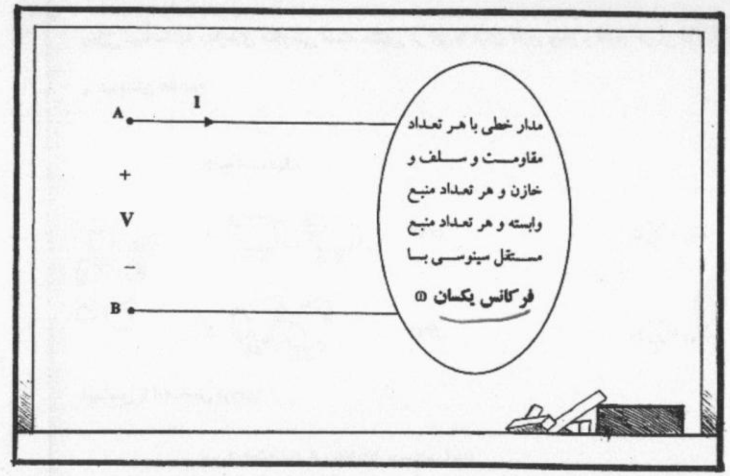
(۳۹۶) $$Z_{in}(j\omega) = \frac{V}{I}$$

(۳۹۷) $$Y_{in}(j\omega) = \frac{I}{V}$$

راستی این که می‌نویسیم $Z(j\omega)$ یا $Y(j\omega)$ ...؛ یعنی چه؟

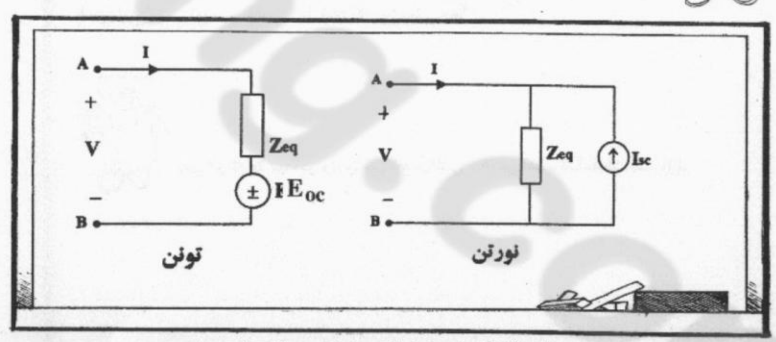
یعنی آن که اولاً امپدانس و ادمیتانس تابع فرکانس (ω) می‌باشد و ثانیاً مختلط است (j).

مدار معادل تونن ـ نورتن در حالت دائمی سینوسی:



شکل (۳۲۰): مدار در حالت دائمی سینوسی

این هم حتماً مثل قبل است دیگر؛



شکل (۳۲۱): مدار معادل تونن و نورتن در حالت دائمی سینوسی

تمام حرف‌ها ـ تأکید می‌کنم تمام آن‌ها ـ مثل قبل است پس، از تکرار آن‌ها خودداری می‌کنیم.

$$E_{OC} = Z_{eq} \times I_{sc} \qquad (۳۹۸)$$

البته شما کاملاً درست می‌گویید ها! ولی یک تفاوت‌های خیلی جزئی وجود دارد.

مثلاً : قبلاً هنگام بدست آوردن R_{eq} منابع مستقل را صفر می‌کردیم، حالا هم برای یافتن Z_{eq} همین کار را می‌کنیم ولی فرکانس آن منبع را فراموش نمی‌کنیم، چراکه در نگاه با عینک مخصوص‌مان، ω خیلی مهم است.

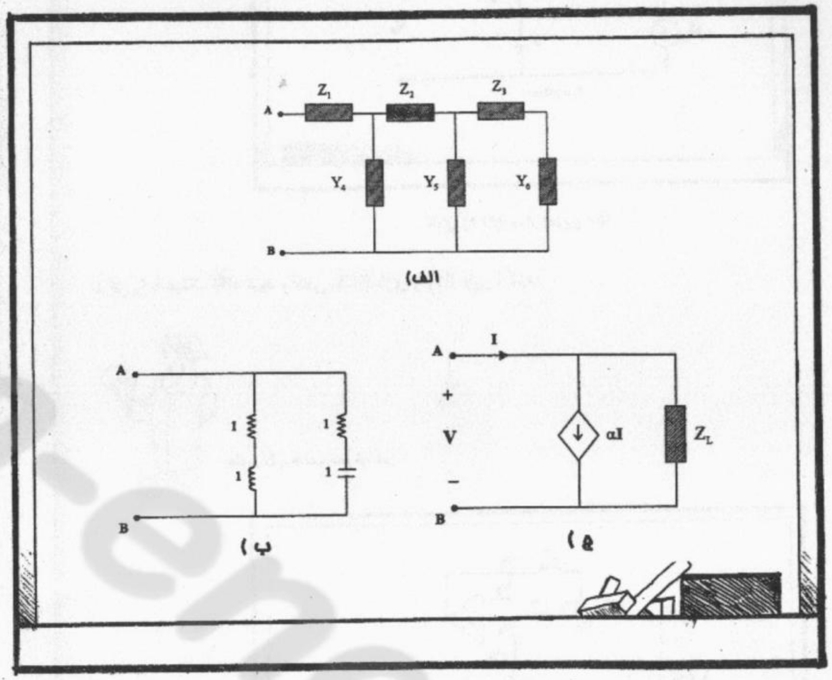
پس یک ایراد ! اگر منابع **غیر هم فرکانس** بودند، چطور ؟

آفرین، در این صورت منابع را جدا جدا لحاظ کرده و پاسخ‌ها را بدست می‌آوریم و سپس از جمع آثار بهره می‌گیریم.

یعنی از n تا عینک جداگانه استفاده می‌کنیم؟

بله دیگر، مثل آدم‌هایی که برای مطالعه یک عینک دارند و برای رانندگی عینکی دیگر و برای ... ، عینکی مخصوص !!
بگذارید بقیه حرف‌ها را در قالب مثال‌ها مرور کنیم.

۵۶: امپدانس ورودی شبکه‌های زیر را پیدا کنید.



شکل (۲۲۲): مدارهای تمرین ۵۶

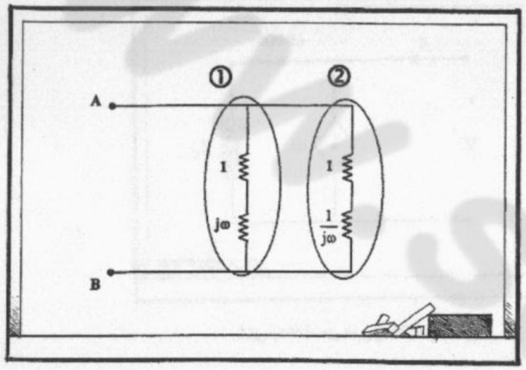
اگر از آن عینک استفاده کنیم، خیلی راحت است.

با الف) شروع می‌کنیم:

$$Z_{eq} = Z_1 + \cfrac{1}{Y_4 + \cfrac{1}{Z_2 + \cfrac{1}{Y_5 + \cfrac{1}{Z_3 + \cfrac{1}{Y_6}}}}} \qquad (۳۹۹$$

به این مدارها، مدارهای نردبانی می‌گوییم.

و حالا شکل ب) را با آن عینک می‌نگریم:



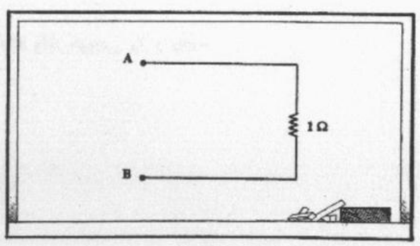
شکل (۲۲۳): مدار تمرین ۵۶ (قسمت ب) با عینک مقاومت بین:

$$Z_1 = 1 + j\omega \qquad (۴۰۰$$

$$Z_2 = 1 + \frac{1}{j\omega} = \frac{1+j\omega}{j\omega} \qquad (۴۰۱$$

$$Y_{eq} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{1+j\omega} + \frac{j\omega}{1+j\omega} = 1 \qquad (۴۰۲$$

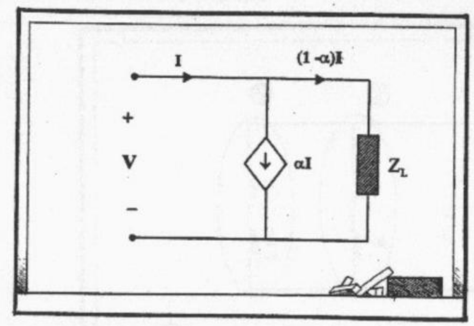
دیدید، چقدر جالب بود، این نتیجه مستقل از فرکانس بود، یعنی با هر ω ای، امپدانس ورودی 1Ω است، به این گونه مدارها مدارهای **«مستقل از فرکانس»** می‌گویند. پس مدار ب) تمرین ۵۶) معادل یک مقاومت ۱ اهمی است.



شکل (۲۲۴): مدار معادل قسمت ب) تمرین ۵۶

و نهایتاً در قسمت ج) داریم:

با یک KCL بازی ساده:



شکل (۲۲۵): حل تمرین ۵۲ قسمت ج)

و یک KVL در حلقه‌ی بیرونی:

$$V=(1-\alpha)I \times Z_L=(1-\alpha)Z_L I \qquad (۴۰۳$$

$$Z_{eq}=(1-\alpha)Z_L \qquad (۴۰۴$$

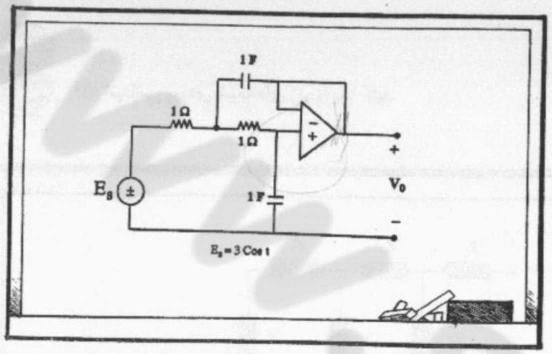
و برای $\alpha = 2$ ، داریم:

$$Z_{eq}=-Z_L \qquad (۴۰۵$$

یعنی یک مبدل منفی‌کننده امپدانس[1] داریم.

۵۷: ولتاژ خروجی V_o را بیابید.

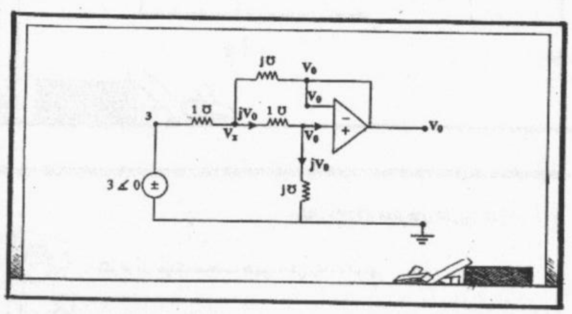
1. N.I.C.



شکل (۲۲۶): مدار تمرین ۵۷

شکل را با عینک نگاه کنید و کمی KCL بازی و ولتاژ یابی ! کنید:

مقادیر را برحسب مهو نوشتم:



شکل (۲۲۷): مراحل حل تمرین ۵۷

?

$$V_x = jV_o + V_o \qquad (۴۰۶$$

و در گره‌ی V_x ، KCL می‌زنیم:

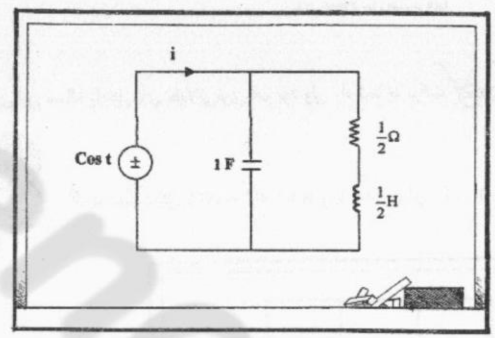
$$\underbrace{jV_0+V_0}_{V_1}-3+jV_0+j(\underbrace{jV_0+\cancel{V_0}}_{V_1}-\cancel{V_0})=0 \quad (۴۰۷$$

$$V_0=\frac{3}{2j}=-1.5j \quad (۴۰۸$$

و نهایتاً:

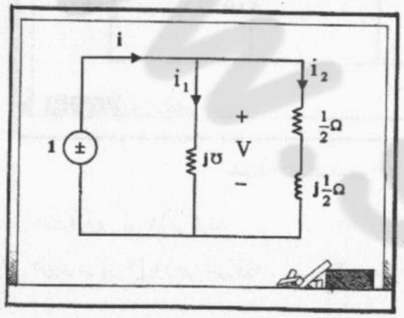
$$V_0=1.5\cos(t-90)=1.5\sin t \quad (۴۰۹$$

۵۸: جریان i را بیابید.



شکل (۲۲۸): مدار تمرین ۵۸

به مدد عینک، مدار این‌جوری می‌شود:



شکل (۲۲۹): مراحل حل تمرین ۵۸

ولتاژ V برابر 1 است، پس جریان‌های i_1 و i_2 معلومند:

$$i_1=j\times 1=jA \quad (۴۱۰$$

$$i_2=\frac{1}{\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}}\times 1=\frac{2}{1+j}=1-jA \quad (۴۱۱$$

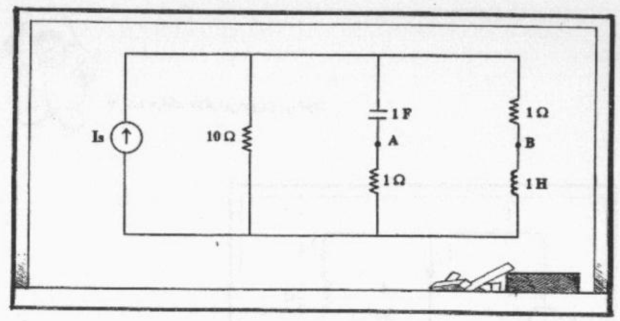
و نهایتاً:

$$i=i_1+i_2=j+1-j=1A \quad (۴۱۲$$

یعنی:

$$i=\cos t \quad (۴۱۳$$

۵۹: کدام یک از عبارات زیر در مورد مدار مقابل که در حالت دائمی سینوسی، است صحیح می‌باشد؟



شکل (۲۳۰): مدار تمرین ۵۹

۱) افزایش فرکانس باعث افزایش $|V_{AB}|$ می‌گردد. ۲) افزایش فرکانس باعث افزایش $\angle V_{AB}$ می‌گردد.

۳) افزایش فرکانس تغییری در $|V_{AB}|$ به وجود نمی‌آورد. ۴) هیچکدام

از عینک مقاومت‌بین استفاده کنید:

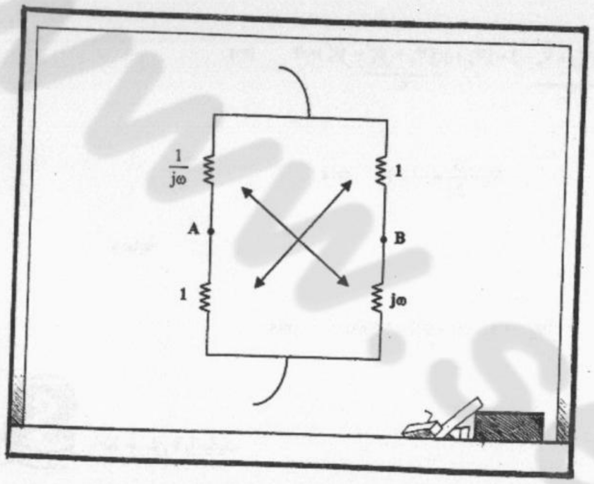
حال ملاحظه می‌کنیم که شرط پل وتستون برقرار است:

$$Z_4 Z_1 = Z_2 Z_3 \quad (۶۱۴$$

$$\frac{1}{\cancel{j\omega}} \times \cancel{j\omega} = 1\times 1 \quad (۶۱۵$$

و برقراری این شرط مستقل از فرکانس ω است.

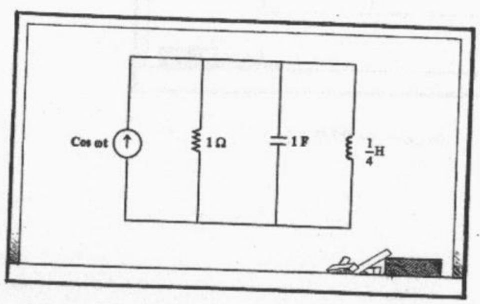
لذا گزینه ۳ صحیح می‌باشد.



شکل (۲۳۱): حل تمرین ۵۹

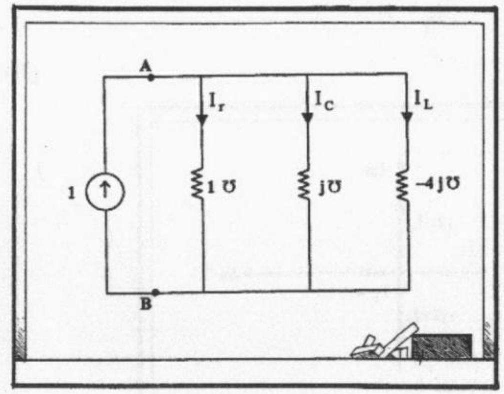
البته برای این مساله راه‌حل‌های طولانی‌تری هم بود ولی راهِ شما به برکتِ ، بهینه است.

۶۰: در مدار شکل ۲۳۲) به ازاء $\omega=1$ و $\omega=2$ ، برای I_r ، I_L و I_C دیاگرام فازوری رسم کنید.



شکل (۲۳۲): مدار تمرین ۶۰

ابتدا به ازاء $\omega = 1$ عینک می‌زنیم:



شکل (۲۳۳): حل تمرین ۲۰) به ازاء $\omega = 1$

مقادیر را برحسب مهو نوشتیم، چراکه با هم موازی‌اند.

$$Y_{eq} = 1 + j - 4j = 1 - 3j\ \mho \qquad (۴۱۶$$

$$V_{AB} = \frac{1}{Y_{eq}} \times 1 = \frac{1}{1-3j} = \frac{1}{\sqrt{10}} \measuredangle 71^\circ V \qquad (۴۱۷$$

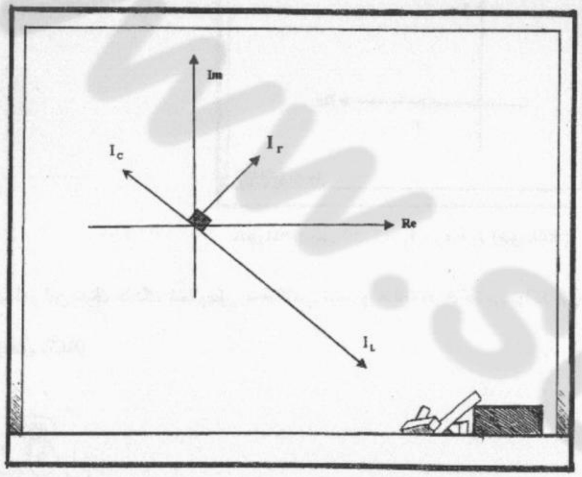
و در هر شاخه با توجه به رابطه‌ی $I = Y\,V$ ، داریم:

$$I_r = \frac{1}{\sqrt{10}} \measuredangle 71^\circ\ A \qquad (۴۱۸$$

$$I_C = j \times V_{AB} = \frac{1}{\sqrt{10}} \measuredangle 161^\circ\ A \qquad (۴۱۹$$

$$I_L = -4j \times V_{AB} = \frac{4}{\sqrt{10}} \measuredangle -19^\circ\ A \qquad (۴۲۰$$

و در یک شکل



شکل (۲۳۴): دیاگرام فازوری جریان‌ها در تمرین ۵۲۰) به ازاء $\omega = 1$

قبل از آن که ادامه بدهیم، من یک سؤال بپرسم.

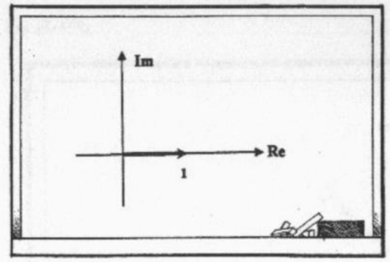
شما برای جمع ۳ بردار (یا همان ۳ فازور) نشان داده شده در شکل ۲۳۴) چقدر فرصت می‌خواهید؟

حدود یک دقیقه :

ابتدا I_L و I_C را با هم گرفته و نتیجه‌ی حاصل را با I_r برآیند می‌گیریم.

چقدر جالبه ! یک چیز خیلی قشنگ به ذهنم رسید:

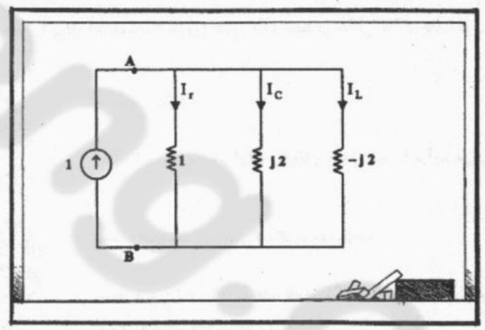
ببینید جمع $I_r + I_C + I_L$ طبق قانون KCL برابر i_s است، i_s هم که برابر $1 \measuredangle 0$ است، پس نیازی به حل نیست، به جای 1 دقیقه، 1 ثانیه ! کافی است.



شکل (۲۳۵): جمع $I_r + I_C + I_L = 1\angle 0$ (طبق KCL)

مرحبا !؛ و این حرف قشنگ شما ربطی به فرکانس ندارد و به ازاء هر فرکانسی برآیند این سه جریان برابر $1\angle 0$ می‌گردد. (به فرمودهٔ KCL)

و حالا برای $\omega = 2$ مراحل قبلی را به سرعت تکرار می‌کنیم:



شکل (۲۳۶): مدار تمرین ۲) در $\omega = 2$

$$Y_{eq} = 1+2j-2j = 1℧ \qquad (۴۲۱$$

$$V_{AB} = 1\,V \qquad (۴۲۲$$

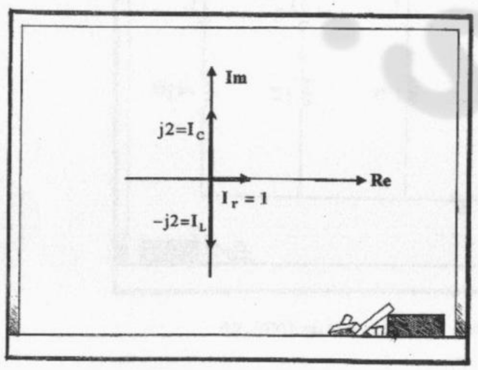
و نهایتاً:

$$I_r = 1A \qquad (۴۲۳$$

$$I_C = j2\,A \qquad (۴۲۴$$

$$I_L = -j2\,A \qquad (۴۲۵$$

و در یک شکل:



شکل (۲۳۷): دیاگرام فازوری جریان‌ها به ازاء $\omega=2$

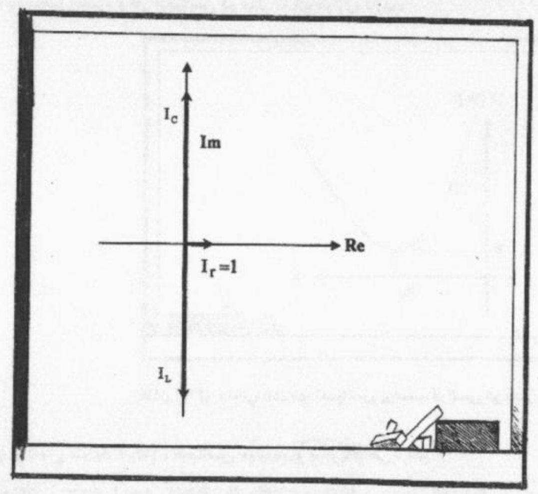
یک نکته‌ی بسیار جالب؛ اگر مقاومت r به جای یک اهم، یک مگا اهم بود، جواب‌ها چگونه می‌شد؟

واضح است دیگر:

$$Y_{eq} = 10^{-6}℧ \quad , \quad V_{AB} = 10^{6}\,V \qquad (۴۲۶$$

$$I_r = 1A \quad , \quad I_C = j2\times10^{6}A \quad , \quad I_L = -j2\times10^{6}A \qquad (۴۲۷$$

یعنی به این شکل:



شکل (۲۳۸)، دیاگرام فازوری جریان‌ها به ازاء $\omega = 2$ و $r = 10^6\ \Omega$

یعنی به ازاء جریان ورودی یک آمپری، جریان‌های 2 میلیون آمپری داریم.

البته این جریان‌ها موهومی‌اند! درست است؟

بله، و به این حالت، **تشدید** می‌گوییم.

تشدید:

به شکل‌های (۲۳۷) و (۲۳۸) خوب نگاه کنید؛

فرکانس تشدید، فرکانسی است که در آن امپدانس یا ادمیتانس یک کمیت حقیقی باشد؛ به عبارت دیگر:

$$\mathrm{Im}(Z)=0 \text{ یا } \mathrm{Im}(Y)=0 \qquad (۴۲۸$$

به عبارت دیگر راکتانس[1] صفر باشد یا سوسپتانس[2] صفر باشد. مثلاً در مدارهای بسیار ساده:

الف) RLC سری:

$$Z=R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right) \qquad (۴۲۹$$

$$\mathrm{Im}(Z)=0 \rightarrow \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (۴۳۰$$

ب) RLC موازی:

$$Y=G+j\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right) \qquad (۴۳۱$$

$$\mathrm{Im}(Y)=0 \rightarrow \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (۴۳۲$$

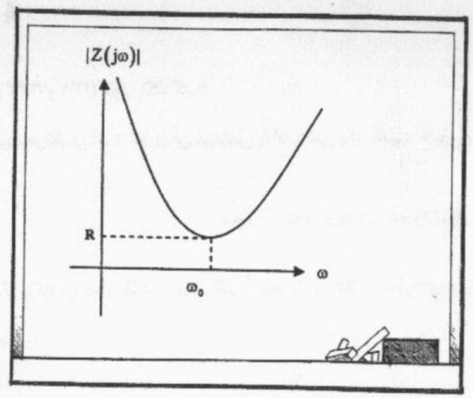
قبل از آن‌که یک مثال جدی ببینیم یک‌بار به‌صورت روزنامه‌ای جملات زیر را که در مورد مدار RLC سری و مدار RCL موازی است بخوانید.

در مدار RLC سری:

با توجه به منحنی اندازه وفاز امپدانس و مدار RLC سری داریم:

۱ـ $Z=r+jX$ (r = رزیستانس و X = راکتانس)

۲ـ $Y=G+jB$ (G = کندوکتانس و B = سوسپتانس)



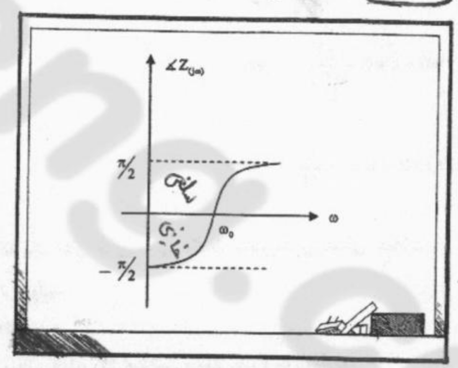
شکل (۲۳۹): منحني اندازه‌ي امپدانس برحسب فركانس در مدار RLC سري

الف) در فرکانس تشدید (ω_0) ، امپدانس، مینیمم (و برابر R) می گردد.

ب) در فرکانس تشدید (ω_0) ، اختلاف فاز ولتاژ جریان دو سر مدار (φ) صفر می‌گردد. (زاویه امپدانس صفر می‌شود یعنی امپدانس کمیتی حقیقی محض می‌شود.)

ج) در فرکانس تشدید (ω_0) ، جریان ماکزیمم (و برابر $\frac{V_m}{R}$) می‌گردد.

سری RLC *



$\frac{1}{\omega_0 C}$

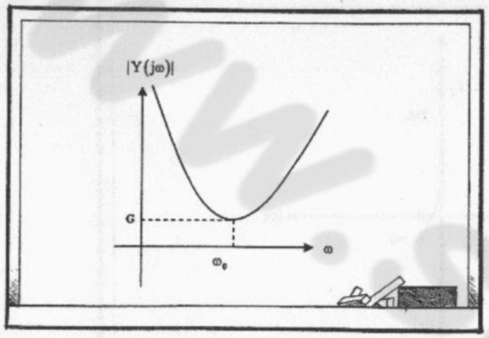
شکل (۲۴۰): منحني فاز امپدانس برحسب فركانس در مدار RLC سري

د) در فرکانس‌های کمتر از ω_0 ($\omega < \omega_0$) مدار حالت خازنی دارد؛ ($X_c > X_L$) و زاویه امپدانس منفی می‌گردد و در فرکانس‌های بالاتر از ω_0 ($\omega > \omega_0$) مدار حالت سلفی دار؛ ($X_c < X_L$) و زاویه امپدانس مثبت می‌باشد.

مدارهای حالت سلفی امپدانس+ ادمیتانس منفی-

ـ در مدار RLC موازی:

با توجه به منحنی اندازه و فاز ادمیتانس در مدار RLC موازی داریم:



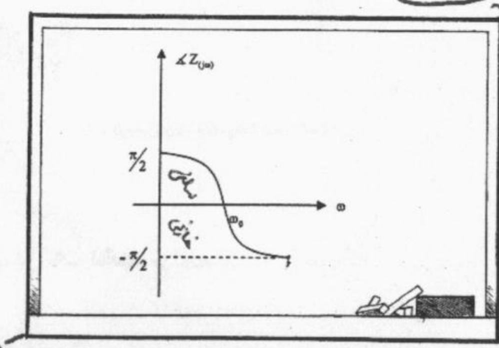
شکل (۲۴۱): منحني اندازه‌ي ادميتانس برحسب فركانس در مدار RLC موازي

الف) در فرکانس تشدید (ω_0) ، ادمیتانس مینیمم (و برابر G) می‌گردد.

ب) در فرکانس تشدید (ω_0) ، اختلاف فاز ولتاژ و جریان دو سر مدار (φ) صفر می‌گردد. (زاویه ادمیتانس صفر می‌شود، یعنی ادمیتانس یک کمیت حقیقی محض می‌شود.)

ج) در فرکانس تشدید (ω_0) ، ولتاژ ماکزیمم (و برابر $\frac{I_m}{G}$) می‌گردد.

RLC موازی



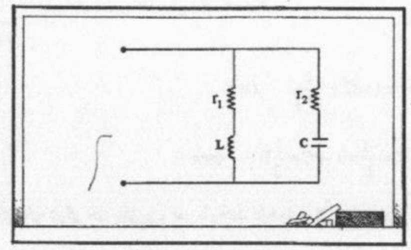
شکل (۲۴۲): منحني فاز ادميتانس برحسب فركانس در مدار RLC موازي

د) در فرکانس‌های کمتر از ω_0 ($\omega < \omega_0$) مدار حالت سلفی دارد؛ ($X_L > X_C$) و زاویه ادمیتانس منفی می‌گردد. (زاویه امپدانس مثبت است) و در فرکانس‌های بالاتر از ω_0 ($\omega > \omega_0$) مدار حالت خازنی دارد، ($X_L < X_C$) و زاویه ادمیتانس مثبت است. (زاویه امپدانس منفی می‌گردد).

البته این بخش از روزنامه، فقط مخصوص حالت‌های خاص مدارهای RLC سری و موازی بود.

و در مدارهای پیچیده‌تر Z یا Y را بدست می‌آوریم. (هرکدام ساده‌تر بود.) و سپس قسمت موهومی آن‌ها را صفر می‌کنیم.

۶۱: فرکانس تشدید در مدار زیر چقدر است؟



شکل (۲۴۳): مدار تمرین ۶۱

از آن عینک کمک گرفته و داریم:

$$Y_{eq} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{r_1 + j\omega L} + \frac{j\omega C}{1 + j\omega r_2 C} \qquad (۴۳۳$$

و حال مخرج مشترک گرفته و سپس ...

جسارته ها ! ولی سپس چی ؟ ! می‌دانی اگر این کار را بکنیم چقدر مساله بدقیافه می‌شود؟

بهتر آن است که قسمت موهومی هر بخش را جداجدا بدست آوریم و سپس آن‌ها را با هم جمع کنیم.

حال در رابطه‌ی ۳۷۳) با ضرب در مزدوج مخرج داریم:

$$\mathrm{Im}\left(Y_{eq}\right) = \frac{-\cancel{\omega} L}{r_1^2 + \omega^2 L^2} + \frac{\cancel{\omega} C}{1 + \omega^2 r_2^2 C^2} = 0 \qquad (۴۳۴$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{L - Cr_1^2}{L - Cr_2^2}} \qquad (۴۳۵$$

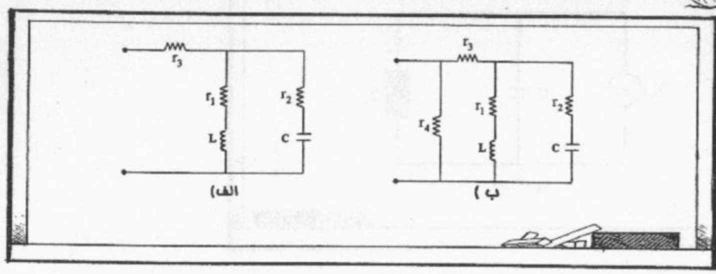
این‌جا را آدم‌های باهوش‌تر، بیش‌تر گوش کنید،
در تست یک کار بامزه هم می‌توان انجام داد؛ یک کاری کنید که مدار به صورت مدار LC سری یا موازی در بیاید.
مثلاً در این مدار چه‌جوری؟

خب معلوم است دیگر، r_1 و r_2 را اتصال کوتاه کنیم، یعنی به ازاء:

$$r_1 = r_2 = 0 \qquad (۴۳۶$$

احسنت، خب تمام است دیگر، می‌گوییم گزینه‌ای درست است که به ازاء $r_1 = r_2 = 0$ پاسخ‌اش برابر $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ گردد.

۶۲: فرکانس تشدید در مدارهای الف) و ب) چقدر است؟

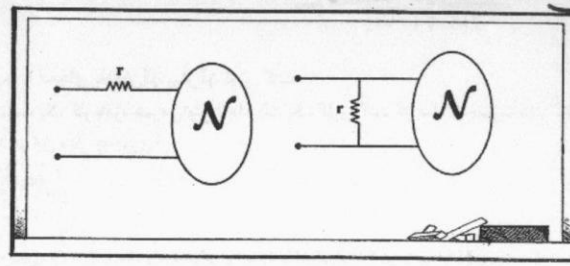


شکل (۲۴۴): مدارهاي تمرین ۶۲

باز مشابه تمرین ۶۰) شروع می‌کنیم و ...

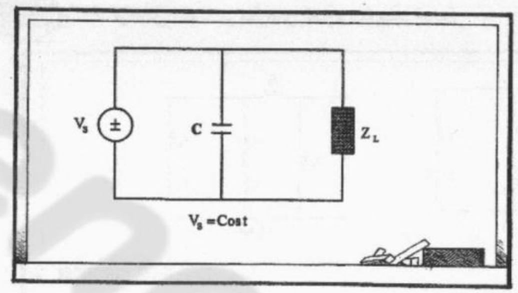
باز دوستم به شکل ۴۷) توجه نکرد ! لطفاً همه مدار را خوب نگاه کنند، به نظر من پاسخ تمرین ۶۲) چه الف) و چه ب) عیناً برابر پاسخ تمرین ۶۱) است. چرا که مقاومت‌های r_3 و r_4 تأثیری در مقدار موهومی Z یا Y ندارند. پس اصلاً نیازی به حل مجدد نمی باشد.

جالب بود، یعنی مقاومت‌های سری یا موازی با کل مدار، تأثیری در فرکانس تشدید ندارند.



شکل (۲۴۵): مقاومت‌های بی‌تاثیر در فرکانس تشدید

۶۳: در مدار شکل (۲۴۶) $Z_L = 1 + j$ است. از طرفی جریان I کشیده شده از منبع، هم فاز با ولتاژ منبع است. C چند فاراد است؟



شکل (۲۴۶): مدار تمرین ۶۳

باز قبل از آن که شما شروع کنید، یک مطلبی را بگوییم:

گاهی بعضی مساله‌ها نیاز به مترجم ندارند، همچون مساله‌های ۶۱ و ۶۲ واضح است که مساله، مساله‌ی تشدید است، اما گاهی

باید **«زبان مسأله»** را بفهمیم، یعنی باید آن را **«ترجمه»** کنیم؛ مثلاً ببینید هر وقت این عبارت‌ها را شنیدید،

یعنی تشدید:

خودتان بگویید دیگر:

ولتاژ هم فاز جریان است ـ زاویه امپدانس یا ادمیتانس صفر است ـ ضریب توان[1] ماکزیمم است ـ توان مجازی صفر است ـ سلف و خازن اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند ـ توان متوسط ماکزیمم است ـ و ...

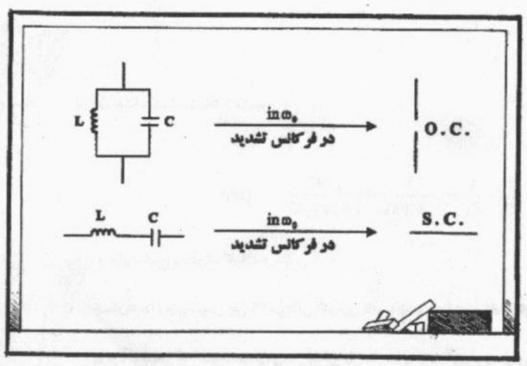
پس حال تمرین ۶۳ خیلی ساده شد دیگر:

$$Y_{in} = j \times 1 \times C + \frac{1}{1+j} \qquad (۲۳۷)$$

$$\mathrm{Im}(Y_{in}) = C + \frac{-1}{2} = 0 \rightarrow C = \frac{1}{2}F \qquad (۲۳۸)$$

یک نکته‌ی کوچک دیگر هم بگویم و بعد با بحث تشدید فعلاً خداحافظی کنیم.

به شکل (۲۴۷) خوب نگاه کنید؛



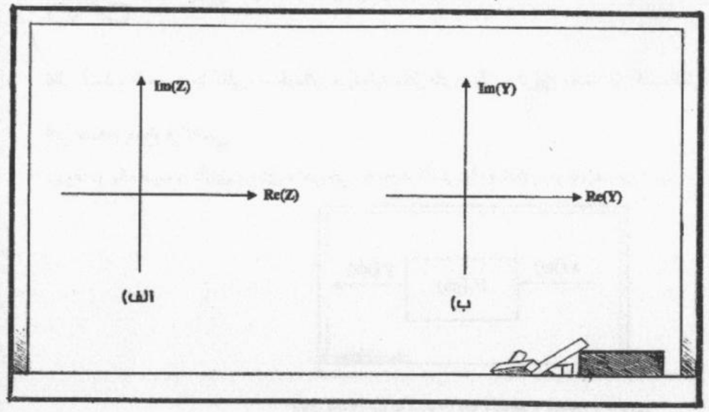
شکل (۲۴۷): مدارهای LC موازی و سری در فرکانس تشدید (ω_0)

۱ ـ صبر کنید به آن هم می‌رسیم.

هم اکنون نکته در مردمک چشمان شما می‌درخشد!

مثلاً در حل تمرین ۶۰ قسمت دوم، اگر این نکته را می‌دانستیم، حل مساله ساده‌تر می‌شد.

مکان امپدانس و مکان ادمیتانس:



شکل (۲۴۸): صفحات مختلط الف) امپدانس ب) ادمیتانس

تعریف: محل تغییرات نقطه‌ی انتهایی بردار امپدانس یا ادمیتانس در صفحه مختلط امپدانس یا ادمیتانس گوییم. حال شما حدس می‌زنید که چگونه باید به مکان امپدانس یا ادمیتانس رسید؟

خلاصه باید به یک نحوی اثر ω را حذف کرد و رابطه‌ای بین $r = \text{Re}(Z)$ و $X = \text{Im}(Z)$ پیدا نمود و آن را رسم کرد.

معلم ما در دوران دبیرستان نام این جور مسایل را معادلات پارامتری می‌گذاشت، مثلاً در این معادلات،

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t + 1 \end{cases} \qquad (۴۳۹)$$

با حذف t می‌رسیدیم به:

$$x + (y-1)^2 = 1 \qquad (۴۴۰)$$

یعنی دایره‌ای به مرکز $(0\,,1)$ و شعاع 1 و ...

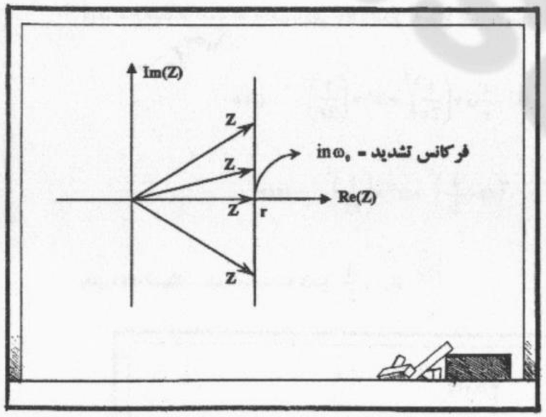
حال یک مثال مداری ببینیم، مثلاً در مدار RLC سری؛

با توجه به رابطه‌ی ۳۶۹)

$$r = \text{Re}(Z) \qquad (۴۴۱)$$

$$X = \text{Im}(Z) = \omega L - \frac{1}{\omega C} \qquad (۴۴۲)$$

ادامه‌اش با من؛ در این‌جا قسمت حقیقی اصلاً تابع ω نمی‌باشد. پس مکان امپدانس خیلی ساده شد. به این شکل:



شکل (۲۴۹): مکان امپدانس در مدار RLC سری

آفرین در شکل ۲۴۹) چندین بردار Z می‌بینید که هر یک به ازاء یک ω رسم شده‌اند. منطبق بر شکل ۲۳۹) ملاحظه می‌گردد که در فرکانس تشدید در مدار RLC سری، $|Z|$ کمینه است.

حالا در همین مدار RLC سری، مکان ادمیتانس چگونه می‌شود؟

باز مثل قبل است دیگر:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{r + jX} = \underbrace{\boxed{\frac{r}{r^2 + X^2}}}_{G} + j\underbrace{\boxed{\frac{-X}{r^2 + X^2}}}_{B} \qquad (۴۴۳)$$

چرا ساکتی ؟!

چون یک کمی مساله جدی‌تر شد، هم قسمت حقیقی و هم بخش موهومی تابع ω هستند؛ با اطلاعات جبر دبیرستانی داریم:

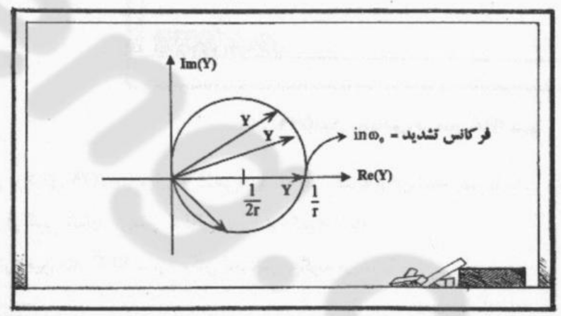
$$G^2+B^2=\frac{1}{r^2+X^2}=\frac{1}{r}G \qquad (۴۴۴$$

دیگر تمام است، از دست ω خلاص شدیم، حالا با تبدیل به مربع کامل داریم:

$$G^2-\frac{1}{r}G+\left(\frac{1}{2r}\right)^2+B^2=\left(\frac{1}{2r}\right)^2 \qquad (۴۴۵$$

$$\left(G-\frac{1}{2r}\right)^2+B^2=\left(\frac{1}{2r}\right)^2 \qquad (۴۴۶$$

یعنی مکان ادمیتانس دایره‌ای است به شعاع $\frac{1}{2r}$ و مرکز $\left|\begin{matrix}\frac{1}{2r}\\0\end{matrix}\right.$



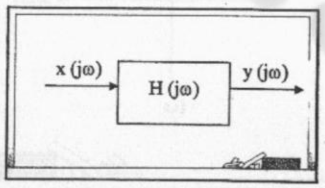
شکل (۳۵۰): مکان ادمیتانس در مدار RLC سري

که باز این شکل هم حرف‌های قدیم را تأیید می‌کند.

عالی است و تا همین جا کافی... خودتان می‌توانید مثال‌های دیگری در این زمینه حل کنید، فکر کنم اصل بحث جا افتاد...

تابع شبکه، پاسخ فرکانسی

مفهوم: در یک سیستم دارای ورودی و خروجی، پاسخ فرکانسی را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:



شکل (۳۵۱): بلوك دیاگرام یك سیستم با ورودي و خروجي

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \qquad (۴۴۷$$

و توسط رابطه‌ی ۳۸۸) اندازه و فاز پاسخ فرکانسی یعنی $|H(j\omega)|$ و $\measuredangle H(j\omega)$ معین می‌گردند. اصلاً می‌دانید چرا اسمش را «پاسخ فرکانسی» گذاشته‌اند؟

چون در هر فرکانس (ω) با داشتن ورودی، خروجی هم معلوم است؛ چرا که:

$$|Y(j\omega)|=|H(j\omega)|\times|X(j\omega)| \qquad (۴۴۸$$

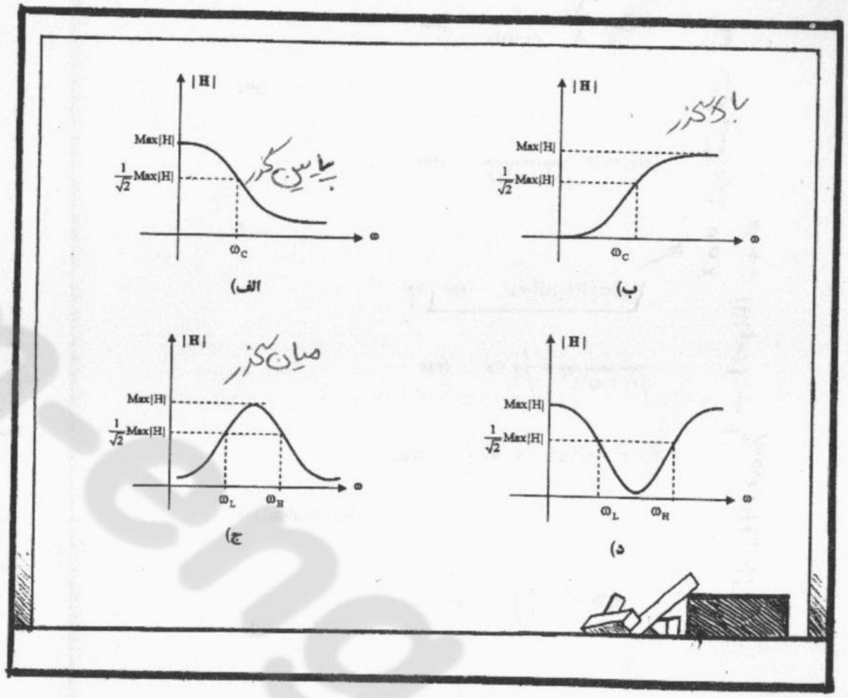
$$\measuredangle Y(j\omega)=\measuredangle H(j\omega)+\measuredangle X(j\omega) \qquad (۴۴۹$$

پس همهٔ اطلاعات در $H(j\omega)$ نهفته است.

ما در این درس کمی با $|H(j\omega)|$ سر و کله می‌زنیم.

سر و کله زدن اساسی با اعضا و جوارح پاسخ فرکانسی یعنی $|H(j\omega)|$ و $\measuredangle H(j\omega)$ در درس «**فیلتر و سنتز مدار**» انجام شده است.[1]

می‌گفتم؛ فرض کنید شکل تابع $|H(j\omega)|$ به یکی از صورت‌های ذیل باشد؛



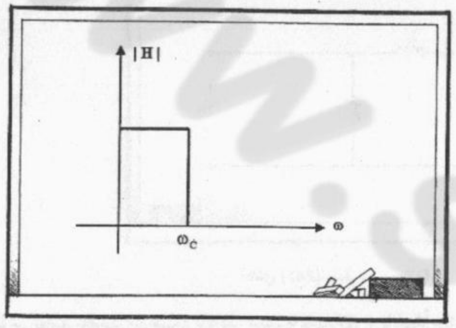
شکل (۲۵۲): انواع و اقسام فیلتر

به فیلتر (الف) پایین‌گذر (LPF) و به فیلتر (ب) بالاگذر (HPF) و به فیلتر (ج) میان‌گذر (BPF) و بالاخره به فیلتر (د) میان‌ناگذر (BSF) می‌گوییم.

خاصیت این‌جور مدارها آن است که سیگنال ورودی را در یک محدوده‌ای عبور می‌دهند و در یک ناحیه‌ی دیگر نه.

۱ـ توصیه می‌کنم که اگر این درس را پاس نکرده‌اید، حتماً سر کلاس این درس حاضر شوید خصوصاً دانشجویان عزیز مخابراتی و الکترونیکی و کمی هم کنترلی‌ها!

ببینید، اگر شکل $|H|$ به صورت شکل (۲۵۳) بود.



شکل (۲۵۳): تابع شبکه در حالت ایده‌آل

آن‌گاه قضاوت ساده بود، می گفتیم در ناحیه‌ی $(0 , \omega_C)$ عبور می‌دهد، و در (ω_C , ∞) عبور نمی‌دهد، اما حالا آن فرکانس را چگونه پیدا کنیم؟

سؤال فوق‌العاده خوبی است. اولاً یادتان باشد که به ناحیه‌ی عبور؛ **پهنای باند**[1] و آن فرکانس مورد نظر را **فرکانس قطع**[2] می‌گویند. ثانیاً طبق قرار بین همه‌ی مهندسین فیلتر دنیا آن فرکانس قطع را در ناحیه‌ای می‌گیرند که $|H|$ برابر $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Max}|H|$ گردد، لذا برای بدست آوردن B.W. :

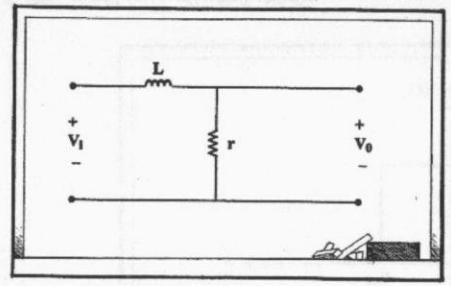
$H(j\omega)$ را پیدا می‌کنیم $|H(j\omega)|$ و ماکزیمم آن را پیدا می‌کنیم. از حل معادله‌ی (۴۵۰)، عرض باند حاصل می‌شود.

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Max}|H(j\omega)| \qquad (۴۵۰)$$

۱ـ B.W.

۲ـ ω_C

۶۴: عرض باند فیلتر نشان داده شده را پیدا کنید. $\left(H=\dfrac{V_o}{V_i}\right)$



شکل (۲۵۴): مدار تمرین ۲۴

قبل از حل، آیا می‌توانید بگویید این شبکه بالاگذر است یا پایین‌گذر و یا اصلاً میان‌گذر؟

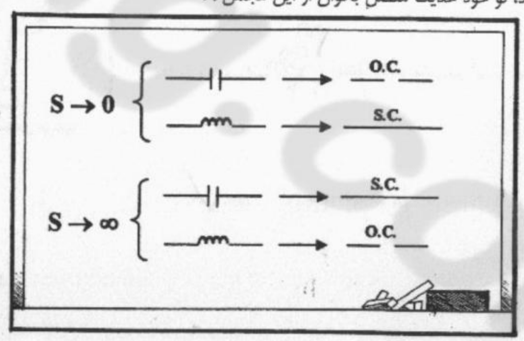
چون مدار مرتبه اول است

اولاً واضح است که یا LPF است یا HPF و نمی‌تواند BPF باشد، چونکه در مدار مرتبه‌ی اول معادله‌ی ۴۵۰) حداکثر یک ریشه دارد، ثانیاً در فرکانس‌های بالا $(\omega \to \infty)$، امپدانس سلف بی‌نهایت شده و سیگنالی عبور نمی‌دهد، پس بالا را عبور نمی‌دهد. یعنی پایین‌گذر است.

مرحبا: فقط با اجازه من حرف‌های شما را مرتب کنیم.

یکی آن که همه‌ی فیلترهای **مرتبه‌ی اول**، یا **بالاگذر** هستند یا **پایین‌گذر** ضمناً برای انتخاب LPF بودن یا HPF بودن، به تخته‌ی ۲۵۵) نگاه کنید، تو خود حدیث مفصل بخوان از این مجمل ! :

برعکس حالت حاصل



شکل (۲۵۵): سلف و خازن در فرکانس صفر و فرکانس بی‌نهایت

حالا به حل مساله بپردازیم،

بله، عرض می‌کردم، با توجه به عینک حالت دائمی سینوسی که داریم و با تقسیم ولتاژ در شکل ۲۵۴) داریم:

$$H(j\omega)=\frac{V_o}{V_i}=\frac{r}{r+j\omega L} \qquad (۴۵۱$$

یعنی:

$$\left|H(j\omega)\right|=\frac{r}{\sqrt{r^2+\omega^2L^2}} \qquad (۴۵۲$$

و

$$\text{Max}\left|H(j\omega)\right|=1 \qquad (۴۵۳$$

$$\frac{r}{\sqrt{r^2+\omega^2L^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times 1 \qquad (۴۵۴$$

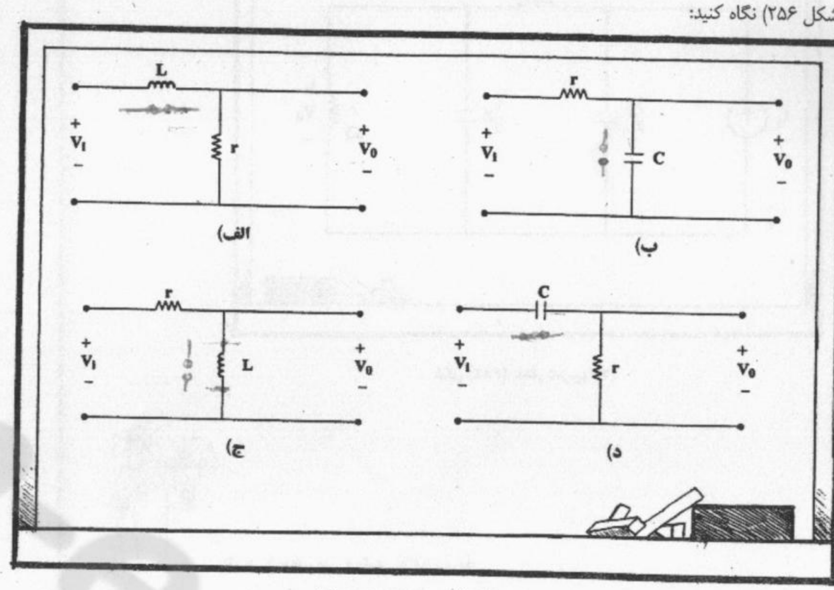
$$2r^2=r^2+\omega^2L^2 \;\to\; \omega=\frac{r}{L} \qquad (۴۵۵$$

یعنی پهنای باند پیدا شد:

$$\text{B.W.}=\left(0,\frac{r}{L}\right) \qquad (۴۵۶$$

یک نکته‌ی جالب:

به شکل (۲۵۶) نگاه کنید:



شکل (۲۵۶): چند فیلتر مرتبه‌ی اول

اولاً واضح است که الف و ب) LPF بوده و ج و د) HPF اند. ثانیاً فرکانس قطع در مدارهای شامل خازن برابر:

$$\omega_C = \frac{1}{rC} \qquad (۴۵۷$$

بوده و در مدارهای شامل سلف فرکانس قطع برابر مقدار زیر است:

$$\omega_C = \frac{r}{L} \qquad (۴۵۸$$

پس پهنای باند هر کدام از فیلترها به سادگی بدست آمد:

الف) $$B.W. = \left(0\,,\frac{r}{L}\right) \qquad (۴۵۹$$

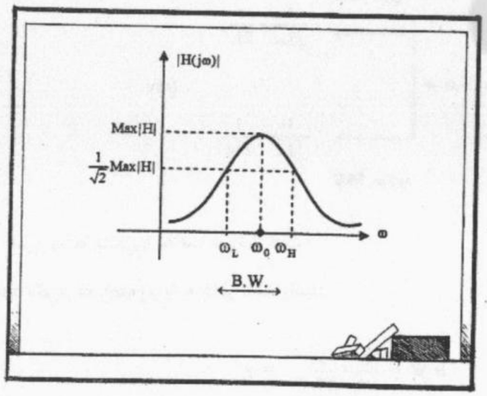
ب) $$B.W. = \left(0\,,\frac{1}{rc}\right) \qquad (۴۶۰$$

ج) $$B.W. = \left(\frac{r}{L}\,,\infty\right) \qquad (۴۶۱$$

د) $$B.W. = \left(\frac{1}{rc}\,,\infty\right) \qquad (۴۶۲$$

بگذارید حالا که فیلترهای مرتبه‌ی اول این‌جور دسته‌بندی شد، همین بالا را بر سر فیلترهای مرتبه‌ی دوم هم بیاوریم:

فیلترهای **مرتبه‌ی دوم** بصورت BPF یا BSF می‌باشند و اندازه پاسخ فرکانسی مثلاً در حالت میان‌گذر بصورت شکل (۲۵۷) است.



شکل (۲۵۷): اندازه‌ی پاسخ فرکانسی $|H|$ در فیلتر میان‌گذر مرتبه‌ی دوم

این‌جا هم دو نکته‌ی جالب وجود دارد، یکی آن که آن فرکانس وسط برابر همان فرکانس تشدید (ω_0) است وجالب‌تر این که پهنای باند برابر 2α است یعنی:

$$B.W. = 2\alpha \qquad (۴۶۳$$

که البته به خاطر داریم برای بدست آوردن ω_0 و 2α می‌توان به معادله‌ی دیفرانسیل مدار مراجعه کرد و در حالت خاص هم:

الف) مدار RLC سری

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{Lc}}\ ,\quad 2\alpha = \frac{r}{L} \qquad (۴۶۴$$

ب) مدار RLC موازی

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{Lc}} \quad , \quad 2\alpha=\frac{1}{rc} \qquad (۴۲۵$$

پس نسخه‌ی مدار مرتبه (۲) هم به خوبی پیچیده شد.

برای فرکانس قطع بالا و پایین چه بگوییم؟

معلوم است دیگر:

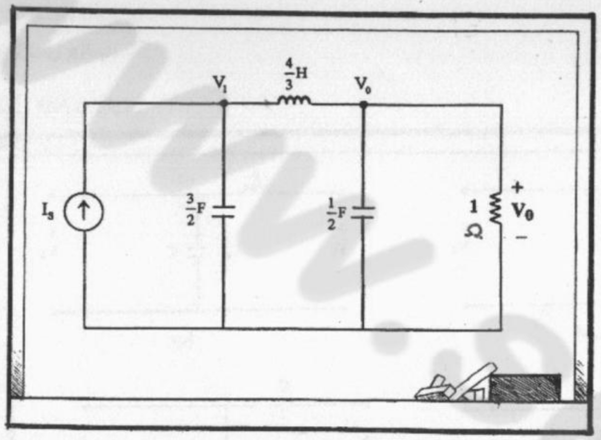
$$\omega_L=\omega_0-\alpha=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{Lc}}-\dfrac{r}{2L} & \text{سری RLC}\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{Lc}}-\dfrac{1}{2rc} & \text{موازی RLC}\end{cases} \qquad (۴۲۶$$

و برای ω_H همین روابط منتهی با علامت + برقرار است.

قبل اتمام بحث بگوییم که رابطه زیر را به خاطر داشته باشید:

$$B.W.=\frac{\omega_0}{\Delta\omega}=\frac{f_0}{\Delta f} \qquad (۴۲۷$$

۶۵: در مدار تابع شبکه $H(j\omega)=\frac{V_o}{I_s}$ را پیدا نموده و رفتار فیلتری آن را مشخص فرمائید.



شکل (۳۵۸): مدار تمرین ۶۵

اگر در گره‌های چپی و راستی KCL بزنیم:

$$\begin{cases} j\omega\,\frac{3}{2}V_1+\dfrac{1}{j\omega\,\frac{4}{3}}(V_1-V_0)=I_s & (۴۲۸\\[2ex] V_0+j\omega\,\frac{1}{2}V_0+\dfrac{1}{j\omega\,\frac{4}{3}}(V_0-V_1)=0 & (۴۲۹\end{cases}$$

با حل این دو معادله، دو مجهول می‌رسیم به:

$$H(j\omega)=\frac{V_o}{I_s}=\frac{1}{(1-2\omega^2)+j\omega(2-\omega^2)} \qquad (۴۳۰$$

* قسمت موهومی و حقیقی را جدا کردیم برای $|H(j\omega)|$

یعنی:

پس از ساده کردن

$$|H(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{(1-2\omega^2)^2+\omega^2(2-\omega^2)^2}}=\cdots=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^6}} \qquad (۴۳۱$$

پس این مدار یک فیلتر LPF شد که برای یافتن . B . W می‌گوییم:

$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \max |H(j\omega)|$

$$\text{Max}\left|H(j\omega)\right| = 1 \quad (۴۷۲$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\omega^6}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 1 \ \rightarrow \ \omega_C = 1 \quad (۴۷۳$$

یعنی:

$$\text{B.W.} = (0\ ,\ 1) \quad (۴۷۴$$

- پس دیدیم که مدار مرتبه‌ی سوم (و مدارهای مرتبه‌ی بالاتر) می‌توانند هر نوع فیلتری باشند.

هم خوب است و هم کافی، بگذارید بقیه هم، سایر توضیحات را مثل شما ! سر کلاس درس فیلتر بشنوند.

می‌خواستم با اجازه‌ی شما اشکالی را مطرح کنم که مدت‌هاست در ذهن من است.

ببینید در همین مدار شکل ۲۵۸) که فرمودید یک مدار عملی هم هست، پهنای باند خیلی غیرمفید شد! آخر چه مداری در فرکانس $1\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ کار می‌کند؟ مدارهای واقعی مثلاً در فرکانس‌های کیلو و مگا و گیگا هرتز کار می‌کنند.

پس یک همچین مداری به هیچ دردی نمی‌خورد؟

عجب سؤال جانانه‌ای بود !

آفرین، سؤال خوب، کلاس را به وَجد می‌آورد.

راست می‌گویی اگر شما در کتاب‌های دستی[1] هم نگاه کنید، مقیاس‌های غیر عملی دارند، اما این وظیفه مهندس است که **تغییر مقیاس فرکانس** بدهد.

اگر گفتید که برای این کار باید چه بلایی بر سر عناصر شبکه آورد؟

مقاومت که هیچ، دست بهش نمی‌زنیم. چرا که رفتارش در فرکانس‌های مختلف فرقی ندارد.

در مورد سلف و خازن هم اجازه بدهید کمی فکر کنم.

راهنمایی می‌کنم، ببینید می‌خواهم رفتارشان از فرکانس ω (قدیم) به فرکانس Ω (جدید) منتقل گردد.

۱ ـ Hand book

یعنی مثلاً $j\omega L_{\text{قدیم}}$ برابر $j\Omega L_{\text{جدید}}$ شود، پس:

$$L_{\text{جدید}} = \frac{\omega}{\Omega} \times L_{\text{قدیم}} \quad (۴۷۵$$

و به طریق مشابه

$$C_{\text{جدید}} = \frac{\omega}{\Omega} \times C_{\text{قدیم}} \quad (۴۷۶$$

همه‌ی دوستان دیدید که این دانشجوی عزیز چقدر فی‌البداهه جواب‌های قشنگی داد، این هم اثر تشویق است ! و یادتان باشد بهترین مشوق هر کسی[1] ...

خوب پس اگر در همین مدار بخواهم عرض باند به جای (1 و 0) تبدیل به (10^6 و 0) گردد، باید:

من می‌گویم:

$$R \ : \ 1\Omega \rightarrow 1\Omega \quad (۴۷۷$$

$$C \ : \ \frac{3}{2}\text{F} \rightarrow \frac{3}{2} \times \frac{1}{10^6} = 1.5\ \mu\text{F} \quad (۴۷۸$$

$$C \ : \ \frac{1}{2}\text{F} \rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{10^6} = 0.5\ \mu\text{F} \quad (۴۷۹$$

$$L \ : \ \frac{4}{3}\text{H} \rightarrow \frac{4}{3} \times \frac{1}{10^6} = 1.33\ \mu\text{H} \quad (۴۸۰$$

۲ ـ شرمنده که ادامه نمی‌دهم ولی دوست ندارم به سرعت نظرم را بشنوید. خودتان کمی فکر کنید بعداً در موردش با هم گفتگو خواهیم کرد.

خوب است. همین‌جا یک موضوع دیگر را سریع بگوییم، دوستان من ببینید حالا اگر بخواهیم سطح امپدانس یک مدار، K برابر شود، باید که:

$$R_{\text{جدید}} = R_{\text{قدیم}} \times K \quad (۴۸۱$$

$$L_{\text{جدید}} = L_{\text{قدیم}} \times K \quad (۴۸۲$$

$$C_{\text{جدید}} = C_{\text{قدیم}} \times \frac{1}{K} \quad (۴۸۳$$

و این موضوع هم در کارهای عملی بسیار مفید است.

از بحث فیلتر هم می‌گذریم؛ البته هنگام گفتگو در مورد تبدیل لاپلاس و تابع شبکه مجدداً یک رجعتی به بحث فیلترها خواهیم داشت.

توان در حالت سینوسی:

موضوع بسیار ساده است، می‌دانیم که توان لحظه‌ای برابر است با:

$$P(t) = V(t) \cdot i(t) \quad (۴۸۴$$

و اگر فرض کنیم:

$$V(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (۴۸۵$$

و

$$i(t) = I_m \cos(\omega t) \quad (۴۸۶$$

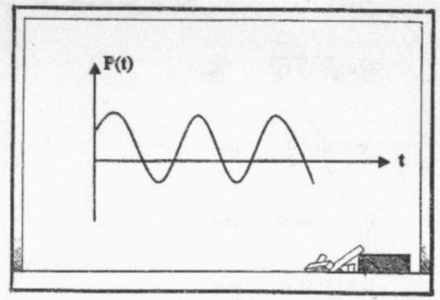
آنگاه داریم:

$$P(t) = \frac{1}{2} V_m I_m (\cos\varphi - \cos(2\omega t + \varphi)) \quad (۴۸۷$$

شما از رابطه‌ی ۴۸۷) چه نتایجی می‌گیرید؟

فرکانس توان لحظه‌ای، ۲ برابر فرکانس ولتاژ یا جریان است.

توان لحظه‌ای می‌تواند مثبت یا منفی یا صفر باشد.



شکل (۲۵۹): توان لحظه‌ای در حالت دائمی سینوسی

اما مقدار متوسط یا d c آن همیشه مثبت است.

$$P_{av} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos\varphi \qquad (۴۸۸$$

البته این موضوع شرط دارد؛ برای مثبت بودن P_{av} باید:

$$\cos\varphi \geq 0 \ \rightarrow \ -90^\circ \leq \varphi \leq +90^\circ \qquad (۴۸۹$$

یعنی نوک بردار امپدانس در ربع اول یا چهارم باشد، یعنی مدار

پسیو

باشد. پس به این بهانه تعریف مدار پسیو یا عناصر پسیو را هم گفتیم که باید $Re(z) \geq 0$ یا $-90^\circ \leq \varphi \leq +90^\circ$، ضمناً یک تعریف دیگر را هم بگوییم:

ضریب توان: برابر است با $\cos\varphi$ و واضح است که برای عناصر مختلف مداری اینگونه است:

مدار مقاومتي خالص یا تشدید : $\varphi = 0 \ \rightarrow \ \cos\varphi = 1$[1] (۴۹۰

مدار سلفي خالص : $\varphi = +90^\circ \ \rightarrow \ \cos\varphi = 0$ (۴۹۱

1ـ پس یک ترجمه دیگر برای تشدید این شد که «ضریب توان ماکزیمم است.»

مدار خازني خالص : $\varphi = -90^\circ \ \rightarrow \ \cos\varphi = 0$ (۴۹۲

مدار مقاومتي سلفي : $0 \leq \varphi < 90^\circ \ \rightarrow \ 0 < \cos\varphi < 1$ (۴۹۳

مدار مقاومتي خازني : $-90^\circ < \varphi < 0 \ \rightarrow \ 0 < \cos\varphi < 1$ (۴۹۴

هر مدار شامل عناصر پسیو : $-90^\circ < \varphi < +90^\circ \ \rightarrow \ 0 < \cos\varphi \leq 1$ (۴۹۵

حال توجه کنید: در درس آنالیز حالت دائمی سینوسی، همه چیز بصورت **مختلط** بود و **فازور** آن را لحاظ کردیم؛ در مورد توان هم، همین‌طور است.

توان مختلط: از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$S = \frac{1}{2} V \times I^* \qquad (۴۹۶$$

که منظور از I^* همان مزدوج جریان I است.

در بیانی دیگر بصورت فازوری:

$$S = \frac{1}{2} V_m I_m \measuredangle \varphi \qquad (۴۹۷$$

یعنی توان مختلط یک بردار است با اندازهٔ $\frac{1}{2} V_m I_m$ و فاز φ در رابطه‌ی ۴۹۷) یک چیز خیلی جلب توجه می‌کند، اگر گفتید چه چیزی؟

حتماً عدد $\frac{1}{2}$ را می‌گویید؟

نه منظورم این نبود ولی حرف بدی هم نزدی، یادتان باشد که در فرمول‌های توان در حالت دائمی سینوسی هرگاه ولتاژ و جریان برحسب مقادیر ماکزیمم باشند، (V_m , I_m) سر و کله ی این عدد $\frac{1}{2}$ پیدا می‌شود و هرگاه مقادیر مؤثر ظاهر شوند (V_e , I_e) دیگر خبری از $\frac{1}{2}$ نیست.

پس منظورتان از چیز مهم φ است.

بلی، ولی می‌دانید چرا مهم است؟

یعنی فازور امپدانس Z و فازور توان مختلط S با یکدیگر همفاز هستند. و این خیلی جالب است.

حالا یک‌جور دیگر به توان مختلط نگاه کنید.

$$S^{VA} = \underbrace{P^{W}}_{P_{Av}} + jQ^{VAR} = \frac{1}{2}V_m I_m \cos\varphi + j\frac{1}{2}V_m I_m \sin\varphi \qquad (۴۹۸$$

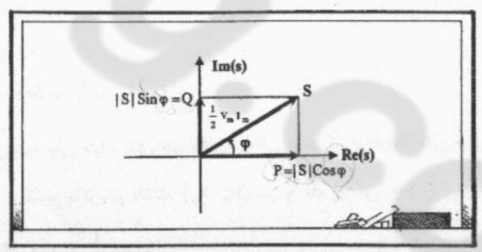
P را توان **متوسط** (p_{av}) یا حقیقی یا **اکتیو** یا مصرفی یا واته یا ... می‌گوییم و برحسب وات (W) است.

Q را توان مجازی یا راکتیو یا دواته و ... گفته و برحسب ولت آمپر راکتیو (VAR) است.

و اندازه‌ی توان مختلط (S) را **توان ظاهری** می‌گوییم.

$$\text{توان ظاهری} = |S| = \frac{1}{2} V_m I_m = V_e I_e \qquad (۴۹۹$$

به شکل (۲۶۰) به دقت خیره شوید:



شکل (۲۶۰): توان مختلط و اجزای آن در حالت دائمی سینوسی

یک عالمه حرف در این شکل هست؛ مثل این‌که:

$$|S| = \sqrt{P^2 + Q^2} \qquad (۵۰۰$$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{Q}{P} \qquad (۵۰۱$$

$$P = |S|\cos\varphi \qquad (۵۰۲$$

$$Q = |S|\sin\varphi \qquad (۵۰۳$$

و این که در مدارهای خازنی:

$$Q < 0 \qquad (۵۰۴$$

و در مدارهای سلفی

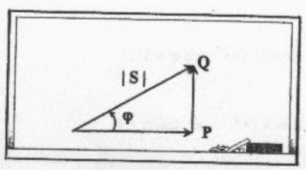
$$Q > 0 \qquad (۵۰۵$$

اما در هر صورت در مدارهای پسیو:

$$P_{av} \quad \text{یا} \quad P \geq 0 \qquad (۵۰۶$$

این حرف‌ها را به تفصیل در درس ماشین تحت عنوان چه مبحثی خوانده‌اید؟

مثلث توان

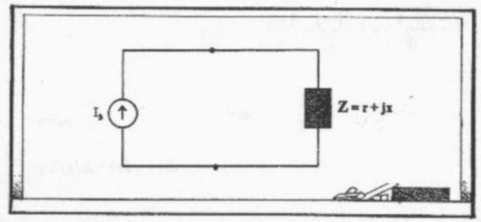


شکل (۲۶۱): مثلث توان

مثلاً از این شکل پیداست که (۵۰۷

$$\text{ضریب توان} = \cos\varphi = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{\text{توان حقیقی}}{\text{توان ظاهری}}$$

از توان حرف خاص دیگری نداریم، فقط به این روابط که در سرعت بخشیدن به حل مسایل مفید است؛ دقت کنید: اگر یک مداری را به این صورت مدل کنیم؛



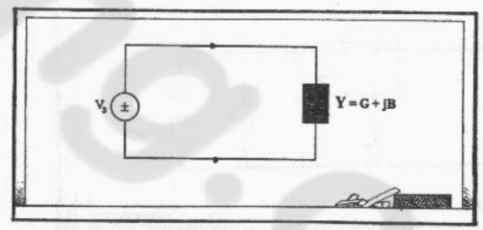
شکل (۲۶۲): یک مدل ساده برای یک مدار

آن‌گاه:

$$\begin{cases} P=P_{av}=\frac{1}{2}r\left|I_S\right|^2=\frac{1}{2}rI_m^2=rI_e^2 \quad (W) & (۵۰۸ \\ Q=\frac{1}{2}X\left|I_s\right|^2=\frac{1}{2}XI_m{}^2=XI_e^2 \quad (VAR) & (۵۰۹ \end{cases}$$

و آن‌گاه با داشتن P و Q هر پارامتر دیگری مشخص و معلوم است.

و یا در حالت دیگر (دوگان آن):



شکل (۲۶۳): مدلی دیگر برای یک مدار

آن‌گاه:

$$\begin{cases} P=P_{av}=\frac{1}{2}G\left|V_s\right|^2=\frac{1}{2}GV_m^2=GV_e^2 \quad (W) & (۵۱۰ \\ Q=\frac{-1}{2}B\left|V_s\right|^2=\frac{-1}{2}BV_m^2=-BV_e^2 \quad (VAR) & (۵۱۱ \end{cases}$$

یعنی سعی کنید مدار را در ابتدا به یکی از شکل‌های (۲۶۲) یا (۲۶۳) در بیاورید؛ آن‌گاه به سادگی به کمک روابط (۴۴۹) تا (۴۵۲) هرچه خواستید را حساب کنید. (این راه خوبی است) و اما قضیه‌ی جمع آثار در مورد توان: چه حدسی می‌زنید؟

جمع آثار در مورد توان‌های لحظه‌ای برقرار نمی‌باشد.

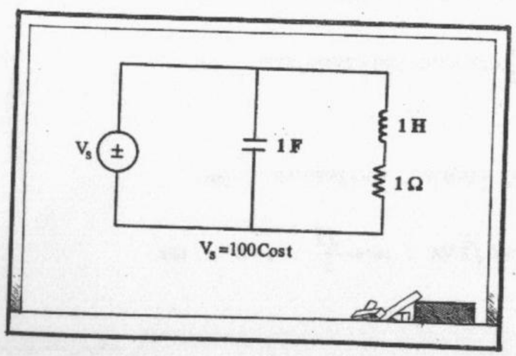
در مورد توان‌های متوسط به شرط غیر هم فرکانس بودن سیگنال‌ها $(\omega_1 \neq \omega_2)$ جمع آثار برقرار است.

اصلاح یا تصحیح ضریب توان شبکه:

نمی‌دانم تا به حال دقت کرده‌اید یا نه؟ ولی عمده وسایل خانگی و کارخانگی! پر است از سیم‌پیچ، یعنی $\varphi \to 90^\circ$، به عبارت دیگر $\cos\varphi \to 0$ یعنی توان اکتیو به سمت صفر می‌رود و این خیلی نامطلوب است.

واضح است که هرچه S به P_{av} متمایل‌تر باشد، $(\cos\varphi \to 1)$ مقدار کار مفید انتقالی به بار بیشتر است و چون معمولاً این لوازم القایی‌اند، معمولاً یک خازن را با بار موازی می‌کنند تا ضریب توان افزایش یابد و (در حالت ایده‌آل، در جستجوی تشدید هستیم.)

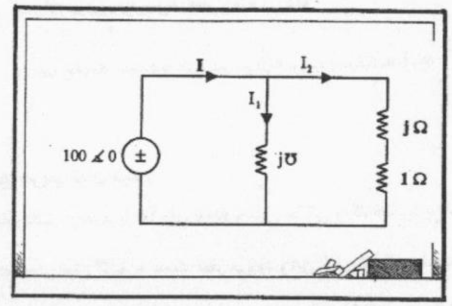
۶۶: توان مختلط، موهومی و حقیقی را پیدا کنید.



شکل (۲۶۴): مدار تمرین ۲۲

برای ممارست[7]، این تمرین را از دو راه حل می‌کنیم، ابتدا با رابطه‌ی ۴۹۶ :

من شروع می‌کنم، می‌دانیم $\omega = 1$ ، به کمک آن عینک مأنوس!



شکل (۲۶۵): مراحل حل تمرین ۶۶

هم اینک ما فقط I را می‌خواهیم:

$$I_1 = j \times 100 \qquad (۵۱۲)$$

$$I_2 = \frac{1}{1+j} \times 100 = 50(1-j) = 50 - 50j \qquad (۵۱۳)$$

$$I = I_1 + I_2 = j100 + 50 - j50 = 50 + 50j \qquad (۵۱۴)$$

و بالاخره:

$$S = \frac{1}{2} \times 100 \times (50 + j50) = 2500 + j2500 \qquad (۵۱۵)$$

یعنی:

$$P_{av} = 2500\,\text{W} \quad , \quad Q = +2500\,\text{VAR} \qquad (۵۱۶)$$

$$|S| = 2500\sqrt{2}\ \text{VA} \quad , \quad \cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad \varphi = 45^\circ \qquad (۵۱۷)$$

۷ ـ که البته امر بسیار مقدسی می‌باشد.

و حالا به کمک شکل (۲۶۳)

به کمک شکل (۲۶۵)

$$Y = j + \frac{1}{1+j} = j + \frac{1-j}{2} = \frac{1+j}{2} \qquad (۵۱۸)$$

یعنی:

$$G = \frac{1}{2} \quad , \quad B = \frac{1}{2} \qquad (۵۱۹)$$

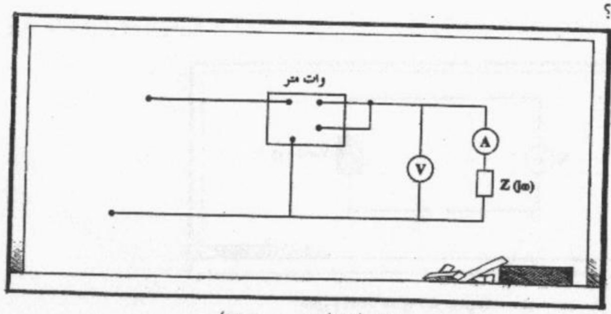
و با روابط (۵۱۰) و (۵۱۱)

$$P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 10000 = 2500\,\text{W} \qquad (۵۲۰)$$

$$Q = \frac{+1}{2} \times \frac{1}{2} \times 10000 = +2500\,\text{VAR} \qquad (۵۲۱)$$

یعنی همان نتایج قبلی ...

در مدار شکل (۲۶۶) آمپرمتر مقدار 10 آمپر، ولت متر، مقدار 130 ولت و واتمتر 500 وات را نشان می‌دهند. $Z(j\omega)$ چقدر است؟



شکل (۲۶۶): مدار تمرین ۷۷

این که خیلی راحت است.

$$P = rI_e^2 \rightarrow r = \frac{500}{100} = 5\Omega \qquad (۵۲۲$$

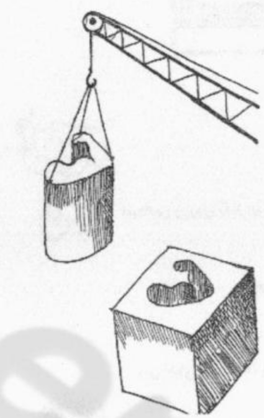
$$|Z| = \frac{V_e}{I_e} \rightarrow |Z| = 13\Omega \qquad (۵۲۳$$

$$|Z| = \sqrt{r^2 + X^2} \rightarrow X = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12\Omega \qquad (۵۲۴$$

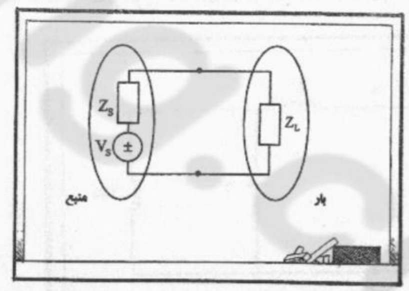
$$Z = r \pm jX = 5 \pm j12\ \Omega \qquad (۵۲۵$$

راستی یادتان باشد که دستگاه‌های اندازه‌گیری، مقادیر مؤثر را نشان می‌دهند.

قضیه‌ی انتقال توان ماکزیمم یا مچینگ:



آیا مفهوم این تیتر را خوب می‌فهمید؟



شکل (۳۲۷): اتصال منبع و بار (برای انتقال توان ماکزیمم)

معلوم است دیگر، یعنی آنکه بار و منبع چگونه باشند، تا بیشترین توان از منبع (source) به بار (Load) برسد.

بله دیگر ! خودمانیم‌ها؛ عجب سؤال ... پرسیدم !!

حالا پاسخ معما را می‌گویم؛ سه حالت دارد که با هم بررسی می‌کنیم:

حالت کلی: هم بار و هم منبع مختلط باشند، آن‌گاه شرط انتقال توان ماکزیمم عبارت است از:

$$Z_L = Z_S^* \qquad (۵۲۶$$

این رابطه از کجا آمده است؟

از درس حسابان سوم دبیرستان، بحث کاربرد مشتق! باید از رابطه‌ی توان نسبت به Z_L مشتق گرفته و مساوی صفر بگذاریم.

و آن‌گاه توان متوسط انتقالی ماکزیمم برابر است با:

$$P_{max} = \frac{1}{8}\frac{|V_S|^2}{R_L} \qquad (۵۲۷$$

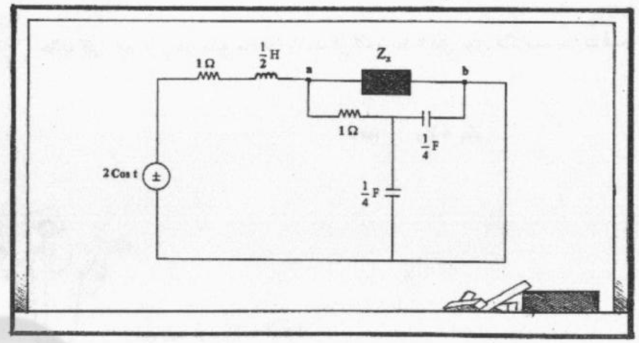
در حالت خیلی خاص! هم بار و هم منبع هر دو اهمی خالص باشند، در این صورت شرط به صورت زیر می‌شود:

$$R_L = R_S \qquad (۵۲۸$$

حالت یک ذره خاص: در این حالت بار اهمی است ولی منبع به صورت مختلط، شرط مچینگ بدین صورت می‌شود:

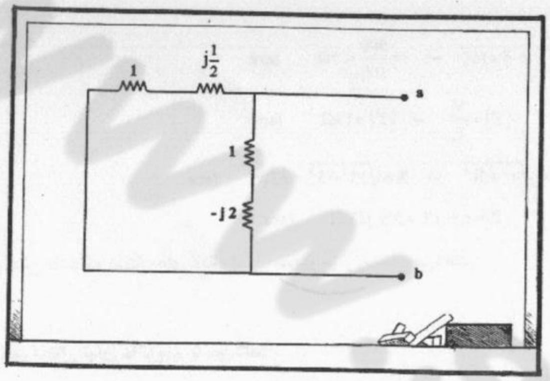
$$R_L = |Z_S| = \sqrt{R_S^2 + X_S^2} \qquad (۵۲۹$$

۶۸: در مدار شکل (۲۶۸) Z_x را طوری تعیین کنید که توان انتقالی به آن ماکزیمم باشد.



شکل (۲۶۸): مدار تمرین ۶۸

نمی‌دانم چرا طراح الکی مدار را پیچانده است. آن را مرتب می‌کنیم به جای دو خازن موازی، معادل آن‌ها را می‌گذاریم و به کمک عینک داریم:



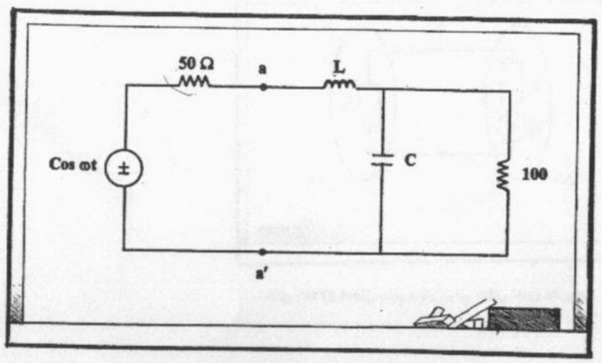
شکل (۲۶۹): مراحل حل تمرین ۶۸

امپدانس ورودی را از دو سر a و b می‌خواهیم؛ ما ادمیتانس را بدست می‌آوریم:

$$Y_{ab} = \frac{1}{1+j\frac{1}{2}} + \frac{1}{1-j2} = \frac{2(2-j)}{5} + \frac{1+j2}{5} = 1 \qquad (۵۳۰$$

پس خیلی جالب شد، یعنی باید $Z_x = 1$ باشد تا مچینگ صورت پذیرد.

۶۹: برای انتقال توان ماکزیمم به بار (قسمت سمت چپ aa') انتقال یابد، ωL و ωc چقدر باید باشند؟



شکل (۲۷۰): مدار تمرین ۶۹

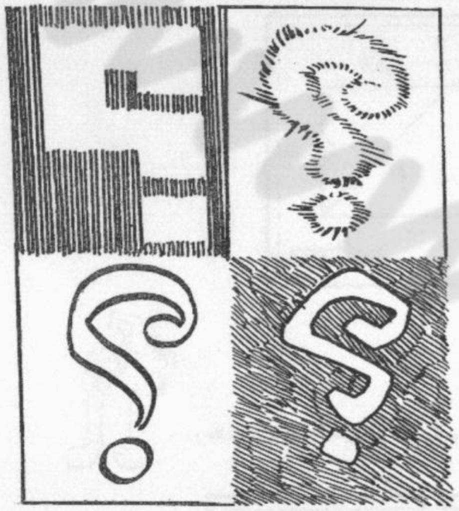
امپدانس بار را از دو سر aa' بدست می‌آوریم:

$$Z_L = j\omega L + \frac{1}{\frac{1}{100}+j\omega c} = \frac{0.01}{(0.01)^2+\omega^2 c^2} + j\left(\omega L - \frac{\omega c}{(0.01)^2+\omega^2 c^2}\right) \quad (۵۳۱$$

حالا دوست داریم قسمت موهومی برابر صفر و بخش حقیقی برابر 50 شود، یعنی:

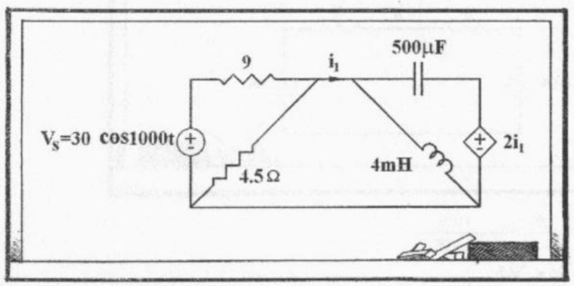
$$\frac{0.01}{(0.01)^2+\omega^2 c^2} = 50 \;\rightarrow\; \omega c = 0.01 \quad (۵۳۲$$

$$\omega L - \frac{\omega c}{(0.01)^2+\omega^2 c^2} = 0 \;\rightarrow\; \omega L = 50 \quad (۵۳۳$$



تمرینات فصل ششم

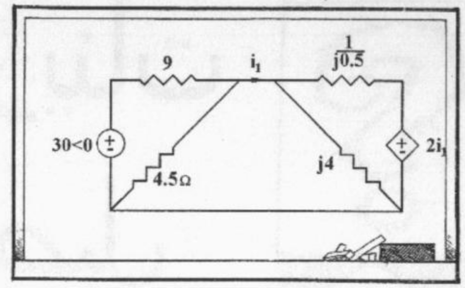
۱ـ در مدار شکل زیر $i_1(t)$ در حالت ماندگار کدام است؟



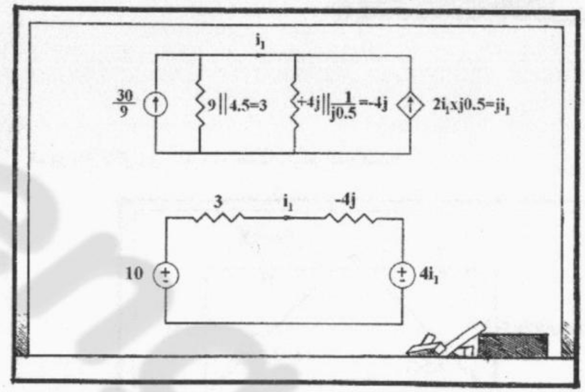
۱) $1.24\cos(1000t+29.7^\circ)$ ۲) $2.77\cos(1000t+56.3^\circ)$

۳) $1.24\sin(1000t+29.7^\circ)$ ۴) $2.77\sin(1000t+56.3^\circ)$

ابتدا همهٔ مقادیر را به فرم فازوری می‌نویسیم.



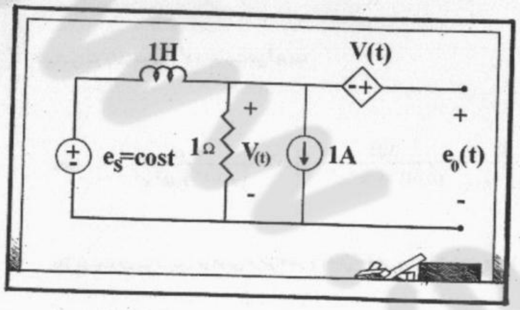
و حالا مثل مدارهای مقاومتی سابق حل می‌کنیم. مثلاً از تبدیلات متوالی تونن و نورتن بهره می‌گیریم.



$$-10+(3-4j)i_1+4i_1=0 \Rightarrow i_1=\frac{10}{7-4j}=\frac{10}{8.06<-29.7}$$
$$=1.24 < 29.7$$

پس گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

۲ـ مدار زیر در حالت دائمی است. $e_0(t)$ را تعیین کنید؟

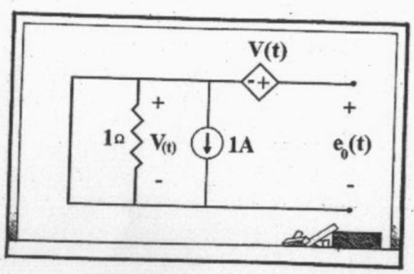


۱) $1-\sqrt{2}\cos t$
۲) $1+\sqrt{2}\cos(t+45^\circ)$
۳) $2\cos(t+45^\circ)$
۴) $\sqrt{2}\cos(t-45^\circ)$

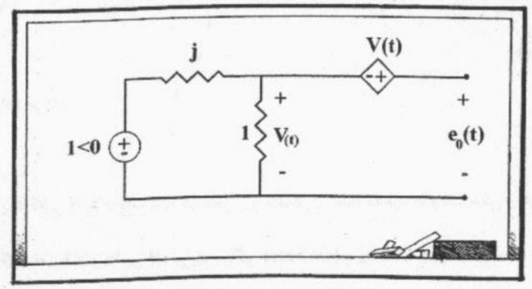
یادتون هست که ضمن درس گفتیم که منابع با فرکانس‌های مختلف باید جداگانه بررسی شود و در نهایت از جمع آثار استفاده کنیم.

بله ، پس اینجا هم اثر منبع DC و سینوسی را جدا بررسی می‌کنیم، ابتدا اثر منبع DC

و البته توجه داریم که مدار حالت دائمی است. پس سلف‌ها اتصال کوتاه و خازنها مدار باز هستند، پس :



$v(t)$ که دراین حالت صفر است پس $e_0(t)$ هم که $2V(t)$ است، برابر صفر می‌باشد. حال اثر منبع ولتاژ :



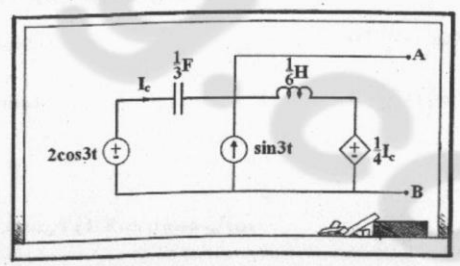
دراینجا $e_0(t)=2V(t)$ است.

$V(t)$ هم که از تقسیم جریان بین مقاومتهای سری بدست می‌آید:

$$V(t)=\frac{1}{1+j}\times 1=\frac{1}{1+j}=\frac{1}{\sqrt{2}\angle 45}\Rightarrow e_0(t)=\sqrt{2}<-45^\circ$$

پس گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

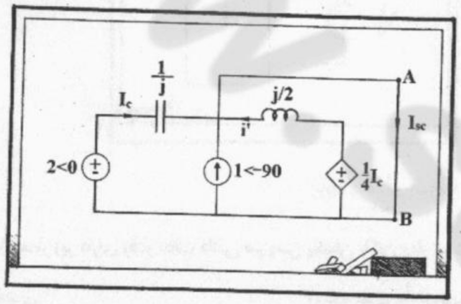
۳ـ در مدار شکل زیر اگر شاخهٔ AB اتصال کوتاه شود، جریان گذرنده از A به B کدام است؟



۱) $\sqrt{2}\cos(3t+45^\circ)$ ۲) $\sqrt{2}\cos(3t-45^\circ)$

۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(3t+45^\circ)$ ۴) $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(3t-45^\circ)$

ابتدا مدار را به حالت فازوری ببریم.



جریان I_C که به راحتی با یک KVL بدست می‌آید:

$$I_C=\frac{2}{\frac{1}{j}}=2j$$

و جریان $\frac{j}{2}$ هم با یک KVL براحتی بدست می‌آید:

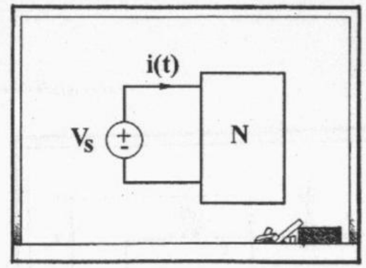
$$i'=\frac{\frac{1}{4}I_C}{\frac{j}{2}}=\frac{\frac{j}{2}}{\frac{j}{2}}=1$$

و حالا یک KCL کار را تمام می‌کند.

$$I_{SC}=I_C+i'+1\angle-90=2j+1-j=j+1=\sqrt{2}\angle 45^\circ$$

پس گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

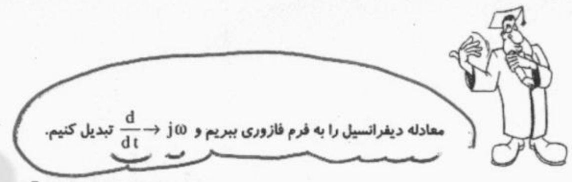
۴ـ معادله دیفرانسیل مدار شکل مقابل برای ورودی $V(t)$ و خروجی $i(t)$ بصورت زیر است:



$$\frac{d^4 i}{dt^4}+10\frac{d^3 i}{dt^3}+40\frac{d^2 i}{dt^2}+60\frac{di}{dt}+784i=10\frac{dv_s}{dt}+40v_s$$

در فرکانس $\omega=4$ کدام مدار زیر دارای رفتار حالت دائمی سینوسی یکسان با این مدار است.

۱) یک سلف $\frac{1}{40}$ هانری
۲) یک خازن $\frac{1}{40}$ فارادی
۳) اتصال سری یک مقاومت و یک خازن
۴) اتصال سری یک مقاومت و یک سلف



$$\left[(j\omega)^4+10(j\omega)^3+40(j\omega)^2+60j\omega+784\right]I=\left[10j\omega+40\right]V_s$$

و به‌جای ω هم 4 بگذاریم، پس داریم:

$$\frac{I}{V_s}=\frac{1+j}{10(1-j)}=\frac{\sqrt{2}\angle 45}{10\sqrt{2}\angle -45}=\frac{1}{10}\angle 90^\circ=\frac{1}{10}j$$

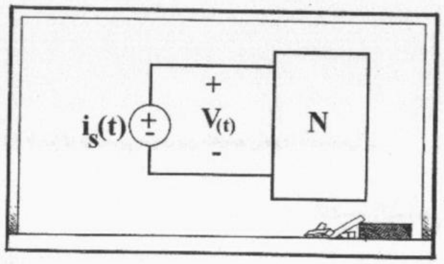
از V مشتق گرفته‌ایم و I را بدست آورده‌ایم ، پس خازن داشته‌ایم، ولی مقدار خازن ؟!

مشتق یعنی $j\omega$:

$$\frac{I}{V_S}=\frac{1}{10}\cdot\frac{j\times 4}{4}=\frac{1}{40}j\omega\Rightarrow C=\frac{1}{40}$$

پس گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

۵ـ یک قطبی N نشان داده شده در شکل زیر متشکل از تعداد دلخواه مقاومت خطی و تغییر ناپذیر با زمان و تنها یک خازن با ظرفیت 1F و یک سلف با اندوکتانس 1H می‌باشد، اگر $i_s(t)=5\cos t$ را اعمال کنیم، ولتاژ حالت دائمی $V(t)=3\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$ بدست می‌آید.



اکنون جای سلف و خازن را با یکدیگر تعویض نموده و در مدار جدید، ورودی $i_s(t)=3\cos\left(t+\frac{\pi}{8}\right)$ را اعمال می‌کنیم. پاسخ حالت دائمی $V(t)$ در این صورت برابر است با:

۱) $1.8\cos\left(t-\frac{\pi}{8}\right)$
۲) $1.8\sin\left(t+\frac{3\pi}{8}\right)$
۳) $1.8\sin\left(t-\frac{\pi}{8}\right)$
۴) $1.8\cos\left(t+\frac{3\pi}{8}\right)$

با داشتن V و I ، Z مدار را بدست می‌آوریم :

$$Z(j\omega)=\frac{V(j\omega)}{I(j\omega)}=\frac{3<\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}}{5<0}=\frac{3}{5}<-\frac{\pi}{4}$$

در قسمت بعد جای سلف‌ها و خازنها عوض شده است.

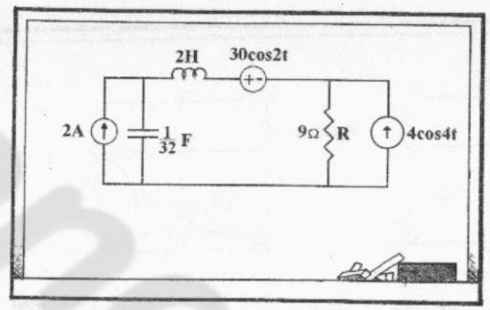
یعنی $j \leftrightarrow -j$ ، پس فقط زاویه Z عوض می‌شود، یعنی :

$$Z_{new}(j\omega)=\frac{3}{5}<+\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow V=ZI=\frac{3}{5}<+\frac{\pi}{4}\times 3<\frac{\pi}{8}=1.8<3\frac{\pi}{8}$$

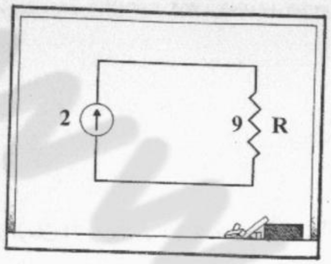
پس گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

۶ـ توان متوسط تحویل داده شده به مقاومت R در حالت دائمی در شبکه شکل زیر چقدر است؟



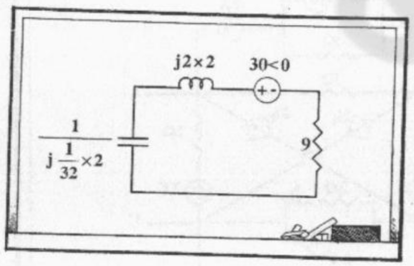
۱) 54 w ۲) 36 w ۳) 18 w ۴) 72 w

توان متوسط مقاومت را بر اثر هر یک از منابع بدست می‌آوریم و در نهایت جمع می‌کنیم. در حالت دائمی برای منبع 2A داریم :



$$P=RI^2=9(2)^2=36\ \text{Wat}$$

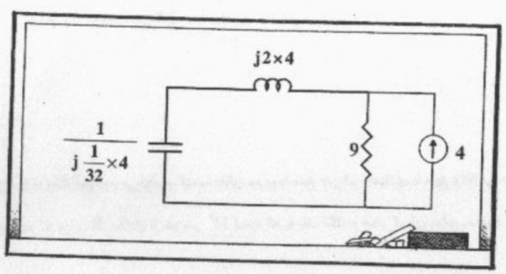
و برای منبع 30 cos 2t داریم :



$$V=\frac{9}{9+j4-16j}\times 30=18<+53$$

$$\Rightarrow P=\frac{V^2}{R}=\frac{(18)^2}{9}=36$$

نه فراموش کردید که برای منابع سینوسی توان ضریب $\frac{1}{2}$ دارد : $P=\frac{1}{2}\frac{V^2}{R}=18$ Wat و برای منبع 4 cos 4 t داریم :

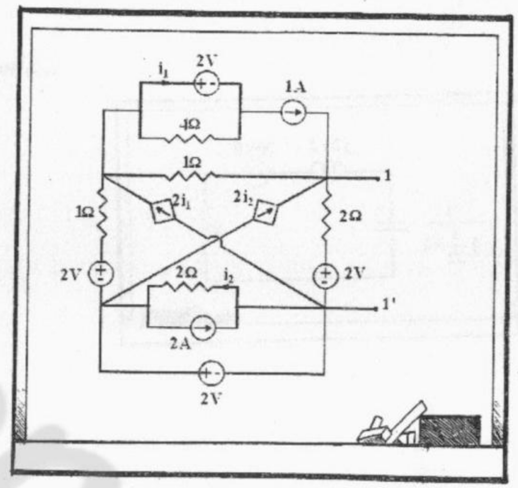


جالبه در این فرکانس تشدید رخ داده است و سلف و خازن اتصال کوتاه می‌شوند، پس همه جریان 4 A وارد این شاخه می‌شود و توان مقاومت صفر است.

$\Rightarrow P=36+18+0=54$ Wat

پس گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

۷ـ توان ماکزیمم که از سرهای $11'$ بر روی بار تطبیق شده می‌توان بدست آورد، برابر است با :



۱) 9 w ۲) 4 w ۳) 1 w ۴) $\frac{1}{4}$ w

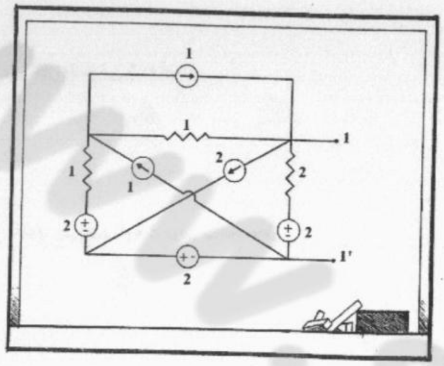
i_2 و i_1 که به راحتی قابل محاسبه هستند : پس :

$$i_2=\frac{-2}{2}=-1\text{ A}$$

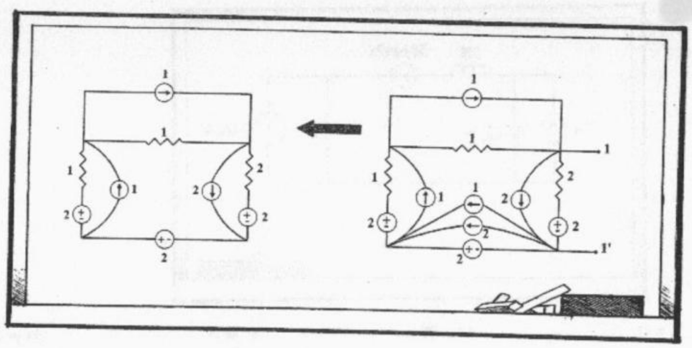
$$i_1=1-\frac{2}{4}=0.5\text{ A}$$

حالا که i_1 و i_2 را بدست آوردیم می‌توانیم، قسمت‌های سری با منبع جریان و موازی با منبع ولتاژ را حذف کنیم.

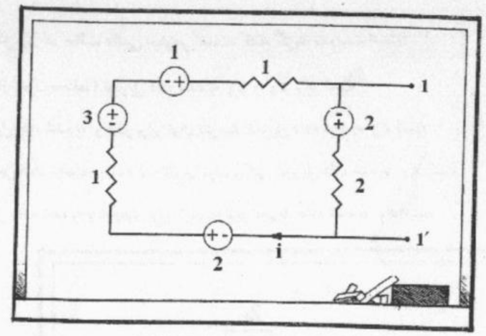
مقدار بار تطبیق شده که برابر R معادل از دو سر $11'$ است که با یک نگاه و صفر کردن منابع بدست می‌آید : $R=2\|2=1\,\Omega$ ولی توان ماکزیمم ؟!!



به نظر انتقال منابع کار را برای یافتن e_{oc} آسان می‌کند :



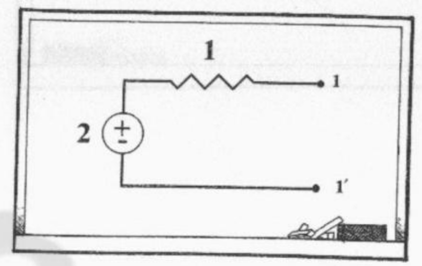
و چند بار از تبدیل تونن ـ نورتن استفاده کنیم.



$$i=\frac{8}{4}=2$$

$$\Rightarrow e_{oc}=-2+2\times2=2\,V$$

پس داریم :

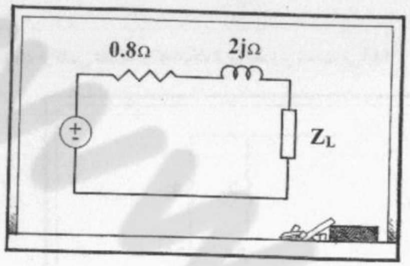


و برای انتقال توان ماکزیمم در بار یک مقاومت 1Ω باید قرار دهیم که ولتاژ $1V$ دو سر آن بار می‌افتد، پس :

$$P=\frac{V^2}{R}=\frac{(1)^2}{1}=1\,Wat$$

پس گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

۸ـ در شکل مقابل، امپدانس بار (Z_L) القایی و مقدارش ، 26Ω است و توان متوسط برابر $13kW$ جذب می‌کند. منبع ولتاژ سینوسی توان متوسط $13.5\ kW$ را به مدار تحویل می‌دهد. مقدار راکتانس القایی بار کدام است؟



۱) 15.6Ω
۲) 20.8Ω
۳) 26Ω
۴) بدلیل اطلاعات ناقص، نمی‌توان مشخص کرد.

توان متوسط در مقاومت 0.8 و بخش مقاومتی Z_L به مصرف رسیده است،

پس :

$$P_{R=0.8}=13.5k-13k=0.5kW$$

$$0.5=\frac{1}{2}\,0.8\,|I|^2$$

$$13.5=\frac{1}{2}\,(R+0.8)\,|I|^2$$

و از تقسیم دو رابطه‌ی بالا داریم :

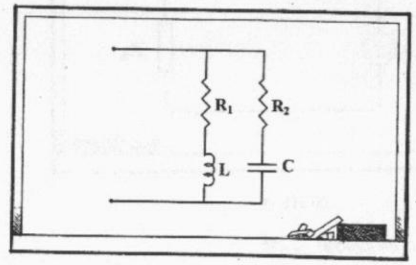
$$R=20.8$$

اندازه Z_L را هم داریم ، پس X بدست می‌آید :

$$X=\sqrt{(26)^2-(20.8)^2}=15.6$$

پس گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

۹ـ در مدار شکل مقابل، فرکانس تشدید از کدامیک از روابط زیر بدست می‌آید؟



۱) $f=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{L-CR_1^2}{L-CR_2^2}}$

۲) $f=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{L-CR_2^2}{L-CR_1^2}}$

۳) $f=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{C-LR_1^2}{L-CR_2^2}}$

۴) هیچکدام

در این‌جا از اتصال کوتاه کردن R ها و رد گزینه چون گزینه هیچکدام هم وجود دارد، نمی‌توان استفاده کرد.

پس قسمت موهومی امپدانس یا ادمیتانس را که فکر کنم در این مدار ادمیتانس راحت باشد را برابر صفر قرار دهیم.

$$Y=\frac{1}{R_1+jL\omega}+\frac{1}{R_2+\frac{1}{jC\omega}}=\frac{R_1-jL\omega}{R_1^2+(L\omega)^2}+\frac{R_2-\frac{1}{jC\omega}}{R_2^2+\left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

$$\operatorname{Im}Y=\frac{-L\omega}{R_1^2+(L\omega)^2}+\frac{\frac{1}{C\omega}}{R_2^2+\left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}=0 \;\Rightarrow\; \omega^2=\frac{1}{LC}\,\frac{L-CR_1^2}{L-CR_2^2}$$

پس گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

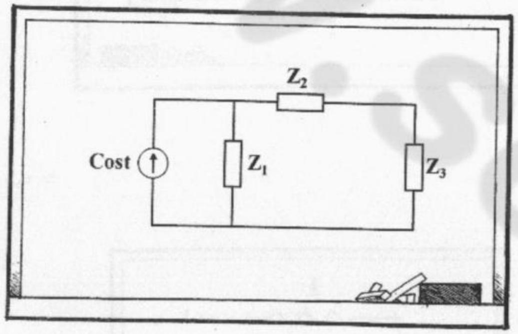
۱۰ـ مدار شکل زیر در حالت دائمی سینوسی است، کدام گزینه نادرست است؟

۱) توان ظاهری (اندازه توان مختلط) تحویل داده شده به z_2 و z_3 برابر است.

۲) توان متوسط تحویل داده شده به z_2 دو برابر توان متوسط تحویل داده شده به z_3 است.

۳) توان راکتیور تحویل داده شده به z_1، (2-) برابر توان راکتیو تحویل داده شده به z_2 است.

۴) توان راکتیو تحویل داده شده به z_3 چهار برابر توان راکتیو تحویل داده شده به z_1 است.



$$\begin{cases} z_1=0.3+j0.1\,\Omega \\ z_2=0.4-j0.2\,\Omega \\ z_3=0.2+j0.4\,\Omega \end{cases}$$

z_2 و z_3 ، جریان یکسانی دارند و $R_2=2R_3$ است پس توان متوسط z_2 دو برابر توان متوسط z_3 است و گزینه 2 صحیح است. و چون اندازهٔ z_2 و z_3 هم برابرند و جریان یکسانی هم دارند، پس توان ظاهری یکسانی دارند، پس گزینه ۱ هم صحیح است.

و برای بررسی گزینهٔ ۳ و ۴ باید جریان دو شاخه را بدست آوریم.

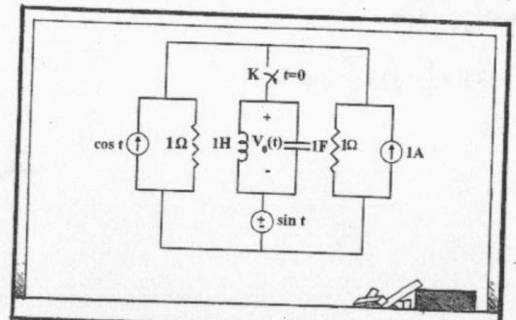
$$\left|I_{z_1}\right|=\left|\frac{z_2+z_3}{z_1+z_2+z_3}\right|=\frac{|0.6+j0.2|}{|0.9+j0.3|}=0.66$$

$$\left|I_{z_2,z_3}\right|=\left|\frac{z_1}{z_1+z_2+z_3}\right|=\frac{|0.3+j0.1|}{|0.9+j0.3|}=0.33$$

$\Rightarrow Q_1=\frac{1}{2}\times 0.1\times(0.66)^2=0.02$, $Q_2=\frac{1}{2}(-0.2)(0.33)^2=-0.01$, $Q_3=\frac{1}{2}(0.4)(0.33)^2=0.02$

پس گزینه ۴ فقط نادرست است.

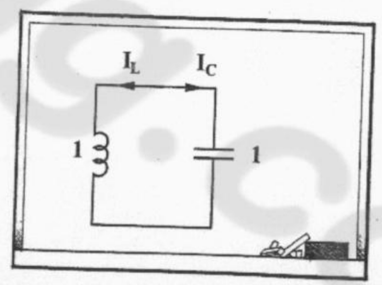
۱۱ـ در مدار شکل زیر کلید k به مدت طولانی بسته بوده تا مدار به حالت دائمی برسد، در لحظه $t=0$ کلید باز می‌شود. ولتاژ $v_0(t)$ برای $t\geq 0$ برابر کدام گزینه است؟



۱) $1.12\cos(t-63.43^\circ)$ ۲) $1.12\cos(t+63.43^\circ)$

۳) $2.06\cos(t+75.96^\circ)$ ۴) $2.06\cos(t-75.96^\circ)$

بعد از باز شدن کلید مدار به صورت زیر در می‌آید:



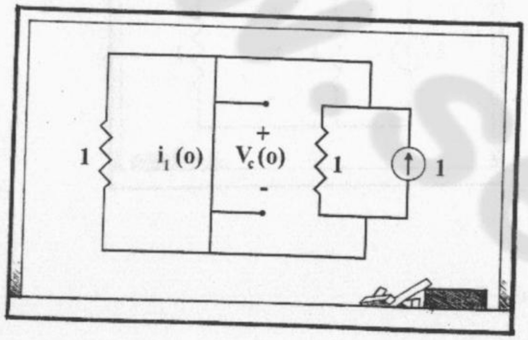
$I_C+I_L=0$

$\Rightarrow \frac{dv_C}{dt}+i_L(0)+\frac{1}{1}\int v_C dt=0$

$\Rightarrow \frac{d^2V_C}{dt^2}+V_C=0$

$\Rightarrow V_C(t)=A\sin t+B\cos t$

و برای بدست آوردن A و B شرایط اولیه، لازم داریم. $v'_C(0)=?$ و $v_C(0)=?$ ، $v'_C(t)$ همان $i_c(t)$ است و $i_c(0^+)=-i_L(0^+)$ است و $i_L(0^+)$ هم پیوستگی دارد، پس در زمان 0^- به دنبال v_c و i_L می‌گردیم. در اثر منبع جریان 1A داریم:

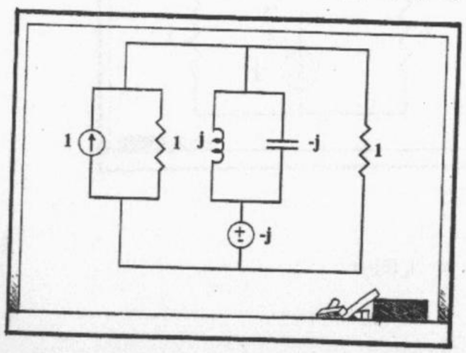


$i_L(0)=1$

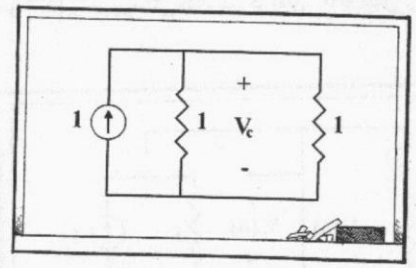
$v_c(0)=0$

و در اثر منابع با $\omega=1$ داریم:

سلف و خازن در حالت تشدید قرار دارند و مدار بازند.



به نظرم اگر دو منبع را جداگانه بررسی کنیم، محاسبات آسان‌تر باشد.

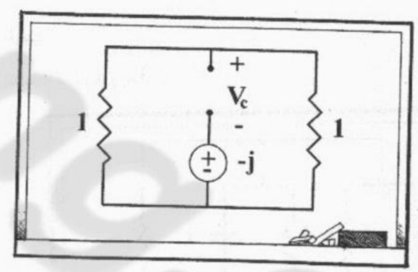


$$\Rightarrow v_c = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow i_c = \frac{cdv_c}{dt} = \frac{1}{2} j = \frac{-1}{2} \sin t$$

$$\Rightarrow i_c(0) = 0 \Rightarrow i_L(0) = 0$$

چون جریان عبوری از مقاومت‌ها صفر است:



$$v_c = j = -\sin t \Rightarrow v_c(0) = 0$$

$$i_c = \frac{cdv_c}{dt} = -\cos t \Rightarrow i_c(0) = -1 \quad \Rightarrow \quad i_L(0) = 1$$

و حالا $v_c(0)$ و $i_L(0)$ سه منبع را با یکدیگر جمع می‌کنیم:

$$v_c(0) = 0 + \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2} \quad , \quad i_L(0) = 1 + 0 + 1 = 2 \Rightarrow i_c(0) = v'(0) = -i_L(0) = -2$$

$$v_c(t)\Big|_{t=0} = (A \sin t + B \cos t)\Big|_{t=0} = B = \frac{1}{2}$$

$$v'_c(t)\Big|_{t=0} = (A \cos t - B \sin t)\Big|_{t=0} = A = -2$$

$$v_c(t) = -2 \sin t + \frac{1}{2} \cos t = +2j + \frac{1}{2} = \sqrt{4 + \frac{1}{4}} \angle tg^{-1} 4$$

$$= 2.06 \cos(t + 75.96^\circ)$$

پس گزینه ۳ صحیح می‌باشد.